

CALCULO DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE UNA VIGA EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS Y SUJETA A UNA CARGA CONCENTRADA, SIN EMPLEAR LOS TEOREMAS DE VILLAREAL

por OTTO A. VON BISCHOFFSHAUSEN CANAVAL.

Saliger desarrolla en su libro *Estática Aplicada* el cálculo de las vigas continuas y empotradas en una forma general valiéndose de la consideración de la línea elástica.

Tomemos las fórmulas (19b) de la página 279 de dicha obra

$$\frac{6EJ\beta_2}{l} = 2M_1 + M_2 + 6m_1$$

$$\frac{6EJ\beta_1}{l} = M_1 + 2M_2 + 6m_2$$

donde E es el módulo de elasticidad, J el momento de inercia, β_1 y β_2 los ángulos de deformación izquierdo y derecho.

$$m_1 = \frac{Fu_2}{l^2} \qquad m_2 = \frac{Fu_1}{l^2}$$

siendo F el área de momentos de la viga simplemente apoyada, u_1 y u_2 las distancias del centro de gravedad de F a los apoyos, M_1 y M_2 los momentos de empotramiento que buscamos.

Cuando los empotramientos son perfectos tenemos

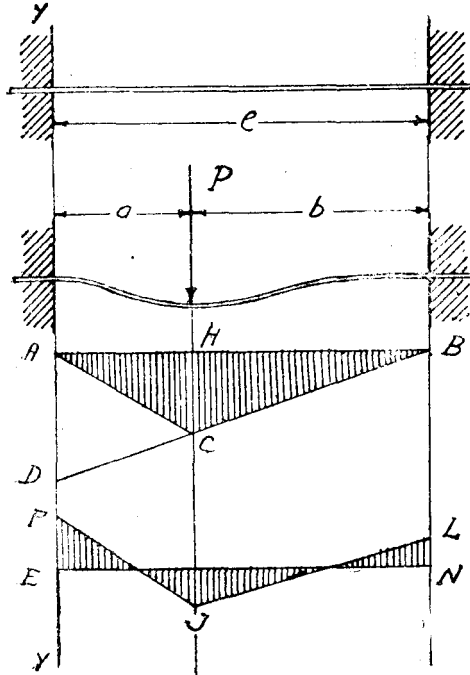
$$\beta_1 = \beta_2 = 0$$

y obtenemos las ecuaciones (30) de la página 285 de Saliger

$$M_1 = -2(2m_1 - m_2)$$

$$M_2 = -2(2m_2 - m_1)$$

Estas fórmulas son generales, y de ellas voy a partir para de-



ducir las expresiones de los momentos M_1 y M_2 en el caso particular de una carga aislada P .

$$M_{\text{máx}} = \frac{Pab}{l} \quad F = \frac{Pab}{l} \times \frac{1}{2} = \frac{Pab}{2}$$

Queremos Fu_2 y Fu_1 . De la proporción $AD:l::HC:b$:

$$AD = \frac{Pab}{l} \times \frac{1}{b} = Pa.$$

$$M_1 = -2 (2m_1 - m_2)$$

Tomando primeros momentos con respecto al eje YY:

$$Fu_1 = \frac{Pa \times l}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{Pa \times a}{2} \times \frac{a}{3} = \frac{Pa (l^2 - a^2)}{6}$$

$$Fu_2 = \frac{Pb (l^2 - b^2)}{6}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (30)

$$\begin{aligned} M_1 &= -2 \left\{ 2 \frac{Pb (l^2 - b^2)}{6l^2} - \frac{Pa (l^2 - a^2)}{6l^2} \right\} = \\ &= -\frac{P}{3l^2} \left\{ 2b [(a+b)^2 - b^2] - a [(a+b)^2 - a^2] \right\} = \\ &= -\frac{P}{3l^2} \left\{ 2ba^2 + 2b^2a + 2b^3 - 2b^3 - a^3 - 2a^2b - ab^2 + a^3 \right\} = \\ M_1 &= -\frac{Pab^2}{l^2} \end{aligned}$$

Y análogamente

$$M_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$

Que son las fórmulas obtenidas por medio de los teoremas de Villareal. En caso de un número cualquiera de fuerzas, se aplicará el método de la superposición de efectos, en la forma conocida.

Otto A. VON BISCHOFFSHAUSEN Y CANAVAL.