

Cálculo vectorial y series de potencias

*Andrés Beltrán Cortez
Francisco Ugarte Guerra*



**FONDO
EDITORIAL**

ANDRÉS BELTRÁN CORTEZ

es Profesor Asociado del departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Se tituló como Licenciado en Matemáticas en la Universidad Nacional Pedro



Ruiz Gallo de Lambayeque y posteriormente obtuvo el grado de Magister en Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Actualmente es candidato a doctor por la misma universidad. Su campo de interés son los sistemas dinámicos y las foliaciones holomorfas. El profesor Andrés Beltrán ha sido coordinador en diferentes cursos de matemáticas de los Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú y tiene un especial interés por los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

FRANCISCO UGARTE

GUERRA es Profesor

Asociado del departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú, donde se tituló como Licenciado en Matemáticas,



y obtuvo posteriormente el grado de Magister. Actualmente es candidato a doctor por la Universidad de Valladolid bajo la dirección del doctor José Manuel Aroca Hernández-Ros. El profesor Francisco Ugarte es también coordinador general de los cursos de matemáticas de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú y como tal promueve el uso de técnicas activas de aprendizaje.

Cálculo vectorial y series de potencias

Andrés Beltrán Cortez
Francisco Ugarte Guerra

Cálculo vectorial y series de potencias

Primera edición, marzo de 2007

Tiraje: 1.000 ejemplares

© Andrés Beltrán Cortez y Francisco Ugarte Guerra, 2007

Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas

Pontificia Universidad Católica del Perú

Lima - Perú

abeltra@pucp.edu.pe

fugarte@pucp.edu.pe

© Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2007

Plaza Francia 1164, Lima 1, Perú

Teléfonos: (51 1) 626-6140; 626-6152

Fax: (51 1) 626-6156

feditor@pucp.edu.pe

www.pucp.edu.pe/publicaciones/fondo_ed/

Diseño de cubierta: Juan Carlos García Miguel

Diagramación de interiores: los autores

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: 978-9972-42-798-5. Hecho el depósito legal 200-02479 en la Biblioteca Nacional del Perú

Impreso en el Perú - Printed in Peru

A mi esposa Luisa, por su apoyo constante
para alcanzar nuevas metas y a mis padres
por ser mis primeros maestros.

A Dios por señalarme el camino.
A Leoncio y Carmen por iluminarlo siempre,
a José Manuel, por enseñarme a recorrerlo y
a Ceci, Gonza y Gaby por acompañarme en
la caminata.

Índice general

Prólogo	VII
1. Integrales de línea	1
1.1. Conceptos previos	2
1.2. Integrales de línea de campos escalares	14
1.3. Integral de línea de campos vectoriales	34
1.4. Teoremas fundamentales para las integrales de línea	59
1.5. El Teorema de Green	86
2. Integrales de Superficie	117
2.1. Conceptos previos	118
2.2. Parametrización de superficies	123
2.3. Superficies regulares	126
2.4. Área de una superficie	142
2.5. Integrales de superficies de campos escalares	155
2.6. Integrales de superficies de campos vectoriales	168
2.7. Teorema de Stokes	189
2.8. Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia	209
3. Sucesiones y Series	227
3.1. Sucesiones de números reales	228
3.2. Series de números reales	250
3.3. Criterios de convergencia para series	265
3.4. Criterios de convergencia en el caso general	290
3.5. Series de Potencias	298
Bibliografía	371
Índice alfabético	372

Prólogo

Este libro es el resultado de las múltiples reuniones que los autores hemos sostenido durante los últimos años motivados por mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos de matemática de los Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú, unidad en la hemos tenido oportunidad de dictar en varias oportunidades de manera simultánea. El resultado de nuestras reflexiones se encuentra aquí expuesto a manera de un texto al que le hemos conferido ciertas características que consideramos ayudarán a los estudiantes a comprender los conceptos propuestos y a ver las matemáticas como una herramienta indispensable para el planteamiento y la solución de problemas y como vía de exploración y descubrimiento de propiedades.

Cada capítulo se inicia planteándole al lector los objetivos de aprendizaje, de manera que el estudiante pueda autoevaluarse.

Los conceptos son presentados como punto de partida para plantear y resolver problemas. También pueden encontrarse como la extensión de un concepto presentado anteriormente, para explicar los resultados obtenidos o para definir las propiedades observadas en los ejemplos.

Los conceptos, teoremas, procedimientos y ejemplos vienen acompañados siempre de observaciones que en algunos casos preceden la discusión, lo cual permite enlazar los temas estudiados. En otros casos, aparecen al final del capítulo, a fin de precisar las bondades y limitaciones de lo estudiado.

En las explicaciones a lo largo del texto, los ejemplos, las preguntas y la interpretación física y gráfica tienen un papel central, de allí nuestra preocupación por incluir una variedad importante de ejemplos desarrollados (más de 290), gráficos y esquemas explicativos (más de 170) y ejercicios al final de cada sección (más de 365).

Hemos buscado que el texto sea completo y que permita al lector encontrar todas las referencias necesarias dentro del mismo libro. Por esta razón, algunos capítulos contienen una sección de conceptos previos o apéndices. Los

conceptos o resultados previos (teoremas) se citan al pie de página o bien se hace una referencia explícita sobre dónde encontrarlos. Para facilitarlo, solo hemos considerado una bibliografía básica.

Queremos agradecer a nuestros alumnos, pues ha sido su interés por las matemáticas y por los conceptos allí tratados lo que nos animó a reunirnos para elaborar la propuesta que ahora presentamos. A ellos va dirigido el esfuerzo y la dedicación que hemos invertido en estos años.

Queremos también agradecer al Decano de Estudios Generales Ciencias, Ingeniero Miguel Piaggio, por su apoyo y a Patricia Arévalo, Directora del Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú por las facilidades brindadas para la publicación del libro.

Estaremos atentos a las sugerencias y observaciones que los lectores nos quieran hacer llegar.

Los autores

Capítulo 1

Integrales de línea

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar el capítulo los alumnos:

1. Calcularán la integral de línea de campos, para ello:
 - a) Plantearán correctamente la integral según el campo sea vectorial o escalar.
 - b) Parametrizarán correctamente la curva tomando en cuenta su orientación.
 - c) Calcularán correctamente la integral definida de la función escalar correspondiente a una integral de línea.
2. Emplearán correctamente el concepto de integral de línea para definir y calcular la masa de un alambre y el trabajo realizado por un campo a lo largo de una curva.
3. Determinarán si un campo es conservativo o no analizando condiciones necesarias y suficientes.
4. Construirán una función potencial para un campo conservativo a partir de la elección de un camino adecuado, o bien a partir de la definición de campo conservativo.

5. Utilizarán correctamente el Teorema de Green, para ello:

- a) Analizarán si se cumplen las hipótesis del teorema: verificarán si el campo está definido sobre una región limitada por una curva simple cerrada o una región compacta, reconocerá si la frontera de la región está positivamente orientada y que sus derivadas parciales sean continuas en dichas regiones.
- b) Calcularán correctamente la integral doble, correspondiente a una integral de línea, en forma iterada o aplicando una transformación de coordenadas.

1.1. Conceptos previos

Curvas

Sea I un intervalo (abierto o cerrado) de \mathbb{R} , llamaremos **camino** o **trayectoria** en \mathbb{R}^n , para $n \in \mathbb{N}^+$, a una función \vec{r} vectorial de variable real y continua. Simbólicamente

$$\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

En adelante:

- 1) La representación gráfica del vector $\vec{r}(t)$ se hará tomando como extremo inicial el origen de coordenadas (vector posición $\vec{r}(t)$).
- 2) $r(t)$ denotará el extremo final del vector posición $\vec{r}(t)$.

Observación 1.

1. La condición de continuidad sobre \vec{r} se traduce, según n sea igual a 1 o 2, en que la gráfica ¹ de un camino puede realizarse de un solo trazo, en el plano o en el espacio.
2. Diremos que una función $\vec{r} : I = [a; b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}^+$ es continua (diferenciable) si y solo si existe una función $\widehat{\vec{r}} : J =]c; d[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset J$, donde c o d puede ser ∞ y con $\widehat{\vec{r}}$ continua (diferenciable) tal que $\widehat{\vec{r}} \Big|_I = \vec{r}$.

Ejemplo 1. Las siguientes funciones son ejemplos de caminos:

a) $\vec{r}_1 : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{r}_1(t) = t^2 + 1$

Observe que la imagen de este camino es un segmento de recta, mientras que su gráfica es una porción de parábola.



Fig. 1.1 Gráfica de la imagen de \vec{r}_1 .

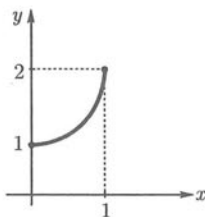
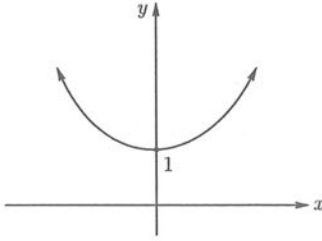
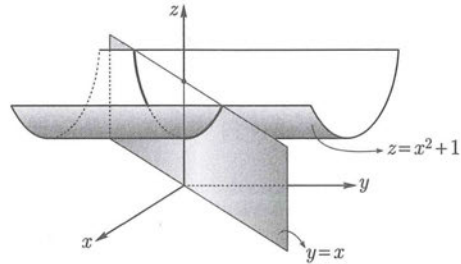


Fig. 1.2 Gráfica del camino \vec{r}_1 .

¹Sea la función $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^+$, llamaremos gráfica de \vec{r} y denotaremos por $\text{Graf}(\vec{r})$ al conjunto $\{(t; r(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : r(t) = (r_1(t); \dots; r_n(t)), t \in I\}$.

b) $\vec{r}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_2(t) = (t; t^2 + 1).$

Fig. 1.3 Gráfica de la imagen de \vec{r}_2 .Fig. 1.4 Gráfica del camino \vec{r}_2 .

Observe que la imagen de este camino es una parábola (ver fig. 1.3), mientras que su gráfica es un subconjunto de \mathbb{R}^3 . La gráfica del camino \vec{r}_2 puede ser obtenida como intersección de las gráficas del cilindro $z = x^2 + 1$ y el plano $y = x$ (ver fig. 1.4).

Sea el camino $\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, llamaremos *curva*² Γ en \mathbb{R}^n al conjunto de puntos

$$\{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } (x_1; \dots; x_n) = r(t)\},$$

es decir, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si y solo si es la imagen de algún camino. Para denotar una curva escribiremos

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

o bien

$$\Gamma : \vec{r}(t) = (x_1(t); \dots; x_i(t); \dots; x_n(t)), \quad t \in I$$

o

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + \dots + x_i(t)\vec{e}_i + \dots + x_n(t)\vec{e}_n \text{ donde } e_i = \underbrace{(0; \dots; 0)}_{i-1}; 1; 0 \dots; 0 \text{ para } t \in I.$$

En particular, para $n = 3$ también se suele escribir $\vec{r}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$. Las expresiones

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

son llamadas **ecuaciones paramétricas de Γ** . En adelante, si la curva Γ es la imagen del camino \vec{r} diremos que \vec{r} es una **parametrización** de Γ o simplemente que \vec{r} parametriza a Γ .

²Otros libros definen como curva a la función y como traza a su imagen.

Si el camino \vec{r} es una función inyectiva, excepto posiblemente en los extremos del intervalo I , diremos que Γ es una curva simple.

Geoméricamente, la única autointersección posible de una curva simple ocurre cuando la imagen de los extremos del intervalo de definición del camino coinciden. Si $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}^+$ es la parametrización de una curva, diremos que $r(a)$ y $r(b)$ son, respectivamente, el **extremo inicial** y el **extremo final** de la curva Γ .

Los siguientes dibujos son ejemplos de curvas $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$:



Fig. 1.5 Curva simple.

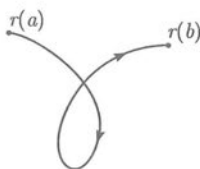


Fig. 1.6 Curva no simple.

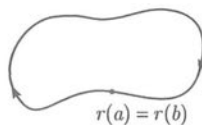
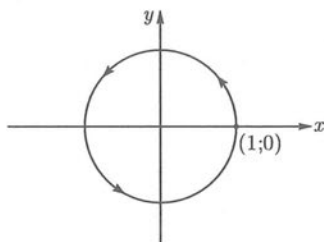


Fig. 1.7 Curva simple.

Ejemplo 2. Los caminos

$$\vec{r}_1(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{y} \quad \vec{r}_2(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \text{ con}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ son distintos como funciones. Sin embargo definen la misma curva, esto es, tienen la misma imagen. Si $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ representan la posición de dos partículas A y B en el tiempo t (segundos), entonces tendremos que ambas partículas recorren la misma curva pero al cabo de 2π segundos la partícula A habrá recorrido la mitad de lo que recorrió B .

Fig. 1.8 Curva definida por \vec{r}_1 y \vec{r}_2 .

Pregunta:

¿Cuál de los caminos definidos en el ejemplo 2 es una parametrización de la circunferencia de radio 1?

Observación 2.

1. Una curva puede ser descrita por muchas parametrizaciones, por ejemplo, la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas, puede ser descrita por cualquiera de las siguientes parametrizaciones:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{y}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi = \frac{2\pi}{2}$$

o bien por

$$\vec{r}_n(t) = \begin{cases} x = \cos(nt) \\ y = \sin(nt) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Todas estas parametrizaciones tienen la misma curva como imagen. Si el camino \vec{r}_i representa la posición de una partícula P_i en el tiempo t diremos que todas las partículas P_i recorren la misma curva pero a distintas velocidades. Esto es fácil de ver: calcule la derivada de los caminos (velocidad) y luego compare sus módulos (rapidez de la partícula).

La misma circunferencia también puede ser parametrizada por

$$\vec{r}_n^*(t) = \begin{cases} x = \sin(nt) \\ y = \cos(nt) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

2. La diferencia entre estas dos familias de parametrizaciones puede verse claramente si volvemos a interpretar los caminos \vec{r}_i y \vec{r}_i^* como la posición de las partículas P_i y P_i^* en el tiempo t . Claramente, ambas partículas recorren la misma curva pero en diferente sentido. Compruébelo calculando la derivada de los caminos (vectores velocidad) y luego compare el sentido de dichos vectores, es decir, cada parametrización define una orientación de la curva.

Ejemplo 3. La gráfica del siguiente conjunto A definido por

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x^2 + y^2 = 4\},$$

no es la imagen de ningún camino. Intuitivamente es claro que la gráfica correspondiente al conjunto A no puede realizarse con un solo trazo, es decir la gráfica de la figura 1.9 no corresponde a la gráfica de ninguna curva.

Sin embargo, si las consideramos por separado tenemos dos curvas, esto quiere decir que la unión de curvas no corresponde necesariamente a otra curva. Más adelante veremos bajo qué condiciones la unión de curvas define otra curva.

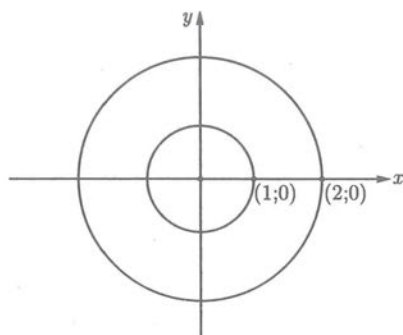


Fig. 1.9 Gráfico del conjunto A.

Ejemplo 4. La gráfica de la curva Γ parametrizada por \vec{r} ,

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \text{sen}(t) \\ z(t) = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

se muestra en la figura 1.10 y es llamada *hélice*.

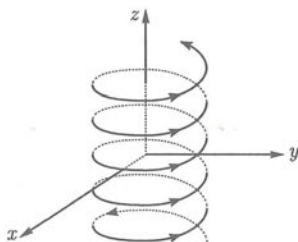


Fig. 1.10 Gráfico de la hélice.

Como es natural, nuestro interés se limitará al estudio de curvas de longitud finita³. Diremos que una curva Γ , imagen del camino $\vec{r} : I = [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, es **cerrada** si y solo si $r(a) = r(b)$. Asimismo, diremos que Γ es una **curva cerrada simple** si y solo si es cerrada y simple a la vez (ver figura 1.11).

En adelante, dada la parametrización de una curva cerrada Γ , diremos que la curva está **orientada en sentido horario** si la parametrización recorre Γ en el sentido de las agujas del reloj, caso contrario diremos que la curva está **orientada en sentido antihorario**. Ver figura 1.13.

³Longitud de curva: Si Γ es una curva parametrizada por $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la longitud de Γ en el intervalo $[a; b]$ se define por $\int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$. Se demuestra que la longitud de la curva es independiente de la parametrización elegida.

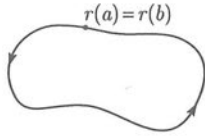


Fig. 1.11 Curva cerrada simple.

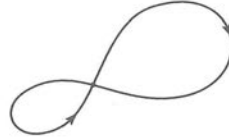


Fig. 1.12 Curva cerrada no simple.

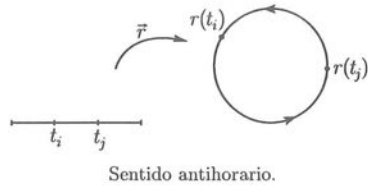
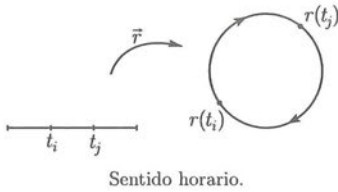


Fig. 1.13 Orientación de una curva cerrada.

Veamos algunos ejemplos para aclarar los conceptos que hemos definido anteriormente.

Ejemplo 5. La función $\vec{r} : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$ define un camino, la curva correspondiente es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen de coordenadas.

Note que \vec{r} también puede escribirse en la forma

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t) \mathbf{i} + (2 \sin t) \mathbf{j}$$

donde $\mathbf{i} = (1; 0)$ y $\mathbf{j} = (0; 1)$. Desde este punto de vista Γ es el conjunto de puntos descritos por los extremos finales de los vectores posición ⁴ $\vec{r}(t)$. La orientación definida por esta parametrización puede ser obtenida tabulando distintos valores para t . En este caso, la orientación es antihoraria.

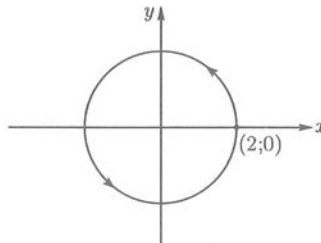


Fig. 1.14 Gráfica de Γ .

⁴Vector posición de un punto P : Se llama así a un vector con extremo inicial el origen de coordenadas O y extremo final el punto P . En adelante, al vector posición \vec{OP} se le denotará simplemente por P y se le representará gráficamente por su extremo final.

Ejemplo 6. El camino $\vec{r} : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, parametriza la elipse centrada en el origen de coordenadas de semiejes 3 y 2, pues se cumple que

$$\frac{(3 \cos t)^2}{9} + \frac{(2 \sin t)^2}{4} = 1, \text{ es decir, } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

La orientación definida por esta parametrización es antihoraria.

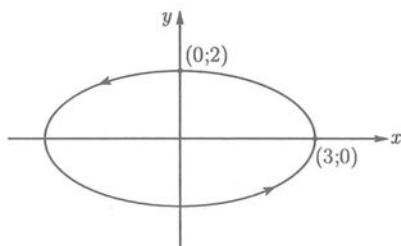


Fig. 1.15 Gráfica de Γ .

Al parametrizar una curva cuya orientación ha sido establecida, debemos verificar que la parametrización respete dicha orientación.

Ejercicio: Escriba una parametrización de la elipse de tal forma que la curva esté orientada en sentido horario.

Ejemplo 7. La función $\vec{r} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(t) = (1; 1; 2) + t(2; 3; -1)$ parametriza

el segmento de recta de extremos $(1; 1; 2)$ y $(3; 4; 1)$. En general, dado dos puntos P_0 y $P_1 \in \mathbb{R}^3$ podemos parametrizar el segmento de recta que los une por la función

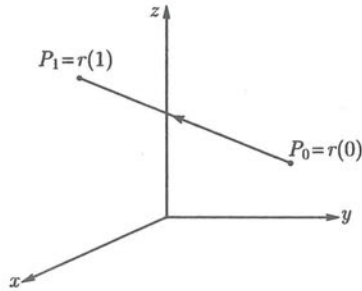
$$\vec{r}(t) = P_0 + t(P_1 - P_0), \quad t \in [0; 1].$$

Ejemplo 8. Consideremos la porción de la curva $\Gamma : \begin{cases} y = x^3 \\ z = 2 \end{cases}$ con punto inicial $(0; 0; 2)$ y punto final $(1; 1; 2)$. La curva Γ puede ser parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (t; t^3; 2), \quad t \in [0; 1]$$

o bien por

$$\vec{s}(t) = (t^2; t^6; 2), \quad t \in [0; 1].$$

Fig. 1.16 Gráfico de la imagen del camino \vec{r} .**Preguntas:**

- ¿Varía la orientación de Γ para las parametrizaciones \vec{r} y \vec{s} ?
- ¿Qué diferencia encuentras entre ambas parametrizaciones?

Conclusión: El ejemplo anterior muestra que una curva puede ser descrita por diferentes parametrizaciones.

Diremos que una **curva** Γ es **regular** si y solo si existe una parametrización con derivada continua y distinta de cero excepto posiblemente en los extremos de su dominio. Simbólicamente: Γ es una curva regular si y solo si existe una parametrización $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}^+$ diferenciable tal que \vec{r}' es continua en I y $\vec{r}'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ excepto posiblemente en los extremos del intervalo I .

Ejemplo 9. La curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = (\sin t; \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$ es regular, pues $\vec{r}'(t) = (\cos t; -\sin t)$ es continua y $\vec{r}'(t) \neq (0; 0)$ para todo $t \in [0; 2\pi]$.

Ejercicio:

Dada la curva $\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0; 3\pi]$.

- a) Calcule $\vec{r}'(t)$.
- b) ¿La curva Γ es regular?

Sea $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva Γ , diremos que Γ es **regular por partes** si y solo si existe una partición $P = \{t_0 = a; t_1; \dots; t_m = b\}$ de $[a; b]$ tal que para $k \in \{1; 2; \dots; m\}$, las curvas Γ_k definidas por las parametrizaciones

$$\vec{r} \Big|_{[t_{k-1}; t_k]} : [t_{k-1}; t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{son regulares.}$$

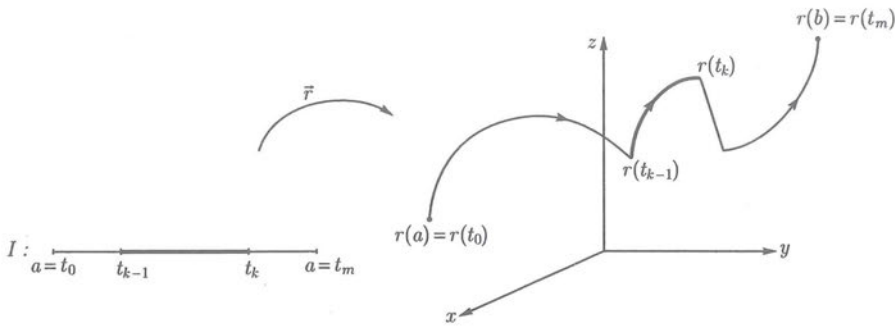
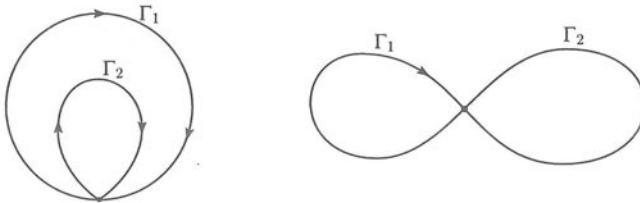


Fig. 1.17 Curva regular por partes.

En la figura 1.17 se muestra una curva regular por partes.

Observación 3.

1. La longitud de una curva regular siempre está definida, pues la integral de una función continua siempre existe.
2. Una curva regular es regular por partes, sin embargo en general, una curva regular por partes no es regular.
3. Si $\{\Gamma_i\}_{i \in J}$ con $J = \{1; 2; \dots; n\}$ es una familia de curvas regulares no cerradas donde el extremo final de Γ_k es igual al extremo inicial de Γ_{k+1} para cada $k \in J$, entonces $\Gamma = \bigcup_{k \in J} \Gamma_k$ es una curva regular por partes.
4. En general, la unión de curvas regulares es una curva regular por partes, pues si en la observación anterior, Γ_k es cerrada para algún $k \in J$, entonces Γ sigue siendo una curva, tal y como se muestra en las siguientes figuras:

Fig. 1.18 Γ_1 y Γ_2 .

Ejemplo 10. Parametrice la curva Γ , definida como la intersección de las siguientes superficies ⁵ $z = 4 - y^2$ y $x = 2 - y$, para $z \geq 0$.

⁵Superficie: En este capítulo se llama así al conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisface la

Solución

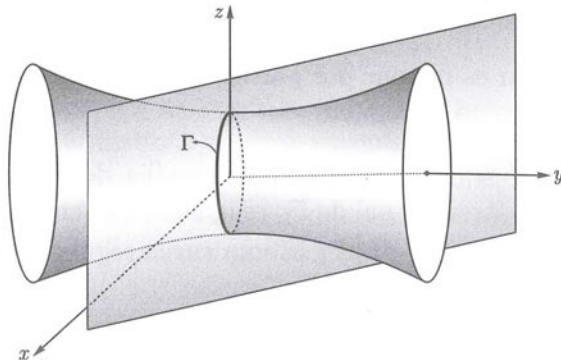
Sea $y = t$, entonces sustituyendo en las ecuaciones dadas obtenemos: $z = 4 - t^2$ y $x = 2 - t$. La condición $z \geq 0$ se traduce en $4 - t^2 \geq 0$, es decir,

$$\Gamma : \vec{r}(t) = (2 - t; t; 4 - t^2), \text{ para } t \in [-2; 2].$$

Observación 4.

Aparentemente la manera más sencilla de parametrizar una curva es asignar un parámetro a una de las variables y luego despejar las otras en términos de esta, sin embargo la última operación no siempre es posible y en otras situaciones esta técnica no es la más adecuada, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11. Parametrice la curva Γ , definida como la intersección de las siguientes superficies $S_1 : 2x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ y $S_2 : x + y = 1$.

SoluciónFig. 1.19 Curva Γ .

La curva Γ es descrita como la intersección de S_1 (hiperboloide de una hoja) con el plano S_2 , como se muestra en la figura 1.19, pero también puede definirse como

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 - (1 - x)^2 + 2z^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

que en forma simplificada es

$$\Gamma : \begin{cases} (x + 1)^2 + 2z^2 = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ecuación

$f(x, y, z) = k$, siendo k una constante real y donde $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un conexo y abierto.

es decir, Γ resulta ser la intersección de un cilindro con un plano, de esta manera es más sencillo decidir una parametrización,

$$x + 1 = 2 \cos t, \quad z = \sqrt{2} \sin t, \quad \text{entonces} \quad y = 2 - 2 \cos t.$$

Luego,

$$\Gamma : \vec{r}(t) = (-1 + 2 \cos t; 2 - 2 \cos t; \sqrt{2} \sin t), \quad \text{para } t \in [0; 2\pi].$$

Observación 5.

No siempre la intersección de dos superficies define una curva, tal y como se muestra en la figura 1.20 en ella la intersección de un cono de dos mantos, digamos $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = z^2$ y la esfera $\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es la unión de dos circunferencias y, como vimos, estas no definen una curva.

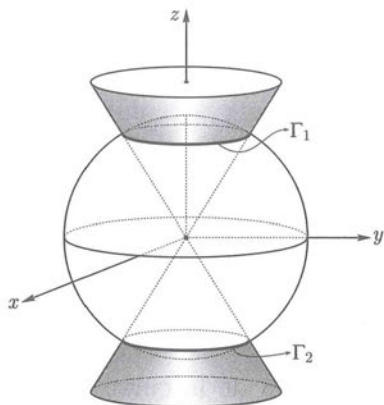


Fig. 1.20 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ no es una curva.

Ejercicios: Sección 1.1

1. Escriba dos parametrizaciones para la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y) \\ x + y = 4 \end{cases}$ e indique si la curva es regular.
2. Escriba una parametrización de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z - y = 1 \end{cases}$
3. Escriba una parametrización de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 + z - 2y \\ z = 2y \end{cases}$ ubicada en el primer octante con extremo inicial $(\sqrt{5}; 0; 0)$ y extremo final $(0; 1; 2)$.
4. Parametrice la curva dada por $|x| + |y| = 1$.
5. Sea la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 3 \cos(t) \\ y(t) = 3 \operatorname{sen}(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$ para $t \in [0; 2\pi]$ Describa Γ como la intersección de dos superficies.
6. Parametrice la curva Γ definida como la intersección de las superficies S_1, S_2 en cada caso.
 - a) $S_1 : x^2 + y^2 = 1, S_2 : z = xy$
 - b) $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2x, S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$
7. Escriba una parametrización de la curva Γ definida como intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$ y verifique si es regular en su dominio.
8. Parametrice la porción de curva Γ tal que:

Los extremos inicial y final de Γ son el origen de coordenadas y el punto $(1; 1; \sqrt{2})$, respectivamente.

La curva Γ resulta de la intersección de las superficies de ecuaciones: $x^2 + y^2 = z^2$ y $x = y^2$.
9. Escriba una parametrización de la curva $\begin{cases} 8x^2 + 2y^2 = z \\ 16x + z = -6 \end{cases}, y \geq 0$
10. Dé una parametrización de la curva $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z - y = 1 \end{cases}$

1.2. Integrales de línea de campos escalares

Campos escalares

Sea U un conjunto abierto ⁶de \mathbb{R}^n . Un **campo escalar** sobre U es una función f que asigna a cada punto $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ de U un número real $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, es decir, un campo escalar sobre U es una función de la forma

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Las siguientes funciones son ejemplos de campos escalares:

- La función $f(x; y) = xy^2$ define un campo escalar sobre \mathbb{R}^2 .
- La función $f(x; y; z) = xz + yz + x^2y$ define un campo escalar sobre \mathbb{R}^3 .

Motivación para el estudio de las integrales de línea de campos escalares

En un curso de cálculo diferencial e integral en una variable se define la masa de un alambre delgado con densidad de masa variable, es decir, si el alambre es representado por un segmento de recta sobre el eje de las abscisas, digamos $a \leq x \leq b$ y su densidad (lineal) viene descrita por una función f , entonces la masa del alambre viene dada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo definiríamos la masa de un alambre cuya forma viene descrita por la curva Γ y cuya densidad está dada por la función escalar f ?

Para responder a esta pregunta asumamos que la curva Γ es regular y está parametrizada por $\vec{r}: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y sea $f: \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar definido

⁶Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto en \mathbb{R}^n si y solo si para cada punto $x \in U$ existe una bola abierta de \mathbb{R}^n centrada en x totalmente contenida en U . Una bola abierta en \mathbb{R}^n centrada en x y radio r es el conjunto definido por

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{tal que } \|y - x\| < r\}, \text{ para algún } r \geq 0.$$

en un conjunto abierto U , con $\Gamma \subset U$, de manera que $f(x; y; z)$ representa la densidad lineal del alambre para cada punto $(x; y; z)$. Es claro que $f(x; y; z) > 0$.

Consideremos una partición regular ⁷ $P = \{t_0 = a; t_1; \dots; t_{n-1}; t_n = b\}$ del intervalo $[a; b]$, es decir

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

esta partición determina una subdivisión de la curva Γ en porciones que denotamos por Γ_k con extremo inicial $r(t_{k-1})$ y extremo final $r(t_k)$, para $1 \leq k \leq n$:

$$\{r(a) = r(t_0); r(t_1); \dots; r(t_{n-1}); r(t_n) = r(b)\},$$

tal y como se muestra en la siguiente figura:

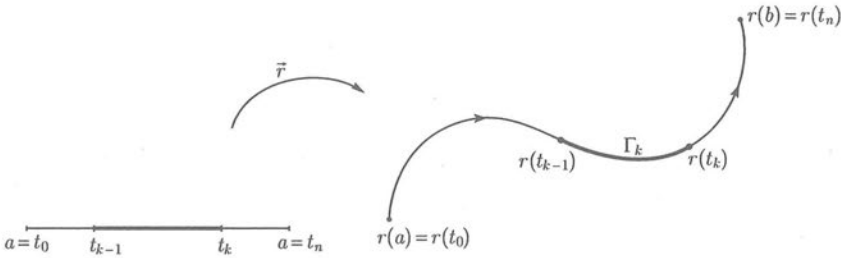


Fig. 1.21

Afirmamos que si $n \rightarrow +\infty$, $\Delta t_k \rightarrow 0$ y como Γ es regular, entonces su longitud tiende a cero. En efecto, se sabe que

$$\text{Longitud de } \Gamma_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

El teorema del valor medio para integrales garantiza la existencia de $t_k^* \in [t_{k-1}; t_k]$ tal que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\vec{r}'(t)\| dt = \|\vec{r}'(t_k^*)\|(t_k - t_{k-1}) = \|\vec{r}'(t_k^*)\|\Delta t_k.$$

Por lo tanto,

$$\text{Longitud de } \Gamma_k = \|\vec{r}'(t_k^*)\|\Delta t_k$$

⁷Una partición regular de un intervalo $[a; b]$ es un conjunto finito de puntos t_k del intervalo $[a; b]$ que satisface las siguientes condiciones:

- $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$.
- $t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k \in \{1; 2; \dots; n\}$.

de esta manera, resulta claro que si $\Delta t_k \rightarrow 0$, entonces la longitud de $\Gamma_k \rightarrow 0$. Luego, como $\Delta t_k \rightarrow 0$ podemos suponer que la densidad en Γ_k es constante. En tal caso, la masa de esta porción de curva será el producto de la densidad por la longitud de Γ_k . Como $t_k^* \in [t_{k-1}; t_k]$, entonces el extremo final del vector $\vec{r}(t_k^*) \in \Gamma_k$ y $f(\vec{r}(t_k^*))$ representa la densidad de Γ_k . Por lo tanto, la masa de Γ_k es aproximadamente

$$f(\vec{r}(t_k^*)) \|\vec{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k.$$

Procediendo en forma similar en cada subintervalo $[t_{k-1}; t_k]$ para $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, la masa del alambre es aproximadamente la suma de las masas de Γ_k , es decir,

$$M \approx \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k^*)) \|\vec{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k.$$

Es claro que esta aproximación mejora si la curva Γ es dividida en porciones cada vez más pequeñas. Luego, definimos la masa M como

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k^*)) \|\vec{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k \quad (1.1)$$

siempre y cuando tal límite exista. A este límite se le denota por $\int_{\Gamma} f ds$ y se le llama **integral de línea de f sobre la curva Γ** respecto a la longitud de arco.

Observación 6.

1. La buena definición de masa está garantizada pues la longitud de una curva es independiente de la parametrización.
2. Observe que para proceder a calcular la masa usando la definición tendríamos que analizar la convergencia de la serie 1.1 y luego calcularla.
3. La expresión,

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \|\vec{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k$$

es una suma de Riemann, entonces la definición de masa corresponde a una integral definida, es decir,

$$M = \int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

4. Si $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ es regular, la función longitud de arco $s : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como la integral

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du.$$

La derivada de esta función, obtenida usando el teorema fundamental del cálculo, es

$$s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|, \text{ y su diferencial es } ds = \|\vec{r}'(t)\| dt,$$

$$\text{donde } \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

En el caso que hemos estudiado f representa la densidad lineal del alambre, y por lo tanto $f(x; y; z) > 0$. Sin embargo, en general $f(x; y; z)$ puede representar a cualquier magnitud escalar. A continuación se define la integral de línea de un campo escalar para el caso general.

La integral de línea del campo escalar f sobre Γ con respecto a la longitud de arco se denota por $\int_{\Gamma} f ds$ y se define por

$$\int_{\Gamma} f ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k^*)) \|\vec{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k \quad (1.2)$$

siempre y cuando el límite exista y donde $t_k^* \in [t_{k-1}; t_k]$, siendo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$ una parametrización de Γ .

El siguiente resultado da condiciones suficientes para garantizar la existencia de integral de línea de campos escalares.

Teorema 1.1. Sea Γ una curva regular en \mathbb{R}^n , parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ para $t \in [a; b]$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en U , siendo U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a Γ , entonces existe $\int_{\Gamma} f ds$ y

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (1.3)$$

Observación 7.

1. Con las condiciones del teorema 1.1, la función $f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|$ es continua y por tanto integrable.

2. Del teorema 1.1 es claro que para calcular una integral de línea se requiere conocer el campo, una parametrización de la curva y los límites de integración (límites del parámetro). Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 13. Calcule $\int_{\Gamma} f ds$ siendo $f(x; y) = xy$ y $\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t; \text{sen } t)$, donde $t \in [0; 2\pi]$.

Solución

Del teorema 1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos t; \text{sen } t) \|(-\text{sen } t; \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t \text{sen } t dt \\ \int_{\Gamma} xy ds &= \frac{1}{2} \text{sen}^2 t \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Observación 8.

Si $\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, $t \in [a; b]$ es una curva regular en \mathbb{R}^3 y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en el abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, entonces

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Ejemplo 14. Calcule $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 - z) ds$ donde $\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \\ z = t \end{cases}$ es

una curva de extremo inicial $P(1; 0; 0)$ y extremo final $Q(1; 0; 2\pi)$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 - z) ds &= \int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t) - z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \text{sen}^2 t - t) \sqrt{(-\text{sen } t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - t) dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 15. Calcule $\int_{\Gamma} f ds$, siendo $f(x; y; z) = xyz$ y $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; 2t; 3t)$ para $t \in [0; 2]$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x y z ds &= \int_0^2 x(t) y(t) z(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^2 (t)(2t)(3t) \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} dt \\ &= 6\sqrt{14} \int_0^2 t^3 dt = 24\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Ejemplo 16. Si $f(x; y) = x - y$ y Γ es el segmento de recta de extremo inicial $(1; 0)$ y extremo final $(3; 1)$, calcule $\int_{\Gamma} f ds$.

Solución

Parametrizamos $\Gamma : \vec{r}(t) = (1 + 2t; t)$, $t \in [0; 1]$, luego usando el teorema 1.1.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^1 f(1 + 2t; t) \|(2; 1)\| dt \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 (t + 1) dt \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 17. Calcule $\int_{\Gamma} xz ds$, donde Γ es el segmento de recta que se inicia en $(2; 1; 0)$ y termina en $(2; 0; 2)$.

Solución

Al parametrizar el segmento de recta obtenemos $\vec{r}(t) = (2; 1 - t; 2t)$, $t \in [0; 1]$, entonces

$$\vec{r}'(t) = (0; -1; 2), \quad \text{y} \quad ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{5} dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x z ds &= \int_0^1 x(t) z(t) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 2(2t) \sqrt{5} dt \\ &= 4\sqrt{5} \int_0^1 t dt \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Calcule la integral $\int_{\Gamma} xyz \, ds$, siendo Γ la intersección de las superficies $x + y + z = 1$ y $y = z$ ubicada en el primer octante.

Solución

Podemos parametrizar Γ tomando $z = t$ de esta manera tenemos que,

$$\vec{r}(t) = (1 - 2t; t; t), \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right],$$

entonces $\vec{r}'(t) = (-2; 1; 1)$ y $ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{6} \, dt$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xyz \, ds &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(t) y(t) z(t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t) t^2 \sqrt{6} \, dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 - 2t^3) \, dt \\ &= \frac{\sqrt{6}}{96}. \end{aligned}$$

Ejemplo 19. Calcule $\int_{\Gamma} xy \, ds$, siendo Γ intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 8$.

Solución

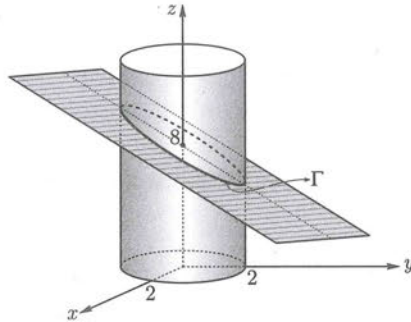


Fig. 1.22 Curva Γ .

Parametrizando la curva tenemos

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t; 2 \sin t; 8 - 2 \sin t), \quad t \in [0; 2\pi],$$

entonces

$$\vec{r}'(t) = (-2 \sin t; 2 \cos t; -2 \cos t); \quad ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt = 2\sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} xy \, ds = \int_0^{2\pi} 8 \sin t \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt = 0,$$

pues basta hacer el cambio de variable $u = 1 + \cos^2 t$.

Ejemplo 20. Calcule $\int_{\Gamma} (x + y) \, ds$ donde Γ es la intersección de las superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

Solución

Claramente Γ es una circunferencia, pues resulta de la intersección de un plano con una esfera, entonces es conveniente parametrizar usando las funciones seno y coseno (ver ejemplo 11).

Reescribiendo la curva $\Gamma : \begin{cases} x + y & = & 2 \\ x^2 + (2 - x)^2 + z^2 & = & 4 \end{cases}$ simplificando resulta ser

$\Gamma : \begin{cases} x + y & = & 2 \\ (x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} & = & 1 \end{cases}$. Representada así es fácil decidir la parametrización a usar,

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x & = & 1 + \cos t \\ y & = & \sqrt{2} \sin t \\ z & = & 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$$

de donde obtenemos que

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \|(-\sin t; \sqrt{2} \cos t; \sin t)\| = \sqrt{2} \, dt.$$

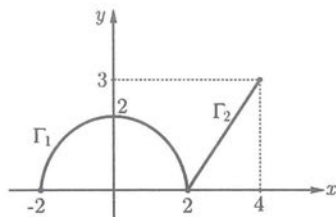
Luego,

$$\int_{\Gamma} (x + y) \, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t + \sqrt{2} \sin t) \, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

El teorema 1.1 puede extenderse para Γ una curva regular por partes, es decir, si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, donde el punto inicial de Γ_{k+1} es el punto final de Γ_k , entonces

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{\Gamma_1} f \, ds_1 + \int_{\Gamma_2} f \, ds_2 + \dots + \int_{\Gamma_m} f \, ds_m. \quad (1.4)$$

Ejemplo 21. Evalúe $\int_{\Gamma} (x + y) \, ds$, siendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 es la semicircunferencia centrado en el origen de coordenadas y radio 2, es decir,

Fig. 1.23 Curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

$\Gamma_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$, y Γ_2 es el segmento de recta de extremos $(2; 0)$ y $(4; 3)$ como se muestra en la figura 1.23.

Solución

Como Γ es una curva regular por partes, de la relación 1.4 tenemos que

$$\int_{\Gamma} (x + y) ds = \int_{\Gamma_1} (x + y) ds_1 + \int_{\Gamma_2} (x + y) ds_2.$$

Parametrizamos Γ_1 y Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad \vec{r}_1(t) = (-2 \cos t; 2 \sin t), \quad t \in [0; \pi]$$

$$\Gamma_2 : \quad \vec{r}_2(t) = (2 + 2t; 3t), \quad t \in [0; 1],$$

entonces tenemos

$$ds_1 = \|\vec{r}_1'(t)\| dt = 2 dt, \quad ds_2 = \|\vec{r}_2'(t)\| dt = \sqrt{13} dt$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x + y) ds &= 2 \int_0^{\pi} (-2 \cos t + 2 \sin t) dt + \sqrt{13} \int_0^1 (2 + 5t) dt \\ &= 4\sqrt{5} + \frac{9}{2} \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Pregunta:

Si al calcular integral $\int_{\Gamma_1} (x + y) ds$ se considera la siguiente parametrización para Γ_1 :

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t; 2 \sin t), \quad t \in [0; \pi].$$

¿Se obtiene el mismo resultado anterior? Justifique.

Ejemplo 22. Sea K el sólido ubicado en el primer octante y limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 2$. Sea Γ la intersección de la superficie que limita a K con el cilindro $y = x^2$. Halle $\int_{\Gamma} (16x + 4) ds$.

Solución

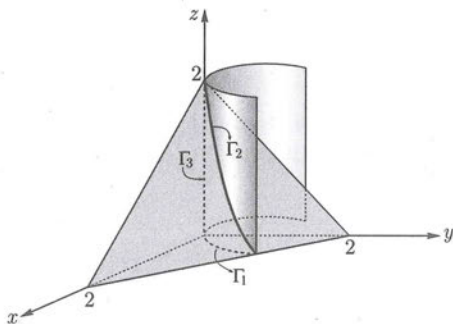


Fig. 1.24 Curva Γ .

Observe que Γ es una curva regular formada por Γ_1, Γ_2 y Γ_3 como se muestra en la figura 1.24. Luego, de la relación 1.4 tenemos que

$$\int_{\Gamma} (16x + 4) ds = \int_{\Gamma_1} (16x + 4) ds_1 + \int_{\Gamma_2} (16x + 4) ds_2 + \int_{\Gamma_3} (16x + 4) ds_3,$$

donde $\Gamma_1 : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$. Una parametrización para Γ_1 es

$$\vec{r}'(t) = (t; t^2; 0), \quad \text{para } t \in [0; 1],$$

entonces, $ds_1 = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma_1} (16x + 4) ds_1 \\ &= \int_0^1 (16t + 4) \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= 16 \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt + 4 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= \left[\frac{4}{3} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} + 2t \sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| 2t + \sqrt{1 + 4t^2} \right| \right]_{t=0}^1 \\ &= \frac{26}{3} \sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2) - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} y & = x^2 \\ x + y + z & = 2 \end{cases} . \text{ Una parametrización para } \Gamma_2 \text{ es,}$$

$$\vec{r}(t) = (t; t^2; 2 - t - t^2), \quad \text{para } t \in [0; 1],$$

$$\text{entonces, } ds_2 = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{2 + 8t^2 + 4t} dt$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Gamma_2} (16x + 4) ds_2 \\ &= \int_0^1 (16t + 4) \sqrt{2 + 8t^2 + 4t} dt \\ &= \frac{2}{3} (2 + 8t^2 + 4t)^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=0}^1 \\ &= \frac{2}{3} [(14)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]. \end{aligned}$$

$$\text{Una parametrización para } \Gamma_3 \text{ es dada por } \vec{r}(t) = (0; 0; t), \quad \text{para } t \in [0; 2],$$

$$\text{entonces, } ds_3 = \|\vec{r}'(t)\| dt = dt$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Gamma} (16x + 4) ds_3 \\ &= \int_0^2 4 dt \\ &= 8. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\Gamma} (16x + 4) d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Aplicaciones de la integral de línea de un campo escalar

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función sobre U , con U abierto de \mathbb{R}^n , para $n = 2$ o $n = 3$, y Γ una curva regular contenida en U .

1. Masa de una curva (para $n = 2$ o $n = 3$)

Si para cada $P \in \Gamma$, f se puede interpretar como la densidad lineal de un alambre cuya forma es representada por la curva Γ , entonces la masa del alambre viene dada por

$$M = \int_{\Gamma} f \, ds.$$

2. Momentos estáticos respecto de los planos coordenados (para el caso cuando $n = 3$)

$$M_{xy} = \int_{\Gamma} z f(x; y; z) \, ds, \quad M_{xz} = \int_{\Gamma} y f(x; y; z) \, ds, \quad \text{y} \quad M_{yz} = \int_{\Gamma} x f(x; y; z) \, ds.$$

3. Centro de masa (para $n = 3$)

El centro de masa de un alambre cuya forma viene dada por Γ y cuya función de densidad es descrita por la función $f(x; y; z)$ está ubicado en el punto $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$, donde:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

4. Momento de inercia (para $n = 3$)

Si interpretamos la curva Γ como un alambre cuya densidad viene dada por $f(x; y; z)$ y sea L una recta, el momento de inercia de Γ respecto de L es dado por

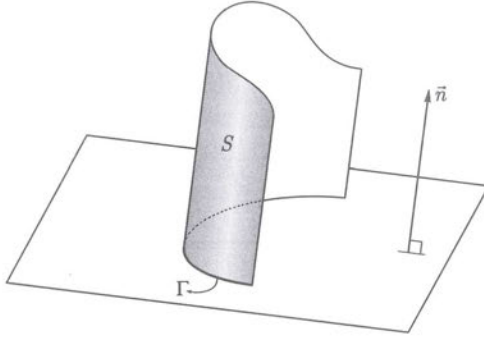
$$I_L(\Gamma) = \int_{\Gamma} d^2(P; L) \cdot f(x; y; z) \, ds$$

donde $P \in \Gamma$ y $d(P; L)$ es la distancia del punto P a la recta L .

5. Área de una superficie cilíndrica (para $n = 2$).

Si $f(x; y) \geq 0$ y Γ es una curva, contenida en un plano de vector normal unitario \vec{n} , entonces llamaremos superficie cilíndrica S de curva base Γ y eje \vec{n} al conjunto de puntos de los segmentos de recta con extremo inicial en Γ , paralelos a \vec{n} y de tamaño $f(x; y; z)$. El área de la superficie cilíndrica S se define por

$$A(S) = \int_{\Gamma} f(x; y) \, ds = \int_a^b f(x(t); y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Fig. 1.25 Superficie cilíndrica S .

6. Longitud de una curva

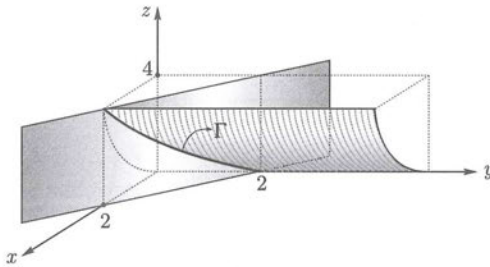
La longitud de Γ , curva regular parametrizada por \vec{r} se define como

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds$$

donde $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$.

Ejemplo 23. Sea Γ la curva, en el primer octante, que resulta de la intersección de las superficies $z = x^2$, $x + y = 2$. Si Γ tiene la forma de un alambre cuya densidad en cada punto $(x; y; z) \in \Gamma$ viene dada por $f(x; y; z) = \frac{1}{1 + 2z}$, halle la primera coordenada del centro de masa del alambre.

Solución

Fig. 1.26 Curva Γ .

Parametrizando la curva obtenemos $\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t^2 \end{cases}, t \in [0; 2]$,

entonces

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{\Gamma} \frac{1}{1+2z} ds \\
 &= \int_0^2 \frac{1}{1+2t^2} \sqrt{2+4t^2} dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}} dt \\
 &= \ln(3+2\sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x f ds \\
 &= \frac{1}{\ln(3+2\sqrt{2})} \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} dt \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\ln(3+2\sqrt{2})}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 24. La densidad de un alambre en cada punto $(x; y; z)$ viene descrita por la función $f(x; y; z) = |x|$. Si la forma de dicho alambre está definida por la intersección del cilindro $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$ con el plano $x = 2 - y$, determine la masa del alambre.

Solución

Podemos parametrizar la curva considerando $y = t$, así obtenemos

$$\vec{r}(t) = (2 - t; t; 4 - t^2), \quad t \in [-2; 2],$$

entonces $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{2+4t^2} dt$. Luego,

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma} |x| ds \\
 &= \int_{-2}^2 |2-t| \sqrt{2+4t^2} dt \\
 &= \int_{-2}^2 (2-t) \sqrt{2+4t^2} dt \\
 &= 2 \int_{-2}^2 \sqrt{2+4t^2} dt - \int_{-2}^2 t \sqrt{2+4t^2} dt
 \end{aligned}$$

integrando y simplificando obtenemos

$$M = 2 \left[4\sqrt{18} + \ln \left(\frac{\sqrt{18+4}}{\sqrt{18-4}} \right) \right].$$

Ejemplo 25. Halle la masa y el centro de masa de un alambre cuya forma corresponde a un cuarto de circunferencia de radio a , centrada en el origen de coordenadas y ubicada en el primer cuadrante. Se sabe que la densidad del alambre viene dada por $f(x; y) = x + y$.

Solución

Una parametrización de $\Gamma : x^2 + y^2 = a^2$ para $x \geq 0$ y $y \geq 0$ es

$$\vec{r}(t) = (a \cos t; a \sin t), \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

Luego,

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \|(-a \sin t; a \cos t)\| dt = a dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} (x + y) ds \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t) dt \\ &= 2a^2. \end{aligned}$$

Calculemos ahora las coordenadas $(\bar{x}; \bar{y})$ del centro de masa del alambre:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\Gamma} x f(x, y) ds = \int_{\Gamma} (x^2 + xy) ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin t \cos t + a^2 \cos^2 t) a dt \\ &= \frac{a^3 \pi}{4} + \frac{a^3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\Gamma} y f(x, y) ds = \int_{\Gamma} (yx + y^2) ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin t (a \cos t + a \sin t) a dt \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t + \sin^2 t) dt \\ &= a^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{4}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{4} a + \frac{1}{8} a\pi.$$

Ejemplo 26. Un alambre tiene la forma de la curva $\Gamma : \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ para $z \geq 0$. Si en cada punto $(x; y; z)$ de Γ la densidad viene dada por la función $f(x; y; z) = \sqrt{2 + 3z^2}$, halle la tercera coordenada del centro de masa de Γ .

Solución

Observe que Γ se define como la intersección del hiperboloide de una hoja con un plano, pero también puede definirse como $\Gamma : \begin{cases} 2x^2 - (1-x)^2 + 2z^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ para $z \geq 0$.

Simplificando obtenemos $\Gamma : \begin{cases} (x+1)^2 + 2z^2 = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$, es decir, Γ también resulta de la intersección de un cilindro con un plano y vista así es más sencillo decidir una parametrización adecuada:

$$x + 1 = 2 \cos t, \quad z = \sqrt{2} \sin t \quad \text{entonces} \quad y = 2 - 2 \cos t,$$

es decir,

$$\vec{r}(t) = (-1 + 2 \cos t; 2 - 2 \cos t; \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0; \pi].$$

Entonces,

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \|(-2 \sin t; 2 \sin t; \sqrt{2} \cos t)\| dt = \sqrt{2 + 6 \sin^2 t} dt.$$

Luego, la masa de Γ viene dada por

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} f ds \\ &= \int_0^{\pi} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\pi} (2 + 6 \sin^2 t) dt \\ &= 5\pi. \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_{\Gamma} z f ds \\ &= \int_0^{\pi} (\sqrt{2} \sin t)(2 + 6 \sin^2 t) dt \\ &= 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{12\sqrt{2}}{5\pi}.$$

Ejemplo 27. Halle las coordenadas del centro de masa de un alambre que tiene

la forma de la curva $\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ y densidad igual a

$$f(x; y; z) = 2xy.$$

Solución

De la condición dada obtenemos $\vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; t)$, entonces

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| = \|(-\sin t; \cos t; 1)\| dt = \sqrt{2} dt,$$

entonces

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} 2xy ds \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \int_{\Gamma} x f(x, y, z) ds \\ &= \int_{\Gamma} 2x^2 y ds \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2}{3}.$$

Se deja como ejercicio hallar las coordenadas \bar{y}, \bar{z} .

Ejemplo 28. Calcule el área de la superficie cilíndrica S de curva base

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

eje $\vec{n} = (0; 0; 1)$ y de tamaño $f(x; y) = x^2 + y^2$.

Solución

Si $(x; y) \in \Gamma$ entonces $y = \sqrt{1 - x^2}$, pues $y \geq 0$. Luego, para cada $(x; y) \in \Gamma$ tenemos que $f(x; y) = f(x; \sqrt{1 - x^2}) = 1$.

Se sabe que el área de la superficie S viene dada por $A(S) = \int_{\Gamma} f(x; y) ds$.

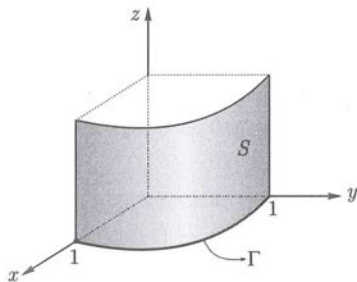


Fig. 1.27 Superficie cilíndrica.

Una parametrización de Γ es dada por la función $\vec{r}(t) = (\cos t; \sin t)$, $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, entonces $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = dt$. Por lo tanto,

$$A(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 29. Sea $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; \ln(\sec t); \ln(\sec t + \tan t))$, $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$.

a) Determine si Γ es una curva regular.

b) Calcule la longitud de Γ .

c) Calcule $\int_{\Gamma} e^z ds$.

Solución

a) La curva Γ es regular si existe una parametrización \vec{r} con r' continua y $\vec{r}'(t) \neq 0$ sobre su dominio. En este caso, es claro que las funciones componentes de \vec{r} :

$$x(t) = t, \quad y(t) = \ln(\sec t), \quad z(t) = \ln(\sec t + \tan t)$$

son derivables y además $x'(t) = 1$, $y'(t) = \tan t$, $z'(t) = \sec t$ son funciones continuas y no nulas sobre su dominio. Por lo tanto, se concluye que Γ es una curva regular.

b)

$$\begin{aligned}
 L(\Gamma) &= \int_{\Gamma} ds \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \|r'(t)\| dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec t dt \\
 &= \sqrt{2} \ln |\sec t + \tan t|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \sqrt{2} \ln(2 + \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 L(\Gamma) &= \int_{\Gamma} e^z ds \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec t + \tan t) \sec t dt \\
 &= \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t \sec t dt \right) \\
 &= \sqrt{2} (\tan t + \sec t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).
 \end{aligned}$$

Observación 9.

Hemos visto que bajo las condiciones del teorema 1.1 una integral de línea se calcula mediante integrales definidas, y por lo mismo comparten las mismas propiedades. En la siguiente sección precisaremos estas propiedades.

Ejercicios: Sección 1.2

1. Calcule la integral de línea $\int_{\Gamma} f ds$ sobre la curva Γ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x; y) = x$, $\Gamma : x = t^3$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $f(x; y) = xy^4$ donde Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

c) $f(x; y) = xy$, donde Γ es el segmento de recta que une los puntos $(-1; 1)$ y $(2; 3)$.

d) $f(x; y; z) = xyz$, donde $\Gamma : x = 2t$, $y = 3 \sin t$, $z = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

e) $f(x; y; z) = xy^2z$, donde Γ es el segmento de recta de extremos $(1; 0; 1)$ y $(0; 3; 6)$.

f) $f(x; y; z) = xz$, donde $\Gamma : x = 6t$, $y = 3\sqrt{2}t^2$, $z = 2t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

g) $f(x; y; z) = xe^{yz}$ donde Γ es el segmento de recta de extremos $(0; 0; 0)$, $(1; 2; 3)$.

h) $f(x; y; z) = xy^3$ donde $\Gamma : x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

i) $f(x; y; z) = xyz$, $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; 2t; 3t)$, $t \in [0; 2]$.

j) $f(x; y; z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$, siendo $\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

k) $f(x; y; z) = 3x + xy + z^3$, $\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos 4t; \sin 4t; 3t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

l) $f(x; y; z) = \frac{x+z}{y+z}$, $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; t; t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1; 3]$.

2. Calcule $\int_{\Gamma} (x-z)z ds$, donde Γ es la porción de curva $y = x^2$ contenida en el plano $z = 2$ de extremo inicial $(1; 1; 2)$ y extremo final $(2; 4; 2)$.

3. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, si Γ es la curva descrita por

$$\vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; 2t), \quad t \in [0; 2\pi].$$

4. Evalúe $\int_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$ donde Γ es la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x = y.$$

5. Un alambre delgado se dobla en forma de semicírculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Si la densidad lineal es una constante k , encuentre la masa y el centro de masa del alambre.

6. Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de $y = 4 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$ si la densidad es $f(x; y) = y$.

7. Suponga que un alambre tiene la forma de la curva Γ contenida en el primer octante, $\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$. Si en cada punto de Γ su densidad lineal es descrita por la función $f(x; y; z) = xy + 2y$, hallar la masa de Γ .

8. Encuentre la masa y el centro de masa de un alambre en forma de la hélice

$$x = t, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de su distancia al origen de coordenadas.

9. Calcule $\int_{\Gamma} |z| ds$ siendo Γ la curva arriba del plano xy que resulta de la intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con el plano $x + y = 2$.

10. Un alambre tiene la forma de la curva $\Gamma : \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ y su densidad es $f(x; y; z) = 2 - z$. Calcule la tercera coordenada del centro de masa del alambre.

11. Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la intersección de las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y = z$, si su densidad es $f(x; y; z) = x^2$.

12. Sea Γ la curva descrita por $\vec{r}(t) = (t \cos t; t \sin t; t^2)$, $t \in [0; \pi]$.

a) Calcule la integral de línea $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$.

b) Encuentre la ecuación de la superficie que contiene a la curva Γ .

c) Esboce la gráfica de la curva Γ .

13. Determine la primera coordenada del centro de masa de un alambre que tiene la forma de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, si su densidad es dada por $f(x; y; z) = \sqrt{3 + 6y^2}$.

14. Pruebe que si la curva Γ es dada en coordenadas polares, es decir $\Gamma : r = r(\theta)$, siendo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces la integral de línea de $f(x; y)$ sobre Γ es

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta; r \sin \theta) \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta.$$

15. Un alambre tiene la forma de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = xy \end{cases}$, donde $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, y en cada punto $(x; y; z) \in \Gamma$ su densidad es descrita por la función $f(x; y; z) = \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2}$. Calcule la masa del alambre.

1.3. Integral de línea de campos vectoriales

Campos vectoriales

Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , un *campo vectorial* sobre U es una función \vec{F} que asigna a cada punto $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ en U un vector n -dimensional $\vec{F}(x_1; x_2; \dots; x_n)$, esto es un campo vectorial en U es una función de la forma

$$\begin{aligned} \vec{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow \vec{F}(x) \end{aligned}$$

Observa que son estas la clase de funciones que se utilizan en física para representar fuerzas, campos de fuerzas, gravitacional, eléctrico, magnéticos, etc.

Para representar gráficamente un campo vectorial se eligen puntos $P \in U$, con $U \subset \mathbb{R}^n$, y se evalúa el campo \vec{F} en esos puntos, luego se dibujan los vectores $\vec{F}(P)$ usando P como extremo inicial, tal y como se muestra en la siguiente figura:

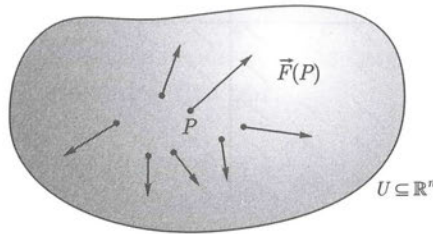


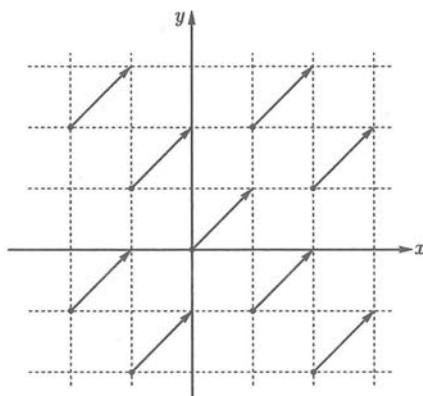
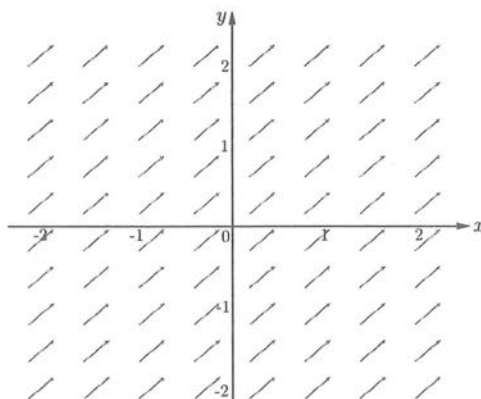
Fig. 1.28 Representación gráfica de un campo \vec{F} sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 30. Represente gráficamente el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = (1; 1)$.

En este ejemplo el campo vectorial \vec{F} está definido sobre \mathbb{R}^2 , de tal manera que a cada punto del plano le corresponde el vector $(1; 1)$.

Punto	$(x; y)$	$(0; 0)$	$(2; 1)$	$(1; 2)$	$(1; 1)$	$(-2; 2)$	$(-2; 1)$	$(-1; -2)$	$(1; -1)$	$(2; -2)$
Vector	$\vec{F}(x; y)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$	$(1; 1)$

Cuadro 1.1: Tabla 1.

Fig. 1.29 Representación gráfica de un campo \vec{F} para los valores de la tabla 1.1.Fig. 1.30.a Representación gráfica del campo $\vec{F}(x,y) = (1;1)$.

Ejemplo 31. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = (x; y)$.

- a) Represente gráficamente el campo \vec{F} para los valores que se indican en la siguiente tabla

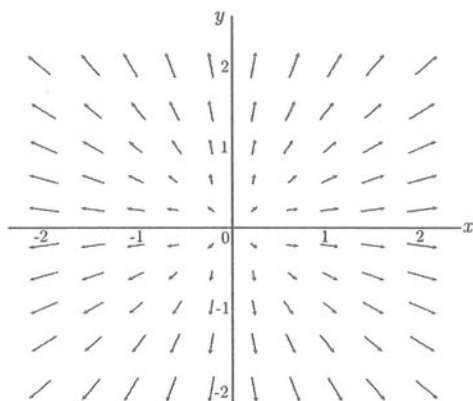
Punto	$(x; y)$	$(-1; 0)$	$(1; 1)$	$(2; 1)$	$(1; 2)$	$(-1; 0)$	$(-1; 1)$	$(0; -1)$
Vector	$\vec{F}(x; y)$

Cuadro 1.2: Tabla 2.

- b) Represente gráficamente el campo \vec{F} .

Solución:

- a) Se deja como ejercicio al lector.
b)

Fig. 1.30.b Representación gráfica del campo $\vec{F}(x,y) = (x,y)$.

Ejemplo 32. El campo de fuerzas asociado a las cargas q y q_1 , colocando a q en el origen de coordenadas, viene descrito por

$$\vec{F}(x; y; z) = k \frac{q q_1}{d^2} \vec{v}$$

donde, q, q_1 son las magnitudes de las cargas,

$(x; y; z)$ son las coordenadas de q_1 ,

d es la distancia que separa las cargas,

$k = 8,9874 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ es la constante universal (en el vacío) y

$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x; y; z)$ es el vector unitario radial cuyo sentido dependerá si las cargas son de signos iguales u opuestos.

Por ejemplo, si q y q_1 tienen cargas iguales a 1 Coulomb y q_1 se ubica en el punto $(1; 3; 2)$ entonces la fuerza eléctrica sobre q_1 viene dada por

$$\vec{F}(1; 2; 3) = \frac{k}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} \frac{(1; 3; 2)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{k}{\sqrt{14}} \left(\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}} \right) N$$

$$\|\vec{F}\| = \frac{8,9874 \times 10^9}{\sqrt{14}} N$$

en la dirección del vector $(1; 3; 2)$.

Ejercicio: Bosqueje la gráfica de \vec{F} en el caso que q y q_1 tengan cargas opuestas. Observa que el campo de fuerzas descrito en el ejemplo anterior está definido sobre $\mathbb{R}^3 - \{(0; 0; 0)\}$, esto es $\vec{F} : U = \mathbb{R}^3 - \{(0; 0; 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 33. Campo de velocidades generado por la rotación de un plano alrededor de un punto fijo con velocidad angular constante.

La función $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x; y) = (-y; x)$ define un campo vectorial en \mathbb{R}^2 y procediendo en forma similar a los ejemplos 30 y 31 se obtiene su representación gráfica:

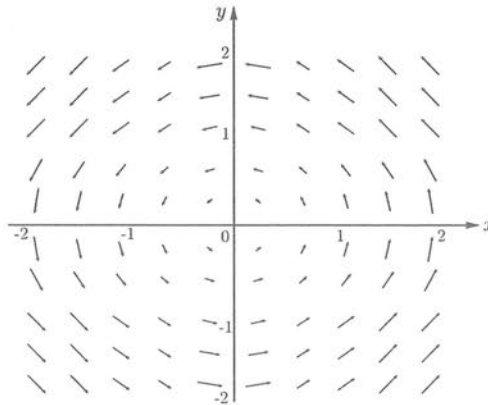


Fig. 1.31 Representación del campo $\vec{F}(x,y) = (-y; x)$.

Ejemplo 34. La función $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x; y) = (x + y; -x + y)$ define un campo vectorial en \mathbb{R}^2 y procediendo en forma similar a los ejemplos anteriores se obtiene su gráfica:

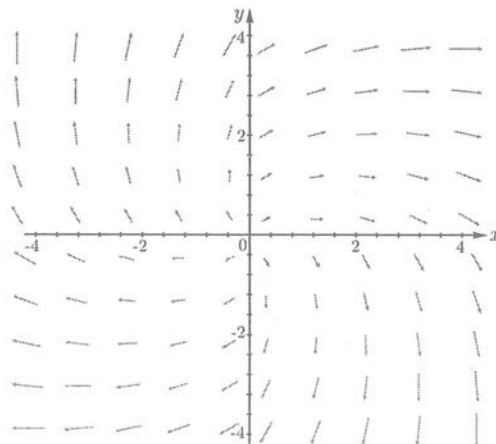


Fig. 1.32 Representación del campo $\vec{F}(x,y) = (x+y; -x+y)$.

Ejemplo 35. Campo gradiente Un ejemplo importante de campo vectorial es el campo proveniente de un campo escalar, llamado *campo gradiente*. Si f es diferenciable en U , siendo U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces el campo gradiente de f en U denotado por $\text{grad}f$ o $\vec{\nabla}f$ se define por

$$\vec{\nabla}f(P) = (f_{x_1}(P); f_{x_2}(P); \cdots ; f_{x_n}(P))$$

siendo $P = (x_1; x_2; \cdots ; x_n)$ y $f_{x_i}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$, para $i \in \{1; 2; \cdots ; n\}$.

De esta manera, si $f(x; y; z) = x^2yz$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}f(x; y; z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z); \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z); \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) \right) \\ &= (2xyz; x^2z; x^2y). \end{aligned}$$

Observa que si $f(x; y; z) = x^2 + 2y^2$, entonces $\vec{\nabla}f(x; y; z) = (2x; 4y; 0)$. Procediendo en forma similar a los casos anteriores resulta que si

$$g(x; y; z) = e^{xz} + y \arctan y - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2),$$

entonces

$$\vec{\nabla}g(x; y; z) = (ze^{xz}; \arctan y; xe^{xz}).$$

Motivación para el estudio de la integral de línea de campos vectoriales

Cuando una fuerza constante, en magnitud dirección y sentido, es la única que actúa sobre un objeto desplazándolo a lo largo de un segmento de recta una distancia d , entonces el trabajo realizado por la fuerza F se define como

$$W = F \cdot d$$

¿Cómo calcular el trabajo realizado por un campo de fuerzas \vec{F} no constante, si el objeto se mueve sobre una curva Γ ?

Para responder a esta pregunta supongamos que Γ es una curva regular en \mathbb{R}^3 parametrizada por $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y que el campo de fuerzas \vec{F} está representado por el campo vectorial $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo cuyo dominio contiene a Γ . Consideremos una partición $P = \{a = t_0; t_1; \dots; t_{n-1}; t_n = b\}$ del intervalo $[a; b]$, la misma que determina una nueva partición

$$\{r(a) = (r(t_0); r(t_1); \dots; r(t_{n-1}); r(t_n) = r(b))\}$$

de la curva Γ en porciones que denotamos por Γ_k con extremo inicial $r(t_{k-1})$ y extremo final $r(t_k)$,

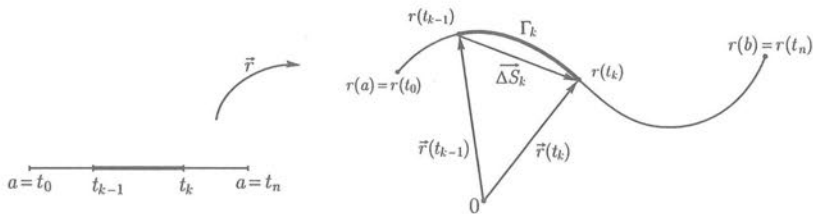


Fig. 1.33

estas porciones pueden aproximarse por segmentos rectilíneos tangentes a la curva, así conforme t varía de t_{k-1} a t_k , la partícula se mueve de $r(t_{k-1})$ a $r(t_k)$ y su vector de desplazamiento es

$$\overrightarrow{\Delta s_k} = \vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1}),$$

entonces

$$\frac{\overrightarrow{\Delta s_k}}{\Delta t_k} = \frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{\Delta t_k}$$

de manera que cuando $\Delta t_k \rightarrow 0$, obtenemos

$$\overrightarrow{\Delta s_k} \rightarrow \vec{r}'(t_k) \Delta t_k.$$

Por otro lado, como los Γ_k , $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ se pueden hacer tan pequeños como se desee, para lo cual basta tomar n suficientemente grande, podemos aproximar la fuerza que actúa en la porción Γ_k por la fuerza constante $\vec{F}(\vec{r}(t_k))$, entonces el trabajo realizado por la fuerza constante $\vec{F}(\vec{r}(t_k))$ a lo largo del segmento rectilíneo tangente a la curva en el punto correspondiente al extremo final del vector $\vec{r}(t_{k-1})$ viene dado por

$$\vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k,$$

lo que constituye una aproximación del trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de Γ_k . Asimismo, la expresión

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k$$

proporciona una aproximación del trabajo total realizado por \vec{F} a lo largo de Γ . Esta aproximación se mejora si la curva es dividida en porciones cada vez más pequeñas. Luego, definimos el trabajo W realizado por \vec{F} a lo largo de Γ como

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k$$

siempre y cuando tal límite exista. A la expresión anterior se le denota por $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y se le llama **integral de línea de \vec{F} sobre la curva Γ** .

La **integral de línea del campo vectorial \vec{F} sobre Γ** se denota por $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y se define por

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k$$

siempre y cuando el límite exista, donde $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de Γ .

El siguiente resultado da condiciones suficientes para garantizar la existencia de integral de línea de campos vectoriales.

Teorema 1.2. *Sea Γ una curva regular en \mathbb{R}^n , parametrizada por la función $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$ y $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a Γ , entonces existe $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y*

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (1.5)$$

Observación 10.

1. A diferencia de la integral de línea de campos escalares en la integral de línea campos vectoriales la orientación sí influye en la respuesta tal y como se verá más adelante.
2. Bajo las condiciones del teorema 1.2, la función $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ es continua y por tanto integrable.
3. Si la curva Γ es cerrada, la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ se denota por $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
4. Existe una notación alternativa para las integrales de línea.
Si $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ y $R(x; y; z)$ son las componentes de un campo vectorial \vec{F} en \mathbb{R}^3 y Γ una curva regular en \mathbb{R}^3 , parametrizada por la función $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, donde $t \in [a; b]$, entonces podemos escribir

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz.$$

Recuerde que

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt.$$

Análogamente, si $P(x; y)$ y $Q(x; y)$ son las componentes de un campo vectorial \vec{F} en \mathbb{R}^2 y Γ es una curva regular en \mathbb{R}^2 , parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$ con $t \in [a; b]$, entonces

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P(x; y) dx + Q(x; y) dy.$$

Ejemplo 36. Sea $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$, calcule la integral de línea de \vec{F} sobre la curva Γ definida por $\vec{r}(t) = (0; \text{sen } t; \text{cos } t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

Solución:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(0; \text{sen } t; \text{cos } t) \cdot (0; \text{cos } t; -\text{sen } t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0; \text{sen } t; \text{cos } t) \cdot (0; \text{cos } t; -\text{sen } t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 37. Calcule $\oint_{\Gamma} x dy - y dx$, siendo Γ la circunferencia de radio a , centrada en el origen de coordenadas y orientada en sentido antihorario.

Solución

Parametrizamos la curva Γ : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$,

entonces

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x dy - y dx &= \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt - y(t)x'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(a \cos t) - (a \sin t)(-a \sin t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 dt \\ &= 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Pregunta:

La función $\vec{s}(t) = (a \sin t; a \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$ también parametriza a Γ pero con una orientación contraria a la pedida. Calcule la integral $\oint_{\Gamma} x dy - y dx$ usando esta última parametrización y compare con el resultado anterior. ¿Cuál es su conclusión?

Ejemplo 38. Sea el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{F}(x; y) = (x + y; x - y)$ y Γ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (t; 2t)$, calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x + y) dx + (x - y) dy &= \int_0^2 [x(t) + y(t)] x'(t) dt + [x(t) - y(t)] y'(t) dt \\ &= \int_0^2 [(t + 2t)(1) + (t - 2t)(2)] dt \\ &= \int_0^2 t dt = 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 39. Calcule $\int_{\Gamma} (y-z)dx + (2x+z)dy + (x+y)dz$ donde Γ está parametrizada por $\vec{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (y-z)dx + (2x+z)dy + (x+y)dz &= \int_0^1 (2t-t^2) dt + (2t+t^2)(2 dt) + (t+2t)(2t) dt \\ &= \int_0^1 (7t^2 + 6t) dt \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 40. Calcule $\int_{\Gamma} 2x dx + (y+z) dy + dz$ donde Γ es intersección de las superficies $y = x^2$, $z = 2 - x^2 - y^2$ contenida en el primer octante.

Solución

Parametricemos Γ eligiendo $x = t$, de esta manera tenemos que

$$\vec{r}(t) = (t; t^2; 2 - t^2 - t^4), \quad t \in [0; 1],$$

En la figura 1.34 se exhibe la gráfica de Γ .

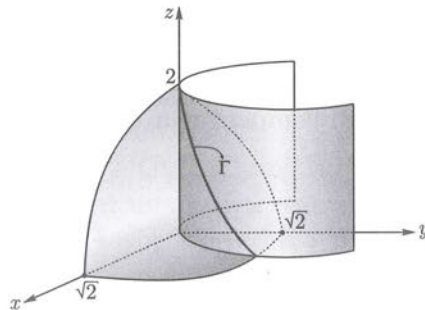


Fig. 1.34 Gráfico de curva Γ .

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} 2x dx + (y+z) dy + dz &= \int_0^1 2t dt + (2-t^4)(2t dt) + (-2t-4t^3)(dt) \\ &= \int_0^1 (4t - 2t^5 - 4t^3) dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 41. Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (xy; yz; xz)$ y la curva Γ es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$, recorrida en sentido antihorario vista desde la parte positiva⁸ del eje z .

⁸En adelante, entenderemos que una curva es vista desde la parte positiva del eje z si es vista desde el punto $(0; 0; z)$ para $z > 0$ tan grande como se quiera. De manera análoga, se puede decir que una curva es vista de la parte positiva del eje x o del eje y .

Solución

Parametricemos Γ por la función

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 1 - \cos t - \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Sea $I = \int_{\Gamma} xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \cos t \sin t (-\sin t \, dt) + \sin t (1 - \cos t - \sin t) (\cos t \, dt) + \\ &\quad + \cos t (1 - \cos t - \sin t) (\sin t - \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \sin^2 t \cos t + 2 \sin t \cos t - \sin t \cos^2 t - \cos^2 t + \cos^3 t) \, dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Sea $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva regular Γ , diremos que la función $\vec{s} : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **reparametrización** de la curva Γ , si existe una función

$$\varphi : [c; d] \rightarrow [a; b]$$

inyectiva de clase C^1 tal que $r_0(t) = \vec{r}(\varphi(t))$. La función φ se denomina **cambio de variable**.

Ejemplo 42. El segmento de recta de extremos $(1; 1; 2)$, $(2; 3; 1)$ está parametrizado por $\vec{r}(t) = (1 + t, 1 + 2t, 2 - t)$, $t \in [0; 1]$.

Por otro lado, la función

$$\vec{s}(t) = (2 - t; 3 - 2t; 1 + t), \quad t \in [0; 1]$$

es una reparametrización de la curva Γ , pues existe una función $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ inyectiva de clase C^1 , definida por $\varphi(t) = 1 - t$ que cumple

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(\varphi(t)) = \vec{r}(1 - t).$$

Geoméricamente \vec{s} recorre el segmento de recta entre $(1; 1; 2)$ y $(2; 3; 1)$ en sentido contrario al descrito por la gráfica de \vec{r} .

⁹Diremos que una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 sobre U si y solo si sus derivadas parciales existen y son continuas sobre U .

Observación 11.

Sea $\vec{s} : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de la curva Γ y sea $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de Γ siendo $\varphi : [c; d] \rightarrow [a; b]$ el cambio de variable, entonces como φ es inyectiva y continua tenemos uno de los casos siguientes:

a) $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$.

b) $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$.

En el primer caso, diremos que \vec{s} (ó φ) preserva la orientación y, en el segundo caso, que \vec{s} (ó φ) invierte la orientación.

Si $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de una curva Γ , la función

$$\vec{s} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{s}(t) = \vec{r}(a + b - t)$$

es una reparametrización de Γ , esto es, \vec{s} es otra parametrización de Γ que invierte la orientación y se le denota por $-\Gamma$.

Observemos que en este caso $\vec{s}(a) = \vec{r}(b)$ y $\vec{s}(b) = \vec{r}(a)$, es decir, \vec{s} recorre la misma curva Γ pero en sentido contrario.

Ejemplo 43. Sea la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = (1 - t; 1 + t; 2t)$, $t \in [0; 1]$, entonces $-\Gamma$ viene parametrizada por $\vec{s} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(1 - t) = (t; 2 - t; 2 - 2t).$$

Notemos que $\vec{s}(0) = \vec{r}(1) = (0; 2; 2)$ y $\vec{s}(1) = \vec{r}(0) = (1; 1; 0)$.

Propiedades de la integral de línea

Considerando las condiciones del teorema 1.2, las integrales de línea se evalúan en términos de las integrales definidas de funciones reales de variable real, luego comparten algunas propiedades.

Propiedad 1:

Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Si Γ una curva regular parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$ y $\vec{s} = \vec{s}(u)$, $u \in [c; d]$ es una reparametrización de Γ que preserva la orientación, entonces

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Prueba.

Como $\vec{s} = \vec{s}(u)$ es una reparametrización de Γ que preserve la orientación, entonces existe una función

$$\varphi : [c; d] \longrightarrow [a; b]$$

inyectiva y de clase C^1 tal que $\vec{s}(t) = \vec{r}(\varphi(t))$ con $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_c^d \vec{F}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}'(t) dt \\ &= \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(\varphi(t))) \cdot (\vec{r} \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(\varphi(t))) \cdot (\vec{r} \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(\varphi(t))) \cdot \vec{r}'(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Haciendo $u = \varphi(t)$ tenemos que $du = \varphi'(t) dt$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u)(du) \\ &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Propiedad 2:

Sea $\vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial continuo sobre el abierto U de \mathbb{R}^n , y sea Γ una curva regular parametrizada por $\vec{r} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma = \vec{r}([a; b]) \subset U$, entonces

$$\int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $-\Gamma$ representa la curva Γ pero con orientación contraria.

Prueba.

Como $\vec{r} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de Γ , entonces una parametrización de $-\Gamma$ es

$$\vec{s} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{s}(t) = \vec{r}(a + b - t).$$

Luego, $\vec{s}'(t) = -\vec{r}'(a + b - t)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(a + b - t)) \cdot [-\vec{r}'(a + b - t)] dt. \end{aligned}$$

Haciendo $u = a + b - t$ tenemos que $du = -dt$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_b^a \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u)(-du) \\ &= - \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) du \\ &= - \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Observación 12. La propiedad anterior sigue siendo válida para curvas regulares por partes.

Propiedad 3:

Sean $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial continuo sobre el abierto U de \mathbb{R}^n , y Γ una curva regular por partes, donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, entonces se cumple

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \int_{\Gamma_m} \vec{F} \cdot d\vec{r}_m.$$

Ejemplo 44. Calcule $\int_{\Gamma} (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz$, siendo Γ el triángulo de vértices $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ y $C(0; 0; 1)$ orientado en sentido antihorario visto desde el origen de coordenadas.

Solución

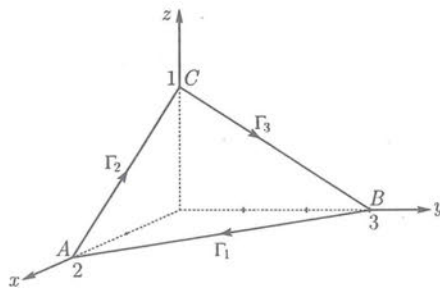


Fig. 1.35 Gráfico de la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Como Γ es un triángulo, es una curva regular por partes, podemos descomponerla como unión de curvas regulares, sus lados, donde

$$\Gamma_1 : x = 2t, y = 3 - 3t, z = 0, \text{ para } t \in [0; 1].$$

$$\Gamma_2 : x = 2 - 2t, y = 0, z = t, \text{ para } t \in [0; 1].$$

$$\Gamma_3 : x = 0, y = 3t, z = 1 - t, \text{ para } t \in [0; 1].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz &= \int_0^1 (9 - 7t)(2 dt) + (4t)(-3 dt) \\ &= \int_0^1 (18 - 26t) dt \\ &= [18t - 13t^2]_0^1 = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz &= \int_0^1 (2)(-2 dt) + (2 - 2t) dt \\ &= \int_0^1 (-2 - 2t) dt. \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz &= \int_0^1 (1 - t)(3 dt) + (-3t)(- dt) \\ &= \int_0^1 3 dt = 3. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = 5.$$

Propiedad 4:

Sean $\vec{F}, \vec{G} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vectoriales continuos sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n y Γ una curva regular por partes parametrizada por $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma = \vec{r}([a; b]) \subset U$, entonces se cumple

$$\int_{\Gamma} (m\vec{F} + n\vec{G}) \cdot d\vec{r} = m \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + n \int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r}, \quad \text{para } m, n \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 45. Calcule $\oint_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ si Γ es el cuadrilátero con vértices $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$ recorrido en el sentido antihorario.

Solución

Como en el ejemplo anterior, la curva Γ (rombo) es regular por partes y la podemos describir como unión de curvas regulares (lados del rombo). Ver figura 1.36

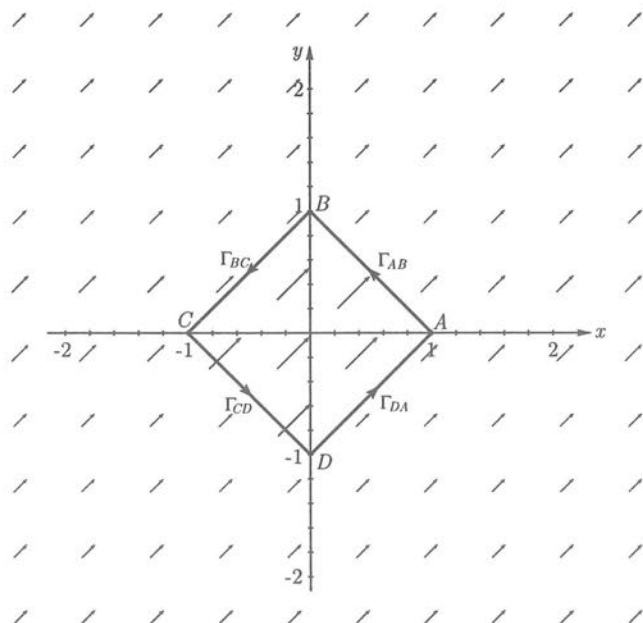


Fig. 1.36 Gráfico de la curva $\Gamma = \Gamma_{AB} \cup \Gamma_{BC} \cup \Gamma_{CD} \cup \Gamma_{DA}$.

De la expresión dada tenemos que $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{1}{|x| + |y|}; \frac{1}{|x| + |y|} \right)$, entonces

$$\oint_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_{BC}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\Gamma_{CD}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 + \int_{\Gamma_{DA}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_4$$

donde,

$$\Gamma_{AB} : \vec{r}_1(t) = (1 - t; t), \quad t \in [0; 1].$$

$$\Gamma_{BC} : \vec{r}_2(t) = (-t; 1 - t), \quad t \in [0; 1].$$

$$\Gamma_{CD} : \vec{r}_3(t) = (t - 1; -t), \quad t \in [0; 1].$$

$$\Gamma_{DA} : \vec{r}_4(t) = (t; t - 1), \quad t \in [0; 1].$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_0^1 \vec{F}(1-t; t) \cdot (-1; 1) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|1-t|+|t|}; \frac{1}{|1-t|+|t|} \right) \cdot (-1; 1) dt = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{BC} &= \int_{\Gamma_{BC}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \int_0^1 \vec{F}(-t; 1-t) \cdot (-1; -1) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|-t|+|1-t|}; \frac{1}{|-t|+|1-t|} \right) \cdot (-1; -1) dt = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{CD} &= \int_{\Gamma_{CD}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = \int_0^1 \vec{F}(t-1; -t) \cdot (1; -1) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|t-1|+|-t|}; \frac{1}{|t-1|+|-t|} \right) \cdot (1; -1) dt = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{DA} &= \int_{\Gamma_{BC}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_4 = \int_0^1 \vec{F}(t; t-1) \cdot (1; 1) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|t|+|t-1|}; \frac{1}{|t|+|t-1|} \right) \cdot (1; 1) dt = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$$

Aplicación de la integral de línea de un campo vectorial

Trabajo

Se ha visto anteriormente que el trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} a lo largo de la curva Γ parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$ para trasladar una partícula desde $r(a)$ hasta $r(b)$ se define como

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ejemplo 46. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas definido por $\vec{F}(x; y) = x\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j}$ al mover una partícula a lo largo de un arco de la cicloide parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (t - \text{sen } t)\mathbf{i} + (1 - \text{cos } t)\mathbf{j}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Solución

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\Gamma} x \, dx + (y + 2) \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (t - \text{sen } t)(1 - \text{cos } t) \, dt + (1 - \text{cos } t + 2) \text{sen } t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t \text{cos } t + 2 \text{sen } t) \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - 3 \text{cos } t - t \text{sen } t \right]_0^{2\pi} \quad \text{e integrando por partes obtenemos} \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 47. Sea \vec{F} el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por $\vec{F}(x; y; z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea Γ la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t + 1; t^2; 2t + 3)$, con $t \in [0; 1]$. Calcule el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de Γ .

Solución

De la parametrización dada es claro que $\vec{r}'(t) = (1; 2t; 2)$, o de manera equivalente

$\vec{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \vec{F}(t+1; t^2; 2t+3) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^1 ((t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (2t+3)\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 5t + 7) dt = 10. \end{aligned}$$

Ejemplo 48. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}(x; y) = (y; -x)$ que actúa sobre una partícula que se mueve sobre el arco de parábola $x = 4 - y^2$, sabiendo que el recorrido se inicia en el punto $(-5; 3)$ y termina en el punto $(0; 2)$.

Solución

Una parametrización para el arco de parábola descrito en el problema es

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = 4 - t^2 \\ y = t \end{cases} \quad \text{para } t \in [-2; 2].$$

Sabemos que el trabajo realizado por \vec{F} sobre Γ se define por $W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Luego,

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} y dx - x dy \\ &= \int_{-2}^2 t(-2t dt) - (4 - t^2) dt \\ &= - \int_{-2}^2 (t^2 + 4) dt \\ &= -\frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 49. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{-4xy dx + 2(x^2 - y^2 - 1) dy}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2 - (x^2 + y^2 - 1)}$, donde Γ es la curva plana $x^2 + y^2 = 2x$ recorrida en sentido antihorario.

Solución

Sea $I = \int_{\Gamma} P(x; y) dx + Q(x; y) dy$ donde,

$$P(x; y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2 - (x^2 + y^2 - 1)}$$

y

$$Q(x; y) = \frac{2(x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2 - (x^2 + y^2 - 1)}.$$

Al completar cuadrados en la ecuación que describe a la curva Γ tenemos que $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, cuya parametrización es dada por

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi].$$

Luego,

$$P(x; y) dx = \frac{4 \sin^2 t (1 + \cos t)}{2 \cos t + 4} \quad y \quad Q(x; y) dy = \frac{2 \cos t (2 \cos t + 2 \cos^2 t - 1)}{2 \cos t + 4}$$

de manera que al sumar estas expresiones obtenemos $Pdx + Qdy = 1$. Por lo tanto,

$$I = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ejemplo 50. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (x^2; y^2; z)$. Halle el trabajo realizado por \vec{F} para trasladar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2; 2; 4)$ a lo largo de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = xy \end{cases}$.

Solución

Observe que Γ está descrita como la intersección de un paraboloides circular con un paraboloides hiperbólico, pero también puede definirse como

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 & = & 2xy \\ z & = & xy \end{cases},$$

que en forma simplificada resulta $\Gamma : \begin{cases} x & = & y \\ z & = & xy \end{cases}$, es decir, Γ resulta de la intersección de un plano con un paraboloides hiperbólico, de esta manera es más sencillo definir una parametrización para $\Gamma : x(t) = y(t) = t, z(t) = t^2$, esto es,

$$\vec{r}(t) = (t; t; t^2), \quad t \in [0; 2].$$

Luego,

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} x^2 dx + y^2 dy + z dz \\ &= \int_0^2 (2t^2 + 2t^3) dt = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 51. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = (\ln(1 + z^2); z^2 - x^2; x^2 - y^2)$$

para desplazar una partícula desde el punto $(2; \sqrt{2}; \sqrt{2})$ hasta el punto $(2; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ a lo largo del camino más corto sobre la curva $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = & 8 \\ y^2 + z^2 & = & 2x \end{cases}$.

Solución

La curva Γ también puede definirse como: $\begin{cases} x & = & 2 \\ y^2 + z^2 & = & 4 \end{cases}$. Esta forma de definir Γ facilita su parametrización:

$$\vec{r}(t) = (2; 2 \cos t; 2 \sin t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\Gamma} \ln(1+z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [(4\sin^2 t - 4)(-2\sin t) + (4 - 4\cos^2 t)(2\cos t)] dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-8\sin^3 t + 8\sin t + 8\cos t - 8\cos^3 t) dt \\
 &= \left[\frac{8}{3} \sin^2 t \cos t - \frac{8}{3} \cos t + \frac{8}{3} \sin t - \frac{8}{3} \cos^2 t \sin t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 52. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (xz; y + z; x)$. Calcule el trabajo realizado por este campo para trasladar una partícula desde el punto $A(1; 0; 0)$ siguiendo la curva cerrada Γ , ubicada en el primer octante, que se obtiene al intersectar la superficie $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$, $z \leq 1$, con los planos coordenados, si Γ es recorrida en sentido antihorario cuando es vista desde la parte positiva del eje z .

Solución

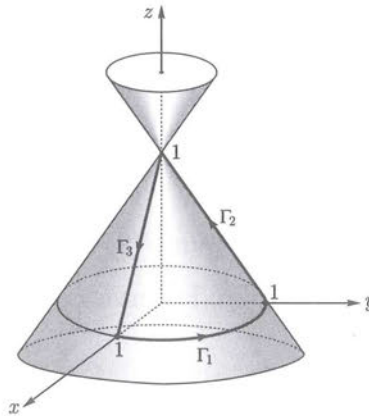


Fig. 1.37 Gráfico de la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Cuando intersectamos la superficie con los planos coordenados en el primer octante la curva Γ obtenida es una curva regular por partes como se muestra en la figura 1.37, es decir, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Luego,

$$W = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3,$$

donde $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (\cos t; \sen t; 0)$, $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\cos t; \sen t; 0) \cdot (-\sen t; \cos t; 0) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0; \sen t; \cos t) \cdot (-\sen t; \cos t; 0) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sen t \cos t dt \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\Gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (0; 1; 0) + t(0; -1; 1) = (0; 1 - t; t)$, $t \in [0; 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 &= \int_0^1 \vec{F}(0; 1 - t; t) \cdot (0; -1; 1) dt \\ &= \int_0^1 (0; 1; t) \cdot (0; -1; 1) dt \\ &= \int_0^1 (t - 1) dt \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\Gamma_3 : \vec{r}_3(t) = (0; 0; 1) + t(1; 0; -1) = (t; 0; 1 - t)$, $t \in [0; 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 &= \int_0^1 \vec{F}(t; 0; 1 - t) \cdot (1; 0; -1) dt \\ &= \int_0^1 (t - t^2; 1 - t; t) \cdot (1; 0; -1) dt \\ &= \int_0^1 (2t - t^2 - 1) dt \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W = -\frac{1}{3}$.

La siguiente observación establece la relación entre la integral de línea de un campo vectorial con la integral de línea de un campo escalar.

Observación 13.

1. Sea \vec{F} un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene a una curva regular

$\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)), t \in [a; b]$, sea \vec{T} un vector tangente unitario a Γ en cada punto, entonces $\vec{F} \cdot \vec{T}$ es la componente de \vec{F} en la dirección del vector tangente unitario a Γ , luego

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds, \quad (1.6)$$

en efecto, sea $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ el vector tangente unitario de Γ , entonces por el teorema 1.2 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T} ds. \end{aligned}$$

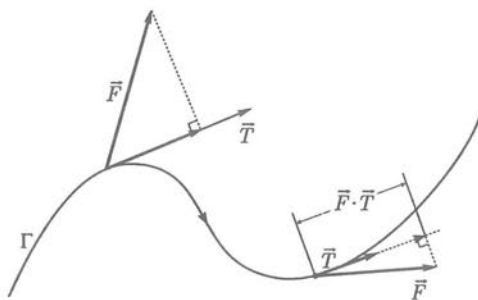


Fig. 1.38

Cuando \vec{F} representa un campo de velocidad de un fluido, el producto $f = \vec{F} \cdot \vec{T}$ es la componente tangencial de la velocidad, y la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ es llamada **integral de flujo** de \vec{F} a lo largo de la curva Γ .

2. La expresión 1.6 permite aplicar el concepto de integral de línea de un campo vectorial en diferentes situaciones:

- a) Si en cada punto P de la curva Γ el campo \vec{F} es perpendicular a la recta tangente a Γ en P , la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es cero. Es decir, si \vec{F} representa un campo de fuerzas, el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de Γ será nulo.

Ejemplo 53. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y) = (x; y)$, entonces el trabajo que realiza este campo para trasladar una partícula siguiendo la curva

$\Gamma : \vec{r}(t) = (a \cos t; a \sin t;)$ con $t \in [0; 2\pi]$ es

$$\begin{aligned} w &= \int_{\Gamma} x dx + y dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(-a \sin t) + (a \sin t)(a \cos t)] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

- b) La integral $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, mide la tendencia del fluido de circular alrededor de Γ y es llamada **circulación** de \vec{F} a lo largo de la curva Γ . Es decir, si Γ es una curva plana y el campo de velocidades es perpendicular al plano que contiene Γ , la circulación será nula.

3. Suponga que $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$ determina la posición de una partícula en el instante t que se mueve por acción del campo de fuerzas \vec{F} , entonces $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ y $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ son respectivamente, la velocidad y la aceleración de dicha partícula. La segunda Ley de Newton, establece que la fuerza \vec{F} en el punto $r(t)$ es igual al producto de la masa m por la aceleración, es decir, $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$, luego al multiplicar escalarmente ambos lados de la igualdad por $\vec{r}'(t)$, obtenemos

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m\vec{a}(t) \cdot \vec{r}'(t)$$

es decir,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t))$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}m \|\vec{v}(t)\|^2 \right]_a^b.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$W = \frac{1}{2}m \|\vec{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2}m \|\vec{v}(a)\|^2.$$

Esto significa que el trabajo necesario para mover una partícula de masa m a lo largo de la curva Γ desde el punto $A = r(a)$ hasta el punto $B = r(b)$, por la acción del campo de fuerzas \vec{F} , es igual a la diferencia de la energía cinética en dichos puntos.

Ejercicios: Sección 1.3

1. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, donde $\Gamma : \vec{r}(t) = (e^{2t} \cos(3t); e^{2t} \sin(3t))$, donde $t \in [0; 2\pi]$.

2. Sea $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ y consideremos las siguientes curvas Γ_1 , Γ_2 parametrizadas por

$$\vec{r}(t) = (t; t^2), \quad t \in [0; 1], \quad \vec{s}(t) = (1 - 2t; 4t^2 - 4t + 1), \quad t \in [0; \frac{1}{2}].$$

Calcule $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

3. Calcule $\int_{\Gamma} (x^2 - y) dx + (x - y^2) dy$, siendo Γ el segmento de recta de extremo inicial $(1; 1)$ y extremo final $(3; 5)$.

4. Calcule el valor de la integral $\int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ donde Γ es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ y $x + y = 2$. Si además se sabe que la curva Γ es recorrida de manera que mirando desde el origen su sentido es horario.

5. Sea Γ la intersección del paraboloides $x^2 + 2y^2 = 4 - z$ con los planos coordenados en el primer octante. Halle el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x; y; z) = (y^2; x^2; x^3 y^3 z^3)$ para mover una partícula a lo largo de la curva Γ partiendo del punto $(2; 0; 0)$ y recorriéndola en sentido horario visto desde el origen de coordenadas.

6. Sea Γ la curva parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t) = (\sin t; \cos t)$, donde $t \in [0; \pi]$. Calcule $\int_{\Gamma} (y - x) dx + (x + y) dy$.

7. Si Γ es la curva definida por la ecuación $|x| + |y| = 1$, $x \leq 0$ y recorrida en sentido horario, halle

$$\int_{\Gamma} (y - x) dx + (x + y) dy.$$

8. Calcule $\int_{\Gamma} (y + z + e^y) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$ donde Γ es la intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el plano $y = x$, sabiendo que es recorrida en sentido antihorario al observarla desde la parte positiva del eje x .

9. Evalúe $\int_{\Gamma} ydx + (z-x)dy + xdz$, siendo $\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4x \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = z \end{cases}$ recorrida en sentido antihorario, vista desde la parte positiva del eje z .

10. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}; \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}; -\frac{xy}{z^2} \right), x > 0, y > 0, z > 0$$

para trasladar una partícula desde el punto $A(3; \sqrt{3}; 2)$ al punto $B(2; 2; 2\sqrt{2})$ a lo largo de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$

11. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = (6xy^3 + 2z^2; 9x^2y^2; 4xz + 1)$$

para mover una partícula desde el punto $P(2; 0; 0)$ hasta el punto $Q(0; 0; 2)$ siguiendo la curva Γ , que resulta de la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, si se sabe que Γ es recorrida en sentido antihorario si se mira desde el origen de coordenadas.

12. Calcule el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ para mover una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(1; 1; \sqrt{2})$ siguiendo la curva Γ , que resulta de la intersección de las superficies descritas por $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = x$.

13. Dado el sólido $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y \mathcal{P} el plano de ecuación $x + y + z = 2$. Si Γ es la intersección de la superficie que limita Ω con el plano \mathcal{P} , recorrida en sentido horario vista desde el origen de coordenadas, calcule la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x; y; z) = e^x \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

14. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y $\vec{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^1 de cierta curva.

- a) Si \vec{F} es perpendicular a $\vec{r}'(t)$ en $r(t)$ para cada $t \in [a; b]$, demuestre que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

- b) Si el campo vectorial \vec{F} es paralelo a $\vec{r}'(t)$ en $r(t)$ para cada $t \in [a; b]$, es decir, $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \lambda(t)\vec{r}'(t)$, siendo $\lambda(t) > 0$ para cada $t \in [a; b]$,

$$\text{demuestre que } \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \|\vec{F}\| ds.$$

1.4. Teoremas fundamentales para las integrales de línea

En muchas aplicaciones aparecen fuerzas (campos vectoriales) para los cuales se cumple que el trabajo realizado para desplazar una partícula de un punto a otro es independiente de la trayectoria¹⁰ de la partícula. A estas fuerzas se les conoce como conservativas¹¹.

Ejemplo 54. Compruebe que el campo de fuerzas gravitacional es conservativo.
Solución

Asumamos que el campo gravitacional que actúa sobre una partícula de masa m ubicada en el punto $(x; y; z)$ viene dado por

$$\vec{F}(x; y; z) = (0; 0; -mg)$$

para m y g constantes.

Consideremos, dos puntos $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$ y una curva arbitraria Γ con extremos inicial y final A y B respectivamente, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad t \in [a; b]$$

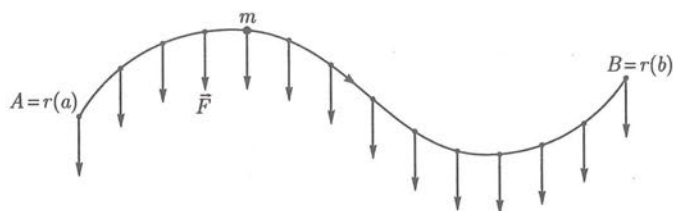


Fig. 1.39

Así tenemos que $\vec{r}(a) = (x_1; y_1; z_1)$ y $\vec{r}(b) = (x_2; y_2; z_2)$.

Calculemos ahora el trabajo realizado por el campo gravitacional \vec{F} al trasladar

¹⁰Línea descrita en el espacio por un punto en movimiento.

¹¹Son las fuerzas que realizan el mismo trabajo entre dos puntos sin importar la trayectoria seguida.

la partícula de masa m del punto A al punto B a lo largo de Γ .

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_a^b (0; 0; -mg)(x'(t); y'(t); z'(t)) dt \\
 &= \int_a^b -mg z'(t) dt \\
 &= -mg \int_a^b z'(t) dt \\
 &= -mg z(t) \Big|_{t=a}^b \\
 &= -mg (z(b) - z(a)).
 \end{aligned}$$

Luego, el trabajo es independiente de la curva Γ y en este caso solo depende de las diferencias de la altura entre los puntos A y B .

A continuación veremos otros ejemplos de campos conservativos y no conservativos.

Ejemplo 55. Dado el campo $\vec{F}(x; y) = (xy; y^2)$ evalúe la integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en los siguientes casos:

- $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; t), t \in [0; 1]$.
- $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; t^2), t \in [0; 1]$.
- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde la curva $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (t; 0), t \in [0; 1]$ y la curva $\Gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (0; t), t \in [0; 1]$.

Solución

a)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} xy dx + y^2 dy \\
 &= \int_0^1 2t^2 dt \\
 &= \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} xy \, dx + y^2 \, dy \\
 &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5) \, dt \\
 &= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma_1} xy \, dx + y^2 \, dy + \int_{\Gamma_2} xy \, dx + y^2 \, dy \\
 &= 0 + \int_0^1 t^2 \, dt \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Observemos que todas las curvas dadas anteriormente tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final, luego estos resultados muestran que, en general una integral de línea depende de la curva sobre la cual se integra, es decir, el campo vectorial \vec{F} de este ejemplo no es conservativo.

Ejemplo 56. Dado el campo $\vec{F}(x; y) = (x; y)$ evalúe la integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en los siguientes casos:

a) $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; t), t \in [0; 1]$.

b) $\Gamma : \vec{r}(t) = (t; t^2), t \in [0; 1]$.

c) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde la curva $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (t; 0), t \in [0; 1]$ y la curva $\Gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (0; t), t \in [0; 1]$.

d) $\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t); y(t)), t \in [a; b]$, con $x(a) = y(a) = 0$ y $x(b) = y(b) = 1$, cuya gráfica es mostrada en la figura 1.40,

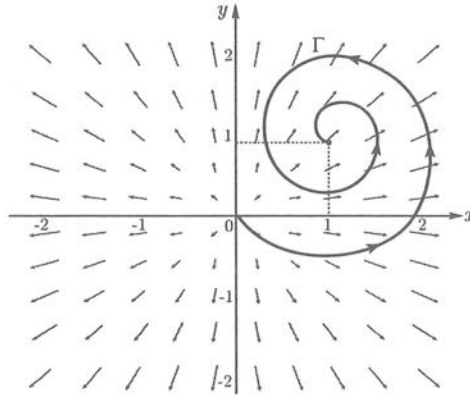


Fig. 1.40

Solución

a)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} x dx + y dy \\
 &= \int_0^1 2t dt \\
 &= t^2 \Big|_0^1 = 1.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} x dx + y dy \\
 &= \int_0^1 (t + 2t^3) dt \\
 &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 = 1.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma_1} x dx + y dy + \int_{\Gamma_2} x dx + y dy \\
 &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 t dt \\
 &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 1.
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
 &= \int_a^b (x(t); y(t)) \cdot (x'(t); y'(t)) dt \\
 &= \int_a^b [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)] dt \\
 &= \int_a^b \frac{1}{2} [x^2(t) + y^2(t)]' dt \\
 &= \frac{1}{2} [x^2(t) + y^2(t)]_{t=a}^b \\
 &= \frac{1}{2} [x^2(b) + y^2(b)] - \frac{1}{2} [x^2(a) + y^2(a)] \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Las curvas consideradas anteriormente tienen los mismo puntos extremos, sin embargo a diferencia del ejemplo anterior las integrales de línea obtenidas sobre cada curva son iguales, esto significa que no dependen de la curva sobre la cual se integra, es decir, el campo de fuerzas \vec{F} de este ejemplo es conservativo.

En lo que sigue iniciaremos un estudio de las propiedades que tienen los campos de fuerzas llamados conservativos a fin de:

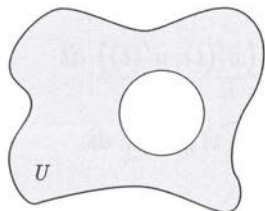
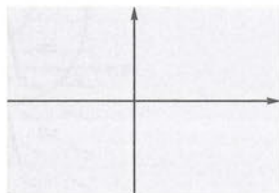
- Poder reconocerlos sin necesidad de calcular expresamente la integral de línea.
- Calcular su integral de línea conociendo apenas los extremos de la curva.
- Determinar el valor de su integral de línea sobre un camino cerrado.

Para ello debemos precisar algunos conceptos.

Sea U un subconjunto de \mathbb{R}^n , diremos que U es *conexo* (por caminos) si dos puntos cualesquiera de U pueden unirse mediante una curva totalmente contenida en U .

Ejemplo 57.

a)

Fig. 1.41 El conjunto U sombreado es conexo.Fig. 1.42 El conjunto \mathbb{R}^2 es conexo.

b)

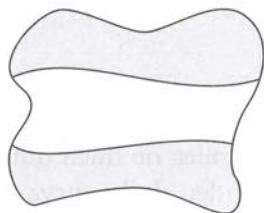


Fig. 1.43 El conjunto sombreado no es conexo.

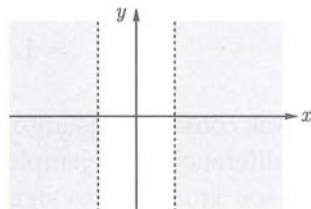
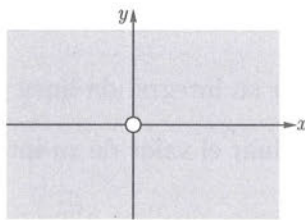


Fig. 1.44 El conjunto sombreado no es conexo.

Ejercicio: Señale cuáles de los siguientes conjuntos son conexos.

a)

Fig. 1.45 $\mathbb{R} - \{0\}$.Fig. 1.46 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) $U = \mathbb{R}^3 - \{(x; y; z) : z = 0\}$.

c) $U = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Sea U un subconjunto conexo y abierto de \mathbb{R}^n , y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, diremos que la integral $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es *independiente del camino de integración* en U , si y solo si

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para cualquier par de curvas Γ_1, Γ_2 en U que tengan los mismos extremos inicial y final.

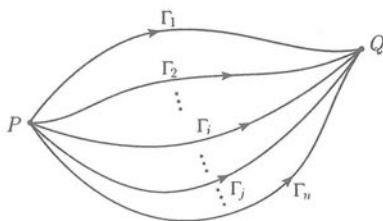


Fig. 1.47 $\int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_j} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para cada i, j .

Sea U un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n , diremos que el campo vectorial continuo $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, es *conservativo* en U si y solo si la integral de línea $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino de integración en U .

Ejemplo 58. Como ya hemos demostrado anteriormente, el campo gravitacional

$$\vec{F}(x; y; z) = (0; 0; -mg)$$

y el campo $\vec{F}(x; y) = (x; y)$ son conservativos en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, pues la integral de línea de \vec{F} entre dos puntos cualesquiera no depende de la curva que los une.

Ejemplo 59. Compruebe que el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (2xy; x^2; 1)$ es conservativo en \mathbb{R}^3 .

Solución

Debemos demostrar que \vec{F} tiene integral independiente del camino de integración en \mathbb{R}^3 , para esto consideremos una curva arbitraria $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ de extremos inicial y final A y B respectivamente, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad t \in [a; b].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} 2xy \, dx + x^2 \, dy + dz \\
 &= \int_a^b [2x(t)y(t)x'(t) + x^2(t)y'(t) + z'(t)] \, dt \\
 &= \int_a^b [(x^2(t)y(t))' + z'(t)] \, dt \\
 &= [x^2(t)y(t) + z(t)]_a^b \\
 &= x^2(b)y(b) + z(b) - x^2(a)y(a) - z(a).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como esta integral no depende del camino de integración en Γ , el campo dado es conservativo en \mathbb{R}^3 .

En el ejemplo anterior hemos visto que

- Evaluar la integral de línea de un campo vectorial \vec{F} se redujo a evaluar la antiderivada de la función $\vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t)$ en los extremos de la curva.
- $\vec{F}(x; y; z) = (2xy; x^2; 1)$ es el gradiente del campo escalar $f(x; y; z) = x^2y + z$ esto es, $\vec{\nabla}f = \vec{F}$.

Pregunta:

¿Será cierto que si un campo vectorial \vec{F} es el gradiente de algún campo escalar f , entonces \vec{F} es conservativo?

El siguiente teorema establece bajo qué condiciones la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Teorema 1.3. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo y abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 tal que el campo $\vec{F} = \vec{\nabla}f$, entonces

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) \quad (1.7)$$

para cualquier curva regular Γ contenida en U y de extremos A y B .

Prueba.

Como U es un conjunto conexo, entonces existe una curva $\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, para $t \in [a; b]$, donde $A = r(a)$ y $B = r(b)$.

Definamos la función real de variable real

$$H(t) = f(\vec{r}(t)), \quad t \in [a; b].$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} H'(t) &= (f \circ \vec{r})'(t) \\ &= \frac{\partial f(\vec{r}(t))}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f(\vec{r}(t))}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n(t)}{\partial t} \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 1.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b H'(t) dt \\ &= H(b) - H(a) \\ &= f(r(b)) - f(r(a)). \end{aligned}$$

En el caso que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, la función escalar es llamada **función potencial del campo** \vec{F} . Por ejemplo, para el caso del campo gravitacional, se tiene que $f(x; y; z) = mgz$ es una función potencial para $\vec{F}(x; y; z) = (0; 0; mg)$.

Observación 14.

1. El teorema 1.3 nos dice que si el campo vectorial \vec{F} es un campo gradiente continuo en un conexo abierto U , entonces el cálculo de la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ se reduce a evaluar la función potencial correspondiente en los extremos de la curva, lo que significa que $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino de integración en U , es decir, \vec{F} es conservativo en U .
2. Si la curva Γ es cerrada, esto es $r(a) = r(b)$ entonces,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0.$$

3. El teorema 1.3 sigue siendo válido si Γ es una curva regular por partes. En efecto, si Γ es una curva regular por partes, entonces existe una partición

$$\{t_0 = a; t_1; t_2; \cdots; t_m = b\}$$

del intervalo $[a; b]$ tal que para cada $k \in \{1; 2; \dots; m\}$, la curva Γ_k que une los puntos: $A_{k-1} = r(t_{k-1})$ con $A_k = r(t_k)$ es regular, con $A_0 = A$ y $A_m = B$. Luego, aplicando el teorema 1.3 a cada curva Γ_k obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} &= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \\ &= \sum_{k=1}^m [f(\vec{r}(t_k)) - f(\vec{r}(t_{k-1}))] \\ &= [f(A_1) - f(A)] + [f(A_2) - f(A_1)] + \dots + [f(B) - f(A_{m-1})] \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Ejemplo 60. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (z^2 + 1; 2z; 2xz + 2y)$:

- Verifique que $f(x; y; z) = xz^2 + x + 2yz$ es una función potencial para \vec{F} en \mathbb{R}^3 .
- Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo Γ una curva con extremo inicial $(0; 1; 0)$ y extremo final $(1; 2; 3)$.

Solución

- Queda como ejercicio.
- De la parte a) tenemos que $f(x; y; z) = xz^2 + x + 2yz$ es un campo escalar de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 que cumple

$$\vec{\nabla} f(x; y; z) = \vec{F}(x; y; z) \quad \text{para todo } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

Luego, por el teorema 1.3 tenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1; 2; 3) - f(0; 1; 0) = 21.$$

Observe que $f(x; y; z) = xz^3 + x + 2yz + 10$ es también una función potencial para \vec{F} en \mathbb{R}^3 . En general, un campo vectorial conservativo tiene infinitas funciones potenciales. El siguiente teorema afirma que dos funciones potenciales de un mismo campo vectorial conservativo solo difieren en una constante.

Teorema 1.4. Sea U un conjunto conexo y abierto en \mathbb{R}^n . Sean $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos escalares definidos en U cuyos gradientes coinciden en U , entonces ellos difieren en una constante, es decir existe una constante C tal que $f = g + C$.

En el teorema 1.3 hemos probado que el gradiente de un campo escalar continuo en un conexo y abierto U es un campo vectorial conservativo en U , en lo que sigue analizaremos el recíproco de este teorema, es decir, si un campo vectorial conservativo es el gradiente de un campo escalar.

Sea $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto conexo y abierto, elijamos un punto A_0 de U , y consideremos una curva regular por partes Γ_B de extremo inicial fijo A_0 y extremo final B , siendo B un punto cualquiera de U . Si \vec{F} es un campo vectorial conservativo en U , entonces la integral $\int_{\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ define un campo escalar en U , esto es

$$f(B) = \int_{\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

siendo \vec{r} una parametrización de Γ_B .

Como U es conexo cada punto B de U puede ser alcanzado por una curva. A continuación demostraremos una extensión del primer teorema fundamental de las integrales definidas para integrales de línea.

Teorema 1.5. *Sea \vec{F} un campo vectorial conservativo continuo en un conjunto conexo y abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y sea A_0 un punto fijo de U . Si f es un campo escalar en U definido por*

$$f(B) = \int_{\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siendo $\Gamma_B \subset U$ una curva regular por partes con extremo inicial A_0 y extremo final B , entonces

$$\vec{\nabla} f(B) = \vec{F}(B) \quad \text{para todo } B \in U.$$

Prueba.

La prueba de este resultado la haremos para $n = 3$.

Como el campo $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$ es conservativo en U , entonces tiene integral de línea independiente del camino de integración sobre U . Luego, la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x; y; z) = \int_{\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

está bien definida, siendo Γ_B una curva que une los puntos A_0 (extremo inicial) fijo y $B = (x; y; z)$ (extremo final).

Mostraremos que f es una función potencial del campo vectorial \vec{F} , esto es si $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$, entonces se cumple

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{para cada } (x; y; z) \in U.$$

Por definición de derivada parcial tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h; y; z) - f(x; y; z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A_1) - f(B)}{h}\end{aligned}\tag{1.8}$$

siendo $A_1 = (x+h; y; z)$. Asimismo, observe que:

Como U es conexo y abierto podemos asegurar que para h suficientemente pequeño, el punto A_1 es alcanzado por la curva Γ_{A_1} que une A_0 con el punto A_1 , en ese orden y que está contenida en U .

Luego, para h suficientemente pequeño tenemos que

$$f(A_1) - f(B) = \int_{\Gamma_{A_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}f(A_1) - f(B) &= \int_{\Gamma_{A_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\Gamma_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\Gamma_{A_1} \cup (-\Gamma_B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{por la independencia del camino,}\end{aligned}$$

es decir,

$$f(A_1) - f(B) = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r},\tag{1.9}$$

donde Γ_1 es cualquier curva que une B con A_1 , en ese orden (ver figura 1.48).

En particular, como la integral es independiente del camino de integración, podemos evaluar la integral $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de un segmento de recta parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (x+t; y; z), \quad \text{para } t \in [0; h].$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^h \vec{F}(x+t; y; z) \cdot (1; 0; 0) dt \\ &= \int_0^h F_1(x+t; y; z) dt.\end{aligned}\tag{1.10}$$

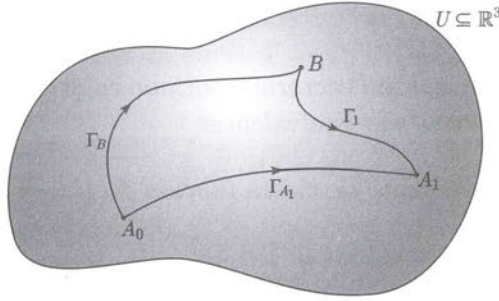


Fig. 1.48 $\int_{(-\Gamma_B) \cup \Gamma_{A_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Reemplazando 1.9 y 1.10 en 1.8 obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_1(x+t; y; z) dt.$$

Definamos ahora $\phi(h) = \int_0^h F_1(x+t; y; z) dt$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \phi(h) \\ &= \phi'(0) \\ &= [F_1(x+h; y; z)]_{h=0} \\ &= F_1(x; y; z). \end{aligned}$$

En forma similar se prueba que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) = F_2(x; y; z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) = F_3(x; y; z).$$

El teorema 1.5 garantiza que si \vec{F} es un campo vectorial conservativo continuo sobre un conexo y abierto U , entonces es el campo gradiente de un campo escalar en U .

Los teoremas 1.3, 1.5 nos dicen que una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial \vec{F} sea un campo gradiente en un conjunto conexo abierto U es que \vec{F} sea conservativo en U .

El siguiente resultado establece que el hecho que \vec{F} sea conservativo en U es equivalente a afirmar que la integral de línea a lo largo de cualquier curva cerrada regular por partes en U , es nula.

Teorema 1.6.

Sea $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en el conexo y abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- \vec{F} es un campo gradiente de cierta función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ potencial.
- \vec{F} es un campo conservativo en U .
- La integral de línea de \vec{F} alrededor de toda curva cerrada simple en U es igual a cero.

Prueba.

($a \Rightarrow b$) Es una consecuencia del teorema 1.3.

($b \Rightarrow c$) Supongamos que el campo \vec{F} tiene integral de línea independiente del camino de integración. Sea Γ una curva cerrada simple siendo A su punto inicial y final. Sea B cualquier otro punto de Γ , entonces tenemos

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

donde Γ_1 es la curva de extremo inicial A y extremo final B , y Γ_2 la curva de extremo inicial B y extremo final A , como se muestra en la figura 1.49.

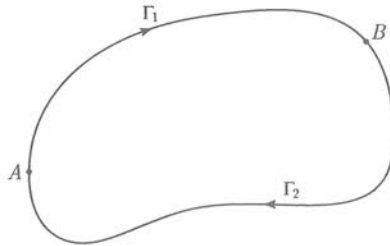


Fig. 1.49 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Luego, Γ_1 y $-\Gamma_2$ son curvas con el mismo punto inicial y punto final. Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

entonces,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

es decir,

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

($c \implies b$) Supongamos que Γ_1 y Γ_2 son dos curvas con el mismo punto inicial y el mismo punto final, entonces la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$ es una curva cerrada. Luego, de la hipótesis tenemos

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 0 \\ \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Esto es, el campo \vec{F} tiene integral independiente del camino de integración y por lo tanto \vec{F} es conservativo en U .

($b \implies a$) Es exactamente el teorema 1.5.

El siguiente resultado brinda un criterio para determinar cuando un campo vectorial \vec{F} no es un gradiente, el cual resulta ser bastante sencillo, pues su proceso no requiere integración.

Teorema 1.7 (Condiciones necesarias para que un campo sea conservativo). Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\vec{F} = (F_1; \dots; F_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 ¹². Si \vec{F} es conservativo en U , entonces

$$\frac{\partial F_i(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(P)}{\partial x_i}$$

para todo $P = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in U$ y para todo $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Prueba. Si $\vec{F} = (F_1; F_2; \dots; F_n)$ es un campo vectorial conservativo en U , entonces existe una función escalar $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ en U , esto es

$$F_i(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$$

para cada $P \in U$ y para cada $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$. Derivando ambos miembros de la igualdad anterior respecto de x_j obtenemos

¹²Diremos que $\vec{F} = (F_1; \dots; F_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 sobre U si y solo si sus componentes $F_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 sobre U para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (P)$$

y como las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ son continuas en U , entonces por el teorema de Schwarz ¹³ se deduce que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P) \text{ para todo } P \in U.$$

Ejemplo 61. En el ejemplo 60 se ha visto que el campo vectorial

$$\vec{F}(x; y; z) = (z^2 + 1; 2z; 2xz + 2y)$$

es conservativo en \mathbb{R}^3 , por lo tanto según el teorema 1.7 sus componentes del campo \vec{F} , $F_1(x; y; z) = z^2 + 1$, $F_2(x; y; z) = 2z$, $F_3(x; y; z) = 2xz + 2y$, verifican las siguientes propiedades sobre \mathbb{R}^3 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2.$$

Ejercicio:

Compruebe que el teorema 1.7 se cumple para los campos vectoriales definidos en los ejemplos 54, 56 y 59.

Corolario 1.8.

Del teorema anterior se deduce que si existen i, j con $i \neq j$ verificando

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ sobre } U,$$

entonces el campo vectorial $\vec{F} = (F_1; F_2; \dots; F_n)$ no es conservativo en U .

Ejemplo 62. En el ejemplo 55 demostramos que el campo $\vec{F}(x; y) = (xy; y^2)$ no era conservativo, para ello integramos sobre diferentes curvas mostrando así la no independencia de la integral respecto al camino. Sin embargo, usando el corolario 1.8 basta con ver que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x; y) = x \neq 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x; y)$$

sobre \mathbb{R}^2 para concluir que \vec{F} no es un campo conservativo en \mathbb{R}^2 .

¹³Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^2 sobre U , siendo U abierto de \mathbb{R}^n , entonces para cada $P \in U$ se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P).$$

Ejemplo 63. El campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (3x^2z; z^2; x^3 + 2z)$ no es conservativo en \mathbb{R}^3 , pues una de las siguientes igualdades no se cumple en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x; y; z) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y; z) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial x}(x; y; z) \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial y}(x; y; z)\end{aligned}$$

siendo $P(x; y; z) = 3x^2z$, $Q(x; y; z) = z^2$, y $R(x; y; z) = x^3 + 2z$.
Determine cuál es la igualdad que no se cumple.

Ejemplo 64. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

a) Calcule $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, donde $P(x; y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ y $Q(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

b) ¿A partir de a) puede concluirse que \vec{F} es conservativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$?

Solución

a) $\frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$.

b) A pesar que la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y)$ se cumple en $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$, el campo \vec{F} no es conservativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$, pues si lo fuera debería cumplirse que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para cualquier curva cerrada simple contenida en $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$. Sin embargo, si elegimos la curva Γ como la circunferencia centrada en el origen de radio a , es decir

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi],$$

obtenemos que $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$.

Pregunta: ¿Contradice esto lo establecido por el teorema 1.6 o 1.7?

La respuesta es no. Este ejemplo deja claro que el hecho que las derivadas parciales de las componentes del campo, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sean iguales en U no es suficiente para garantizar que el campo sea conservativo en U .

En lo que sigue estableceremos qué condiciones se cumple para el recíproco del teorema 1.7. Previamente, daremos algunas definiciones.

Diremos que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto convexo**, si dados dos puntos arbitrarios $A, B \in U$, el segmento de recta que los une queda totalmente contenido en U .

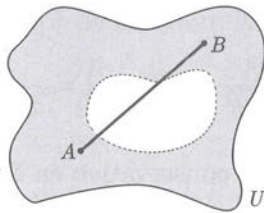


Fig. 1.50 El conjunto sombreado U no es convexo.

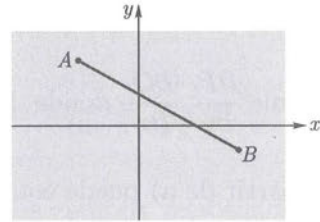


Fig. 1.51 El conjunto \mathbb{R}^2 es convexo.

Observación 15.

Todo conjunto convexo es conexo, sin embargo no todo conjunto conexo es convexo.

Teorema 1.9 (Condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea conservativo). Sean U un subconjunto convexo abierto de \mathbb{R}^n y sea $\vec{F} = (F_1; F_2; \dots; F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en U , entonces el campo \vec{F} conservativo en U si y solo si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(P) \quad (1.11)$$

para todo $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$ y para todo $P = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in U$.

Ejemplo 65. El campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (z^2+1; 2z; 2xz+2y)$ es conservativo en \mathbb{R}^3 , pues \mathbb{R}^3 es un conjunto convexo abierto. Además, las derivadas parciales de primer orden de sus componentes son funciones continuas sobre \mathbb{R}^3 . Finalmente

en todo \mathbb{R}^3 se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = 2z \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = 2.\end{aligned}$$

Pregunta:

¿Por qué no puede aplicarse el teorema 1.9 en el ejemplo 64?

El siguiente ejemplo resume las alternativas que se tiene para evaluar una integral de línea de un campo vectorial.

Ejemplo 66. Evalúe la siguiente integral de línea

$$\int_{\Gamma} 3x^2z \, dx + z^2 \, dy + (x^3 + 2yz) \, dz$$

donde Γ es la curva mostrada en la figura 1.52.

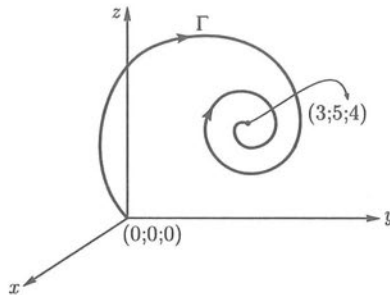


Fig. 1.52 Curva Γ .

Solución

i) **Cuando el campo es conservativo**

Observe que el campo \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , pues \mathbb{R}^3 es un conjunto convexo abierto y sus funciones componentes

$$P(x; y; z) = 3x^2z, \quad Q(x; y; z) = z^2, \quad R(x; y; z) = x^3 + 2yz$$

tienen derivadas parciales de primer orden continuas, y además en todo \mathbb{R}^3

se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x; y; z) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y; z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial x}(x; y; z) = 3x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial y}(x; y; z) = 2z.\end{aligned}$$

Cuando se presenta este caso tenemos dos alternativas para evaluar la integral de línea.

a) **Usar un camino adecuadamente elegido**

Como el campo \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , entonces \vec{F} tiene integral independiente del camino de integración, por lo que tenemos libertad para elegir la curva sobre la cual vamos a integrar. Por ejemplo, como \mathbb{R}^3 es convexo podemos elegir un segmento de recta cuya parametrización es

$$\Gamma : \vec{r}(t) = t(3; 5; 4), \quad t \in [0; 1].$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 [3(3t)^2(4t)(3) + (4t)^2(5) + [(3t)^3 + 2(5t)(4t)](4)] dt \\ &= \int_0^1 (432t^3 + 240t^2) dt \\ &= 108t^4 + 80t^3 \Big|_{t=0}^1 = 188.\end{aligned}$$

b) **Usar el teorema 1.3**

Como el campo \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , entonces existe un campo escalar diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en \mathbb{R}^3 se cumple $\vec{F} = \vec{\nabla}f$. Luego, por el teorema 1.3 tenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(3; 5; 4) - f(0; 0; 0), \quad (1.12)$$

entonces, calcular esta integral se reduce a encontrar una función potencial de \vec{F} en \mathbb{R}^3 . Aprovechamos este ejemplo para mostrar dos métodos de cómo construir una función potencial para un campo conservativo \vec{F} :

(b1) Usando integrales de línea

Como \vec{F} es un campo conservativo en el conjunto convexo abierto \mathbb{R}^3 , entonces el teorema 1.5 permite definir un campo escalar de la siguiente manera

$$f(x; y; z) = \int_{\Gamma(x; y; z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.13)$$

siendo $\Gamma_{(x; y; z)}$ un segmento de recta que une un punto fijo A_0 de \mathbb{R}^3 con un punto cualquiera $B = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ y cuya parametrización es

$$\Gamma : \vec{r}(t) = A_0 + t((x; y; z) - A_0), \quad t \in [0; 1].$$

Como \mathbb{R}^3 contiene al origen, podemos elegirlo como el punto fijo, es decir, $A_0 = (0; 0; 0)$, de esta manera la parametrización se reduce a la forma

$$\Gamma : \vec{r}(t) = t(x; y; z), \quad t \in [0; 1],$$

reemplazando esto en 1.13 obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x; y; z) &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \vec{F}(t(x; y; z)) \cdot (x; y; z) dt \\ &= \int_0^1 (3(tx)^2(tz)x + (tz)^2y + [(tx)^3 + 2(ty)(tz)]z) dt \\ &= \int_0^1 (4t^3x^3z + 3t^2yz^2) dt \\ &= [t^4x^3z + t^3yz^2]_0^1 \\ &= x^3z + yz^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 188$.

(b2) Usando integrales indefinidas

Puesto que el campo \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , existe un campo escalar diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

$$\vec{F}(x; y; z) = \vec{\nabla} f(x; y; z),$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) = 3x^2z \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) = z^2 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) = x^3 + 2yz. \quad (1.16)$$

Integrando 1.14 con respecto a la variable x obtenemos

$$f(x; y; z) = \int 3x^2z \, dx = x^3z + A(y; z) \quad (1.17)$$

donde $A(y; z)$ es la constante de integración que depende de y y z .

Derivando 1.17 respecto de la variable y tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) = \frac{\partial A}{\partial y}(y; z). \quad (1.18)$$

Comparando 1.18 con 1.15 resulta

$$\frac{\partial A}{\partial y}(y; z) = z^2.$$

Por lo tanto, al integrar esta última ecuación respecto de la variable y , resulta

$$A(y; z) = yz^2 + B(z).$$

Luego, 1.17 puede ser escrita como

$$f(x; y; z) = x^3z + yz^2 + B(z).$$

Derivando f respecto de la variable z y comparando con 1.16 tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) = x^3 + 2yz + B'(z) = x^3 + 2yz,$$

entonces $B'(z) = 0$. De esta manera, $B(z) = C$ siendo C una constante. Por lo tanto, la función buscada es

$$f(x; y; z) = x^3z + yz^2 + C.$$

Luego, reemplazando la función potencial f en la ecuación 1.12 tenemos que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(3; 5; 4) - f(0; 0; 0) = 188.$$

ii) Cuando el campo no es conservativo

Si el campo \vec{F} no hubiese sido conservativo, entonces el único camino que queda por usar, por el momento, es el teorema 1.2. Usar este resultado se reduce a calcular una integral definida, pero un paso importante para esto es conocer una parametrización de la curva sobre la cual se integra. En el ejemplo anterior, si el campo \vec{F} no fuera conservativo, entonces sería imposible calcular la integral sin conocer una parametrización de la curva mostrada en la figura 1.52.

Observación 16.

El ejemplo anterior describe las alternativas que hasta el momento tenemos para el cálculo de una integral de línea de un campo vectorial $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En la figura 1.53 se resume dichas alternativas.

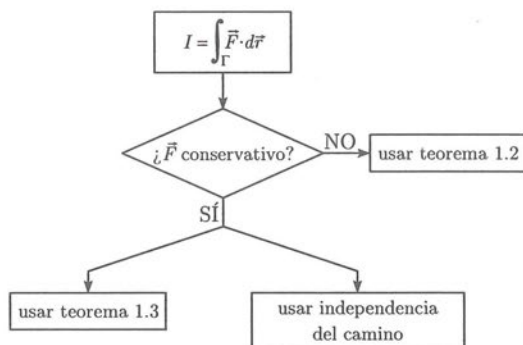


Fig. 1.53

Ejemplo 67. Evalúe la siguiente integral de línea

$$\int_{\Gamma} (2x \operatorname{sen} z) dx + (z^3 - e^y) dy + (x^2 \cos z + 3yz^2) dz.$$

Solución

En este caso el campo dado \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , pues \mathbb{R}^3 es un conjunto convexo abierto y además se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x; y; z) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y; z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial x}(x; y; z) = 2x \cos z \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x; y; z) &= \frac{\partial R}{\partial y}(x; y; z) = 3z^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 68. Demuestre que el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = (e^{x+y} + 1, e^{x+y})$ es conservativo en su dominio y encuentre una función potencial de \vec{F} .

Solución

Es claro que el dominio de \vec{F} es \mathbb{R}^2 , el cual es un conjunto convexo. Además como las componentes, $P(x; y) = e^{x+y} + 1$, $Q(x; y) = e^{x+y}$, de \vec{F} tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre \mathbb{R}^2 , \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 y como en \mathbb{R}^2 se cumple

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y),$$

entonces el campo \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^2 .

Si \vec{F} es un campo vectorial conservativo en \mathbb{R}^2 , entonces \vec{F} es un campo gradiente, es decir,

$$\vec{F}(x; y) = \vec{\nabla} f(x; y) \quad \text{sobre } \mathbb{R}^2$$

lo cual es equivalente a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = e^{x+y} + 1 \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = e^{x+y}. \tag{1.20}$$

Integrando 1.19 respecto de x obtenemos

$$f(x; y) = e^{x+y} + x + A(y)$$

siendo $A(y)$ una constante de integración que depende de y . Derivando esta última expresión respecto de la variable y y comparando con 1.20 tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = e^{x+y} + A'(y) = e^{x+y}.$$

De esta última igualdad se deduce que A es una función constante, es decir, $A(y) = C$. Luego, la función buscada es de la forma

$$f(x; y) = e^{x+y} + x + C.$$

Ejemplo 69. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (z^2 + 1; 2z; 2xz + 2y)$.

- a) Analice si \vec{F} es o no conservativo en su dominio. En caso afirmativo, encuentre una función potencial para \vec{F} .
- b) Calcule la integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Solución

a)

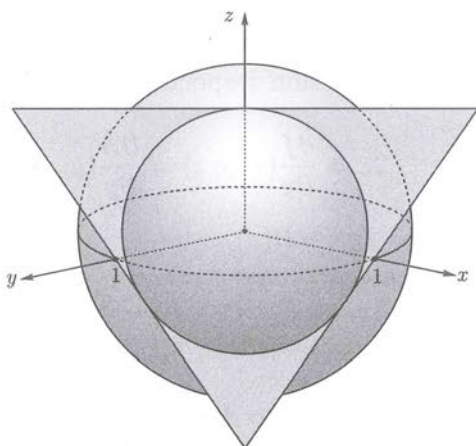


Fig. 1.54

Es claro que el dominio de \vec{F} es \mathbb{R}^3 , el cual como sabemos es un conjunto convexo. \vec{F} es de clase C^1 , pues las derivadas parciales de primer orden de sus funciones componentes son funciones continuas en \mathbb{R}^3 . Asimismo, en todo \mathbb{R}^3 , estas componentes de \vec{F} verifican las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x; y; z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x; y; z) = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x; y; z) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x; y; z) = 2z$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x; y; z) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x; y; z) = 2$$

Por lo tanto, el campo es conservativo en \mathbb{R}^3 .

Como \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , entonces \vec{F} es un campo gradiente, es decir

$$\vec{F} = (F_1; F_2; F_3) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

lo que es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) = z^2 + 1 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) = 2z \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) = 2xz + 2y. \quad (1.23)$$

Integrando 1.21 respecto de x obtenemos

$$f(x; y; z) = z^2x + x + A(y; z) \quad (1.24)$$

derivando esta última expresión respecto de y y comparando con 1.22 tenemos

$$2z = \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) = \frac{\partial A}{\partial y}(y; z).$$

Por lo tanto, $A(y; z) = 2yz + B(z)$.

Luego, 1.24 puede ser escrito como

$$f(x; y; z) = z^2x + x + 2yz + B(z),$$

derivando esta expresión respecto de la variable z y comparando con 1.23 tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx + 2y + B'(z) = 2xz + 2y.$$

Por lo tanto, $B(z) = C$. Luego, la función buscada es de la forma

$$f(x; y; z) = z^2x + x + 2yz + C.$$

- b) Como el campo \vec{F} es conservativo y Γ es una curva cerrada simple, el valor de la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es cero.

Ejemplo 70. Halle la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (yz; 2xz; xy)$ a lo largo de una curva Γ que se encuentra sobre la superficie $xy^2z = 1$ que une los puntos $(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2})$ y $(1; 1; 1)$.

Solución

El campo \vec{F} puede descomponerse de la siguiente manera

$$\vec{F}(x; y; z) = \vec{G}(x; y; z) + \vec{H}(x; y; z)$$

donde $\vec{G}(x; y; z) = (yz; xz; xy) = \vec{\nabla}(xyz)$ es decir, \vec{G} es un campo vectorial gradiente y $\vec{H}(x; y; z) = (0; xz; 0)$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} \\ &= xyz \Big|_{(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2})}^{(1; 1; 1)} + \int_2^1 \frac{dy}{y^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{y} \Big|_2^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicios: Sección 1.4

1. En cada caso determine si el campo vectorial \vec{F} es o no conservativo. En caso afirmativo, halle una función potencial f .

a) $\vec{F}(x; y) = (3x^2y; x^3)$

b) $\vec{F}(x; y) = (2xe^y + y; x^2e^y + x - 2y)$

c) $\vec{F}(x; y) = (x; y)$

d) $\vec{F}(x; y; z) = (x + z; -y - z, x - y)$

e) $\vec{F}(x; y; z) = (2xy^3, x^2z^3; 3x^2yz^2)$

f) $\vec{F}(x; y; z) = (y^2 \cos x + z^3; -4 + 2y \operatorname{sen} x; 3xz^2 + 2)$

g) $\vec{F}(x; y; z) = (z^2 + 1; 2z; 2xz + 2y)$

h) $\vec{F}(x; y; z) = (2xy^3z; 3x^2y^2z; x^2y^3)$

i) $\vec{F}(x; y; z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

j) $\vec{F}(x; y; z) = (x; e^y \operatorname{sen} z; e^y \cos z)$

k) $\vec{F}(x; y; z) = (2xyz + \operatorname{sen} x; x^2z; x^2y)$

2. Dado el campo $\vec{F}(x; y; z) = (y^2; 2xy + z; y + 5)$

a) Determine si el campo es conservativo.

b) Calcule el trabajo realizado por \vec{F} sobre una partícula cuya trayectoria es descrita por el camino $\vec{r}(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t; e^t)$, $t \in [0; \pi]$

3. Determine si las siguientes integrales de línea son independientes del camino de integración. En caso afirmativo, calcule la integral considerando A como punto inicial y B como punto final de la curva Γ .

a) $\int_{\Gamma} 2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$, donde $A(-1; 0)$ y $B(5; 1)$

b) $\int_{\Gamma} (2y^2 - 12x^3y^3) dx + (4xy - 9x^4y^2) dy$, donde $A(1; 1)$ y $B(3; 2)$

c) $\int_{\Gamma} x dx + y dy$, donde $A(1; 1)$ y $B(5; 2)$

d) $\int_{\Gamma} 2x \operatorname{sen} z dx + (z^3 - e^y) dy + (x^2 \cos z + 3yz^2) dz$, donde $A(1; 1; 1)$ y $B(1; 2; 3)$

e) $\int_{\Gamma} e^y dx + (xe^y + e^z) dy + (ye^z - 2e^{-2z}) dz$, donde $A(-1; 0; 0)$ y $B(1; 1; 1)$

4. Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde \vec{F} es el campo vectorial dado, a lo largo de cualquier curva que une los puntos $A(1; 1; 0)$ y $B(1; 2; -1)$.

a) $\vec{F}(x; y; z) = (\sin x + 2y; 2x + \cos z; z - y \sin z)$

b) $\vec{F}(x; y; z) = (e^x + e^{z^2}; e^y + z; 2xze^{z^2} + y)$

c) $\vec{F}(x; y; z) = (2x^2y + y^2 + z; \frac{2}{3}x^3 + 2xy + z^2; x + 2yz)$

5. Dado el campo $\vec{F}(x; y; z) = (x^2 + xy^2 + z; yx^2 + y^2 + z; x + y + z^2)$

a) Analice si \vec{F} es un campo conservativo.

b) Calcule el trabajo que realiza la fuerza \vec{F} para mover una partícula desde el punto $A(1; 0; 0)$ hasta el punto $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ siguiendo la curva determinada por la intersección de las superficies descritas por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$; $y = z$

6. Sea $\vec{F} = \vec{\nabla}f$, donde $f(x; y) = \sin(x - 2y)$, encuentre curvas Γ_1 y Γ_2 que no sean cerradas y verifiquen la ecuación

a) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

b) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

7. Calcule $\int_{\Gamma} (2xz + y^2) dx + 2xy dy + x^2 dz$, siendo Γ la intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$; $x + y = 2$ del punto $A(2; 0; 4)$ al punto $B(0; 2; 4)$.

8. Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = (yze^{xz}; e^{xz}; xye^{xz} + 1)$$

para desplazar una partícula a lo largo de la curva $\Gamma : y = \frac{2}{x}$; $z = 0$ del punto $A(-1; -2; 0)$ al punto $B(-2; -1; 0)$. ¿Ese trabajo es mayor, menor o igual al trabajo realizado por el mismo campo de fuerza para desplazar una partícula en línea recta de A hasta B ?

9. Halle el valor de la integral de línea $\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, donde Γ es la parte de la curva que se obtiene al intersecar las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (x - 2)^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0$$

entre los puntos $(2; 0; 0)$ y $(0; 0; 2)$, si el recorrido es en sentido horario visto desde el origen.

10. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (x^2; y^2; z)$ para trasladar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2; 2; 4)$ a lo largo de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = xy \end{cases}$
11. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (-y; x; z)$ al mover la partícula a lo largo de la curva $\Gamma : \vec{r}(t) = (e^t \cos t; e^t \sin t; te^t)$, donde $t \in [0; 1]$.
12. Calcular la integral de línea de \vec{F} a lo largo de la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ desde el punto $(2; 0; 2)$ hasta el punto $(0; 1; 1)$.
13. Evalúe la integral $\int_{\Gamma} \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$ siendo Γ un segmento de recta de extremo inicial $P(1; 1; 1)$ y extremo final $Q(2; 2; 2)$.
14. Halle la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (yz; 2xz; xy)$ a lo largo de la curva $\Gamma : \begin{cases} xy^2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
15. Dado el campo $\vec{F}(x; y; z) = \frac{1}{xyz + 1} (yz; xz; xy)$
- Demostrar que $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino de integración en el primer octante.
 - Sea Γ una curva regular por partes formada por Γ_1 y Γ_2 , siendo Γ_1 la porción de intersección de las superficies $z = x^2$, $y = 1$ con extremo inicial $(1; 1; 1)$ y extremo final $(2; 1; 4)$, y Γ_2 el segmento de recta de extremo inicial $(2; 1; 4)$ y extremo final $(3; 3; 5)$. Hallar el valor de la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
16. a) Una partícula se desplaza sobre una curva regular Γ y en cada punto P de Γ se aplica la fuerza $\vec{F} = k(P - P_0)$, con k constante, siendo P_0 un punto fijo exterior a Γ . Si $P_0 = (2; -1; 1)$, hallar el trabajo que realiza \vec{F} para trasladar una partícula del punto $A = (1; 0; 0)$ al punto $B = (1; 0; 2\pi)$ siguiendo la curva Γ .

b) Sea $\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; t)$, $t \in [0; 2\pi]$. Supongamos que durante el desplazamiento de una partícula sobre Γ se ejerce sobre ella un campo de fuerzas \vec{G} (opuesta al movimiento), que es continuo sobre Γ , de módulo constante $\|\vec{G}\|$ y es tangente a la curva Γ . Calcular el trabajo realizado por \vec{G} para desplazar la partícula del punto $A = (1; 0; 0)$ al punto $B = (1; 0; 2\pi)$.

17. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (yze^{xz}; e^{xz}; xye^{xz} + 1)$

a) Demuestre que \vec{F} es un campo vectorial conservativo en su dominio.

b) Halle una función potencial de \vec{F} .

c) Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ une los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, & z \geq 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

1.5. El Teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial en \mathbb{R}^2 , a lo largo de una curva cerrada simple, regular por partes Γ con una integral doble sobre la región plana D limitada por Γ , es decir que este teorema se constituirá en otra herramienta para el cálculo de integrales de línea de campos no conservativos.

Llamaremos **región o dominio** del espacio \mathbb{R}^n a un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ que es abierto y conexo. La **frontera** de D , denotada por ∂D , es el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^n$ tal que cualquier bola abierta con centro en P contiene al menos un punto de la región D y un punto de su complemento: $\mathbb{R}^n - D$.

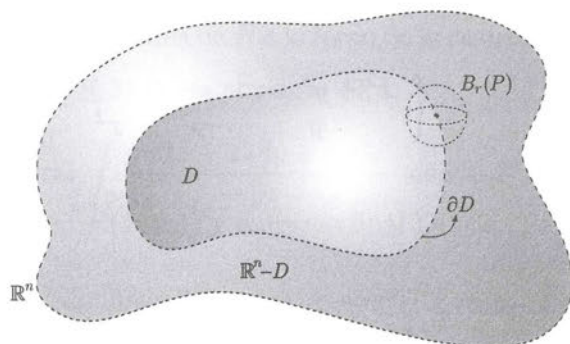


Fig. 1.55

Ejemplo 71.

Si $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$, entonces su frontera es el conjunto

$$\partial D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}.$$

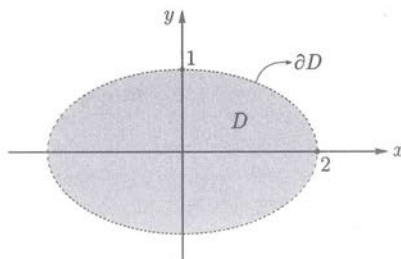


Fig. 1.56

Si $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ y } x^2 + y^2 < 3\}$, entonces su frontera es el conjunto $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $\Gamma_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$.

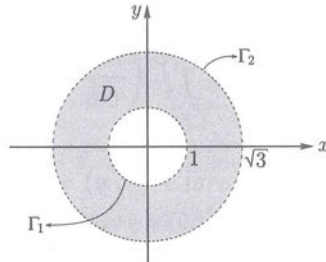


Fig. 1.57 $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Si $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, entonces su frontera es el conjunto

$$\partial D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

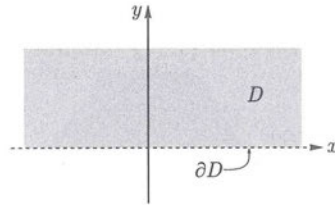
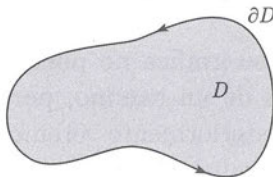


Fig. 1.58

Sea D una región de \mathbb{R}^2 , diremos que su frontera ∂D está **orientada positivamente respecto a D** si al “desplazarnos” a través de ∂D la región D queda a la izquierda.



∂D positivamente orientada.

Fig. 1.59



$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
positivamente orientada.

Fig. 1.60

Teorema 1.10 (Teorema de Green). Sea D una región acotada de \mathbb{R}^2 con frontera ∂D una curva cerrada simple, regular por partes y orientada positivamente respecto a D . Si $\vec{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto abierto que contiene a D , entonces

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.25)$$

Ejemplo 72. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = (x; y)$ definido en cada uno de los siguientes conjuntos señale en cuáles es posible usar el teorema de Green para calcular la integral de línea $\oint_{\partial D} x dx + y dy$?

- $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$.
- $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ y } x^2 + y^2 < 3\}$.
- $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

Solución

Como las componentes del campo $\vec{F} = (P; Q)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas en \mathbb{R}^2 , pues

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x; y) = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$$

entonces, \vec{F} es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, las hipótesis sobre el campo vectorial se verifican sobre D para cada caso.

Veamos ahora si las condiciones sobre la frontera de D se cumplen.

- La frontera ∂D es una curva simple cerrada y como existe una parametrización de ella, $\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la cual es regular, entonces ∂D es regular y, además tiene orientación positiva respecto a D .
- La frontera ∂D no es una curva, pues su gráfica no puede ser trazada de una sola vez, es decir, no es la imagen de un camino, por lo tanto no es posible aplicar el teorema de Green. (Posteriormente veremos que es posible aplicar, para este caso, una versión generalizada del teorema de Green).
- La frontera ∂D es una curva, pero no es cerrada. Luego, no puede aplicarse el teorema de Green para evaluar la integral de línea $\int_{\Gamma} x dx + y dy$.

Ejemplo 73. Calcule la integral $\int_{\Gamma} (12x^2 \operatorname{sen} y + 3xy^2) dx + (4x^3 \cos y + 6x^2y) dy$, donde Γ es la frontera del polígono de vértices $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(2; 1)$, $(1; 1)$ recorrida en sentido antihorario.

Solución

Observe que el campo vectorial \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 , pues sus funciones componentes,

$$P(x; y) = 12x^2 \operatorname{sen} y + 3xy^2 \quad \text{y} \quad Q(x; y) = 4x^3 \cos y + 6x^2y$$

tienen derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^2 , donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= 24x \operatorname{sen} y + 3y^2, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= 12x^2 \cos y + 6xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= 12x^2 \cos y + 12xy, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= -4x^2 \operatorname{sen} y + 6x^2 \end{aligned}$$

Además, es claro que Γ es una curva cerrada, regular por partes y orientada positivamente. Sea D la región limitada por Γ como se muestra en la figura 1.61

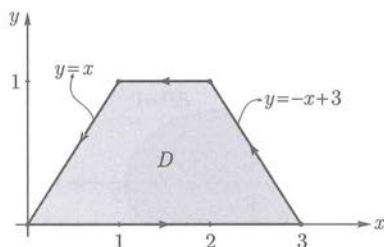


Fig. 1.61

luego, por el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D 6xy dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_y^{3-y} 6xy dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (27y - 18y^2) dy = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 74. Encuentre el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y) = (-y^2 + e^{\operatorname{sen} x})\mathbf{i} + (\arctan y)\mathbf{j}$$

para desplazar una partícula a lo largo de la curva Γ descrita por el cardioide $r = 1 + \cos \theta$, con $\theta \in [0; 2\pi]$.

Solución

El objetivo es encontrar $W = \oint_{\Gamma} P(x; y) dx + Q(x; y) dy$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= e^{\operatorname{sen} x} \cos x, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= -2y, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= 0, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

son funciones continuas sobre \mathbb{R}^2 , entonces el campo vectorial $\vec{F} = (P; Q)$ es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 . Sea D la región limitada por Γ como se muestra en la figura 1.62.

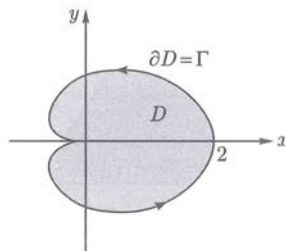


Fig. 1.62

Por otro lado, es claro que la frontera de D , $\partial D = \Gamma$, es una curva cerrada simple, regular y orientada positivamente respecto a D . Luego, por el teorema de Green:

$$\begin{aligned} W &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \iint_D 2y dx dy. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \operatorname{sen} \theta & 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta \end{cases}$ y

teniendo en cuenta que el jacobiano ¹⁴ de esta transformación es

$$\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos \theta} r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{6} (1 + \cos \theta)^4 \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 75. Calcule $\int_{\Gamma} (x - y^3)dx + (x^3 + \operatorname{sen} y)dy$, donde Γ es la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas recorrida en sentido antihorario.

Solución

Es claro que las funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= 1, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= -3y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= 3x^2, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \cos y \end{aligned}$$

son continuas sobre \mathbb{R}^2 , entonces el campo vectorial \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 . Sea D la región limitada por la circunferencia unitaria Γ cuya frontera, $\partial D = \Gamma$, es una curva cerrada simple, regular y orientada positivamente respecto a D . Luego, por el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x - y^3)dx + (x^3 + \operatorname{sen} y)dy &= \iint_D \left[\frac{\partial(x^3 + \operatorname{sen} y)}{\partial x} - \frac{\partial(x - y^3)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \operatorname{sen} \theta & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$ y teniendo en cuenta que el jacobiano de dicha transformación es

$$\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \theta)} = r$$

¹⁴Ver [1]

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x - y^3) dx + (x^3 + \operatorname{sen} y) dy &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 76. Calcule $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo $\vec{F}(x; y) = (e^x + 6xy; 8x^2 + \operatorname{sen} y^2)$ donde Γ es la curva que se muestra en la figura 1.63 formada por dos semicircunferencias centradas en el origen y de radios 1 y 3 respectivamente, y por segmentos de recta.

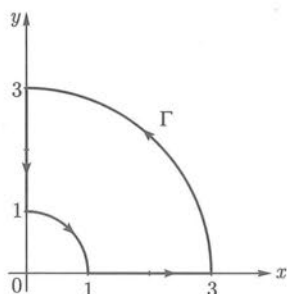


Fig. 1.63

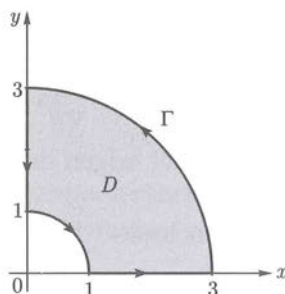


Fig. 1.64

Solución

Observe que si evaluamos esta integral de línea usando el teorema 1.2 tendríamos que calcular cuatro integrales de línea (se deja como ejercicio desarrollar esta alternativa). En lugar de usar dicho teorema procederemos a usar el teorema de Green.

Veamos que \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 : Para ello basta ver que las siguientes funciones son continuas en \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x; y) = e^x + 6y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = 6x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = 16x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) = 2y \cos y^2.$$

Sea D la región limitada por la curva Γ como se muestra en la figura 1.64. Verifique que las hipótesis del teorema de Green se cumplen para Γ . Luego,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D 10x dx dy. \end{aligned}$$

Luego, pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r \operatorname{sen} \theta & 1 \leq r \leq 3 \end{cases}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 10r^2 \cos \theta dr \right) d\theta \\ &= \frac{260}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{260}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 77. Halle el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y) = (e^{xy^2} + xy^2 e^{xy^2}; 2(x^2 y e^{xy^2} + x + y))$$

para trasladar una partícula desde el punto $A(0; -4)$ hasta el punto $B(0; 4)$ siguiendo la curva $\Gamma_0 : y^2 = 4(4 - x)$.

Solución

Nuestro objetivo es calcular $W = \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = (P; Q)$.

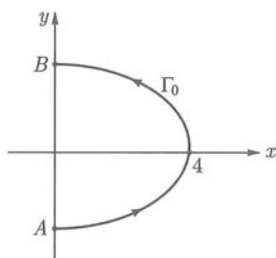


Fig. 1.65

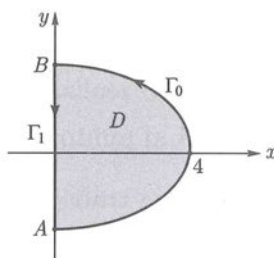


Fig. 1.66

En este caso al igual que en el ejemplo 76 no es conveniente usar el teorema 1.2 para encontrar W , pues la integral resulta muy complicada de evaluar (se deja como ejercicio intentar calcularla). En vez de ello usaremos el Teorema de Green.

Verifique que las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= 2y^2 e^{xy^2} + xy^4 e^{xy^2}, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= 4xy e^{xy^2} + 2x^2 y^3 e^{xy^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= 4xy e^{xy^2} + 2x^2 y^3 e^{xy^2} + 2, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= 2[x^2 e^{xy^2} + 2x^3 y^2 e^{xy^2} + 1] \end{aligned}$$

son continuas en \mathbb{R}^2 , y por tanto \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 .

El único inconveniente para poder aplicar el teorema de Green es que la curva

$\Gamma_0 : \vec{r}(t) = \left(4 - \frac{t^2}{4}; t\right)$ con $-4 \leq t \leq 4$, no es una curva cerrada. Para resolver este problema consideramos la curva $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (0; -t)$ con $t \in [-4; 4]$.

Sea D la región limitada por Γ y Γ_1 como se muestra en la figura 1.66. Observe que $\Gamma \cup \Gamma_1$ es una curva cerrada, regular por partes y orientada positivamente respecto a D . Luego, aplicando el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 &= 2 \iint_D dx dy \\ \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 8 \int_0^4 \sqrt{4-x} dx - \int_{-4}^4 (1; -2t)(0; -1) dt \\ \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 8 \left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \int_{-4}^4 2t dt \\ &= \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} al trasladar una partícula del punto A al punto B siguiendo la curva Γ_0 es igual a $W = \frac{128}{3}$.

Ejemplo 78. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y) = (ye^{xy}; \frac{1}{3}x^3y^2 + xe^{xy})$$

para mover una sola vez, en sentido antihorario, una partícula a lo largo de la frontera de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $xy = 4$, $xy = 1$, $y = 1$ y $y = 4$.

Solución

Observe que las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= y^2e^{xy}, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= x^2y^2 + e^{xy} + xye^{xy} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= e^{xy} + xye^{xy}, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \frac{2}{3}x^3y + x^2e^{xy} \end{aligned}$$

son continuas en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, $\vec{F} = (P; Q)$ es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 . Además, ∂D es una curva cerrada, regular por partes y orientada positivamente respecto a D , región limitada por las gráficas de las ecuaciones $xy = 4$, $xy = 1$, $y = 1$,

$y = 4$, tal como se muestra en la figura

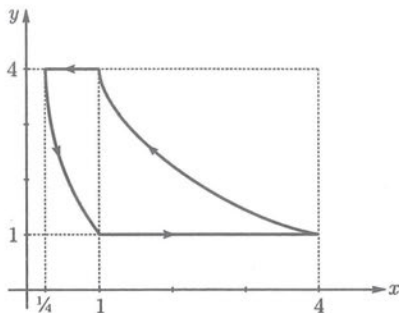


Fig. 1.67

Luego, por el teorema de Green tenemos:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D x^2 y^2 dx dy \\
 &= \int_1^4 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} x^2 y^2 dx \right) dy \\
 &= \int_1^4 \left(\frac{1}{3} x^3 y^2 \Big|_{x=\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} \right) dy \\
 &= \int_1^4 y^2 \left(\frac{64}{y^3} - \frac{1}{y^3} \right) dy \\
 &= (21 \ln y) \Big|_{y=1}^4 \\
 &= 21 \ln 4.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 79. Calcule la integral

$$\int_{\Gamma} \left(xy^2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \right) dx + \left(xy - y + \frac{y-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \right) dy$$

donde Γ es el arco mayor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que une los puntos $(0; 2)$, $(2; 0)$ y que es recorrida en sentido antihorario.

Solución

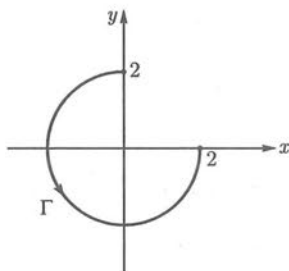


Fig. 1.68

Observe que el dominio de \vec{F} es $\mathbb{R}^2 - \{(1; 1)\}$. En este conjunto se cumplen que las siguientes funciones:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x; y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = 2xy + \frac{-2(x-1)(y-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = y + \frac{-2(x-1)(y-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y)$$

son continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(1; 1)\}$. Por lo tanto, $\vec{F} = (P; Q)$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2 - \{(1; 1)\}$. El inconveniente para aplicar el teorema de Green es que Γ no es una curva cerrada. Para salvar este problema consideremos las curvas Γ_1 y Γ_2 como se muestra en la figura 1.69. Denotemos por D la región limitada por las curvas $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, es decir, $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

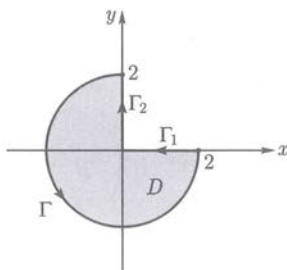


Fig. 1.69

Luego, por el teorema de Green tenemos:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (y - 2xy) dx dy - \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Primero calculamos la integral doble, para esto usamos la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{matrix}, \text{ cuyo jacobiano es}$$

$$\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \theta)} = r.$$

Luego,

$$\iint_D (y - 2xy) dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^2 \operatorname{sen} \theta - 2r^3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) dr \right) d\theta$$

$$= 0.$$

Ahora calculamos la integral de línea $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

Una parametrización para Γ_1 es $\vec{r}(t) = (-t; 0)$, $t \in [0; 2]$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \frac{t+1}{(t+1)^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln [(t+1)^2+1] \Big|_{t=0}^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 5. \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos $\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

Una parametrización para Γ_2 es $\vec{r}(t) = (0; t)$, $t \in [0; 2]$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \left(-t + \frac{t-1}{(t-1)^2+1} \right) dt \\ &= \left(\frac{-t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln [(t-1)^2+1] \right) \Big|_{t=0}^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \ln 5 - 2.$$

Aplicación del teorema de Green: El Área de una región plana

En cursos anteriores hemos visto que el área de ciertas regiones planas D pueden ser calculadas por medio de la expresión

$$A(D) = \iint_D dx dy.$$

Veamos como el teorema de Green puede usarse también para calcular el área de un región plana. Para lograr esto, consideremos: una curva Γ que limita a la región plana D , esto es, $\Gamma = \partial D$ y el campo $\vec{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y)) = (0; x)$. Si Γ , D y el campo \vec{F} satisfacen las hipótesis del teorema de Green tenemos:

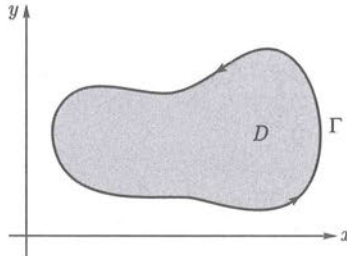


Fig. 1.70

$$\oint_{\Gamma} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

reemplazando las componentes del campo \vec{F} , en la última igualdad, obtenemos

$$\oint_{\Gamma} x dy = \iint_D dx dy$$

Por lo tanto, el área de la región D limitada por Γ puede calcularse por medio de la siguiente expresión

$$A(D) = \oint_{\Gamma} x dy.$$

Existen otras elecciones para el campo que conducen al mismo resultado. Por ejemplo, si elegimos, $P(x; y) = -\frac{1}{2}y$ y $Q(x; y) = \frac{1}{2}x$ y procedemos en forma similar al caso anterior obtenemos:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

De manera similar, si elegimos $P(x; y) = -y$ y $Q(x; y) = 0$ obtenemos:

$$A(D) = \oint_{\Gamma} -y \, dx.$$

A continuación resumimos los casos vistos anteriormente.

Corolario 1.11. Sea D una región limitada por una curva Γ cerrada simple, regular por partes y orientada positivamente respecto a D , entonces el área $A(D)$ de la región D puede ser calculada por cualquiera de las tres expresiones siguientes:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y \, dx + x \, dy = \oint_{\Gamma} -y \, dx = \oint_{\Gamma} x \, dy$$

Ejemplo 80. Encuentre el área de la región D limitada por la elipse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución

Parametrizamos la elipse por $\vec{r}(t) = (a \cos t; b \sin t)$, $t \in [0; 2\pi]$, luego

$$\begin{aligned} A(D) &= \oint_{\Gamma} x \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) \, dt \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) \, dt \\ &= ab\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 81. Calcule el área de la región D limitada por el astroide

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ y } a > 0.$$

Solución

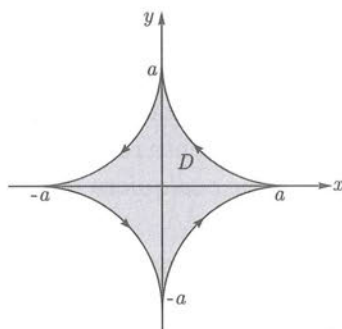


Fig. 1.71

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-a \operatorname{sen}^3 t) d(a \cos^3 t) + a \cos^3 t d(a \operatorname{sen}^3 t) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-a \operatorname{sen}^3 t)(3a \cos^2 t)(-\operatorname{sen} t) + (a \cos^3 t)(3a \operatorname{sen}^2 t \cos t)] dt \\
 &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t) dt \\
 &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t dt \\
 &= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t) dt \\
 &= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) dt \\
 &= \frac{3}{16} a^2 \left[t - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(4t) \right]_{t=0}^{2\pi} \\
 &= \frac{3}{8} a^2 \pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 82. Calcule la integral $\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, donde Γ es cualquier curva cerrada simple regular que encierra al origen de coordenadas, recorrida en sentido antihorario.

Solución

Es claro que el dominio del campo $\vec{F}(x; y) = (P; Q) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ es $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$. Además, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

son funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$, entonces \vec{F} es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$.

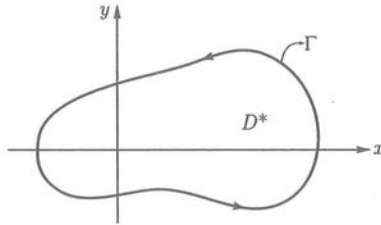


Fig. 1.72

En nuestro caso, Γ es la curva cerrada simple, regular mostrada en la figura 1.72 y D^* es la región limitada por Γ . Sin embargo, el campo \vec{F} sobre D^* no es de clase C^1 sobre ningún conjunto abierto que contenga a D^* pues todo abierto $U \supset D^*$ también contiene a $(0; 0)$ y allí no está definido el campo \vec{F} . Por lo tanto, no es posible aplicar el teorema de Green. La idea es entonces considerar una nueva región, que denotaremos por D , donde el campo \vec{F} sea de clase C^1 , esto equivale a considerar el interior de Γ sin el origen de coordenadas $(0; 0)$. Por ejemplo una manera de hacerlo es considerar una circunferencia centrada en el origen de radio a $\Gamma_a : \vec{r}(t) = (a \text{ sen } t; a \text{ cos } t)$ contenida en el interior de Γ , como se muestra en el gráfico:

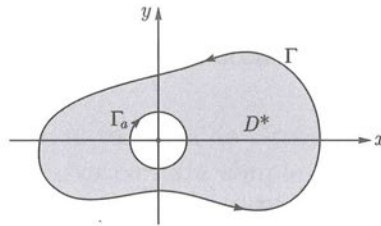


Fig. 1.73

De la figura 1.73 se deduce que la frontera de esta nueva región es $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_a$.

Ahora sí el campo \vec{F} es de clase C^1 sobre D . El inconveniente que se tiene para aplicar el teorema de Green es que ∂D no es una curva, pues la unión de estas dos curvas no es una curva, como ya se ha discutido anteriormente. Luego, no podemos aplicar dicho teorema. Para salvar esta dificultad procederemos de la siguiente manera:

Trazaremos dos nuevas curvas dentro de la región D , Γ_3 y Γ_4 como se muestra en la figura 1.74.

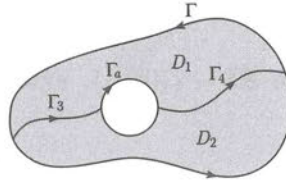


Fig. 1.74

Esto hace que la región D quede dividida en dos regiones D_1 y D_2 . Es claro que \vec{F} es de clase C^1 sobre cada una de estas regiones. Además, la frontera de cada una de estas regiones $\partial D_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{a1} \cup \Gamma_4$, $\partial D_2 = \Gamma_2 \cup (-\Gamma_4) \cup \Gamma_{a2} \cup (-\Gamma_3)$ son curvas cerradas simples, regulares por partes y positivamente orientadas, donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\Gamma_a = \Gamma_{a1} \cup \Gamma_{a2}$ como se muestra en la figura 1.75.

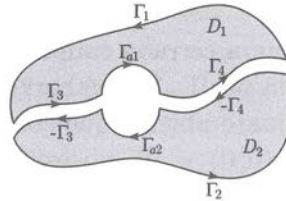


Fig. 1.75

Ahora si es posible aplicar el teorema de Green a cada una de estas regiones, esto es

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siendo $\partial D_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{a1} \cup \Gamma_4$, entonces por la propiedad 3 de las integrales de línea obtenemos

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_{a1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1.26}$$

Asimismo,

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siendo $\partial D_2 = \Gamma_2 \cup (-\Gamma_4) \cup \Gamma_{\alpha 2} \cup (-\Gamma_3)$, entonces por propiedad 3 de las integrales de línea obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_{\alpha 2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_{\alpha 2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Sumando las expresiones (1.26) y (1.27) obtenidas, resulta

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\Gamma_{\alpha}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Luego, como sobre D se cumple $\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y)$, entonces el problema se reduce a evaluar la integral de línea $\int_{\Gamma_{\alpha}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esto es,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \oint_{\Gamma_{\alpha}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\Gamma_{\alpha}} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \cos t}{a^2} \right) d(a \operatorname{sen} t) + \left(\frac{a \operatorname{sen} t}{a^2} \right) d(a \cos t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que el teorema de Green dado para regiones planas D cuya frontera, ∂D , es una curva cerrada simple regular puede generalizarse al caso cuando ∂D es una unión de curvas cerradas simples regulares, aún cuando ∂D no resulte ser una curva. Para formalizar este proceso damos una definición previa.

Se demuestra, en cursos más avanzados, a través del teorema de la curva de Jordan ¹⁵, el cual establece que toda curva cerrada simple determina dos regiones del plano: una acotada, D , llamada región interior a Γ , y otra no acotada, E , llamada región exterior a Γ . Claramente,

$$\partial D = \partial E = \Gamma$$

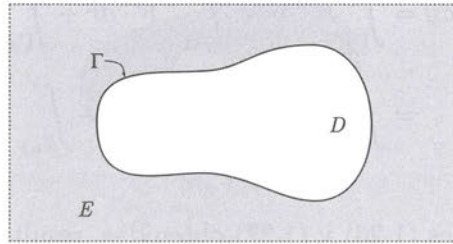
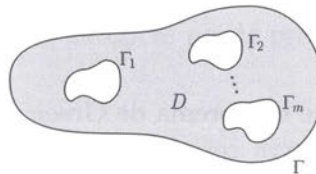


Fig. 1.76

Sean $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ curvas cerradas simples regulares por partes en \mathbb{R}^2 verificando las siguientes condiciones

- Para cada $i = 1, 2, \dots, m$, Γ_i se encuentra en la región interior de Γ .
- Para cada $i \neq j$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, con $i, j = 1, 2, \dots, m$.
- Para cada $i \neq j$, Γ_i se encuentra en la región exterior de Γ_j , para i, j variando en el conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$.

Llamaremos **región compacta** en \mathbb{R}^2 determinada por $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ al conjunto de puntos que se encuentran en la región interior de Γ y en la región exterior de cada una de los Γ_i , junto con sus respectivos puntos frontera. En este caso, es claro que la frontera de la región D es el conjunto $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$.

Fig. 1.77 D : región compacta.

¹⁵Homology Theory, James Vick, pág. 33

Teorema 1.12 (Teorema de Green Generalizado). Sean $\vec{F} = (P; Q)$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y sea $D \subset U$ una región compacta cuya frontera, ∂D está orientada positivamente respecto a D , entonces

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

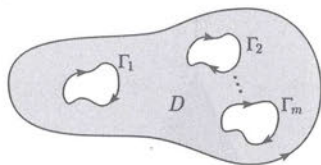


Fig. 1.78 ∂D : Frontera de la región D orientada positivamente.

Ejemplo 83. Calcule la integral de línea $\int_{\Gamma} \frac{-x dx - y dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$ donde Γ es el triángulo de vértices $A = (0; 2)$, $B = (-2; -2)$ y $C = (2; -2)$ orientado en sentido antihorario.

Solución

El teorema 1.10 establece que

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde D^* es limitada por Γ como se muestra en la figura 1.79.

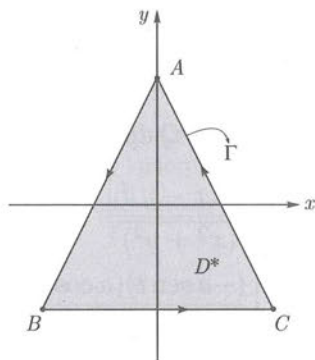


Fig. 1.79

Sin embargo, $\vec{F} = (P; Q)$ no es de clase C^1 sobre cualquier conjunto abierto que contenga a la región D^* , pues \vec{F} no está definido en $(0; 0)$ para ningún abierto

que contenga a D^* . La idea es entonces considerar una nueva región donde el campo \vec{F} sea de clase C^1 , esto equivale a considerar el interior del triángulo sin el punto $(0; 0)$, y esto se logra al tomar la circunferencia Γ_a centrada en el origen de coordenadas y de radio a , elegida de manera que Γ_a esté contenida en el interior del triángulo. Denotando por D la región limitada por Γ y Γ_a , de esta manera $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_a$, la cual está orientada positivamente respecto a D (ver Figura 1.80). Es decir D es una región compacta y \vec{F} es de clase C^1 sobre D .

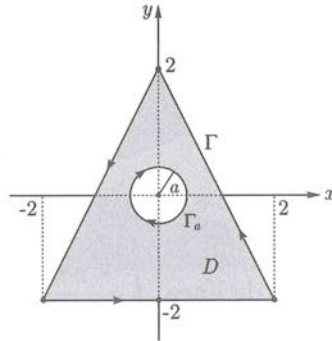


Fig. 1.80

Luego, podemos usar el teorema 1.12:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_a} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Como sobre D se cumple que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{3xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= - \int_{\Gamma_a} P dx + Q dy \\ &= - \int_{\Gamma_a} \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[\frac{(-a \operatorname{sen} t)(a \cos t) + (a \cos t)(a \operatorname{sen} t)}{a^3} \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 84. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$. Determine el trabajo que realiza \vec{F} para desplazar una partícula a lo largo de una curva Γ regular por partes con punto inicial $(-1; 0)$ y punto final $(1; 0)$, sabiendo que Γ solo intersecta al semiplano superior $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ en los puntos $(-1; 0), (1; 0)$.

Solución

Se trata de hallar $W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es una curva como la que se muestra en la figura 1.81.

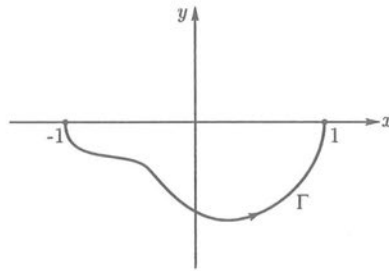


Fig. 1.81

Es claro que sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$ el campo $\vec{F} = (P; Q)$ está bien definido y además se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

son funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$, es decir \vec{F} es un campo vectorial de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$. Consideremos Γ_1 la circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio uno y orientada en sentido antihorario, de manera que $\Gamma \cup \Gamma_1$ sea una curva cerrada que encierra al origen de coordenadas.

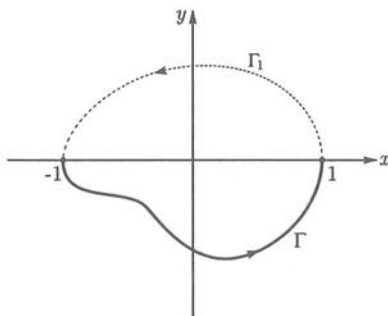


Fig. 1.82

El problema que se presenta es que el campo vectorial \vec{F} no es de clase C^1 sobre ningún abierto que contiene a la región limitada por Γ y Γ_1 , pues \vec{F} no está definido en $(0; 0)$. Luego, consideramos una circunferencia Γ_a centrada en el origen de coordenadas y de radio a parametrizada por la función

$$\vec{r}(t) = (a \operatorname{sen} t; a \cos t), \quad t \in [0; 2\pi],$$

de manera que Γ_a quede en el interior de $\Gamma \cup \Gamma_1$. Además denotaremos por D la región limitada por $\Gamma \cup \Gamma_1$ y Γ_a como se muestra en la figura 1.83.

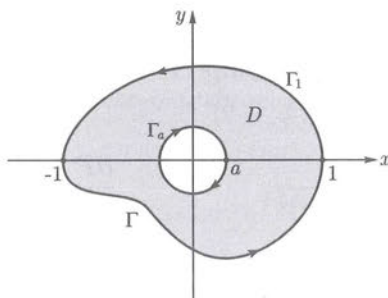


Fig. 1.83

Luego, como \vec{F} y ∂D verifican las condiciones del teorema 1.12 tenemos que

$$\int_{\Gamma \cup \Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_a} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_a} P dx + Q dy = 0$$

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 2\pi - \int_0^\pi [(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t)] dt$$

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 2\pi - \pi = \pi.$$

Ejemplo 85. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, halle el trabajo que realiza \vec{F} para trasladar una partícula alrededor de la curva Γ mostrada en la figura 1.84.

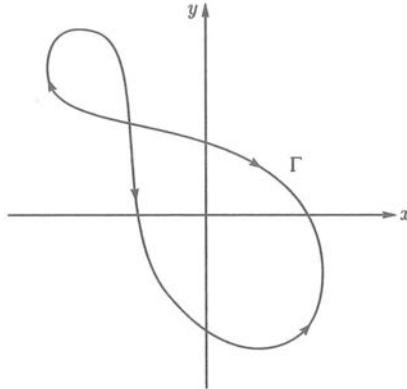


Fig. 1.84

Solución

Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Se trata de encontrar

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observe que sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$ se cumple que las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x; y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

son continuas, es decir, \vec{F} es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$.

Primero evaluamos la integral $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

El campo \vec{F} es conservativo en la región

$$V_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$$

cuya gráfica es mostrada en la figura 1.85. Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

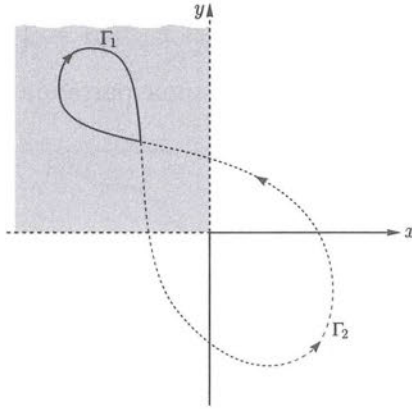


Fig. 1.85

Evaluando ahora la integral $\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

Observe que el campo \vec{F} no está definido en $(0;0)$ por lo tanto cualquier conjunto abierto que contenga a la región limitada por Γ_2 contiene al origen de coordenadas. Luego, \vec{F} no es de clase C^1 sobre la región limitada por Γ_2 . Para salvar este inconveniente consideremos una circunferencia Γ_a de radio $a > 0$ suficientemente pequeño de manera que esté contenido en el interior de la región plana limitada por Γ_2 . Una parametrización para Γ_a es

$$\Gamma_a : \vec{r}(t) = (a \text{ sen } t; a \text{ cos } t), \quad t \in [0; 2\pi].$$

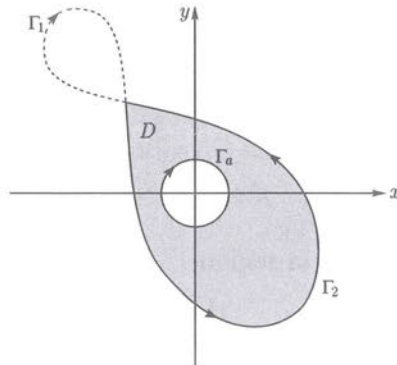


Fig. 1.86

Es claro que la región D , limitada por Γ_2 y Γ_a es una región compacta cuya frontera está orientada positivamente.

Luego, por el teorema 1.12 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{\Gamma_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{-a \cos t}{a^2} \right) (a \cos t) + \left(\frac{a \operatorname{sen} t}{a^2} \right) (-a \operatorname{sen} t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$W = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Ejemplo 86. Halle la integral $\int_{\Gamma} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, donde Γ es el cuadrado con vértices en los puntos $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$, recorrida en sentido antihorario.

Solución

Es claro que el dominio del campo $\vec{F} = (P; Q)$, donde

$$P(x; y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad y \quad Q(x; y) = \frac{-x^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

es $D_{\vec{F}} = \mathbb{R} - \{(0; 0)\}$. Asimismo, \vec{F} es de clase C^1 sobre $D_{\vec{F}}$ (Verifíquelo!), esto significa que \vec{F} no es de clase C^1 en ningún abierto que contenga a la región limitada por el cuadrado. Para salvar esto, consideremos una circunferencia Γ_a centrada en el origen y radio a con $0 < a < 1$, de manera que la región limitada por esta circunferencia, recorrida en sentido horario, esté dentro del cuadrado como se muestra en la figura 1.88.

Γ_2 , cuya parametrización es

$$\Gamma_a : \quad \vec{r}(t) = (a \operatorname{sen} t; a \cos t), \quad t \in [0; 2\pi]$$

Sea D la región limitada por el cuadrado y la curva Γ_a como se muestra en la figura 1.88. Es claro que \vec{F} es de clase C^1 sobre D . Además,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{x^4 - 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (1.28)$$

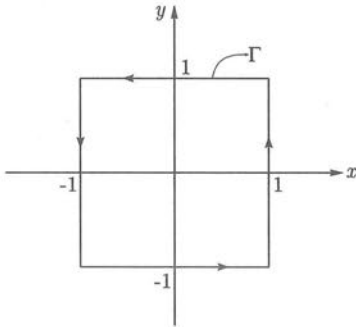


Fig. 1.87

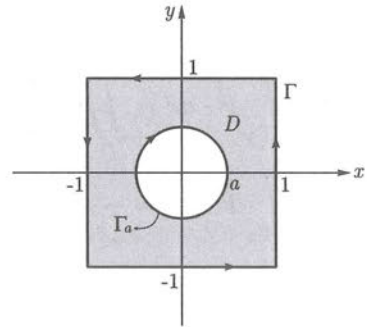


Fig. 1.88

Luego del teorema 1.12 tenemos

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

entonces de 1.28 y teniendo en cuenta que $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_a$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= - \int_{\Gamma} P dx + Q dy, \\ \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= - \int_0^{2\pi} [\text{sen}^2 t \cos^2 t + \text{sen}^4 t] dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 87. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}; \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} \right)$,
Halle

- $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es el cuadrado de vértices $(1; 1), (-1; 1), (-1; -1), (1; -1)$, recorrida en sentido antihorario.
- $\int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo Γ_0 una circunferencia centrada en el origen y radio 2, recorrida en sentido antihorario.

Solución

a)

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dy + \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dy + \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2 \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dy + 2 \int_{-1}^1 \frac{-1}{3-2y+3y^2} dx \\ &= \frac{-2}{3} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(y-\frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{8}}{3})^2} - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{8}}{3})^2} \\ &= -\sqrt{2} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan(-\sqrt{2}) \right).\end{aligned}$$

b) Observe que $D_{\vec{F}} = \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$. Además, en este conjunto se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3(x^2 - y^2)}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2}$$

 \vec{F} es de clase C^1 sobre $D_{\vec{F}}$.Luego, por el teorema de Green, previa orientación (positiva) de la frontera de la región D resulta,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde D es la región limitada por la circunferencia y el cuadrado. Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan(\sqrt{2}) \right).$$

Ejercicios: Sección 1.5

1. Calcule $\int_{\Gamma} (1-y)dx + xdy$ donde Γ es la curva, orientada positivamente, que limita el triángulo de vértices $A(0;0)$, $B(0;1)$ y $C(1;0)$.
2. Usando el teorema de Green calcule $\int_{\Gamma} 2y dx + \frac{x^2}{2} dy$, donde Γ es el triángulo de vértices $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$, recorrido en sentido antihorario.
3. Usando el teorema de Green calcule la integral de línea $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x;y) = -3x^2y\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$ y Γ la circunferencia $x^2 + y^2 - 4y = 0$ orientada en el sentido positivo.
4. Calcule $\oint_{\Gamma} x^2 dx + (4x + y)dy$ a lo largo del triángulo de vértices $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;0)$ y recorrido en sentido antihorario.
5. Usando el teorema de Green, calcule $\oint_{\Gamma} ydx + (\frac{1}{3}x^3y^2 + x)dy$ siendo Γ la frontera (orientada positivamente) de la región del primer cuadrante definida por las rectas $y = x$, $y = 4x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$.
6. Calcule el trabajo que realiza la fuerza

$$\vec{F}(x;y) = (2x \cos(xy) - x^2y \sin(xy) - y; -x^3 \sin(xy))$$

para trasladar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2;0)$ a lo largo de la curva $\Gamma : y = 1 - |1 - x|$.

7. Usando el teorema de Green calcule:

- a) $\oint_{\Gamma} (x-y)dx + ydy$, donde Γ es la frontera de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $y = \sin x$ para $0 \leq x \leq \pi$.
- b) $\oint_{\Gamma} x^2 dx - y^2 dy$, donde Γ es el cardioide $r = 1 + \cos \theta$.
- c) $\oint_{\Gamma} (x+y^2)dx + (y+x^2)dy$, donde Γ es el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.
- d) El área de la región bajo un arco de la cicloide de ecuaciones paramétricas
 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
- e) El área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones
 $y = x^2$, $y = x^3$.

8. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, demuestre que $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\alpha = 2\pi$ para toda curva cerrada simple regular por partes orientada en sentido antihorario y que contiene en su interior al origen de coordenadas.
9. Halle la integral de línea $\oint_{\Gamma} (x - y^3)dx + (x^3 + \sin y)dy$ siendo Γ la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas y orientada positivamente.
10. Usando el teorema de Green, calcule la integral de línea a lo largo de la curva dada, orientada positivamente.
- $\int_{\Gamma} (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, donde Γ es la frontera de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.
 - $\int_{\Gamma} 2xydx + x^2dy$, donde Γ es el cardioide $r = 1 + \cos \theta$.
 - $\int_{\Gamma} (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, donde Γ es la frontera de la región entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.
 - $\int_{\Gamma} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ donde Γ es el circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas.
11. Sea $I = \oint_{\Gamma} \left(\frac{1 + x + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} - y \right) dx + \left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right) dy$, siendo Γ una curva cerrada simple y regular por tramos, contenida en el plano coordenado xy y orientada en sentido antihorario.
- Demuestre que $I = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy$.
 - Usando el resultado obtenido en a) y tomando Γ como la frontera de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 4y, \quad x^2 + y^2 = 4x,$$
 ubicada en el primer cuadrante, calcule I .
 - Usando el área de regiones conocidas, calcule I sin usar integrales de línea.
12. Calcule $\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}dx + (xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))dy$ donde Γ es la curva que limita en el primer cuadrante a la región comprendida por las gráficas

de las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$$

13. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{-y dx}{x \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, donde Γ es la sección de la curva $x^2 - y^2 = 9$ comprendida entre los puntos $A(3;0)$ y $B(5;4)$.

14. Calcule el valor de la integral $\int_{\Gamma_{AB}} \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right] dy$ a lo largo de la curva $\Gamma_{AB} : x^2 - y^2 = 3$, siendo $A(2;1)$ y $B(3;\sqrt{6})$.

15. Sea Γ la frontera de la región limitada por

$$y^2 = 4(x+1), \quad y^2 = 16(4-x), \quad y^2 = 36(9-x)$$

recorrida en sentido antihorario, calcule

$$\oint_{\Gamma} \frac{-y(y-y_1)}{(x-8)^2 + (y-y_1)^2} dx + \frac{(x-8)}{(x-8)^2 + (y-y_1)^2} dy,$$

- a) Cuando $y_1 = 0$
 b) Cuando $y_1 = 15$
16. Calcule el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x; y) = (0; -c)$, $c > 0$ para trasladar una partícula en sentido antihorario a lo largo de la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 3x$$

17. Usando el teorema de Green, halle el trabajo que realiza la fuerza

$$\vec{F}(x; y) = (2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) - y; -x^3 \sin(xy))$$

para trasladar una partícula desde el origen hasta el punto $(\pi; 0)$ a lo largo de la curva $\Gamma : y = 1 - |\cos x|$.

18. Usando el teorema de Green halle el área de la región limitada por la curva

$$\Gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ el segmento que une el origen}$$

con el punto $A\left(\frac{e + e^{-1}}{2}; \frac{e - e^{-1}}{2}\right)$ y el eje x .

19. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes ecuaciones
 $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$
20. Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la parte de la elipse $4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ comprendida en el primer cuadrante que une los puntos $(\frac{3}{2}; 0)$ $(2; 2)$ recorrida en sentido antihorario, y $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}; \frac{y-1}{(x-2)^2 + (y-1)^2} \right)$
21. Calcule $\int_{\Gamma} [x \cos(x^2 + y^2) - y^2] dx + y \cos(x^2 + y^2) dy$, donde Γ es la curva orientada en sentido antihorario, que limita la región que es interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2y$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
22. Calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; 2x - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$, donde Γ es la curva definida por $r = 2 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Capítulo 2

Integrales de Superficie

Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar el capítulo los alumnos:

1. Calcularán la integral de superficie de campos, para ello:
 - a) Plantearán correctamente la integral según el campo sea vectorial o escalar.
 - b) Parametrizarán correctamente la superficie tomando en cuenta su orientación.
 - c) Calcularán correctamente la integral doble de la función escalar correspondiente.
2. Emplearán correctamente el concepto de integral de superficie para definir y calcular la masa de una lámina y el flujo definido por un campo sobre una superficie.
3. Diseñarán una estrategia para calcular la integral de superficie o de la integral triple correspondiente, eligiendo entre el uso de la definición correspondiente, o bien aplicando el teorema de Stokes o el teorema de Gauss según sea el caso.

2.1. Conceptos previos

Sea D una región de \mathbb{R}^2 y $\vec{\sigma}$ una función vectorial de variable vectorial,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u; v) &\longmapsto \vec{\sigma}(u; v) \end{aligned}$$

En adelante:

- 1) La representación gráfica del vector $\vec{\sigma}(u; v)$ se hará tomando como extremo inicial el origen de coordenadas (vector posición $\vec{\sigma}(u; v)$).
- 2) $\sigma(u; v)$ denotará el extremo final del vector posición $\vec{\sigma}(u; v)$.

Sea D una región ¹ de \mathbb{R}^2 a la que se le adjunta toda o parte de su frontera y considere $\vec{\sigma} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial de variable vectorial continua, llamaremos **superficie** en \mathbb{R}^3 y la denotaremos por S al conjunto,

$$S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; y; z) = \sigma(u; v), \text{ para algún } (u; v) \in D\}$$

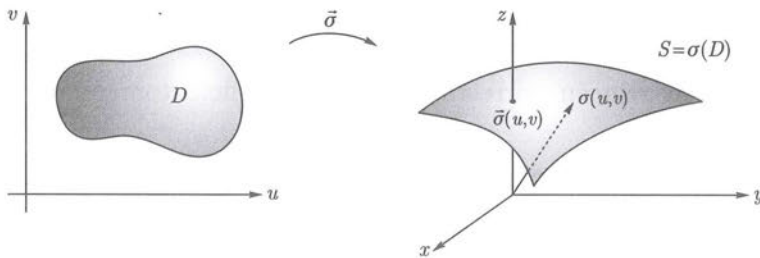


Fig. 2.1

Si la función $\vec{\sigma}$ es inyectiva sobre D , excepto posiblemente sobre su frontera, entonces diremos que $\vec{\sigma}$ es una **parametrización de la superficie** y escribiremos

$$S : \vec{\sigma}(u; v) = x(u; v)\mathbf{i} + y(u; v)\mathbf{j} + z(u; v)\mathbf{k}, \quad (u; v) \in D$$

o bien

$$S : \vec{\sigma}(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v)), \quad (u; v) \in D$$

o bien

$$S : \vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \\ z = z(u; v) \end{cases}, \quad (u; v) \in D,$$

¹ver página 84.

donde x, y, z son funciones continuas en D .

Las ecuaciones: $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, $z = z(u;v)$, con $(u;v) \in D$ son conocidas como **ecuaciones paramétricas** de S , esto significa que cualquier punto $P(x; y; z)$ perteneciente a S satisface estas ecuaciones.

Ejemplo 88. La gráfica de la función $z = x + y$ es una superficie, pues es la imagen de la parametrización

$$\vec{\sigma}(x; y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases}, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vectorialmente,

$$\vec{\sigma}(x; y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Observe que en este caso la región $D = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 89. La función $\vec{\sigma}$ cuya regla de correspondencia viene dada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = 2 \cos u \mathbf{i} + 2 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

o simplemente por

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \sin u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2,$$

es una función inyectiva, excepto en la frontera de la región

$$D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\},$$

pues $\vec{\sigma}(0; v) = \vec{\sigma}(2\pi; v) = (2; 0; v)$ para todo $0 \leq v \leq 2$. Además, x, y, z son funciones continuas. Luego, $\vec{\sigma}$ es una parametrización y su imagen es una superficie.

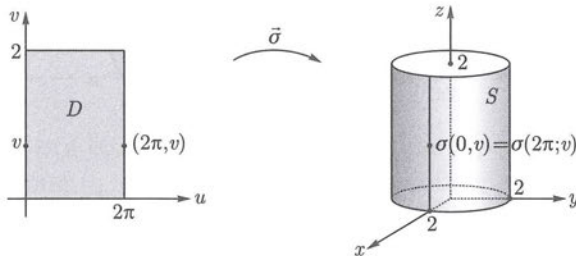


Fig. 2.2

Ejemplo 90. La función $\vec{\sigma}$ definida por

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2$$

es inyectiva y continua sobre su dominio. Luego, $\vec{\sigma}$ es una parametrización y su imagen es una superficie, como se muestra en la figura 2.3.

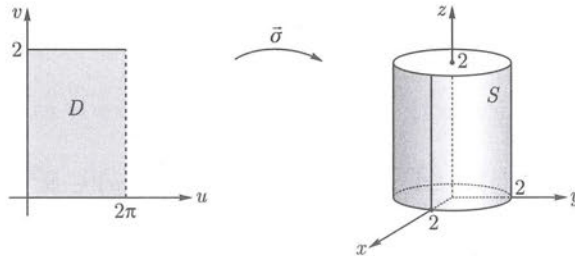


Fig. 2.3

Observación 17.

En el ejemplo 90 se puede observar que el conjunto D es una región unida con el conjunto de puntos de una parte de su frontera.

Ejemplo 91. La función $\vec{\sigma}$ definida por

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 < u \leq 2\pi, \quad v \geq 0$$

tiene como imagen al conjunto S mostrado en la siguiente figura:

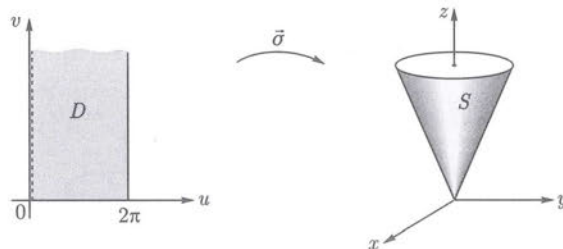


Fig. 2.4

Preguntas:

- a) ¿El conjunto S es una superficie? Justifique.
- b) ¿Es la función $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u; v)$ $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$ una parametrización de S ? Justifique.

Observación 18.

1. La conexidad del dominio junto con la continuidad de $\vec{\sigma}$ garantizan la conexidad de la superficie.

Ejemplo 92. Sea la función

$$f(x; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x; y) \in D \\ 1 & \text{si } (x; y) \notin D \end{cases},$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Es claro que en este caso la gráfica de f , $Gr(f)$, puede ser vista como la imagen de una función

$$\vec{\sigma} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\sigma}(x; y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x; y) \end{cases}, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Gráficamente

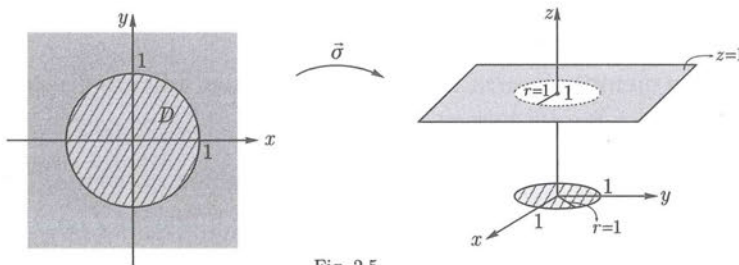


Fig. 2.5

sin embargo, este conjunto no representa una superficie, pues $\vec{\sigma}$ no es una función continua², pues basta aplicar la definición de continuidad a un punto cualquiera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

²Diremos que una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continua en el punto $P(x_0; y_0)$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(x; y) - (x_0; y_0)\| < \delta$, entonces $\|f(x; y) - f(x_0; y_0)\| < \varepsilon$.

Ejemplo 93. Sea la función $f(x; y) = 0$, para $(x; y) \in D$, donde

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq 1\}.$$

El gráfico de esta función también puede ser vista como la imagen de una función $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en este caso, a pesar que $\vec{\sigma}$ es continua, el gráfico de f no representa una superficie, pues falla la conexidad del conjunto D . Ver fig. 2.6.

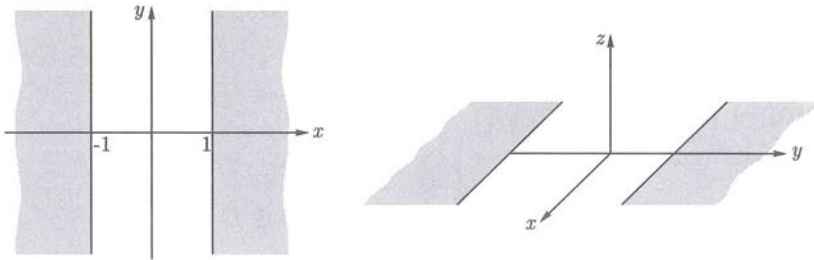


Fig. 2.6

- Geoméricamente, la inyectividad de $\vec{\sigma}$ se traduce en que la superficie no se autointersecta.
- En cursos básicos se suele definir superficie como la gráfica de una función continua

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

El siguiente ejemplo ilustra bajo qué condiciones adicionales esta definición es equivalente a la que hemos dado.

Ejemplo 94. Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, inyectiva y D es un conjunto conexo y abierto, entonces la gráfica de f ,

$$Gr(f) = \{(x; y; f(x; y)) : (x; y) \in D\}$$

es una superficie, pues $Gr(f) = \sigma(D)$, donde, $\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; f(x; y))$, con $(x; y) \in D$. En este caso, diremos que se trata de una superficie definida en forma explícita por la ecuación $z = f(x; y)$.

2.2. Parametrización de superficies

En esta sección mostraremos algunos ejemplos de cómo parametrizar ciertas superficies en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 95. Se ha visto en el ejemplo 94 que si $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, inyectiva y D es un conjunto conexo y abierto entonces su gráfica,

$$Gr(g) = \{(x; y; g(x; y)) : (x; y) \in D\}$$

es una superficie, pues la función $\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; g(x; y))$, $(x; y) \in D$ es una parametrización de $S = Gr(g)$.

Ejemplo 96. Parametrice la superficie $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución

La superficie dada puede ser considerada como la gráfica de una función de dos variables, es decir

$$z = g(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por lo tanto, según el ejemplo anterior, una parametrización de S viene dada por

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

A continuación damos otra parametrización para S . En efecto, si fijamos el valor de z en la ecuación que define S , haciendo por ejemplo $z = c \geq 0$, la expresión $\sqrt{x^2 + y^2}$ resulta ser una constante, es decir

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

esta ecuación corresponde a una circunferencia Γ de radio c contenida en el plano $z = c$, excepto cuando $c = 0$ que se reduce a un único punto (el origen de coordenadas). Esto sugiere que podemos parametrizar usando una variable para z y como Γ es una circunferencia, la otra variable será el ángulo u . Por lo tanto, obtenemos la siguiente parametrización para S ,

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad v \geq 0.$$

Observación 19. Este ejemplo deja claro que una superficie puede tener varias parametrizaciones.

Ejemplo 97. Parametrice el cilindro $S : x^2 + y^2 = a^2$.

Solución

Podemos usar el mismo argumento del ejemplo anterior para obtener una parametrización para S , en efecto observe que para cualquier valor de $z = c \in \mathbb{R}$, la expresión $x^2 + y^2 = a^2$ corresponde al de una circunferencia de radio a contenida en el plano $z = c$, entonces elegimos una variable para z , es decir $z = v$ y como Γ es una circunferencia, la otra variable la tomamos como el ángulo u . De esta manera, obtenemos la parametrización del cilindro,

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Pregunta: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo ¿Es posible considerar S como la gráfica de una función de la forma $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$? Justifique.

Ejemplo 98. Parametrice la parte del cilindro $S : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5$ comprendida entre los planos $y = x, y = 2x$ con $x \geq 0$.

Solución

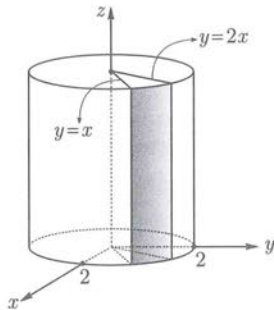


Fig. 2.7

Del ejercicio 97 se tiene que los puntos de un cilindro pueden ser descritos por la función

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$$

para ver la variación de los parámetros u y v usamos las condiciones dadas,

$$0 \leq z \leq 5 \quad \text{y} \quad y = x, \quad y = 2x,$$

es decir,

$$0 \leq v \leq 5, \quad \text{y} \quad 2 \operatorname{sen} u = 2 \cos u, \quad 2 \operatorname{sen} u = 4 \cos u,$$

resultando que $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \arctan 2$ y $0 \leq v \leq 5$. Luego, una parametrización para la porción del cilindro descrito en el problema es,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; v), \quad \frac{\pi}{4} \leq u \leq \arctan 2, \quad 0 \leq v \leq 5.$$

Ejemplo 99. Parametrice la esfera de radio a centrada en el origen de coordenadas, esto es $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución

Una parametrización para S es obtenida usando coordenadas esféricas, es decir

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = a \operatorname{sen} v \cos u \\ y = a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \\ z = a \cos v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi,$$

donde u es el ángulo medido de la parte positiva del eje x hacia el segmento que une el origen con el punto P' , siendo este la proyección del punto P al plano xy , y v es el menor ángulo medido de la parte positiva del eje z al segmento que une el punto $P = (x; y; z)$ con el origen de coordenadas, como se muestra en la figura B del apéndice.

Ejemplo 100. Sea S la superficie de revolución obtenida al hacer girar la curva

$$\Gamma : \begin{cases} z = f(y) \\ x = 0 \end{cases}, \quad a \leq y \leq b,$$

alrededor de eje y , siendo f una función continua y positiva. Parametrice S .

Solución

Suponga que Γ es una curva como la mostrada en la figura 2.8.a.

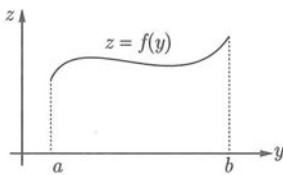


Fig. 2.8.a

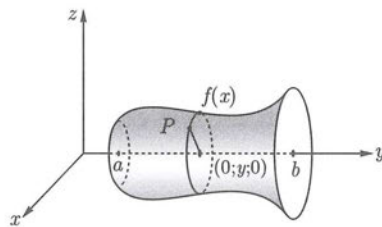


Fig. 2.8.b

de manera que al girar Γ alrededor del eje y se obtiene la superficie mostrada en la fig.2.8.b.

Sea $P(x; y; z) \in S$ un punto arbitrario de S , se trata de expresar x , y y z en términos de dos parámetros. En efecto, el punto P elegido se encuentra sobre la circunferencia centrada en el punto $(0; y; 0)$ y radio $f(y)$, la cual está contenida en el plano que pasa por $(0; y; 0)$ y es paralelo al plano xz , entonces

$$x = f(y) \cos u, \quad z = f(y) \operatorname{sen} u, \quad \text{donde } u \in [0; 2\pi].$$

Por lo tanto, la parametrización buscada es de la forma,

$$\vec{\sigma}(u; y) = \begin{cases} x = f(y) \cos u \\ y = y \\ z = f(y) \operatorname{sen} u \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad a \leq y \leq b.$$

2.3. Superficies regulares

Sea S una superficie parametrizada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \\ z = z(u; v) \end{cases}, \quad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Sea $(u_0; v_0)$ un punto en el interior³ del conjunto D . Si fijamos uno de los parámetros, digamos $u = u_0$, entonces se tiene la parametrización de una curva Γ_v definida por

$$\Gamma_v : \vec{\sigma}(u_0; v) = \begin{cases} x = x(u_0; v) \\ y = y(u_0; v) \\ z = z(u_0; v) \end{cases}, \quad \text{con } v \in J, \text{ donde } J \text{ es cierto intervalo que}$$

contiene a v_0 . Claramente Γ_v , a la que en adelante llamaremos v -**curva coordenada**, está contenida en la superficie S . Gráficamente

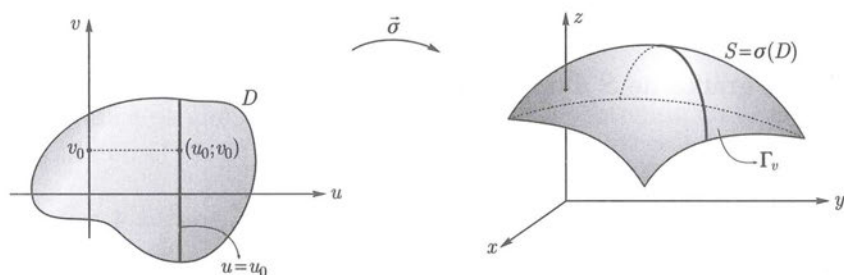


Fig. 2.9

Análogamente, podemos definir una u -**curva coordenada** Γ_u al fijar el valor del parámetro $v = v_0$, entonces la parametrización de Γ_u es definida por

$$\Gamma_u : \vec{\sigma}(u; v_0) = \begin{cases} x = x(u; v_0) \\ y = y(u; v_0) \\ z = z(u; v_0) \end{cases}, \quad \text{con } u \in I, \text{ donde } I \text{ es cierto intervalo que}$$

contiene a u_0 .

La gráfica de Γ_u se muestra a continuación:

³Diremos que $(x_0; y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ es un punto interior de D si existe una bola abierta $B_r(x_0; y_0)$ totalmente contenida en D . El conjunto de todos los puntos interiores de D se llama **interior** de D .

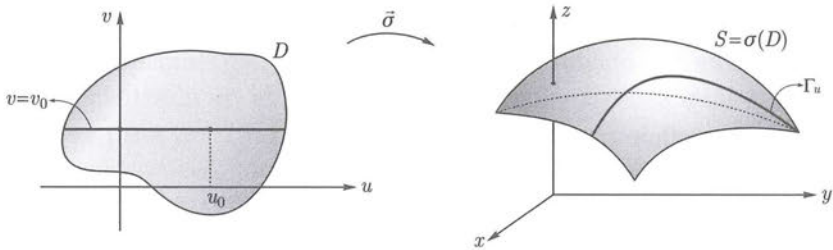


Fig. 2.10

Ejemplo 101. Sea S la superficie parametrizada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}.$$

- Grafique S .
- Determine las ecuaciones de las curvas coordenadas que pasan por el punto $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 8)$ y dibújelas sobre S .
- Escriba las ecuaciones paramétricas de las curvas coordenadas para un punto arbitrario de S y describa su imagen.
- Sobre la gráfica de S dibuje cuatro v -curvas coordenadas.

Solución

- Si hacemos $x = 2 \cos u$, $y = 2 \operatorname{sen} u$, entonces $x^2 + y^2 = 4$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$. Estas condiciones corresponden al cilindro circular recto cuya gráfica se muestra en la figura 2.11.

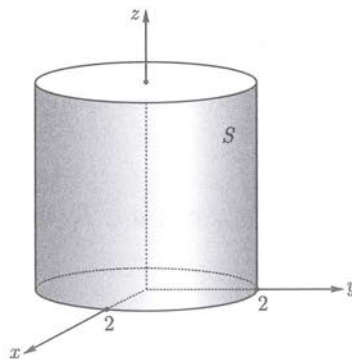


Fig. 2.11

- b) Puesto que el punto $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 8)$ corresponde a los valores $u = \frac{\pi}{4}$ y $v = 8$ existen dos curvas coordenadas: una para $u = \frac{\pi}{4}$ y otra para $v = 8$. La v -curva coordenada con $u = \frac{\pi}{4}$ tiene por ecuaciones paramétricas,

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad z = v$$

es decir,

$$\Gamma_v : \vec{\sigma}\left(\frac{\pi}{4}; v\right) = \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \\ z = v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$$

cuya imagen es una recta que pasa por el punto $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$ y es paralela al eje z .

La u -curva coordenada con $v = 8$ tiene por ecuaciones paramétricas,

$$x = 2 \cos u, \quad y = 2 \operatorname{sen} u, \quad z = 8$$

es decir,

$$\Gamma_u : \vec{\sigma}(u; 8) = \begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \operatorname{sen} u \\ z = 8 \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$$

cuya gráfica es una circunferencia de radio 2 contenida en el plano $z = 8$ y centrada en el eje z .

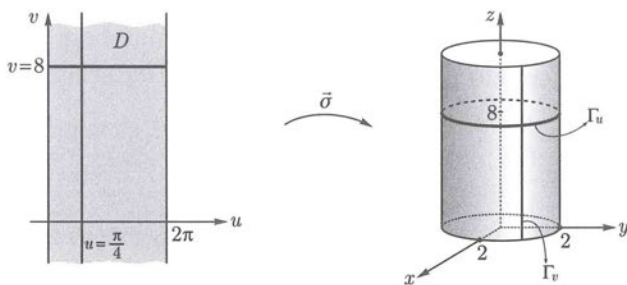


Fig. 2.12

- c) Al fijar $u = u_0$ las v -curvas coordenadas tienen por ecuaciones paramétricas las expresiones,

$$\Gamma_v : x = 2 \cos u_0, \quad y = 2 \operatorname{sen} u_0, \quad z = v$$

que resultan ser rectas sobre el cilindro paralelas al eje z , ver figura 2.13.

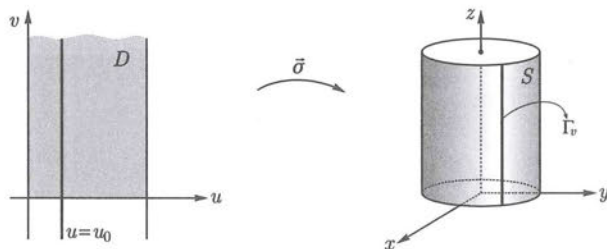


Fig. 2.13

Análogamente al fijar $v = v_0$ las u -curvas coordenadas tienen por ecuaciones paramétricas las siguientes expresiones,

$$\Gamma_u : x = 2 \cos u, \quad y = 2 \sin u, \quad z = v_0$$

las cuales representan circunferencias de radio 2 contenidas en el plano $z = v_0$ y centradas sobre el eje z . Gráficamente,

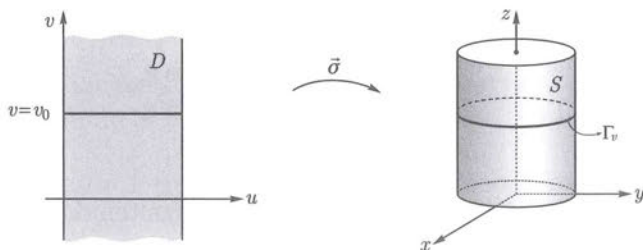


Fig. 2.14

d) Se deja como ejercicio para el lector.

Sea

$$\vec{\sigma}(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v)), \quad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

una parametrización de una superficie S . Si además, $\vec{\sigma}$ es diferenciable ⁴ en el punto $(u_0; v_0) \in D$, entonces podemos derivar las componentes de la función $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u; v_0)$ respecto de u y evaluar en $(u_0; v_0)$:

$$\vec{\sigma}_u(u_0; v_0) = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0; v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0; v_0); \frac{\partial y}{\partial u}(u_0; v_0); \frac{\partial z}{\partial u}(u_0; v_0) \right).$$

Geoméricamente, el vector $\vec{\sigma}_u(u_0; v_0)$ corresponde al vector tangente de la u -curva coordenada Γ_u en el punto $\sigma(u_0; v_0) = (x(u_0; v_0); y(u_0; v_0); z(u_0; v_0))$. En adelante, diremos simplemente que $\vec{\sigma}_u(u_0; v_0)$ es el vector tangente a Γ_u en el punto $(u_0; v_0)$.

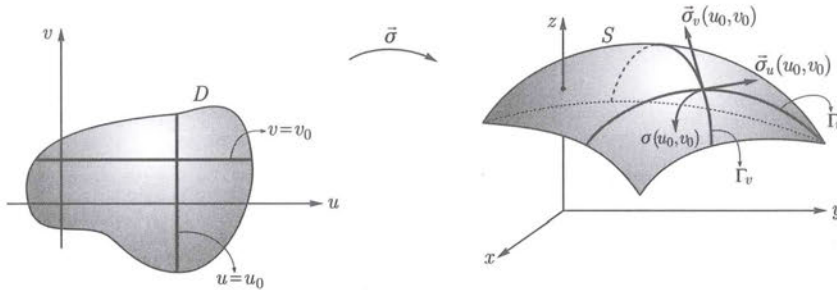


Fig. 2.15

De manera análoga, podemos derivar las funciones componentes de $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u_0; v)$ respecto de v y evaluarla en el punto $(u_0; v_0)$:

$$\vec{\sigma}_v(u_0; v_0) = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0; v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0; v_0); \frac{\partial y}{\partial v}(u_0; v_0); \frac{\partial z}{\partial v}(u_0; v_0) \right).$$

Geoméricamente, el vector $\vec{\sigma}_v(u_0; v_0)$ corresponde al vector tangente de v -curva coordenada Γ_v en el punto $\sigma(u_0; v_0) = (x(u_0; v_0); y(u_0; v_0); z(u_0; v_0))$. En adelante, diremos simplemente que $\vec{\sigma}_v(u_0; v_0)$ es el vector tangente a Γ_v en el punto $(u_0; v_0)$.

Definimos el vector

$$\vec{N}(u_0; v_0) = \vec{\sigma}_u(u_0; v_0) \times \vec{\sigma}_v(u_0; v_0) = \left(\frac{\partial(y; z)}{\partial(u; v)}; \frac{\partial(z; x)}{\partial(u; v)}; \frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} \right) \Bigg|_{(u; v) = (u_0; v_0)}$$

⁴Ver [3].

donde,

$$\frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z; x)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y; z)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Geoméricamente el vector $\vec{N}(u_0; v_0)$ corresponde al vector normal a la superficie S en el punto $\sigma(u_0; v_0)$ siempre y cuando este sea no nulo. A este producto vectorial $\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)$ se suele llamar **producto vectorial fundamental**.

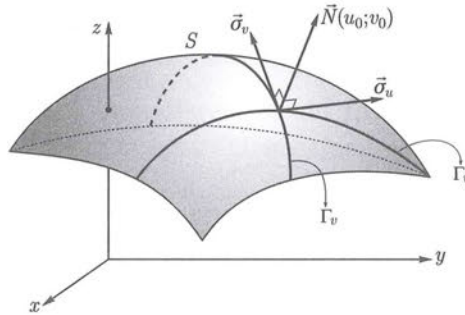


Fig. 2.16

En adelante, diremos que $\vec{N}(u; v)$ es el vector normal a S en el punto $(u; v)$. Además, la siguiente expresión:

$$\|\vec{N}(u; v)\| = \|\vec{\sigma}_u(u_0; v_0) \times \vec{\sigma}_v(u_0; v_0)\|$$

corresponde al área del paralelogramo que está definido por los vectores $\vec{\sigma}_u(u_0; v_0)$ y $\vec{\sigma}_v(u_0; v_0)$.

Diremos que una superficie S es **regular** en un punto P_0 de S , si y solo existe una parametrización $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S tal que:

- i) $\sigma(u_0; v_0) = P_0$, para algún $(u_0; v_0) \in D$.
- ii) $\vec{\sigma}$ es de clase C^1 sobre una bola abierta en \mathbb{R}^2 , centrada en $(u_0; v_0)$.
- iii) $\vec{N}(u_0; v_0) \neq \vec{0}$.

Si S es regular en cada uno de sus puntos diremos que S es una **superficie regular**.

Ejemplo 102. Demuestre que el cilindro $S : x^2 + y^2 = 1, -3 < z < 3$ es una superficie regular.

Solución

En el ejemplo 97 se ha visto que los puntos de S pueden ser descritos por la función,

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = \cos u \\ y = \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases},$$

en este caso, $0 \leq u \leq 2\pi$ y $-3 < v < 3$. Es claro que las derivadas parciales de

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v), \quad z = z(u; v),$$

son funciones continuas para todo $(u; v) \in D$, siendo

$$D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, -3 < v < 3\},$$

es decir $\vec{\sigma}$ es de clase C^1 sobre D . Además, se cumple que la normal a S en un punto arbitrario de S es,

$$\begin{aligned} \vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\cos u; \operatorname{sen} u; 0) \neq (0; 0; 0) \quad \text{sobre } D. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es una superficie regular.

Ejemplo 103. Se sabe que la función

$$\vec{\sigma}(u; v) = (v \cos u; v \operatorname{sen} u; v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad v \geq 0$$

parametriza el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si derivamos $\vec{\sigma}$ respecto a u y v respectivamente obtenemos

$$\vec{\sigma}_u(u; v) = (-v \operatorname{sen} u; v \cos u; 0), \quad \text{y} \quad \vec{\sigma}_v(u; v) = (\cos u; \operatorname{sen} u; 1),$$

entonces

$$\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) = (v \cos u; v \operatorname{sen} u; -v).$$

Observe que $\vec{N}(u; v) = \vec{0}$ si y solo si $v = 0$ y esto corresponde al vértice del cono. Por lo tanto, el cono es regular, excepto en su vértice.

El siguiente ejemplo evidencia la importancia de la elección de la parametrización para determinar la regularidad de la superficie en un punto.

Ejemplo 104. Para la parametrización $\vec{\sigma}(u; v) = (u; u + v; u^2 + v^2)$, $(u; v) \in \mathbb{R}^2$ la superficie $S : z = x^2 + (y - x)^2$ es regular, pues $\vec{\sigma}$ es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 y además se cumple

$$\begin{aligned}\vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} \\ &= (2v - 2u; -2v; 1) \neq (0; 0; 0) \quad \text{para todo } (u; v) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Sin embargo, la parametrización

$$\vec{r}(u; v) = (u^3; u^3 + v^3; u^6 + v^6), \quad (u; v) \in \mathbb{R}^2,$$

de la misma superficie S no cumple la condición (iii) para superficies regulares, pues

$$\begin{aligned}\vec{N}(u; v) &= \vec{r}_u(u; v) \times \vec{r}_v(u; v) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3u^2 & 3u^2 & 6u^5 \\ 0 & 3v^2 & 6v^5 \end{vmatrix} \\ &= (18u^2v^5 - 18u^5v^2; -18u^2v^5; 9u^2v^2) = (0; 0; 0)\end{aligned}$$

si y solo si $u = 0$, $v = 0$ y $u = v$. Igualmente, en los puntos de la forma $(0; v^3; v^6)$ y $(u^3; u^3; u^6)$ el vector normal sería nulo. Por lo tanto, para esta parametrización, la superficie S no es regular en dichos puntos.

Si una superficie es regular en un punto $P_0 = \sigma(u_0; v_0) = (x_0; y_0; z_0)$, definimos el **plano tangente** a $S = \sigma(D)$ en P_0 como el plano que pasa por P_0 y tiene a $\vec{N}(u_0; v_0)$ como vector normal. La ecuación del plano tangente es descrita por la siguiente expresión

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) \cdot \vec{N}(u_0; v_0) = 0$$

donde $(x; y; z)$ son las coordenadas de un punto arbitrario del plano tangente.

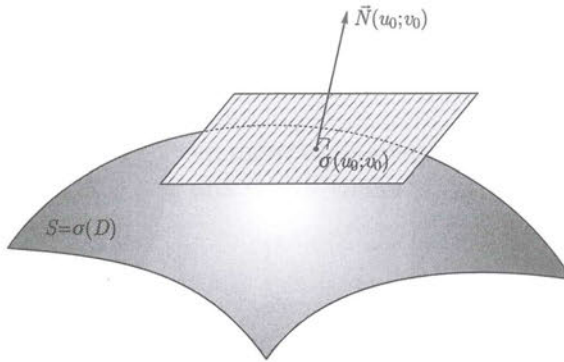


Fig. 2.17

Ejemplo 105. Sea S la superficie descrita por la ecuación:

$$\vec{\sigma}(u; v) = (u \cos v; u \operatorname{sen} v; u^2), \quad u \in [0; 2\pi], \quad v \in [0; \pi].$$

- Represente gráficamente la superficie S .
- Escriba la ecuación y grafique la v -curva correspondiente a $u = 2$ y la u -curva correspondiente a $v = \frac{\pi}{6}$.
- Grafique las curvas descritas en la parte b) de esta pregunta sobre la gráfica de la superficie S .
- Halle la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\sqrt{3}; 1; 4)$.

Solución

- a) Las ecuaciones paramétricas de la superficie S son

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = u^2,$$

combinando estas ecuaciones obtenemos $x^2 + y^2 = z$, cuya gráfica corresponde a un paraboloides.

- b) Si $u = 2$, la imagen de la función

$$\vec{\sigma}(2; v) = (2 \cos v; 2 \operatorname{sen} v; 4), \quad \text{con } 0 \leq v \leq \pi,$$

corresponde a una circunferencia Γ_v de radio 2 contenida en el plano $z = 4$. Si $v = \frac{\pi}{6}$, tenemos que la imagen de la función

$$\sigma(u; \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} u; \frac{1}{2} u; u^2), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,$$

representa a una parábola Γ_u contenida en el plano $x = \sqrt{3}y$.

c)

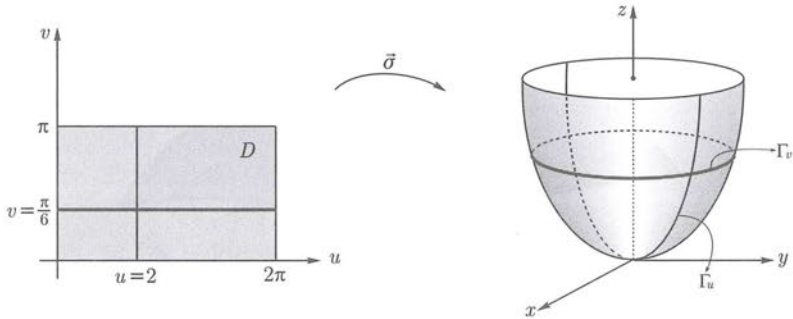


Fig. 2.18

- d) Como la superficie S es regular en el punto $\sigma(2; \frac{\pi}{6}) = (\sqrt{3}; 1; 4)$, entonces existe el plano tangente a la superficie S en ese punto cuya ecuación es dada por

$$(x - \sqrt{3}; y - 1; z - 4) \cdot \vec{N}(2; \frac{\pi}{6}) = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{N}(2; \frac{\pi}{6}) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \Big|_{(u;v)=(2; \frac{\pi}{6})} \\ &= (\cos v; \sin v; 2u) \times (-u \sin v; u \cos v; 0) \Big|_{(u;v)=(2; \frac{\pi}{6})} \\ &= (-2u^2 \cos v; -2u^2 \sin v; u) \Big|_{(u;v)=(2; \frac{\pi}{6})} = (-4\sqrt{3}; -4; 2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\sqrt{3}; 1, 4)$ es

$$2\sqrt{3}x + 2y - z = 4.$$

Diremos que una superficie S es **regular por partes** si es unión de imágenes de un número finito de superficies regulares $S_i = \sigma_i(D_i)$, $i \in \{1; 2; \dots; m\}$, es decir se cumplen las siguientes condiciones

- Cada $\vec{\sigma}_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 e inyectiva sobre todo D_i , excepto posiblemente en parte de su frontera.
- Cada D_i es una región en \mathbb{R}^2 formada de un conjunto conexo abierto, junto con posiblemente algunos o todos sus puntos de la frontera.

- Cada $S_i = \sigma_i(D_i)$ es regular, excepto posiblemente un número finito de puntos.

Ejemplo 106. La superficie de un cubo es una superficie regular por partes, ella es unión de sus seis caras, cada una de las cuales son superficies regulares.

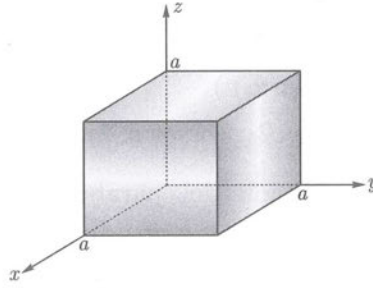


Fig. 2.19

Ejercicios: Sección 2.3

- Para cada una de las siguientes superficies paramétricas, halle una ecuación cartesiana, identifique la superficie y gráfíquela.
 - $\vec{\sigma}(u; v) = (u \cos v; u \operatorname{sen} v; u^2)$
 - $\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; v; 2 \operatorname{sen} u)$
 - $\vec{\sigma}(u; v) = (u; v; \frac{v}{2})$
 - $\vec{\sigma}(u; v) = (u \cos v; u \operatorname{sen} v; u)$
 - $\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos v \cos u; 2 \cos v \operatorname{sen} u; 2 \operatorname{sen} v)$
- Considere la parametrización del paraboloide descrita por la función $\vec{\sigma}(u; v) = (u; v; u^2 + v^2)$
 - ¿Es una superficie paramétrica diferenciable? Justifique.
 - ¿Es una superficie paramétrica regular? Justifique.
 - En caso de ser posible halle el plano tangente a la superficie en el punto $(1; 2; 5)$.
- Responda la parte a) y b) de la pregunta anterior para la parametrización del cono $\vec{\sigma}(u; v) = (u \cos v; u \operatorname{sen} v; u)$, $u \geq 0$. Halle, si es posible, el plano tangente al cono en el punto $(0; 1; 1)$.
- Sea S la superficie descrita por $z = 2(x^2 + y^2)$ con $z \leq 8$. Considere la parametrización $\vec{\sigma}$ de S dada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 2u^2 \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2$$

- Bosqueje la gráfica de S .
- Grafique el dominio D de la función $\vec{\sigma}$.
- Para cada uno de los siguientes valores de $v : 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$.
 - Grafique sobre D los segmentos $(u; v)$ con $0 \leq u \leq 2$.
 - Sobre la gráfica de S hecha en la parte a) dibuje las u -curvas coordenadas descritas en la parte (c1).
- Para cada uno de los siguientes valores de $u : 0, 1, 2$.
 - Grafique sobre D los segmentos $(u; v)$ con $0 \leq v \leq 2\pi$.
 - Sobre la gráfica de S hecha en la parte a) dibuje las v -curvas coordenadas descritas en la parte (d1).

5. Si una superficie es definida por la función vectorial

$$\vec{\sigma}(u; v) = (u \cos v; u \sin v; u^2 + v^2), \quad (u; v) \in \mathbb{R}^2,$$

encuentre la ecuación del plano tangente a S en el punto $(1; 0; 1)$.

6. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S parametrizada por la función $\vec{\sigma}(u; v) = (u + v; 3u^2; u - v)$, en el punto $(2; 3; 0)$.

7. Dada la superficie

$$S : \vec{\sigma}(u; v) = (\cos v \sen u; \sen v \sen u; \cos u), \quad \text{para } 0 \leq u \leq \pi \text{ y } 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Analice si S admite plano tangente en el punto $(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$. En caso afirmativo, encuentre la ecuación de dicho plano.

8. Halle una parametrización de la porción del cilindro $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ comprendida entre los planos $x = 0$ y $x = 10$.
9. Sean $P(0; 0; 4)$ y Γ la curva generada por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = (t; t^2 + 1; t + t^2), \quad -1 \leq t \leq 1$$

Si S es la superficie obtenida al unir los puntos de Γ con el punto P mediante segmentos de recta.

a) Parametrice S .

b) Encuentre el producto vectorial fundamental de S respecto a la parametrización hallada en la parte a).

10. La esfera centrada en el origen y radio 2 es parametrizada por la función vectorial

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u \sen v; 2 \sen u \sen v; 2 \cos v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

Analice si S es regular.

Apéndice

Coordenadas cilíndricas

Se ha visto que en el plano es más fácil representar algunas gráficas en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. En esta parte veremos que se presenta una situación similar para la representación de algunas superficies en el espacio.

Sea P un punto de \mathbb{R}^3 de coordenadas cartesianas $(x; y; z)$. Las coordenadas cilíndricas $(r; \theta; z)$ para P se definen de la siguiente manera:

- (i) r : distancia del origen a la proyección P' del punto P sobre el plano xy .
- (ii) θ : ángulo definido por la parte positiva del eje x y el rayo que pasa por el origen y el punto P' , medido en sentido antihorario visto desde la parte positiva del eje z .

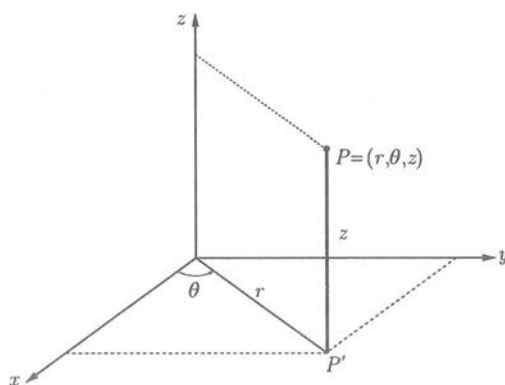


Fig. A.

Cada punto $P(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ puede ser descrito usando la terna $(r; \theta; z)$ de modo que:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

Además, se cumple $x^2 + y^2 = r^2$.

En adelante, asumiremos que $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. De esta manera, todos los puntos de \mathbb{R}^3 excepto los del eje z tienen una única representación en coordenadas cilíndricas. Un punto sobre el eje z con coordenadas cartesianas $(0; 0; z_0)$ tiene coordenadas cilíndricas $(0; \theta; z_0)$, donde θ puede ser cualquier ángulo.

Sistema de coordenadas esféricas

Sea P un punto en \mathbb{R}^3 de coordenadas $(x; y; z)$ en el sistema de coordenadas cartesianas. Se definen las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ , para P de la siguiente manera,

ρ : es la distancia del origen de coordenadas al punto P

θ : es el mismo que en coordenadas cilíndricas, y

ϕ : es el menor ángulo formado desde el eje positivo z a la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto P .

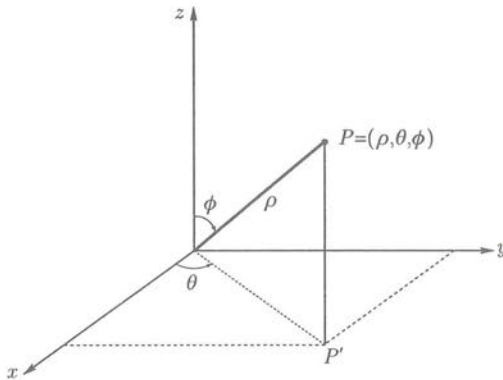


Fig. B.

Cada punto en \mathbb{R}^3 es representado en el sistema de coordenadas esféricas por la terna $(\rho; \theta; \phi)$ verificando,

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

En la práctica se imponen las siguientes restricciones,

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Con tales restricciones, todos los puntos de \mathbb{R}^3 excepto sobre los del eje z tienen un único conjunto de coordenadas esféricas. Puntos a lo largo del eje z excepto el origen de coordenadas, tienen coordenadas de la forma $(\rho_0; \theta; 0)$ o $(\rho_0; \theta; \pi)$ donde ρ_0 es una constante positiva y θ es arbitrario. El origen tiene coordenadas esféricas $(0; \theta; \phi)$, donde θ y ϕ son arbitrarios. Note además que,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Este sistema de coordenada esféricas son especialmente útiles para describir objetos que tienen un centro de simetría.

Teorema de cambio de variable (teorema de Cambio de variables). Sean Ω y Ω^* dos regiones elementales en el espacio $x y z$ y $u v w$ respectivamente y

$$T : \Omega^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ (u; v; w) \longmapsto T(u; v; w) = (x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w))$$

una función de clase C^1 inyectiva, excepto posiblemente en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables, que lleva Ω^* en Ω , entonces si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en Ω se cumple

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) \left| \frac{\partial(x; y; z)}{\partial(u; v; w)} \right| du dv dw,$$

donde

$$\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(u; v; w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de la transformación T .

Observación 20.

1. Si $T : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$, entonces el jacobiano de esta función es

$$\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(r; \theta; z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

2. Si $T : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$, entonces el jacobiano de esta función es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x; y; z)}{\partial(\rho; \theta; \phi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & -\rho \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial(x; y; z)}{\partial(\rho; \theta; \phi)} &= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi. \end{aligned}$$

3. En coordenadas cilíndricas:

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y $T : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$,
donde $(r; \theta; z) \in \Omega^*$, entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(x(r; \theta; z); y(r; \theta; z); z(r; \theta; z)) r dr d\theta dz,$$

donde $T(\Omega^*) = \Omega$.

4. En coordenadas esféricas:

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y $T : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$,
donde $(\rho; \theta; \phi) \in \Omega^*$, entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(x(\rho; \theta; \phi); y(\rho; \theta; \phi); z(\rho; \theta; \phi)) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi,$$

donde $T(\Omega^*) = \Omega$.

2.4. Área de una superficie

Ahora veremos cómo la noción de superficie, definida a través de una parametrización, permite definir el área de la superficie.

Supongamos que $S = \sigma(D)$ ⁵ sea una superficie regular donde D es la unión de un número finito de regiones elementales⁶ en \mathbb{R}^2 .

Por simplicidad supongamos que D es un rectángulo, digamos $D = [a, b] \times [c, d]$. Además, consideremos las particiones,

$$\{u_0; u_1; \dots; u_n : a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b\} \text{ del intervalo } [a; b], \text{ y}$$

$$\{v_0; v_1; v_2; \dots; v_n : c = v_0 < v_1 < \dots < v_n = d\} \text{ del intervalo } [c; d]$$

esto origina que la región D quede particionada en n^2 subrectángulos. Denotemos por D_{ij} al rectángulo de vértices $(u_{i-1}; v_{j-1})$, $(u_{i-1}; v_j)$, $(u_i; v_{j-1})$, $(u_i; v_j)$ y por $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ al largo de D_{ij} y por $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$ a su altura, esto para cada $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$.

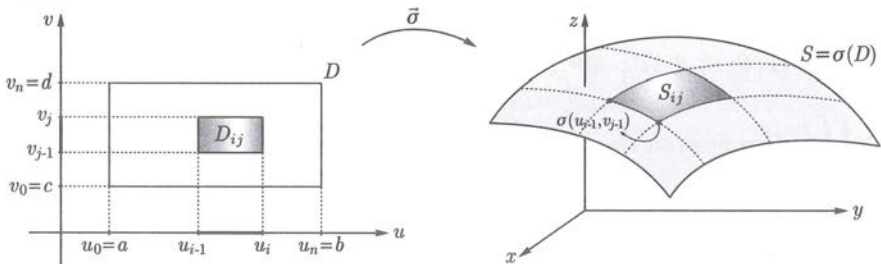


Fig. 2.20

La imagen del subrectángulo D_{ij} , mediante $\vec{\sigma}$ es una porción de superficie que denotamos por S_{ij} , ver figura 2.20. Claramente podemos aproximar el área de S_{ij} usando el paralelogramo que definen los vectores $\sigma_u(u_{i-1}; v_{j-1})\Delta u_i$ y $\sigma_v(u_{i-1}; v_{j-1})\Delta v_j$, esto es, el área de la porción de superficie S_{ij} viene dada aproximadamente por

$$A(S_{ij}) \approx \|\sigma_u(u_{i-1}; v_{j-1})\Delta u_i \times \sigma_v(u_{i-1}; v_{j-1})\Delta v_j\|$$

$$A(S_{ij}) \approx \|\sigma_u(u_{i-1}; v_{j-1}) \times \sigma_v(u_{i-1}; v_{j-1})\| \Delta u_i \Delta v_j$$

Luego,

⁵ $\sigma(D) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; y; z) = \sigma(u; v), \text{ para algún } (u; v) \in D\}$

⁶ver [6]

$$A(S) = \sum_{i,j=1}^n A(S_{ij}) \approx \sum_{i,j=1}^n \|\sigma_u(u_{i-1}; v_{j-1}) \times \sigma_v(u_{i-1}; v_{j-1})\| \Delta u_i \Delta v_j$$

Esto explica por qué el área de una superficie se define como el límite estas sumas cuando $\Delta u_i \rightarrow 0$ y $\Delta v_j \rightarrow 0$, es decir,

$$A(S) = \lim_{\Delta u_i, \Delta v_j \rightarrow 0} \sum_{i,j=1}^n A(S_{ij}) = \int_a^b \int_c^d \|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\| du dv$$

Este mismo resultado sigue siendo válido siempre que D sea una región elemental y acotada de \mathbb{R}^2 . También escribiremos

$$A(S) = \iint_D \|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\| du dv.$$

Sea S una superficie regular parametrizada por $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u; v)$, con $(u; v) \in D$, el área de S se define como

$$A(S) = \iint_D \|\vec{N}(u; v)\| du dv$$

donde $\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)$.

El término dS , es llamado **diferencial de superficie** y es definido por

$$dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv.$$

La definición anterior puede expresarse en términos del diferencial de superficie dS ,

$$A(S) = \iint_D dS.$$

Observación 21.

1. El área de una superficie es independiente de la parametrización elegida ⁷.
2. Si la superficie es regular por partes, es decir es unión finita de superficies regulares, su área se determina como la suma de las áreas de estas superficies regulares.

⁷ver [6]

Ejemplo 107. Encuentre el área de la superficie

$$S : \vec{\sigma}(u; v) = (uv; u + v; u - v), \quad (u; v) \in D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Solución

Se trata de encontrar $A(S) = \iint_D dS$, donde $dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv$.

Observe que

$$\begin{aligned} \vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= (v; 1; 1) \times (u; 1; -1) \\ &= (-2; u + v; v - u). \end{aligned}$$

Luego,

$$dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv = \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)} du dv.$$

Por lo tanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)} du dv.$$

Pasando a coordenadas polares $\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$, con $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{4 + 2r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (4 + 2r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} (12^{\frac{3}{2}} - 8). \end{aligned}$$

Ejemplo 108. Halle el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $y + z = 4$.

Solución

Al parametrizar la porción del cilindro tenemos,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; v), \quad \text{para } 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 4 - 2 \sin u.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= (-2 \sin u; 2 \cos u; 0) \times (0; 0; 1) \\ &= (2 \cos u; 2 \sin u; 0), \end{aligned}$$

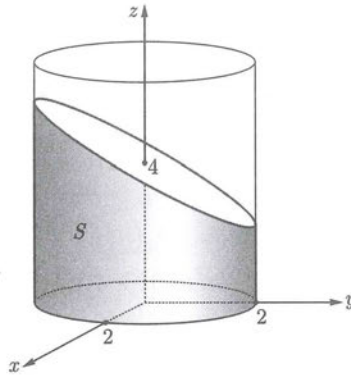


Fig. 2.21

entonces $dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv = 2 du dv$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_D dS = \iint_D 2 du dv \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4-2\sin u} dv \right) du \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} (4 - 2 \sin u) du \\
 &= 16\pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 109. Halle el área de la porción del cilindro $S : x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$ que se encuentra entre los planos $y = x$, $y = 2x$, con $x \geq 0$.

Solución

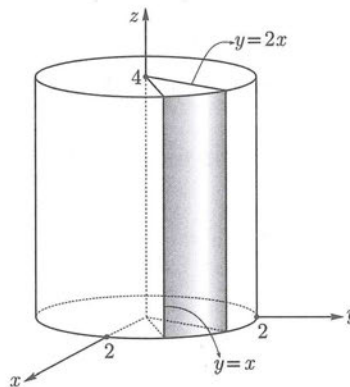


Fig. 2.22

Al parametrizar la superficie S obtenemos

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; v), \quad \frac{\pi}{4} \leq u \leq \arctan \frac{1}{2}, \quad 0 \leq v \leq 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(u; v)\| du dv = \|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\| du dv \\ &= \|(-2 \cos u; -2 \operatorname{sen} u; 0) \times (0; 1; 0)\| du dv \\ &= \|(2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; 0)\| du dv = 2 du dv, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS = 2 \iint_D du dv \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan \frac{1}{2}} \left(\int_0^4 dv \right) du = 8 \left(\arctan \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 110. Encuentre el área de una superficie esférica centrada en el origen de coordenadas y de radio a .

Solución

Se sabe que una parametrización para $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ viene dada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = (a \operatorname{sen} v \cos u; a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u; a \cos v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & a \operatorname{sen} v \cos u & 0 \\ a \cos v \cos u & a \cos v \operatorname{sen} u & -a \operatorname{sen} v \end{vmatrix} \\ &= (-a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u; -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u; -a^2 \operatorname{sen} v \cos v). \end{aligned}$$

Luego, $dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv = a^2 \operatorname{sen} v du dv$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS = \iint_D a^2 \operatorname{sen} v dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi a^2 \operatorname{sen} v dv \right) du \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 111. Calcule el área de S , donde S es la porción del cono $x^2 = y^2 + z^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ ubicada en el primer octante.

Solución

Observe que S puede ser considerada como la gráfica de una función de la forma $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $S : x = g(y; z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, donde $(y; z) \in D$, siendo $D = \{(y; z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

Luego,

$$\vec{\sigma}(y; z) = (\sqrt{y^2 + z^2}; y; z), \quad (y; z) \in D.$$

Entonces,

$$dS = \|\vec{\sigma}_y(y; z) \times \vec{\sigma}_z(y; z)\| = \sqrt{2} dy dz$$
$$A(S) = \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dy dz = \frac{\pi}{4} a^2.$$

Área de una superficie definida como la gráfica de una función de dos variables

Suponga que S es una superficie descrita como el gráfico de una función de clase C^1

$$\begin{aligned} g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto z = g(x; y) \end{aligned}$$

donde D es un conexo y abierto de \mathbb{R}^2 . En el ejemplo 94 se ha visto que una parametrización para S viene dada por

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; g(x; y)), \text{ para } (x; y) \in D,$$

de esta última relación obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{N}(x; y) &= \vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) \\ &= \left(\frac{\partial(y; z)}{\partial(x; y)}, \frac{\partial(z; x)}{\partial(x; y)}, \frac{\partial(x; y)}{\partial(x; y)} \right) \\ &= (-g_x(x; y); -g_y(x; y); 1), \end{aligned}$$

es decir, $\vec{N}(x; y) \neq \vec{0}$ para todo $(x; y) \in D$, luego la superficie S es regular. Por otro lado, su diferencial es

$$dS = \|\vec{N}(x; y)\| dx dy = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy$$

Por lo tanto, su área puede obtenerse mediante la siguiente expresión

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy.$$

De manera análoga, se procede para los siguientes casos:

$$S : y = h(x; z), (x; z) \in D \quad \text{y} \quad S : x = k(y; z), (y; z) \in D.$$

obteniéndose que los diferenciales de área respectivamente son:

$$dS = \|\vec{N}(x; z)\| dx dz = \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_z)^2} dx dz$$

y

$$dS = \|\vec{N}(y; z)\| dy dz = \sqrt{1 + (k_y)^2 + (k_z)^2} dy dz.$$

Luego, sus áreas pueden ser obtenidas respectivamente, por las siguientes expresiones:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_z)^2} dx dz$$

y

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (k_y)^2 + (k_z)^2} dy dz.$$

Ejemplo 112. Sea S la parte de la superficie cónica: $y^2 = x^2 + z^2$ comprendida entre los planos $y = 1$ y $y = 3$. Halle el área de S .

Solución

Observe que la superficie S puede considerarse como el gráfico de una función de dos variables, esto es,

$$y = h(x; z) = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{con } (x; z) \in D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9\},$$

donde D es obtenida al proyectar S sobre al plano xz .

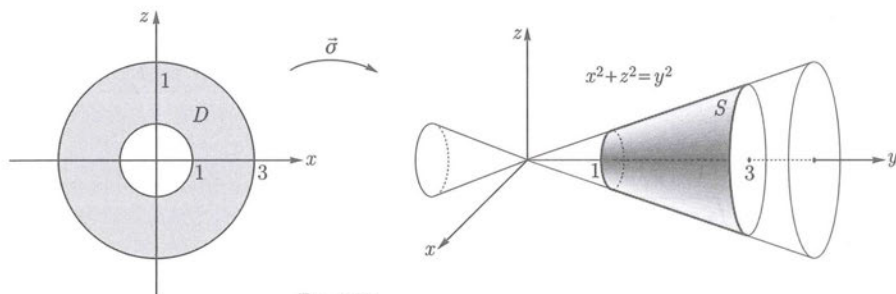


Fig. 2.23

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(x; z)\| dx dz \\ &= \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_z)^2} dx dz \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2} dx dz \\ &= \sqrt{2} dx dz. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS \\ &= \sqrt{2} \iint_D dx dz \\ &= \sqrt{2} A(D) = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 113. Sea S la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$. Halle su área.

Solución

De las condiciones del problema se tiene que $z \geq 0$, luego la superficie esférica puede ser definida como la gráfica de una función de dos variables, es decir,

$$z = g(x; y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \text{para } (x; y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

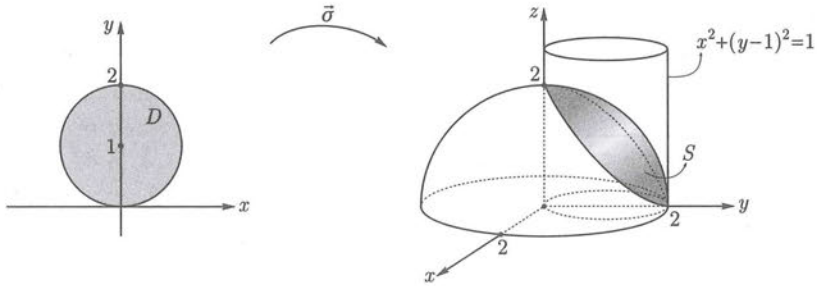


Fig. 2.24

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(x; y)\| dx dy \\ &= \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS \\ &= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy, \end{aligned}$$

y pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta & r \in [0; 2 \operatorname{sen} \theta] \\ y = r \operatorname{sen} \theta & \theta \in [0; \pi] \end{cases}$ tenemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[-2\sqrt{4 - r^2} \right]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi (-4 \cos \theta + 4) d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 114. Halle el área de la superficie $x^2 = z$ limitada por los planos $y = 0$, $z = 4$, $y = 2 - x$.

Solución

Es claro que la superficie puede definirse como la gráfica de una función de dos variables, esto es

$$z = g(x, y) = x^2, \text{ para } (x, y) \in D,$$

donde D es la región plana obtenida al proyectar S sobre el plano xy como se muestra en la siguiente figura:

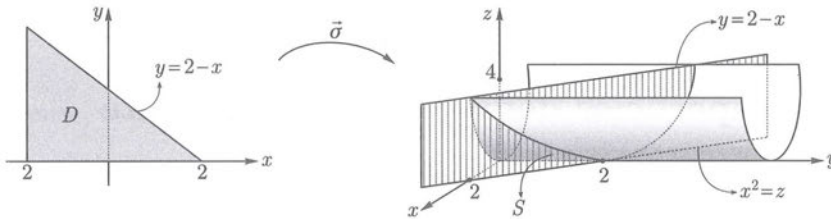


Fig. 2.25

es decir,

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x, -2 \leq x \leq 2\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(x; y)\| dx dy \\ &= \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + (2x)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + 4x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2} dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{2-x} \sqrt{1 + 4x^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2 - x) \sqrt{1 + 4x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(S) &= 2 \int_{-2}^2 \sqrt{1+4x^2} dx - \int_{-2}^2 x \sqrt{1+4x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^2 \sqrt{1+4x^2} dx \\
 &= 4 \left[x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{1+4x^2}| \right]_{x=0}^2 \\
 &= 8\sqrt{17} + 2 \ln(4 + \sqrt{17}),
 \end{aligned}$$

pues la función $s(x) = \sqrt{1+4x^2}$ es una función par y $t(x) = x\sqrt{1+4x^2}$ es una función impar en $[-2; 2]$.

Área de superficies definidas implícitamente

Sea $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto

$$S_c = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : G(x; y; z) = c\}$$

es llamado **superficie de nivel** de G definida por la constante c . A continuación el siguiente resultado nos dice bajo qué condiciones S_c es una superficie en el sentido de la definición dada en la sección 2.1.

Teorema 2.1. Sean $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre un conjunto abierto y conexo U , y $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ un punto de la superficie de nivel S_c . Si $\vec{\nabla}G(P_0) \neq (0; 0; 0)$, entonces existe una parametrización de S_c en una vecindad⁸ de P_0 .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0$, entonces existen números reales $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ y una función $g : B_r(x_0; y_0) \rightarrow (z_0 - \varepsilon; z_0 + \varepsilon)$ tales que

- $g(x_0; y_0) = z_0$.
- $G(x; y; g(x; y)) = c$.
- Para cada $(x; y) \in B_r(x_0; y_0)$, $z = g(x; y)$ es la única solución de la ecuación $G(x; y; z) = c$.
- La función $z = g(x; y)$ tiene derivadas parciales continuas en $B_r(x_0; y_0)$, dadas por

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z},$$

⁸ver [3]

es decir, la ecuación $G(x; y; z) = c$ define implícitamente a z como una función de dos variables x, y en una vecindad de $(x_0; y_0)$ y lo hace de manera única.

Las derivadas parciales de g son obtenidas usando la regla de la cadena, en efecto al derivar respecto a x en la ecuación $G(x; y; z) = c$ obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}}.$$

Similarmente, al derivar respecto a y en la ecuación $G(x; y; z) = c$ obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}}.$$

Luego, la función $\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; g(x; y))$, $(x; y) \in D$ es una parametrización de S .

Por lo tanto, el diferencial de superficie de S es

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(x; y)\| dx dy \\ &= \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{(G_x)^2 + (G_y)^2 + (G_z)^2}}{|G_z|} dx dy. \end{aligned}$$

De esta manera, el área de S puede ser calculada por la siguiente expresión,

$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|} dx dy. \quad (2.1)$$

Ejemplo 115. Halle el área de la porción de superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$, $a \geq 0$.

Solución

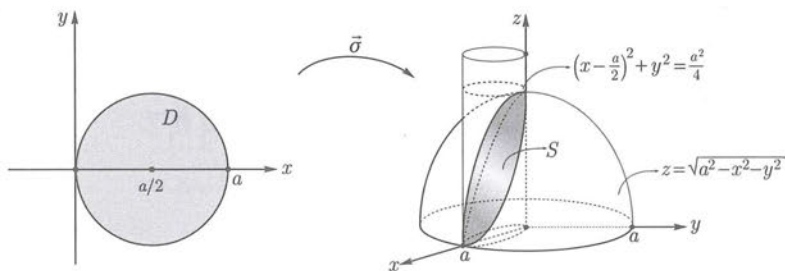


Fig. 2.26

Definamos la función $G(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ entonces de la ecuación 2.1 tenemos

$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|} dx dy \quad (2.2)$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}\}$ ha sido obtenido al proyectar S sobre el plano xy . Además,

$$G_x(x; y; z) = 2x, \quad G_y(x; y; z) = 2y, \quad G_z(x; y; z) = 2z.$$

Luego, reemplazando y simplificando en la expresión 2.2 obtenemos

$$A(S) = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

y pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r \in [0; a \cos \theta] \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$, resulta,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \frac{a r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right) d\theta \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sqrt{\sin^2 \theta}) d\theta \\ &= a^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \sin \theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta \right) \\ &= a^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

Ejercicios: Sección 2.4

- Halle el área de la porción de la esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$ donde $0 < b < a$.
- Halle el área de la parte del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante y limitado por el cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.
- Halle el área de la porción de la superficie $x^2 + y^2 = \frac{z^4}{256}$ comprendida entre los planos $z = 0$; $z = 4$.
- Encuentre el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ comprendida entre los planos $z = -1$ y $z = \sqrt{3}$.
- Calcule el área de la porción de la superficie $z = 2 - x^2 - y$ que está dentro del prisma triangular recto, cuya base está en el plano xy y que está limitada por las rectas $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.
- Encuentre el área de la porción del paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S centrada en el origen de coordenadas en dos regiones S_1 y S_2 , donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 fuera del cilindro. Halle el área de S_1 y, usando el hecho que el área total de la esfera es 4π , deduzca el área de S_2 .
- Halle el área del paraboloides $z = x^2 + y^2$ comprendido entre los planos $x = 1$ y $z = 4$.
- Calcule el área de la superficie que limita la intersección de los cilindros sólidos

$$x^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = a^2, \text{ siendo } a > 0$$
- Halle el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está sobre el plano xy y entre los planos $z = y$, $z = 2y$.
- Calcule el área de la porción de superficie $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano xy y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$.
- Calcule el área del paraboloides hiperbólico $z = xy$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- Encuentre el área de la parte de la superficie $z - x^2 - y^2 = 9$ comprendida entre los planos $z = 10$ y $z = 13$.

2.5. Integrales de superficies de campos escalares

Sean S una superficie regular parametrizada por $\vec{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ además de ser conexo y abierto, con toda o parte de su frontera incluida, es acotado y, sea f un campo escalar continuo cuyo dominio incluye a $S = \sigma(D)$.

La **integral de superficie de un campo escalar sobre S** denotada por $\iint_S f dS$ se define como

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\sigma(u; v)) \|\vec{N}(u; v)\| du dv, \quad (2.3)$$

donde $\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)$.

En el caso que S sea una superficie regular por partes la integral $\iint_S f dS$ se define como la suma de las integrales de superficie sobre cada parte regular de S , es decir, si la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, entonces

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS_1 + \iint_{S_2} f dS_2 + \dots + \iint_{S_m} f dS.$$

Ejemplo 116. Halle la integral de superficie del campo escalar $f(x; y; z) = x + z$ sobre la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $y + z = 2$ y $z = 4$.

Solución

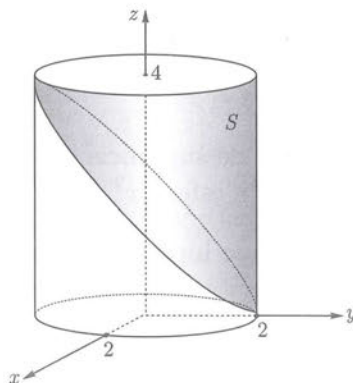


Fig. 2.27

Se trata de evaluar la integral $\iint_S (x+z) dS$.

Una parametrización para S es

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; v), \text{ con } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ y } 2 - 2 \sin u \leq v \leq 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(u; v)\| du dv \\ &= \|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\| du dv \\ &= \|(2 \cos u; 2 \sin u; 0)\| du dv \\ &= 2 du dv. \end{aligned}$$

Por otro lado, $f(\sigma(u; v)) = 2 \cos u + v$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x; y; z) dS &= \iint_D f(\sigma(u; v)) \|\vec{N}(u; v)\| du dv \\ &= 2 \iint_D (2 \cos u + v) du dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{2-2\sin u}^4 (2 \cos u + v) dv \right) du \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(2v \cos u + \frac{1}{2} v^2 \right) \Big|_{2-2\sin u}^4 du \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (4 \cos u + 2 \sin 2u + 8 \sin u + 5 - \cos 2u) du \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 117. Calcule $\iint_S xyz dS$, siendo S parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ ubicada en el primer octante entre los planos $y = 0$ y $y = 1$.

Solución

Una parametrización para la porción del cilindro es,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \sin u; v; 2 \cos u), \quad u \in [0; \frac{\pi}{2}], \quad v \in [0; 1].$$

Luego,

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{N}(u; v)\| du dv \\ &= \|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\| du dv \\ &= \|(2 \sin u; 0; 2 \cos u)\| = 2 du dv. \end{aligned}$$

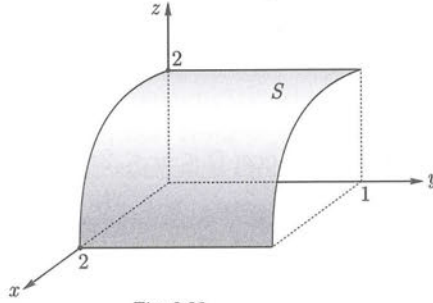


Fig. 2.28

Además, $f(\sigma(u; v)) = 2v \operatorname{sen} 2u$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \iint_S x y z \, dS &= \iint_D f(\sigma(u; v)) \|N(u; v)\| \, du \, dv \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 v \operatorname{sen} 2u \, dv \right) du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 \operatorname{sen}(2u) \Big|_{v=0}^1 du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2u) \, du = 1.
 \end{aligned}$$

Integrales de superficies de campos escalares para superficies definidas explícitamente

1. Si una superficie S se define como el gráfico de una función de clase C^1 de la forma

$$z = g(x; y), \quad (x; y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{para } D \text{ conexo abierto y acotado,}$$

entonces la función

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; g(x; y)), \quad (x; y) \in D$$

parametriza S y su diferencial de superficie es

$$dS = \|\vec{N}(x; y)\| \, dx \, dy = \|(-g_x; -g_y; 1)\| \, dx \, dy.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S f(x; y; z) \, dS = \iint_D f(x; y; g(x; y)) \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} \, dx \, dy \quad (2.4)$$

2. Si la superficie S es definida como el gráfico de una función de clase C^1 de la forma

$$y = h(x; z), \quad (x; z) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

para D conexo abierto y acotado, entonces, la función

$$\vec{\sigma}(x; z) = (x; h(x; z); z), \quad (x; z) \in D,$$

parametriza S y su diferencial de superficie es

$$dS = \|\vec{N}(x; z)\| dx dz = \|(-h_x; 1; -h_z)\| dx dz.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S f(x; y; z) dS = \iint_D f(x; h(x, z); z) \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_z)^2} dx dz. \quad (2.5)$$

3. Si la superficie S es definida como el gráfico de una función de clase C^1 de la forma

$$x = k(y; z), \quad (y; z) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

para D conexo abierto y acotado, entonces, la función

$$\vec{\sigma}(y; z) = (k(y; z); y; z), \quad (y; z) \in D$$

parametriza S y su diferencial de superficie es

$$dS = \|\vec{N}(y; z)\| dy dz = \|(1; -k_y; -k_z)\| dy dz.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S f(x; y; z) dS = \iint_D f(k(y, z); y; z) \sqrt{1 + (k_y)^2 + (k_z)^2} dy dz. \quad (2.6)$$

Ejemplo 118. Calcule $\iint_S x^3 z dS$, siendo S la porción de la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

Solución

Como $z \geq 0$, la porción de superficie cónica puede ser considerada como el gráfico de una función de dos variables, es decir

$$z = g(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{donde } (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

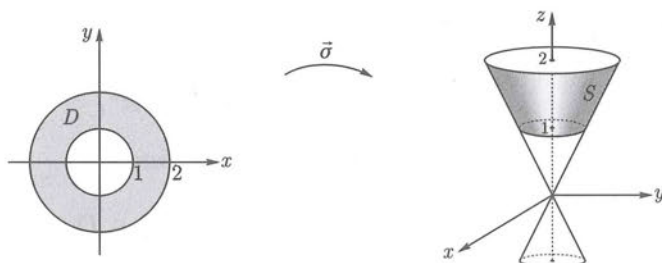


Fig. 2.29

Por otro lado, es claro que $f(x; y; z) = x^3 z$, entonces de la relación 2.4 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S f(x; y; z) dS &= \iint_D f(x; y; g(x; y)) \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \\ &= \iint_D x^3 \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D x^3 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos \theta & 1 \leq r \leq 2 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x; y; z) dS &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \cos^3 \theta dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta \right) \left(\int_1^2 r^5 dr \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \right) \left(\frac{1}{6} r^6 \right)_{r=1}^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 119. Halle $\iint_S z^3 dS$, siendo S la frontera del cubo

$$Q = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1].$$

Solución

Denotando por S_1, S_2, \dots, S_6 a las caras del cubo tenemos,

$$\iint_S z^3 dS = \iint_{S_1} z^3 dS_1 + \iint_{S_2} z^3 dS_2 + \dots + \iint_{S_6} z^3 dS_6$$

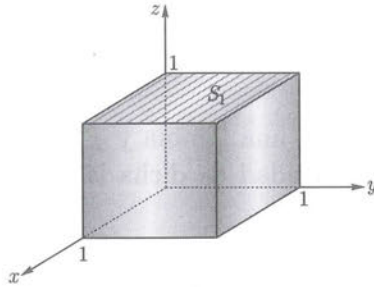


Fig. 2.30

Integraremos sobre la cara del cubo S_1 que se encuentra en el plano $z = 1$:

$$S_1 : z = g(x; y) = 1, (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Luego,

$$dS_1 = \|\vec{N}(x; y)\| dx dy = \|(0; 0; 1)\| dx dy = dx dy$$

y como $f(x; y; z) = z^3$, de la relación 2.4 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z^3 dS_1 &= \iint_D f(x; y; g(x; y)) \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \\ &= \iint_D dx dy \\ &= A(D) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera similar se procede en los otros casos. Finalmente, $\iint_S z^3 dS = 2$.

Aplicaciones de la integral de superficie de un campo escalar

Si la superficie S representa una lámina y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que representa la densidad de dicha lámina, siendo U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , entonces definimos:

1. Masa de una lámina

$$M(S) = \iint_S f \, dS.$$

Si $f(x, y, z) = 1$, para cada $(x, y, z) \in U$, entonces $M(S)$ es numéricamente el área de la superficie S .

2. Centro de masa de una lámina

El centro de masa M de la lámina S tiene coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x f \, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y f \, dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S z f \, dS.$$

3. Momento de inercia de una lámina

El momento de inercia respecto de la recta L es

$$I_L = \iint_S d^2(P; L) f \, dS$$

donde para cada $(x, y, z) \in S$ la expresión $d(P; L)$ representa la distancia del punto (x, y, z) a la recta L .

Ejemplo 120. Calcule la masa de la porción del plano $x + y + z = 3$ ubicada en el primer octante, si la densidad superficial en cualquier punto del plano es $2x^2$.

Solución

Esta superficie puede ser considerada como la gráfica de la función,

$$z = g(x, y) = 3 - x - y, \quad (x, y) \in D,$$

donde D es obtenida al proyectar la superficie sobre el plano xy , esto es,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}.$$

Gráficamente:

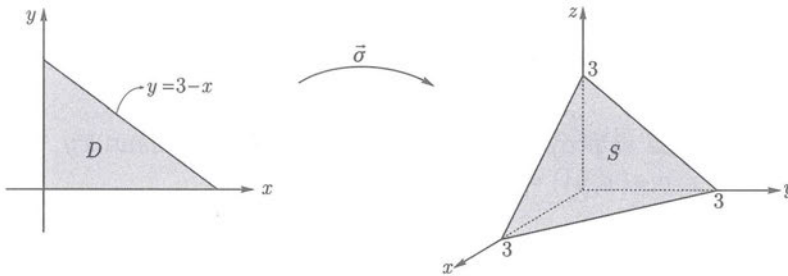


Fig. 2.31

Luego,

$$\begin{aligned}
 M(S) &= \iint_S 2x^2 \, dS \\
 &= \iint_D 2x^2 \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} \, dx \, dy \\
 &= 2\sqrt{3} \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} x^2 \, dy \right) dx \\
 &= 2\sqrt{3} \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \frac{27\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 121. Una lámina tiene la forma de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ limitado por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Halle la masa de la lámina si en cada punto $(x; y; z) \in S$ su densidad es $f(x; y; z) = z^3$.

Solución

El objetivo es hallar el valor de la integral $M = \iint_S f \, dS$, donde S es la porción del cilindro $S : x^2 + z^2 = 9$ limitado por la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

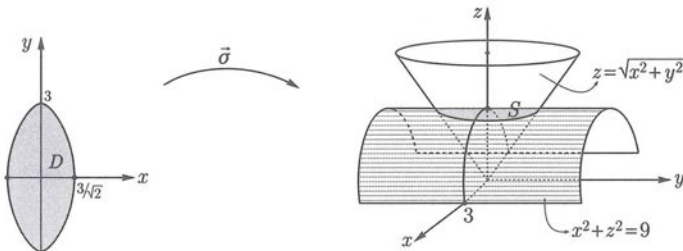


Fig. 2.32

Observe que S puede ser considerada como la gráfica de una función de dos

variables, esto es

$$z = g(x; y) = \sqrt{9 - x^2}, \text{ con } (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 9\},$$

donde D es obtenida al proyectar la superficie S sobre el plano xy .

Es claro que $f((x; y; g(x; y))) = \sqrt{(9 - x^2)^3}$ y

$$dS = \|\vec{N}(x; y)\| dx dy = \left\| \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}; 0; 1 \right) \right\| dx dy = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &= \iint_S f(x; y; z) dS \\ &= \iint_D f(x; y; g(x; y)) \|\vec{N}(x; y)\| dx dy \\ &= 3 \iint_D (9 - x^2) dx dy \\ &= 27 A(D) - 3 \iint_D x^2 dx dy. \end{aligned}$$

Como D es una región limitada por la elipse $2x^2 + y^2 = 9$, entonces $A(D) = \frac{9}{\sqrt{2}} \pi$.

Para evaluar la integral $\iint_D x^2 dx dy$ usamos coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} r \cos \theta & r \in [0; 1] \\ y = 3r \sin \theta & \theta \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que el jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{9}{\sqrt{2}} r,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 M &= 27 \left(\frac{9}{\sqrt{2}} \pi \right) - 3 \iint_D x^2 dx dy \\
 &= \frac{243}{\sqrt{2}} \pi - 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{81}{2\sqrt{2}} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\
 &= \frac{243}{\sqrt{2}} \pi - \frac{243}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{243}{\sqrt{2}} \pi - \frac{243}{16\sqrt{2}} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)_{\theta=0}^{2\pi} \\
 &= \frac{243}{\sqrt{2}} \pi - \frac{243}{16\sqrt{2}} \pi = \frac{3645}{16\sqrt{2}} \pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 122. Una hoja de papel homogénea rectangular de base 4π cm y altura 3cm se enrolla formando un cilindro circular S de radio 2. Calcule el momento de inercia de S respecto a la recta que contiene un diámetro de la base circular.

Solución

Formamos el cilindro tomando su curva base (circunferencia) sobre el plano xy y como eje a z , es decir, construimos la superficie

$$S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Consideremos como función densidad homogénea la $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x; y; z) = k$, para algún valor constante k y como recta L al eje x , con lo cual se tiene que

$$d((x; y; z); L) = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Una parametrización para S es dada por

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3,$$

luego, $d(\sigma(u; v); L) = \sqrt{4 \sin^2 u + v^2}$ y $\|\vec{N}(u; v)\| = 2$

$$\begin{aligned}
 I_L &= \iint_S d^2((x; y; z); L) k dS \\
 &= 2k \iint_D (4 \sin^2 u + v^2) du dv \\
 &= 60k\pi,
 \end{aligned}$$

donde, $D = [0; 2\pi] \times [0; 3]$.

Ejemplo 123. Una lámina tiene la forma de la parte del plano $y = z$ limitado por el cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Halle la masa de esa lámina si en cada punto $(x; y; z)$ de S la densidad es proporcional a su distancia al plano xy .

Solución

Gráficamente:

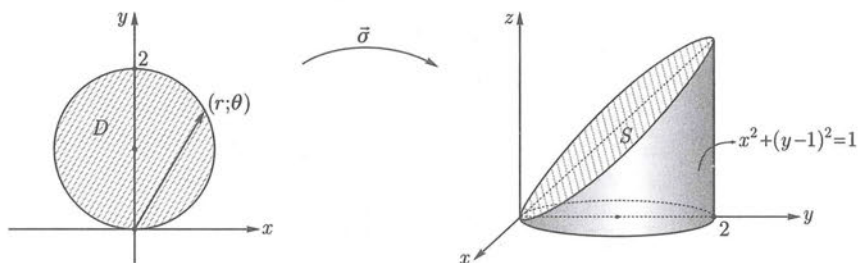


Fig. 2.33

Es claro que la superficie puede ser considerada como la gráfica de una función de dos variables, esto es,

$$z = g(x; y) = y, \text{ con } (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

Luego,

$$dS = \|\vec{N}(x; y)\| dx dy = \|(-g_x; -g_y; 1)\| = \|(0; -1; 1)\| = \sqrt{2} dx dy.$$

Por otro lado, tenemos que $f(x, y, z) = kz$ siendo k constante. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_D f(x; y; g(x; y)) \|\vec{N}(x; y)\| dx dy \\ &= \iint_D k y \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Como D es una región circular usamos a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & r \in [0; 2 \operatorname{sen} \theta] \\ y = r \operatorname{sen} \theta & \theta \in [0; \pi] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}M(S) &= k\sqrt{2} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \\&= \frac{\sqrt{2}k}{3} \int_0^\pi [r^3 \operatorname{sen}\theta]_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta \\&= \frac{8\sqrt{2}k}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta \\&= \frac{8\sqrt{2}k}{12} \int_0^\pi (1 - \cos(2\theta))^2 d\theta \\&= \frac{2\sqrt{2}k}{3} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) \right) d\theta \\&= \sqrt{2}\pi k.\end{aligned}$$

Ejercicios: Sección 2.5

- Determine el centro de masa de la porción de superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a \geq 0$.
- Determine el valor de la masa de la sección de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, limitada por el cilindro $(y - z)^2 + 2x^2 = 9$ y que se encuentra por encima del plano $z = 0$, sabiendo además que la densidad en cada punto de la esfera viene dada por la función $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{9 - y^2 - x^2}}{3}$.
- Una lámina tiene la forma de la porción del cilindro $S : x^2 + y^2 = 9$, $z \geq 0$ limitado por la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ y con densidad $f(x; y; z) = z^3$. Halle la masa de esta lámina.
- Una superficie S se genera uniendo, a través de segmentos de recta, cada punto P de la curva $\Gamma : \vec{r}(t) = P = (a \cos t; a \sin t; a \sin t)$, $t \in [0; 2\pi]$ con el origen de coordenadas. Calcule el momento de inercia de S respecto al eje z , si su densidad en cada punto P de S es $f(x; y; z) = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2}$.
- Una lámina tiene la forma de la superficie S y en cada punto $(x; y; z) \in S$ su densidad es $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$. Halle la tercera coordenada del centro de masa de dicha lámina.
- Calcule la masa de una lámina que tiene la forma de la porción de superficie $4 - x^2 = z$, $x \geq 0$ limitada por la superficie $z = y^2$, sabiendo que en cada punto $(x; y; z)$ de la lámina su densidad es $f(x; y; z) = x\sqrt{4x^2 + 1}$.
- Encuentre la integral de superficie $\iint_S z(x^2 + y^2) dS$, donde S es la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está por encima del plano $z = 1$.
- Calcule la integral de superficie $\iint_S f dS$ en cada uno de los siguientes casos:
 - $f(x; y; z) = 5 + y$ y $S : \vec{\sigma}(u; v) = (u; v; \frac{v}{2})$, $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 2]$.
 - $f(x; y; z) = xy$ y $S : \vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; v)$, donde $u \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $v \in [0; 2]$.
 - $f(x; y; z) = x + z$ y S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ en el primer octante entre $x = 0$ y $x = 4$.

9. Halle la masa de la superficie $2z = x^2 - y^2$, $z > 0$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Si la función de densidad viene dada por la función $f(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.
10. Uniendo, con segmentos de rectas, los puntos $(x; y; 0)$ y $(x; y + 2; 1)$ que cumplen la condición $x^2 + y^2 = 1$ se construye la superficie S . Halle la masa de dicha superficie si la densidad en cada punto $P(x; y; z) \in S$ es $f(x; y; z) = |x(y - 2z)|$.
11. Halle la masa de una lámina que tiene la forma de la porción de superficie $x^2 + y^2 + z = 4$ que se encuentra sobre el plano $z + 4 = 0$, sabiendo que la densidad en cada punto de la superficie S es igual a la distancia de dicho punto al eje z .
12. Halle el momento de inercia respecto del plano xy de una lámina que tiene la forma de la porción de superficie $x^2 + y^2 - z^2 + 4z = 4$ ubicada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, si la densidad en cada punto $(x; y; z)$ de la lámina es $f(x; y; z) = (2 + \sqrt{x^2 + y^2})^2$.
13. Sea S la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que es cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si en cada punto de S la densidad superficial es constante, halle el centro de masa de S .
14. Sea S la parte del cilindro $y^2 + 4z = 16$, cortada por los planos $x = 0$, $z = 0$, $2x + y = 12$. Halle la componente \bar{x} del centro de masa de S si la densidad en cada punto de S es dada por $f(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{4 + y^2}}$.
15. Si S es la parte del cilindro comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, calcule la integral de superficie del campo escalar $f(x; y; z) = x^2y + z^2$.
16. Una lámina tiene la forma de la superficie $S : z = 4 - x^2$, $x \geq 0$, limitada por la superficie $z = y^2$ y densidad $f(x; y; z) = \sqrt{1 + 4x^2}$ en cada punto $(x; y; z) \in S$. Calcule la primera coordenada del centro de masa de la lámina.

2.6. Integrales de superficies de campos vectoriales

Iniciamos esta sección con el problema de definir la orientación de una superficie. De manera intuitiva, diremos que una superficie en \mathbb{R}^3 es **orientable** si es posible señalar sin ambigüedad sus lados. Para precisar esta idea se usan vectores normales a la superficie.

Diremos que una superficie S en \mathbb{R}^3 es **orientable** si existe un campo vectorial continuo

$\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando las siguientes condiciones:

- i) $\vec{n}(P)$ es un vector perpendicular a S en todo punto P de S .
- ii) $\|\vec{n}(P)\| = 1$, para todo $P \in S$,

esto es, una superficie S en \mathbb{R}^3 se dice orientable si para cada punto $P \in S$ es posible definir un vector normal unitario $\vec{n}(P)$ a S que varíe continuamente sobre S .

Observación 22.

1. Sea S es una superficie regular parametrizada por $\vec{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sabemos que el vector

$$\frac{\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)}{\|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\|}$$

es normal unitario a S en el punto $\sigma(u; v)$, donde $(u; v) \in D$.

Si elegimos

$$\vec{n}(u; v) = \frac{\vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v)}{\|\vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v)\|}$$

diremos que la **orientación es positiva**, caso contrario diremos que la orientación de S es **negativa**. Claramente, la orientación depende de la parametrización.

2. Se conviene que en el caso que S sea la frontera de un sólido Ω acotado, la orientación positiva es aquella para la cual los vectores normales apuntan hacia el exterior ⁹ de Ω , y cuando las normales apuntan hacia el interior convenimos que la orientación es negativa.

Ejemplo 124. La esfera, el paraboloido, el hiperboloido de una hoja, etc. son superficies orientables.

⁹ver [3]

Ejemplo 125. Cuando S es descrita como superficie de nivel

$$G(x; y; z) = 0$$

donde $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 sobre U , tal que $\vec{\nabla}G(P) \neq \vec{0}$ en cualquier punto $P = (x; y; z)$ de la superficie, entonces tenemos dos elecciones para \vec{n} :

$$\vec{n}(x; y; z) = \frac{\vec{\nabla}G(x; y; z)}{\|\vec{\nabla}G(x; y; z)\|} \quad \text{ó} \quad \vec{n}(x; y; z) = -\frac{\vec{\nabla}G(x; y; z)}{\|\vec{\nabla}G(x; y; z)\|}$$

Por ejemplo, para la esfera $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ tenemos que

$$\vec{n}(x; y; z) = \frac{1}{a}(x; y; z) \quad \text{ó} \quad \vec{n}(x; y; z) = -\frac{1}{a}(x; y; z).$$

Ejemplo 126. Encuentre vectores unitarios normales apuntando hacia el exterior de la superficie $z = x^2 + y^2$.

Solución

Definamos la función $G(x; y; z) = x^2 + y^2 - z$, entonces su gradiente viene dado por $\vec{\nabla}G(x; y; z) = (2x; 2y; -1)$.

Se sabe que

$$\frac{\vec{\nabla}G(x; y; z)}{\|\vec{\nabla}G(x; y; z)\|} = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; -1 \right)$$

es un vector unitario normal a la superficie $G(x; y; z) = 0$. Luego, como la última componente del vector $\frac{\vec{\nabla}G(x; y; z)}{\|\vec{\nabla}G(x; y; z)\|}$ es un número negativo, entonces dicho vector apunta hacia el exterior de S . Por lo tanto, bastará elegir

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G(x; y; z)}{\|\vec{\nabla}G(x; y; z)\|},$$

y como cada componente de \vec{n} es una función continua se obtiene una orientación de S .

La otra orientación es dada por el vector $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, que apunta hacia el interior de S .

Ejemplo 127. Dada la superficie esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, podemos dar una orientación a S eligiendo el vector de posición $\vec{n}(x; y; z) = (x; y; z)$ como vector normal, el cual apunta hacia el lado exterior de la superficie. En efecto, usando coordenadas esféricas obtenemos una parametrización para S ,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (\text{sen } v \cos u; \text{sen } v \text{sen } u; \cos v), \quad u \in [0; 2\pi], \quad v \in [0; \pi].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{N}(u; v) &= \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) \\ &= (-\text{sen } v \text{sen } u; \text{sen } v \cos u; 0) \times (\cos v \cos u; \cos v \text{sen } u; -\text{sen } v) \\ &= -\text{sen } v(\text{sen } v \cos u; \text{sen } v \text{sen } u; \cos v) \\ &= -\text{sen } v \vec{n}(u; v), \end{aligned}$$

y como $\text{sen } v \geq 0$ para todo $v \in [0; \pi]$ resulta que el vector $\vec{N}(u; v)$ apunta hacia el interior de la esfera. Luego, la parametrización $\vec{\sigma}$ orienta negativamente a la esfera S .

Ejemplo 128. Dada la superficie $S = \sigma(D)$, donde

$$\vec{\sigma}(u; v) = (u; v; u^2 + v^2), \quad (u; v) \in D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Es claro que S es el paraboloides $z = x^2 + y^2$. Además,

$$\vec{n}(u; v) = \frac{\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)}{\|\vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} (-2u; -2v; 1)$$

Asimismo, como $\vec{N}(0; 0) = (0; 0; 1)$ es un vector normal que apunta hacia el interior del paraboloides, la superficie S tiene orientación positiva.

Sea S una superficie regular y orientada, parametrizada por la función $\vec{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo D una región acotada del plano a la que se le adjunta toda o parte de su frontera, y \vec{F} un campo vectorial continuo cuyo dominio incluye $S = \sigma(D)$. La integral de superficie del campo \vec{F} sobre S , denotada por $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, se define

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) \, du \, dv. \quad (2.7)$$

donde $\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v)$.

Si S es una superficie regular por partes, la integral de superficie de un campo vectorial \vec{F} es definida como la suma de integrales sobre cada superficie regular, es decir si $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \dots + \iint_{S_m} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Observación 23.

Es importante mencionar que el término diferencial que aparece en la integral de superficie de un campo vectorial $d\vec{S} = \vec{N}(u; v) du dv$ es una cantidad vectorial a diferencia del que aparece en la integral de superficie de un campo escalar $dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv$ que es una cantidad escalar.

Relación entre la integral de superficie de un campo escalar y de un campo vectorial

Sea S una superficie regular, frontera de un sólido y parametrizada por la función $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u; v)$ con $(u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, siendo D una región acotada a la que se le adjunta toda o parte de su frontera. Si \vec{F} es un campo vectorial continuo sobre S , entonces se define

$$\vec{n}(u; v) = \frac{\vec{N}(u; v)}{\|\vec{N}(u; v)\|}$$

como el vector normal unitario a S en el punto $\sigma(u; v)$ apuntando hacia el exterior de S , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) du dv \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{n}(u; v) \|\vec{N}(u; v)\| du dv \\ &= \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS, \end{aligned}$$

pues $dS = \|\vec{N}(u; v)\| du dv$.

Además, como \vec{n} es un vector unitario, la expresión $\vec{F} \cdot \vec{n}$ es la componente del campo \vec{F} en la dirección de \vec{n} , es decir, la expresión anterior nos dice que la integral de superficie de un campo vectorial sobre S es la integral de superficie del campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$, componente normal de \vec{F} sobre $S = \sigma(D)$, esto permite formular el siguiente teorema.

Teorema 2.2. La integral de superficie del campo vectorial \vec{F} sobre la superficie S es igual a la integral de la componente normal de \vec{F} sobre la superficie, es decir

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a S en el punto $\sigma(u; v)$ y apuntando en la misma dirección que el vector $\vec{N}(u; v)$.

Ejemplo 129. Halle $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ siendo S la superficie $x^2 + y^2 = 4$ limitado por

los planos $z = 0$ y $x + z = 4$, y $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z^3)$.

Solución

Al parametrizar la superficie S obtenemos,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; v), \quad (u; v) \in D,$$

donde $D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 4 - 2 \cos u\}$.

Luego,

$$\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) = (2 \cos u; 2 \sin u; 0)$$

y

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) = (2 \cos u; 2 \sin u; v^3),$$

entonces, $\vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) = 4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) du dv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-2\cos u} du dv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (4 - 2 \cos u) du \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 130. Calcule la integral de superficie del campo $\vec{F}(x; y; z) = (y; -x; z^2)$ sobre la porción del paraboloide $S : z = x^2 + y^2$ limitado por el plano $z = 1$, con normal unitaria apuntando hacia el exterior de S .

Solución

Nuestro objetivo es calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ o equivalentemente $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

S puede ser considerada como la gráfica de una función de dos variables, es decir

$$z = g(x; y), \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

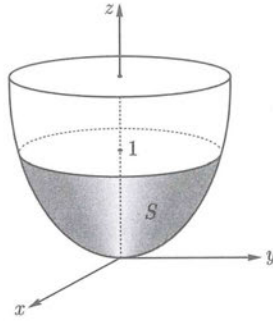


Fig. 2.34

luego, una parametrización para ella es dada por

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; x^2 + y^2), \quad (x; y) \in D,$$

entonces

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) = (y; -x; (x^2 + y^2)^2) \quad \text{y} \quad \vec{N}(x; y) = (-g_x; -g_y; 1) = (-2x; -2y; 1).$$

Luego,

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) = (x^2 + y^2)^2$$

Observe que el vector $\vec{N}(x; y)$ apunta hacia el interior del paraboloide, por ejemplo si $x = y = 1$ entonces $\vec{N}(1; 1) = (0; 0; 1)$ es un vector normal a S en el punto $\sigma(1; 1) = (1; 1; 2)$ apunta hacia el interior de la superficie. Por lo tanto, para calcular la integral pedida debemos anteponer el signo menos a la integral,

$$\begin{aligned} I &= - \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= - \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= - \iint_D (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares tenemos,

$$I = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \, dr \, d\theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Ejemplo 131. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, siendo $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ y S es la superficie exterior del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ limitada por los planos $y = -4, y = 4$.

Solución

Parametrizando la superficie obtenemos,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (a \operatorname{sen} u; v; a \operatorname{cos} u), \quad u \in [0; 2\pi[, \quad v \in [-4; 4],$$

entonces

$$\vec{N}(u; v) = (a \operatorname{cos} u; 0; -a \operatorname{sen} u) \times (0; 1; 0) = (a \operatorname{sen} u; 0; a \operatorname{cos} u)$$

y $\vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) = (a \operatorname{sen} u; v; a \operatorname{cos} u)$. Luego,

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) = a^2$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) du dv \\ &= a^2 \iint_D du dv \\ &= a^2 A(D) = 8\pi a^4. \end{aligned}$$

Ejemplo 132. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, siendo $\vec{F}(x; y; z) = (x^2; y^2; z)$ y donde S es la gráfica de la función $g(x; y) = x + y + 1$ cuya proyección sobre el plano xy es el rectángulo $[0; 1] \times [0; 1]$.

Solución

Parametrizando S :

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; x + y + 1), \quad (x; y) \in D = [0; 1] \times [0; 1].$$

Entonces,

$$\vec{N}(\vec{\sigma}(x; y)) = (-1; -1; 1) \quad y \quad \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) = (x^2; y^2; x + y + 1),$$

luego,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) dx dy \\ &= \iint_D (-x^2 - y^2 + x + y + 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (-x^2 - y^2 + x + y + 1) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{7}{6} \right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 133. Sean S la parte del paraboloido $z = x^2 + (y - 1)^2$ contenida en el cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 3$, \vec{F} el campo vectorial definido por la función $\vec{F}(x; y; z) = (0; -2z; 0)$, calcule la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo \vec{n} el vector unitario

normal exterior a S .

Solución

Una parametrización para S es dada por la función

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; x^2 + (y - 1)^2), \quad (x; y) \in D,$$

donde D es obtenida al proyectar el paraboloido contenido en el cilindro al plano xy , es decir $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 3\}$.

Por otro lado, como $\vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) = (-2x; -2(y - 1); 1)$ apunta hacia el interior de S , elegimos $\vec{N}(x; y) = (2x; 2(y - 1); -1)$. Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D -2[x^2 + (y - 1)^2](y - 1) \, dx \, dy \\ &= -2 \iint_D [x^2(y - 1) + (y - 1)^3] \, dx \, dy \end{aligned}$$

Como D es una región circular pasamos a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = 2 + r \sen \theta, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3},$$

entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} [r^2 \cos^2 \theta (1 + r \sen \theta) + (1 + r \sen \theta)^3] r \, dr \, d\theta \\ &= -24\pi. \end{aligned}$$

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Usando la integral de superficie definiremos el flujo de un campo por unidad de tiempo a través de una superficie regular.

Supongamos que se tiene una lámina delgada modelada por una superficie S regular, orientada positivamente con un vector normal unitario \vec{n} apuntando hacia el exterior de ella, como se muestra en el gráfico 2.35 y sumergida en un fluido (el cual podemos imaginarlo como una colección de puntos $(x; y; z)$ llamados partículas) cuyo campo de velocidad es $\vec{V}(x; y; z)$, que representa la velocidad de una partícula del fluido en $(x; y; z)$, y densidad $\rho(x; y; z)$ que fluye a través de S .

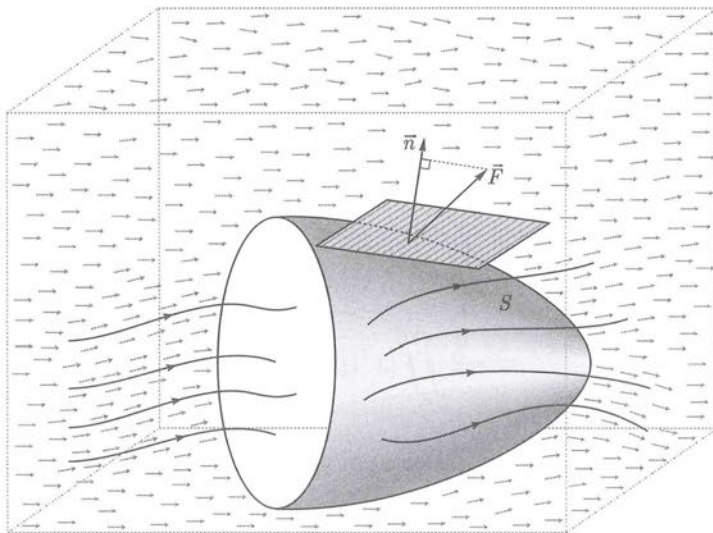


Fig. 2.35

El campo vectorial \vec{F} definido por

$$\vec{F}(x; y; z) = \rho(x; y; z) \vec{V}(x; y; z)$$

es llamado **densidad de flujo de la corriente** (vector de densidad de flujo), que representa la cantidad de masa de fluido por unidad de área y unidad de tiempo que circula por el punto $(x; y; z)$ en la dirección del vector \vec{V} . Así por ejemplo, si S es una porción de un plano de área $A(S)$ y \vec{F} fuera un campo constante, el flujo de \vec{F} , denotado por Φ será igual a

$$\Phi = \vec{F}_n \cdot A(S)$$

donde \vec{F}_n la componente de \vec{F} en la dirección de la normal a S .

Retornando al problema general, es decir si S es una superficie regular y

orientada, subdividimos la superficie S en pequeñas porciones que denotamos por S_k .

Como la superficie es regular, cada S_k puede ser aproximado por una porción de plano (plano tangente) de área $A(S_k)$. Asimismo, como esta partición puede realizarse tan pequeña como se desee, podemos considerar \vec{F} como un campo constante en S_k , de esta manera podemos aproximar la masa del fluido que atraviesa S_k , en la dirección de la normal por unidad de tiempo, de la siguiente manera:

$$\Phi_k = \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_k A(S_k) = \vec{F} \cdot \vec{n}_k A(S_k)$$

donde ρ , \vec{V} y \vec{n} se evalúan en algún punto sobre S_k . Al sumar todas estas cantidades y pasar al límite obtenemos

$$\Phi = \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad \text{ó} \quad \Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Esta expresión nos da la cantidad de masa del fluido que atraviesa S por unidad de tiempo en la dirección del vector \vec{n} . En adelante la llamaremos **flujo del campo vectorial \vec{F}** a través de la sección de superficie S en la dirección \vec{n} .

Ejemplo 134. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (2x; 2y; 2z)$ a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ interior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con normal exterior.

Solución

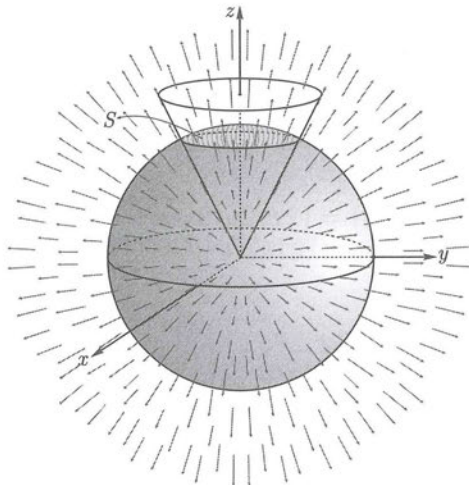


Fig. 2.36

Se trata de calcular $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

Observe que la superficie S puede definirse como la gráfica de una función, es decir

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x; y) \in D,$$

donde D se obtiene proyectando S sobre el plano xy . Luego,

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \quad (x; y) \in D.$$

Denotemos por Γ la intersección de las superficies dadas, esto es

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

la cual también puede definirse como $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$.

Por lo tanto, D es el siguiente conjunto

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}\}.$$

Por otro lado,

$$\vec{N}(x; y) = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; 1 \right)$$

y

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) = (2x; 2y; 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \end{aligned}$$

y pasando a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad \text{con } 0 \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{2a^2 r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right) d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} d\theta \\ &= 4a^3 \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 135. La corriente de un fluido tiene como vector densidad de flujo en cada punto a la función $\vec{F}(x; y; z) = (yz; xz; xy)$. Si S es la superficie correspondiente a una parte del plano $x + y + z = 1$ ubicada en el primer octante y \vec{n} es el vector normal a S , calcule la masa de fluido que atraviesa la superficie en una unidad de tiempo en la dirección de \vec{n} .

Solución

La superficie S es una parte del plano $z = 1 - x - y$, luego una parametrización de ella es dada por la siguiente función

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 1 - x - y), \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

entonces

$$\vec{N}(x; y) = (1; 1; 1) \quad \text{y} \quad \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) = (y - xy - y^2; x - x^2 - xy; xy).$$

Luego, el flujo Φ a través de la superficie S en la dirección del vector normal \vec{n} es

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y - x^2 - y^2 - xy) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} \right) dx \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ejemplo 136. Encuentre el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; 0)$ a través de la superficie exterior del sólido $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$.

Solución

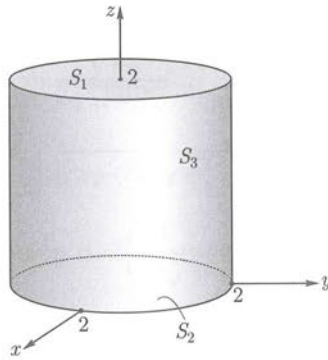


Fig. 2.37

El objetivo es encontrar Φ , donde

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_2 + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_3$$

Calculemos primero la integral $I_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_1$. En este caso, S_1 es una parte del plano $z = 2$, entonces

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 2), \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Luego,

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) = (x; y; 0) \quad \text{y} \quad \vec{N}(x; y) = (0; 0; 1).$$

Por lo tanto, $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_1 = 0$.

De manera similar, se procede a evaluar $I_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_2$, obteniéndose $I_2 = 0$.

Finalmente, evaluaremos $I_3 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_3$. En este caso, S_3 es una parte del cilindro, cuya parametrización es

$$\vec{\sigma}(u; v) = (2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2,$$

entonces

$$\vec{N}(u; v) = \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) = (2 \cos u; 2 \operatorname{sen} u; 0).$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS_3 \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 4 \, dv \right) \, du = 16\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi = I_1 + I_2 + I_3 = 16\pi$.

Ejemplo 137. Encuentre el flujo a través de la normal exterior de la superficie esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ del campo eléctrico $\vec{F}(x; y; z) = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x; y; z)$

generado por una carga.

Solución

Un vector normal unitario en el punto $(x; y; z)$ apuntando hacia el exterior de S viene dado por $\vec{n}(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x; y; z)$. Luego

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{a^2},$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \frac{q}{a^2} \iiint_S dS \\ &= \frac{q}{a^2} A(S) \\ &= 4\pi q. \end{aligned}$$

Ejemplo 138. Halle el flujo del campo $\vec{F}(x; y; z) = (xy; z^2; \ln(x^2 + z^2 + 4))$ a través de la superficie exterior de $S : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$, limitada por el cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Solución

Se trata de calcular $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $S : y = \sqrt{4 - x^2}$, $(x; z) \in D$.

Una parametrización para S es

$$\vec{\sigma}(x; z) = (x; \sqrt{4 - x^2}; z), \quad (x; z) \in D = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + z^2 \leq 4\},$$

entonces

$$\vec{F}(\vec{\sigma})(x; z) = (x\sqrt{4 - x^2}; z^2; \ln(x^2 + z^2 + 4))$$

y

$$N(x; z) = \vec{\sigma}_x(x; z) \times \vec{\sigma}_z(x; z) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; 1; 0 \right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; z)) \cdot \vec{N}(x; z) dx dz \\ &= \iint_D (x^2 + z^2) dx dz \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares: $x = \sqrt{2}r \cos \theta$, $y = 2r \sin \theta$ para $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \iint_{D^*} (2r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2r^3 (1 + \sin^2 \theta) dr \right) d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Divergencia y rotacional

En esta parte consideramos cierto tipo de operaciones de diferenciación sobre los campos escalares y vectoriales. Estas operaciones son:

Gradiente: Operación que a un campo escalar le hace corresponder un campo vectorial.

Divergencia: Operación que a un campo vectorial le hace corresponder un campo escalar.

Rotor: Operación que a un campo vectorial le hace corresponder otro campo vectorial.

Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 , denotemos por \mathbf{E} y \mathbf{F} al conjunto de campos vectoriales y campos escalares diferenciables respectivamente, es decir

$$\mathbf{E} = \{\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{F} \text{ es un campo vectorial diferenciable}\}$$

$$\mathbf{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : f \text{ es un campo escalar diferenciable}\}$$

El operador gradiente:

Denotado por $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es definido como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} : \mathbf{F} &\longrightarrow \mathbf{E} \\ f &\longmapsto \vec{\nabla} f \end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{\nabla} f(x; y; z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z); \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z); \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) \right).$$

El operador puede ser extendido a \mathbb{R}^n . Si tomamos x_1, x_2, \dots, x_n como las coordenadas para \mathbb{R}^n , entonces $\vec{\nabla}$ es simplemente

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

El operador divergencia:

Denotado por div es definido como

$$\begin{aligned} \text{div} : \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{F} \\ \vec{F} &\longmapsto \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

es decir, si $\vec{F} = (P; Q; R)$, entonces la divergencia de \vec{F} en $(x; y; z)$ es dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P; Q; R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x; y; z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x; y; z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x; y; z).\end{aligned}$$

Este operador también puede ser extendido a \mathbb{R}^n , es decir si U es un abierto de \mathbb{R}^n y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable, entonces

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

siendo x_1, x_2, \dots, x_n las coordenadas cartesianas para \mathbb{R}^n y F_1, F_2, \dots, F_n las componentes del campo \vec{F} .

Ejemplo 139. Calcule $\operatorname{div} \vec{F}(x; y)$ si $\vec{F}(x; y) = (x; y)$.

Solución

$$\operatorname{div} \vec{F}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2.$$

Gráficamente:

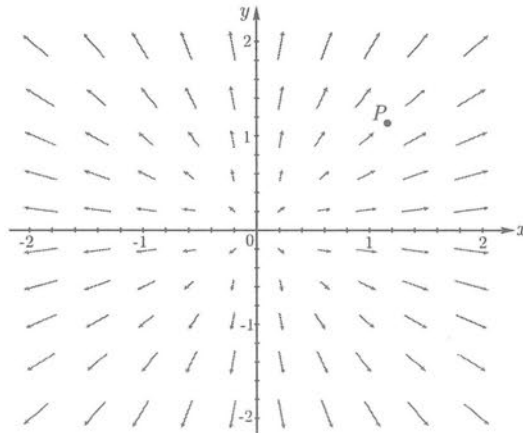


Fig. 2.38

Observe la magnitudes de los vectores en la dirección radial: su longitud es mayor conforme se alejan del punto P , esto puede interpretarse de la siguiente forma: hay más fluido alejándose que acercándose al punto P , en tal caso, se dice que el flujo neto alejándose del punto P es positivo, tal y como se ha obtenido.

Ejemplo 140. Calcule $\text{div} \vec{F}$ si $\vec{F}(x; y) = (y; -x)$

Solución

$$\text{div} \vec{F}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) = 0$$

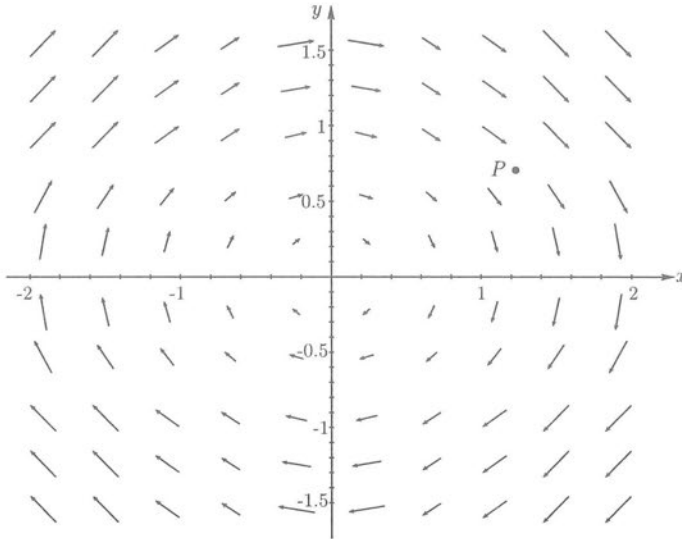


Fig. 2.39

Si \vec{F} representa el campo de velocidad de un fluido en movimiento, entonces la gráfica muestra que el fluido está rotando en trayectorias circulares y de manera que la velocidad de cualquier partícula sobre una circunferencia dada centrada en el origen es constante. De forma tal que puede considerarse que hay igual fluido acercándose que alejándose de un punto P , de allí que el flujo neto sea cero.

Observación 24.

En los ejemplos anteriores se ha visto que si el campo vectorial \vec{F} representa la velocidad de un fluido, se presentan los siguientes casos:

- i) Si $\text{div} \vec{F}(P) = 0$ entonces la razón con la que el fluido fluye hacia “el interior de P ” es igual a la razón con la que el fluido fluye hacia “el exterior de P ”.
- ii) Si $\text{div} \vec{F}(P) > 0$ significa que el fluido está fluyendo más hacia “el exterior de P ” que hacia “el interior de P ”.
- iii) Si $\text{div} \vec{F}(P) < 0$ significa que el fluido fluye más hacia “el interior de P ” que hacia “el exterior de P ”.

Se puede decir entonces que el valor de la divergencia de un campo vectorial en un punto proporciona una medida del flujo neto del campo vectorial.

Ejemplo 141. Calcule $\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z)$, si $\vec{F}(x; y; z) = (x^2y; xyz; x^2yz)$.
Solución

$$\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) = 2xy + xz + x^2y.$$

Gráfica del campo:

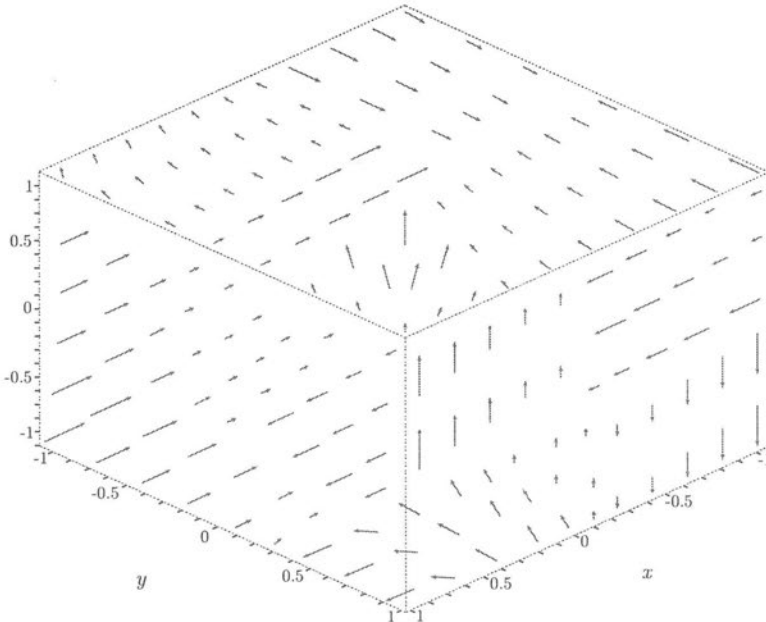


Fig. 2.40

Ejemplo 142. Halle la divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (xy; y^2z; xz^3)$.
Solución

$$\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^3)}{\partial z} = y + 2yz + 3xz^2$$

El operador rotor:

Denotado por rot es definido como

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} : \mathbf{F} &\longrightarrow \mathbf{F} \\ \vec{F} &\longmapsto \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \end{aligned}$$

es decir, si $\vec{F} = (P; Q; R)$, entonces el **rotacional** de \vec{F} en el punto $(x; y; z)$ es dado por

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F}(x; y; z) &= (\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 143. Calcule el rotacional del campo $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; 0)$.

Solución

Gráfica del campo:

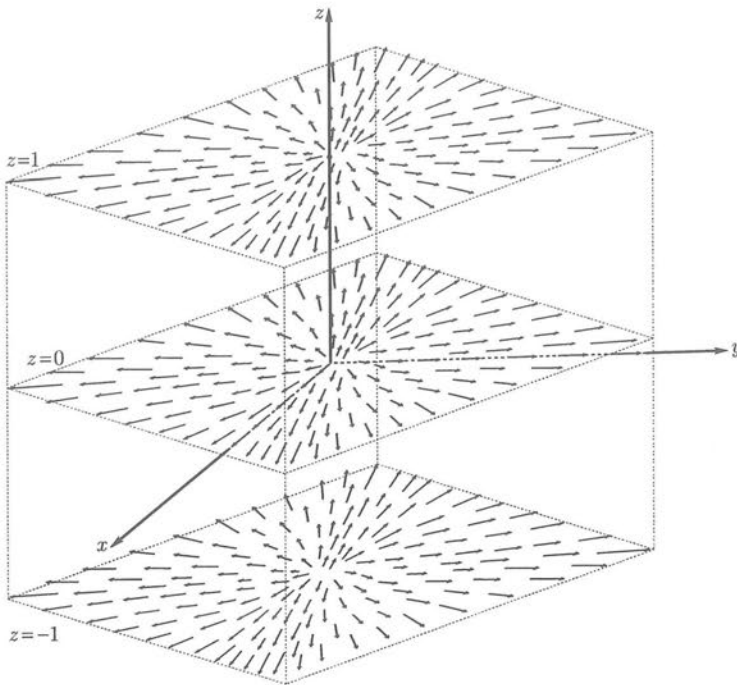


Fig. 2.41

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 0).$$

En este caso, los vectores indicados en la figura señalan la dirección del flujo del fluido. Observe que las líneas de flujo son rectas, no tiene rotación y en este caso se encontró que el rotacional de \vec{F} es cero.

Ejemplo 144. Calcule el rotacional del campo $\vec{F}(x; y; z) = (y; -x; 0)$.

Solución

Gráfica del campo:

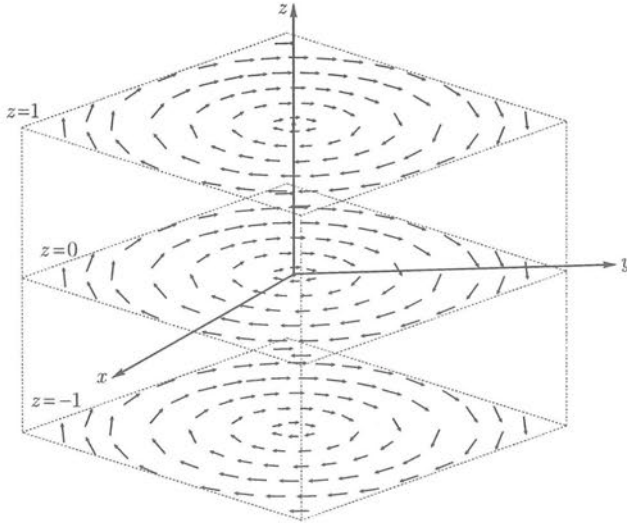


Fig. 2.42

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; -2).$$

Si se supone que \vec{F} representa el campo de velocidad para un fluido en movimiento, las líneas de flujo para este caso son circulares y presentan rotación en el sentido horario, y en este caso se determinó que el rotacional es diferente de cero. Obsérvese además que si se doblan los dedos siguiendo las líneas de flujo, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $-\vec{k}$, el cual tiene la misma dirección que $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(y; -x) = -2\vec{k}$.

Observación 25. El rotacional de un campo vectorial en un punto produce un vector paralelo al eje de rotación de las líneas de flujo cercanas al punto, y su dirección está determinada por la regla del pulgar derecho. Si $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(P) = 0$, se dice que el campo es **irrotacional** en P , esto significa que el fluido no tiende a rotar cerca del punto P . Este es el caso mostrado en el ejemplo 142.

Ejemplo 145. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, si $\vec{F}(x; y; z) = (xy; -xz; x + y + z)$.

Solución

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -xz & x + y + z \end{vmatrix} = (x + 1; -1; -x - z).$$

Ejemplo 146. Calcule el rotacional del campo $\vec{F} = (xz; yx; zy)$.

Solución

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yx & yz \end{vmatrix} = (z; x; y).$$

Observación 26. Si $\vec{F} = (P; Q; R)$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto convexo y abierto U , una condición necesaria y suficiente para que dicho campo sea conservativo en U es que las derivadas parciales cruzadas verifiquen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

De la definición del rotacional de \vec{F} , esta última condición es equivalente a exigir que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \vec{0},$$

permitiendo reformular las condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea conservativo en términos del rotacional de un campo vectorial.

Teorema 2.3. Sea $\vec{F} = (P; Q; R)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto convexo y abierto U , entonces una condición necesaria y suficiente para que \vec{F} sea conservativo en U es $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \vec{0}$ en U .

Ejemplo 147. Determine si el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (2xz; 3y; x^2 - y)$ es conservativo en \mathbb{R}^3 .

Solución

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & 3y & x^2 - y \end{vmatrix} = (-1; 0; 0) \neq (0; 0; 0).$$

Luego, del teorema 2.3 se concluye que el campo vectorial \vec{F} no es conservativo en su dominio.

Ejercicios: Sección 2.6

- Sea S el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano de ecuación $x + y + z = 1$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a S .
- Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq \frac{3}{5}$. Si $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ y \vec{n} es el vector unitario normal exterior, calcule el valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.
- Si S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitado por los planos $z = 0$, $z = x + 2$, calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde $\vec{F}(x; y; z) = (x^3; y^3; z)$ y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a S .
- Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde $\vec{F}(x; y; z) = (x; 0; 0)$ y S es la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenida dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere a \vec{n} como el vector unitario normal exterior a S .
- Halle el flujo del campo \vec{F} a través de la superficie S en cada uno de los siguientes casos:
 - $\vec{F}(x; y; z) = (3z; -4; y)$, $S: x + y + z = 1$ en el primer octante.
 - $\vec{F}(x; y; z) = (4; -3; 5)$, S es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, donde $(x; y)$ se encuentran en el conjunto $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - $\vec{F}(x; y; z) = (4xy; z^2; yz)$, S es el cubo cerrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ considerando el vector normal unitario exterior al cubo.
- Dado el campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (x; -y; z)$ y sea f el campo escalar definido por $f(x; y; z) = x + y + z$, calcule

a) $\vec{\nabla} f$	b) $\text{div} \vec{F}$	c) $\vec{\nabla} \times \vec{F}$
d) $\text{div}(f\vec{F})$	e) $(\vec{\nabla} \times (f\vec{F}))$	
- Pruebe que si f es una función de clase C^2 , entonces $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$.

8. Verifique las siguientes identidades

$$\text{a) } \vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$\text{b) } \operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{div}\vec{G}$$

$$\text{c) } \vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{F}) + (\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$$

donde f es un campo escalar y \vec{F}, \vec{G} son campos vectoriales.

2.7. Teorema de Stokes

Una consecuencia directa del *Teorema Fundamental del Cálculo*¹⁰ para funciones reales de variable real establece que el valor de la integral definida de una función depende únicamente del valor que tome una de sus antiderivadas en los extremos del intervalo de definición de la integral. Ahora bien, si consideramos las curvas del espacio que se obtienen de la deformación continua de un segmento, es lógico plantearse bajo qué condiciones, para la curva y el campo, la integral de línea de dicho campo vectorial sobre la curva es independiente del camino, precisamente esto es lo que estudiamos en la Sección 1.4 del Capítulo 1 (ver teorema 1.3). En la Sección 1.5 del Capítulo 1 mostramos que para ciertos campos y regiones planas, la integral doble depende únicamente del campo y de la frontera de la región (ver el Teorema de Green). Entonces, si consideramos las superficies del espacio que se obtienen de la deformación continua de una región plana, cabe preguntarse si existen superficies (no contenidas en un plano) y campos vectoriales cuyas integrales de superficie dependan solo del campo y de la frontera de la superficie, es decir, ¿existen integrales de superficie que sean equivalentes a una integral de línea? Los siguientes ejemplos muestran que sí existen tales campos y superficies.

Ejemplo 148. Considere el campo $\vec{F}(x; y; z) = (y; -x; yz)$ y la superficie S_k definida como la sección del paraboloido:

$$\frac{z+k}{1+k} = x^2 + y^2$$

limitado por el plano $z = 1$. Calcule $\iint_{S_k} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$.

Solución

En la figura 2.43 se observa que todas las superficies S_k tienen la misma frontera: una circunferencia de radio 1 contenida en el plano $z = 1$.

Claramente una parametrización para la superficie S_k viene dada por,

$$S : \vec{\sigma}(x; y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = (x^2 + y^2)(1+k) - k \end{cases}, \quad (x; y) \in D,$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Luego,

$$\vec{N}(x; y) = \vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) = (-(1+k)(2x); -(1+k)(2y); 1)$$

¹⁰Corolario del Teorema Fundamental del Cálculo: Si g es una antiderivada de la función f , entonces $\int_a^b f dx = g(b) - g(a)$.

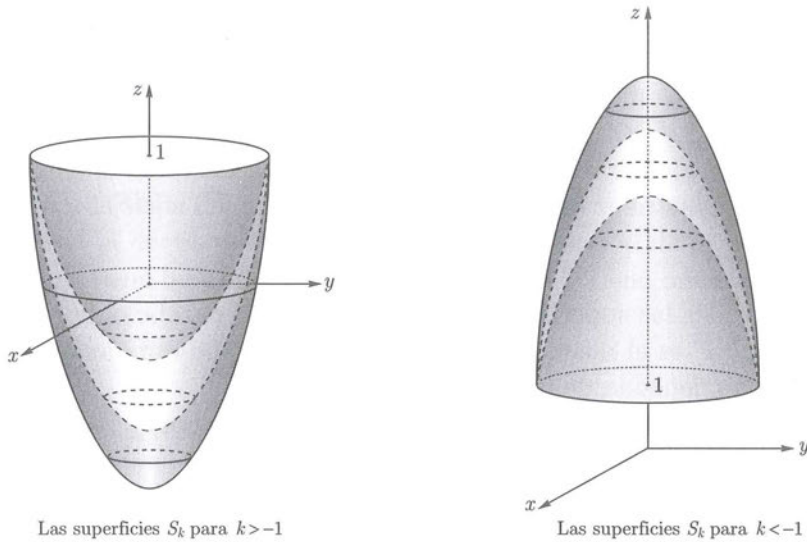


Fig. 2.43

y como $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = (z; 0; -2)$, entonces

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y; z)) = ((1+k)(x^2 + y^2) - k; 0; -2).$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D [-2x(1+k)^2(x^2 + y^2) + 2kx(1+k) - 2] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 [(-2r \cos \theta)((1+k), r^2 - k) - 2] r \, dr \right) d\theta \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

En este ejemplo queda claro que la integral de superficie es independiente del parámetro k que distingue a cada una de las superficies S_k . La pregunta que plantea este ejemplo es entonces: ¿de qué está dependiendo el valor de la integral de superficie?

El siguiente ejemplo dejará en claro que la integral de superficie del ejemplo anterior depende únicamente del campo y de la frontera de la superficie.

Ejemplo 149. Considere el campo del ejemplo anterior $\vec{F}(x; y; z) = (y; -x; yz)$ y la superficie S_k definida como la sección del paraboloido:

$$z = x^2 + y^2$$

limitada por el plano $z = k^2$, $k \neq 0$. Calcule $\iint_{S_k} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$.

Solución

Observe que todas las superficies S_k son secciones del paraboloido $z = x^2 + y^2$ y como el campo \vec{F} es el mismo del ejemplo anterior, cabe esperar que la integral de superficie no dependa de la superficie. Veamos,

Una parametrización para las superficies S_k viene dada por,

$$S : \vec{\sigma}(x; y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \quad (x; y) \in D, \quad \text{con } D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k\}.$$

Luego,

$$\vec{N}(x; y) = \vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) = (2x; -2y; 1)$$

y como $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = (z; 0; -2)$, entonces $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) = (x^2 + y^2; 0; 2)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) dx dy \\ &= \iint_D [(2x(x^2 + y^2) + 2)] dx dy. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares, obtenemos

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^k [-2r^3 \cos(\theta) - 2] r dr d\theta,$$

y simplificando obtenemos que

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = -2\pi k^2.$$

De los ejemplos anteriores queda claro que algunas integrales de superficies solo dependen del campo y de la frontera de la superficie. El teorema de Stokes caracteriza las superficies y campos con esta propiedad.

El teorema de Stokes, entonces, relaciona la integral de línea de un campo vectorial \vec{F} a lo largo de una curva cerrada simple Γ en \mathbb{R}^3 con la integral de superficie de cierto campo vectorial sobre una superficie S cuya frontera es Γ , esto es $\partial S = \Gamma$. La relación entre la integral de línea y la integral de superficie requiere una convención respecto a la orientación de la curva y la orientación de la superficie S . Para esto, usaremos la regla del pulgar derecho: Si al cerrar la mano, los dedos siguen la dirección de la curva y el pulgar señala en la dirección de la normal elegida, diremos que Γ tiene una orientación positiva y que Γ tiene orientación inducida por S .

En la fig.2.44 la curva $\Gamma = \partial S$ tiene orientación positiva.

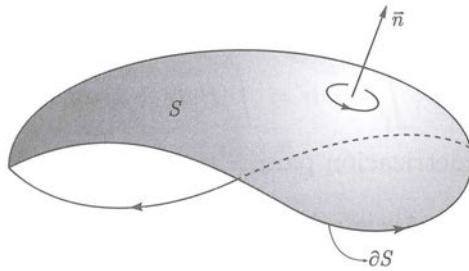


Fig. 2.44

Un caso particular del teorema de Stokes es el teorema de Green. En efecto, recordemos que si $\vec{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre un abierto de \mathbb{R}^2 , entonces el teorema de Green afirma que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde Γ es frontera de una región plana acotada, orientada positivamente respecto a D .

Consideremos ahora el campo vectorial anterior como un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , esto es, $\vec{F}(x; y; 0) = (P(x; y; 0); Q(x; y; 0); 0)$ e imaginemos la región D como una superficie S sobre el plano xy cuya frontera es Γ .

Gráficamente:

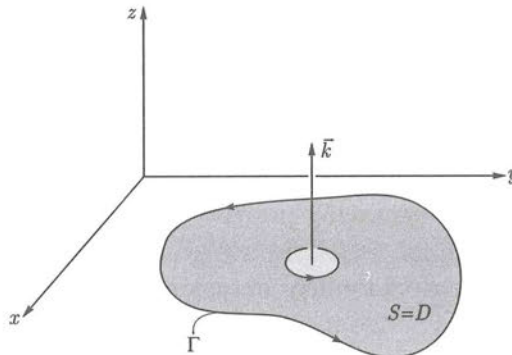


Fig. 2.45

entonces tenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

es claro que una parametrización para S es descrita por la función

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 0), \quad (x; y) \in D.$$

Luego,

$$\vec{N}(x; y) = \vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) = (0; 0; 1),$$

y además tenemos,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) dx dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0; 0; 1) dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Teorema 2.4 (Teorema de Stokes). Sea S una superficie regular y orientable, cuya frontera, ∂S , es una curva cerrada simple regular por partes cuya orientación es inducida por la orientación de S (ver figura 2.46). Si $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto abierto U que contiene a S , entonces,

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS. \quad (2.8)$$

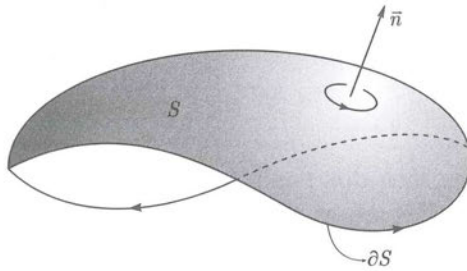


Fig. 2.46

Ejemplo 150. Usando el teorema de Stokes, halle el valor de la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (\arctan x; 3x; z^2 e^z)$ y Γ es la curva que resulta de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la semiesfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ orientada en sentido horario vista desde el origen de coordenadas.

Solución Primero comenzamos analizando si \vec{F} es un campo conservativo en su dominio, para lo cual evaluamos el rotacional de \vec{F} ,

$$(\nabla \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \arctan x & 3x & z^2 e^z \end{vmatrix} = (0; 0; 3) \neq \vec{0}.$$

Por lo tanto, el campo \vec{F} no es conservativo en su dominio. Luego, para evaluar $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ podemos usar la definición o el teorema de Stokes. En este caso, optamos por lo segundo, pues resulta más sencillo (se deja como ejercicio evaluar la integral usando la definición de integral de línea de un campo vectorial). En efecto, para aplicar el teorema de Stokes necesitamos expresar Γ como frontera de una superficie S .

Por ejemplo, como

$$\Gamma = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 1\}$$

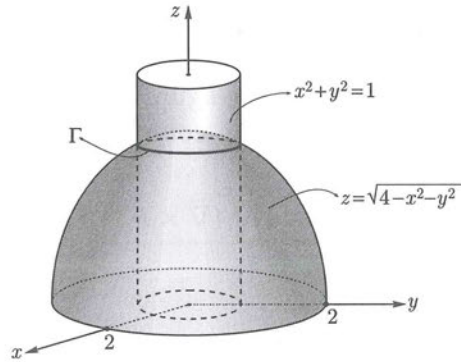


Fig. 2.47

es una curva cerrada, existen dos posibilidades de elegir S con la propiedad que su frontera coincida con Γ , esto es, $\partial S = \Gamma$:

- a) $S_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 1\}$.
 b) $S_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

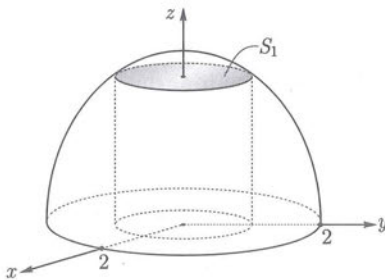


Fig. 2.48

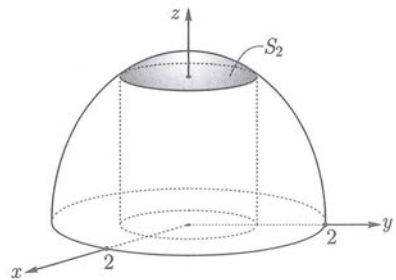


Fig. 2.49

Es claro que tomar S como S_2 es más simple por ser parte de un plano. Una parametrización para S viene dada por

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 1), \quad (x; y) \in D\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

pues la curva $\Gamma = \partial S$ puede también ser definida como intersección del plano $z = \sqrt{3}$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, es decir $\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Luego, tenemos $\vec{N}(x; y) = (0; 0; 1)$.

Por otro lado, observemos que la orientación de $\Gamma = \partial S$ es inducida por la orientación de S , es decir, si el dedo pulgar de la mano derecha señala la dirección de la normal \vec{n} , dada por la parametrización $\vec{\sigma}$, entonces la curva tiene orientación positiva, esto es, la dirección de Γ sigue la dirección de los dedos al cerrar la mano. Gráficamente:

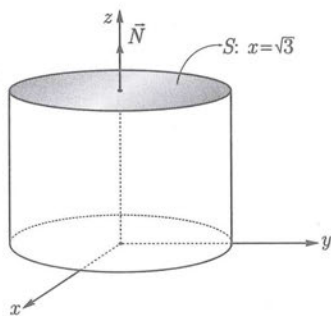


Fig. 2.50

El campo vectorial \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 y $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) = (0; 0; 3)$. Por lo tanto, del teorema de Stokes tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= 3 \iint_D dx \, dy \\ &= 3A(D) \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 151. Usando el teorema de Stokes, halle el valor de la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si $\vec{F}(x; y; z) = (xy; x^2; z^2)$ y Γ es la curva que resulta de la intersección del plano $x + z = 1$ con el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y está orientada en sentido horario vista desde el origen de coordenadas.

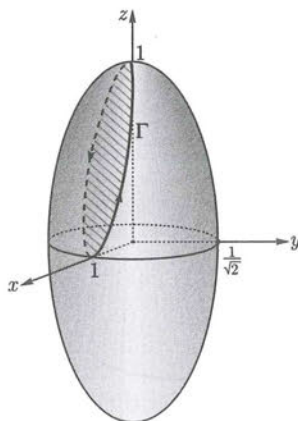
Solución**Gráficamente**

Fig. 2.51

Como en el ejemplo anterior empezamos analizando si el campo \vec{F} es conservativo en su dominio. En este caso, el rotacional del campo \vec{F} es

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & z^2 \end{vmatrix} = (0; 0; x) \neq \vec{0},$$

por lo tanto, \vec{F} no es conservativo en su dominio.

No es difícil hallar $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando la definición de integral de línea, queda como ejercicio para el lector hallar dicha integral. La otra opción para evaluar $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es aplicar el teorema de Stokes, para lo cual necesitamos expresar Γ como frontera de alguna superficie S . Como

$$\Gamma = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, x + z = 1\}$$

analizamos las siguientes posibilidades,

- $S_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1, x + z = 1\}$.
- $S_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, x + z \leq 1\}$.
- $S_3 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1, x + z \geq 1\}$.

Gráficamente:

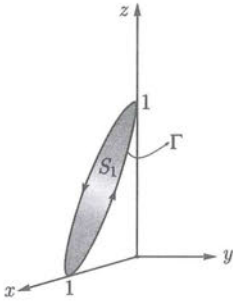


Fig. 2.52

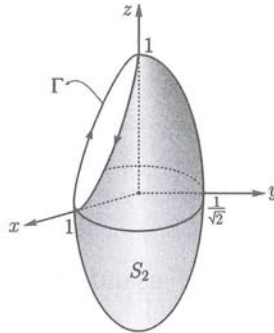


Fig. 2.53

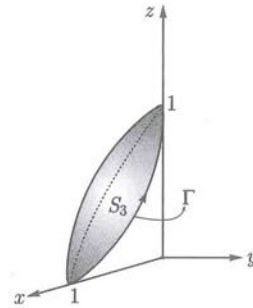


Fig. 2.54

En todos los casos se obtiene que $\partial S = \Gamma$.

La superficie S_1 , es parte de un plano y está descrita por la ecuación

$$z = 1 - x, \text{ con } (x; y) \in D = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\},$$

ya la curva Γ puede también ser definida como la intersección del plano $x + z = 1$ con el cilindro $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, es decir $\Gamma : \begin{cases} x + z = 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$.

La elección de este caso conduce a un cálculo más simple que los otros dos casos (ver figuras 2.53 y 2.54).

Una parametrización para S_1 viene dada por

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 1 - x), \text{ con } (x; y) \in D.$$

Luego, $\vec{N}(x; y) = (1; 0; 1)$. Asimismo, observemos que la orientación de $\Gamma = \partial S_1$ es inducida por la de S_1 .

Por otro lado, $(\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) = (0; 0; x) \cdot (1; 0; 1) = x$.

Luego, por el teorema de Stokes tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D x \, dx \, dy, \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares:

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad \text{con } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + r \cos \theta \right) r \, dr \right) d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Se deja como ejercicio hallar $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando Γ como frontera de las superficies S_2 y S_3 .

Ejemplo 152. Calcule la integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (xz; 2xy; 3xy)$ y Γ es la frontera de la parte del plano $3x + y + z = 3$ en el primer octante y orientada en sentido antihorario, vista desde la parte positiva del eje z .

Solución

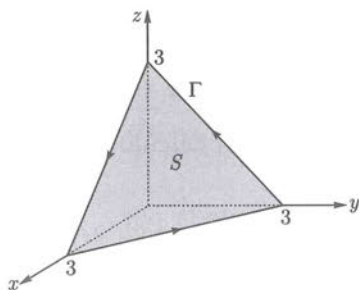


Fig. 2.55

Observe que el rotacional de \vec{F} es

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = (3x; x - 3y; 2y) \neq \vec{0},$$

es decir, \vec{F} no es un campo vectorial conservativo en su dominio.

En este caso también optaremos por usar el teorema de Stokes, para lo cual note que la porción del plano puede ser definida como el gráfico de una función de dos variables, es decir,

$$S : z = g(x; y) = 3 - 3x - y, \quad (x; y) \in D,$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3 - 3x\}$.

Una parametrización de S es

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 3 - 3x - y), \quad (x; y) \in D.$$

Por lo tanto, $\vec{N}(x; y) = (3; 1; 1)$ es normal a S en el punto $\sigma(x; y)$, entonces la orientación de la frontera de S , $\partial S = \Gamma$, es inducida por la de S .

Por otro lado, \vec{F} es un campo vectorial de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 . Luego, por el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (10x - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} (10x - y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(39x - \frac{69}{2} x^2 - \frac{9}{2} \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 153. Usando el teorema de Stokes, calcule $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, donde

S es la intersección del sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ con el plano $y + z = 2$, y el campo vectorial es $\vec{F}(x; y; z) = (-y; x^2; z^3)$.

Solución

Una parametrización para la superficie S es dada por la función:

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 2 - y), \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

De esto último se deduce que el campo de vectores normales a S en $\sigma(x; y)$ están dados por $\vec{N}(x; y) = (0; 1; 1)$.

Denotando por Γ a la frontera de S ,

$$\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; 2 - \sin t), \quad t \in [0; 2\pi].$$

Luego,

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t; \cos t; -\cos t) \quad \text{y} \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t; \cos^2 t; (2 - \sin t)^3).$$

Es claro que la orientación de Γ es la inducida por la de S .

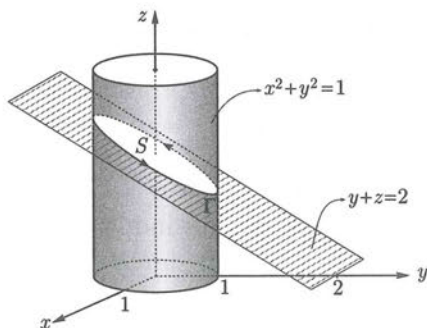


Fig. 2.56

Por otro lado, el campo \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 . entonces por el teorema de Stokes tenemos

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [\text{sen}^2 t + \cos^3 t - (2 - \text{sen} t)^3 \cos t] \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[12 - \frac{1}{2} \cos(2t) + (1 - \text{sen}^2 t) \cos t - (2 - \text{sen} t)^3 \cos t \right] dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \text{sen}(2t) + \text{sen} t - \frac{1}{3} \text{sen}^3 t + \frac{1}{4} (2 - \text{sen} t)^4 \right]_0^{2\pi} \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 154. Dado el campo vectorial

$$\vec{F}(x; y; z) = (y^3 + x \cos(x^2 + y^2 + z^2); x^3 + y \cos(x^2 + y^2 + z^2); e^{z^2} + z \cos(x^2 + y^2 + z^2)),$$

calcule $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva definida por $\begin{cases} z &= \sqrt{x^2 + 2y^2} \\ x^2 + z^2 &= 4 \end{cases}$ y es recorrida en sentido antihorario vista desde la parte positiva del eje z .

Solución

Es claro que el campo vectorial \vec{F} es de clase C^1 sobre todo \mathbb{R}^3 . Además,

$$(\nabla \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (0; 0; 3(x^2 - y^2)).$$

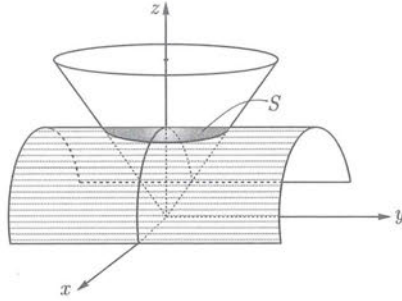


Fig. 2.57

Observemos que $S : z = \sqrt{4 - x^2}$, $(x; y) \in D$ es una superficie que tiene como frontera la curva Γ , donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Una parametrización para S es dada por la función

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; \sqrt{4 - x^2}), \quad (x; y) \in D.$$

De esto se deduce que $\vec{N}(x; y) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; 0; 1 \right)$. Luego, la orientación de Γ es la inducida por la de S , pues cumplen con la regla del pulgar derecho. Por lo tanto, del teorema de Stokes tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (0; 0; 3(x^2 - y^2)) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; 0; 1 \right) \, dx \, dy \\ &= 3 \iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Y pasando a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{con } 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

tenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^3 \cos(2\theta) \, dr \right) d\theta,$$

es decir,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 \cos(2\theta) \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = 0.$$

Ejemplo 155. Usando el teorema de Stokes, calcule $\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, donde Γ es el triángulo de vértices $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ y $C(0; 0; 1)$ orientado en sentido horario visto desde el origen de coordenadas.

Solución

Observemos que la parte del plano limitado por Γ puede ser considerada como gráfico de una función de dos variables,

$$S : z = 1 - x - y, \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Es claro que una parametrización de S es

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 1 - x - y), \quad (x; y) \in D.$$

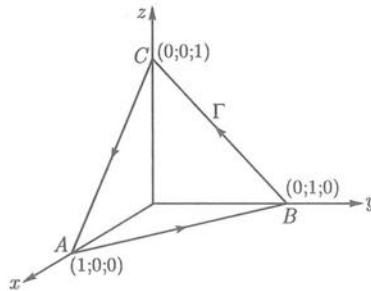


Fig. 2.58

Por lo tanto, $\vec{N}(x; y) = \vec{\sigma}_x(x; y) \times \vec{\sigma}_y(x; y) = (1; 1; 1)$ es normal a S , entonces, la orientación de la frontera de S , $\partial S = \Gamma$, es inducida por la de S .

Por otro lado, \vec{F} es un campo vectorial de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 y el rotacional de \vec{F} es dado por

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (-2z; 2x; -2y).$$

Luego, por el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\
 &= \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D (-2 + 4x) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (-2 + 4x) \, dy \right) dx \\
 &= \frac{-1}{3}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 156. Halle el valor de la integral $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, donde S es la superficie $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$, $\vec{F}(x; y; z) = (x^2 y; x \operatorname{sen}(xyz); x^3)$, y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a S .

Solución

Una opción para evaluar la integral pedida es proceder a través de la definición de la integral de superficie de un campo vectorial (se deja como ejercicio esta alternativa). La otra posibilidad es usar el teorema de Stokes.

Gráficamente:

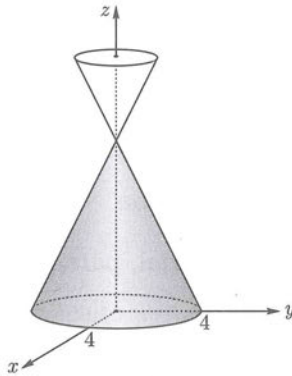


Fig. 2.59

Observemos que la superficie S tiene como frontera la circunferencia de radio 4, esto es

$$\partial S : x^2 + y^2 = 16$$

cuya parametrización es dada por

$$\vec{r}(t) = (4 \cos t, 4 \operatorname{sen} t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

entonces $\vec{r}'(t) = (-4 \operatorname{sen} t, 4 \operatorname{cos} t, 0)$ y $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (64 \operatorname{cos}^2 t \operatorname{sen} t; 0; 64 \operatorname{cos}^3 t)$.
Luego, del teorema de Stokes tenemos,

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt \\ &= -64 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t) \, dt \\ &= -64\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 157. Sea S la porción de la superficie $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre los planos $z = 0$, $y = z$. Calcule $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, sabiendo que el campo vectorial es $\vec{F}(x; y; z) = (2z; x + y + 2z; x + 2y)$ y \vec{n} es la normal unitaria exterior a S .

Solución

Para evaluar $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$ procedemos a usar la definición de integral de

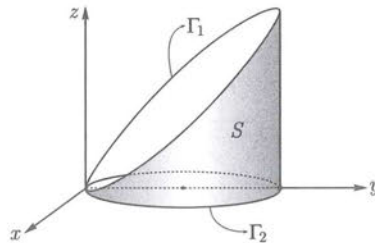


Fig. 2.60

línea de superficie de un campo vectorial, para esto parametrizamos la superficie S ,

$$\vec{\sigma}(u; v) = (\cos u; 1 + \operatorname{sen} u; v), \quad \text{donde } u \in [0; 2\pi] \text{ y } v \in [0; 1 + \operatorname{sen} u],$$

entonces, $\vec{N}(u; v) = \vec{\sigma}_u(u; v) \times \vec{\sigma}_v(u; v) = (\cos u; \operatorname{sen} u; 0)$.

Por otro lado,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(x; y; z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x + y + 2z & x + 2y \end{vmatrix} = (0; 1; 1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{\sigma}(u; v)) \cdot \vec{N}(u; v) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\operatorname{sen} u} \operatorname{sen} u \, dv \right) du \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 158. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 - \{(0; 0; z) : z \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x; y; z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{z}{1 - z^2} \right)$$

sobre la frontera de la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, limitada por la gráfica de la ecuación $y^2 = z^2$, orientado positivamente de manera que la normal a S apunta hacia el exterior de ella.

Solución

Por condición el campo vectorial $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ no está definido en $(0; 0; 1)$, para poder aplicar el teorema de Stokes consideramos la circunferencia C que es la intersección de S con el plano $P : z = 1 - \epsilon$ con $\frac{1}{\sqrt{2}} < \epsilon < 1$ como se muestra en el gráfico 2.61.

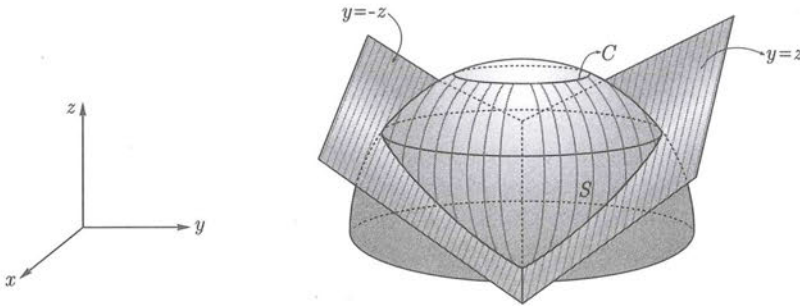


Fig. 2.61

Por el Teorema de Stokes aplicado a la superficie S_0 limitada por C y $y^2 = z^2$ sobre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tenemos

$$\int_{\partial S_0 \cup (-C)} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{z}{1 - z^2} dz = \iint_{S_0} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

Y como $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x; y; z) = \vec{0}$, de la relación anterior resulta,

$$\int_{\partial S} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{z}{1 - z^2} dz = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{z}{1 - z^2} dz$$

Por otro lado, C esta en el plano $z = 1 - \epsilon$, por lo que $dz = 0$. Luego,

$$\int_S \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{z}{1 - z^2} dz = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi.$$

Teorema 2.5. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y $\vec{F} = (P; Q; R) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^2 sobre U , entonces $\text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

Prueba.

Como en el abierto U la función \vec{F} es de clase C^2 , se tiene

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \text{div} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicios: Sección 2.7

1. Verifique el teorema de Stokes en cada uno de los siguientes casos.

a) $\vec{F}(x; y; z) = (z; x; y)$ y S es la superficie definida por $z = 1 - x^2 - y^2$, para $z \geq 0$.

b) $\vec{F}(x; y; z) = (x; z; -y)$ y S es la porción de la esfera de radio 2 centrada en el origen tal que $y \geq 0$.

c) $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; 0)$ y S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

d) $\vec{F}(x; y; z) = (x + y; x + z; z^2)$ y la superficies S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

2. Usando el teorema de Stokes, calcule $\oint_{\Gamma} x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$ donde Γ es la curva generada por la función

$$\vec{r}(t) = (a \cos t; a \sin t; a(\cos t + \sin t)), \quad t \in [a; 2\pi].$$

3. Usando el teorema de Stokes, calcule el flujo del campo $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; -2z)$ a través de S en el sentido de la normal exterior y sabiendo que el conjunto $S = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 = 2, 0 < z < 2\}$.

4. Usando el teorema de Stokes, calcule la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (2yz; 0; xy)$ a lo largo de la frontera de la superficie $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2z^2, 0 \geq z < 1\}$ en el sentido elegido por usted.

5. Sea S parte del gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ con normal unitaria exterior. Halle $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$, siendo $\vec{F}(x; y; z) = (3z; 4x; 2y)$.

6. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\vec{F}(x; y; z) = (x^x + z^2)\mathbf{i} + (y^y + x^2)\mathbf{j} + (z^z + y^2)\mathbf{k}$$

al mover una partícula alrededor del borde de la parte de la esfera de ecuación $x^2y^2 + z^2 = 4$ que está en el primer octante, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (visto desde arriba).

7. Si S es una esfera y \vec{F} satisface las hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

8. Usando el teorema de Stokes, calcule la integral $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ siendo S la intersección del sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ con el plano $y + z = 2$ (considerar orientación positiva) y $\vec{F}(x; y; z) = (-y; x^2; z^3)$.
9. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ al trasladar una partícula a lo largo de la curva que es intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con el plano $x + y = 2$, recorrida en sentido horario si se mira desde el origen de coordenadas.
10. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (y; z; x)$ para trasladar una partícula a lo largo de la curva de intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a \geq 0$ siguiendo el sentido antihorario visto desde la parte superior del eje z .
11. Sea la curva $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x; y; z) = (y^2 - z; x + z; x - y)$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva Γ recorrida en sentido antihorario vista desde el eje z positivo.
12. Calcule $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$ siendo $\vec{F}(x; y; z) = (x - z; x^2 + yz; -3xy)$ y S es la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda sobre el plano yz , $x \geq 0$ en el primer octante.
13. Halle $\int_{\Gamma} (y^2 + \ln(1 + z^2)) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$, donde Γ es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 3x$, $3x + z^2 = 9$, $z \geq 0$, recorrida en sentido antihorario vista desde el punto $(0; 0; 10)$.
14. Usando el teorema de Stokes, calcule $\iint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es definida por la función vectorial $\vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; \sin(2t))$ y el campo vectorial \vec{F} está definido por $\vec{F}(x; y; z) = (y + z + e^{x^2}; x - z + \ln(1 + y^2); \sin(2z))$.
15. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = \left(-y^2; x^2; x \arctan \frac{1}{4 + z^2} \right)$$

para desplazar una partícula alrededor de la curva $\Gamma : \begin{cases} |x| + |y| = z \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ en sentido antihorario vista desde el punto $(0; 0; 110)$.

16. Sea S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ con una tapa semiesférica de ecuación $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Halle $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, donde el campo vectorial es $\vec{F}(x; y; z) = (xz + yz^2 + x; xyz^3 + y; x^2z^4)$ y \vec{n} es el vector normal unitaria exterior a S .
17. Calcule $\oint_{\Gamma} (2yz + \ln(x^2 + 1)) \, dx + e^{y^2} \, dy + \arctan z \, dz$, donde Γ es la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = y$, $y + z = 2$, recorrida en sentido antihorario vista desde el eje z positivo.

2.8. Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia

El llamado Teorema de la Divergencia establece una relación entre la integral triple sobre un sólido y la integral de superficie sobre la frontera del sólido.

Teorema 2.6 (Teorema de la Divergencia). *Sea Ω un sólido en \mathbb{R}^3 , limitado por una superficie S regular y orientable. Si \vec{n} es la normal unitaria exterior a S y $\vec{F} = (P; Q; R)$ es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio que contiene a Ω , entonces*

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \quad \text{con} \quad dV = dx \, dy \, dz \quad (2.9)$$

Observación 27.

1. El teorema de la divergencia permite calcular el flujo de un campo vectorial mediante la integral triple de su divergencia.
2. La ecuación 2.9 suele escribirse en la forma:

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

3. El teorema de la divergencia sigue siendo válido si el sólido Ω está limitado por un conjunto finito de superficies que son regulares, excepto tal vez en un número finito de curvas regulares, y orientables por vectores unitarios normales y que apuntan hacia el exterior de Ω como se muestra en la figura

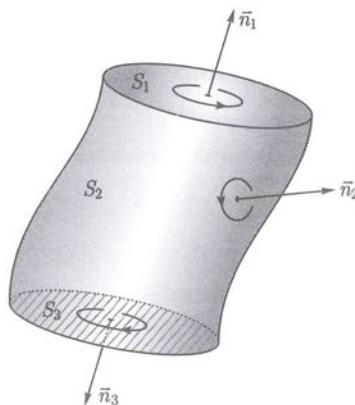


Fig. 2.62

Ejemplo 159. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x; y; z) = (z; y; x)$ sobre la esfera centrada en el origen y de radio 1.

Solución

Como ya se ha visto, la esfera es una superficie orientable y claramente el campo \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 , luego podemos aplicar el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} dV \\ &= \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi, \end{aligned}$$

donde Ω es el sólido limitado por la esfera.

Ejemplo 160. Sea S el tetraedro definido por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados en el primer octante, calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ y \vec{n} es el vector normal unitario exterior a S .

Solución

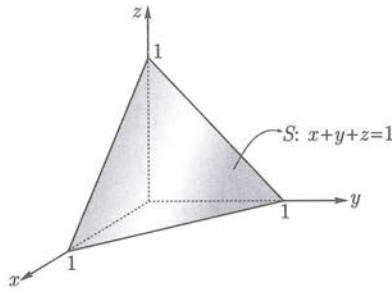


Fig. 2.63

Claramente el campo \vec{F} y la superficie S satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y como $\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dV \\ &= 3 \operatorname{Vol}(\Omega) = 3 \left(\frac{1}{3} \right) (A_b h) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 161. En un fluido el vector densidad de flujo en cada punto viene dado por el campo $\vec{F}(x; y; z) = (x; y^2; -2yz)$. Calcule la masa de fluido que atraviesa la superficie exterior del sólido $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ por unidad de tiempo y en la dirección del vector normal exterior.

Solución

Si denotamos por S la superficie del sólido Ω , es decir $S = \partial\Omega$, el campo vectorial \vec{F} y S satisfacen las hipótesis del teorema de la divergencia, entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} dV \\ &= \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 162. Calcule $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + 2z \, dx \, dy$, donde S es la unión

de la parte del paraboloides descrito por $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$ y el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ para $z = 0$.

Solución

Es claro que la superficie S y el campo $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; 2z)$ satisfacen las hipótesis del teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} 4 \, dV, \end{aligned}$$

pasando a coordenadas cilíndricas :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad \text{con } 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - r^2$$

y teniendo en cuenta que el jacobiano de esta transformación es $\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(r; \theta; z)} = r$ tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-r^2} r \, dz \right) dr \right) d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3) \, dr \right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 163. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo $\vec{F}(x; y; z) = (-x^2 + z; -xy + z^2; e^y + x)$

y S la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x + z = 6$ y $z = 0$.

Solución

Evaluar la integral pedida usando la definición implica calcular tres integrales, una por cada superficie, mientras que haciendo uso del teorema de la divergencia se reduce a evaluar una sola integral. Se deja como ejercicio verificar que el campo vectorial \vec{F} y S verifican las condiciones del teorema de la divergencia. Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} -3x \, dV. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$, donde $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 6 - r \cos \theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= -3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{6-r \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dz \right) dr \right) d\theta \\ &= -3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (6r^2 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta) dr \right) d\theta \\ &= -3 \int_0^{2\pi} (16 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) d\theta = 12\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 164. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo $\vec{F}(x; y; z) = (y + z^2 + 4; x + z^2; z^2)$ y

S la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $0 \leq z < 1$ orientada de modo que sus normales son exteriores.

Solución

Una opción para evaluar esta integral es usar la definición de integral de superficie de un campo vectorial. Otra opción es usar el teorema de la divergencia, pero tenemos el inconveniente que la superficie no es cerrada como se muestra en la figura 2.64.

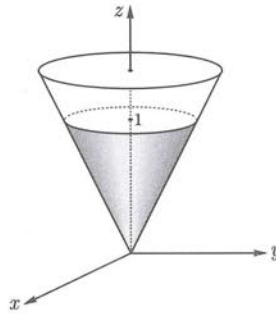


Fig. 2.64

Para salvar este problema, consideramos la superficie S_1 , que es una parte del plano $z = 1$. Ahora sí tenemos una superficie cerrada: $S \cup S_1$, ver fig.2.65.

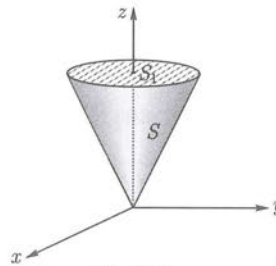


Fig. 2.65

Sea Ω el sólido limitado por las superficies S y S_1 , entonces aplicando el teorema de la divergencia se tiene,

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 2z \, dV$$

pasando a coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad \text{donde} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq 1$$

tenemos

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_r^1 2zr \, dz \right) dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado,

$$S_1 : z = 1, \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

entonces,

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{\sigma}(x; y)) \cdot \vec{N}(x; y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (y + 5; x + 1; 1) \cdot (0; 0; 1) \, dx \, dy \\ &= \iint_D dx \, dy = A(D) = \pi. \end{aligned}$$

donde una parametrización de S_1 , es

$$\vec{\sigma}(x; y) = (x; y; 1), \quad (x; y) \in D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = I_1 - I_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 165. Sea $\vec{F}(x; y; z) = \left(xy^2 + xy^2z; e^x \cos z + x^2yz; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$,

calcule el flujo de \vec{F} a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

Solución

Se trata de hallar $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde S es la superficie lateral del cilindro.

Es claro que \vec{F} es de clase C^1 sobre \mathbb{R}^3 .

En lugar de calcular la integral de superficie anterior a través de la definición

usaremos el teorema de la divergencia, el inconveniente es que S no es una superficie cerrada, para salvar esto incluiremos las tapas del cilindro descrito en el problema. Es decir, calcularemos el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas) para luego obtener la integral pedida. Entonces,

$$\iint_{S \cup \{z=-1\} \cup \{z=1\}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

donde $\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) = y^2 + y^2 z + x^2 z$.

Luego,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} (y^2 + y^2 z + x^2 z) dx dy dz - \iint_{\{z=-1\}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \iint_{\{z=1\}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

No es difícil demostrar que,

$$\iint_{\{z=-1\}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\{z=1\}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Luego,

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} (y^2 + z(x^2 + y^2)) dx dy dz.$$

pasando a coordenadas cilíndricas,

$x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$, donde, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq z \leq 1$,

luego,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + zr^2) r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2r^3 \operatorname{sen}^2 \theta dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 166. Halle el flujo del campo $\vec{F}(x; y; z) = (x^3; y^3; z^3)$ hacia el exterior de S , siendo esta la superficie del sólido limitado por la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ y los planos coordenados en el primer octante.

Solución

Se trata de hallar $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Observe que si usamos la definición de integral de superficie de un campo vectorial para hallar el flujo de \vec{F} tendríamos que calcular cuatro integrales de superficie, pues S es una superficie regular formada por cuatro superficies regulares, mientras que si usamos el teorema de la divergencia, calcular el flujo Φ se reduce a calcular la siguiente integral:

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Pasando a coordenadas esféricas: $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$, donde $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, y teniendo en cuenta que el jacobiano de esta transformación es $\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(\rho; \theta; \phi)} = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$, obtenemos

$$\Phi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^4 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{3a^5 \pi}{10}.$$

Ejemplo 167. Dado el campo $\vec{F}(x; y; z) = (z^3 + 1; x^4 + 10; 5x + 3y + z)$, calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo S la superficie del sólido Ω limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Solución

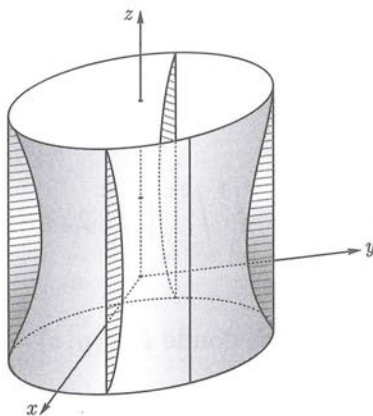


Fig. 2.66

Observe que el campo vectorial \vec{F} y S satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia. Luego,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$$

pasando a coordenadas cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq \sqrt{5}$, $-\sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq \sqrt{r^2 - 1}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} \left(\int_{-\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{r^2-1}} r \, dz \right) dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} 2r \sqrt{r^2 - 1} \, dr \, d\theta = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 168. Calcule $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$, si Ω el sólido contenido en la superficie

$z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 1$ y $\vec{F}(x; y; z) = (4y^2 + 2z; x^2 + z^2; z^2)$.

Solución

Usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz$$

y pasando a coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z, \quad \text{donde } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq z \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

obtenemos

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 2zr \, dz \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 169. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (2xy; x^2 - y^2; z(x^2 + y^2)^2)$

y S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 4$.

Solución

Sea Ω el sólido limitado por los planos $S_1 : z = 0$ para $(x; y) \in D$ y $S_2 : z = 4$ para $(x; y) \in D$, donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Del teorema de la divergencia tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 \, dV \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 \, dV - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 \, dV \\ &= \iint_D \left(\int_0^4 (x^2 + y^2)^2 \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= 4 \iint_D (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad \text{donde } 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

obtenemos

$$I_1 = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^5 \, dr \, d\theta = 972\pi.$$

Asimismo,

$$I_2 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_D (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy = 0.$$

Similarmente,

$$I_3 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy.$$

Por lo tanto, $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 0$.

Ejemplo 170. Si S es la superficie del elipsoide cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y \vec{F} es el campo vectorial definido por $\vec{F}(x; y; z) = -\vec{\nabla}\varphi(x; y; z)$ donde $\varphi(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, halle:

a) $\operatorname{div}(\vec{F})$.

b) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde \vec{n} es la normal unitaria exterior a S .

Solución

a) En $\mathbb{R}^3 - \{(0; 0; 0)\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F}(x; y; z) &= \operatorname{div}(-\vec{\nabla}\varphi(x; y; z)) \\ &= \operatorname{div}\left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x; y; z)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Observe que el campo vectorial \vec{F} no está definido en el origen de coordenadas, por lo tanto no es de clase C^1 en ningún abierto que contiene al sólido Ω lo que impide aplicar el teorema de la divergencia. Para salvar este problema consideramos una esfera de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ con $0 < r < \min\{a; b; c\}$. Denotando por Ω el sólido limitado por S y la superficie esférica S_r como se muestra en la figura 2.67.

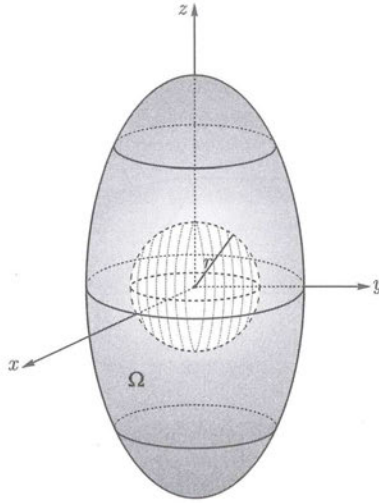


Fig. 2.67

Ahora sí, el campo tiene las condiciones exigidas por el teorema de la divergencia, luego

$$\iint_{S \cup S_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

y usando la parte a) resulta que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Eligiendo $\vec{n} = -(x; y; z)$, tenemos que $\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$. Luego,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \frac{dS}{r^2} = 4\pi.$$

Ejemplo 171. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (xy; y^2 + e^{x^2+z^2}; \cos(xy))$

y S es la superficie del sólido Ω limitado por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0, y = 0, y + z = 2$, sabiendo además que S es orientado de manera que sus vectores unitarios normales apuntan hacia el exterior de Ω .

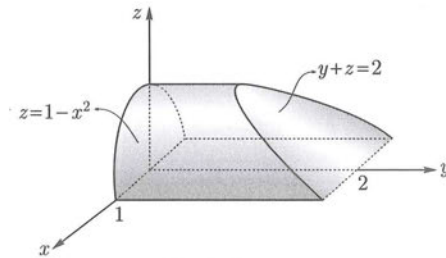
SoluciónGráfica de Ω :

Fig. 2.68

Observemos que la superficie S consta de cuatro superficies regulares de tal manera que al calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando la definición de integral de superficie de un campo vectorial tendríamos que calcular cuatro integrales, por lo que, en este caso, resulta más conveniente usar el teorema de divergencia para hallar la integral pedida. El sólido Ω puede definirse como

$$\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; z) \in D, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

donde D es la proyección del sólido Ω sobre el plano xz , es decir,

$$D = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV \\ &= 3 \iiint_{\Omega} y dV \\ &= 3 \iint_D \left(\int_0^{2-z} y dy \right) dx dz \\ &= \frac{3}{2} \iint_D (2-z)^2 dz dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} (2-z)^2 dz \right) dx \\ &= \frac{184}{35}. \end{aligned}$$

Ejemplo 172. Sean $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 16\}$ y \vec{F} el campo vectorial definido por $\vec{F}(x; y; z) = (3x; 2y; (z - 1)^2)$, calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde S es la frontera del sólido y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a S .

Solución

El campo $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Del teorema de la divergencia,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_\Omega (3 + 2z) dV$$

Usando coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = 1 + \rho \cos \phi,$$

donde $2 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, y $\frac{\partial(x; y; z)}{\partial(\rho; \theta; \phi)} = -\rho^2 \sin \phi$. Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \left(\int_2^4 (5 + 2\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho \right) d\phi \right] d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{5}{3} \rho^3 \sin \phi + \frac{\rho^4}{4} \sin 2\phi \right) \Big|_{\rho=2}^4 d\phi \\ &= \frac{760}{3} \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 173. Halle $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde S es la superficie regular por partes que limita al sólido

$$\Omega = \{(x; y; x) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4, y \geq 0, y \leq x\},$$

\vec{n} es el vector unitario normal exterior a S y \vec{F} es el campo vectorial definido por,

$$\vec{F}(x; y; z) = (zy^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); zx^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}); \ln(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})).$$

Solución

El campo $\vec{F} \in C^\infty(U)$, siendo U el conjunto abierto que contiene al sólido Ω . Del teorema de la divergencia,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} dV$$

Observe que $\operatorname{div} \vec{F}(x; y; z) = z \sqrt{x^2 + y^2}$. Luego,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_\Omega z \sqrt{x^2 + y^2} dV = \iint_D \left(\int_0^4 z \sqrt{x^2 + y^2} dz \right) dA,$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0, y \leq x\}$ Luego,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 8 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$$

y pasando a coordenadas polares: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ con $2 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_2^3 r^2 dr \right) d\theta = \frac{38\pi}{3}.$$

Ejemplo 174. Sea Ω el sólido limitado por las superficies definidas por $x^2 + z^2 = 9, y = 0, y = 4, z = 0$, calcule $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$, donde el campo

vectorial \vec{F} está definido por $\vec{F}(x; y; z) = (xyz; e^{x^2+y^2+z^2}; 2)$ y \vec{n} es la normal unitaria que apunta hacia el exterior de la superficie de Ω .

Solución

El campo \vec{F} satisface las condiciones del teorema de la divergencia, luego

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

donde $S = \partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.

Evaluando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$:

$S_1 : z = 0, (x; y) \in D_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{D_1} (0; e^{x^2+y^2}; 2) \cdot (0; 0; -1) dx dy \\ &= -2 \iint_{D_1} dx dy = -48. \end{aligned}$$

Evaluando $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$:

$S_2 : y = 4, (x; z) \in D_2 = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2}\}$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{D_2} (4xz; e^{x^2+16+z^2}; 2) \cdot (0; 1; 0) dx dz \\ &= \iint_{D_2} e^{x^2+z^2+16} dx dz \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ con $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^\pi \int_0^3 e^{r^2+16} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} (e^{25} - e^{16}). \end{aligned}$$

Evaluando $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$:

$S_3 : z = \sqrt{9 - x^2}$, $(x; y) \in D_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$, entonces $\vec{N}(x; y) = \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}; 0; 1 \right)$, luego

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{D_3} (xy\sqrt{9 - x^2}; e^{x^2+y^2+z^2}; 2) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}; 0; 1 \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_3} (x^2y + 2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-3}^3 \int_0^4 (x^2y + 2) \, dy \, dx = 192. \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando $\iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$:

$S_4 : y = 0$, $(x; z) \in D_2 = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2}\}$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \iint_{D_4} (0; e^{x^2+z^2}; 2) \cdot (0; -1; 0) \, dx \, dz \\ &= - \iint_{D_4} e^{x^2+z^2} \, dx \, dz \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $z = r \operatorname{sen} \theta$ con $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^\pi \int_0^3 e^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= - \frac{\pi}{2} (e^9 - e^0). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = 144 + \frac{\pi}{2} (e^{25} - e^{16} - e^9 + 1).$$

Ejercicios: Sección 2.8

1. Sean el sólido $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq 4x^2 + 4y^2, x^2 + y^2 \leq 2y, z \geq 0\}$ y \vec{F} el campo vectorial definido por $\vec{F}(x; y; z) = (-6y; 6x; -2x)$, halle el flujo de \vec{F} a través de la frontera de Ω y compruebe su respuesta usando el teorema de la divergencia.
2. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x; y; z) = (3y^2z + ye^x - 2y; 6xyz + e^x; 3xy^2)$$

para trasladar una partícula alrededor de la curva que es intersección de las superficies $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$. El recorrido es de manera que al observar desde el origen tiene sentido horario.

3. a) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^2 en \mathbb{R}^3 . Demuestre que $\text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

- b) Sea Ω un sólido limitado por los planos coordenados y los cilindros de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante. Calcule

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \text{ donde } S \text{ es la superficie que limita al sólido } \Omega,$$

$\vec{F}(x; y; z) = (2yz; x + 3y - 2; -x^2 - z)$ y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a S .

4. Halle la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde S es la superficie del sólido en el primer

octante limitado por el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ y por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2y$ y donde \vec{F} es el campo vectorial definido por $\vec{F}(x; y; z) = (e^{y^2+z^2}; \text{sen}(x^2 + z^2); \frac{z^2}{2})$. Considere \vec{n} como el campo de vectores normales apuntando hacia el exterior del sólido.

5. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde \vec{F} es el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x; y; z) = \left(\frac{2}{3}x^3y^4z; x^2 + z^2; x^2 + y^2\right),$$

y S es la frontera del sólido limitado inferiormente por $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ y superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 20$. Considere \vec{n} apuntando hacia el exterior del sólido.

6. Usando el teorema de la divergencia calcule $\iint_S \left(\frac{\alpha}{a^2} x + \frac{\beta}{b^2} y + \frac{\gamma}{c^2} z \right) z dS$, donde S es la mitad del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ para $z > 0$ y $(\alpha; \beta; \gamma)$ es la normal unitaria exterior a S .
7. Si S es el cubo de vértices $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ y \vec{F} es el campo vectorial definido por $\vec{F}(x; y; z) = (3y^2z^3; 9x^2yz^2; -4xy^2)$, halle $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} son los vectores normales unitarios exteriores a S .
8. Sea S la superficie del sólido limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y sea \vec{F} el campo definido por $\vec{F}(x; y; z) = (x^3 + yz; x^2y; xy^2)$, halle $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} son los vectores normales unitarios que apuntan hacia el exterior de S .
9. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x; y; z) = (ye^{z^2}; y^2; e^{xy})$ y S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $y = z + 3$.
10. Dado el conjunto $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 3 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$, si S es la frontera de Ω y $\vec{F}(x; y; z) = (x + y; y - x; 0)$, verifique el teorema de la divergencia.
11. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{F} es el campo vectorial definido por
- $$\vec{F}(x; y; z) = (\ln(y^2 + y + 1); \ln(x^2 + x + 1); z^2),$$
- S es la superficie descrita por la ecuación $x^2 + y^2 = 2z^2$ para $0 \leq z \leq 1$ y \vec{n} vector normal unitario exterior a S .
12. Suponga que un fluido está sometido al campo de velocidades definido por $\vec{F}(x; y; z) = (x - yz; y + xz; z + 2xy)$. Sean S la porción del cilindro $C : x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera $\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y S_0 la porción de la esfera \mathcal{E} que se encuentra fuera del sólido limitado por el cilindro C . Usando el teorema de la divergencia, calcule el flujo que pasa a través de las paredes de Ω , siendo este el sólido limitado por las superficies S y S_0 .

13. Sea S la frontera del sólido en el primer octante limitado por el elipsoide de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2y$. Calcule la integral de superficie del campo vectorial \vec{F} sobre S sabiendo que $\vec{F}(x; y; z) = (\arctan(y^2 + z^2); \ln(x^2 + z^2); \frac{z^2}{2})$ y considerando la normal unitaria apuntando hacia el exterior de S .

Capítulo 3

Sucesiones y Series

Objetivos

Al finalizar el capítulo los alumnos

1. Calcularán límites de sucesiones utilizando correctamente las técnicas del cálculo límites para funciones reales de variable real.
2. Analizarán la convergencia (absoluta o condicional) o divergencia de series a partir de la definición y de los criterios de convergencia: de comparación, de comparación por límite, de la integral, del cociente, de la raíz, de acotación y de las series alternantes.
3. Hallarán la suma de algunas series numéricas convergentes.
4. Determinarán la convergencia o divergencia de una serie de potencias y, en caso de ser convergente, encontrarán el radio de convergencia, el intervalo de convergencia y su suma.
5. Asociarán a una función una serie de potencias. Escribirán una función como una serie de potencias utilizando una serie conocida (serie geométrica) o el desarrollo de Taylor.
6. Hallarán las series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Se comprueba fácilmente que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función racional $\frac{1-x^n}{1-x}$ para $x \neq 1$ puede ser representada también por la función polinómica dada por $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

La aparición de este tipo de ejemplos motiva la siguiente pregunta:

¿bajo qué condiciones una función racional admite una representación como función polinómica?

Note que el interés por responder a esta pregunta radica en el hecho de que resulta mucho más cómodo manipular expresiones polinómicas (cálculo de derivadas e integrales, por ejemplo) que manipular funciones racionales.

Observe que para que la función racional $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sea igual a un polinomio debería cumplirse que x^{n+1} sea igual a cero para $x \in \mathbb{R}$, lo cual es imposible. Sin embargo, para $|x| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

este último objeto, denominado serie de potencias, no es un polinomio, pues tiene infinitos sumandos pero siendo el límite de una sucesión de polinomios ¿hasta qué punto conserva las propiedades de polinomios? Estos son precisamente los objetos con los que trabajaremos en este capítulo: los definiremos, estableceremos sus propiedades y mostraremos algunas de sus aplicaciones ya sea expresando funciones en términos de ellos o resolviendo ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

3.1. Sucesiones de números reales

En esta sección nuestro interés se basa en el análisis de la convergencia de sucesiones de números reales, para lo cual daremos la definición y luego algunos resultados.

Una sucesión de números reales es una función de la forma

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) \end{aligned}$$

donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$, el valor $a(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ se denotará por a_n y se llamará término n -ésimo de la sucesión. En adelante usaremos $(a_n)_{n \geq 0}$ para denotar una sucesión a . Algunas veces la sucesión será indexada en el conjunto de los naturales positivos, en tal caso usaremos la notación $(a_n)_{n \geq 1}$.

Diremos que una sucesión de números reales $(a_n)_{n \geq 0}$ **converge** al número real \mathbf{a} , si para cada $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número natural n_0 que depende de ε , es decir $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tal que

$$|a_n - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0(\varepsilon)$$

y escribiremos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{a} \quad \text{o simplemente} \quad \lim a_n = \mathbf{a}$$

En tal caso diremos que la sucesión $(a_n)_n$ es convergente, en caso contrario, es decir si tal límite no existe, diremos que es divergente.

Geoméricamente decir que la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ converge al número real \mathbf{a} significa que a partir de un cierto entero positivo n_0 los términos de la sucesión se encuentran en un intervalo abierto $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Ver gráfica 3.1

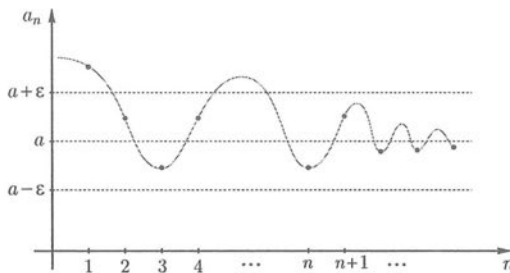


Fig. 3.1

Ejemplo 175. Demuestre que la sucesión constante $(a_n)_{n \geq 0} = (1; 1; \dots; 1; \dots)$ cuyo término n -ésimo es $a_n = 1$ converge a 1, es decir, pruebe la siguiente igualdad: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Solución

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, debemos demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando

$$|a_n - 1| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

lo cual es cierto, pues

$$|a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon, \quad \text{se cumple para cualquier valor de } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

En general, si el término n -ésimo de la sucesión constante es a , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a = a.$$

Ejemplo 176. Sea la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$,

- a) Escriba los cinco primeros términos de la sucesión.
- b) Señale si la sucesión es convergente, en caso afirmativo, determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

Solución

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

- b) A continuación demostraremos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, mostraremos que existe un natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

es decir,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esta última desigualdad es equivalente a la expresión $\frac{1}{\varepsilon} < n$, esto es fijado un número ε existe un número n , suficientemente grande, tal que esta desigualdad se cumple. La existencia de este n está garantizada por la llamada *Propiedad Arquimediana*¹

Basta elegir $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\| + 1$, pues con esta elección tenemos que,

$$n > n_0, \quad \text{equivale a} \quad n > \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\| + 1.$$

Por otro lado, se sabe que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\| + 1,$$

luego, por transitividad, resulta que

$$\frac{1}{\varepsilon} < n, \quad \text{es decir,} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq n_0.$$

¹Propiedad Arquimediana: Si x, y son números reales positivos, entonces, existe un entero positivo n tal que $y < nx$.

Teorema 3.1. *El límite de una sucesión es único, es decir*

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{a} \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{b} \text{ entonces } \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Prueba.

Usando la desigualdad triangular tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - a_n + a_n - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - a_n| + |\mathbf{b} - a_n|.$$

Por condición tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{b}.$$

Esto significa que a partir de un cierto número natural n_0 , la diferencia entre a_n y \mathbf{a} , así como de a_n y \mathbf{b} es tan pequeña como se quiera, en símbolos:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - a_n| + |\mathbf{b} - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq n_0, \text{ es decir,}$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| < \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

esto último equivale a decir que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Ejemplo 177. Demuestre que la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ cuyo término n -ésimo es $a_n = (-1)^n$ diverge.

Solución

Observe que los términos de esta sucesión son $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$. Intuitivamente es claro que esta sucesión diverge. A continuación proponemos una prueba formal de este hecho usando el método de reducción al absurdo. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = L$, esto significa que dado cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ verificando

$$|(-1)^n - L| < \varepsilon \quad \text{para cada } n > n_0.$$

En particular, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces existirá un $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tal que

$$|(-1)^n - L| < \frac{1}{2} \quad \text{para cada } n > n_1,$$

de manera que, cuando n es par, se cumplirá que

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \quad \text{para cada } n > n_1$$

y cuando n es impar, se tendrá que

$$|-1 - L| = |1 + L| < \frac{1}{2} \quad \text{para cada } n > n_1$$

Por la propiedad transitiva

$$2 = |1 - L + L + 1| \leq |1 - L| + |1 + L| < 1$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ no existe, es decir la sucesión $((-1)^n)_{n \geq 1}$ es divergente.

Ejemplo 178. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n}$.

Solución

Al evaluar los términos de la sucesión:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \geq 1} = (2; 1,5; 1,\bar{3}, 1,25; 1,2; 1,1\bar{6}; 1,14; \dots)$$

parece ser que esta converge a 1. Otra forma de verlo sería descomponiendo el término n -ésimo de la sucesión en la forma siguiente,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

y como ya se ha demostrado que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces aceptando que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1,$$

lo que se demostrará en el teorema 1.2, tendríamos lo pedido.

Usando la definición, probaremos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ demostraremos que existe un natural n_0 tal que

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

pero

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

es válido para cualquier natural positivo n . Luego, usando la propiedad arquimediana, como se vio en el ejemplo 176, dado cualquier ε siempre existe un número natural n tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Observación 28.

1. El ejemplo anterior sugiere que una estrategia para el análisis de la convergencia de una sucesión es descomponerla en sucesiones convergentes más simples (suma, producto, cociente, etc.). El siguiente resultado establece en qué casos y cómo se puede calcular el límite de una sucesión convergente a partir del límite de las sucesiones convergentes en la que fue descompuesta.
2. En adelante y para simplificar la notación escribiremos \lim_n en lugar de escribir $\lim_{n \rightarrow +\infty}$.

Teorema 3.2. Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones convergentes y c es una constante real, entonces se cumple

1. $\lim_n (a_n \pm b_n) = \lim_n a_n \pm \lim_n b_n$.
2. $\lim_n (ca_n) = c \lim_n x_n$.
3. $\lim_n (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_n a_n\right) \left(\lim_n b_n\right)$.
4. $\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n y_n}$ si $\lim_n b_n \neq 0$.
5. $\lim_n \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_n a_n}$, si $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}^+$.

Ejemplo 179. Puesto que $\lim_n 3 = 3$ y $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, entonces tenemos

$$\lim_n \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim_n 3 + \lim_n \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

$$\lim_n \left(3 \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_n 3\right) \left(\lim_n \frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_n \frac{1}{n^2} = \left(\lim_n \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_n \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

En general, dado $p \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos

$$\lim_n \frac{1}{n^p} = \lim_n \underbrace{\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}}_{p \text{ veces}} = \underbrace{\left(\lim_n \frac{1}{n}\right) \cdots \left(\lim_n \frac{1}{n}\right)}_{p \text{ veces}} = 0$$

$$\lim_n \sqrt[p]{\frac{1}{n}} = \sqrt[p]{\lim_n \frac{1}{n}} = \sqrt[p]{0} = 0.$$

Ejemplo 180. Calcule $\lim_n \frac{2n^2 + 3n}{n^2 + 5}$.

Solución

Factorizando el término n^2 tanto en el numerador como en el denominador tenemos que

$$\lim_n \frac{2n^2 + 3n}{n^2 + 5} = \lim_n \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_n \frac{\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = 2$$

pues, como hemos visto anteriormente, $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ y $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$.

Ejemplo 181. Calcule $\lim_n \frac{3n - 12}{n^2 + 5}$.

Solución

Factorizando el término n en el numerador y el término n^2 en el denominador tenemos que

$$\lim_n \frac{3n - 12}{n^2 + 5} = \lim_n \frac{n \left(3 - \frac{12}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_n \frac{1}{n} \frac{\left(3 - \frac{12}{n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = 0.$$

Diremos que una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tiene límite $+\infty$, si para cada número real $M > 0$, es posible encontrar un entero positivo $n_0 = n_0(M)$ tal que,

$$a_n \geq M \quad \text{para todo } n \geq n_0(M)$$

En tal caso escribimos $\lim_n a_n = +\infty$.

Análogamente, diremos que una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tiene límite menos infinito, si para cada número real $M > 0$, es posible encontrar un entero positivo $n_0 = n_0(M)$ tal que,

$$a_n \leq -M \quad \text{para todo } n \geq n_0(M),$$

en tal caso escribimos $\lim_n a_n = -\infty$.

Ejemplo 182. Sea la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$, donde $a_n = n$, claramente $\lim_n n = +\infty$.

Observación 29.

Tenga en cuenta que los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números, luego si se cumple cualquiera de los siguientes casos:

$$\lim_n a_n = +\infty, \quad \lim_n a_n = -\infty,$$

diremos que las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son divergentes, sin embargo estos símbolos dan información sobre el comportamiento de la sucesión, tal y como se puede apreciar en los gráficos de las siguientes sucesiones $(n^2)_n$ y $(n)_n$.

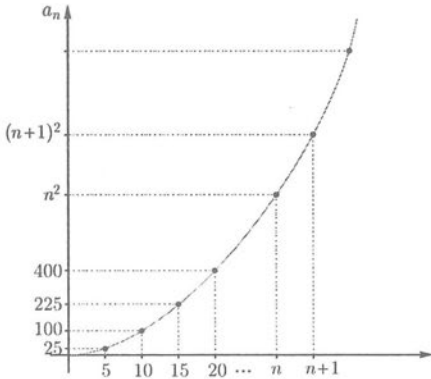
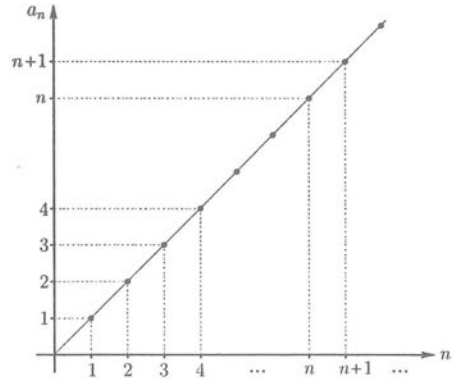
Gráfica de la sucesión $(n^2)_n$.Gráfica de la sucesión $(n)_n$.

Fig. 3.2

Como se aprecia en los gráficos, los términos de la sucesión son tan grandes como se quiera, en símbolos, $\lim_n a_n = +\infty$.

Observación 30.

Recuerde que para aplicar un teorema es necesario que se cumplan las condiciones (hipótesis) de lo contrario se pueden llegar a conclusiones erróneas, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 183. Si $a_n = (-1)^n$ y $b_n = (-1)^n$, entonces $\lim_n (a_n - b_n) = 0$. Sin embargo, si por error aplicamos la propiedad 1 del teorema 3.2 y el ejercicio 177 podríamos concluir que la sucesión $(a_n - b_n)_{n \geq 0}$ es divergente.

Ejemplo 184. Si $a_n = n$ y $b_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lim_n a_n \cdot b_n = 1$. Sin embargo, si por error aplicamos el teorema anterior podríamos concluir que la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 0}$ es divergente.

Observación 31.

El teorema 3.2 admite las siguientes extensiones, las que sirven para analizar la convergencia de una sucesión que puede descomponerse en términos de una sucesión convergente y una divergente.

Teorema 3.3.

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones tales que $\lim_n a_n = L$, para $L \in \mathbb{R}$ y $\lim_n b_n = +\infty$, entonces

$$1. \lim_n (a_n + b_n) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_n (a_n - b_n) = -\infty.$$

$$2. \lim_n (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}.$$

$$3. \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ si } L \neq 0.$$

$$4. \lim_n \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}.$$

$$5. \lim_n \sqrt[p]{b_n} = +\infty, \text{ para todo } p \in \mathbb{N}^+.$$

Note que en el caso 2 de este teorema no se puede decir qué ocurre cuando $L = 0$, pues en estos casos la sucesión puede converger o no como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 185. Dada la sucesión convergente $(a_n)_{n \geq 1}$, cuyo término n -ésimo es $a_n = \frac{1}{n}$ y la sucesión divergente $(b_n)_{n \geq 0}$, donde $b_n = n$. Es claro que

$$\lim_n a_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n b_n = +\infty.$$

En este caso, la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 0}$ es convergente, pues

$$\lim_n a_n \cdot b_n = 1.$$

Ejemplo 186. Dada la sucesión convergente $(a_n)_{n \geq 1}$, cuyo término n -ésimo es $a_n = \frac{1}{n}$ y la sucesión divergente $(b_n)_{n \geq 0}$, donde $b_n = n^2$. Es claro que

$$\lim_n a_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n b_n = +\infty.$$

En este caso, la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n > 0}$ es divergente, pues

$$\lim_n a_n \cdot b_n = +\infty.$$

Observación 32.

Note que en el caso 4 del teorema 3.3, si $L = 0$ y la sucesión $(a_n)_n$ es una sucesión no nula, entonces $\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{si } L \rightarrow 0^- \end{cases}$.

Ejemplo 187. Dada la sucesión convergente $(a_n)_{n \geq 1}$, cuyo término n -ésimo es $a_n = \frac{n+1}{n}$ y la sucesión divergente $(b_n)_{n \geq 0}$, donde $b_n = n$. Es claro que

$$\lim_n a_n = 1 \quad \text{y que} \quad \lim_n b_n = +\infty.$$

En este caso, la sucesión $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ diverge a más infinito, pues

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

Ejemplo 188. Calcule $\lim_n \frac{5n^3 + 2}{n^2 + 3n}$.

Solución

Factorizando el término n^3 en el numerador y el término n^2 en el denominador en la expresión dada tenemos que

$$\lim_n \frac{5n^3 + 2}{n^2 + 3n} = \lim_n \frac{n^3 \left(5 + \frac{2}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_n n \frac{\left(5 + \frac{2}{n^3}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = +\infty.$$

El siguiente resultado facilita el análisis de la convergencia de una sucesión y el cálculo de su límite a partir de cálculo del límites de funciones reales de variable real.

Teorema 3.4. Sea D un conjunto que contiene a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ donde $L \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$, definida por $a_n = f(n)$ cumple que

$$\lim_n a_n = L.$$

Observación 33.

El teorema 3.4 sigue siendo válido en los siguientes casos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Ejemplo 189. Calcule $\lim_n \frac{1}{n^2}$.

Solución

Para calcular este límite usaremos teorema 3.4. Definimos $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, entonces del teorema 3.4, la sucesión $a_n = f(n) = \frac{1}{n^2}$ verifica que $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$.

Ejemplo 190. Calcule $\lim_n \frac{1}{n^p}$ donde $p > 0$.

Solución

Definimos $f(x) = \frac{1}{x^p}$ para $x \geq 1$, si $p > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Por lo tanto, del teorema 3.4, $\lim_n \frac{1}{n^p} = 0$.

Ejemplo 191. Por definición que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, entonces por el teorema 3.4 resulta que

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Observación 34.

Los resultados obtenidos en los ejemplos 180, 181 y 188 pueden generalizarse de la siguiente manera:

si el término n -ésimo de una sucesión $(z_n)_n$ puede descomponerse como el cociente $\frac{x_n}{y_n}$ donde x_n y y_n son los términos n -ésimos de las sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ definidas por

$$x_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0$$

y

$$y_n = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0,$$

entonces

$$\lim_n z_n = \lim_n \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p < q \\ +\infty & \text{si } p > q \text{ y } \frac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ y } \frac{a_p}{b_q} < 0 \end{cases}$$

Quizás algunos lectores se preguntarán porqué usar el método de factorización para calcular límites cuando podemos hacerlo usando el teorema 3.4 y la regla de L'Hopital, la razón es que no siempre resulta el camino más adecuado. Por ejemplo, puede intentar resolver el siguiente ejercicio usando la regla de L'Hopital.

Ejemplo 192. Calcule $\lim_n \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{n}$.

Solución

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{n} = \lim_n \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)}}{n} = \lim_n \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} = 1.$$

Ejemplo 193. Calcule $\lim_n \frac{n^2 + 3n}{e^{2n}}$.

Solución

Al calcular en forma directa el límite dado aparece la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ ¿es posible aplicar la regla de L'Hopital en este caso? La respuesta es no. Justifique.

El camino para calcular el límite lo proporciona el teorema 3.4, para esto definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{e^{2x}}, x \in \mathbb{R}.$$

Ahora sí, aplicamos la regla de L'Hopital sucesivamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{e^{2x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x)'}{(e^{2x})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{2e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 3)'}{(2e^{2x})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_n a_n = \lim_n f(n) = \lim_n \frac{n^2 + 3n}{e^{2n}} = 0$.

Este resultado confirma una propiedad conocida: la función exponencial crece "más rápido" que la función polinómica. Asimismo, el resultado se traduce gráficamente en que la función f tiene una asíntota horizontal, tal como puede apreciarse en la figura 3.3.

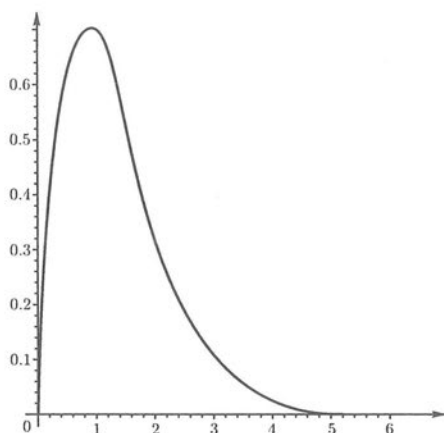


Fig. 3.3 Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{e^{2x}}$.

Ejemplo 194. Calcule $\lim_n \sqrt[n]{n}$.

Solución

Sea $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, con $x > 0$.

Tomando logaritmos y calculando límites en ambos miembros de la igualdad anterior resulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Teniendo en cuenta que la función logarítmica es continua y aplicando la regla de L'Hopital tenemos

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Por lo tanto, del teorema 3.4 resulta que

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n f(n) = 1.$$

Teorema 3.5. Si $(a_n)_n$ es una sucesión tal que $\lim_n |a_n| = 0$, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Ejemplo 195. Determine $\lim_n \frac{(-1)^n}{n}$ en caso que exista.

Solución

$$\lim_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

Luego, del teorema 3.5 obtenemos

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Ejemplo 196. Calcule $\lim_n (-1)^n \left(\frac{n^2 + 1}{2n^3 + 5n} \right)$.

Solución

$$\lim_n \left| (-1)^n \left(\frac{n^2 + 1}{2n^3 + 5n} \right) \right| = \lim_n \left(\frac{n^2 + 1}{2n^3 + 5n} \right) = 0.$$

Luego, del teorema 3.5 tenemos que

$$\lim_n (-1)^n \left(\frac{n^2 + 1}{2n^3 + 5n} \right) = 0.$$

Observación 35.

La parte (4) del teorema 3.2 no da información cuando la sucesión del denominador $(b_n)_n$ converge a cero. El siguiente resultado muestra que en ese caso también puede obtenerse información sobre la tendencia de la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$, siempre que la sucesión $(a_n)_n$ converge a una constante diferente de cero.

Teorema 3.6. Sea $(b_n)_{n \geq 0}$ una sucesión numérica, entonces

$$\lim_n b_n = 0 \text{ y } b_n > 0, \text{ para todo } n \text{ si y solo si } \lim_n \frac{1}{b_n} = +\infty.$$

$$\lim_n b_n = 0 \text{ y } b_n < 0 \text{ para todo } n \text{ si y solo si } \lim_n \frac{1}{b_n} = -\infty.$$

Ejemplo 197. Como $\lim_n 2^n = +\infty$ entonces $\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. El recíproco también se cumple.

Como $\lim_n \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, entonces $\lim_n \left(\frac{1}{(-\frac{1}{3})}\right)^n = -\infty$, el recíproco también se cumple.

Ejemplo 198. Analice la convergencia de la sucesión $(r^n)_{n \geq 1}$, según los valores de $r \in \mathbb{R}$.

Solución

Del ejemplo anterior podemos ver que el límite de una sucesión de la forma $(r^n)_n$ depende del valor de r . De esta manera, para evaluar el límite dado dividimos el problema en tres casos:

i) Cuando $|r| < 1$, tenemos

$$\lim_n |r^n| = \lim_n |r|^n = 0.$$

Por lo tanto, del teorema 3.5 se concluye

$$\lim_n r^n = 0.$$

ii) Cuando $|r| > 1$

Es claro que

$$\left|\frac{1}{r}\right| = \frac{1}{|r|} < 1,$$

luego, de la parte (I) se tiene

$$\lim_n \frac{1}{r^n} = \lim \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0,$$

entonces del teorema 3.5 se concluye que

$$\lim_n r^n = +\infty \quad \text{si } r > 1$$

y

$$\lim_n r^n = -\infty \quad \text{si } r < -1.$$

III) Cuando $r = 1$ se tiene que $\lim(1)^n = 1$.

Cuando $r = -1$ se tiene $\lim_n (-1)^n$, que como se ha visto en el ejemplo 177, no existe.

Diremos que una sucesión de números reales $(a_n)_{n \geq 0}$ es **acotada**, si existe una constante $M > 0$ verificando

$$|a_n| \leq M, \text{ para cada } n \geq 0,$$

es decir todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ pertenecen al intervalo $[-M, M]$.

Ejemplo 199. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ es una sucesión acotada, pues

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1, \text{ para todo entero } n \geq 1.$$

Ejemplo 200. La sucesión $((-1)^n)_n$ es una sucesión acotada, pues

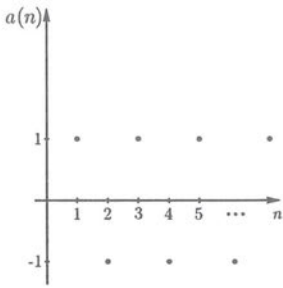
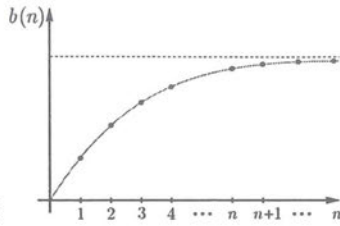
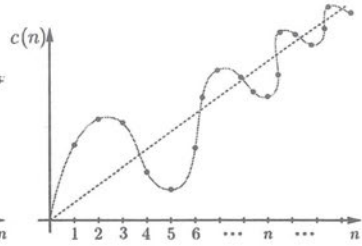
$$|a_n| = 1 \leq 1, \text{ para cada } n.$$

Ejemplo 201. La sucesión $\left(\cos \frac{1}{n}\right)_n$ es acotada, pues

$$\left| \cos \frac{1}{n} \right| \leq 1, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 202. La sucesión $(\sin(3n))_n$ es acotada, pues $|\sin(n)| \leq 1$.

Ejercicio: Señale cuáles de los siguientes gráficos corresponden a sucesiones convergentes, cuáles a sucesiones divergentes y cuáles a sucesiones convergentes y acotadas.

Fig. 3.4 Gráfica de la sucesión (a_n) .Fig. 3.5 Gráfica de la sucesión (b_n) .Fig. 3.6 Gráfica de la sucesión (c_n) .

El siguiente resultado caracteriza a las sucesiones convergentes.

Teorema 3.7. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Prueba.

Suponga que $\lim_n a_n = L$, luego para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, la desigualdad

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

se cumple a partir de un cierto valor de $n_0 = n_0(\varepsilon)$. En particular, se seguirá cumpliendo para $\varepsilon = 1$, es decir que, para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$|a_n - L| < 1.$$

Pero como

$$|a_n| - |L| \leq |a_n - L|,$$

entonces se tiene

$$|a_n| - |L| < 1.$$

Luego,

$$|a_n| < |L| + 1, \quad \text{para cada } n \geq n_0.$$

Con esto hemos logrado acotar todos los términos de la sucesión excepto un número finito de ellos: $a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}$, entonces solo nos queda controlar también estos términos, para ello podemos, por ejemplo, elegir

$$M = \max\{a_0; a_1; \dots; a_{n_0-1}; |L| + 1\}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$|a_n| < M, \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Observación 36.

1. El recíproco del teorema 3.7, no se cumple, es decir una sucesión acotada no necesariamente es convergente, por ejemplo la sucesión $((-1)^n)_{n \geq 0}$ es una sucesión acotada y sin embargo no es convergente.
2. Una proposición equivalente al teorema anterior es la siguiente: si una sucesión no es acotada, entonces no es convergente. Por ejemplo, la sucesión cuyo término n -ésimo es $a_n = (-1)^n n^2$ es divergente, pues no es una sucesión acotada.

Teorema 3.8 (Teorema del sandwich). Sean $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ sucesiones de números reales verificando las siguientes condiciones:

a) $a_n \leq c_n \leq b_n$ para n suficientemente grande y

b) $\lim_n a_n = \lim_n b_n = L,$

entonces la sucesión $(c_n)_n$ es convergente y además se cumple que

$$\lim_n c_n = L.$$

Prueba.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_n a_n = L$, entonces podemos encontrar $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_1(\varepsilon).$$

Asimismo, puesto que $\lim_n b_n = L$, podemos encontrar $N_2(\varepsilon)$ tal que

$$|b_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Eligiendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que para todo $n \geq N$:

$$-\varepsilon < a_n - L \quad \text{y} \quad b_n - L < \varepsilon.$$

Además, por dato tenemos $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces combinando esta condición con las últimas relaciones obtenidas tenemos que

$$-\varepsilon < a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

es decir, $|c_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Ejemplo 203. Calcule $\lim_n \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^n$.

Solución

Como para cada entero $n \geq 1$ se cumple

$$0 \leq \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \text{y} \quad \lim_n \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0,$$

entonces del teorema sandwich se concluye que $\lim_n \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^n = 0$.

Ejemplo 204. Calcule $\lim_n \frac{\cos n}{n^2}$.

Solución

Se sabe que la función coseno está acotada, es decir

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+,$$

entonces

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+$$

y como

$$\lim_n \left(\frac{-1}{n^2} \right) = \lim_n \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0,$$

del teorema sandwich se concluye que $\lim_n \frac{\cos n}{n^2} = 0$.

Teorema 3.9. Si $\lim a_n = 0$ $(b_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión acotada entonces se cumple que $\lim_n (a_n b_n) = 0$.

Prueba

En efecto, si $|b_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$ entonces

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M |a_n|, \quad \text{para todo } n \geq 0,$$

Luego, del teorema del sandwich se tiene que $\lim_n |a_n b_n| = 0$, luego, aplicando el teorema 3.5 se concluye que $\lim_n a_n b_n = 0$.

Ejemplo 205. El ejemplo 204 puede también ser resuelto usando el teorema 3.9. En efecto, si hacemos

$$c_n = \frac{\cos n}{n^2} = a_n b_n \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad b_n = \cos n.$$

Notemos que la sucesión $(b_n)_n$ es acotada, pues $|b_n| \leq 1$ y la sucesión $(a_n)_n$ es tal que $\lim_n a_n = 0$. Luego, aplicando el teorema 3.5 se obtiene que $\lim_n \frac{\cos n}{n^2} = 0$.

Ejemplo 206. Calcule $\lim_n \frac{n!}{n^n}$.

Solución

Observemos que tanto el numerador como el denominador de la expresión tienden a infinito cuando n tiende a ∞ , en este caso no podemos aplicar la reglas de las formas indeterminadas pues $x!$ no está definida para $x \in \mathbb{R}$. Usaremos el teorema del sandwich.

Notemos que

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{1}{n}.$$

Además,

$$\lim_n 0 = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Luego, del teorema del sandwich, se concluye que

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales. Diremos que $(a_n)_n$ es una **sucesión monótona creciente** si se cumple

$$a_n \leq a_{n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si la sucesión $(a_n)_n$ verifica

$$a_{n+1} \leq a_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}^+,$$

diremos que la **sucesión es monótona decreciente**.

Diremos que la sucesión $(a_n)_n$ es **monótona** si ella es creciente o decreciente.

Ejemplo 207. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ es monótona creciente.

Solución

En efecto, sea $a_n = \frac{n}{n+1}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1,$$

y como $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a_{n+1} > a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, luego $(a_n)_n$ es una sucesión creciente.

El siguiente resultado proporciona un criterio para determinar la convergencia de sucesiones de números reales sin tener que evaluar su límite.

Teorema 3.10. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Ejemplo 208. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ es convergente.

Solución

Observe que la sucesión es creciente,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = 1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1} < 1,$$

luego,

$$a_n < a_{n+1}$$

Además, la sucesión dada es acotada, pues

$$|a_n| = \left| \frac{n}{n+1} \right| < 1 \text{ para cada entero } n \geq 1.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3.10, la sucesión dada es convergente.

Ejemplo 209. Pruebe que la sucesión $(a_n)_n$ con $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es convergente y, que si $\lim_n a_n = w$, entonces $2 < w < 3$.

Solución

Sea la sucesión $(a_n)_n$, donde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, entonces la sucesión $(a_n)_n$ es monótona creciente. En efecto, usando la fórmula del binomio de Newton para $n \geq 2$ tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < a_{n+1}, \end{aligned}$$

pues $1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i+1}{n+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Esto también demuestra que $a_n > 2$ para todo $n \geq 2$.

Por otra parte, como $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esto prueba que la sucesión es acotada superiormente por 3. Luego, del teorema 3.10 se concluye que ella es convergente. Además, al ser $2 < a_n < 3$ para todo entero $n \geq 2$ y ser $(a_n)_n$ creciente se tiene que

$$2 < \lim_n a_n = e < 3.$$

Diremos que una sucesión $(a_n)_n$ es de **Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que

$$\text{para todo } m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $\lim_n a_n = a$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que

$$\text{para todo } n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de esto se deduce que

$$\text{para todo } m, n \geq N : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teorema 3.11. Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.

Ejemplo 210. Calcule el límite de la sucesión cuyo término n -ésimo es

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}}.$$

Solución

Reescribiendo el término n -ésimo de la sucesión dada

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

Desarrollando esta suma obtenemos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

de manera que al simplificar esta expresión se tiene

$$a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

luego, el problema dado se reduce a calcular el límite

$$\lim_n a_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

Ejercicios: Sección 3.1

1. Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_n n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{a}{n}} \right)$$

$$b) \lim_n (n - \sqrt{(n+a)(n+b)})$$

$$c) \lim_n (\operatorname{sen} \sqrt{n+1} - \operatorname{sen} \sqrt{n})$$

$$d) \lim_n \frac{1+2+3+\dots+n}{7n^2}$$

$$e) \lim_n \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$f) \lim_n (2^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$$

2. Determine el límite de las siguientes sucesiones convergentes.

$$a) \left(\frac{2^n + \operatorname{sen} 3n}{3^n + \cos 2n} \right)_{n \geq 1}$$

$$b) \left(\frac{4^{n+1} + (-5)^n}{4^n + (-5)^{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$c) \left(\frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt[3]{n^3+2n} - n} \right)_{n \in \mathbb{Z}^+}$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{n^2+6}}{n+4} \right)_n$$

$$e) \left(\frac{n^2}{n\sqrt{4n^2+7}} \right)_n$$

$$f) \left(\sqrt{n^2+n} - n \right)_n$$

$$g) \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)_n$$

$$h) \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}} - n \right)_n$$

$$i) \left(\left(\frac{2n-3}{5n+4} \right)^5 \right)_n$$

3. Calcule el límite de las siguientes sucesiones $(a_n)_n$ para cada caso.

$$a) (a_n)_{n \geq 1} \text{ siendo } a_1 = 1 \text{ y } a_n = \sqrt{5a_{n-1}} \text{ cuando } n \geq 2$$

$$b) (a_n)_n, a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}}$$

4. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión cuyos términos verifican

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 \quad a_3 = \left(\frac{5}{6} \right)^3 \quad a_4 = \left(\frac{7}{8} \right)^4 \quad a_5 = \left(\frac{9}{10} \right)^5$$

y a_n para $n \geq 6$ sigue la misma regla de formación.

$$a) \text{ Halle } a_n \text{ para } n \geq 1$$

$$b) \text{ Demuestre que } (a_n)_{n \geq 1} \text{ es una sucesión acotada, y que para todo } n \geq 1 \text{ se cumple que } a_n \leq a_{n+1}$$

5. Analice si la sucesión $\left(\frac{4-n^2}{5n} \right)_n$ es decreciente.

6. Dada la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n = \frac{n^{p+2} + n + 4}{3n^{2p} + n + 3}$. Analice $\lim_n a_n$ según los valores de $p \in \mathbb{N}$.
7. Usando el teorema del sandwich calcule los siguientes límites
- a) $\lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2} \right)$
- b) $\lim_n \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{n^2+n}} \right)$
8. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos, demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + a_n + 1}$ es convergente.
9. Calcule los siguientes límites
- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{\ln n}{n}}$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rceil}$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor de los enteros que son menores o iguales que x , y $\lceil x \rceil$ denota al menor de los enteros que son mayores o iguales que x
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \frac{1}{n}$
- e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n^2+1) \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$
10. Sea f una función derivable en el punto cero, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 5$. Analice si existe $\lim_n f\left(\frac{1}{n}\right)$. En caso afirmativo, halle su valor.
11. Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
- a) Si $(a_n)_n$ es convergente y $(b_n)_n$ divergente, entonces $(a_n + b_n)_n$ es divergente.
- b) Si $(a_n)_n$ es convergente y $(b_n)_n$ divergente, entonces $(a_n \cdot b_n)_n$ es divergente.

3.2. Series de números reales

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. A partir de ella podemos formar una nueva sucesión $(s_n)_{n \geq 1}$ llamada **serie**, que no es más que la **sucesión de sumas parciales** definida de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = s_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3 \\ \vdots \\ s_n = s_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \\ \vdots \end{array} \right.$$

En adelante, salvo mención expresa, escribiremos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ para hacer referencia a una serie. El término a_n es llamado **término general de la serie**. Para determinar la convergencia de la serie $(s_n)_{n \geq 1}$ debemos analizar el límite

$$\lim_n s_n = \lim_n \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a un número real s , diremos que la serie converge. En tal caso, s es llamada **suma de la serie**, y escribimos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

Si el límite de la sucesión $(s_n)_{n \geq 1}$ no existe, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Nótese los dos sentidos asignados a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ por un lado denota al límite de la sucesión de sumas parciales y por otro a la misma serie (sucesión de sumas parciales).

Ejemplo 211. Dada la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

- Escriba los cuatro primeros términos de la serie.
- Analice su convergencia o divergencia. En caso de ser convergente, halle la suma de la serie.

Solución

a) Es claro que el término general de la serie dada es $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, entonces

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{4(4+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

b) Observemos que el término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales es

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_n s_n = 1.$$

Por lo tanto, la serie dada es convergente y su suma es 1. Escribimos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ejemplo 212. De la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se conoce que la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$ está definida por $s_n = \frac{3n+2}{n+4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Determine:

- a) El término general a_n de la serie.
 b) La convergencia o divergencia de la serie.

Solución

- a) Sabemos que

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$a_n = \frac{3n+2}{n+4} - \frac{3(n-1)+2}{(n-1)+4}.$$

Por lo tanto, el término n -ésimo de la serie viene dado por

$$a_n = \frac{10}{(n+4)(n+3)}.$$

- b) Como $\lim_n s_n = 3$, entonces la serie dada es convergente y su suma es 3. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{(n+3)(n+4)} = 3.$$

Ejemplo 213. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n$.

Solución

Es claro que el término general de la serie es $a_n = n$. Luego,

$$s_1 = a_1 = 1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\vdots$$

Por lo tanto, $\lim_n s_n = +\infty$. Esto significa que la serie dada es divergente.

Ejemplo 214. Usando la definición, demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ es convergente.

Solución

El término general de la serie es $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ y el término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales es

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

esta última expresión corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ y primer término 1. Luego,

$$s_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right),$$

entonces $\lim_n s_n = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, la serie dada es convergente y su suma es $\frac{2}{3}$, en símbolos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 215. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ es divergente.

Solución

Para ver esto, observemos el comportamiento de los términos de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= s_1 + 1 = 0 \\ s_3 &= s_2 + (-1) = -1 \\ s_4 &= s_3 + 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir,

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

y como el límite de esta sucesión no existe, entonces la serie dada es divergente.

Ejemplo 216. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solución

Consideremos la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$, donde

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Como $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos que

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

luego, $\lim_n s_n = +\infty$. Por lo tanto, la serie dada es divergente.

Serie telescópica

Se llama **serie telescópica** a una serie de la forma

$$\sum_{n=m}^{+\infty} (c_n - c_{n+1}), \quad \text{donde } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } c_n \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 217. Justifique por qué la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es una serie telescópica.

Solución

Basta ver que su término general a_n es de la forma

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Teorema 3.12. Una serie telescópica $\sum_{n=m}^{+\infty} (c_n - c_{n+1})$ converge si y solo si existe $\lim_n c_n$. En tal caso, su suma es $c_m - \lim_n c_n$, en símbolos

$$\sum_{n=m}^{+\infty} (c_n - c_{n+1}) = c_m - \lim_n c_n.$$

Prueba.

El término general de la serie es de la forma $a_n = c_n - c_{n+1}$, entonces,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=m}^n (c_j - c_{j+1}) \\ &= (c_m - c_{m+1}) + (c_{m+1} - c_{m+2}) + \cdots + (c_n - c_{n+1}) \\ &= c_m - c_{n+1}. \end{aligned}$$

Luego, $\lim_n s_n = c_m - \lim_n c_n$, pues $\lim_n c_{n+1} = \lim_n c_n$.

Ejemplo 218. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2 + n} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2n + 1}{n^2 + n} \right)$ converge.

En caso afirmativo, halle su suma.

Solución

Usando la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

El término general de la serie a_n puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2 + n} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2n + 1}{n^2 + n} \right) \\ &= \cos \left(-\frac{2n}{n^2 + n} \right) - \cos \left(\frac{2n + 2}{n^2 + n} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2}{n + 1} \right) - \cos \left(\frac{2}{n} \right) \\ &= - \left[\cos \left(\frac{2}{n} \right) - \cos \left(\frac{2}{n + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Luego, la serie dada es una serie telescópica donde $c_n = \cos \left(\frac{2}{n} \right)$, la cual es convergente, pues $\lim_n c_n = 1$. Para hallar la suma de la serie escribimos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2 + n} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2n + 1}{n^2 + n} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} -(c_n - c_{n+1}) \\ &= -(c_1 - \lim_n c_n) \\ &= 1 - \cos 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 219. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n + 1} \right)$.

Solución

El término general de la serie puede reescribirse en la forma siguiente:

$$a_n = c_n - c_{n+1} = \ln n - \ln(n + 1)$$

Por lo tanto, la serie dada es una serie telescópica divergente, pues

$$\lim_n c_n = \lim_n \ln n = +\infty.$$

Serie geométrica

Se llama **serie geométrica** de razón r a una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ y } r \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.13.

Dada la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ de razón r se cumple:

- a) Si $|r| < 1$, entonces la serie converge y $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.
- b) Si $|r| \geq 1$, entonces la serie diverge.

Prueba.

El término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales viene dado por

$$s_n = \sum_{k=0}^n ar^k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n. \quad (3.1)$$

Además,

$$s_{n+1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} = s_n + ar^{n+1} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Asimismo,

$$s_{n+1} = a + r(a + ar + \dots + ar^n) = a + rs_n.$$

Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos

$$(1-r)s_n = a - ar^{n+1}.$$

Luego, cuando $r \neq 1$ resulta que

$$s_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

y cuando $r = 1$, de la expresión 3.1, tenemos que $s_n = a(n + 1)$.
Resumiendo los resultados obtenidos tenemos :

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \dots + ar^n)$$

$$s_n = \begin{cases} a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1 \\ a(n + 1), & r = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto,

a) Cuando $|r| < 1$, tenemos que

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{a}{1 - r},$$

es decir, la serie es convergente. En tal caso, su suma es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}.$$

b) (b1) Cuando $|r| > 1$, es claro que $\lim_n r^n = +\infty$. Luego,

$$\lim_n s_n = +\infty,$$

esto significa que la serie es divergente.

(b2) Cuando $r = 1$ tenemos que

$$\lim_n s_n = \lim_n (n + 1)a = +\infty,$$

luego, la serie es divergente.

(b3) Cuando $r = -1$, tenemos que

$$s_n = \frac{1}{2} a[1 - (-1)^{n+1}],$$

entonces, la sucesión $(s_n)_n$ es divergente.

Ejemplo 220. Analice la convergencia o divergencia de la serie

$$\ln 2 + \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 2}{\sqrt{2^2}} + \frac{\ln 2}{\sqrt{2^3}} + \dots$$

En caso de ser convergente, halle su suma.

Solución

La serie anterior puede expresarse en la forma siguiente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln 2}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

y como la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$ es geométrica de razón $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, entonces es convergente y además se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln 2}{\sqrt{2^n}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \\ &= \frac{\ln 2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \ln 2}{\sqrt{2} - 1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 221. Encuentre todos los valores de a para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3a}{a - \frac{1}{3}} \right)^n$ es convergente y halle la suma respectiva.

Solución

La serie dada es una serie geométrica cuya razón es $r = \frac{3a}{a - \frac{1}{3}}$, luego para que sea convergente bastará exigir que

$$\left| \frac{3a}{a - \frac{1}{3}} \right| < 1,$$

lo cual es equivalente a resolver la inecuación

$$-1 < \frac{9a}{3a - 1} < 1,$$

es decir, $-\frac{1}{6} < a < \frac{1}{12}$.

Para estos valores tenemos que su suma es

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3a}{a - \frac{1}{3}} \right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{3a}{a - \frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1 - 3a}{6a + 1}. \end{aligned}$$

Teorema 3.14.

Dado el número real c y las series convergentes $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, entonces

$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n$ son convergentes y además se cumple que:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Prueba.

a) Suponga que (s_n) y (t_n) son las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Por condición tenemos que las series

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son convergentes, entonces

$$\lim_n s_n = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_n t_n = L_2.$$

Si $(u_n)_n$ es la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$, entonces

$$u_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = s_n + t_n,$$

luego,

$$\lim_n u_n = \lim_n (s_n + t_n) = \lim_n s_n + \lim_n t_n = L_1 + L_2.$$

De esta manera, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y su suma es $L_1 + L_2$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

b) Se procede en forma similar al caso estudiado en la parte a).

Ejemplo 222. Justifique la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$ y luego calcule su suma.

Solución

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ son series geométricas de razón menor que 1, ellas son convergentes, entonces del teorema 3.14 resulta que la serie dada es convergente y además se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 3.15 (Condición necesaria para la convergencia de una serie).

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Prueba.

Por condición la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, esto significa que existe el límite de la sucesión de sumas parciales, es decir

$$\lim_n s_n = L \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, recordemos que el término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales es dado por

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

entonces

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_n a_n &= \lim_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} \\ &= L - L = 0.\end{aligned}$$

El siguiente corolario es la llamada forma contrarrecíproca del teorema anterior. Escrito de esta forma, se convierte en un criterio muy fácil de usar para determinar la divergencia de una serie.

Corolario 3.16 (Criterio de divergencia o criterio del término general de la serie).

Si $\lim_n a_n \neq 0$ (o no existe) entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 223. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{3n^2 + n}$.

Solución

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{3n^2 + n}$ diverge, pues

$$\lim_n \frac{n^2 + 5}{3n^2 + n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Ejemplo 224. Explique por qué la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

Solución

La serie dada diverge, pues el límite $\lim_n (-1)^n$ no existe como se vio en el ejemplo 177.

Ejemplo 225. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{n! e^n}{n^n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! e^{n+1}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{n! e^n}{n^n}}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

y como para todo entero $n \geq 1$ se cumple $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, es decir la sucesión $(a_n)_n$ de términos positivos es creciente y de esta manera $\lim_n a_n \neq 0$. Luego, del criterio del término general de series se concluye que la serie dada diverge.

Observación 37.

El criterio del término general de la serie afirma que si $\lim_n a_n \neq 0$, entonces la serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge. Sin embargo, si $\lim_n a_n = 0$ no podemos asegurar nada sobre la con-

vergencia o divergencia de la serie, por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, tiene la propiedad

de que la sucesión $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ es tal que $\lim_n a_n = 0$, sin embargo, dicha serie no es convergente como se vio en el ejemplo 216.

El siguiente resultado nos dice que la convergencia o divergencia de una serie no se altera si se añade o se suprime un número finito de términos.

Teorema 3.17.

Dada una serie $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ para algún entero positivo m , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si la serie $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. En tal caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{+\infty} a_n.$$

b) La serie $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Prueba.

Observemos que

$$\sum_{n=1}^p a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^p a_n$$

donde $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$ es fijo. Luego, basta aplicar las definiciones de convergencia y divergencia de una serie para obtener lo deseado.

Teorema 3.18 (Criterio de Cauchy).

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y solo si para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe un entero positivo N tal que

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

para todo $m > k > N$.

Prueba.

Por definición se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y solo si, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$ converge y esto es equivalente a decir que es una sucesión de Cauchy. Luego, el resultado se sigue de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| \\ &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|. \end{aligned}$$

Ejemplo 226. Usando el criterio de Cauchy, demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Solución

Para $p \geq 1$, evaluamos la diferencia de los términos $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ y $s_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k}$ resultando

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right| \\ &> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{n}{n+p}, \end{aligned}$$

pues $\frac{1}{n+j} > \frac{1}{n+p}$ para $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Haciendo $p = 2n$ obtenemos,

$$|s_{2n} - s_n| > \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la serie dada resulta ser divergente. En efecto, suponga que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es convergente, entonces es de Cauchy. Luego, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe un natural N tal que para todo $m > n > N$ se cumple $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Pero, esto contradice el hecho que $|s_m - s_n| > \frac{1}{2}$ para $m = 2n$.

Ejercicios: Sección 3.2

1. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + \ln n)^p}, \text{ si } p < 0$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(1+2+3+\dots+n)}{100n^2}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

2. Halle la suma de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^n n(n+1)}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+4)!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \right] e) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+2}}{3^{2n-1}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (4n+4)}{(2n+1)(2n+3)}$$

3. Determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Si la afirmación es falsa escriba un ejemplo donde no se verifique la afirmación.

a) Si para cada $k \geq 1$, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$, donde

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \text{ es acotada, entonces la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

b) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+a_n^2}$ converge.

4. Dé un ejemplo de una serie convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ sea divergente.

5. Halle la suma de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n+2-b^{n+1}}}{a^n}, \text{ si } 0 < b < a < 1$$

6. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(1+\ln n)}{\sqrt{n^4+5n^3}}$

7. Pruebe que las siguientes series son divergentes.

$$a) \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n n}{2n+1} + \dots$$

$$b) \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n + \dots$$

8. Halle la suma de las siguientes series

$$a) 8.88888\dots = 8 + 8 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + \dots + 8 \times 10^{-n} + \dots$$

$$b) 5.434343\dots = 5 + 43 \times 100^{-1} + 43 \times 100^{-2} + \dots$$

9. Halle todos los valores de a diferentes de 1 y -1 para los cuales la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}$$
 converge y halle la suma de la serie para dichos valores de a .

10. Pruebe que si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)$ diverge.

3.3. Criterios de convergencia para series

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es llamada **serie de términos no negativos** si cada término a_n es mayor o igual a cero.

En toda serie de términos no negativos, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión monótona creciente, esto es

$$s_n = \sum_{j=1}^n a_n \leq \sum_{j=1}^{n+1} a_n = s_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Según el teorema 3.10 para que la sucesión $(s_n)_{n \geq 1}$ convergente bastará demostrar que está acotada, esto da origen al siguiente criterio de convergencia.

Teorema 3.19 (Criterio de acotación). *Una serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$ es acotada.*

Ejemplo 227. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución

Observemos que

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \quad \text{para todo } n,$$

es decir, la sucesión $(s_n)_{n \geq 1}$ es acotada. Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de acotación la serie dada resulta ser convergente.

Ejemplo 228. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n!}$.

Solución

Para todo $n \geq 1$ se cumple

$$\frac{1}{n+n!} \leq \frac{1}{n!},$$

entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+k!} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1, \quad ^2$$

entonces la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada y, por lo tanto, la serie dada es convergente.

²Ver ejemplo 286

El criterio de acotación da lugar al siguiente criterio de convergencia.

Teorema 3.20 (Criterio de comparación).

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ series de términos no negativos. Suponga que existe un entero $m \geq 0$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \geq m$, entonces

- a) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- b) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Prueba.

- a) Como $a_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$, entonces la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$ de la serie $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ es monótona creciente, luego para que dicha serie sea convergente, según el criterio de acotación, bastará demostrar que la sucesión de sumas parciales es acotada. En efecto, sea $(t_n)_n$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ la cual es acotada, es decir, existe un entero positivo N_1 tal que $0 \leq t_n \leq N_1$, entonces para $n > m$ tenemos

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n b_k \quad (\text{por condición}) \\
 &\leq \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{pues } b_k \geq 0) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_k + t_n \\
 &\leq \sum_{k=1}^m a_k + N_1 \quad (\text{pues } (t_n)_n \text{ es acotada}) \\
 s_n &\leq N_2
 \end{aligned}$$

siendo $N_2 = \sum_{k=1}^m a_k + N_1$.

Luego, para que la sucesión $(s_n)_n$ sea acotada bastará elegir N como

$$N = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m, N_2\},$$

de esta manera tenemos que $s_n \leq N$ para todo entero $n \geq 1$.

b) Para este procederemos por el método de reducción al absurdo. Suponga que

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente, entonces según la parte anterior se tendría

que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, lo cual contradice la hipótesis. Por lo

tanto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Ejemplo 229. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^n$.

Solución

Como para cada entero positivo n se cumple que

$$\left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

y la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ es convergente, por el criterio de comparación se

tiene que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^n$ es convergente.

Ejemplo 230. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + \cos(n^2 + 1)}{n^2 + 3^n}$.

Solución

Se sabe que para todo entero $n \geq 0$ se cumple

$$-1 \leq \cos(n^2 + 1) \leq 1 \quad \text{y} \quad n^2 + 3^n \geq 3^n.$$

Luego,

$$0 \leq \frac{1 + \cos(n^2 + 1)}{n^2 + 3^n} \leq \frac{2}{n^2 + 3^n} \leq \frac{2}{3^n}$$

y como la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ de razón $r = \frac{1}{3} < 1$ es convergente, entonces por el criterio de comparación se concluye que la serie dada también es convergente.

Ejemplo 231. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Solución

Observe que para todo $n \geq 3$ se cumple

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 > 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

⋮

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 > 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$$

⋮

Por lo tanto,

$$n! > 2^{n-1}, \quad \text{para todo } n \geq 3,$$

entonces

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{para todo } n \geq 3$$

y como la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, entonces, por el criterio de comparación, la serie es convergente, y del teorema 3.17 se concluye que la serie dada converge.

Ejemplo 232. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + 2^n}$.

Solución

Observe que para todo entero positivo n se cumple que

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + 2^n} \leq \frac{1}{1 + 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces por el criterio de comparación la serie dada resulta ser convergente.

Ejemplo 233. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n) + 1}$.

Solución

Es conocido que para todo $x \geq 1$ se cumple

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

Luego,

$$\ln(n) + 1 \leq n, \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln(n) + 1}$$

y como la serie armónica es divergente, entonces de acuerdo con el criterio de comparación la serie dada también resulta ser divergente.

Ejemplo 234. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

Solución

Para cada entero $n \geq 1$ se cumple que $n^3 + 1 \geq 2n^3$, entonces

$$\frac{n^2}{n^3 + 1} > \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n},$$

y como la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, del criterio de comparación se concluye que la serie dada diverge.

Teorema 3.21 (Criterio de la integral).

Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos con $a_n = f(n)$

donde f es una función integrable en el intervalo $[1, +\infty[$ tal que:

- a) $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 1$.
- b) f es monótona decreciente para todo $x \geq 1$,

entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (respectivamente diverge) si y solo si la integral $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge (respectivamente diverge).

Prueba.

Suponga que $y = f(x)$ es positiva y monótona decreciente para $x \in [1; +\infty[$ y sea $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n . Consideremos además rectángulos R_k bajo la gráfica de f cuyas bases son de longitud uno y altura $f(k + 1)$ como se muestra en el siguiente gráfico:

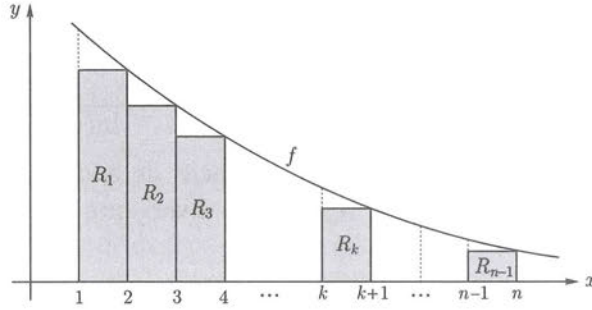


Fig. 3.7

Por las propiedades de la integral definida tenemos que

$$\begin{aligned} A(R_1) &= f(2) \cdot (2 - 1) \leq \int_1^2 f(x) dx \\ A(R_2) &= f(3) \cdot (3 - 2) \leq \int_2^3 f(x) dx \\ &\vdots \\ A(R_{n-1}) &= f(n) \cdot [n - (n - 1)] \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \end{aligned}$$

de manera que al sumar todas estas expresiones obtenemos

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \quad \text{para cada } n,$$

entonces

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Luego, si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge entonces la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \geq 1}$

es acotada, es decir,

$$s_n = \sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

y como $a_k \geq 0$, entonces del criterio de acotación se sigue que la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$

converge, y por tanto, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ también converge.

Recíprocamente, supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge y comparemos el área de los rectángulos P_k cuyas bases tienen longitud uno y altura $f(k)$, como se muestra en el siguiente gráfico:

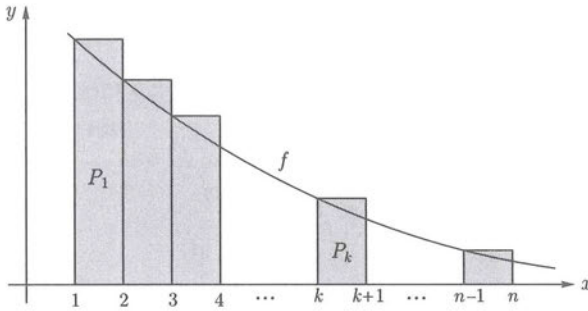


Fig. 3.8

Claramente,

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty,$$

esto es, $\int_1^n f(x) dx$ es acotada. Luego, haciendo que $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty,$$

es decir, la integral impropia converge.

En conclusión, tenemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge si y solo si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Equivalentemente, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge, si y solo si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Ejemplo 235. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ según los valores de $p \in \mathbb{R}$.

Solución

Si $p < 0$ tenemos que $a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p}$, entonces $\lim_n a_n = +\infty$. Luego, por el criterio del término general de series (ver corolario 3.16), resulta que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Si $p > 0$ definimos $f(x) = \frac{1}{x^p}$ para $x \geq 1$, entonces

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0, \quad \text{para todo } x > 1,$$

es decir, la función f es decreciente para todo $x \geq 1$. Luego, según el criterio de la integral, la convergencia o divergencia de la serie se reduce a la convergencia o divergencia de la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^t, & p \neq 1. \\ \ln x \Big|_{x=1}^t, & p = 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1. \\ +\infty, & 0 < p < 1. \\ +\infty, & p = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente, si $p = 0$ tenemos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, la cual obviamente es divergente.

En resumen, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$.

Este ejemplo permite dar un criterio de convergencia para las series de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, llamadas p -series o series de Dirichlet o serie armónica generalizada.

Teorema 3.22. Sea $p \in \mathbb{R}$, la p -serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Ejemplo 236. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$.

Solución

Sea $f(x) = x e^{-x^2}$, para todo $x \geq 1$.

Es claro que $f(n) = a_n = n e^{-n^2}$ para $n \in \mathbb{N}^+$. Asimismo, se cumple que $f(x) > 0$ para todo $x \geq 1$ además f es una función monótona decreciente, pues,

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0, \quad \text{para todo } x > 1.$$

Luego, la convergencia o divergencia de la serie se reduce a analizar la convergencia o divergencia de la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_{x=1}^t \\ &= \frac{1}{2e}, \end{aligned}$$

es decir, la integral impropia converge. Por lo tanto, del criterio de la integral, la serie dada converge.

Ejemplo 237. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

Solución

Sea $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $x \geq 1$. Claramente, f es una función no negativa para todo $x \geq 1$

y $f(n) = a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$. Asimismo, para todo $x > 1$ se cumple que

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}(1 + 2x)}{x^4} < 0$$

es decir f es una función decreciente en $[1; +\infty[$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} - \int_1^t e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{x=1}^t \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

es decir, la integral impropia es convergente, luego por el criterio de la integral se concluye que la serie dada converge.

Ejemplo 238. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución

Sea $f(x) = \frac{4}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$, para $x \geq 2$. Es claro que, f es una función positiva para todo $x \geq 2$ y monótona decreciente para $x \in [2; +\infty[$, pues

$$f'(x) = -4 \frac{[x(\ln x)^{\frac{3}{2}}]'}{x^2 \ln^3 x} < 0.$$

Luego, según el criterio de la integral, bastará analizar la integral impropia $\int_2^{+\infty} f(x) dx$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{4}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{4}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-8}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{x=2}^t \\ &= \frac{8}{(\ln 2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

esto es, la integral impropia converge, entonces la serie dada converge.

Ejemplo 239. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^r}$.

- Quando $0 < r \leq 1$.
- Quando $r > 1$.

Solución

Para analizar la convergencia utilizaremos en ambos casos el criterio de la integral.

a) En este caso tenemos

$$\frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n^r},$$

Analizando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. Se deja como ejercicio verificar que f así definida es una función no negativa y decreciente para todo $x \geq 1$.

Luego, según el criterio de la integral, el problema se reduce a evaluar la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$, en efecto

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln^2(\ln x) \right]_{x=1}^t = +\infty,$$

entonces como la integral impropia diverge, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge, y usando el criterio de comparación la serie dada resulta divergente.

b) Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x^r}$, $x \geq 1$, entonces

$$f'(x) = \frac{1 - r \ln x}{x^{r+1}},$$

de esto se deduce que

$$f'(x) < 0 \text{ si y solo si } 1 - r \ln x < 0 \text{ si y solo si } x > e^{\frac{1}{r}}.$$

Como $r > 1$, para que esta última desigualdad se cumpla basta tomar $x \geq 3$.

Luego, evaluando la integral impropia $\int_3^{+\infty} f(x) dx$,

$$I = \int_3^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x^r} dx,$$

usando el cambio de variable $x = e^z$ entonces $dx = e^z dz$ e integrando por partes tenemos,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\ln 3}^{\ln t} z e^{z(1-r)} dz \\ &= \lim_n \left[\frac{z e^{z(1-r)}}{1-r} - \frac{1}{(1-r)^2} e^{z(1-r)} \right]_{z=\ln 3}^{\ln t} \\ I &= \lim_n \left[\frac{t^{1-r} \ln t}{1-r} - \frac{t^{1-r}}{(1-r)^2} - \frac{3^{1-r} \ln 3}{1-r} + \frac{1}{(1-r)^2} 3^{1-r} \right] \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

esto es, la integral impropia converge, luego la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r}$ converge. Por lo tanto, del teorema 3.17 se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r}$ converge.

Teorema 3.23 (Criterio de comparación por límite).

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones de términos positivos. Si $L = \lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$, se cumple:

1. Si $0 < L < +\infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge (de manera equivalente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge si y solo si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.)
2. Si $L = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Si $L = +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Prueba.

1. Suponga que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sea convergente. De la condición $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L$ es posible encontrar un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 1,$$

en particular, se cumple $\frac{a_n}{b_n} < 1 + L$, es decir

$$a_n < (1 + L) b_n, \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Luego, como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + L) b_n$ también converge. Por lo tanto, del teorema de comparación se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Para el recíproco del teorema parte (1) se usa el mismo argumento anterior.

En efecto, suponga ahora que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

De la condición $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L$ se obtiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L}$, entonces existe un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{1}{L} < 1,$$

es decir $b_n < (1 + \frac{1}{L}) a_n$ para todo $n \geq m$. Luego, como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{L}) a_n$ converge. El resultado se obtiene al aplicar el criterio de comparación.

2. Suponga que $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces de la definición de límite de una sucesión se garantiza que existe un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < 1,$$

es decir,

$$a_n < b_n \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Luego, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces por el criterio de comparación

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3. Supongamos que $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Luego, por definición de límite de una sucesión tenemos que dado $M > 0$ existe un entero positivo m tal que

$$\frac{a_n}{b_n} > M, \quad \text{para todo } n \geq m,$$

como $b_n > 0$ tenemos

$$M b_n < a_n, \quad \text{para todo } n \geq m,$$

luego, si la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} M b_n$ también diverge.

Por lo tanto, del criterio de comparación, se obtiene que la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 240. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$ y elijamos la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \frac{1}{n^2}$, luego

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n^2}{3n^2 - 4n + 5} = \frac{1}{3} > 0.$$

Como la p -serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por el criterio de comparación por límite, resulta que la serie dada converge.

Ejemplo 241. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5+n}{n^2+6}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{5+n}{n^2+6}$ y definamos la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \frac{1}{n}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{5n + n^2}{n^2 + 6} = 1 > 0,$$

luego, del teorema de comparación por límite, se concluye que la serie dada diverge, pues la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ lo es.

Ejemplo 242. Analice la convergencia o divergencia de la serie de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n(n+1)}{2^n-1}$.

Solución

Sea la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{5^n(n+1)}{2^n-1} \cdot \frac{2^n}{5^n} = +\infty,$$

como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ diverge, entonces del criterio de cociente se concluye que la serie dada diverge.

Ejemplo 243. Halle la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+n}$.

Solución

Sea la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \frac{1}{n}$ entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{2n^2 - n}{n^2 + n} = 2 > 0$$

y como la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces del criterio de comparación por límite se concluye que la serie dada diverge.

Ejemplo 244. Analice la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n(n-1)}$.

Solución

Sea la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \frac{1}{3^n}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{2}{n-1} = 0,$$

y como la serie geométrica $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ converge, entonces del criterio del cociente resulta que la serie dada converge.

Ejemplo 245. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{n}}}$.

Solución

Observemos que el término general de la serie es $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{n}}}$. Luego, elijamos

la sucesión $(b_n)_n$ con $b_n = \frac{1}{n}$, entonces tenemos que

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Por lo tanto, del criterio de comparación por límite se concluye que la serie dada diverge, pues la serie armónica diverge.

Ejemplo 246. Analice la convergencia o divergencia de la serie

$$\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10n}} + \cdots$$

Solución

La serie anterior puede expresarse en la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}.$$

Sea $(b_n)_n$ la sucesión definida por $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, del criterio de comparación por límite, se tiene que la serie dada diverge.

Ejemplo 247. Analice la convergencia o divergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{5\sqrt{4}} + \dots$$

Solución

La serie anterior puede expresarse en la forma siguiente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Es claro que $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{(n+1)n^{\frac{1}{6}}}$. Eligiendo la sucesión $(b_n)_n$, donde $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Por lo tanto, del criterio de comparación por límite se obtiene que la serie dada converge.

Ejemplo 248. Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha})$ converge.

Solución

Observe que

$$a_n = \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha + 1} + \sqrt{n^\alpha}}.$$

Sea $(b_n)_n$ la sucesión definida por $b_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2},$$

cualquiera sea el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego, del criterio de comparación por límite, se tiene que la naturaleza (convergencia o divergencia) de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ depende

de la naturaleza de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. En efecto, como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ es una p serie, ella converge si $\frac{\alpha}{2} > 1$ y diverge si $\frac{\alpha}{2} \leq 1$ (ver teorema 3.22). Por lo tanto, la serie dada converge si $\alpha > 2$ y diverge si $\alpha \leq 2$.

Teorema 3.24 (Criterio del cociente o de D'Alembert).

Suponga que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y que $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces

a) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Prueba.

a) Por condición tenemos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$, en particular si elegimos $L + \varepsilon < 1$ obtenemos que

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon) a_n, \quad \text{para todo } n \geq m,$$

de esta manera

$$\begin{aligned} a_{m+1} &< (L + \varepsilon) a_m \\ a_{m+2} &< (L + \varepsilon) a_{m+1} < (L + \varepsilon)^2 a_m \\ a_{m+3} &< (L + \varepsilon) a_{m+2} < (L + \varepsilon)^3 a_m, \\ &\vdots \\ a_n &< (L + \varepsilon)^{n-m} a_m, \end{aligned}$$

es decir, para todo $n \geq m$ se cumple que

$$a_n < (L + \varepsilon)^{n-m} a_m. \quad (3.2)$$

Sea $(s_n)_n$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, la cual es una sucesión creciente (por ser una serie de términos positivos), entonces para que ella sea convergente bastará probar que $(s_n)_n$ es una sucesión acotada. En efecto, para todo $n > m$ tenemos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \\ s_n &< \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n (L + \varepsilon)^{k-m} a_m \quad (\text{por la relación 3.2}) \\ &= \sum_{k=1}^m a_k + \frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m} \sum_{k=m+1}^n (L + \varepsilon)^k \\ s_n &< \sum_{k=1}^m a_k + \frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m} \sum_{k=m+1}^{+\infty} (L + \varepsilon)^k = N_1 \quad \text{para todo } n > m, \end{aligned}$$

Observe que $\sum_{n=m+1}^{+\infty} (L + \varepsilon)^n$ es una serie geométrica convergente, pues la razón es $r = L + \varepsilon < 1$.

Si elegimos $N = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m, N_1\}$ se obtiene que que

$$s_n \leq N, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

es decir, $(s_n)_n$ es una sucesión acotada, por lo tanto del criterio de acotación resulta que la serie dada converge.

- b) Por condición tenemos que $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L > 1$, luego dado un $\varepsilon > 0$ de la definición de límite existe un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon,$$

en particular, si elegimos $L - \varepsilon > 1$ obtenemos que

$$a_{n+1} > (L - \varepsilon) a_n, \quad \text{para todo } m \geq n,$$

de esta manera

$$\begin{aligned} a_{m+1} &> (L - \varepsilon)a_m \\ a_{m+2} &> (L + \varepsilon)a_{m+1} > (L + \varepsilon)^2 a_m \\ a_{m+3} &> (L + \varepsilon)a_{m+2} > (L + \varepsilon)^3 a_m, \\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir, para todo $n \geq m$ se tiene

$$a_n > (L + \varepsilon)^{n-m} a_m.$$

Sea $(s_n)_n$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Para que la serie sea divergente bastará probar que $(s_n)_n$ sea una sucesión no acotada. En efecto, para todo $n > m$ tenemos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \\ &> \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n (L + \varepsilon)^{k-m} a_m \\ s_n &> \sum_{k=1}^n a_k + \frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m} \sum_{k=m+1}^n (L + \varepsilon)^k \end{aligned}$$

como $\sum_{n=m+1}^{+\infty} (L + \varepsilon)^n$ es una serie geométrica divergente cuya razón es $r = L + \varepsilon > 1$, entonces la sucesión de su sumas parciales no es acotada. Por lo tanto, teniendo en cuenta esto y la última desigualdad obtenida, concluimos que la sucesión $(s_n)_n$ no es acotada y por lo tanto, la serie correspondiente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Una versión más general del resultado anterior viene dado por el siguiente teorema.

Teorema 3.25.

Suponga que existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo entero $n > m$ se cumple que $a_n > 0$ y sea $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces

a) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 249. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n2^n}$.

Solución

Observe que $a_n = \frac{n+1}{n2^n}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Luego, por el criterio del cociente la serie dada converge.

Ejemplo 250. Si $a > 0$, analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$, e

función de los valores de a .

Solución

Sea $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot a^n \cdot n!} = \lim_n a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{a}{e}.$$

Luego, si $0 < a < e$ tenemos que $L < 1$, entonces del criterio del cociente se tiene que la serie dada converge. Asimismo, si $a > e$ entonces $L > 1$, del mismo criterio del cociente se concluye que la serie dada es divergente. Pero, si $a = e$ entonces $L = 1$, en este caso el criterio no dice nada, sin embargo podemos hacer uso del criterio de comparación para analizar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$, para lo cual usaremos la siguiente relación:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Usando la desigualdad anterior obtenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

es decir, $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 1$. Esto significa que $(a_n)_n$ es una sucesión de términos positivos creciente, luego $\lim_n a_n \neq 0$. Por lo tanto, la serie dada diverge (según el criterio del término general de series).

Ejemplo 251. Analice la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)},$$

y

$$L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Luego, por el criterio del cociente la serie dada converge.

Ejemplo 252. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n^p}$ en función

de los valores de p .

Solución

Sea $a_n = \frac{p^n}{n^p}$, entonces

$$L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{p^{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{p^n} = p \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = p.$$

Luego, por el criterio del cociente se concluye que si $p < 1$, la serie dada converge

y, por el mismo criterio, si $p > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n^p}$ diverge. Finalmente si $p = 1$, la serie resultante es una serie armónica y por lo tanto diverge.

Ejemplo 253. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 + n!}{(2n)! + n^4}$.

Solución

Observe que

$$\frac{(n!)^2 + n!}{(2n)! + n^4} \leq \frac{2(n!)^2}{(2n)!}, \quad (3.3)$$

entonces el problema se reduce a evaluar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$, para lo cual usaremos el criterio del cociente. Sea $a_n = 2(n!)^2(2n)!$, entonces

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$ converge. Por lo tanto, teniendo en cuenta esto, la expresión 3.3, y usando el criterio de comparación, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 + n!}{(2n)! + n^4}$ converge.

Teorema 3.26 (Criterio de la raíz o de Cauchy).

Suponga que $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$ y sea $L = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$, entonces se verifica:

a) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Prueba.

a) Suponga que $\lim_n (a_n)^{\frac{1}{n}} = L < 1$, entonces dado $\varepsilon > 0$, de la definición de límite de una sucesión, se garantiza la existencia de un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple

$$|a_n^{\frac{1}{n}} - L| < \varepsilon, \text{ equivalentemente } L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

En particular, si elegimos $L + \varepsilon < 1$ tenemos que $a_n^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + L$, o equivalentemente,

$$a_n < (\varepsilon + L)^n, \text{ para todo } n \geq m$$

y como $\sum_{n=1}^{+\infty} (\varepsilon + L)^n$ es una serie geométrica convergente (pues su razón es $\varepsilon + L < 1$), del criterio de comparación se concluye que la serie dada diverge.

b) Sea $\lim_n (a_n)^{\frac{1}{n}} = L > 1$, dado un $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que

$$|a_n^{\frac{1}{n}} - L| < \varepsilon,$$

en particular, si elegimos $L - \varepsilon > 1$ resulta que

$$a_n > L - \varepsilon > 1, \quad \text{para todo } n \geq m,$$

entonces $\lim_n a_n \neq 0$. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Una versión más general del teorema anterior es dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.27.

Suponga que existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo entero n , con $n > m$ se cumple que $a_n \geq 0$, y sea $L = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$, entonces se verifica:

a) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o $L = +\infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 254. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Solución

Aplicando el criterio de la raíz,

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_n \frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

por lo tanto, la serie dada converge.

Ejemplo 255. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Solución

Aplicando el criterio de la raíz resulta que la serie converge, pues

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Ejemplo 256. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$.

Solución

Aplicando el criterio de la raíz resulta que la serie converge, pues

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{e}{3} < 1.$$

Ejemplo 257. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$, entonces

$$L = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1,$$

luego, del criterio de la raíz resulta que la serie converge.

Ejemplo 258. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{2^n + 1}{3^n + 1}$, entonces

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{3^n + 1}} = \frac{\sqrt[n]{2^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}}{\sqrt[n]{3^n \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)}} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3^n}}}.$$

Luego,

$$L = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Por lo tanto, la serie converge.

Ejemplo 259. Halle los valores de a para los cuales la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} 3^n \left(1 - \frac{a}{2n}\right)^{n^2}$ converge.

Solución

Observe primero que $1 - \frac{a}{2n} > 0$ para todo $n \geq 3$ implica que $a < 6$.

Por otro lado, aplicando el criterio de la raíz,

$$L = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 3 \lim_n \left(1 - \frac{a}{2n}\right)^n = 3e^{-\frac{a}{2}}.$$

se obtiene que la serie dada converge si $\frac{3}{e^{\frac{a}{2}}} < 1$, es decir si $a > 2 \ln 3$.

Luego, la serie dada converge si $2 \ln 3 < a < 6$.

Ejercicios: Sección 3.3

1. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + \operatorname{sen} n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + 1}{n^6 + \ln n + 3}$$

$$d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{e^{2n} + 1}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 + n^2}{1 + n^3} \right)^2$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{4n + 1} \right)^n$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(1 + n)}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx$$

$$j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$$

$$k) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 - 8n}{n^4 + 2n + 1}$$

$$l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^3}{4^n + n^4}$$

$$m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$n) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$o) \sum_{n=1}^{+\infty} 6^n \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

2. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$a) 1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} + \dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}$$

$$c) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$$

3. Si $\alpha > 0$, analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$ en función de α .

4. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha n)^n}{n!}$ para valores de $\alpha \neq \frac{1}{e}$
5. Analice la convergencia de la siguiente serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. En caso que lo sea, halle su suma.
6. Usando el criterio de la integral analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\arctan(2n)}}{4n^2 + 1}$

7. Halle el mayor valor entero que toma el valor de p para que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

sea convergente. Encuentre la suma de la serie para dicho valor de p .

8. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$
9. Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$
10. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 6^n}{2^n + 7^n}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \ln n}$

11. Encuentre todos los valores para lo cuales la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a \frac{\ln n}{n}\right)^n$ converge.

3.4. Criterios de convergencia en el caso general

En esta sección no se impone ninguna condición respecto de los términos de la sucesión a_n que generan la serie.

Teorema 3.28 (Criterio de comparación).

Suponga que existe un entero positivo m tal que

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Si las series $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge.

Prueba.

De la condición del problema tenemos que,

$$0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n, \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Como las series $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - b_n)$ también converge.

Luego, por el teorema de comparación para series de términos no negativos, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ converge. Finalmente, de la relación

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n - b_n) + b_n],$$

se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Una **serie alternante** es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

donde $b_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$.

Teorema 3.29 (Criterio de Leibniz o criterio de las series alternantes).

Sea $(b_n)_{n \geq 1}$ una sucesión verificando la siguientes condiciones

- a) $b_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$,
- b) $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \geq 1$,
- c) $\lim_n b_n = 0$,

entonces la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge.

Ejemplo 260. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$.

Solución

Se trata de una serie alternante, donde $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Es claro que $b_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Veamos ahora que $(b_n)_n$ sea una sucesión decreciente, para lo cual definimos la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}, \quad \text{para todo } x \geq 1,$$

entonces

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0, \quad \text{para todo } x > 1$$

es decir, f es una función decreciente en $[1, \infty[$. Luego, $(b_n)_n$ es una sucesión decreciente.

Finalmente, como $\lim_n b_n = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$, del criterio de las

series alternantes se concluye que la serie dada converge.

Ejemplo 261. Analice la convergencia de la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+2 \ln n}{3\sqrt{n}}$.

Solución

Sea $b_n = \frac{1+2 \ln n}{3\sqrt{n}}$, se cumple que $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

Por otro lado, sea $f(x) = \frac{1+2 \ln x}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$, entonces

$$f'(x) = \frac{3-2 \ln x}{3\sqrt{x}} < 0 \text{ si } x > e^{\frac{3}{2}}.$$

Luego, la sucesión es monótona decreciente si $n > e^{\frac{3}{2}}$. Finalmente, usando la regla de L'Hospital se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

entonces

$$\lim_n b_n = \lim_n \left(\frac{2 \ln n}{3\sqrt{n}} + \frac{1}{3\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Por lo tanto, del criterio de las series alternantes, la serie converge.

Convergencia absoluta y condicional

Dada la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Diremos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Diremos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es **condicionalmente convergente** si

i) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge y

ii) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

El siguiente resultado da condiciones suficientes para garantizar cuando una serie de términos arbitrarios es convergente.

Teorema 3.30.

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Prueba.

Se sabe que,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|,$$

luego,

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, pues la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente, del criterio de comparación, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. Finalmente, escribiendo $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ resulta que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Es importante mencionar que el recíproco del teorema 3.30 no se cumple, esto es, si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge no podemos asegurar nada de la naturaleza de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, por ejemplo, anteriormente se ha visto que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, sin embargo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Ejemplo 262. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$.

Solución

Note que los términos de la sucesión $a_n = \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$ que genera la serie tiene términos positivos y negativos, entonces procedemos analizar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(n)}{n^3} \right|$. Asimismo, para todo $n \geq 1$ se cumple

$$\left| \frac{\text{sen}(n)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3},$$

y como la p -serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, del criterio de comparación para series de términos no negativos, obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(n)}{n^3} \right|$ converge, es decir, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, del teorema 3.30, la serie converge.

Ejemplo 263. Halle la suma de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{6n+5}{9n^2+15n+4}$.

Solución

El factor que acompaña a la expresión $(-1)^n$ puede descomponerse en la forma siguiente

$$\frac{6n+5}{9n^2+15n+4} = \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+1},$$

entonces el término n -ésimo de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$ toma la forma siguiente

$$s_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\frac{1}{3j+4} + \frac{1}{3j+1} \right] = 1 - \frac{(-1)^n}{3n+4},$$

luego, $\lim_n s_n = 1$, es decir, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{6n+5}{9n^2+15n+4} = 1$

Ejemplo 264. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n (n+1)^2}$.

Solución

Sea $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{5^n (n+1)^2}$, entonces

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{5^{n+1} (n+2)^2} \frac{5^n (n+1)^2}{(-1)^{n+1}} \right| = \frac{1}{5} < 1,$$

luego, del criterio del cociente se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{5^n (n+1)^2} \right|$ converge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)^2}$ es absolutamente convergente y por consiguiente converge.

Ejemplo 265. Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}}{n^2+n+1}$ es absolutamente convergente.

Solución

Observe que para todo $n \geq 1$ se cumple

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}}{n^2+n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \right| = \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

y como la serie $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie es absolutamente convergente.

Ejemplo 266. Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + 1}$ es condicionalmente convergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + 1}$, analicemos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n + 1}$ y para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$\frac{1}{\ln n + 1} \geq \frac{1}{n}$$

y como la serie armónica diverge, del criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Ahora analicemos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + 1}$. Sea $b_n = \frac{1}{\ln n + 1}$ es claro que la sucesión $(b_n)_n$: tiene todos sus términos positivos, decrece y además cumple que $\lim_n b_n = 0$, entonces, del criterio de las series alternantes, la serie converge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ es condicionalmente convergente.

Ejemplo 267. Analice si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\sqrt{n} - 3)^2}$ converge condicionalmente o absolutamente.

Solución

Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{(2\sqrt{n} - 3)^2}$. Analizando la serie $\sum_{n=4}^{+\infty} |a_n|$. Para ello usamos el criterio de comparación por límite

$$L = \lim_n \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_n \frac{1}{(2\sqrt{n} - 3)^2} \cdot \frac{n}{1} = \lim_n \frac{1}{(2 - \frac{3}{\sqrt{n}})^2} = \frac{1}{4}.$$

Y como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es la serie armónica, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Por otro lado, al analizar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ usando el criterio de las series alternantes se obtiene que dicha serie es convergente. Por lo tanto, se concluye que la serie dada es condicionalmente convergente.

Ejemplo 268. Demuestre que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(\ln n)}{1 + \sqrt{\ln n}}$ converge condicionalmente.

Solución

Primero demostraremos que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} |(-1)^n b_n|$, donde $b_n = \frac{\ln(\ln n)}{1 + \sqrt{\ln n}}$ es divergente. En efecto,

$$|(-1)^n b_n| = \frac{\ln(\ln n)}{1 + \sqrt{\ln n}} \geq \frac{1}{1 + \sqrt{\ln n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\ln n}} \geq \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$$

y como la p -serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, entonces del criterio de comparación se obtiene que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} |(-1)^n b_n|$ diverge.

Ahora demostraremos que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge. En efecto, es claro que la sucesión $(b_n)_n$ tiene las siguientes propiedades

i) $b_n \geq 0$ para todo $n \geq 2$.

ii) $(b_n)_n$ es una sucesión monótona decreciente, pues si $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{1 + \sqrt{\ln x}}$, entonces

$$f'(x) = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \right) - \ln(\ln x)}{2x(\ln x)^{\frac{2}{3}}(1 + \sqrt{\ln x})^2} < 0 \quad \text{si } x > e^{e^4}$$

iii) $\lim_n b_n = 0$.

Luego, del criterio de las series alternantes se concluye que la serie es convergente. Fusionando los resultados obtenidos queda demostrado que la serie dada es condicionalmente convergente.

Teorema 3.31.

En una serie absolutamente convergente la suma no depende del orden de sus términos.

Esta propiedad no es propia de las series condicionalmente convergentes.

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, si existe una función $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva tal que $b_n = a_{\Phi(n)}$.

Corolario 3.32.

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces cualquier serie que se obtiene por una reordenación de sus términos es absolutamente convergente y tiene la misma suma.

Este resultado ya no es válido para series que son condicionalmente convergente, se demuestra que si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es condicionalmente convergente, entonces

existen funciones biyectivas $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\Phi(n)}$ diverge.

Ejercicios: Sección 3.4

1. Analice la convergencia absoluta o condicional de cada una de las siguientes series.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\ln n)^2}{n}$$

$$g) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3 + \cos n)}{n (\ln n)^{\frac{3}{2}}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1 + 4^n)}{7n^2 - 1}$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + n + 1}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5^n}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{-2 + \ln n}{\sqrt{n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$j) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} n}{1 + \ln^2 n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})}{n^p}, \quad p > 1$$

$$k) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2 + \sqrt{n}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n + 2}$$

2. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^{\frac{1}{2}} + 1)(n^{\frac{1}{3}} + 1)}$ converge condicionalmente.

3. Analice si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2 + 1}}$ es condicional o absolutamente convergente.

4. Halle la convergencia absoluta o condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

5. Analice la convergencia absoluta o condicional de las siguientes series.

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\ln n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2} + 1}{2^{n+3} + 5}$$

6. Analice si las siguientes series son absolutamente o condicionalmente convergentes.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(x + n\pi)^2} dx$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+2)}{3n^2+5}$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{3n^2-4}$$

3.5. Series de Potencias

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una **sucesión de funciones** $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una correspondencia que asigna a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ una función f_n . Es decir una sucesión de funciones es una función de la forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow F(I; \mathbb{R}) \\ n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

donde $F(I; \mathbb{R}) = \{g : I \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones con dominio común I entonces para cada $x \in I$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica.

Diremos que una sucesión de funciones $(f_n)_n$, donde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, **converge puntualmente** a una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si para cada $x \in I$, la sucesión numérica $(f_n(x))_n$ converge a $f(x)$, esto significa que para cada $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número natural n_0 que depende de x y de ε , es decir $n_0 = n_0(x; \varepsilon)$, tal que para cada $n > n_0$ se cumple

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

y escribiremos

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \quad \text{o simplemente} \quad \lim_n f_n = f.$$

En este caso, diremos que la sucesión $(f_n)_n$ es convergente, en caso contrario, es decir si tal límite no existe, diremos que es divergente.

Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones, A partir de ella podemos formar una nueva sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$ llamada **serie de funciones**, que no es más que la **sucesión de sumas parciales** definida de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = f_1 \\ S_2 = S_1 + f_2 = f_1 + f_2 \\ S_3 = S_2 + f_3 = (f_1 + f_2) + f_3 \\ \vdots \\ S_n = S_{n-1} + f_n = (f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n \\ \vdots \end{array} \right.$$

y escribiremos $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ para hacer referencia a una serie de funciones. Al término f_n se le llama **término general de la serie**.

Si la sucesión $(S_n(x))_{n \geq 1}$, donde $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$, converge a $f(x)$, diremos que la **serie converge** y que su suma es la función $f(x)$. Si $(S_n(x))_{n \geq 1}$ diverge, diremos que la serie diverge.

En esta sección restringiremos nuestro estudio a series de la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

Se llama **series de potencias** centrada en cero a la serie generada por la sucesión $(c_n x^n)_{n \geq 0}$ y se denota por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

donde las constantes c_n son llamadas coeficientes de la serie, es decir, una serie de potencias es una serie generada por la sucesión de funciones $(c_n x^n)_{n \geq 0}$, donde la sucesión de sumas parciales $(S_n(x))_{n \geq 0}$ es definida por

$$\begin{aligned} S_0(x) &= c_0 \\ S_1(x) &= c_0 + c_1 x \\ &\vdots \\ S_n(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^n c_k x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que para cada n , la n -ésima suma parcial de una serie de potencias es un polinomio de grado n .

Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

en esta sección responderemos las siguientes preguntas:

- ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?
- ¿Cuando la serie converge y a qué función converge?

Una respuesta parcial al primer problema planteado es dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.33 (Teorema de Abel). Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

- Si la serie de potencias converge para algún valor de $x = a$, entonces ella converge absolutamente para todo valor de x con $|x| < |a|$.
- Si la serie de potencias diverge para algún valor de b , entonces la serie diverge para cada x con $|x| > |b|$.

El teorema de Abel nos dice que si a es un punto de convergencia de la serie de potencias entonces ella converge absolutamente en todos los puntos del intervalo abierto $] -|a|; |a| [$. Mientras que si b es un punto de divergencia, entonces la serie diverge en todos los puntos fuera del intervalo cerrado $[-|b|; |b|]$.

Es natural preguntarnos si siempre es posible hallar un número real $R > 0$ donde la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge absolutamente en $] -R; R [$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-R; R]$. Las respuestas a estas preguntas la da el siguiente teorema.

Teorema 3.34. Para cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ sucede una de las tres posibilidades siguientes

- La serie converge absolutamente cuando $x = 0$. En tal caso, convenimos que su radio de convergencia es $R = 0$.
- La serie converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$. En tal caso, convenimos que su radio de convergencia es $R = +\infty$
- Existe un número real positivo R tal que la serie converge absolutamente en todos los puntos del intervalo abierto $] -R; R [$ y diverge en todos los puntos exteriores del intervalo cerrado $[-R; R]$. En los puntos extremos $-R$ y R la serie puede ser convergente o divergente.

En los siguientes ejemplos veremos que el criterio del cociente es usado para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.

Ejemplo 269. Determine el conjunto de puntos donde la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ converge.

Solución

Sea $a_n = n! x^n$, entonces

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_n (n+1)|x| = +\infty, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Luego, del criterio del cociente se deduce que la serie diverge para cada $x \neq 0$ y converge solo para $x = 0$. Por lo tanto, el conjunto donde la serie de potencias converge es $I_R = \{0\}$. En este caso, el radio de convergencia es $R = 0$.

Ejemplo 270. Encuentre el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

Solución

Sea $a_n = \frac{x^n}{n!}$, entonces

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Luego, por el criterio del cociente, la serie converge para cualquier valor de x , esto significa que el conjunto donde la serie converge es \mathbb{R} . En este caso, su radio de convergencia es $R = +\infty$.

Ejemplo 271. Halle el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \text{ converge.}$$

Solución

Sea $a_n = \frac{n!}{n^n} x^n$, entonces

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n! x^n} \right| = \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n |x| = \frac{|x|}{e}.$$

Luego, por el criterio del cociente, tenemos que la serie de potencias converge absolutamente si $\frac{|x|}{e} < 1$, esto es converge absolutamente en el intervalo $] -e; e[$ y diverge si $\frac{|x|}{e} > 1$, es decir, diverge fuera del intervalo cerrado $[-e, e]$.

Cuando $x = e$ se tiene la serie numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$, luego si $a_n = \frac{n!}{n^n} e^n$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{1+n} \right)^n e^n = \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} > 1,$$

pues $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, es decir, $(a_n)_n$ es una sucesión de términos positivos creciente. Por lo tanto, $\lim_n a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$ diverge. Un razonamiento similar se procede para el caso cuando $x = -e$, obteniéndose que la serie correspondiente es divergente. Luego, el conjunto pedido es el intervalo $] -e; e [$.

El radio R del intervalo descrito en el teorema anterior es llamado **radio de convergencia** y al conjunto de puntos donde la serie de potencias converge se le denomina **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

El teorema 3.34 garantiza que el radio de convergencia de una serie de potencias siempre existe.

En los ejemplos anteriores se ha visto que el criterio del cociente permite hallar el radio de convergencia de una serie de potencias. El siguiente resultado proporciona otra forma de encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias usando sus coeficientes.

Teorema 3.35. *Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, siendo $c_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces su radio de convergencia R puede ser calculado por cualquiera de las expresiones siguientes:*

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{ó} \quad R = \frac{1}{\lim_n |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

siempre que estos límites existan.

Observación 38.

Si reemplazamos x por $x - x_0$ en la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ obtenemos una serie de potencias en $x - x_0$, esto es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Esta nueva serie de potencias tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, y su intervalo de convergencia se obtiene al trasladar el intervalo de

convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ a x_0 . Por ejemplo, si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tiene intervalo de convergencia $] -R; R[$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$ tiene como intervalo de convergencia el intervalo $]x_0 - R; x_0 + R[$.

Ejemplo 272. Halle el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n$.

Solución

Primero hallamos su radio de convergencia, para esto sea $c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$, entonces del teorema 3.35 tenemos

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right) = \frac{3}{2},$$

luego, del teorema 3.34 se concluye que la serie dada converge absolutamente en el intervalo abierto $] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$ y diverge fuera del intervalo cerrado $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right]$.

Cuando $x = \frac{3}{2}$ tenemos la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, donde

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{9}{18} \right) \left(\frac{15}{1} \right) \cdots \left(\frac{6n-3}{6n-4} \right),$$

como cada término es mayor que 1, entonces $\lim_n a_n \neq 0$, luego la serie diverge.

En forma similar, se demuestra que la serie numérica obtenida cuando $x = -\frac{3}{2}$ diverge.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right[$.

Ejemplo 273. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x + 1)^n$.

Solución

Es claro que $c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \right| = \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4,$$

luego, la serie de potencias converge absolutamente en el intervalo $] - 5; 3[$ y diverge fuera del intervalo $[-5; 3]$.

Por otro lado, observe que

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n} > \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Por lo tanto, cuando $|x + 1| = 4$ se tiene

$$\left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x + 1)^n \right| > \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 4^n = 1$$

Luego, en $x = -5$ y $x = 3$ el término general de las series numéricas correspondientes no tienden a cero, esto implica que dichas series divergen. En conclusión, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $] - 5; 3[$.

Ejemplo 274. Halle el radio e intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x + 4)^n}{\sqrt{3n + 4}}$.

Solución

Primero expresaremos la serie de potencias en su forma estándar, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x + 4)^n}{\sqrt{3n + 4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{3n + 4}} \left(x + \frac{4}{3}\right)^n,$$

donde $c_n = \frac{3^n}{\sqrt{3n + 4}}$, entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{3^n}{\sqrt{3n + 4}} \frac{\sqrt{3n + 7}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

De acuerdo con el teorema 3.34 la serie dada converge absolutamente en el intervalo $] -\frac{5}{3}, -1[$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-\frac{5}{3}, -1]$. Faltando evaluar la convergencia de la serie en los extremos de dicho intervalo, es decir, en $-\frac{5}{3}$ y en -1 .

Cuando $x = -\frac{5}{3}$ la serie de potencias dada se reduce a la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n + 4}}$$

la cual, de acuerdo con el criterio de las series alternantes, converge, pues $\left(\frac{1}{\sqrt{3n + 4}}\right)_{n \geq 0}$ es una sucesión de términos positivos, decreciente y

$\lim_n \frac{1}{\sqrt{3n+4}} = 0$. Asimismo, cuando $x = -1$, la serie dada se reduce a la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

la que, de acuerdo al criterio de comparación por límite, resulta ser divergente, pues al elegir $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ se tiene que

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{n}{3n+4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,$$

de esta manera, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ diverge.

Luego, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $\left[-\frac{5}{3}; -1\right]$.

Ejemplo 275. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n,$$

luego, $c_n = \frac{1}{n}$ entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1,$$

entonces la serie dada es absolutamente convergente en el intervalo $\left] -\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right[$ y diverge fuera del intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]$, faltando analizar la serie cuando $x = -\frac{1}{3}$ y $x = \frac{5}{3}$.

Cuando $x = -\frac{1}{3}$ tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Cuando $x = \frac{5}{3}$ tenemos la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ la cual es divergente. Por lo

tanto, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $\left] -\frac{1}{3}; \frac{5}{3} \right[$.

Ejemplo 276. Dada la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2x+3)^n}{n \ln n}$, halle su radio e intervalo de convergencia

Solución

Primero le damos la forma estándar de una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2x+3)^n}{n \ln(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n \ln(n)} \left(x + \frac{3}{2}\right)^n,$$

donde $c_n = \frac{(-2)^n}{n \ln(n)}$, entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{(-2)^n}{n \ln(n)} \frac{(n+1) \ln(n+1)}{(-2)^{n+1}} \right| = \lim_n \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right) = \frac{1}{2}.$$

De acuerdo con el teorema 3.34, la serie es absolutamente convergente en el intervalo $] -2; -1[$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-2; -1]$. Analizando ahora la convergencia de la serie en los extremos de dicho intervalo, es decir, en -2 y en -1 .

Cuando $x = -2$ la serie de potencias dada se reduce a la serie numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ la cual, de acuerdo con el criterio de la integral, diverge.

Asimismo, cuando $x = -1$ la serie dada se reduce a la serie numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$, la cual converge, según el criterio de las series alternantes.

Luego, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $] -2; -1]$.

En esta sección nos hemos concentrado en determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias, a continuación encontraremos la suma de algunas series de potencias importantes.

Teorema 3.36. Si $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, entonces la función

$$f : I_R(0) =] - R; R [\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

tiene las siguientes propiedades

- a) Es continua en $I_R(0)$.
- b) Es derivable en cada punto de su intervalo de convergencia $I_R(0)$ y además cumple

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1},$$

siendo esta nueva serie de potencias convergente en el intervalo $I_R(0)$.

- c) $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ es una antiderivada de f en $I_R(0)$, siendo esta nueva serie de potencias convergente en el intervalo $I_R(0)$.

- d) f es integrable en cualquier intervalo cerrado $[c; d] \subset I_R(0)$ y además cumple

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} (d^{n+1} - c^{n+1}).$$

Observación 39.

El teorema 3.36 nos dice que una serie de potencias puede ser derivada e integrada término a término y el radio de convergencia de la serie obtenida por derivación e integración es el mismo que el de la serie de potencias original.

Ejemplo 277. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$, encuentre su radio de convergencia, luego derive e integre.

Solución

Es claro que $c_n = n^2$, entonces

$$R = \lim_n \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

es decir, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$. Luego, por el teorema 3.36, dicha serie converge absolutamente en $I_R(0) =] - 1; 1[$, esto es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = f(x), \text{ para } x \in I_R(0),$$

luego,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^3 x^n.$$

Asimismo,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}.$$

Teorema 3.37.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, si $|x| < 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Prueba.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ es una serie geométrica y, como fue probado anteriormente, converge a $\frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$ y diverge si $|x| \geq 1$.
2. Sea $c_n = \frac{1}{n!}$, entonces $R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = +\infty$, luego la serie converge absolutamente en todo \mathbb{R} . Suponga que ella converge a la función $y = f(x)$, es decir $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces derivando obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = y$$

de manera que para cada x se tiene

$$\frac{dy}{dx} = y$$

cuya solución general es de la forma $y = k e^x$, y como $y(0) = 1$, entonces $k = 1$. Por lo tanto, $y = f(x) = e^x$.

Observación 40.

A partir del teorema 3.37 pueden obtenerse nuevas series de potencias:

- a) Si sustituimos $-x$ por x en la parte (1) del teorema 3.37 obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

cuyo radio de convergencia sigue siendo $R = 1$, pues $|-x| < 1$.

- b) Si sustituimos $4x$ por x en la parte (1) del teorema 3.37 obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n = \frac{1}{1-4x}$$

cuyo radio de convergencia es $R = \frac{1}{4}$, pues $|4x| < 1$.

- c) Si en la parte (1) del teorema 3.37 integramos obtenemos

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

es decir,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \text{ cuando } |x| < 1.$$

- d) Si en 1) derivamos, obtenemos $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ para todo $|x| < 1$ o,

$$\text{equivalentemente, } \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ para } |x| < 1.$$

- e) Si en la parte 2) del teorema 3.37 reemplazamos x^2 por x , obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 278. Halle la suma de la siguiente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{4^n}\right) x^n$.

Solución

La serie dada puede ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{4^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(-\frac{x}{4}\right)^n.$$

Por otro lado, se sabe que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge absolutamente a $\frac{1}{1-x}$ en $|x| < 1$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

entonces por el teorema 3.36 podemos derivar esta serie obteniendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

de manera equivalente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Por lo tanto, usando esta última relación tenemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^2}$$

para $\left|-\frac{x}{4}\right|$ si y solo si $|x| < 4$.

Ejemplo 279. Halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Solución

Sea $c_n = \frac{1}{n}$, entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1,$$

entonces la serie converge absolutamente a una función $f(x)$ para $|x| < 1$, es decir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f(x), \text{ para cada } |x| < 1.$$

Luego, del teorema 3.36, podemos derivar término a término

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[$$

de esta manera $f(x)$ es una antiderivada de $\frac{1}{1-x}$, es decir,

$$f(x) = -\ln(1-x) + C$$

y como $f(0) = 0$ se tiene que $C = 0$, entonces $f(x) = -\ln(1-x)$ para $|x| < 1$.

Ejemplo 280. Expresar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ en términos de funciones

elementales para $0 < |x| < 1$ y calcular la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{para cada } |x| < 1,$$

entonces integrando obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad \text{para cada } |x| < 1,$$

reemplazando esto en la expresión anterior resulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x),$$

particularmente si $x = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = 1 - 2 \ln 2.$$

Ejemplo 281. Si $f(x) = \ln(1+x)$, halle la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Solución

Se sabe que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in]-1; 1[.$$

Integrando respecto a x obtenemos

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Ejemplo 282. Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)} = (x+1) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)$,

para cada $|x| < 1$.

Solución

Busquemos primero el radio de convergencia de esta serie.

Como $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$, entonces

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1,$$

luego, la serie converge absolutamente en el intervalo $] -1; 1 [$. Supongamos que $f(x)$ sea la suma de esta serie, esto es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$$

Del teorema 3.36 esta serie puede derivarse e integrarse término a término y su intervalo de convergencia no cambia, de esta manera

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \text{si } |x| < 1$$

y volviendo a derivar obtenemos

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}, \quad \text{si } |x| < 1$$

Al integrar esta última relación tenemos que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

e integrando esa expresión resulta que

$$f(x) = \int_0^x [\ln(1+x) - \ln(1-x)] dx = (x+1)\ln(x+1) + (1-x)\ln(1-x), \text{ para cada } |x| < 1$$

Ejemplo 283. Exprese la integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ como una serie numérica.

Solución

Sea $f(x) = \ln(1+x)$, entonces $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ para $|x| < 1$,

integrando esta última expresión resulta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2} \Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 284. Halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$.

Solución

Aplicamos el criterio del cociente para hallar su radio de convergencia

$$L = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \left| \frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)} x^{4n+3} \right| \left| \frac{4n}{(-1)^n x^{4n-1}} \right| = |x|^4,$$

es decir la serie es convergente si $|x| < 1$. Suponga que f sea su suma, esto es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}, \text{ para } |x| < 1,$$

entonces

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{4n}, \text{ para cada } |x| < 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x f(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{4n-1} \\ &= -x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^4)^{n-1} \\ &= -x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n \\ &= -\frac{x^3}{1+x^4}. \end{aligned}$$

Integrando

$$x f(x) = \int_0^x -\frac{t^3}{1+t^4} dt = \frac{-\ln(1+x^4)}{4},$$

entonces,

$$f(x) = -\frac{\ln(1+x^4)}{4x}.$$

Desarrollo de una función en series de potencias

En la sección anterior se ha visto que si $R > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$, entonces ella converge absolutamente en el intervalo

$I_R(x_0) =]x_0 - R; x_0 + R[$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$$

Luego, por el teorema 3.36 podemos derivar la expresión anterior resultando

$$f^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1},$$

de manera que $f^{(1)}(x_0) = c_1$.

Volviendo a derivar la serie obtenida resulta

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2},$$

entonces, $f^{(2)}(x_0) = 2!c_2$.

Nuevamente derivando esta nueva serie se obtiene

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3},$$

entonces, $f^{(3)}(x_0) = 3!c_3$.

Procediendo de manera inductiva se obtiene que $f^{(n)}(x_0) = n!c_n$, es decir

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

De esta manera, la serie de potencias dada puede ser escrita de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

En esta sección nos planteamos el problema inverso, es decir, dada una función, ¿en qué casos existe una serie de potencias cuya suma sea la función dada?

Sea f una función que tiene derivada de todos los ordenes en el punto x_0 . Se llama **series de Taylor** de f en x_0 a las series de potencias definida por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Particularmente, si $x_0 = 0$, las series de Taylor obtenidas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

reciben también el nombre de **series de Maclaurin**.

Observe que la sucesión de sumas parciales de esta serie de potencias es la sucesión $(P_n(x))_n$, definida por

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y es llamado **polinomio de Taylor** de grado n para f alrededor del punto x_0 .

Ejemplo 285. Halle la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ alrededor de cero.

Solución

Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, luego $f^{(n)}(0) = 1$. De esta manera, la serie de Taylor asociada a f alrededor del punto $x = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Luego, si $c_n = \frac{1}{n!}$, entonces $R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = +\infty$, es decir la serie de Taylor asociada a f alrededor del punto $x = 0$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

¿Hacia dónde converge esta función? el siguiente teorema brinda condiciones suficientes para garantizar cuando la serie de Taylor asociada a una función converge dicha función.

Teorema 3.38. Sea f de clase C^∞ ³ en $I_R(x_0) =]x_0 - R; x_0 + R[$, para algún $R > 0$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{con } x \in I_R(x_0),$$

si y solo si para cada $x \in I_R(x_0)$ se cumple que $\lim_n R_n(x) = 0$, donde $R_n(x)$ es el resto de la fórmula de Taylor definido por

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}, \quad \text{para algún } z \text{ entre } x \text{ y } x_0.$$

Ejemplo 286. Demuestre que la serie de Taylor asociada a la función $f(x) = e^x$ alrededor del punto cero converge a $f(x)$.

Solución

En efecto, en el ejemplo anterior se ha visto que la serie de Taylor asociada a f

$$\text{es } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

El resto de la fórmula de Taylor es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!} x^{n+1}, \quad \text{para algún } z \text{ entre } x \text{ y } 0.$$

³Sea I un intervalo abierto. Diremos que una función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ sobre I si sus derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas sobre I .

Luego,

$$|R_n(x)| = \frac{e^z}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde K es una cota superior de e^z .

Entonces, demostrar que $\lim_n R_n(x) = 0$ se reduce a probar que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

sea convergente, pues en tal caso se tiene que $\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Demostraremos que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ es convergente, en efecto, sea

$$a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ entonces}$$

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1,$$

luego, del criterio del cociente, resulta que la serie converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 287. Halle la serie de Taylor de la función $f(x) = \cos x$ alrededor del punto cero y pruebe que converge a f .

Solución

Se sabe que la función f es de clase C^∞ sobre \mathbb{R} , además se cumple

$$f^{(0)}(x) = \cos x, \quad \text{entonces} \quad f^{(0)}(0) = 1,$$

$$f^{(1)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad \text{entonces} \quad f^{(1)}(0) = 0,$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad \text{entonces} \quad f^{(2)}(0) = 1,$$

$$f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{entonces} \quad f^{(3)}(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad \text{entonces} \quad f^{(4)}(0) = 1,$$

$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad \text{entonces} \quad f^{(5)}(0) = 0,$$

⋮

En general,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\operatorname{sen} x, & n = 4k + 1 \\ -\cos x, & n = 4k + 2 \\ \operatorname{sen} x, & n = 4k + 3 \end{cases},$$

entonces

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ 0, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ 0, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

Luego, la serie de Taylor asociada a f es

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{(2n!)}. \end{aligned}$$

Ahora veamos si esta serie converge a la función $f(x) = \cos x$. Según el teorema 3.38, bastará probar que $\lim_n R_n(x) = 0$, siendo $R_n(x)$ el resto de la fórmula de Taylor, esto es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ para algún } z \text{ entre } x \text{ y } 0.$$

En efecto,

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En el ejemplo anterior ya se demostró que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge, por lo tanto $\lim_n R_n(x) = 0$. Luego,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{(2n!)}.$$

Ejemplo 288.

a) Halle la serie de Taylor de la función $\frac{x^3 - 1}{x^2}$ centrada en 1.

b) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n}$.

Solución

a) Como

$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2} = x + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right)$$

y

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x - 1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x - 1)^n,$$

de manera que al derivar esta expresión resulta

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n (x - 1)^{n-1},$$

luego, sumando x en ambos miembros de la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x^2} &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(-1)^n (x - 1)^{n-1} + (-1 + 2(x - 1)) + x \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(-1)^n (x - 1)^{n-1} + 2(x - 1) + (x - 1) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(-1)^n (x - 1)^{n-1} + 3(x - 1). \end{aligned}$$

b) Haciendo $x = \frac{3}{2}$ en el resultado obtenido en la parte a) resulta

$$-\frac{4}{9} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$-\frac{2}{9} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n}.$$

Otra forma: $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$

Obteniendo las derivadas sucesivas de f ,

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 1 + (-1)^{(2)}2x^{-3}, & \text{entonces } f^{(1)}(1) &= 3 \\ f^{(2)}(x) &= (-1)^{(3)}2 \cdot 3x^{-4}, & \text{entonces } f^{(2)}(1) &= -6 \\ f^{(3)}(x) &= (-1)^{(3)}2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}, & \text{entonces } f^{(3)}(1) &= \frac{-256}{81} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{(n)}(n+1)!}{x^{n+2}}, & \text{entonces } f^{(n)}(1) &= (-1)^{(n+1)}(n+1)! \end{aligned}$$

Luego, la serie de Taylor asociada a la función f viene dada por

$$3(x-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n.$$

Ejemplo 289. Exprese la función $f(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t} dt$ en series de potencias y halle el radio de convergencia.

Solución

Se sabe que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Particularmente si $x = t^2$ obtenemos

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Luego,

$$1 - e^{-t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!},$$

entonces

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1 - e^{-t^2}}{t} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n!} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)n!}.$$

Ejemplo 290. Desarrolle en series de potencias de x la función $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ y determine su radio de convergencia.

Solución

Descomponiendo la función en fracciones,

$$\frac{x^2 + x}{(1-x)^3} = -\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3}$$

y usando propiedades de las series geométricas tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{para cada } |x| < 1,$$

entonces

$$-3f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

$$-\frac{2}{(x-1)^3} = -f''(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n.$$

Sumando estas tres expresiones obtenemos

$$\frac{x^2 + x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad \text{para cada } |x| < 1.$$

Ejemplo 291. Desarrolle en series de potencias la función $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Solución

Desarrollando la función en fracciones simples tenemos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x},$$

como

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

y

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n x^n,$$

obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [1 + (-1)^n 2^n] x^n.$$

Ejemplo 292. Represente la función $f(x) = \frac{x^2}{5+x^3}$ mediante series de potencias e indicar el intervalo de convergencia correspondiente.

Solución

Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Esta serie es absolutamente convergente para $|x| < 1$, es decir,

$$g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{5+x^3} = \frac{x^2}{5 \left[1 - \left(-\frac{x^3}{5} \right) \right]} = \frac{x^2}{5} g\left(-\frac{x^3}{5}\right) \\ &= \frac{x^2}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x^3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

y es convergente para $\left| -\frac{x^3}{5} \right| < 1$, esto es $|x| < \sqrt[3]{5}$.

Solución de ecuaciones diferenciales usando series de potencias

El hecho que una función tenga un desarrollo en series de potencias puede ser utilizado para hallar soluciones formales o convergentes de ecuaciones diferenciales, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 293. Resuelva, usando series de potencias, la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

Solución

Supongamos que la solución tiene un desarrollo en series de potencias, esto es,

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

entonces

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Luego, como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, debe satisfacerla, esto es

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$$

Para obtener la serie nula e igualar cada uno de los coeficientes a cero escribimos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0,$$

es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n] x^n = 0.$$

Luego,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^+.$$

Así por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{para } n = 0 : \quad c_2 &= -\frac{c_0}{2!} \\ \text{para } n = 1 : \quad c_3 &= -\frac{c_1}{3!} \\ \text{para } n = 2 : \quad c_4 &= -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!} \\ \text{para } n = 3 : \quad c_5 &= -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!} . \end{aligned}$$

En general, podemos escribir $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}$, expresión que corresponde a los coeficientes de las potencias pares y $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!}$, expresión que corresponde a los coeficientes de las potencias impares.

Luego, el desarrollo en series de potencias de la solución de la ecuación diferencial dada se puede escribir como

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Escrita de esta forma podemos concluir que cualquier solución de la ecuación diferencial dada es una combinación de las funciones f_0 y f_1 cuyos desarrollos en serie hemos encontrado, es decir,

$$y = c_0 f_0 + c_1 f_1 .$$

A continuación, a manera de ejemplo, determinaremos el radio de convergencia de la serie de potencias correspondiente a la función f_0 , para ello usaremos el

teorema 3.35,

$$\begin{aligned}
 R &= \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \\
 &= \lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)]!}} \right| \\
 &= \lim_n (2n+2)(2n+1) \\
 &= +\infty,
 \end{aligned}$$

es decir, $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Del ejemplo 287 tenemos que $f_0 = \cos(x)$. Similarmente, se prueba que $f_1(x) = \sin x$. Es decir, la solución de la ecuación diferencial es $y(x) = c_0 \sin x + c_1 \cos x$, lo cual encaja con el estudio de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y coeficientes constantes que se ha estudiado en cursos anteriores ⁴.

Observación 41.

- 1) La base de este método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias es suponer que la solución tiene un desarrollo en series de potencias que coincida con ella. Si en la ecuación diferencial $x^2 y' + 1 = 0$ asumimos que la solución tiene un desarrollo en series de potencias de la forma $y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ llegamos a un absurdo. Lo cual no quiere decir que la ecuación diferencial no tenga solución en una vecindad de cero, de hecho $y = \frac{1}{x}$ es solución.
- 2) No siempre el desarrollo en series de potencias de una función coincide con ella en un intervalo. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

tiene como desarrollo en series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ y sin embargo estas expresiones solo coinciden en el cero.

⁴Ver [1]

- 3) El siguiente ejemplo muestra que la solución de una ecuación diferencial obtenida por medio de series de potencias puede ser formal, es decir, no converger en un intervalo abierto.

La solución de la ecuación $x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0$ como series de potencias es $y = \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ la cual solo converge en $x = 0$. Luego, si la ecuación tiene solución ésta no tiene un desarrollo en series de potencias alrededor de cero.

El siguiente teorema establece bajo qué condiciones las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden obtenidas por medio de series de potencias son convergentes.

Teorema 3.39.

Sea x_0 un punto regular ⁵

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (3.4)$$

y sean c_0 y c_1 constantes arbitrarias, entonces

- Existe una única función analítica ⁶ de la ecuación diferencial en x_0 que es solución de la ecuación y que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = c_0$ y $y'(x_0) = c_1$.
- Si los desarrollos en series de potencias de los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ tienen un radio de convergencia R alrededor del punto x_0 , entonces el desarrollo en series de potencias de la solución tiene el mismo radio de convergencia.

Ejemplo 294. Resuelva la ecuación diferencial $y'' + xy' - 2y = 0$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución

Como 0 es un punto regular de la ecuación diferencial dada, es decir las funciones $P(x) = x$ y $Q(x) = -2$ tienen un desarrollo en series de potencias alrededor del punto 0, entonces por teorema 3.39 ella admite solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

⁵Punto regular de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden: Se llama así a un punto para el que las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ admiten un desarrollo en series de potencias convergente alrededor de dicho punto.

⁶Función analítica en x_0 : Diremos que una función f es analítica en x_0 si admiten un desarrollo en series de potencias convergente alrededor de x_0 .

entonces

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2},$$

luego como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria, ella debe satisfacerla, esto es

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Uniformizando los exponentes de x obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

y uniformizando el primer valor que toma el índice n obtenemos:

$$(2c_2 - 2c_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + n c_n - 2c_n] x^n = 0.$$

Luego, por el principio de identidad obtenemos,

$$c_2 = c_0, \quad c_{n+2} = \frac{(2-n)c_n}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como $y(0) = c_0 = 0$, entonces $y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots$, de donde se obtiene que $y'(0) = c_1 = 1$. Por lo tanto, la solución pedida es

$$y(x) = x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{3x^7}{7!} - \frac{3 \cdot 5 x^9}{9!} + \dots$$

Ejemplo 295. Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 2x^2 y = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solución

Como 0 es un punto regular de la ecuación diferencial dada, es decir las funciones $P(x) = -2x^2$ y $Q(x) = 0$ tienen un desarrollo en series de potencias alrededor del punto 0, entonces por teorema 3.39 ella admite solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

entonces

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2},$$

luego como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria, ella debe satisfacerla, esto es

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2c_n x^{n+2} = 0$$

Uniformizando los exponentes de x obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 2c_{n-2} x^n = 0$$

y uniformizando el primer valor que toma el índice n obtenemos:

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2c_{n-2}] x^n = 0.$$

Luego, por el principio de identidad obtenemos,

$$c_2 = c_3 = 0, \quad c_{n+2} = \frac{2c_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

De las condiciones dadas tenemos que $y(0) = c_0 = 1$ y $y'(0) = c_1 = 2$. Luego, al sustituir en la fórmula recursiva obtenemos,

$$c_4 = \frac{1}{6}, \quad c_5 = \frac{1}{5}, \quad c_6 = c_7 = 0, \quad c_8 = \frac{1}{168}, \quad \dots$$

Por lo tanto, la solución pedida es

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{168}x^6 + \dots$$

Ejercicios: Sección 3.5

1. Encuentre la serie de potencia para $f'(x)$ y $\int_0^x f(t) dt$ en cada caso.

$$a) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}$$

$$c) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

$$b) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$$

$$d) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$$

2. Encuentre una serie de potencias de x para cada una de las siguientes funciones determinando su radio de convergencia.

$$a) f(x) = \frac{1}{1+2x}$$

$$f) f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$$

$$b) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{x^2}{(1+2x^2)^2}$$

$$c) f(x) = \arctan(3x)$$

$$d) f(x) = \ln(1-2x^2)$$

$$h) f(x) = \int_0^x t e^{t^2} dt$$

$$e) f(x) = e^{-3x}$$

3. Encuentre el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} [(-1)^n + 3]^n x^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} (2x-1)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n-1}} x^n$$

4. Halle el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} (x-1)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} x^n$$

5. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando su respuesta.

i) Si $\lim_n a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ diverge para $x = 7$, entonces también diverge para $x = 10$.

iii) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ también diverge.

iv) Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ también converge.}$$

6. Halle la serie de Taylor asociada a las siguientes funciones alrededor del punto $x = 0$ y analice para qué valores de x dicha serie converge hacia f .

a) $f(x) = x^2 \cos x$

d) $f(x) = e^{-3x}$

b) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1 + 4x}$

f) $f(x) = \operatorname{arctan} x$

7. Suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - 2)^n$ converge en $x = 2$ y diverge en $x = 6$. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

i) La serie converge en $x = 1$.

ii) La serie diverge en $x = -3$.

8. Escriba la serie de potencias para las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(x + a)$, siendo $a > 0$

d) $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

e) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

c) $f(x) = \operatorname{arctan} x$

f) $f(x) = \frac{x}{1 + x - 2x^2}$

9. Si $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, halle la serie de potencias de x de la función $f(x)$ indicando su radio de convergencia.

10. Halle el dominio de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+4)^n}{\sqrt{3n+4}}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2n+1} (x+1)^n$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} x^n$

f) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^2} x^n$

11. Halle el conjunto más grande donde la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3} (2x+1)^n$ resulta ser convergente.

12. Usando series de potencias en x , halle la solución de la ecuación diferencial,

$$(x^2 - 1)y'' - 6xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

13. Usando series de potencias en x , halle la solución del problema de valores iniciales

$$2y'' - y' + (x+1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

De como respuesta la fórmula recursiva satisfecha por los coeficientes de la serie de potencias solución y los valores de sus cinco primeros términos.

14. Usando series de potencias en x , halle la solución de la ecuación diferencial ordinaria $y'' - 2y' + 2y = x$, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 1$

15. Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) - (x+1)y'(x) + x^2y(x) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 2$$

a) Encuentre la fórmula recursiva que satisfacen los coeficientes de la serie asociada a la solución de la ecuación diferencial dada.

b) Halle la solución de la ecuación diferencial exhibiendo sus seis primeros términos.

Solución a los ejercicios impares

Cap.1: Integrales de línea

Sección 1.1: Conceptos previos

1) $x = 2 + 2 \cos t$, $y = 2 - 2 \cos t$, $z = 2\sqrt{2} \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$

3) $x = \sqrt{5} \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$

5) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \cos t - \sin t$, $t \in [0; 2\frac{\pi}{2}]$

5)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

7) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \cos t - \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. La curva es regular.

9) $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$, $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$

Sección 1.2: Integrales de línea de campos escalares

1) a) $\frac{5}{27} \sqrt{10} - \frac{1}{54}$ e) $3\sqrt{35}$ i) $\approx 66,713$

c) $\frac{3}{2} \sqrt{13}$

g) $\frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)$

k) $24\sqrt{14}$

m) $540 \pi^4$

3) $\frac{\sqrt{5}}{2} \arctan(4\pi)$

5) $M = 2k\pi$, $\bar{x} = \frac{4}{\pi}$, $\bar{y} = 0$

7) $\frac{32}{5} \sqrt{2} - \frac{8}{5}$

9) 4

11) π

17) b) $f(x; y; z) = ye^{xz} + z + C$ c) 0

Sección 1.5: Teorema de Green

1) 1

3) 96π

5) $\frac{7}{6} \ln 4$

7) a) 2 c) 0 e) $\frac{1}{12}$

9) $\frac{3}{2}\pi$

11) $2\pi - 4$

13) $\arcsen\left(\frac{4}{5}\right)$

15) a) 2π b) 0

17) $\pi^2 - \pi + 2$

19) $\frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}$

21) $\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cap.2: Integrales de Superficies

Sección 2.3: Superficies regulares

- 1) a) $z = x^2 + y^2$, es un paraboloido.
c) $z = \frac{y}{2}$, es un plano.
e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, es una esfera de radio 2.
- 3) Es una superficie paramétrica diferenciable en \mathbb{R}^2 y es regular en todo \mathbb{R}^2 , excepto en el conjunto $\{(0; v) : v \in \mathbb{R}\}$.
- 5) $z = 2x - 1$.
- 7) La superficie admite plano tangente, y su ecuación es $y + z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 9) a) $\vec{r}(u; v) = (uv; u^2v + v; 4 - 4v + uv + u^2v)$, $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$
b) $\vec{N}(u; v) = (u^2 - 10u - 1; (u^2 + 4)v; (1 - u^2)v)$

Sección 2.4: Área de superficies

- 1) $2\pi a(a - b)$
- 3) $2\pi \left[\frac{3}{2}\sqrt{2} + \ln \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}} \right)^2 \right]$
- 5) $\frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3} - 1)$
- 7) $4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- 9) $16a^2$
- 11) 2π
- 13) $\frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$

Sección 2.5: Integral de Superficies de campos escalares

- 1) $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{a}{2}$, $\bar{z} = \frac{a}{4(2 - \sqrt{3})}$
- 3) $\frac{81}{2}\pi$

5) $\bar{z} = \frac{a}{8} \pi$

7) 9π

9) 4π

11) $\frac{\pi}{4} \left[(66)^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{66}}{2} - \frac{1}{8} \ln(4\sqrt{2} + \sqrt{33}) \right]$

13) $\left(0; 0; \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)$

15) 16π

Sección 2.6: Integral de superficies de campos vectoriales

1) $\frac{1}{2}$

3) 3π

5) a) $-\frac{7}{6}$

c) $\frac{5}{2}$

Sección 2.7: Teorema de Stokes

1) a) π

c) 0

3) 4π

5) 36π

9) 0

11) 6π

13) π

15) $-\frac{128}{27}$

17) $\frac{27\pi}{2}$

Sección 2.8: Teorema de la divergencia

1) 0.

3) a) 0

b) 0

5) 16π

7) 8

9) $\frac{81}{2}\pi$

11) $-\pi$

13) $2\sqrt{2}\pi$

Sección 3.4: Criterios de convergencia para series: Caso general

- 1) a) La serie converge condicionalmente g) La serie converge absolutamente
c) La serie converge absolutamente i) La serie converge condicionalmente
e) La p-serie converge absolutamente si $p > 1$ k) La serie converge condicionalmente
- 3) La serie converge absolutamente
- 5) La serie converge absolutamente

Sección 3.5: Series de Potencias

1. a) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1}$ y $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$
c) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^{n-1}$ y $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3(n+1)} x^{n+1}$
- 3) a) $R = \frac{1}{e}$ b) $R = \frac{1}{4}$
- 5) i) Falso iii) Verdadero
ii) Verdadero iv) Verdadero
- 7) i) Verdadero ii) Verdadero

9) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{n+1}, \quad R = 1$

11) $\left[\frac{-2}{3}; \frac{-1}{3} \right]$

13) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4},$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)} a_{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} (a_n + a_{n-1}).$$

Además,

$$y(x) = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{11x^4}{192} - \frac{7x^5}{640} + \dots$$

Bibliografía

- [1] APOSTOL T., *Calculus Vol.1 y 2*. Segunda edición. Editorial Reverté. España. 1982.
- [2] EDWARDS C., *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Tercera edición. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México. 1994.
- [3] FERNÁNDEZ C., *Cálculo diferencial d varias variables*. Primera Edición. Thomson. España. 2002.
- [4] FEYNMAN R., *Electromagnetismo y materia, Física*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. EE.UU. 1972.
- [5] LAGES E., *Analise real Vol.1*. Perú. 1997.
- [6] MARSDEN J., *Cálculo Vectorial*. Quinta Edición. Prentice Hall. México. 1998.
- [7] PITA C., *Cálculo vectorial*. Primera edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México. 1995.

Índice alfabético

- Área, 26
 - de superficie cilíndrica, 26
- Abierto, 15
- Binomio de Newton, 271
- Cambio de variable, 47
- Camino, 3
- Campo
 - gradiente, 41
 - conservativo, 71
 - escalar, 15
 - vectorial, 37
- Circulación, 61
- Conjunto
 - abierto, 15
 - conexo, 69
 - convexo, 82
 - frontera, 96
- Criterio de convergencia
 - de acotación, 293
 - de Cauchy, 289
 - de comparación, 294
 - de comparación por límite, 304
 - de comparación. Caso general, 320
 - de la integral, 297
 - de la raíz, 314
 - de las series alternantes, 321
 - del cociente, 309
- Curva, 4
 - v - coordenada, 139
 - regular por partes, 10
 - simple, 5
 - centro de masa de una, 26
 - cerrada, 7
 - cerrada simple, 7
 - coordenada, 139
 - ecuaciones paramétricas de una,
4
 - extremo final de una, 5
 - extremo inicial de una, 5
 - integral de línea de una, 43
 - masa de una, 26
 - momento de inercia de una, 26
 - momento estático de una, 26
 - orientación de una, 7
 - orientación positiva de una, 97
 - regular, 10
- Divergencia, 199–201
 - Teorema de la, 230
- Dominio, 96
- Flujo, 193
 - Integral de, 60
- Frontera, 96
- Fuerzas conservativas, 65
- Función
 - analítica, 357
 - monótona, 270
 - monótona creciente, 270
 - monótona decreciente, 270
 - potencial, 73
- Hélice, 7

-
- Integral de línea, 17, 43
 - de campo escalar, 18
 - de campo vectorial, 43
 - independencia de caminos, 71
 - Integral de superficie
 - de un campo escalar, 170
 - de un campo vectorial, 186
 - Interior, 139
 - Irrotacional, 204
 - Parametrización de una curva, 4
 - Partición regular, 16
 - Plano tangente, 146
 - Polinomio de Taylor, 348
 - Producto vectorial fundamental, 144
 - Propiedad Arquimediana, 254
 - Punto regular, 357
 - Radio de convergencia, 334
 - Rapidez, 6
 - Región, 96
 - compacta, 114
 - Reparametrización, 47
 - Rotacional, 203, 204
 - Serie, 276
 - geométrica, 282
 - telescópica, 280
 - Serie de funciones, 330
 - Series
 - p -series, 300
 - absolutamente convergentes, 322
 - alternantes, 320
 - armónicas generalizadas, 300
 - condicionalmente convergentes, 322
 - de Dirichlet, 300
 - suma de las, 276
 - término general de las, 276
 - Series de Maclaurin, 347
 - Series de funciones
 - convergencia puntual, 330
 - Series de potencias, 331
 - intervalo de convergencia, 334
 - radio de convergencia, 334
 - series de Maclaurin, 347
 - series de Taylor, 347
 - Series de Taylor, 347
 - Sucesión
 - acotada, 266
 - de números reales, 253
 - de funciones, 330
 - de números reales convergente, 253
 - de sumas parciales, 276
 - divergente, 253
 - Suma de Riemann, 17
 - Superficie, 11, 130
 - área de una, 157
 - de nivel, 166
 - diferencial de, 157
 - ecuaciones paramétricas de una, 131
 - orientable, 184
 - orientación de una, 184
 - parametrización de una, 130
 - regular, 144
 - regular por partes, 148
 - Teorema, 16
 - del valor medio para integrales, 16
 - Criterio de acotación, 293
 - Criterio de Cauchy, 289
 - Criterio de comparación, 294
 - Criterio de comparación por límite, 304
 - Criterio de comparación. Caso general, 320
 - Criterio de la integral, 297
 - Criterio de la raíz o de Cauchy, 314
 - Criterio de Leibniz o criterio de las series alternantes, 321

Criterio del cociente o de D'Alembert, 309
de Abel, 332
de Green, 98
de Green Generalizado, 115
de Jordan, 114
de la Divergencia, 230
de Stokes, 213
del sandwich, 268
Fundamental del Cálculo, 208
Trayectoria, 3, 65
Velocidad, 6

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN LOS TALLERES GRÁFICOS DE
TAREA ASOCIACIÓN GRÁFICA EDUCATIVA
PASAJE MARÍA AUXILIADORA 156 - BREÑA
Correo e.: tareagrafica@terra.com.pe
TELÉF. 332-3229 FAX: 424-1582
MARZO 2007 LIMA - PERÚ

Otras publicaciones

Apuntes de lógica modal

Oscar Trelles

Cálculo integral

Maynard Kong

Aspectos geométricos del análisis complejo

Alfredo Poirier

Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú

Plaza Francia 1164, Lima 1 – Perú

Teléfonos: (51 1) 330-7410, 626-6140

Fax: (51 1) 626-6156

feditor@pucp.edu.pe

www.pucp.edu.pe/publicaciones/fondo_ed/

Este texto es una introducción al cálculo vectorial y a las series de potencias y contiene todos los conceptos necesarios de un primer curso de cálculo vectorial para estudiantes de Ciencias e Ingeniería.

El objetivo general del libro es mostrar las matemáticas como una herramienta indispensable para plantear y solucionar problemas, así como una vía de exploración y descubrimiento de propiedades. Intenta dar respuestas a diferentes problemas partiendo de un lenguaje intuitivo que luego se formaliza para poder utilizar las herramientas matemáticas que permitan responder a preguntas como:

?Qué son las curvas, cómo se puede medir su longitud, localizar su centro de masa y calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de una curva?

?Qué son las superficies, cómo se puede medir su área, el volumen del sólido que limitan, cómo se puede ubicar su centro de masa?

?Qué son los campos de fuerzas?, cómo se puede medir la interacción entre dos partículas?

?Qué son los flujos?

?Qué son las sumas infinitas y cómo se aplican?

A lo largo del texto, las explicaciones, las preguntas y la interpretación física y gráfica tienen un papel central. Esto se ve reflejado en los ejemplos desarrollados y en los ejercicios propuestos.

El libro contiene:

Más de 290 ejercicios desarrollados.

Más de 200 gráficos, esquemas explicativos y observaciones.

Más de 365 ejercicios propuestos.



9 789972 427985