

# 3

## ANÁLISIS SIMPLIFICADO DE VIGAS SUJETAS A CARGA VERTICAL

### 3.1. Hipótesis Simplificatoria de la Norma E-060

La norma peruana de concreto armado E-060, así como el reglamento norteamericano ACI, permiten analizar a las vigas de los edificios sujetas a carga vertical, suponiendo que los extremos lejanos de las columnas que concurren a la viga en estudio, están empotrados (Fig. 3.1); esto es, se supone que no existe repercusión de los giros entre los niveles consecutivos.

La hipótesis mencionada es correcta cuanto mayor sea la rigidez al giro de las columnas ( $K_i$ ) en relación con la rigidez de las vigas, ya que en ese caso, las vigas estarían prácticamente empotradas en las columnas y el efecto de las rotaciones sobre los esfuerzos sería despreciable.

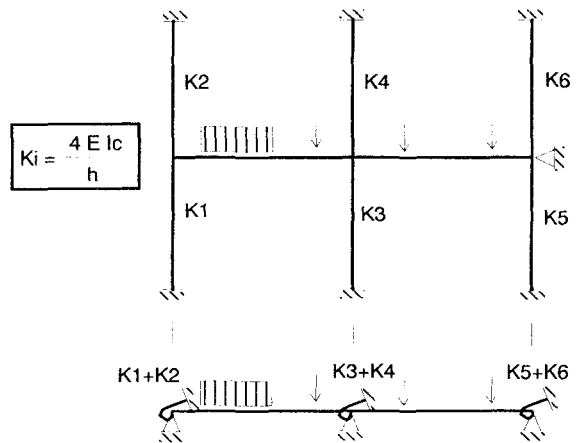


Fig. 3.1. Modelo Simplificado de una Viga.

También se admite que los pórticos no tienen desplazamiento lateral, o que los efectos de estos desplazamientos son despreciables. Esta hipótesis es cierta cuando el edificio es simétrico, o sino, cuando contiene una densidad adecuada de placas o muros de albañilería (elementos muy rígidos lateralmente) que limitan los desplazamientos horizontales; lo último puede explicarse por el hecho que los pórticos están conectados entre sí a través de la losa del techo (Fig. 3.2 y 3.3), la que se asume que actúa como una gran plancha axialmente rígida ("DIAFRAGMA RÍGIDO") que trata de compatibilizar los

desplazamientos laterales de los distintos ejes, por lo tanto, si uno de los ejes no se desplaza, el resto tampoco lo hará.

La hipótesis de Diafragma Rígido es válida cuando los techos son losas aligeradas o macizas, pero no es aplicable cuando el techo es metálico o de madera, en cuyo caso, los pórticos deben analizarse independientemente contemplando los desplazamientos laterales. Asimismo, debe indicarse que la hipótesis simplificatoria de la Norma E-060 es válida sólo cuando se analiza por carga vertical a los pórticos, ya que los muros se desplazan lateralmente cuando el edificio está sujeto a cargas horizontales.

En la Fig. 3.1 se aprecia que las columnas están descargadas, que no tienen desplazamiento relativo entre sus extremos y que mientras uno de sus extremos rota, el otro está empotrado, por lo que cumpliéndose estas tres condiciones (ver el acápite 2.9.3), las columnas podrán ser reemplazadas por resortes helicoidales, cuyas constantes son iguales a la suma de las rigideces al giro de las columnas que concurren al nudo respectivo, esto permite simplificar aún más el modelo matemático de las vigas.

### 3.1.1. Ejemplo de Aplicación

Resolver la viga del segundo nivel correspondiente al eje 2 del edificio cuyas plantas se muestran en la Fig. 3.2. Se supone que las cargas actuantes en el eje 2 han sido calculadas mediante un metrado previo. Se adoptará: Vigas de 30 x 60 cm, Columnas de 30 x 30 cm y  $K_0 = 225 \text{ cm}^3$ .

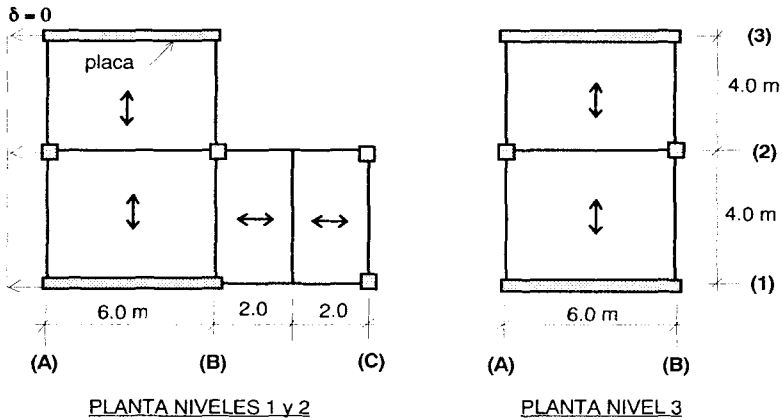


Fig. 3.2. Plantas del Edificio en Estudio por Carga Vertical.

En la Fig. 3.2 puede apreciarse que los ejes 1 y 3 tienen placas, por lo que ante la acción de las cargas verticales prácticamente no se desplazan lateralmente. De esta manera, puede asumirse  $\delta = 0$  en los ejes 1 y 3, pero, al estar conectado el eje 2 (a través de la losa del techo) con los ejes 1 y 3, no se desplazará horizontalmente, con lo cual, el modelo matemático del eje 2 será el mostrado en la Fig. 3.3.

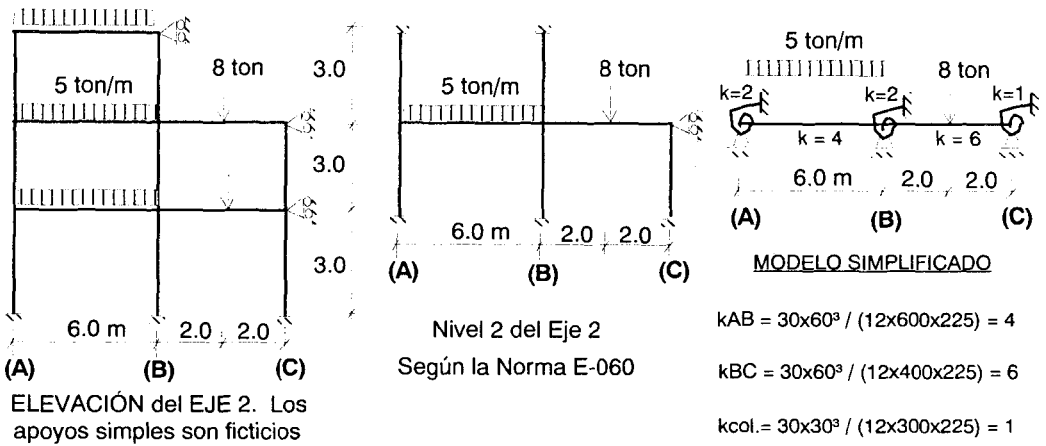


Fig. 3.3. Modelo Matemático de la Viga del Segundo Nivel. Eje 2 de la Fig. 3.2.

Momentos de empotramiento:  $u_{AB} = -u_{BA} = -5 \times 6^2 / 12 = -15 \text{ ton-m}$   
 $u_{BC} = -u_{CB} = -8 \times 4 / 8 = -4 \text{ ton-m}$

Luego, aplicando Cross (proceso de Liberación Alterná) se tiene:

Nudo	(A)	(B)	(C)
$\alpha_{ij}$	0.667    0.333	0.50    0.857	
$u_{ij}$	-15.00    15.00	-4.00    4.00	
	10.00 → 5.00 -2.38 ← -4.76	-1.71 → -3.43 -7.14 ← -3.57	
	1.59 → 0.79 -0.38 ← -0.77	1.53 → 3.06 -1.16 ← -0.58	
	0.25 → 0.12 -0.06 ← -0.12	0.25 → 0.50 -0.18 ← -0.09	
	0.04 → 0.02 -0.02	0.04 → 0.08 -0.03	
$M_{ij}$	-5.94    15.26	-12.40    -0.03	

*Nótese que las rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_C$  no pueden reducirse a cero, ya que se desconoce la magnitud de los momentos  $M_{AB}$  y  $M_{CB}$*

Para obtener el momento flector en las columnas, deberá repartirse el momento desequilibrado en los nudos proporcionalmente a las rigideces de las columnas que concurran al nudo en análisis. El diagrama de momento flector, así como el cálculo de los momentos en la columna central del segundo entrespacio, se muestran en la Fig. 3.4.

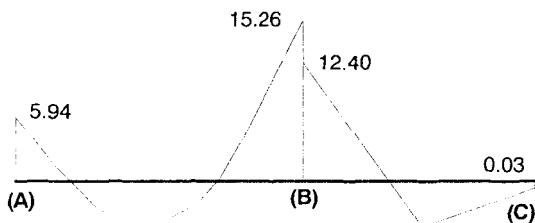
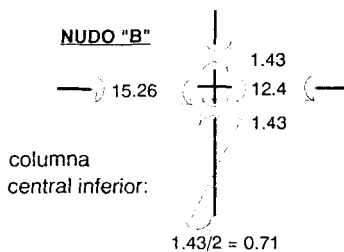


Fig 3.4. DMF (ton-m)



Nótese en la Fig. 3.4 que el momento en C-B es pequeño y se invierte de sentido, esto se debe a que: 1) la viga está prácticamente articulada en C, ya que ella es 6 veces más rígida que la columna; y, 2) la carga resultante en A-B (30 ton) es mayor a la que existe en B-C (8 ton), lo que genera inversión de momentos en C-B.

### 3.2. Máximos Momentos Flectores en Vigas de Edificios

En un edificio las sobrecargas (s/c) actúan en forma esporádica sobre sus ambientes (Fig. 3.5); es decir, un día el ambiente puede estar sobrecargado y al otro día descargado. Esta continua variación en la posición de la sobrecarga origina los máximos esfuerzos en los diversos elementos estructurales, que deben ser contemplados en el diseño.

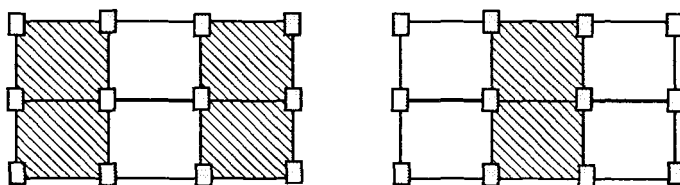


Fig. 3.5. Variación en la Posición de la S/C

#### a.- Máximo Momento Flector Positivo

Para determinar el máximo momento flector positivo debe buscarse que los extremos del tramo sobrecargado roten lo mayor posible, asimilando el tramo en análisis al caso de una viga simplemente apoyada (Fig. 3.6).

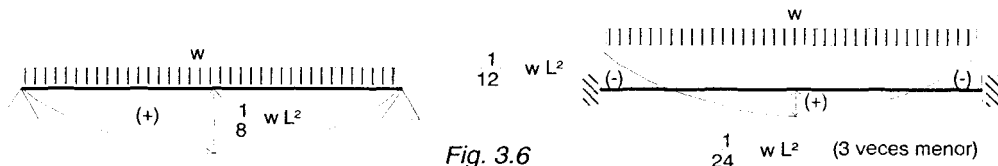


Fig. 3.6

Esta condición se logra sobrecargando en forma alternada los tramos. Para la viga que se muestra en la Fig. 3.7, los máximos momentos positivos en los tramos 1-2 y 3-4 se logran sobrecargando en forma simultánea dichos tramos y descargando al tramo central, ya

que si se hubiese sobrecargado también al tramo central, la deformada se aplastaría y las rotaciones de los nudos 2 y 3 decrecerían; cabe destacar que ante esa hipótesis de carga podría ocurrir inversiones de esfuerzos en la región central del tramo 2-3. En cambio, el máximo momento positivo en el tramo central (2-3) se obtiene sobrecargando sólo ese tramo y descargando los paños adyacentes.

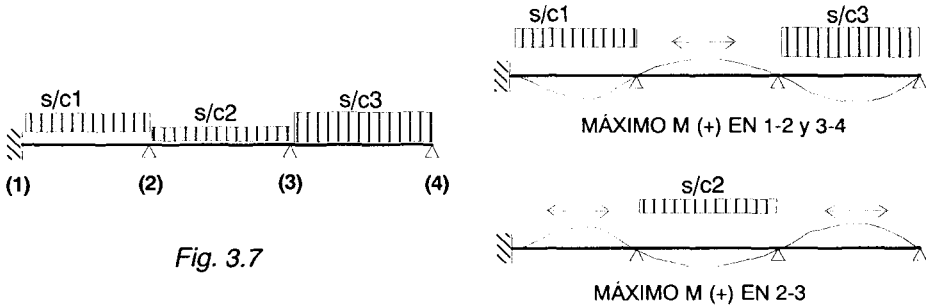


Fig. 3.7

Para el caso de los pórticos se sobrecarga con una disposición en forma de “damero”; aunque, para estos casos, puede emplearse el modelo simplificado de la Norma E-060 (Fig. 3.8). Cabe mencionar que cualquiera fuese el caso, se necesita resolver tan sólo dos hipótesis de carga para obtener los máximos momentos positivos en todas las vigas del pórtico.

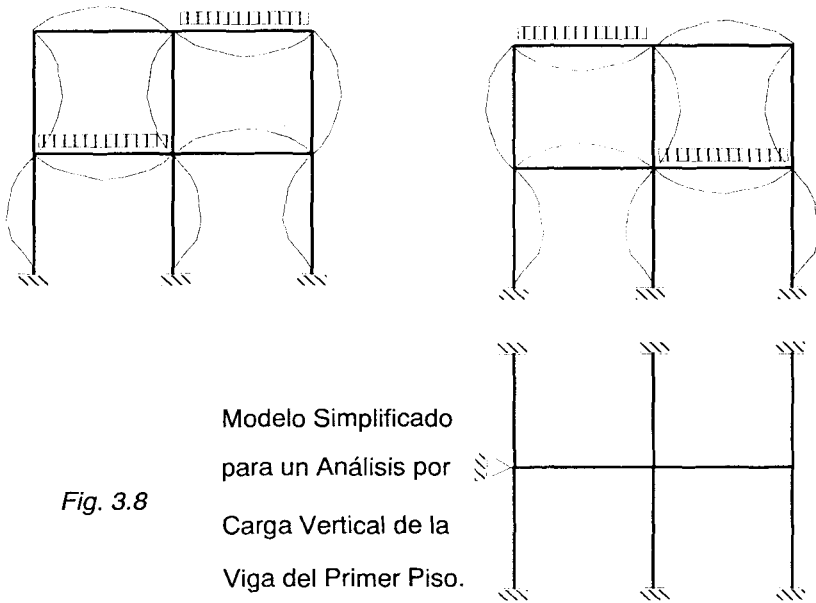


Fig. 3.8

Modelo Simplificado  
para un Análisis por  
Carga Vertical de la  
Viga del Primer Piso.

**b.- Máximo Momento Flector Negativo**

Si se desea obtener el máximo momento flector negativo en un nudo, debe tratarse que ese nudo rote la menor cantidad posible, mientras que el nudo opuesto tiene que rotar lo

mayor posible, tratando de asimilar el tramo sobrecargado al caso de una viga empotrada en el extremo en estudio y articulada en el otro (Fig. 3.9). Esta condición permite además calcular la máxima fuerza cortante en el nudo empotrado.

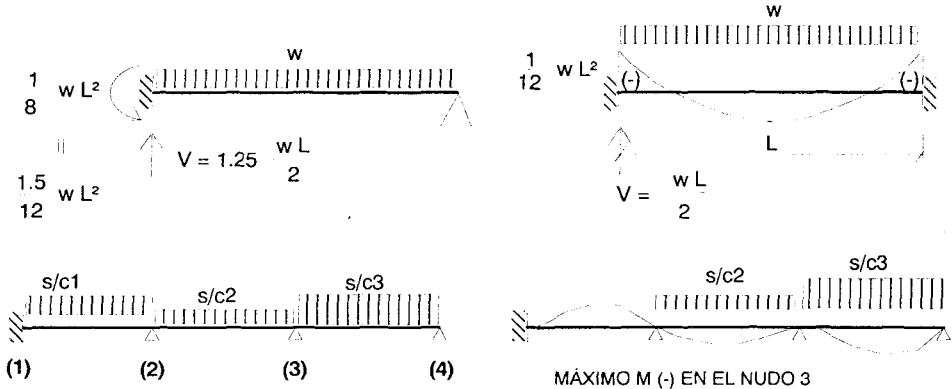


Fig. 3.9. Máximo Momento Flector Negativo.

Para las vigas que constan de muchos tramos, puede analizarse sólo los nudos de interés, adoptando modelos simplificados como los mostrados en la Fig. 3.10.

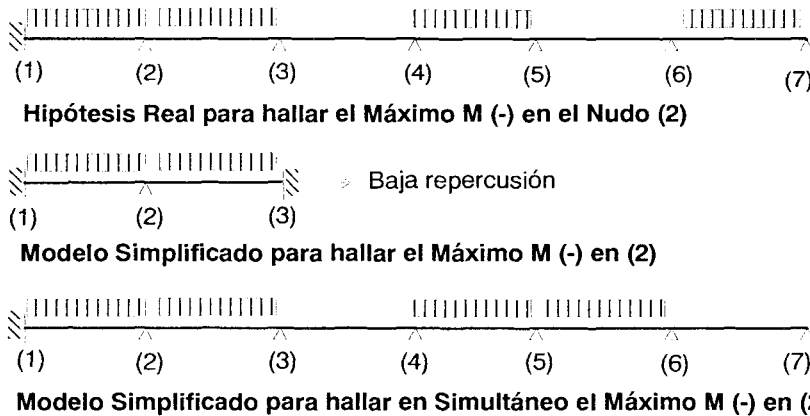


Fig. 3.10. Modelos Simplificados para Obtener el Máximo Momento Negativo.

Sin embargo, ha podido observarse que mientras no exista mucha variación en la magnitud de la sobrecarga, así como en las longitudes de los tramos, es suficiente con sobrecargar todos los tramos para calcular simultáneamente los máximos momentos negativos en todos los nudos. Otras razones que conducen a esa conclusión son:

- a.- En los edificios altos las columnas son robustas en comparación con las vigas; esto hace que las vigas estén prácticamente biempotradas, en cuyo caso, ni siquiera

será necesario realizar las alternancias de sobrecarga para hallar el máximo momento positivo. En estas situaciones, basta con sobrecargar todos los tramos en simultáneo como para obtener, con buena aproximación, los máximos momentos flectores positivos y negativos.

- b.- Todas las combinaciones de sobrecarga no se presentan al mismo tiempo, por lo que resulta muy conservador diseñar las vigas como para que soporten la envolvente de los máximos momentos flectores.
- c.- Existe un fenómeno denominado Redistribución de Momentos (que se ve en detalle en los libros de Concreto Armado y Estructuras Metálicas), por el cual, en los nudos convenientemente confinados por estribos a corto espaciamiento (no en aligerados), puede presentarse la rótula plástica, manteniéndose constante el momento negativo ( $M_p$  en la Fig. 3.11), mientras que el positivo se incrementará con el incremento de la solicitación; esto puede ocurrir cuando el nudo es diseñado para soportar un momento negativo menor al máximo valor que puede originarse ante las distintas combinaciones de sobrecarga. Cabe mencionar que en las vigas de concreto armado no es conveniente que las rótulas plásticas se formen en su zona central, porque esa zona usualmente carece de estribos a corto espaciamiento.

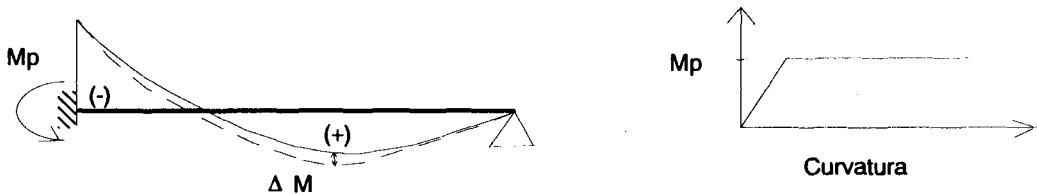


Fig. 3.11. Redistribución de Momentos.

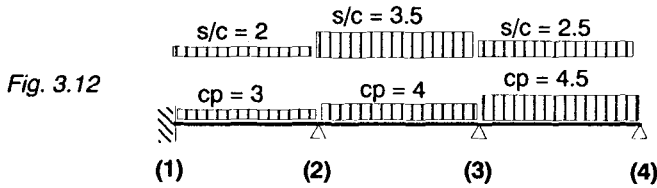
### 3.2.1. Envolvente de Momento Flector

Por lo expresado en los párrafos anteriores, para determinar los máximos momentos flectores positivos se realizará la alternancia de sobrecargas, mientras que para evaluar los máximos momentos negativos se sobrecargará todos los tramos en simultáneo, a no ser que exista demasiada diferencia entre las magnitudes de la sobrecarga o entre las longitudes de los tramos, en cuyo caso, deberá realizarse la combinación de sobrecarga que permita calcular el máximo momento flector negativo en cada nudo.

Cabe resaltar que las combinaciones se realizan variando la posición de las sobrecargas, en vista que las cargas permanentes ( $c_p$ ) siempre están presentes, en tanto que el efecto sísmico y los factores que se utilizan para amplificar las cargas para pasarlas a condición de "rotura", se verán en el acápite 7.2.

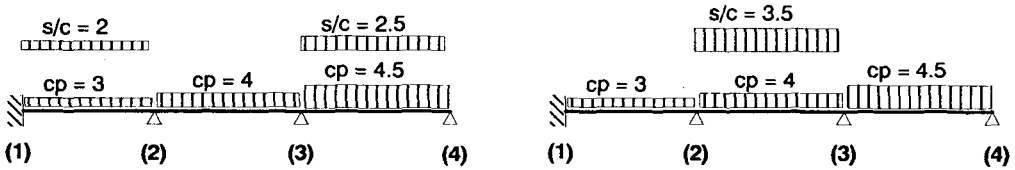
Cada hipótesis de carga genera su propio diagrama de momento flector (DMF) y su propio diagrama de fuerza cortante (DFC), y para el diseño se utiliza la curva que envuelva a estos diagramas ("Envolvente del DMF" y "Envolvente del DFC").

Como ejemplo se verá como abordar el problema mostrado en la Fig. 3.12.

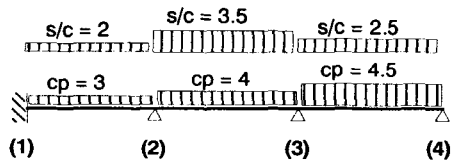


Los pasos a seguir son:

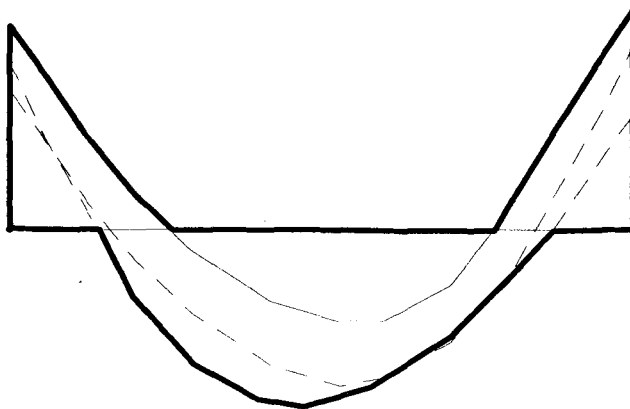
- 1.- Efectuar las alternancias de sobrecarga para determinar los máximos momentos flectores positivos; luego, resolver cada estado aplicando Cross, para después graficar para cada hipótesis de carga su DMF, montándolos en un sólo diagrama.



- 2.- Sobrecargar totalmente la estructura para obtener, aproximadamente, los máximos momentos flectores negativos; luego, resolver la estructura aplicando Cross, para después trazar su DMF montándolo sobre los diagramas anteriores.



- 3.- Trazar la envolvente del DMF; por ejemplo, para el tramo 2-3 se tendría:



### 3.2.2. Programa VIGA1

El programa "VIGA1", cuyo manual de uso es "VIGA 1.MAN", realiza todas las combinaciones de cargas verticales descritas en el acápite 3.2.1, e incluso, proporcionando los momentos sísmicos correspondientes a los extremos de cada tramo (evaluados con otro programa, por ejemplo: "EDIFICIO"), ejecuta las combinaciones de carga especificadas por la Norma E-060, amplificando las cargas de servicio (datos) por los factores de carga indicados por dicha Norma (por ejemplo: 1.5 para carga permanente y 1.8 para sobrecarga; ver el resto de factores en el acápite 7.2), con lo cual, el programa dibuja la envolvente de esfuerzos en condición de "rotura".

Este programa utiliza el modelo simplificado de la Norma E-060 para el análisis de vigas de hasta 10 tramos sujetas a carga vertical, y para el trazado de la envolvente del DMF, se subdivide la longitud de cada tramo en 16 intervalos equidistantes (ver la Fig. 2.31).

La información que se proporciona al programa (características geométricas y elásticas de las barras, cargas verticales de servicio, momentos sísmicos, etc.), debe almacenarse en un archivo de datos, cuyo nombre lo define el usuario (por ejemplo: VIGAX.DAT) y los resultados (momentos y cortantes en condición de servicio y de rotura), se graban en otro archivo (por ejemplo: VIGAX.RES). En conjunto con el manual de uso, se proporciona un ejemplo de aplicación, cuyos datos aparecen en el archivo VIGA1.DAT, mientras que los resultados están en el archivo VIGA1.RES.

Estos archivos pueden ser manejados con cualquier procesador de textos, con tal que los datos se graben en ASCII; sin embargo, se recomienda emplear el utilitario SK, el que al quedar residente en la memoria del computador, permite modificar los datos en cualquier instante.

Lógicamente, el programa también resuelve aligerados, y para el caso en que exista un extremo empotrado será cuestión de proporcionar columnas muy robustas en dicho extremo, y si el extremo estuviese articulado se proporciona columnas de inercia nula en ese nudo; ver la Fig. 3.13.

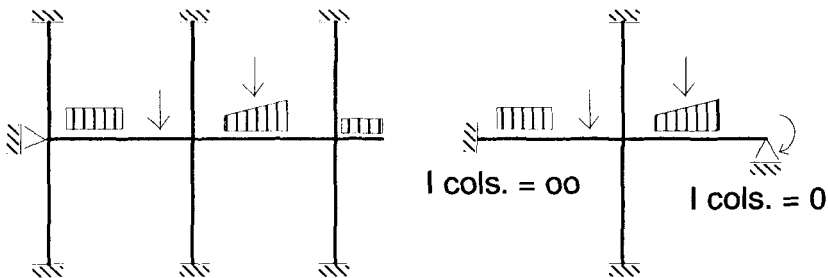


Fig. 3.13. Artificios para Generar Extremos Empotrados y Articulados en el Programa VIGA1.

### 3.3. Coeficientes de la Norma E-060

Tanto el reglamento norteamericano ACI como la Norma E-060, proporcionan unos coeficientes que permiten hallar los máximos valores de los momentos flectores y de las fuerzas cortantes reducidos a la cara del apoyo (Fig. 3.14); estos coeficientes se aplican para vigas y losas unidireccionales (macizas y aligeradas) sujetas a carga vertical.

Para hacer uso de estos coeficientes, deberá cumplirse las siguientes condiciones:

- 1.- Existen dos o más tramos sujetos a carga uniformemente repartida.
- 2.- La diferencia entre las luces de los tramos adyacentes debe ser menor o igual a 20%.
- 3.- La sobrecarga debe ser menor o igual que tres veces la carga permanente.
- 4.- Las barras deben ser prismáticas.

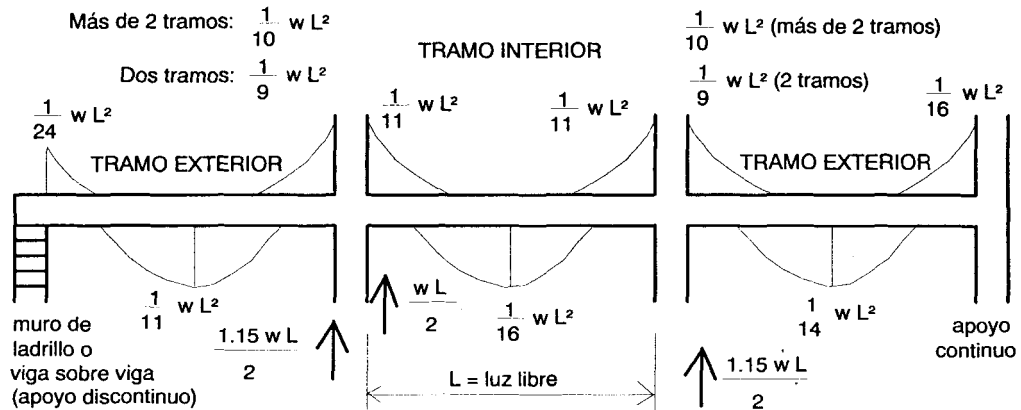


Fig. 3.14. Coeficientes de la Norma E-060.

#### Notas:

- Si  $\sum k \text{ columnas} > 8 \sum k \text{ vigas}$ , usar  $1/12 w L^2$  para los momentos negativos
- Para los momentos positivos:  $L = \text{luz libre del tramo en análisis}$ .
- Para los momentos negativos:  $L = \text{promedio de las luces libres de los tramos adyacentes al nudo en estudio}$ .

### 3.4. Problemas Propuestos

- 1.- En la figura 3.15 se muestra la planta típica de un edificio de concreto armado destinado a oficinas, de 4 pisos. Aplicando el método de Cross, se dibujará la envolvente de momento flector de los aligerados 1 y 2, así como la envolvente correspondiente a la viga del eje 3. Los resultados se compararán contra los obtenidos aplicando los coeficientes del reglamento. Suponer:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$K_0 = 1000 \text{ cm}^3$$

Columnas:  $0.40 \times 0.40 \text{ m}$

Vigas:  $0.30 \times 0.40 \text{ m}$

Espesor de las placas:  $0.15 \text{ m}$

Altura de entrepiso =  $3.0 \text{ m}$

$$\text{Peso del aligerado} = 0.3 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Acabados} = 0.1 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Tabiquería flotante} = 0.1 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga} = 0.25 \text{ ton/m}^2$$

$$\gamma (\text{concreto}) = 2.4 \text{ ton/m}^3$$

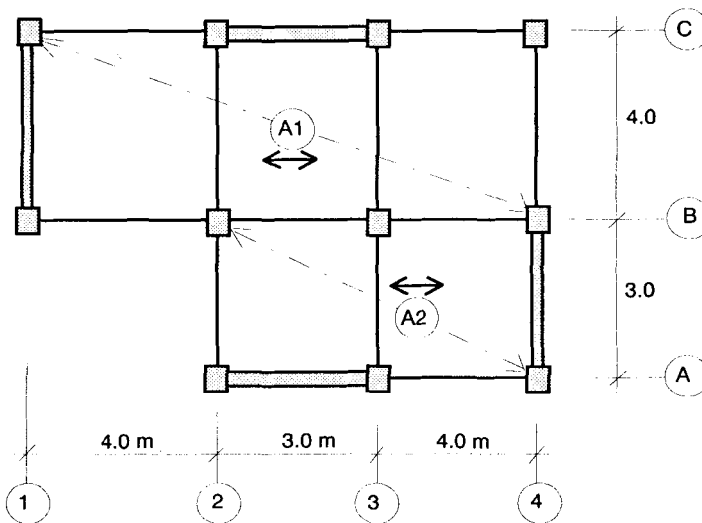


Fig. 3.15. Planta Típica del Problema Propuesto No. 1.

**Nota:** Para el análisis de la viga del eje 3, en las columnas 3-A y 3-C se adicionará un ancho efectivo de placa igual a cuatro veces su espesor. Adicionalmente, se supondrá que los aligerados están empotrados en las placas; asimismo, en las zonas extremas de los aligerados que apoyen sobre vigas, se adicionará un momento negativo equivalente a un semiempotramiento ( $w L^2 / 24$ ).

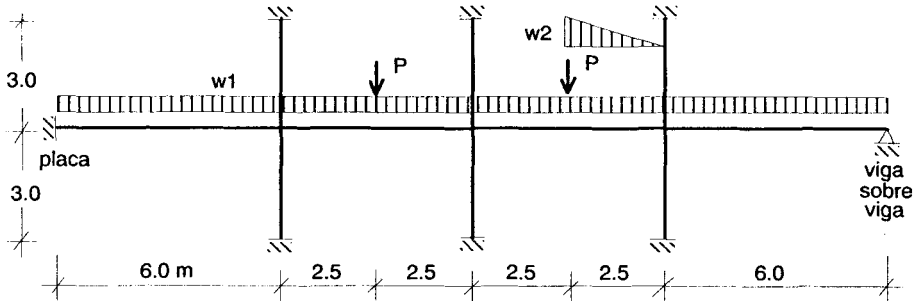
- 2.- Aplicando el programa "VIGA1", se trazará la envolvente de momento flector y de fuerza cortante (ambas en condición de "rotura") para la viga mostrada en la Fig. 3.16; se supondrá que los momentos sísmicos son nulos.

**Datos:**

Columnas: 40 x 50 cm      Vigas: 30 x 60 cm

Cargas de Servicio:       $w1_D = 3 \text{ ton/m}$        $w1_L = 2 \text{ ton/m}$   
 $w2_D = 2 \text{ ton/m}$        $w2_L = 0$   
 $P_D = 5 \text{ ton}$        $P_L = 3 \text{ ton}$

Notación:      D = Dead load (carga muerta o permanente)  
L = Live load (carga viva o sobrecarga)



*Fig. 3.16. Viga Continua del Problema Propuesto No.2.*