

Capítulo 0

Sucesiones y Series

Como es usual, \mathbb{R} designa el conjunto de números reales y \mathbb{R}^2 , al par conjunto de pares ordenados (x, y) , en donde x e y son números reales.

0.1 VALOR ABSOLUTO

0.1.1 DEFINICION. Si x es un número real se define:

$$|x| = \text{valor absoluto de } x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|0| = 0$

b) $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

c) $|\frac{2}{5}| = \frac{2}{5}$

d) $|-3| = 3$

0.1.2 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

(1) $|x| \geq 0$, para todo x

(2) $|x| = 0$, si y sólo si $x = 0$

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(4) $|x y| \leq |x| \times |y|$

(5) $|x| = \sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$

(6) $|x| < a$, si y sólo si $-a < x < a$

(7) $|x| \leq a$, si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

0.2 ALGUNAS FORMULAS TRIGONOMETRICAS

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

0.3 FORMULAS DE GEOMETRIA ANALITICA DEL PLANO

0.3.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. PUNTO MEDIO. Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, se define

$$d(P_1, P_2) = \text{distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$P = \text{punto medio de } P_1 \text{ y } P_2 = (a, b),$$

$$\text{donde } a = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ y } b = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

0.3.2 PENDIENTE DE UN SEGMENTO. Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos distintos, se define

$$m = \text{pendiente del segmento } P_1P_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

0.3.3 ECUACION DE LA RECTA. Una recta en el plano es el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que

$$Ax + By + C = 0$$

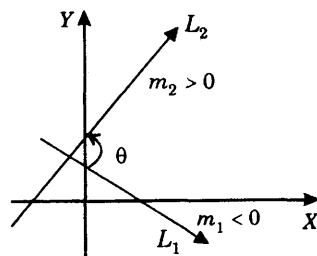
donde A, B y C son constantes, $A \times B \neq 0$.

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos distintos, entonces la ecuación de la recta L que pasa por P_1 y P_2 es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y la pendiente m de la recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La recta L es orientada en el sentido positivo de acuerdo a su pendiente m . (Ver figura)



0.3.4 ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

El ángulo θ entre dos rectas L_1 y L_2 , es el ángulo determinado por la dirección positiva de L_1 y la dirección positiva de L_2 y que cumple $0 \leq \theta \leq \pi$.

El ángulo θ es dado por $\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$

Las rectas son *perpendiculares* si $m_1 m_2 = -1$ y *paralelas* si $m_1 = m_2$.

0.3.5 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA. La distancia de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ a la recta $L: Ax + By + C = 0$ se define mediante la fórmula

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

0.4 FUNCIONES DE VARIABLE REAL A VALORES REALES

Una función $y = f(x)$ de variable real x con valores reales y , es una correspondencia que asigna a cada valor de x exactamente un valor de y .

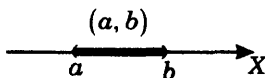
En el presente texto todas las funciones consideradas son definidas en números reales x y sus valores también son números reales. De esta manera, queda entendido que el término función será empleado solamente en este sentido.

Si $y = f(x)$, entonces y se llama la *variable dependiente* de la función y x , la *variable independiente*.

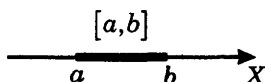
0.5 INTERVALOS

Si a y b son dos números tales que $a < b$, se definen los siguientes *intervalos*:

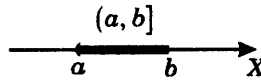
1) **Intervalo Abierto (a, b) .** (a, b) consiste de todos los números reales x tales que $a < x < b$.



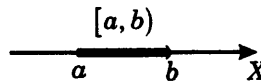
2) **Intervalo Cerrado $[a, b]$.** $[a, b]$ consiste de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$.



- 3) **Intervalo Semiabierto por la Izquierda $(a, b]$.** $(a, b]$ consiste de todos los números reales x tales que $a < x \leq b$.

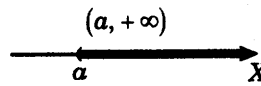


- 4) **Intervalo Semiabierto por la Derecha $[a, b)$.** $[a, b)$ consiste de todos los números reales x tales que $a \leq x < b$

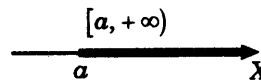


También se definen los siguientes intervalos:

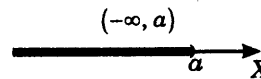
- 5) **Intervalo $(a, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $a < x$.



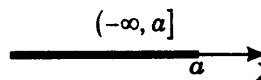
- 6) **Intervalo $[a, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $a \leq x$.



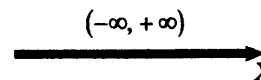
- 7) **Intervalo $(-\infty, a)$:** Consiste de todos los números reales x tales que $x < a$.



- 8) **Intervalo $(-\infty, a]$:** Consiste de todos los números reales x tales que $x \leq a$.



- 9) **Intervalo $(-\infty, +\infty)$:** Consiste de todos los números reales.



0.6 VECTORES EN EL PLANO

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, y r un número real. Se define la *adición de puntos*

$$P_1 + P_2 = (a, b) \quad \text{donde } a = x_1 + x_2 \text{ y } b = y_1 + y_2$$

y el *producto del escalar* r por el punto P_1 como $rP_1 = (rx_1, ry_2)$

Ejemplos:

a) $(3, 2) + (-1, 5) = (2, 7)$

b) $-7 \cdot (4, -1) = (-28, 7)$

c) $r(0, 0) = (0, 0)$

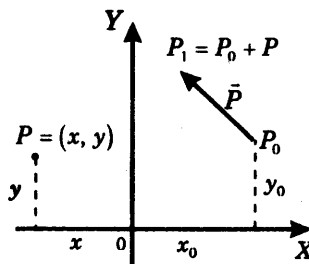
Cuando se consideran tales operaciones de adición y multiplicación, los puntos del plano reciben el nombre de *vectores*, y se les designa con una flecha en la parte superior.

REPRESENTACION GRAFICA DE UN VECTOR.

Sea $P = \vec{P} = (x, y)$ un vector y elijamos un punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Entonces el vector \vec{P} se representa gráficamente como el segmento dirigido $\overrightarrow{P_0P_1}$, donde

$$P_1 = P + P_0 = (x + x_0, y + y_0)$$



La *longitud de un vector* $P = (x, y)$ es la distancia de P al vector $0 = (0, 0)$:

$$|P| = \text{longitud de } P = d(P, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En particular,

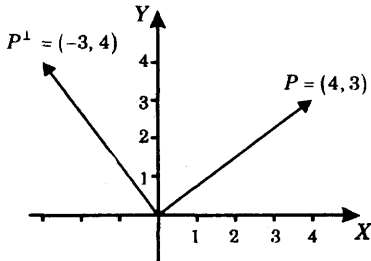
$$d(P_1, P_2) = |P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Si $|P| = 1$ se dice que P es un vector *unitario*.

Si $P = (a, b)$ se define P^\perp , el vector perpendicular a P obtenido rotando P un ángulo recto en el sentido antihorario, mediante

$$P^\perp = (-b, a)$$

Ejemplo



0.7 SUCESIONES DE NUMEROS REALES

Una sucesión (a_n) es una colección de números $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dispuestos según un orden indicado por los subíndices $1, 2, \dots, n \dots$

Se llama término n -ésimo de la sucesión al número a_n .

También se consideran sucesiones cuyos subíndices empiezan en 0, o en otro entero n_0 .

EJEMPLOS

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ cuyo n -ésimo término es $a_n = \frac{1}{3^n}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

2) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, esto es los términos son $2, 3/2, 4/3, 5/4, \dots$

3) La sucesión (a_n) dada por la regla $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$,
para la cual $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $a_2 = \sqrt{6} - 2$, $a_3 = \sqrt{12} - 3, \dots$

4) Si $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

entonces $e_0 = 1$, $e_1 = 2$, $e_2 = \frac{5}{2} = 2.5$, $e_3 = \frac{16}{6} = 2.666 \dots$,

5) La sucesión (b_n) , $n = 1, 2, \dots$, se define (por inducción) mediante las reglas

$$b_1 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$$

Así, sus términos son $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}$

6) Si a es un número real, se tiene la sucesión (n^a) ,

cuyos términos son $1 = 1^a, 2^a, 3^a, \dots$

SUCESIONES ACOTADAS

Se dice que la sucesión (a_n) es acotada si existe un número positivo K tal que $|a_n| \leq K$, para todo n .

De esta definición se sigue que la sucesión (a_n) no es acotada si y sólo si para todo número $K > 0$ y todo entero n se cumple

$$|a_m| > K, \quad \text{en algún } m > n$$

esto es, no importa cuan grandes sean dados K y n , siempre hay un término a_m (en efecto, hay un número infinito!), con $m > n$, cuyo valor absoluto es mayor que K .

EJEMPLOS

Las sucesiones 1) y 2) de los ejemplos anteriores son acotadas. En efecto se tiene

$$\left| \frac{1}{3^n} \right| \leq 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{n+1}{n} \right| \leq 2$$

Más adelante se verá que también son acotadas las sucesiones 2)-6).

Veamos que (n^a) es acotada si $a \leq 0$ y no es acotada si $a > 0$.

Si $a \leq 0$ entonces $n^a = 1/n^{-a} = 1/n^p$, con $p \geq 0$, y puesto que $n^p \geq 1$ entonces $\left| n^a \right| = \frac{1}{n^p} \leq 1$, para todo $n \geq 1$; luego (n^a) es acotada.

Si $a > 0$, dados $K > 0$ y n elegimos $m =$ mayor de los números n y $(K+1)^{1/a}$; luego $m \geq n$ y $m \geq (K+1)^{1/a}$, de donde $m^a \geq K+1 > K$, y $|m^a| > K$; por lo tanto (n^a) no es acotada si $a > 0$.

0.7.1 SUCESIONES CONVERGENTES

Si (a_n) es una sucesión y L es un número real, escribimos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N , que depende de ε , tal que si $n \geq N$ entonces $|L - a_n| < \varepsilon$.

Esta propiedad significa que todos los valores a_n , a partir de un subíndice N , se hallan próximos a L a una distancia menor que ε . Esto es, a_n se acerca arbitrariamente a L , a medida que n crece.

En este caso decimos que (a_n) es convergente y que L es su límite. De otra manera se dice que la sucesión es divergente.

EJEMPLO 1. Probar que la sucesión $(1/n)$ es convergente y su límite es 0.

SOLUCION. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ sea N un entero positivo mayor que $1/\varepsilon$.

Entonces, para todo $n \geq N$ se tiene

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

EJEMPLO 2. Probar que la sucesión $((-1)^n)$ es divergente.

SOLUCION. Puesto que los valores del término n -ésimo $a_n = (-1)^n$ son alternadamente 1 y -1 , según n sea par o impar, a_n no se aproxima a ningún número L cuando n crece indefinidamente y por lo tanto es de esperar que la sucesión no sea convergente, lo que formalmente, recurriendo a la definición de límite, procedemos a probar. Por el absurdo, supongamos que exista $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; entonces para $\varepsilon = 1$,

existe N tal que $n \geq N$ implica $|L - (-1)^n| < 1$.

Esto es, $|L - 1| < 1$, si n es par, o $0 < L < 2$

y $|L + 1| < 1$, si n es impar, o $-2 < L < 0$

de donde resulta la contradicción $0 < L < 0$.

Luego es falso que exista $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y la sucesión es en efecto divergente.

Nota.

1. De la definición de límite se sigue que L es el límite de (a_n) , $n = 1, 2, \dots$, si y sólo si, para algún N_1 , L es el límite de la sucesión (a_n) , $n = N_1, N_1 + 1, \dots$, con subíndices a partir de N_1 ; así para determinar si la sucesión es convergente se puede omitir cualquier colección finita de términos de la sucesión.
2. Notemos que son equivalentes las desigualdades siguientes:
 - (i) $|a_n - L| < \varepsilon$, *la distancia entre a_n y L es menor que ε*
 - (ii) $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, *a_n se encuentra entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$*
 - (iii) $a_n - \varepsilon < L < a_n + \varepsilon$, *L se encuentra entre $a_n - \varepsilon$ y $a_n + \varepsilon$*
3. Si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ con A y B números reales tales que $A < L < B$, entonces existe un entero N tal que $A < a_n < B$, para todo $n \geq N$.

En efecto, si tomamos

$$\varepsilon = \text{menor de } B - L \text{ y } L - A,$$

de modo que $\varepsilon > 0$, $A \leq L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon \leq B$, existe N tal que se cumple (ii) de 2) y por lo tanto $A \leq L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \leq B$, si $n \geq N$.

4. Toda sucesión convergente (a_n) es acotada.

En efecto, sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y elijamos $\varepsilon = 1$; entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $|a_n - L| < 1$, $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$.

Y por lo tanto $|a_n| \leq K = \text{mayor de los números } |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |L| + 1$ para todo $n \geq 1$.

5. Toda sucesión no acotada es divergente.

En efecto, si la sucesión fuese convergente, por 3, sería acotada.

0.7.2 PROPIEDADES BASICAS

- 1) **Límite de una sucesión constante**

Si $a_n = c$, para todo n , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0$.

- 3) si $|a_n - L| \leq b_n$, para todo $n \geq N$, algún N , y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ entonces

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

En las siguientes propiedades se asume que las sucesiones (a_n) y (b_n) son convergentes y que sus límites son A y B , respectivamente.

- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -A$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, si $B \neq 0$
- 8) Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq N$, entonces $A \leq B$
- 9) Si $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo n , y $A = B$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$
- 10) Si $A > 0$ y r es un número cualquiera, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = A^r$

Nota. Las pruebas de las propiedades 1)–9) se desarrollan en la sección 0.7.4.

0.7.3 ALGUNAS SUCESIONES ESPECIALES

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$

Equivalentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^b = 0$, si $b < 0$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+c)^{1/n} = 1$, para todo número c

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a)^{1/n} = 1$ si $a > 0$

4. Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + x + \dots + x^n] = \frac{1}{1-x}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, para todo número real x .

6. Si a y b son números reales, $b > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$

0.7.4 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

SOLUCION. Sea $a_n = c$, $n = 1, 2, \dots$, y sea $\varepsilon > 0$. Tomando $N = 1$ se cumple $n \geq N$ implica $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

PROBLEMA 2. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0$.

SOLUCION. Observemos que se cumple $|a_n - L| = ||a_n - L| - 0|$; luego para $\varepsilon > 0$ son equivalentes

existe un N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$

y existe un N tal que $||a_n - L| - 0| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$,

y esto demuestra el resultado.

PROBLEMA 3. Si $|a_n - L| \leq b_n$, para todo $n \geq N_1$, algún N_1 , y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ probar que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, existe N , tal que $n \geq N$ implica $b_n = |b_n - 0| < \varepsilon$.

Sea entonces N_2 un entero mayor que N_1 y N . Para $n \geq N_2$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - L| &\leq b_n && \text{(pues } n > N_1) \\ &< \varepsilon && \text{(pues } n > N) \end{aligned}$$

y esto prueba que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

PROBL A 4. Si $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existen enteros N_1 y N_2 tales que

$$n \geq N_1 \quad \text{implica} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y
$$n \geq N_2 \quad \text{implica} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego si $n \geq N$, en donde N es el mayor de los números N_1 y N_2 , se cumplen las dos desigualdades a la vez y por lo tanto

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

de donde se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$

PROBLEMA 5. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, si alguno de los límites existe.

SOLUCION. La demostración de este resultado es una consecuencia de

$$|a_n - A| = |-a_n + A| = |(-a_n) - B|, \quad \text{con } B = -A,$$

y de la definición de límite.

Omitimos los detalles.

PROBLEMA 6. Si $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$$

SOLUCION.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar N tal que $n \geq N$ implica $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$.

Notemos que para cualquier n se cumple

$$a_n b_n - AB = (a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + (a_n - A)B$$

de donde

$$|a_n b_n - AB| \leq |a_n - A| |b_n - B| + |A| |b_n - B| + |a_n - A| |B| \quad (*)$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon_0 = \text{mínimo de } 1 \text{ y } \varepsilon/(1+|A|+|B|)$, de modo que $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, $\varepsilon_0^2 \leq \varepsilon_0$ y también $\varepsilon_0(1+|A|+|B|) \leq \varepsilon$.

Para ε_0 , por definición de límite, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica las dos desigualdades $|a_n - A| < \varepsilon_0$ y $|b_n - B| < \varepsilon_0$ (N puede ser tomado como el mayor de dos subíndices N_1 y N_2 a partir de los cuales los términos de cada sucesión distan de sus límites menos de ε_0).

Entonces para $n \geq N$ el lado derecho de (*) es menor que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 + |A| \varepsilon_0 + \varepsilon_0 |B| &= \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + |A| + |B|) \\ &\leq \varepsilon_0 (1 + |A| + |B|) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$

de donde se sigue que $AB = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$.

PROBLEMA 7. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ y $B \neq 0$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$

SOLUCION. Para $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$ existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $|b_n - B| < \frac{|B|}{2}$, y por lo tanto

$$|B| = |B - b_n + b_n| \leq |B - b_n| + |b_n| < \frac{|B|}{2} + |b_n|,$$

de donde $\frac{|B|}{2} < |b_n|$, en particular $b_n \neq 0$ y la sucesión $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ queda definida para $n \geq N_1$. Además, para tales n se tiene

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n| |B|} \leq 2 \frac{|B - b_n|}{|B|^2} \quad (*)$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar N tal que $n \geq N$ implica

$$|b_n - B| < |B|^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

y, si tomamos $N \geq N_1$, también se cumple (*) para n y por lo tanto

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon$$

lo que significa $\frac{1}{B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}$.

Nota. Este resultado junto con el problema anterior implican la propiedad sobre el límite de sucesiones cocientes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

PROBLEMA 8. Si $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y $a_n \leq b_n$, para $n \geq M$, algún M , entonces $A \leq B$.

SOLUCION. Sea $c_n = a_n - b_n$. Entonces $c_n \leq 0$ y $C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A - B$ y será suficiente demostrar que $C \leq 0$.

Por el absurdo, supongamos que se cumple $C > 0$; entonces para el valor particular $\varepsilon = \frac{C}{2}$ existe N tal que $|C - c_n| < \varepsilon$ si $n \geq N$, de donde $\frac{C}{2} = C - \varepsilon < c_n$ y $c_n > 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, es cierto que $C \leq 0$ o $A \leq B$.

PROBLEMA 9. Si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo n , entonces $L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

SOLUCION. Sea $\varepsilon > 0$ y hallemos N tal que si $n \geq N$ entonces se cumplen las dos desigualdades $|a_n - L| < \varepsilon$ y $|b_n - L| < \varepsilon$; en particular $L < a_n + \varepsilon$, $b_n - \varepsilon < L$ y usando $a_n \leq c_n \leq b_n$

$$c_n - \varepsilon \leq b_n - \varepsilon < L < a_n + \varepsilon \leq c_n + \varepsilon$$

esto es, $c_n - \varepsilon < L < c_n + \varepsilon$ o $|c_n - L| < \varepsilon$

Así, queda demostrado que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

PROBLEMA 10. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$.

SOLUCION. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea N un entero mayor que $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$; luego, si $n \geq N$ se tiene

$$n^a \geq N^a > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| = \frac{1}{n^a} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

PROBLEMA 11. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, y $b_n \neq 0$, probar que $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ es divergente.

SOLUCION. Por el absurdo, supongamos que existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}$.

Entonces de $1 = b_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$ se sigue

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0 \times L = 0$$

lo cual es una contradicción.

PROBLEMA 12. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+c)^{1/n} = 1$ para todo c .

SOLUCION.

El número $a_n = (n+c)^{1/n}$ se define para todo $n \geq 1-c$, o $n+c \geq 1$.

Entonces $a_n \geq 1$, pues $a_n^n = n+c \geq 1$, y $a_n = 1+r_n$, con $r_n \geq 0$.

Probaremos que se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

De $a_n^n = n+c$ se sigue $(1+r_n)^n = n+c$

$$1 + nr_n + \frac{n(n-1)}{2} r_n^2 + \dots = n+c$$

luego
$$\frac{n(n-1)}{2} r_n^2 \leq n+c, \quad r_n^2 \leq \frac{2(1+c/n)}{n-1} \leq \frac{4}{(n-1)}$$

para todo $n > c$, o $\frac{c}{n} < 1$, y $0 < r_n \leq \frac{2}{(n-1)^{1/2}}$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ por los problemas 9 y 10.

Finalmente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+r_n) = 1+0 = 1$

PROBLEMA 13. Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

SOLUCION. Si $x=0$ se cumple $|x^n - 0| = 0 < \varepsilon$ y por lo tanto es cierta la propiedad.

Supongamos que $x > 0$. Luego se tiene $1 > x > 0$, $\frac{1}{x} > 1$ y $\frac{1}{x} = 1+r$, con $r > 0$. De

$$(1+r)^n = 1 + nr + \text{otros sumandos} \geq 0$$

se sigue $\frac{1}{x^n} = (1+r)^n \geq nr$, y por lo tanto $0 < x^n < \frac{1}{nr}$ de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

pues $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nr} = 0$.

Si $x < 0$ entonces $|x| > 0$, $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ y también se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ pues $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0$, por el caso anterior.

PROBLEMA 14. Si $|x| < 1$ entonces $\frac{1}{(1-x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1+x+\dots+x^n$.

SOLUCION. En efecto, se tiene

$$1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1+x+\dots+x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

pues $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$, por el problema anterior.

PROBLEMA 15. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, para cada número real x .

SOLUCION. Sea m un entero positivo mayor que $2|x|$.

Entonces para todo $n > m$ se cumple $n > 2|x|$, $\frac{|x|}{n} < \frac{1}{2}$ y

$$\left| \frac{x^n}{n!} - 0 \right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^m}{m!} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{(m+1)} \dots \frac{|x|}{n}}_{n-m \text{ factores}} \leq \frac{|x|^m}{m!} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} = A \left(\frac{1}{2} \right)^{n-m}$$

con $A = \frac{|x|^m}{m!}$.

Y de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-m} = 0$ se sigue entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

PROBLEMA 16. Si a y b son números reales, $b > 1$, demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$.

SOLUCION. Podemos escribir $b = 1 + p$, con $p > 0$. Sea N un entero positivo tal que $N > a$.

Si $n \geq 2N$ se cumple $n - N \geq \frac{n}{2}$, $n - N + 1 > \frac{n}{2}$ y

$$b^n = (1+p)^n > \binom{n}{N} p^N = \frac{n(n-1)\dots(n-N+1)}{N!} p^N > \frac{n^N p^N}{2^N N!}$$

luego
$$\left| \frac{n^a}{b^n} - 0 \right| = \frac{n^a}{b^n} < \frac{K}{n^{N-a}}, \quad n \geq 2N \quad (1)$$

en donde
$$K = \frac{2^N N!}{p^N}$$

Usando la desigualdad (1) y los problemas 3 y 10 resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$.

0.8 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

1) CRITERIO DE CAUCHY

(a_n) es convergente si y sólo si satisface el criterio de Cauchy: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N , que depende de ε , tal que m y $n \geq N$ implican $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

2) SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

Si (a_n) es una sucesión tal que $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n , y un número determinado C , entonces (a_n) es convergente y $a_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq C$, para todo k .

De igual modo, si $a_n \geq a_{n+1} \geq B$, para todo n , entonces $a_k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq B$, para todo k .

EJEMPLOS.1) La función exponencial $\exp(x)$

Usando el criterio de Cauchy se demuestra que para todo número x la sucesión $(s_n(x))$, dada por

$$s_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

converge a un número real que se designa por $\exp(x)$.

En este caso se escribe la expresión simbólica infinita.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

para indicar que las sumas dadas por $s_n(x)$ convergen a $\exp(x)$.

También se dice que $\exp(x)$ es la suma de la serie infinita del segundo miembro.

Se define el número e por

$$e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 2.7182818284 \dots$$

ALGUNAS PROPIEDADES

- 1) Si $x \geq 0$ entonces $\exp(x) \geq s_n(x)$, para todo n .
- 2) Si $N > 2|x|$ entonces

$$s_n(x) - R \leq \exp(x) \leq s_n(x) + R,$$

$$\text{para todo } n \geq N \text{ en donde } R = \frac{2|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

- 2) Usando el criterio de las sucesiones acotadas se prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

En general, se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$, para todo número real x .

0.8.1 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar los siguientes límites (si existen):

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 - 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/n} - 1)^n$$

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0, \text{ por la propiedad 6) de 0.7.3, con } a = 1 \text{ y } b = 2.$$

3) Sea $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$. Entonces

$$a_n = a_n \times \frac{(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)} \quad (\text{racionalizando})$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + \frac{1}{n}}$$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1$, por 10) 0.7.3 y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$4) \text{ Tenemos } 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2n^{1/2}}$$

y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

5) Sean $b_n = n^{1/n} - 1$ y $a_n = b_n^n$. Debemos hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Se tiene $0 < b_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - 1 = 0$. Luego existe N tal que $b_n < 1/2$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto, si $n \geq N$

$$0 < a_n = b_n^n < b_n, \quad \text{pues } b_n < 1$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$ se obtiene $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

PROBLEMA 2. Si $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$

1) probar que la sucesión es convergente

y 2) hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

SOLUCION.

1) Por inducción sobre n se prueba que $1 < b_n < 2$. En efecto, si $n = 1$, $b_1 = \sqrt{2}$ ciertamente cumple la desigualdad; y si $1 < b_n < 2$ entonces $b_{n+1}^2 = 2 + b_n$ satisface $3 < b_{n+1}^2 < 4$, de donde también $1 < b_{n+1} < 2$.

Además, se cumple $b_n \leq b_{n+1}$, pues

$$\left(b_n - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \text{de donde } b_n^2 - b_n < 2,$$

$$\text{y } b_n^2 < 2 + b_n = b_{n+1}^2$$

En resumen, se tiene que $1 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq 2$ y por lo tanto, por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, 2) de 0.8, existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y también $1 \leq L \leq 2$.

2) Calculamos el valor de L .

$$\begin{aligned} \text{Tenemos} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}^2 &= 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ L^2 &= 2 + L \end{aligned}$$

usando la propiedad 10) de 0.7.2 en el primer miembro, de donde resulta la ecuación de segundo grado $L^2 - L - 2 = 0$ que resuelta da las raíces $L = -1, 2$.

Luego, $L = 2$ es el límite de la sucesión.

PROBLEMA 3. Usando el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, probar que existe $e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$, en donde

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

y que $2 \leq e < 3$.

SOLUCION. Si $n \geq 3$ se tiene

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\text{pues } n! > 2^{n-1})$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right)$$

$$< 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \left(\text{usando } 1 + x + \dots + x^{n-2} = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}, \text{ con } x = \frac{1}{2} \right)$$

de donde $s_n < 3$, si $n \geq 3$.

Además, es claro que $e_n < e_{n+1}$ y por lo tanto, por 2) de 0.8, existe el número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$ y cumple $2 = e_2 \leq e \leq 3$.

PROBLEMA 4. Hallar $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$.

SOLUCION. Usando $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ resulta

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 5. Hallar $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{n^3}$

SOLUCION.

De $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se sigue $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{4}{3}$.

PROBLEMA 6. Hallar $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^5 - 2n^3 + 10)^{1/3} - \left(16n^{12} + 7n^5 - \frac{1}{n}\right)^{1/4}}{n^3 - 4n^2 + 1}$

SOLUCION.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^{12}} + \frac{10}{n^9}\right)^{1/3} - \left(16 + \frac{7}{n^7} - \frac{1}{n^{13}}\right)^{1/4}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{0 - 16^{1/4}}{1} = -2$$

PROBLEMA 7. Si $a > 0$, demostrar que (n^a) es divergente.

SOLUCION. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$; luego por el problema 11 de 0.7.4 la sucesión (n^a) es divergente.

PROBLEMA 8. Dados los números $A_0, \dots, A_p, B_0, \dots, B_q, A_p$ y B_q distintos de cero, se define la sucesión (x_n) por

$$x_n = \frac{A_p n^p + \dots + A_1 n + A_0}{B_q n^q + \dots + B_1 n + B_0}$$

Probar que

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ si } p < q$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{A_p}{B_p}, \text{ si } p = q$$

y 3) la sucesión es divergente si $p > q$

SOLUCION. Extrayendo los factores n^p y n^q del numerador y denominador de x_n , respectivamente, se obtiene

$$x_n = \frac{n^p}{n^q} \cdot y_n$$

en donde

$$y_n = \frac{A_p + \frac{A_{p-1}}{n} + \dots + \frac{A_0}{n^p}}{B_q + \frac{B_{q-1}}{n} + \dots + \frac{B_0}{n^q}}$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$, si $a > 0$, se tiene $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{A_p}{B_q} \neq 0$, y la conver-

gencia de (x_n) depende entonces de la convergencia de la sucesión $\left(\frac{n^p}{n^q}\right)$.

1) Si $p < q$ se tiene $x_n = \frac{1}{n^a} y_n$, con $a = q - p > 0$, y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \times Y = 0$.

2) Si $p = q$, $x_n = y_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Y = \frac{A_p}{B_q}$.

3) Si $p > q$, debemos probar que (x_n) es divergente.

Escribamos $a = p - q > 0$, de modo que $x_n = n^a y_n$, $n^a = \frac{x_n}{y_n}$.

Ahora bien, si (x_n) fuese convergente, la sucesión (n^a) también sería convergente, en contradicción con el problema 7.

En consecuencia, la sucesión (x_n) es divergente si $p > q$.

PROBLEMA 9.

1) Usando el criterio de Cauchy, probar que para todo a existe el número

$$\exp(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$$

2) Demostrar que si $a \geq 0$ entonces $\exp(a) \geq s_n$, para todo n .

3) Probar que si $N > 2|a|$ entonces $s_n - R \leq \exp(a) \leq s_n + R$, para todo $n \geq N$,
 en donde $R_n = \frac{2|a|^N}{(N+1)!}$.

SOLUCION. Si $m > n$, $p = m - n$ y $r = \frac{|a|}{n+2}$, se cumple la desigualdad

$$|s_m - s_n| \leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r} \right] \tag{\alpha}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!} \right| \\ &\leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{|a|}{(n+2)} + \frac{|a|}{(n+2)} \times \frac{|a|}{(n+3)} + \dots + \frac{|a|}{(n+2)} \times \dots \times \frac{|a|}{(n+p)} \right] \end{aligned}$$

(notar que $\frac{|a|}{n+i} \leq r$, $i = 2, \dots, p$)

$$\leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} [1 + r + \dots + r^{p-1}] = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r} \right]$$

y queda establecida (α) .

Si $n > 2|a|$, entonces $r = \frac{|a|}{(n+2)}$ cumple $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ y la desigualdad (1) implica:

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ si } m > n \tag{\beta}$$

ya que $\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r} \leq \frac{1}{1-r} \leq \frac{1}{1/2} = 2$ para todo $m > n$.

1) Sea dado $\varepsilon > 0$. De $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$ para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N tal que

$$n \geq N \text{ implica } \frac{|a|^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\gamma)$$

Además, podemos elegir N tal que $N \geq 2|a|$ y por lo tanto si $n \geq N$ también $n \geq 2|a|$ y podemos aplicar (β) .

Finalmente, si $m, n \geq N$ se cumple $|s_m - s_n| < \varepsilon$. En efecto, podemos suponer que $m > n$ y usando (β) y (γ) obtenemos

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} < 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En conclusión, la sucesión (s_n) satisface el criterio de Cauchy y por lo tanto existe $\exp(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

2) Puesto que $a \geq 0$ se tiene $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, luego $s_n \leq s_{n+1}$; además (s_n) es una sucesión acotada por ser convergente. Luego, por el criterio de las sucesiones acotadas su límite $\exp(a)$ cumple $\exp(a) \geq s_n$, para todo n .

3) Si $N > 2|a|$, es válida la desigualdad (β) para $m > n \geq N$

$$|s_m - s_n| \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq R = \frac{2|a|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{o} \quad s_n - R \leq s_m \leq s_n + R$$

y haciendo $m \rightarrow \infty$ (n permanece fijo), resulta $s_n - R \leq \exp(a) \leq s_n + R$.

PROBLEMA 10. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, en donde $e = \exp(1)$.

SOLUCION. Sean $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Entonces $a_n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$

Para $k = 0, 1, \dots, n$, el término k -ésimo del desarrollo de a_n es

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{1}$$

y por lo tanto es menor o igual a $\frac{1}{k!}$; luego $a_n \leq s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$, y (a_n) es una sucesión acotada.

Puesto que $1 - \frac{i}{n} \leq 1 - \frac{i}{n+1}$, para $i = 0, 1, \dots, n$, de (1) vemos que el término k -ésimo de a_n es menor o igual que el término k -ésimo de a_{n+1} y por lo tanto $a_n \leq a_{n+1}$. Por consiguiente, podemos aplicar el criterio de las sucesiones monótonas y

concluir que existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y además que

$$a_n \leq L \leq e, \text{ para todo } n.$$

Falta probar que $L = e$. Veamos que se cumple $s_m \leq L$, para todo m . En efecto, si $k = 0, 1, \dots, m$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}, \text{ por (1).}$$

Luego, si m permanece fijo y $n > m$, se tiene

$$a_n \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{m} \frac{1}{n^m}$$

y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!} = s_m$$

Finalmente, de $s_m \leq L$, para todo m , tomando límites resulta $e = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m \leq L$

y por lo tanto $L = e$, lo que establece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

PROBLEMA 11. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$, en donde $\log y$, $y > 0$, es el número x tal que $\exp(x) = y$.

Nota: $\log y$ o $\ln y$ es el logaritmo natural de $y > 0$. En el capítulo 11 se presenta una definición geométrica de $\ln y$.

SOLUCION. Sea $a_n = \frac{\log n}{n}$. Entonces $\log n = n a_n$ o $\exp(n a_n) = n$.

Puesto que $n a_n \geq 0$, podemos aplicar 2) del problema 9, con $n = 2$, $x = n a_n$, y obtenemos

$$n \geq 1 + n a_n + \frac{(n a_n)^2}{2}$$

de donde $n > \frac{n^2 a_n^2}{2}$, $0 < a_n < \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

PROBLEMA 12. Probar que

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \qquad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

SOLUCION.

$$1) \text{ Sea } a_n = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Se tiene $1 + \frac{1}{n} = \exp(a_n) \geq 1 + a_n$, luego $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$2) \text{ Sea } b_n = n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right). \text{ Por 1) se tiene } \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

$$b_n \leq 1, \text{ y si } n \geq 8 \quad \frac{b_n}{n} \leq \frac{1}{8}.$$

Fijemos $n \geq 8$ y hagamos $x = \frac{b_n}{n}$, luego $\exp(x) = 1 + \frac{1}{n}$.

Puesto que $N = 1 > 2 \left(\frac{1}{8} \right) \geq 2x$ por 3), problema 9, se cumple la desigualdad $1 + x - R \leq \exp(x) \leq 1 + x + R$

$$\text{en donde } R = \frac{2x^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{2x^2}{2} = x^2,$$

$$\text{y por lo tanto } 1 + x - x^2 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + x + x^2$$

$$x - x^2 \leq \frac{1}{n} < x + x^2$$

$$\text{de donde } b_n - \frac{b_n^2}{n} \leq 1 \leq b_n + \frac{b_n^2}{n}$$

$$\text{y } b_n - \frac{1}{n} \leq 1 \leq b_n + \frac{1}{n}, \text{ pues } b_n \leq 1,$$

Así se obtiene $|b_n - 1| \leq \frac{1}{n}$, si $n \geq 8$, y esto implica $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

PROBLEMA 13. Hallar $L = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}$

SOLUCION.

$$\text{Sean } a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$t_n = 1 + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Luego $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $\exp(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, $a_n = s_{2n} + t_{2n}$ y

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} t_{2n} = \exp(1) + \exp(-1).$$

Se sabe que $e = \exp(1)$ y se prueba que $\exp(-1) = 1/e$ y por lo tanto

$$L = e + 1/e .$$

PROBLEMA 14. Probar que $5e = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{n^3}{n!}$

SOLUCION. Sea $a_n = 1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{n^3}{n!}$

Tenemos $1 = 1$

$$\frac{2^3}{2!} = 1 + 3 \cdot 1 \qquad \frac{3^3}{3!} = \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 1$$

$$\frac{4^3}{4!} = \frac{1}{6} + \frac{3 \cdot 1}{2} + 1$$

y en general para $n \geq 3$

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3 \cdot 1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \quad (1)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n!} &= \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{1 + 2(n-1) + (n-1)^2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{(n-1)}{(n-2)!} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{(n-2) + 1}{(n-2)!} \end{aligned}$$

de donde resulta (1).

Luego si $n \geq 3$ se tiene

$$a_n = s_{n-1} + 3s_{n-2} + s_{n-3}, \quad \text{en donde} \quad s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

tiene límite $e = \exp(1)$, y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e + 3e + e = 5e$$

PROBLEMA 14.

a) Si $e = \exp(1)$ probar que $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$, para todo $n \geq 1$, en donde

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} .$$

b) Probar que e es un número irracional

SOLUCION.

a) Tenemos $0 < s_n < s_{n+1} \leq e$ y $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$; luego $0 < s_n < e$.

Y si $m > n$ se cumple

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)} \right], \text{ siendo } p = m - n \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + r + r^2 + \dots + r^{p-1} \right], \quad r = \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r} \right] \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1-r} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}, \quad \text{pues } \frac{1}{1-r} = \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Luego, haciendo que $m \rightarrow \infty$ se tiene

$$e - s_n \leq \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!n}, \quad \text{pues } n+2 < \frac{(n+1)^2}{n}$$

2) Por el absurdo, supongamos que e es un número racional y escribamos $e = \frac{p}{q}$, en donde p y q son números enteros positivos. Entonces por 1) con $n = q$ se tiene

$$0 < \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q!q}$$

y si hacemos
$$x = q!q \left(\frac{p}{q} - s_q \right) = pq! - q!s_q$$

entonces $0 < x < 1$, de modo que x no puede ser un número entero.

Sin embargo, la definición de x implica que es un entero; en efecto $pq!$ es un entero y también $q!s_q$, pues es la suma de los enteros $q \frac{q!}{k!}$, $k = 1, \dots, q$.

La contradicción obtenida demuestra que e no puede ser un número racional.

0.9 SERIES DE NUMEROS

Una serie es una expresión simbólica de la forma

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

que representa o indica la suma ordenada (infinita) de los términos de una sucesión de números (a_n) .

Se suele abreviar la expresión de la serie mediante la notación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{o} \quad \sum_0^{\infty} a_n$$

en donde n es una variable que recorre los números enteros ≥ 0 .

Se dice que la serie es convergente si la sucesión de los números

$$s_n = a_0 + \dots + a_n,$$

es convergente; esto es, si existe un número L , al que se llama suma de la serie, tal que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + \dots + a_n$$

lo cual significa que los números $a_0 + \dots + a_n$ se aproximan arbitrariamente a L a medida que se agregan los siguientes términos a_{n+1}, \dots

También se suele escribir

$$L = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

o

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

para indicar que la serie es convergente y su suma es L .

A las series no convergentes también se les llama divergentes.

EJEMPLOS.

1) La serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} cx^n = c + cx + cx^2 + \dots + cx^n + \dots$$

es convergente, y su suma es $\frac{c}{1-x}$, si $-1 < x < 1$, (ver problema 14, 0.7.4).

2) La serie exponencial

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ y su suma se representa por $\exp(x)$ (Ver problema 8, 0.8.1). Así,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3) **Representación decimal de los números reales**

Todo número real $x \geq 0$ se puede expresar como la suma de una serie de la forma

$$d_0 + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} + \dots$$

en donde d_0 es un entero ≥ 0 y d_1, d_2, \dots , son dígitos decimales, esto es uno de los números $0, 1, \dots, 9$

En este caso se suele emplear la notación

$$x = d_0 . d_1 \dots d_n \dots$$

Si x es negativo, entonces

$$x = -d_0 . d_1 \dots d_n \dots$$

en donde el segundo miembro es una representación decimal de $-x > 0$.

- 4) Las funciones trigonométricas $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ pueden definirse formalmente — independientemente de su origen geométrico — mediante sumas de series

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

En efecto, puede demostrarse que estas series son convergentes para cualquier valor de x , y por lo tanto existen sus sumas, y luego, usando estas definiciones, se establecen las propiedades conocidas tales como

$$\text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x = 1, \quad \text{sen}(x+y) = \text{sen} x \cdot \text{cos} y + \text{cos} x \cdot \text{sen} y$$

- 5) La serie

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

en donde p es un número real dado, es convergente si $p > 1$ y es divergente si $p \leq 1$

0.9.1 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Probar que si $\sum_0^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Equivalentemente, si la sucesión (a_n) es divergente o si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces

$\sum_0^{\infty} a_n$ es divergente.

SOLUCION.

Por hipótesis, existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, en donde $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$; luego de $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L - L = 0$$

PROBLEMA 2. Sea a un número real > 0 .

- 1) Si $N \geq 1$, demostrar que existe un número b dado por una representación decimal tal que $b^N = a$ y $b > 0$
- 2) Probar que existe un único número $b > 0$ tal que $b^N = a$ y $b > 0$. Tal número se llama la raíz N -ésima de a y se le designa por $a^{1/N}$
- 3) Probar que a tiene una representación decimal.

SOLUCION.

- 1) Por inducción encontraremos una sucesión de enteros no negativos (d_n) tales que d_n es un dígito decimal si $n \geq 1$, y si

$$s_n = d_0 + \frac{d_1}{10^1} + \dots + \frac{d_n}{10^n}, \text{ entonces } (s_n)^N \leq a \leq \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N \quad (\alpha)$$

Para $n = 0$ sea d_0 el entero tal que $d_0^N \leq a < (d_0 + 1)^N$; tal número existe pues podemos encontrar un entero $K \geq 1$ tal que $a < K$ y por lo tanto

$$0^N = 0 \leq a < K < K^N, \quad 0^N \leq a < K^N \quad (\beta)$$

de donde se sigue que

$$d_0^N \leq a < (d_0 + 1)^N, \text{ para algún entero } d_0 \text{ con } 0 \leq d_0 < K.$$

Si $s_0 = d_0$ evidentemente (α) es verdadera.

Supongamos que ya existen $d_0, \dots, d_n, n \geq 0$, de manera que se cumple (α) . Vamos a determinar d_{n+1} . Por inducción se tiene

$$s_n^N \leq a < \left(s_n + \frac{1}{10^n}\right)^N$$

$$\circ \quad \left(s_n + \frac{0}{10^{n+1}}\right)^N \leq a < \left(s_n + \frac{10}{10^{n+1}}\right)^N$$

y por lo tanto, existe un entero k tal que $0 \leq k \leq 9$ y

$$\left(s_n + \frac{k}{10^{n+1}}\right)^N \leq a < \left(s_n + \frac{k+1}{10^{n+1}}\right)^N$$

luego si $d_{n+1} = k$, $s_{n+1} = s_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}}$ se cumple (α) para $n+1$ y la inducción está completa.

Notemos que en el último paso se ha probado que d_{n+1} es un dígito decimal.

Veamos ahora que (s_n) es convergente. Puesto que cada $d_n \geq 0$ se tiene $s_n \leq s_{n+1}$ y también $s_n \leq K$, por (β) , pues $s_n^N \leq a < K^N$; luego por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas existe el número $b = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ y $b \geq s_0 \geq 0$.

El número b cumple $b^N = a$; en efecto:

$$s_n^N \leq a \leq \left(s_n + \frac{1}{10^n} \right)^N$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^N \leq a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_n + \frac{1}{10^n} \right)^N$$

$$b^N \leq a \leq b^N, \quad \text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

de donde $b^N = a$.

De la ecuación anterior se sigue que $b \neq 0$, pues $a > 0$, y por lo tanto $b > 0$.

- 2) Si $N \geq 1$ por 1) podemos encontrar $b > 0$ tal que $b^N = a$. Y si $N \leq -1$ entonces $-N \geq 1$ y también por 1), aplicado al número $\frac{1}{a}$, existe $c > 0$ tal que $c^{-N} = \frac{1}{a}$, de donde $b^N = a$, con $b = \frac{1}{c} > 0$.

Probaremos ahora la unicidad del número b : Si c es un número > 0 y $c^N = a$, entonces $b = c$. En efecto, si fuesen distintos el cociente r sería distinto de 1 y de $b^N = c^N$ se tendría $r^N = 1$, con $r \neq 1$, lo que es imposible pues N es distinto de cero; luego $b = c$.

- 3) se sigue de 1) para el valor $N = 1$, pues $b = a$ ya que $a^1 = a$.

PROBLEMA 3. Probar que la serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente si $p \leq 1$

SOLUCION.

Caso 1. $p \leq 0$

Si $p < 0$ entonces $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ es divergente, y si $p = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^0} = 1$. Luego por el problema 1, la serie es divergente si $p \leq 0$.

Caso 2. $0 < p \leq 1$

Sean $s_n^p = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$ y $s_n = s_n^1$

Supongamos $0 < p \leq 1$; entonces $n^p \leq n$ y $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, de donde

$$1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

o sea $s_n^p \geq s_n$, para todo n .

Probaremos luego que la sucesión (s_n^p) no es acotada; luego es divergente, y esto significa que la serie es divergente.

Sea dado $K > 0$. Tomemos $N = 2^{2K}$. Si $n \geq N$ se tiene

$$s_n \geq s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$$

De $2^{2K} - 1 = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2K-1}$

se sigue $N = 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2K-1}$

y podemos agrupar los sumandos de s_N en $2K$ sumas formadas por $2, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2K-1}$, términos consecutivos:

$$\begin{aligned} s_N &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2k-1}-1} + \dots + \frac{1}{2^{2k}}\right) \\ &> 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + \dots + 2^{2K-1}\left(\frac{1}{2^{2K}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \quad (2K \text{ sumandos}) \\ &= 2K\left(\frac{1}{2}\right) = K \end{aligned}$$

Así, para todo $n \geq N$ se cumple $s_n^p \geq s_n \geq K$ y la sucesión (s_n^p) no es acotada.

PROBLEMA 4. Probar que la serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$.

SOLUCION. Sea $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$. Es claro que $s_n < s_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión (s_n) es monótona.

Sea $r = \frac{1}{2^{p-1}}$; luego $0 < r < 1$, pues $p > 1$ implica $2^{p-1} > 1$, y también sea $M = 1 + \frac{1}{1-r}$.

Probaremos que $s_n \leq M$ para todo n , y por lo tanto la sucesión (s_n) es acotada.

En efecto, dado n elijamos un entero K tal que $n < 2^{2K}$ y hagamos $N = 2^{2K}$; luego agrupamos los términos de s_N como en el problema anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} s_n \leq s_N &= \left(1 + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{2k-1})^p} + \dots + \frac{1}{(2^{2k})^p}\right) \\ &> 2(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^p + 4\left(\frac{1}{4}\right)^p + \dots + 2^{2K-1}\left(\frac{1}{2^{2K-1}}\right)^p \\ &= 2 + r + r^2 + \dots + r^{2K-1} \\ &< 1 + \frac{1}{1-r} = M \end{aligned}$$

Finalmente, por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas, la sucesión (s_n) es convergente y por lo tanto existe la suma de la serie.

PROBLEMA 5. Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x en el intervalo $(-R, R)$, $R > 0$, si existe una constante M tal que $|a_n| R^n \leq M$, para todo n .

SOLUCION. Sea x en el intervalo $(-R, R)$, esto es $|x| < R$ y elijamos un número r tal que $|x| < r < R$; luego $r = cR$, con $0 < c < 1$.

Debemos probar que la sucesión (s_n) , $s_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

es convergente, para lo cual demostraremos que satisface el criterio de Cauchy.

Si $m > n \geq 0$, $m = n + p$, se tiene

$$|s_m - s_n| \leq M \frac{c^{n+1}}{1-c}; \quad (1)$$

en efecto

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| \\ &\leq |a_{n+1}| r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}| r^{n+p} \\ &= c^{n+1} |a_{n+1}| R^{n+1} + \dots + c^{n+p} |a_{n+p}| R^{n+p} \\ &\leq M c^{n+1} (1 + c + \dots + c^{p-1}) \leq M \frac{c^{n+1}}{(1-c)} \end{aligned}$$

Puesto que $0 < c < 1$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon \frac{1-c}{M}$ podemos encontrar un entero N tal que si $n \geq N$ entonces

$$c^n < \varepsilon \frac{1-c}{M} \quad \text{o} \quad M \frac{c^n}{1-c} < \varepsilon \quad (2)$$

Luego, si $m > n \geq N$, por (1) y (2) se tiene $|s_m - s_n| < \varepsilon$, y por lo tanto la sucesión (s_n) satisface el criterio de Cauchy.

PROBLEMA 6. Aplicando el problema 5, probar que las siguientes series son convergentes:

- 1) serie de $\operatorname{sen}(x)$ $\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para todo x
- 2) serie de $\operatorname{cos}(x)$ $\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para todo x
- 3) serie de $\operatorname{arc\,tg}(x)$ $\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, si $-1 < x < 1$

en donde $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$ si y sólo si $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

4) serie de $\log(1-x)$ $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, si $-1 < x < 1$

SOLUCION. Todas las series son de la forma $\sum_0^{\infty} a_m x^m$.

1) $a_m = 0$ si m es par y $a_m = \frac{(-1)^m}{(2n+1)!}$, si $m = 2n+1$.

Ahora bien, dado x sea $R = |x| + 1$, de modo que $|x| < R$; de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^m}{m!} = 0$ se sigue que existe $K > 0$ tal que $|a_m| R^m \leq K$, para todo m , y por el problema anterior la serie converge en cada punto del intervalo $(-R, R)$, y en particular en x .

2) En este caso $a_m = 0$ si n es impar y $a_m = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, si $m = 2n$; y se puede aplicar los mismos pasos de 1).

3) Los coeficientes son $a_m = 0$ si m es par y $a_m = \frac{(-1)^m}{(2n+1)}$, si $m = 2n+1$. Luego $|a_m| \leq 1$ y $|a_m| R^m \leq K$, con $R = K = 1$, y por el problema anterior la serie converge en $(-1, 1)$.

4) Similar a 3).