
M A Y N A R D K O N G

CALCULO INTEGRAL

CUARTA EDICION



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 2004

Maynard Kong. En 1964 ingresó a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Ingeniería. Egresó en 1968 y desde 1969 se ha desempeñado como profesor del Departamento de Ciencias de la Universidad Católica en cursos de Matemáticas de niveles y especialidades variados. Obtuvo el grado de doctor (PhD) en la Universidad de Chicago (Estados Unidos de América) en 1976. Fue profesor visitante en la Universidad de Stuttgart (República Federal de Alemania) en 1979, y al mismo tiempo becario de la Fundación von Humboldt en un programa de posdoctorado, y posteriormente, también en Venezuela, durante 4 años.

Ha publicado importantes trabajos de investigación y varios textos de consulta universitaria, entre los que se pueden mencionar: Teoría de conjuntos (coautor con César Carranza), Basic, Cálculo diferencial, Lenguaje de programación Pascal, Lenguaje de programación C, y Lenguaje ensamblador Macro Assembler.

Ha participado en numerosos eventos de matemáticas, promoción de las Ciencias Básicas e Informática tanto en el país como en el extranjero.

CALCULO INTEGRAL

M A Y N A R D K O N G

CALCULO INTEGRAL



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 2004**

Primera edición, setiembre de 1989
Segunda edición, marzo de 1993
Tercera edición, diciembre de 1997
Cuarta edición, marzo de 2004

Cubierta: Carlos González R.

Cálculo integral

Copyright © 2004 por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Plaza Francia 1164 Lima, Teléfonos: 330-7410 - 330-7411.

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Derechos reservados

ISBN 9972-42-195-3

Depósito Legal: 1501052004-1751

Impreso en el Perú - Printed in Peru

CONTENIDO

CAPITULO 1 La integral indefinida

1	Teorema del valor medio	3
2	Teorema de la función constante	3
3	Teorema de las diferencias constantes	5
4	La integral indefinida	5
4.1	Antiderivada de una función	5
4.2	La integral indefinida	6
4.3	Propiedades básicas de la integración	9
4.4	Integrales usuales	12
4.5	Problemas resueltos	16
4.6	Problemas propuestos	47

CONTENIDO

CAPITULO 2 Integración por partes e integración por sustitución

1	Integración por partes	53
2	Integración por sustitución o por cambio de variable	56
2.1	Teorema: fórmula del cambio de variable . . .	56
2.2	Sustituciones trigonométricas	59
3	Problemas resueltos	63
3.1	Integración por partes	63
3.2	Integración por sustitución	74
4	Problemas propuestos	83

CAPITULO 3 La integral definida

1	Sumas	87
1.1	Definición	87
1.2	Propiedades de las sumas	88
1.3	Algunas sumas	89
1.4	Problemas resueltos	90
2	La integral definida como un límite de sumas . . .	94
2.1	Suma de integral	94
2.2	La integral definida	96
2.2.1	Existencia y definición de la integral definida para funciones continuas . .	96
2.2.2	Cálculo de la integral definida usando sucesiones de sumas de integral . . .	97
2.2.3	Area entre dos curvas	99
2.3	Propiedades de la integral definida	106
2.3.1	Teorema	106
2.3.2	Teorema	108

CONTENIDO

2.3.3	Teorema	109
2.3.4	La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ con b > a	111
2.3.5	Teorema	111
2.4	Teorema fundamental del cálculo	113
2.4.1	Teorema	113
2.4.2	Teorema fundamental del cálculo integral	115
2.4.3	Teorema	118
2.5	Problemas resueltos	119
2.6	Integración por partes de integrales definidas	128
2.7	Cálculo de integrales definidas por sustitución o cambio de variables	129
2.8	Problemas resueltos	131
2.9	El teorema del valor medio para integrales	137
2.10	Problemas resueltos	139
2.11	Problemas propuestos	141

CAPITULO 4 Integrales impropias

1	Definición	145
2	Integral impropia cuando la función es discontinua	146
3	Integral impropia cuando los límites de integración son infinitos	147
4	Algunos criterios para la convergencia de integrales impropias	149
4.1	Criterio de comparación	149
4.2	Criterio de convergencia para funciones <u>discon</u> <u>tinuas</u>	150
4.3	Criterio de convergencia cuando un límite de integración es infinito	151

4.4	Algunos ejemplos de integrales impropias . . .	152
4.5	Problemas resueltos	155

CAPITULO 5 Métodos de integración

1	Integración de funciones racionales	169
1.1	Definición de función racional	169
1.2	Cálculo de integrales de la forma	
	$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$	169
1.3	Integración de una función racional general . . .	181
1.3.1	Método de descomposición en fracciones parciales	182
1.3.2	Método de Hermite	177
1.4	Problemas resueltos	182
2	Integración de algunas funciones irracionales . . .	195
2.1	Integrales de la forma $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$. . .	195
2.2	Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. . .	196
2.3	Integrales de la forma $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$. . .	197
2.4	Integrales de la forma $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$. . .	198
2.5	Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(x-d)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$. . .	200
2.6	Problemas resueltos	201
2.7	Integrales de la forma	
	$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_2}, \dots \right] dx$. . .	204

CONTENIDO

2.8	Problemas resueltos	205
2.9	Integrales de la forma $\int x^p(a + bx^q)^r dx$	208
2.10	Problemas resueltos	209
3	Integración de funciones trigonométricas	213
3.1	Integrales de la forma $\int \text{sen}^m x \cos^n x dx$	213
3.2	Problemas resueltos	218
3.3	Integrales de la forma $\int \text{sen } mx \text{ sen } nx dx$ $\int \text{sen } mx \cos nx dx$ $\int \cos mx \cos nx dx$	225
3.4	Problemas resueltos	225
3.5	Integrales de la forma $\int R(\text{sen } x, \cos x) dx$	228
3.6	Problemas resueltos	230
3.7	Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	234
3.8	Problemas resueltos	235
4	Integración de funciones hiperbólicas	237
4.1	Definición de funciones hiperbólicas	237
4.2	Integrales usuales	239
4.3	Problemas resueltos	241
5	Fórmulas de reducción	246
5.1	Problemas resueltos	247

CAPITULO 6 Aplicaciones geométricas de la integral definida

1	Area de figuras en coordenadas rectangulares . . .	253
1.1	Definición	253
1.2	Area bajo una curva	254
1.3	Definición	254
1.4	Propiedades de la función área	255
1.5	Problemas resueltos	255
2	Area bajo una curva dada en forma paramétrica . . .	265
2.1	Teorema	265
2.2	Problemas resueltos	266
3	Area de figuras planas en coordenadas polares . . .	268
3.1	Coordenadas polares	268
3.2	Cambio de coordenadas	269
3.3	Area en coordenadas polares	269
3.4	Problemas resueltos	270
4	Longitud de arco de una curva plana	278
4.1	Definición	278
4.2	Cálculo de la longitud del arco de una curva plana	279
4.2.1	En coordenadas rectangulares	279
4.2.2	Longitud del arco cuando la curva es dada por ecuaciones paramétricas	282
4.2.3	Longitud del arco de curva en coordenadas polares	283
4.3	Problemas resueltos	285

CONTENIDO

5	Volumen de sólidos	293
5.1	Definición del volumen de un sólido en términos del área seccional	293
5.2	Volumen de un sólido de revolución	296
5.2.1	Método del disco circular	296
5.2.2	Nota	297
5.2.3	Método del anillo circular	298
5.2.4	Método del tubo cilíndrico	299
5.3	Volumen de un sólido de revolución en coordenadas polares	301
5.4	Problemas resueltos	303
5.5	Problemas propuestos	311
6	Area de una superficie de revolución	312
6.1	Area en coordenadas rectangulares	312
6.2	Area de una superficie de revolución cuando la curva es dada en forma paramétrica	313
6.3	Area de una superficie de revolución en coordenadas polares	314
6.4	Problemas resueltos	315

CAPITULO 7 Aplicaciones de la integral a problemas de Física

1	Masa, momentos estáticos y de inercia, y centro de masa	325
1.1	Caso I : Sistemas de puntos materiales	325
1.2	Caso II: Curvas planas	326
1.3	Caso III: Figuras planas	329

CONTENIDO

1.4	Caso IV : Superficie de revolución	333
1.5	Caso V : Sólidos	333
1.6	Teoremas de Pappus	336
1.7	Teorema de Steiner o de los ejes paralelos	339
1.8	Problemas resueltos	339
1.9	Problemas propuestos	351
2	Problemas de física	352
2.1	Camino recorrido por un puntos	352
2.2	Trabajo realizado por una fuerza	353
2.3	Energía cinética	353
2.4	Presión de un líquido	354
2.5	Problemas resueltos	355
	INDICE ALFABETICO	367

En este texto se desarrollan los temas que tradicionalmente comprende un curso de CALCULO INTEGRAL.

La exposición pretende ser completa tanto en la teoría como en la práctica. Además de los ejemplos que ilustran y aclaran los conceptos teóricos expuestos, se ofrece una colección amplia de ejercicios resueltos y propuestos.

En los dos últimos capítulos se aplica la teoría de la integral de funciones reales en la resolución de problemas de GEOMETRIA y FISICA.

Enero de 1985

Maynard Kong

CAP. 1

LA INTEGRAL INDEFINIDA

Empezamos recordando los siguientes resultados de cálculo diferencial.

1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f(x)$ una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a los puntos a y b . Entonces existe un número c entre a y b tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a) ,$$

donde $f'(c)$ es el valor de la derivada de $f(x)$ en c .

2 TEOREMA DE LA FUNCION CONSTANTE

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto $a < x < b$, entonces

$$f'(x) = 0 \text{ en } a < x < b \text{ si y sólo si } f(x) = C ,$$

donde C es una constante.

Ejemplo 1 Si $y' = 2 \cos x$, hallar la función $y = y(x)$.

Solución Tenemos $y' = 2 \cos x$

$$(y - 2 \operatorname{sen} x)' = 0 \quad [\text{pues } (\operatorname{sen} x)' = \cos x]$$

y por el teorema de la función constante, $y - 2 \operatorname{sen} x = C$,

donde C es una constante.

Luego $y = 2 \operatorname{sen} x + C$.

Ejemplo 2 Hallar la función $y = v(x)$ que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 3, \quad y(1) = 6, \end{cases}$$

donde $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ designa la segunda derivada de y respecto de x .

Solución Tenemos $y'' = 6x$

$$(y' - 3x^2)' = 0 \quad [\text{pues } (x^2)' = 2x]$$

$$y' - 3x^2 = A \quad \text{donde } A \text{ es una constante,}$$

$$(y - x^3 - Ax)' = 0 \quad [\text{pues } (x^3)' = 3x^2, (Ax)' = A]$$

$$y - x^3 - Ax = B \quad \text{donde } B \text{ es una constante.}$$

Luego $y = x^3 + Ax + B$. (1)

Vamos a determinar A y B usando las condiciones

$$y(0) = 3,$$

$$y(1) = 6.$$

Sustituyendo $x = 0$ y $x = 1$ en (1), obtenemos las ecuaciones

$$B = 3,$$

$$1 + A + B = 6.$$

que resueltas dan $B = 3$ y $A = 2$.

Así, $y = x^3 + 2x + 3$.

3 TEOREMA DE LA DIFERENCIA CONSTANTE

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones diferenciables en un intervalo abierto $a < x < b$, entonces

$$f'(x) = g'(x) \text{ en } a < x < b \text{ si y sólo si } f(x) = g(x) + C$$

donde C es una constante.

PRUEBA

Supongamos que se cumple $f'(x) = g'(x)$ en $a < x < b$.

Luego $(f(x) - g(x))' = 0$, y por el teorema de la función constante $f(x) - g(x) = C$, donde C es una constante, esto es, $f(x) = g(x) + C$.

Recíprocamente, si se tiene $f(x) = g(x) + C$ en $a < x < b$, entonces derivando respecto de x

esto es, $f'(x) = g'(x) + 0$, (la derivada de la constante C es 0)
 $f'(x) = g'(x)$.

4 LA INTEGRAL INDEFINIDA

4.1 Antiderivada de una función

Decimos que una función $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo I si se cumple

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Ejemplo 1

(1) Las funciones $F(x) = 3x^4 - x + 8$ y $G(x) = 3x^4 - x - 2$ son antiderivadas de la función $f(x) = 12x^3 - 1$, pues

$$F'(x) = 12x^3 - 1$$

y

$$G'(x) = 12x^3 - 1.$$

(2) La función $F(x) = \cos 2\pi x + C$ es una antiderivada de $f(x) = -2\pi \sin 2\pi x$.

Ejemplo 2 Hallar una antiderivada de la función $y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

Solución Puesto que $(\sqrt{1+x^3})' = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$
 $(\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3})' = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$,

la función $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$ es una antiderivada de y .

4.2 La Integral Indefinida

Llamamos **integral indefinida** de una función $f(x)$ a la antiderivada general de la función.

Emplearemos la notación

$$\int f(x)dx$$

para designar la integral indefinida de $f(x)$.

Así $\int f(x) dx$ **representa a todas las antiderivadas** de la función $f(x)$.

La **integración indefinida** es el proceso de hallar la integral indefinida de una función, esto es, de encontrar la antiderivada general de la función.

Tenemos las siguientes identidades

$$(4.2.1) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) ,$$

$$(4.2.2) \quad \int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{si } F'(x) = f(x) ,$$

donde C es una constante arbitraria.

Prueba

(4.2.1) Por definición $\int f(x)dx$ es la antiderivada general de $f(x)$.
Luego $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$.

(4.2.2) Debemos probar que $F(x) + C$ es la antiderivada general de la función $f(x)$.

Paso 1 $F(x) + C$ es una antiderivada de $f(x)$. En efecto,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Paso 2 Si $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $G(x) = F(x) + C$, para alguna constante C . En efecto, se tiene

$$G'(x) = f(x) = F'(x),$$

y por lo tanto, por el teorema 3 de la diferencia constante

$$G(x) = F(x) + C.$$

De los pasos 1 y 2 se sigue que $F(x) + C$ es la antiderivada general de $f(x)$. Luego

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

por definición de integral indefinida de $f(x)$. ■

En términos de diferenciales, (4.2.2) puede escribirse

(4.2.3)

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

6

(4.2.4)

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

ya que $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Luego, la **integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la función más una constante.**

De esta manera, la integración indefinida puede ser considerada como la operación **inversa** de la operación que asigna a una función su diferencial.

Ejemplo 1 Si $n \neq -1$, hallar la integral indefinida de la función $y = x^n$.

Solución Buscamos $F(x)$ tal que $F'(x) = x^n$.

Por simple inspección, la función $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, que está definida pues $n+1 \neq 0$ por hipótesis, cumple $F'(x) = x^n$.

Luego, aplicando la fórmula (4.2.2)

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ejemplo 2 Hallar $\int (12x^2 - 4x + 1) dx$.

Solución Buscamos una antiderivada $F(x)$ de $12x^2 - 4x + 1$.

Por simple inspección $F(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$ cumple

$$F'(x) = 12x^2 - 4x + 1.$$

Entonces por la fórmula (4.2.2)

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int (12x^2 - 4x + 1)dx = 4x^3 - 2x^2 + x + C.$$

4.3 Propiedades Básicas de la Integración

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable entonces

$$du(x) = \frac{du}{dx} dx ,$$

y por lo tanto

$$\int f(u)du = \int f(u) \frac{du}{dx} dx.$$

Observamos que en la integral del primer miembro, **la función integrando** $f(u)$ aparece como una función de una variable dependiente $u = u(x)$.

Teorema Se cumplen las siguientes propiedades

$$(1) \quad \int Af(u)du = A \int f(u)du, \quad \text{para toda constante } A.$$

$$(2) \quad \int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u)du \pm \int g(u)du.$$

(3) INTEGRACION CON EL SIGNO DE LA DIFERENCIAL.

$$\int dF(u(x)) = F(u(x)) + C.$$

(4) REGLA DE LA CADENA PARA LA INTEGRACION.

$$\text{Si } \int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{entonces } \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

Nota (1) Las propiedades (3) y (4) son en verdad equivalentes.

(2) La fórmula $\int dF(u) = F(u) + C$ es muy útil y la usaremos frecuentemente en lo que sigue. Recordemos que $dF(u) = \frac{dF}{du}(u) \cdot du$.

Prueba de (3) y (4)**(3)** Tenemos

$$\begin{aligned} \int dF(u(x)) &= \int dG(x) \quad , & \text{donde } G(x) &= F(u(x)) \quad , \\ &= G(x) + C & & \text{(por (4.2.4))} \\ &= F(u(x)) + C. \end{aligned}$$

(4) Si $\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\text{entonces } \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \quad (\text{por (4.2.1)})$$

$$\text{o } \frac{dF}{du}(u) = f(u) .$$

$$\text{Luego } dF(u) = \frac{dF}{du}(u) du = f(u)du \quad ,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int f(u)du &= \int dF(u) \\ &= F(u) + C \end{aligned} \quad (\text{por (3)}) \blacksquare$$

Ejemplo 1

$$\text{Hallar } \int \frac{xdx}{1+x^4} .$$

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} \quad , \text{ donde } u = x^2 \quad , \\ &= \frac{1}{2} \int d(\text{arc tan } u) \\ &= \frac{1}{2} \text{arc tan } u + C \\ &= \frac{1}{2} \text{arc tan } x^2 + C . \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar $\int 6x^2 e^{-x^3} dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 \int 6x^2 e^{-x^3} dx &= -\frac{6}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3) \\
 &= -2 \int e^u du, \quad \text{donde } u = -x^3, \\
 &= -2 \int d(e^u) \\
 &= -2e^u + C = -2e^{-x^3} + C.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\int \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx &= \int \sin^4 x \cos x dx \quad (\text{pues } \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x) \\
 &= \int \sin^4 x d(\sin x) \\
 &= \int u^4 du, \quad \text{donde } u = \sin x, \\
 &= \int d\left(\frac{u^5}{5}\right) \\
 &= \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.
 \end{aligned}$$

4.4 Integrales Usuales

Teorema Sea $u = u(x)$ una función diferenciable. Se cumplen las siguientes fórmulas

$$(1) \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(2) \quad \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$(3) \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$(4) \quad \int e^u du = e^u + C$$

$$(5) \quad \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$(6) \quad \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$(7) \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$(8) \quad \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + C$$

$$(9) \quad \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$(10) \quad \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u du = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$(11) \quad \int \tan u du = \ln |\sec u| + C$$

$$(12) \quad \int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$(13) \quad \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$(14) \quad \int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$$

$$(15) \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \quad (u^2 > a^2)$$

$$(16) \quad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{u}{a} + C$$

$$(17) \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$(18) \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

Las funciones hiperbólicas se definen mediante las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{cos} h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tan} h x = \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{cos} h x},$$

$$\operatorname{cot} h x = \frac{\operatorname{cos} h x}{\operatorname{sen} h x}, \quad \operatorname{sec} h x = \frac{1}{\operatorname{cos} h x}, \quad \operatorname{cosec} h x = \frac{1}{\operatorname{sen} h x}$$

$$(19) \quad \int \operatorname{sen} h u \, du = -\operatorname{cos} h u + C$$

$$(20) \quad \int \operatorname{cos} h u \, du = \operatorname{sen} h u + C$$

$$(21) \quad \int \sec h^2 u \, du = \tan hu + C$$

$$(22) \quad \int \operatorname{cosec} h^2 u \, du = -\cot hu + C$$

$$(23) \quad \int \sec hu \tan hu \, du = -\sec hu + C$$

$$(24) \quad \int \operatorname{cosec} hu \cot hu \, du = -\operatorname{cosec} hu + C$$

Ejemplo 1 Probar las fórmulas (1), (2), y (3).

Solución

(1) Puesto que $n+1 \neq 0$, la función $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ está definida. Se tiene

$$d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) du = u^n du, \text{ y por lo tanto}$$

$$\int u^n du = \int d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

(2) Tenemos $d(\ln|u|) = \frac{d}{du}(\ln|u|) du$

$$= \frac{1}{u} du \quad (\text{pues } \frac{d}{du} \ln|u| = \frac{1}{u})$$

$$\text{Luego } \int \frac{du}{u} = \int d(\ln|u|) = \ln|u| + C.$$

(3) Tenemos $d\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} da^u = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{du}(a^u) du$

$$= \frac{1}{\ln a} a^u \cdot \ln a \cdot du = a^u du.$$

$$\text{Luego } \int a^u du = \int d\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

Ejemplo 2 Hallar $\int \sqrt{a + bx} \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a + bx} \, dx &= \frac{1}{b} \int \sqrt{a + bx} \cdot d(a + bx) \\ &= \frac{1}{b} \int u^{1/2} \, du, && \text{donde } u = a + bx \\ &= \frac{1}{b} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \quad (\text{usando } \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \\ &&& \text{con } n = 1/2) \\ &= \frac{2}{3b} (a + bx)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Hallar $\int \frac{x^3 - 4x + 6}{x^2} \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x + 6}{x^2} \, dx &= \int \left(x - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} \right) dx \\ &= \int x \, dx - 4 \int \frac{dx}{x} + 6 \int x^{-2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 4 \ln |x| + 6 \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) + C \\ &= \frac{x^2}{2} - 4 \ln |x| - \frac{6}{x} + C. \end{aligned}$$

4.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Probar que

$$(1) \quad \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$(2) \quad \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$(3) \quad \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C.$$

SOLUCION

(1) De $d(\cos u) = \frac{d}{du}(\cos u) \, du = -\operatorname{sen} u \, du$
tenemos $\int \operatorname{sen} u \, du = \int d(-\cos u) = -\cos u + C.$

(2) Puesto que $d(\tan u) = \frac{d}{du}(\tan u) \cdot du = \sec^2 u \, du$
tenemos $\int \sec^2 u \, du = \int d(\tan u) = \tan u + C.$

(3) De $d(\operatorname{cosec} u) = \frac{d}{du}(\operatorname{cosec} u) \, du = -\operatorname{cosec} u \cot u \, du$
resulta $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = \int d(-\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u + C.$

PROBLEMA 2 Probar las siguientes fórmulas

$$(1) \quad \int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$$

$$(2) \quad \int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$(3) \quad \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$(4) \quad \int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + C.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad d(\ln|\sec u|) &= \frac{d}{du} (\ln|\sec u|) \cdot du \\
 &= \frac{1}{\sec u} \frac{d}{du} (\sec u) du \quad (\text{pues } \frac{d}{du} \ln|v| = \frac{1}{v} \frac{dv}{du}) \\
 &= \frac{\sec u \cdot \tan u}{\sec u} du = \tan u du.
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \int \tan u du = \int d(\ln|\sec u|) = \ln|\sec u| + C.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad d(\ln|\sen u|) &= \frac{d}{du} \ln|\sen u| du \\
 &= \frac{1}{\sen u} \frac{d}{du} (\sen u) du \quad (\text{pues } \frac{d}{du} \ln|v| = \frac{1}{v} \frac{dv}{du}) \\
 &= \frac{\cos u}{\sen u} du = \cot u du.
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \int \cot u du = \int d \ln|\sen u| = \ln|\sen u| + C.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad d(\ln|\sec u + \tan u|) &= \frac{d}{du} \ln|\sec u + \tan u| du \\
 &= \frac{1}{(\sec u + \tan u)} \cdot \frac{d}{du} (\sec u + \tan u) du \\
 &= \frac{\sec u \tan u + \sec^2 u}{\sec u + \tan u} du \\
 &= \sec u du \quad (\text{cancelando el término } \sec u + \tan u)
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \int \sec u du = \int d \ln|\sec u + \tan u| = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad d(\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|) &= \frac{d}{du} \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| du \\
 &= \frac{1}{\operatorname{cosec} u - \cot u} \frac{d}{du} (\operatorname{cosec} u - \cot u) du \\
 &= \frac{-\operatorname{cosec} u \cot u + \operatorname{cosec}^2 u}{\operatorname{cosec} u - \cot u} du = \operatorname{cosec} u du.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego } \int \operatorname{cosec} u du &= \int d \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| \\
 &= \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Probar las siguientes fórmulas

$$(1) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \quad (u^2 > a^2)$$

$$(2) \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{u}{a} + C$$

$$(3) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C, \quad (a > 0)$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \quad d \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| \right) &= \frac{1}{2a} \frac{d}{du} \left(\ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| \right) du \\ &= \frac{1}{2a} \frac{d}{du} (\ln |u-a| - \ln |u+a|) du \\ &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right) du = \frac{du}{u^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int d \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad d \left(\frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{u}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{du} (\operatorname{arc} \tan \frac{u}{a}) du \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1 + (\frac{u}{a})^2} du = \frac{du}{u^2 + a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int d \left(\frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{u}{a} \right) = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{u}{a} + C.$$

$$(3) \quad d(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a}) = \frac{d}{du} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a}) du$$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - (\frac{u}{a})^2}} du = \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int d(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a}) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C.$$

PROBLEMA 4 Probar que

$$(1) \quad \int \operatorname{sen} hu \, du = \cos hu + C$$

$$(2) \quad \int \cos hu \, du = \operatorname{sen} hu + C$$

$$(3) \quad \int \sec h^2 u \, du = \tan hu + C$$

$$(4) \quad \int \operatorname{cosec} h^2 u \, du = -\cot hu + C.$$

SOLUCION

$$(1) \quad d(\cos hu) = \frac{d}{du} (\cos hu) du = \frac{d}{du} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) du \\ = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) du = \operatorname{sen} hu \, du.$$

$$\text{Luego} \quad \int \operatorname{sen} hu \, du = \int d(\cos hu) = \cos hu + C.$$

$$(2) \quad d(\operatorname{sen} hu) = \frac{d}{du} (\operatorname{sen} hu) du = \frac{d}{du} \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) du \\ = \frac{e^u + e^{-u}}{2} du = \cos hu \, du.$$

$$\text{Luego} \quad \int \cos hu \, du = \int d(\operatorname{sen} hu) = \operatorname{sen} hu + C.$$

(3) y (4) se siguen de las siguientes identidades cuya verificación se deja al lector:

$$\frac{d}{du} (\tan hu) = \sec^2 hu$$

$$\frac{d}{du} (\cot hu) = -\operatorname{cosec} h^2 u.$$

PROBLEMA 5 Encontrar las siguientes integrales

$$(1) \int 8 a^2 x^7 dx$$

$$(2) \int (6x^2 - 8x + 5) dx$$

$$(3) \int x(x+1)(x+2) dx$$

$$(4) \int (x^3 + a)^2 dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int 8 a^2 x^7 dx &= 8 a^2 \int x^7 dx = 8 a^2 \left(\frac{x^8}{8} \right) + C \\ &= a^2 x^8 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int (6x^2 - 8x + 5) dx &= 6 \int x^2 dx - 8 \int x dx + 5 \int dx \\ &= 6 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 8 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 5x + C \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 5x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int x(x+1)(x+2) dx &= \int (x^3 + 3x^2 + 2x) dx \\ &= \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx \\ &= \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int (x^3 + a)^2 dx &= \int (x^6 + 2ax^3 + a^2) dx \\ &= \frac{x^7}{7} + \frac{ax^4}{2} + a^2x + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$(1) \int \frac{dx}{x^2}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(3) \int \sqrt[p]{px} \, dx \quad (p \neq -1)$$

$$(4) \int \sqrt{x} (5x - 3) dx$$

SOLUCION

$$(1) \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{2} x^{2/3} + C.$$

$$(3) \int \sqrt[p]{px} \, dx = \sqrt[p]{p} \int x^{1/p} dx$$

$$= \sqrt[p]{p} \left(\frac{x^{1/p+1}}{1/p+1} \right) + C = \frac{1}{p+1} \sqrt[p]{(px)^{p+1}} + C.$$

$$(4) \int \sqrt{x} (5x - 3) dx = \int (5x^{3/2} - 3x^{1/2}) dx$$

$$= 5 \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 3 \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C$$

$$= 2x^{5/2} - 2x^{3/2} + C.$$

PROBLEMA 7 Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$(1) \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$$

$$(2) \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$(3) \int (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$$

$$(4) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx &= \frac{1}{n} \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} d(nx) \\ &= \frac{1}{n} \int y^{\frac{1-n}{n}} dy, \quad \text{donde } y = nx, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{y^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C = y^{\frac{1}{n}} + C = \sqrt[n]{nx} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{2/3}} dx \\ &= \int (x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3}) dx \\ &= \frac{3}{13} x^{13/3} - \frac{3}{7} x^{7/3} - 6x^{1/3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx &= \int (a^2 - 3a^{4/3} x^{2/3} + 3a^{2/3} x^{4/3} - x^2) dx \\ &= a^2 x - \frac{9}{5} a^{4/3} x^{5/3} + \frac{9}{7} a^{2/3} x^{7/3} - \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$(4) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int (x^{3/2} + 1) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + x + C.$$

PROBLEMA 8 Calcular las siguientes integrales

$$(1) \int \frac{(3 + \ln x)}{x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{5 + 3x}$$

$$(3) \int \frac{x^3 dx}{1 + x^4}$$

$$(4) \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x}$$

$$(5) \int \frac{x dx}{a + bx^2}$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{(3 + \ln x)}{x} dx &= \int (3 + \ln x) d(3 + \ln x) \\ &= \int u du, \quad \text{donde } u = 3 + \ln x, \\ &= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(3 + \ln x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{dx}{5 + 3x} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{5 + 3x} d(5 + 3x) = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u}, \\ &\quad \text{donde } u = 5 + 3x, \\ &= \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |5 + 3x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{x^3}{1 + x^4} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{d(1 + x^4)}{1 + x^4} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u}, \\ &\quad \text{donde } u = 1 + x^4, \\ &= \frac{1}{4} \ln |u| + C = \frac{1}{4} \ln (1 + x^4) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}, \\ &\quad \text{donde } u = x^2 + 2x, \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{x dx}{a + bx^2} &= \frac{1}{2b} \int \frac{d(a + bx^2)}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \int \frac{du}{u}, \\ &\quad \text{donde } u = a + bx^2, \\ &= \frac{1}{2b} \ln |u| + C = \frac{1}{2b} \ln |a + bx^2| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$(1) \int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$$

$$(2) \int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx$$

$$(3) \int \frac{ax + b}{px + q} dx$$

$$(4) \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx &= \int \frac{(2x + 1) + 2}{(2x+1)} dx = \int dx + 2 \int \frac{dx}{2x+1} \\ &= x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \int \frac{du}{u}, \\ &\text{donde } u = 2x + 1, \\ &= x + \ln |u| + C = x + \ln |2x + 1| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx &= \int \left[a^2 + \frac{2ab}{x-a} + \frac{b^2}{(x-a)^2} \right] dx \\ &= a^2x + 2ab \ln |x-a| - \frac{b^2}{x-a} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ Escribimos } \frac{ax + b}{px + q} &= \frac{a}{p} \left(\frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{q}{p}} \right) = \frac{a}{p} \left(\frac{x + \frac{q}{p} + \frac{b}{a} - \frac{q}{p}}{x + \frac{q}{p}} \right) \\ &= \frac{a}{p} + \left(\frac{bp - aq}{p^2} \right) \cdot \frac{1}{x + \frac{q}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int \frac{ax + b}{px + q} dx &= \frac{a}{p} \int dx + \left(\frac{bp - aq}{p^2} \right) \cdot \int \frac{dx}{x + \frac{q}{p}} \\ &= \frac{a}{p}x + \left(\frac{bp - aq}{p^2} \right) \ln \left| x + \frac{q}{p} \right| + C \\ &= \frac{ax}{p} + \left(\frac{bp - aq}{p^2} \right) \cdot \ln |px + q| + C \\ &\quad \left(\text{sumando la constante } -\left(\frac{bp - aq}{p^2} \right) \ln |p| \text{ a } C \right) \end{aligned}$$

(4) Expresando $x^4 + x^2 + 1$ como suma de potencias de $x-1$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= [(x-1) + 1]^4 + [(x-1) + 1]^2 + 1 \\ &= (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 6(x-1) + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} dx &= \int \left[(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 7(x-1) + 6 + \frac{3}{x-1} \right] dx \\ &= \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{2}(x-1)^2 + 6x + 3 \ln |x-1| + C \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Calcular

$$(1) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$(2) \int \sqrt{a-bx} dx$$

$$(3) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx .$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{(x+1) - 1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int (x+1)^{-2} dx \\ &= \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + C . \end{aligned}$$

$$(2) \int \sqrt{a-bx} dx = -\frac{1}{b} \int (a-bx)^{1/2} d(a-bx) = -\frac{2}{3b} (a-bx)^{3/2} + C .$$

$$(3) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-1/2} d(x^2+1) = (x^2+1)^{1/2} + C .$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx &= \int x^{-1/2} dx + \int \ln x d(\ln x) \\ &= 2x^{1/2} + \int u du , \quad \text{donde } u = \ln x, \\ &= 2x^{1/2} + \frac{u^2}{2} + C \\ &= 2x^{1/2} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $\int \frac{e^x dx}{a + be^x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{a + be^x} &= \frac{1}{b} \int \frac{d(a + be^x)}{a + be^x} \\ &= \frac{1}{b} \int \frac{du}{u}, \quad \text{donde } u = a + be^x, \\ &= \frac{1}{b} \ln |u| + C = \frac{1}{b} \ln |a + be^x| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Calcular $\int \frac{\text{sen } x dx}{1 - \cos x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen } x dx}{1 - \cos x} &= \int -\frac{d(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \\ &= \int \frac{du}{u}, \quad \text{donde } u = 1 - \cos x, \\ &= \ln |u| + C = \ln (1 - \cos x) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 13 Encontrar $\int \frac{\sec^2 x dx}{a + b \tan x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec^2 x dx}{a + b \tan x} &= \frac{1}{b} \int \frac{d(a + b \tan x)}{a + b \tan x} \\ &= \frac{1}{b} \ln |a + b \tan x| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Hallar $\int \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} dx$.

SOLUCION
$$\int \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^3 + x) + 2x}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C .$$

PROBLEMA 15 Calcular $\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)}{\sqrt{e^x - \cos x}} dx$.

SOLUCION
$$\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)}{\sqrt{e^x - \cos x}} dx = \int (e^x - \cos x)^{-1/2} d(e^x - \cos x)$$

$$= 2(e^x - \cos x)^{1/2} + C .$$

PROBLEMA 16 Encontrar $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{3 \sec 2x - 2} dx$.

SOLUCION
$$\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{3 \sec 2x - 2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(3 \sec 2x - 2)}{(3 \sec 2x - 2)}$$

$$= \frac{1}{6} \ln |3 \sec 2x - 2| + C .$$

PROBLEMA 17 Calcular las siguientes integrales

$$(1) \int e^{\frac{x}{n}} dx \qquad (5) \int a^x e^x dx$$

$$(2) \int 10^x dx \qquad (6) \int \frac{4 dx}{\sqrt{e^x}}$$

$$(3) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \qquad (7) \int x 2^{x^2} dx$$

$$(4) \int e^{\tan x} \sec^2 x dx \qquad (8) \int \frac{x^2 dx}{e^{x^3}}$$

SOLUCION

$$(1) \int e^{\frac{x}{n}} dx = n \int e^{\frac{x}{n}} d\left(\frac{x}{n}\right) = n \int e^u du, \qquad \text{donde } u = \frac{x}{n},$$

$$= ne^u + C = ne^{\frac{x}{n}} + C.$$

$$(2) \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C.$$

$$(3) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2 \int e^u du \qquad \text{donde } u = \sqrt{x},$$

$$= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$(4) \int e^{\tan x} \sec^2 x dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = \int e^u du, \quad u = \tan x,$$

$$= e^u + C = e^{\tan x} + C.$$

$$(5) \int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + C = \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$$

$$(6) \int \frac{4 dx}{\sqrt{e^x}} = \int 4 e^{-x/2} dx = -8 \int e^{-x/2} d\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$= -8 \int e^u du, \qquad \text{donde } u = -\frac{x}{2},$$

$$= -8 e^u + C = -8 e^{-x/2} + C.$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \int x 2^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2^{x^2} d(x^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int 2^u du, && \text{donde } u = x^2, \\
 &= \frac{2^u}{2 \ln 2} + C = \frac{2^{x^2}}{\ln 4} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \int \frac{x^2 dx}{e^{x^3}} &= -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3) \\
 &= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 18 Calcular

$$(1) \quad \int 4^{2-3x} dx$$

$$(2) \quad \int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 dx$$

$$(3) \quad \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int 4^{2-3x} dx &= -\frac{1}{3} \int 4^{2-3x} d(2-3x) \\
 &= -\frac{1}{3} \int 4^u du, && \text{donde } u = 2-3x, \\
 &= -\frac{4^u}{3 \ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{\ln 64} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 dx &= \int (e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}) dx \\
 &= \frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} + C.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = \ln |e^x - 1| + C.$$

PROBLEMA 19 Calcular

(1)
$$\int \operatorname{sen}(a + bx) \, dx$$

(2)
$$\int \cos^2 x \, dx$$

(3)
$$\int (\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2 \, dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \operatorname{sen}(a + bx) \, dx &= \frac{1}{b} \int \operatorname{sen}(a + bx) \, d(a + bx) \\
 &= \frac{1}{b} \int \operatorname{sen} u \, du, \quad \text{donde } u = a + bx, \\
 &= -\frac{\cos u}{b} + C = -\frac{\cos(a + bx)}{b} + C.
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int (\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2 \, dx &= \int [\cos^2 ax + 2 \operatorname{sen} ax \cos ax + \operatorname{sen}^2 ax] \, dx \\
 &= \int (1 + \operatorname{sen} 2ax) \, dx = x - \frac{\cos 2ax}{2a} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 20 Encontrar

(1)
$$\int \sec^2(3x + 2) \, dx$$

(2)
$$\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} \, dx$$

(3)
$$\int x \cos(2 - x^2) \, dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \sec^2(3x + 2) \, dx &= \frac{1}{3} \int \sec^2(3x + 2) \, d(3x + 2) \\
 &= \frac{1}{3} \int \sec^2 u \, du, \quad \text{donde } u = 3x + 2, \\
 &= \frac{1}{3} \tan u + C = \frac{1}{3} \tan(3x + 2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx &= \int \operatorname{sen}(\ln x) d(\ln x) \\
 &= \int \operatorname{sen} u du, && \text{donde } u = \ln x, \\
 &= -\cos u + C = -\cos \ln x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int x \cos(2 - x^2) dx &= -\frac{1}{2} \int \cos(2 - x^2) d(2 - x^2) \\
 &= -\frac{1}{2} \int \cos u du, && \text{donde } u = 2 - x^2, \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 - x^2) + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 21 Calcular

$$(1) \quad \int 3 \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$(2) \quad \int \cot^2 ax dx$$

$$(3) \quad \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int 3 \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) dx &= \frac{3}{5} \int \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) d\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{3}{5} \operatorname{sen}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int \cot^2 ax dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 ax - 1) dx \\
 &= \frac{1}{a} \int \operatorname{cosec}^2 ax d(ax) - \int dx = -\frac{\cot ax}{a} - x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx &= -\frac{1}{3} \int (1 + 3 \cos^2 x)^{1/2} d(1 + 3 \cos^2 x) \\
 &\quad (\text{pues } d(\cos^2 x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x dx = -\operatorname{sen} 2x dx) \\
 &= -\frac{2}{9} (1 + 3 \cos^2 x)^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 22 Hallar

$$(1) \int \tan x \, dx \qquad (2) \int x \cot(x^2 + 1) \, dx$$

$$(3) \int \operatorname{sen}^5 4x \cos 4x \, dx \qquad (4) \int \tan^3 \frac{x}{3} \cdot \sec^2 \frac{x}{3} \, dx$$

SOLUCION

$$(1) \int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ = - \ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C .$$

$$(2) \int x \cot(x^2 + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int \cot(x^2 + 1) \, d(x^2 + 1) \\ = \frac{1}{2} \int \cot u \, du , \qquad \text{donde } u = x^2 + 1, \\ = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen} u| + C = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen}(x^2 + 1)| + C .$$

$$(3) \int \operatorname{sen}^5 4x \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} \int (\operatorname{sen} 4x)^5 \, d(\operatorname{sen} 4x) \\ = \frac{1}{4} \int u^5 \, du , \qquad \text{donde } u = \operatorname{sen} 4x, \\ = \frac{u^6}{24} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 4x}{24} + C .$$

$$(4) \int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} \, dx = 3 \int (\tan \frac{x}{3})^3 \, d(\tan \frac{x}{3}) \\ = 3 \int u^3 \, du , \qquad \text{donde } u = \tan \frac{x}{3} , \\ = \frac{3u^4}{4} + C = \frac{3}{4} \tan^4 \frac{x}{3} + C .$$

PROBLEMA 23 Hallar

$$(1) \int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3 + \cos 2x} dx$$

$$(3) \int \frac{\cot^{2/3} x}{\operatorname{sen} x} dx$$

SOLUCION

$$(1) \int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \tan \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = 2 \int \tan u du, \text{ donde } u = \sqrt{x},$$

$$= 2 \ln |\sec u| + C = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + C.$$

$$(2) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3 + \cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(3 + \cos 2x)}{3 + \cos 2x} = -\frac{1}{2} \ln |3 + \cos 2x| + C.$$

$$(3) \int \frac{\cot^{2/3} x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \cot^{2/3} x \operatorname{cosec}^2 x dx = - \int (\cot x)^{2/3} d(\cot x)$$

$$= -\frac{3}{5} (\cot x)^{5/3} + C = -\frac{3}{5} \cot^{5/3} x + C.$$

PROBLEMA 24 Calcular

$$(1) \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$(2) \int \sec \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} dx$$

$$(3) \int (\tan 4x - \cot 4x) dx$$

SOLUCION

$$(1) \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx \quad (\text{multiplicando numerador y deno-})$$

$$= \int \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int (\operatorname{sen} x)^{-2} d(\operatorname{sen} x)$$

$$= -\cot x + (\operatorname{sen} x)^{-1} + C = -\cot x + \operatorname{cosec} x + C.$$

$$(2) \int \sec \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} dx = 2 \int \sec \frac{x}{2} \cdot \tan \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right), \quad u = \frac{x}{2},$$

$$= 2 \int \sec u \cdot \tan u du = 2 \sec u + C = 2 \sec \frac{x}{2} + C.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int (\tan 4x - \cot 4x) dx &= \frac{1}{4} \int \tan 4x d(4x) - \frac{1}{4} \int \cot 4x d(4x) \\
 &= \frac{1}{4} \ln |\sec 4x| - \frac{1}{4} \ln |\sen 4x| + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln |\operatorname{cosec} 8x| + C
 \end{aligned}$$

(pues $\sec 4x \cdot \operatorname{cosec} 4x = 2 \operatorname{cosec} 8x$).

PROBLEMA 25 Hallar

$$(1) \quad \int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \cdot \cot \frac{ax}{b} dx$$

$$(2) \quad \int e^x \cot e^x dx$$

$$(3) \quad \int (\sec x - 1)^2 dx$$

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \cdot \cot \frac{ax}{b} dx &= \frac{b}{a} \int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \cdot \cot \frac{ax}{b} d\left(\frac{ax}{b}\right) \\
 &= \frac{b}{a} \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u du, \text{ donde } u = \frac{ax}{b}, \\
 &= -\frac{b}{a} \operatorname{cosec} u + C = -\frac{b}{a} \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} + C.
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int e^x \cot e^x dx = \int \cot e^x d(e^x) = \ln |\sen e^x| + C.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int (\sec x - 1)^2 dx &= \int (\sec^2 x - 2 \sec x + 1) dx \\
 &= \tan x - 2 \ln |\sec x + \tan x| + x + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 26 Hallar $\int (\sec 3x - \operatorname{cosec} \frac{x}{3}) dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{SOLUCION} \quad \int (\sec 3x - \operatorname{cosec} \frac{x}{3}) dx &= \frac{1}{3} \int \sec 3x d(3x) - 3 \int \operatorname{cosec} \frac{x}{3} d\left(\frac{x}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| - 3 \ln |\operatorname{cosec} \frac{x}{3} - \cot \frac{x}{3}| + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 27 Hallar

$$(1) \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} \quad (2) \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} ax} - 1 \right)^2 dx$$

$$(3) \int x \sec^2 x^2 dx \quad (4) \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} dx$$

SOLUCION

$$(1) \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2 \int \operatorname{cosec} 2x dx \quad (\text{pues } 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x)$$

$$= \int \operatorname{cosec} 2x d(2x) = \ln |\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x| + C.$$

$$(2) \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} ax} - 1 \right)^2 dx = \int (\operatorname{cosec} ax - 1)^2 dx$$

$$= \int [\operatorname{cosec}^2 ax - 2 \operatorname{cosec} ax + 1] dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \operatorname{cosec}^2 ax d(ax) - \frac{2}{a} \int \operatorname{cosec} ax d(ax)$$

$$= -\frac{\cot ax}{a} - \frac{2}{a} \ln |\operatorname{cosec} ax - \cot ax| + x + C.$$

$$(3) \int x \sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \int [\sec x^2]^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \tan x^2 + C.$$

$$(4) \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int (\cos 2x)^{-1/2} d(\cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos 2x)^{1/2} + C.$$

PROBLEMA 28 Probar que

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

SOLUCION

$$d \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| = \frac{d}{du} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| du$$

$$= \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}}{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

Luego

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \int d \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

PROBLEMA 29 Calcular las siguientes integrales

$$(1) \int \frac{dy}{\sqrt{16 - y^2}}$$

$$(2) \int \frac{4 dx}{4x^2 - 9}$$

$$(3) \int \frac{dx}{x^2 + 5}$$

$$(4) \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 4}}$$

SOLUCION

$$(1) \int \frac{dy}{\sqrt{16 - y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{4^2 - y^2}} = \arcsen \frac{y}{4} + C.$$

$$(2) \int \frac{4 dx}{4x^2 - 9} = 2 \int \frac{d(2x)}{(2x)^2 - 3^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 - a^2}, \quad \text{donde } u=2x, \quad a=3$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2(a)} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C.$$

$$(3) \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsen \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$(4) \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 4}} = \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 2^2}} = \ln |s + \sqrt{s^2 - 4}| + C.$$

PROBLEMA 30 Hallar

(1)
$$\int \frac{dx}{3x^2 - 12}$$

(2)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$$

(3)
$$\int \frac{dt}{2 + 9t^2}$$

(4)
$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{3x^2 - 12} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2(2)} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sqrt{4^2 - (3x)^2}} = \frac{1}{3} \arcsen \frac{3x}{4} + C.$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{dt}{2 + 9t^2} &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \frac{3t}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \arcsen \frac{3t}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} &= \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1^2} = \int \frac{du}{u^2 + a^2}, \text{ donde } u = e^x, a = 1, \\ &= \arcsen u + C = \arcsen e^x + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 31 Calcular

(1)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

(2)
$$\int \frac{dx}{1 + x + x^2}$$

(3)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} &= \int \frac{d(x-a)}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} \\ &= \arcsen \frac{x-a}{a} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int \frac{dx}{1+x+x^2} &= \int \frac{d(x + \frac{1}{2})}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} && \text{(completando cuadrados en el denominador)} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arc\,tan} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}} &= \int \frac{d(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2 - a^2}} && \text{(completando cuadrados en el denominador)} \\
 &= \ln |(x+a) + \sqrt{(x+a)^2 - a^2}| + C \\
 &= \ln |x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}| + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 32 Calcular $I = \int \frac{dx}{(a+b) - (a-b)x^2}$ ($0 < b < a$).

SOLUCION $I = \int \frac{dx}{p^2 - q^2 x^2}$, donde $p^2 = a+b$, $q^2 = a-b$,
 pues $a-b > 0$,

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{q} \int \frac{d(qx)}{(qx)^2 - p^2} = -\frac{1}{2pq} \ln \left| \frac{qx-p}{qx+p} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a-b} x + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b} x - \sqrt{a+b}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 33 Calcular $I = \int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(x^2 + 4) - 5x + 2}{x^2 + 4} dx \\
 &= \int dx - 5 \int \frac{x dx}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 4} \\
 &= x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) + \operatorname{arc\,tan} \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 34 Calcular $I = \int \frac{(2x + 5) dx}{x^2 + 2x + 5}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(x+1) + 3}{(x+1)^2 + 4} dx = \int \frac{d[(x+1)^2 + 4]}{(x+1)^2 + 4} + \int \frac{3d(x+1)}{(x+1)^2 + 4} \\ &= \ln |(x+1)^2 + 4| + \frac{3}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C \\ &= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 35 Hallar $I = \int \frac{x^2}{1 + x^6} dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{1 + (x^3)^2} = \frac{1}{3} \arctan(x^3) + C .$$

PROBLEMA 36 Hallar $I = \int \frac{3x + 8}{9x^2 - 3x - 1} dx$.

SOLUCION Completando cuadrados $9x^2 - 3x - 1 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$
 $= u^2 - \frac{5}{4}$,

donde $u = 3x - \frac{1}{2}$.

Luego $x = \frac{2u + 1}{6}$, $dx = \frac{du}{3}$.

Sustituyendo en la integral dada

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \int \frac{2u + 17}{u^2 - \frac{5}{4}} du = \frac{1}{6} \int \frac{d(u^2 - \frac{5}{4})}{u^2 - \frac{5}{4}} + \frac{17}{6} \int \frac{du}{u^2 - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| u^2 - \frac{5}{4} \right| + \frac{17}{6} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)} \cdot \ln \left| \frac{u - \frac{\sqrt{5}}{2}}{u + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| 9x^2 - 3x - 1 \right| + \frac{17}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{6x - 1 - \sqrt{5}}{6x - 1 + \sqrt{5}} \right| + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 37 Hallar

$$\int \frac{(1-x) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$$

SOLUCION

Completando cuadrados $x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1 = u^2 - 1$,
donde $u = x + 2$. Luego

$$\begin{aligned} x &= u - 2 \\ y \quad dx &= du. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral dada

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= \int \frac{(3-u)du}{\sqrt{u^2 - 1}} = 3 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} - \frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^{1/2} d(u^2 - 1) \\ &= 3 \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| - (u^2 - 1)^{3/2} + C \\ &= 3 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| - \sqrt{x^2 + 4x + 3} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 38

Encontrar

$$I = \int \frac{ax + b}{a^2x^2 + b^2} dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \int \frac{d(a^2x^2 + b^2)}{a^2x^2 + b^2} + \frac{b}{a} \int \frac{d(ax)}{(ax)^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{2a} \ln (a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{ax}{b} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 39

Hallar

$$I = \int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int (\arcsen x)^{1/2} d(\arcsen x) \\ &= \frac{2}{3} (\arcsen x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 40 Calcular $I = \int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1 + 4x^2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{d(1 + 4x^2)}{1 + 4x^2} - \frac{1}{2} \int (\arctan 2x)^{1/2} d(\arctan 2x) \\ &= \frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2) - \frac{1}{3} (\arctan 2x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 41 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^{-1/2} d \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \\ &= 2 \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 42 Hallar $I = \int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1} dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 4x + 1)}{x^4 - 4x + 1} = \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x + 1| + C.$$

PROBLEMA 43 Hallar $I = \int \left(2 + \frac{x}{2x^2 + 1} \right) \frac{dx}{2x^2 + 1}$.

SOLUCION

Tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2 + 1)}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \arctan \frac{x}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \frac{1}{4(2x^2 + 1)} + C \\ &= \sqrt{2} \arctan x\sqrt{2} - \frac{1}{4(2x^2 + 1)} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 44 Calcular $I = \int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2 + 2) - 2}{x^2 + 2} dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2} \\ &= x - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \\ &= x - \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 45 Hallar $I = \int \frac{x^3}{a^2 - x^2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{x^3 dx}{x^2 - a^2} = - \int \frac{(x^3 - a^2 x) + a^2 x}{x^2 - a^2} dx \\ &= - \int x dx - \frac{a^2}{2} \int \frac{d(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} \\ &= - \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |x^2 - a^2| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 46 Calcular $I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx$

SOLUCION

$$I = \frac{1}{3} \int (x^3 + 1)^{-1/3} d(x^3 + 1) = \frac{1}{2} (x^3 + 1)^{2/3} + C.$$

PROBLEMA 47 Hallar $I = \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$.

SOLUCION

$$I = - \int \frac{d(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)} = - \ln |\operatorname{sen} x + \cos x| + C.$$

PROBLEMA 48

Encontrar
$$I = \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx .$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int e^{\arctan x} d(\arctan x) + \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d[\ln(1+x^2)] + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} [\ln(1+x^2)]^2 + \arctan x + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 49 Calcular
$$I = \int \frac{\arcsen x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

SOLUCION
$$\begin{aligned} I &= \int \arcsen x d(\arcsen x) - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) \\ &= \frac{\arcsen^2 x}{2} - (1-x^2)^{1/2} + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 50 Hallar
$$I = \int \frac{\sen x \cos x}{\sqrt{2 - \sen^4 x}} dx .$$

SOLUCION
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sen^2 x)}{\sqrt{2 - (\sen^2 x)^2}} \\ &\quad \text{(pues } d(\sen^2 x) = 2 \sen x \cos x dx) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{2 - u^2}} , \quad \text{donde } u = \sen^2 x , \\ &= \frac{1}{2} \arcsen \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsen \left(\frac{\sen^2 x}{\sqrt{2}} \right) + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 51 Hallar $I = \int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}$.

SOLUCION Sea $u = \ln x$. Luego se tiene $x = e^u$, $dx = e^u du$.
Sustituyendo en la integral dada

$$I = \int \frac{e^u du}{e^u (4 - u^2)} = - \int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C = - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\ln x + 2}{\ln x - 2} \right| + C.$$

PROBLEMA 52 Hallar $I = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

SOLUCION $I = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + 1} = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 2} dx$

$$= \int \frac{d(\tan x)}{(\tan x)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

PROBLEMA 53 Hallar $I = \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$.

SOLUCION $I = \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} d[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]$

$$= \frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]^{3/2} + C.$$

PROBLEMA 54 Calcular

$$(1) \int (2 \operatorname{sen} h 5x - 3 \operatorname{cos} h 5x) dx$$

$$(2) \int \operatorname{sen} h^2 x dx .$$

SOLUCION

$$(1) \int (2 \operatorname{sen} h 5x - 3 \operatorname{cos} h 5x) dx = \frac{2}{5} \operatorname{cos} h 5x - \frac{3}{5} \operatorname{sen} h 5x + C .$$

$$\begin{aligned} (2) \int \operatorname{sen} h^2 x dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 dx \\ &\quad \left(\text{pues } \operatorname{sen} h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) dx = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} e^{-2x} + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right) - \frac{x}{2} + C \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} h 2x - \frac{x}{2} + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 55 Calcular $I = \int \operatorname{cosec} hx dx .$

$$\begin{aligned} \text{SOLUCION} \quad I &= \int \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} dx \\ &= 2 \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 - 1} = \frac{2}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan h \frac{x}{2} \right| + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 56 Hallar $I = \int \frac{3^{\tan hx}}{\cos h^2 x} dx$

SOLUCION $I = \int 3^{\tan hx} \sec h^2 x dx = \int 3^{\tan hx} d(\tan hx)$
 (pues $d(\tan hx) = \sec h^2 x dx$)
 $= \frac{3^{\tan hx}}{\ln 3} + C .$

PROBLEMA 57 Calcular $I = \int \tan^2 ax dx.$

SOLUCION $I = \int \tan^2 ax dx = \int (\sec^2 ax - 1) dx = \frac{\tan ax}{a} - x + C.$

PROBLEMA 58 Hallar $I = \int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\operatorname{sen} 3x} dx .$

SOLUCION $I = \int \sec 3x dx - \int \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x} dx$
 $= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{3 \operatorname{sen} 3x} + C .$

4.6 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Hallar las siguientes integrales

$$(1) \int x(2 + x^2)^2 dx \quad \text{Rpta. } \frac{x^6}{6} + x^4 + 2x^2 + C$$

$$(2) \int x(a - bx^2) dx \quad \text{Rpta. } \frac{ax^2}{2} - \frac{bx^4}{4} + C$$

$$(3) \int y(3y + 2)dy \quad \text{Rpta. } y^3 + y^2 + C$$

PROBLEMA 2 Encontrar las siguientes integrales

$$(1) \int x \sqrt{2x^2 + 3} dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{6} (2x^2 + 3)^{3/2} + C$$

$$(2) \int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}} \quad \text{Rpta. } \frac{8}{3} \sqrt{x^3 + 8} + C$$

$$(3) \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{Rpta. } 2ax^{1/2} - 2\sqrt{a}x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$(4) \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{Rpta. } \frac{2\sqrt{x^{4m+1}}}{4m+1} - \frac{4\sqrt{x^{2m+2n+1}}}{2m+2n+1} + \frac{2\sqrt{x^{4n+1}}}{4n+1} + C$$

PROBLEMA 3 Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$(1) \int \frac{(x^2 + 1)dx}{\sqrt{x^3 + 3x}} \quad \text{Rpta. } \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x} + C$$

$$(2) \int \frac{x^2 dx}{(a + bx^3)^2} \quad \text{Rpta. } \frac{-1}{3b(a + bx^3)} + C$$

$$(3) \int \frac{dy}{(a + by)^3} \quad \text{Rpta. } \frac{-1}{2b(a + by)^2} + C$$

$$(4) \int x^{n-1} \sqrt{a + bx^n} dx. \quad \text{Rpta. } \frac{2(a + bx^n)^{3/2}}{3nb} + C$$

PROBLEMA 4 Calcular

(1)
$$\int e^x \sqrt{a - be^x} dx$$

Rpta. $-\frac{2}{3b}(a-be^x)^{3/2} + C$

(2)
$$\int \frac{dx}{3^x + 5}$$

Rpta. $\frac{x}{5} - \frac{1}{5 \ln 3} \ln(3^x + 5) + C$

(3)
$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

Rpta. $-2(1-e^x)^{1/2} + C$

(4)
$$\int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}} dx$$

Rpta. $\frac{1}{b} \ln |1 - e^{-bx}| + C.$

PROBLEMA 5 Calcular las siguientes integrales

(1)
$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

Rpta. $\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C$

(2)
$$\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx$$

Rpta. $\ln |x + \cos x| + C$

(3)
$$\int a^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$$

Rpta. $\frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a} + C.$

PROBLEMA 6

(1)
$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$$

Rpta. $\frac{1}{3} \operatorname{arc} \tan \frac{x-2}{3} + C$

(2)
$$\int \frac{6x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Rpta. $3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 + C$

(3)
$$\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2}$$

Rpta. $\frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right| + C$

(4)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}$$

Rpta. $\frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}| + C$

PROBLEMA 7

Probar que:

$$(1) \quad \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx = \frac{1}{3} \ln |3x^2-2| + \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$(2) \quad \int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1}| + C.$$

PROBLEMA 8

Hallar $\int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

Rpta. $-2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C.$

PROBLEMA 9

Calcular $\int \frac{(6-x)dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$

Rpta. $\frac{9}{4} \ln |2x-3 + \sqrt{4x^2-12x+7}| - \frac{1}{4} \sqrt{4x^2-12x+7} + C.$

CAP. 2

**INTEGRACION POR PARTES E
INTEGRACION POR SUSTITUCION**

1. INTEGRACION POR PARTES

TEOREMA

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables.
Entonces se cumple

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

PRUEBA

La diferencial del producto de funciones $u \cdot v$ es

$$d(uv) = u dv + v du .$$

Luego $u dv = d(uv) - v du$, e integrando

$$\begin{aligned} \int u dv &= \int d(uv) - \int v du = uv + C - \int v du && \text{(pues } \int d(uv) = uv + C \text{)} \\ &= uv - \int v du && \text{(la constante } C \text{ es sumada a la constante} \\ &\text{de la integral indefinida } \int v du, \text{ dando lugar a otra constante)}. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $\int u dv = uv - \int v du$. ■

Ejemplo 1 Hallar $\int x \ln x \, dx$.

Solución Sean $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$.

Luego $du = \frac{1}{x}$, $v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$.

Aplicando $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, resulta

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= (\ln x) \left(\frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Integrando por partes calcular $\int x \cos nx \, dx$ y verificar la respuesta mediante diferenciación

Solución Sean $u = x$, $dv = \cos nx \, dx$.

Luego $du = dx$ y $v = \int dv = \int \cos nx \, dx = \frac{\text{sen } nx}{n}$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int x \cos nx \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = \frac{x \text{ sen } nx}{n} - \int \frac{\text{sen } nx}{n} \, dx \\ &= \frac{x \text{ sen } nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C. \end{aligned}$$

Verificación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x \text{ sen } nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C \right) &= \frac{\text{sen } nx}{n} + \frac{nx \cos nx}{n} - \frac{n \text{ sen } nx}{n^2} \\ &= x \cos nx = \text{función integrando.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encontrar $\int e^{x/4} \cos \pi x \, dx$ y verificar la respuesta mediante diferenciación de la solución hallada.

Solución

$$I = \int e^{x/4} \cos \pi x \, dx = e^{x/4} \frac{\text{sen } \pi x}{\pi} - \int \frac{e^{x/4}}{4\pi} \text{sen } \pi x \, dx \quad (1)$$

(tomando $u = e^{x/4}$, $dv = \cos \pi x \, dx$)

$$\text{Pero } \int e^{x/4} \text{sen } \pi x \, dx = -e^{x/4} \frac{\cos \pi x}{\pi} + \int \frac{e^{x/4}}{4\pi} \cos \pi x \, dx$$

(tomando $u = e^{x/4}$, $dv = \text{sen } \pi x \, dx$)

$$= -\frac{e^{x/4} \cos \pi x}{\pi} + \frac{I}{4\pi} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$I = e^{x/4} \frac{\text{sen } \pi x}{\pi} - \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{e^{x/4} \cos \pi x}{\pi} + \frac{I}{4\pi} \right), \quad \text{y despejando } I$$

$$I = \frac{4 e^{x/4} (4\pi \text{sen } \pi x + \cos \pi x)}{16\pi^2 + 1} + C.$$

Verificación

$$\frac{dI}{dx} = \frac{e^{x/4} (4\pi \text{sen } \pi x + \cos \pi x)}{16\pi^2 + 1} + \frac{4 e^{x/4} (4\pi^2 \cos \pi x - \pi \text{sen } \pi x)}{16\pi^2 + 1}$$

$$= e^{x/4} \cos \pi x \, dx.$$

Ejemplo 4 Hallar $I = \int \sec^3 x \, dx$.

Solución $I = \int \sec^3 x \, dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$
 (tomando $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$,
 $v = \tan x$)
 $= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$,
 $2I = \sec x \cdot \tan x + \int \sec x \, dx$
 $I = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$.

2. INTEGRACION POR SUSTITUCION O POR CAMBIO DE VARIABLE

2.1 Teorema. Fórmula del cambio de variable

Si $x = \phi(t)$ es una función diferenciable, entonces

$$\int f(x) \, dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

Nota

1. La igualdad a que se alude en esta fórmula se verifica en los puntos x, t tales que $x = \phi(t)$. Explícitamente, si

$$F(x) = \int f(x) \, dx \quad \text{y} \quad G(t) = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

entonces $F(x) = G(t)$ siempre que $x = \phi(t)$.

2. Para calcular $\int f(x) \, dx$, cuando se efectúa el cambio de variable $x = \phi(t)$, se procede de la siguiente manera:

a) se encuentra la integral $G(t) = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$;

b) se expresa $t = \psi(x)$ como una función de x , y se reemplaza $\psi(x)$ en la integral encontrada en a);

c) finalmente, $\int f(x) \, dx = C(\psi(x))$.

Prueba del Teorema

Sea $F(x) = \int f(x)dx$ y definamos $G(t) = F(\phi(t))$. (1)

Probaremos que $G(t)$ es la integral indefinida de la función $f(\phi(t))\phi'(t)$, esto es, que se cumple

$$\frac{dG}{dt}(t) = f(\phi(t))\phi'(t) \quad (2)$$

o equivalentemente $G(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ (3)

En efecto, se tiene $\frac{dG}{dt}(t) = \frac{d}{dt} F(\phi(t)) = \frac{dF}{dt}(x) \quad (x = \phi(t))$

$$= \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (\text{regla de la cadena})$$

$$= f(x) \cdot \phi'(t) \quad \left[\begin{array}{l} \text{pues } \frac{dF}{dx} = f(x) \text{ ya que} \\ F(x) = \int f(x)dx, \text{ y } \frac{dx}{dt} = \phi'(t) \end{array} \right]$$

$$= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t), \text{ lo cual demuestra (2).}$$

Para concluir, si $x = \phi(t)$ tenemos

$$\int f(x)dx = F(x) = F(\phi(t)) = G(t) \quad (\text{por (1)})$$

$$= \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad (\text{por (3)}).$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int x\sqrt{x-2} dx$.

Solución Sea $t = \sqrt{x-2}$. Luego $x = t^2+2$ y $dx = 2t dt$.

Entonces

$$I = \int (t^2+2)t(2t dt) = \int (2t^4 + 4t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + C,$$

y sustituyendo t

$$I = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C.$$

Ejemplo 2

Hallar $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}}$ efectuando la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Solución

Tenemos

Caso 1. $x > 2$ Tenemos $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Luego

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4}} = \int -\frac{dt}{\sqrt{1 - 4t^2}}$$

(de $x > 2$ se tiene $t > 0$ y $\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4} = \frac{1}{t} \sqrt{1 - 4t^2}$)

Por lo tanto, $I = -\frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = -\frac{1}{2} \arccos(2t) + C$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C \quad \text{si } x > 2.$$

(se usó $-\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos(u) + C$)

Caso 2. $x < -2$ Tenemos $-x < 2$ y haciendo el cambio de variable $y = -x$ se tiene

$$I = \int \frac{-dy}{(-y)\sqrt{(-y)^2 - 4}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 4}} \quad \text{con } y > 2,$$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{y}\right) + C \quad \text{(por el caso (1))}$$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{x}\right) + C.$$

En resumen

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C & \text{si } x > 2 \\ \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{x}\right) + C & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

o en forma abreviada

$$I = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{|x|}\right) + C \quad \text{si } x^2 > 2$$

2.2 Sustituciones Trigonómicas

A menudo es posible realizar el cálculo de una integral efectuando una sustitución trigonométrica lo que da lugar a una integral que contiene funciones trigonométricas.

1. La integral contiene el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \cos t$ y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$.

2. La integral contiene el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \sec t$ y $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$.

3. La integral contiene el radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \tan t$ y $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$.

Nota

Sobre la sustitución trigonométrica para el caso $\sqrt{x^2 - a^2}$

Cuando se hace una sustitución trigonométrica del tipo 2, se procede de la siguiente manera:

- (1) se encuentra la integral cuando $x > a$;
 - (2) se encuentra la integral cuando $x < -a$, para lo cual se hace el cambio de variable $y = -x$, y así el cálculo de la integral se reduce al caso anterior;
- y
- (3) la integral resultante se compone entonces de dos integrales, una para el intervalo $x > a$ y otra para el intervalo $x < -a$. (Ver ej. 2). No obstante, a veces estas dos integrales pueden resultar iguales y dar una sola expresión para la integral buscada. (Ver ej. 3).

Ejemplo 1 Mediante sustituciones trigonométricas hallar

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-x^2}}.$$

Solución

Sea $x = \sqrt{3} \cos t$. Luego $\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3} \sin t$, $dx = -\sqrt{3} \sin t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\sqrt{3} \cos t)^3 (-\sqrt{3} \sin t dt)}{\sqrt{3} \sin t} = -3\sqrt{3} \int \cos^3 t dt \\ &= -3\sqrt{3} \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= -3\sqrt{3} \int \cos t dt + 3\sqrt{3} \int \sin^2 t d(\sin t) \\ &= -3\sqrt{3} \sin t - \sqrt{3} \sin^3 t + C, \end{aligned}$$

y sustituyendo $\sin t = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$

$$I = -3\sqrt{3-x^2} + \frac{1}{3}(3-x^2)^{3/2} + C,$$

$$= -2\sqrt{3-x^2} - \frac{x^2}{3}\sqrt{3-x^2} + C$$

(pues $(3-x^2)^{3/2} = (3-x^2)\sqrt{3-x^2}$).

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$.

Solución

Caso 1. $x > a$. Sea $x = a \sec t$. (1)

Luego $dx = a \sec t \tan t dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a^3 \sec^3 t a \tan t} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{a^3} \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{t}{2a^3} + \frac{\sin 2t}{4a^3} + C \\ &= \frac{t}{2a^3} + \frac{\sin t \cos t}{2a^3} + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora debemos despejar t de la ecuación (1) y reemplazarlo en (2).

De (1) se tiene $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{a}{x}$, $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$,

y sustituyendo en (2)

$$I = \frac{1}{2a^3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2}, \quad \text{si } x > a.$$

Caso 2. $x < -a$. Entonces $-x > a$, y haciendo el cambio de variable $y = -x$ se cumple $y > a$, y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-dy}{(-y)^3 \sqrt{(-y)^2 - a^2}} = \int \frac{dy}{y^3 \sqrt{y^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{2a^3} \arcsin \frac{y}{a} + \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{2a^2 y^2} \quad (\text{por el caso (1), ya que } y > a) \\ &= \frac{1}{2a^3} \arcsin \left(-\frac{x}{a}\right) + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2} \quad \text{si } x < -a. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Probar la fórmula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$.

Solución

Caso 1. $x > a$. Sea $x = a \sec t$.

Luego $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$, $dx = a \sec t \tan t dt$,

$$y \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a \tan t} = \int \sec t dt$$

$$= \ln |\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C, \quad \text{si } x > a$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1 \quad \text{donde } C_1 = C - \ln a.$$

Caso 2. $x < -a$. Entonces $-x > a$ y haciendo el cambio de variable $y = -x$, se tiene $y > a$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = - \ln |y + \sqrt{y^2 - a^2}| + C \\ &\quad \text{(por el caso (1))} \\ &= - \ln |-x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} \right| + C, \quad \text{(racionalizando)} \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1, \quad \text{si } x < -a, \\ &\quad \text{donde } C_1 = C - \ln a^2 \end{aligned}$$

Resumiendo, en ambos casos se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

Ejemplo 4 Hallar $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Solución

Sea $x = a \tan t$. Luego se tiene $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$,
 $dx = a \sec^2 t dt$.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \sec^3 t dt = a^2 \left[\frac{\sec t \tan t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \tan t|}{2} \right] + C$$

(ver ej. 4, pág.51)

y reemplazando $\tan t$ y $\sec t$

$$= \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|}{2} + C.$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int (x^2 + 2x + 3) \cos 2x \, dx$.

SOLUCION Tenemos

$$I = (x^2 + 2x + 3) \frac{\text{sen } 2x}{2} - \int \frac{(2x+2)\text{sen } 2x}{2} dx$$

(tomando $u = x^2 + 2x + 3$ y $dv = \cos 2x \, dx$, $v = -\frac{\text{sen } 2x}{2}$)

Calculamos la última integral

$$\begin{aligned} \int (x+1)\text{sen } 2x \, dx &= (x+1) \frac{(-\cos 2x)}{2} - \int \frac{(-\cos 2x)}{2} dx \\ &\text{(tomando } u = x+1 \text{ y } dv = \text{sen } 2x \, dx, v = -\frac{\cos 2x}{2}\text{)} \\ &= -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \text{sen } 2x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \frac{(x^2 + 2x + 3)\text{sen } 2x}{2} + \frac{(x+1)\cos 2x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + C \\ &= \frac{(2x^2 + 4x + 5)\text{sen } 2x}{4} + \frac{(x+1)\cos 2x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$.

SOLUCION

$$I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

(tomando $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ y $dv = dx$, entonces $v = x$,

$$du = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$\text{Luego } I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

PROBLEMA 6

Calcular $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx.$

SOLUCION

$$I = (x^2 - 2x + 5)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(2x - 2)dx$$

(tomando $u = x^2 - 2x + 5$ y $dv = e^{-x} dx$, $v = -e^{-x}$)

Calculamos la segunda integral

$$\int e^{-x}(2x - 2)dx = (2x - 2)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})2 dx$$

(tomando $u = 2x - 2$ y $dv = e^{-x} dx$)

$$= -2xe^{-x} + C.$$

Luego $I = -(x^2 + 5)e^{-x} + C.$

PROBLEMA 7 Encontrar $I = \int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^2}$

SOLUCION

$$I = \frac{-x^2}{2(x^2 + a^2)} + \int \frac{2x dx}{2(x^2 + a^2)}$$

(tomando $u = x^2$ y $dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $v = \frac{-1}{2(x^2 + a^2)}$)

$$= \frac{-x^2}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

PROBLEMA 8

Hallar $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$$

(tomando $u = e^{ax}$ y $dv = \operatorname{sen} bx \, dx$, $v = -\frac{\operatorname{sen} bx}{b}$)

Pero

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}(-\cos bx)}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} (-\cos bx) \, dx$$

(tomando $u = e^{ax}$ y $dv = \operatorname{sen} bx \, dx$; $v = -\frac{\cos bx}{b}$)

$$= -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} I$$

Luego $I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$

de donde $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$.

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int x^3 \sqrt{1 + 2x^2} \, dx$.

SOLUCION Tomamos $u = x^2$ y $dv = x \sqrt{1 + 2x^2} \, dx$,

$$v = \frac{1}{6} (1 + 2x^2)^{3/2}.$$

$$I = \frac{x^2 (1 + 2x^2)^{3/2}}{6} - \frac{1}{3} \int (1 + 2x^2)^{3/2} x \, dx$$

$$= \frac{x^2 (1 + 2x^2)^{3/2}}{6} - \frac{(1 + 2x^2)^{5/2}}{30} + C$$

$$= \frac{(3x^2 - 1)(1 + 2x^2)^{3/2}}{30} + C.$$

PROBLEMA 10

Encontrar $I = \int \frac{x^2 dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$.

SOLUCION Observemos que

$$d(x \cos x - \operatorname{sen} x) = (\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x) dx = -x \operatorname{sen} x dx$$

Luego tomando $u = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, $dv = \frac{x \operatorname{sen} x}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} dx$,

$v = \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x}$, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x \operatorname{sen} x dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x} - \int \frac{(\operatorname{sen} x - x \cos x) dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x) \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{x}{\operatorname{sen} x (x \cos x - \operatorname{sen} x)} - \cot x + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int x^2 \operatorname{sen}^2 x dx$.

SOLUCION De $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ tenemos

$$I = \frac{1}{2} \int (x^2 - x^2 \cos 2x) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x dx .$$

Calculamos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} - \int x \operatorname{sen} 2x dx \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} - \left[\frac{-x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx \right] \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{(2x^2 - 1) \operatorname{sen} 2x}{8} - \frac{x \cos 2x}{4} + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int x e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION

$$I = -x e^x \cos x + \int (e^x + x e^x) \cos x \, dx$$

(tomando $u = x e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$; $v = -\cos x$)

$$= -x e^x \cos x + [(e^x + x e^x) \operatorname{sen} x - \int (2e^x + x e^x) \operatorname{sen} x \, dx]$$

(tomando $u = e^x + x e^x$, $dv = \cos x \, dx$).

$$= e^x (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - x \cos x) - 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx - I$$

$$\text{Luego } I = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - x \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \quad (1)$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\ &= -e^x \cos x + [e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx] \end{aligned}$$

$$\text{de donde } \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C,$$

y sustituyendo en (1) resulta

$$I = \frac{1}{2} e^x (x \operatorname{sen} x - x \cos x + \cos x) + C.$$

PROBLEMA 13 Hallar $I = \int \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \, dx$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int x \sec^2 \frac{x}{2} \, dx + \int \tan \frac{x}{2} \, dx \\ &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} \, dx + \int \tan \frac{x}{2} \, dx = x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Calcular $I = \int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

SOLUCION

$$I = -\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

(tomando $u = x$ y $dx = \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, $v = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}$)

$$= -x \operatorname{cosec} x + \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C.$$

NOTA $\operatorname{cosec} x - \cot x = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$.

PROBLEMA 15 Encontrar $I = \int \ln^2 x dx$.

SOLUCION Tenemos $u = \ln^2 x$, $dv = dx$, $v = x$

Se tiene $I = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$

Pero por el problema (3) $\int \ln x dx = (x - 1) \ln x + C$.

Luego $I = x \ln^2 x - 2(x - 1) \ln x + C$.

PROBLEMA 16 Calcular $I = \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$.

SOLUCION

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} x dx \quad (\text{tomando } u = \operatorname{sen}(\ln x), dv = dx)$$

y calculando la segunda integral

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)x}{x} dx$$

(tomando $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$)

Luego $I = x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$,

de donde $I = \frac{x}{2} [\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.

PROBLEMA 17

Encontrar $I = \int x^3 e^{-x/3} dx$

SOLUCION

$$I = x^3 (-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3})(3x^2) dx$$

(tomando $u = x^3$ y $dv = e^{-x/3} dx$, $v = -3e^{-x/3}$)

$$= -3x^3 e^{-x/3} + 9 \int x^2 e^{-x/3} dx$$

Pero $\int x^2 e^{-x/3} dx = x^2 (-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3})(2x) dx = -3x^2 e^{-x/3} + 6 \int x e^{-x/3} dx$

$$= -3x^2 e^{-x/3} + 6 [x(-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3}) dx]$$

$$= -3x^2 e^{-x/3} - 18x e^{-x/3} - 54 e^{-x/3} + C.$$

Luego $I = -3e^{-x/3} [x^3 + 9x^2 + 54x + 162] + C.$

PROBLEMA 18 Hallar $I = \int \frac{\operatorname{arc} \cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

SOLUCION Hagamos el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$ y $dx = 2t dx$.

Luego $I = \int \frac{\operatorname{arc} \cot t}{t} (2t dt) = 2 \int \operatorname{arc} \cot t dt$

$$= 2 [t \operatorname{arc} \cot t - \int \left(\frac{-1}{1+t^2} \right) t dt]$$

(tomando $u = \operatorname{arc} \cot t$, $dv = dt$)

$$= 2 [t \operatorname{arc} \cot t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2)] + C$$

$$= 2 \sqrt{x} \operatorname{arc} \cot \sqrt{x} + \ln(1+x) + C.$$

PROBLEMA 19

Encontrar $I = \int \sec^5 x \, dx$.

SOLUCION

Tomamos $u = \sec^3 x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$, $v = \tan x$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \sec^3 x \tan x - \int (\tan x) (3 \sec^2 x) \sec x \tan x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \tan^2 x \sec^3 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 I + 3 \int \sec^3 x \, dx, \end{aligned}$$

y despejando I

$$I = \frac{1}{4} \sec^3 x \cdot \tan x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx.$$

Pero $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$

(ver ej. 4, pág 51)

y por lo tanto

$$I = \frac{1}{8} \sec x \cdot \tan x \cdot (2 \sec^2 x + 3) + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

PROBLEMA 20

Calcular $I = \int \arcsen x \, dx$.

SOLUCION

$$I = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

(tomando $u = \arcsen x$, $dv = dx$)

$$= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2)$$

$$= x \arcsen x + (1-x^2)^{1/2} + C.$$

PROBLEMA 21 Calcular $I = \int x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION Hagamos el cambio de variable $t = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$. Luego $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t \, dt$ y

$$\begin{aligned} I &= \int t \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int t \operatorname{sen} 2t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) dt \right] \\ &\quad \text{(tomando } u = t, \, dv = \operatorname{sen} 2t \, dt, \, v = -\frac{\cot 2t}{2}) \\ &= -\frac{t \cos 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{8} + C \\ &= -\frac{t}{4} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t) + \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{4} + C \\ &= -\frac{(1 - 2x^2)}{4} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 22 Calcular $I = \int x \sec^2 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= x \tan x - \int \tan x \, dx \quad \text{(tomando } u = x, \, dv = \sec^2 x \, dx, \, v = \tan x) \\ &= x \tan x - \ln |\sec x| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 23 Hallar $I = \int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= 2 \int t e^t \, dt = 2 \left[t e^t - \int e^t \, dt \right] \\ &\quad \text{(tomando } u = t, \, dv = e^t \, dt, \, v = e^t) \\ &= e(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 24 Calcular $I = \int x^2 \operatorname{sen} hx \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= x^2 \cos hx - 2 \int x \cos hx \, dx \\
 &\quad \text{(tomando } u = x^2, \, dv = \operatorname{sen} hx \, dx, \, v = \cos hx) \\
 &= x^2 \cos hx - 2 \left[x \operatorname{sen} hx - \int \operatorname{sen} hx \, dx \right] \\
 &\quad \text{(tomando } u = x, \, dv = \cos hx \, dx, \, v = \operatorname{sen} hx) \\
 &= x^2 \cos hx - 2x \operatorname{sen} hx + 2 \cos hx + C \\
 &= (x^2 + 2) \cos hx - 2x \operatorname{sen} hx + C .
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 25 Hallar $I = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} \, dx$.

SOLUCION

Tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int x \ln(1-x) \, dx - \int x \ln(1+x) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(1-x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-dx}{1-x} \right] - \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x} \right] \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1+x} \\
 \text{Pero } \int \frac{x^2 \, dx}{1-x} &= \int \frac{-(1-x^2) + 1}{1-x} \, dx = - \int (1+x) \, dx + \int \frac{dx}{1-x} \\
 &= -x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x) + C_1 \\
 \text{y } \int \frac{x^2 \, dx}{1+x} &= \int \frac{-(1-x^2) + 1}{1+x} \, dx = - \int (1-x) \, dx + \int \frac{dx}{1+x} \\
 &= -x + \frac{x^2}{2} + \ln(1+x) + C_2 .
 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $I = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} - x + C$.

PROBLEMA 26 Hallar $I = \int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \arcsen \sqrt{x}$.

Luego $\sen t = \sqrt{x}$, $\sqrt{1-x} = \cos t$, $x = \sen^2 t$, $dx = 2 \sen t \cos t dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t \sen t \cos t dt}{\cos t} = 2 \int t \sen t dt \\ &= 2 [-t \cot t + \int \cos t dt] = -2t \cos t + 2 \sen t + C. \end{aligned}$$

Finalmente, $I = -2 \arcsen \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} + C$.

3.2 Integración por sustitución

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$

SOLUCION Hagamos $t = \sqrt{x+1}$. Luego $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t^2-1)t dt}{t} = 2 \int (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 - 2t + C \\ &= \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

SOLUCION Hagamos $t = 1 + \sqrt{x}$. Luego $x = (t-1)^2$ y $dx = 2(t-1)dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} = 2t - 2 \ln t + C. \\ &= 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln (1 + \sqrt{x}) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln (1 + \sqrt{x}) + C_1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Calcular $I = \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$ haciendo $t = \operatorname{sen} x$.

SOLUCION Tenemos $dt = \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C \\ &= \ln |\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Hallar $I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx$.

SOLUCION Hagamos $y = \sqrt{e^x + 1}$.

Luego $e^x = y^2 - 1$, $x = \ln(y^2 - 1)$, $dx = \frac{2y \, dy}{y^2 - 1}$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(y^2 - 1)^2 2y}{y(y^2 - 1)} \, dy = 2 \int (y^2 - 1) \, dy \\ &= \frac{2}{3} y^3 - 2y + C = \frac{2}{3} y(y^2 - 3) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{e^x + 1} \cdot (e^x - 2) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \, dx$.

SOLUCION Sea $t = 1 + \sqrt{x}$. Luego $x = (t-1)^2$ y $dx = 2(t-1)dt$.

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 + (t-1)^2}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2 \int (t^2 - 3t + 4 - \frac{2}{t}) dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 - 3t^2 + 8t - 4 \ln t + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \sqrt{x})^3 - 3(1 + \sqrt{x})^2 + 8(1 + \sqrt{x}) - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 - x + 4 \sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C_1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

SOLUCION Completando cuadrados

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b) &= x^2 - (a+b)x + ab = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab \\ &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^2 - A^2,\end{aligned}$$

donde $t = x - \frac{a+b}{2}$ y $A = \frac{a-b}{2}$, $dt = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - A^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - A^2} \right| + C \\ &= \ln \left| x - \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)} \right| + C.\end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int \sqrt{25 - 9x^2} dx$.

SOLUCION Hagamos $3x = 5 \cos t$, $\sqrt{25 - 9x^2} = 5 \operatorname{sen} t$ y $dx = -\frac{5}{3} \operatorname{sen} t dt$. Luego

$$\begin{aligned}I &= -\frac{25}{3} \int \operatorname{sen}^2 t dt = -\frac{25}{3} \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= -\frac{25}{6} t + \frac{25}{12} \operatorname{sen} 2t + C = -\frac{25}{6} t + \frac{25}{6} \operatorname{sen} t \cos t + C \\ &= -\frac{25}{6} \arccos \frac{3x}{5} + \frac{x}{2} \sqrt{25 - 9x^2} + C.\end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar la siguiente integral $\int \frac{\operatorname{arc} \tan x}{1+x^2} dx$.

SOLUCION Sea $t = \operatorname{arc} \tan x$.

Luego $x = \tan t$, $1+x^2 = \sec^2 t$ y $dx = \sec^2 t dt$.

Se tiene entonces

$$\int \frac{\operatorname{arc} \tan x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \tan x)^2 + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \sec x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx$$

Sea $u = \sec x + \tan x$. Luego $du = \sec x (\tan x + \sec x) dx$ y por lo tanto

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

PROBLEMA 10 Hallar $I = \int \sec^5 x \tan^5 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^4 x \tan^4 x \sec x \tan x \, dx \\ &= \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \tan x \, dx. \end{aligned}$$

Sea $u = \sec x$. Luego $du = \sec x \tan x \, dx$ y se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int u^4 (u^2 - 1)^2 \, du = \int (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du = \frac{u^9}{9} - \frac{2}{7} u^7 + \frac{u^5}{5} + C \\ &= \sec^5 x \left(\frac{\sec^4 x}{9} - \frac{2}{7} \sec^2 x + \frac{1}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Calcular $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{4 - \ln^2 x}}$.

SOLUCION Sea $t = \ln x$. Luego $dt = \frac{dx}{x}$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsen \frac{t}{2} + C \\ &= \arcsen \left(\frac{\ln x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \operatorname{cos}^2 x}$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{b^2} \int \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + \left(\frac{a}{b} \tan x\right)^2}$$

Sea $t = \frac{a}{b} \tan x$. Luego $dt = \frac{a}{b} \sec^2 x \, dx$ y se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b^2} \int \frac{\frac{b}{a} dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \tan t + C \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 13 Hallar $I = \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{1+x}]^{1/2}}$.

SOLUCION Sea $t = 1 + \sqrt{1+x}$.

Luego $x = (t-1)^2 - 1$ y $dx = 2(t-1)dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t-1)dt}{t^{1/2}} = 2 \int (t^{1/2} - t^{-1/2}) dt \\ &= \frac{4}{3} t^{3/2} - 4t^{1/2} + C = \frac{4}{3} t^{1/2} (t-3) + C \\ &= \frac{4}{3} (1 + \sqrt{1+x})^{1/2} \cdot (\sqrt{1+x} - 2) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

SOLUCION Sea $t = x^2$, $dt = 2x dx$. Luego

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 + C.$$

PROBLEMA 15 Calcular $I = \int \frac{dx}{1 + \cos 8x}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{dx}{2 \cos^2 4x} = \frac{1}{2} \int \sec^2 4x dx = \frac{1}{8} \int \sec^2 4x d(4x)$$

$$= \frac{1}{8} \tan 4x + C.$$

PROBLEMA 16 Hallar $I = \int \frac{dx}{3 + \sqrt{1+2x}}$.

SOLUCION Sea $t = 3 + \sqrt{1+2x}$.

Luego $2x = (t-3)^2 - 1$ y $dx = (t-3)dt$.

Se tiene entonces

$$I = \int \frac{(t-3)dt}{t} = t - 3 \ln t + C$$

$$= \sqrt{1+2x} - 3 \ln(3 + \sqrt{1+2x}) + C_1 .$$

PROBLEMA 17 Hallar $I = \int x^5 \sqrt{1+x^3} dx$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{1+x^3}$, $x^3 = t^2 - 1$ y $3x^2 dx = 2t dt$.

Luego

$$I = \int x^3 \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3} \int (t^2 - 1) t^2 dt = \frac{2}{3} \int (t^4 - t^2) dt$$

$$= \frac{2}{15} t^5 - \frac{2}{9} t^3 + C$$

$$= \frac{2}{15} (1+x^3)^{5/2} - \frac{2}{9} (1+x^3)^{3/2} + C.$$

PROBLEMA 18 Calcular $I = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

SOLUCION Sea $x = a \tan t$, $dx = a \sec^2 t dt$. Luego

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{\operatorname{sen} t}{a^2} + C$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

PROBLEMA 19 Calcular $I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$.

SOLUCION

PASO 1 Hagamos $t = \frac{1}{x}$. Entonces $x = \frac{1}{t}$ y $dt = -\frac{dx}{x^2}$. Luego

$$I = - \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt.$$

PASO 2 Hagamos $t = \cos u$. Entonces $dt = -\operatorname{sen} u du$.

$$I = - \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \int \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \operatorname{sen} u du$$

$$= 2 \int \tan \frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{u}{2} du = 2 \int \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} du$$

$$= \int (1 - \cos u) du = u - \operatorname{sen} u + C = \arccos t - \sqrt{1-t^2} + C$$

$$= \arccos \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} + C.$$

PROBLEMA 20 Calcular $I = \int \frac{dx}{x^{3/2} - x^{5/2}}$.

SOLUCION Sea $x = t^2$. Luego $dx = 2t dt$ y

$$I = 2 \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = 2 \int \frac{(1-t^2) + t^2}{t^2(1-t^2)} dt = 2 \int t^{-2} dt + 2 \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= -2t^{-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C.$$

PROBLEMA 21 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$. Luego $x = (t^2 - 1)^2$ y $dx = 4(t^2 - 1)t dt$, y por tanto

$$I = 4 \int (t^2 - 1) dx = \frac{4t^3}{3} - 4t + C = \frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{3/2} - 4(\sqrt{x} + 1)^{1/2} + C.$$

PROBLEMA 22 Encontrar $\int \frac{x dx}{[1 + x^2 + (1 + x^2)^{3/2}]^{1/2}}$

SOLUCION

Sea $t = 1 + x^2$. Luego $dt = 2x dx$ y

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2} (1 + t^{1/2})^{1/2}}$$

Haciendo ahora $t^{1/2} = u$ y $dt = 2u du$ se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{2u du}{u(1+u)^{1/2}} = \int \frac{du}{(1+u)^{1/2}} = 2(1+u)^{1/2} + C \\ &= 2(1+t^{1/2})^{1/2} + C = 2\sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 23 Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

SOLUCION

Completando cuadrados $x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$

Hagamos $t = x - \frac{1}{2}$. Luego $dt = dx$ y

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} = \arcsen \left(\frac{t}{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \arcsen (2t) + C = \arcsen (2x - 1) + C.$$

PROBLEMA 24 Aplicando sustitución trigonométrica encontrar las siguientes integrales

$$(1) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

SOLUCION

(1) Hagamos $x = \cos t$, $1-x^2 = \text{sen } t$ y $dx = -\text{sen } t dt$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= - \int \frac{\cos^2 t \text{ sen } t dt}{\text{sen } t} = - \int \cos^2 t dt = - \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2t}{4} + C = - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } t \cos t}{2} + C \\ &= - \frac{1}{2} \arccos x - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

(2) **Caso 1. $x > 1$.** Hagamos $x = \sec t$, $\sqrt{x^2-1} = \tan t$ y $dx = \sec t \tan t dt$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sec t \tan t dt}{\sec t \tan t} = \int dt = t + C \\ &= \arccos x + C, \qquad \text{cuando } x > 1. \end{aligned}$$

Caso 2. $x < -1$. Hagamos $t = -x$. Luego $t > 1$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dt}{t \sqrt{t^2-1}} = \arccos t + C \quad (\text{por el caso 1}). \\ &= \arccos(-x) + C, \quad \text{cuando } x < -1. \end{aligned}$$

4 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Calcular $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

Rpta. $\frac{-x \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C.$

PROBLEMA 2 Hallar $\int 3^x \cos x \, dx$.

Rpta. $\frac{3^x (\operatorname{sen} x + \ln 3 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 3)^2} + C.$

PROBLEMA 3 Hallar $\int \sqrt{\frac{3+x}{1-x}} \, dx$.

Sugerencia Hágase $t = \sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$.

Rpta. $4 \operatorname{arc} \tan \sqrt{\frac{3+x}{1-x}} - \sqrt{(3+x)(1-x)} + C.$

PROBLEMA 4 Integrando por sustitución calcular

$$\int x^2 (x+3)^{11} \, dx.$$

Sugerencia Hágase $t = x+3$, $x = t-3$ y $dx = dt$.

Rpta. $\frac{(x+3)^{14}}{14} - \frac{6(x+3)^{13}}{13} + \frac{3(x+3)^{12}}{4} + C.$

PROBLEMA 5

Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

Rpta. $\frac{2\sqrt{\cos x}}{5} (\cos^2 x - 5) + C.$

PROBLEMA 6

Calcular $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$

Sugerencia

Considérese $x = \tan t,$
 $dx = \sec^2 t dt.$

Rpta. $\sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} \right| + C.$

CAP. 3

LA INTEGRAL DEFINIDA

1 SUMAS

1.1 Definición Designamos la suma de los números reales x_1, \dots, x_n , empleando la notación

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n$$

EJEMPLOS

$$(1) \quad \sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^3 \cos\left(\frac{\pi k}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i = -1 + 1 + \dots + (-1)^n$$

En general, la suma indicada desde el término x_m hasta el término x_n , $m \leq n$, se designa con

$$\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + \dots + x_n$$

Ejemplos

$$(1) \quad \sum_{i=5}^9 i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \quad (= 35)$$

$$(2) \quad \sum_{k=-2}^1 (5k-3) = [5(-2)-3] + [5(-1)-3] + [5(0)-3] + [5(1)-3] \\ (= -22)$$

$$(3) \quad \sum_{j=51}^{100} j^2 = (51)^2 + (52)^2 + \dots + (99)^2 + (100)^2 \\ (= 295,425)$$

1.2 Propiedades de las Sumas

Teorema Se cumple

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n c = cn, \quad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n c x_i = c \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^n x_i \pm \sum_{i=1}^n y_i$$

(4) Propiedad telescópica

$$\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1.$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=m+1}^n x_i, \quad \text{si } m < n.$$

Prueba de (4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \dots + (x_{n+1} - x_n) \\ &= -x_1 + (x_2 - x_2) + (x_3 - x_3) + \dots + (x_n - x_n) + x_{n+1} \\ &= x_{n+1} - x_1. \end{aligned}$$

1.3 Algunas Sumas

$$(1.3.1) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(1.3.2) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$(1.3.3) \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(1.3.4) \quad \sum_{i=0}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + A_{p-1} n^{p-1} + \dots + A_1 n + A_0,$$

donde p es un número entero no negativo y A_0, A_1, \dots, A_p , son constantes.

$$(1.3.5) \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right].$$

1.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Probar que
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCION Sea $S = \sum_{i=1}^n i$. Tenemos

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \text{y sumando miembro a miembro} \\ 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ sumandos}} \end{aligned}$$

$$2S = n(n+1)$$

Luego
$$S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PROBLEMA 2 Probar que
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SOLUCION Sea $S = \sum_{i=1}^n i^2$.

Para $i = 1, 2, \dots, n$, tenemos

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1,$$

y sumando miembro a miembro

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

(el primer miembro por la propiedad telescópica de la suma; y

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ por el problema 1).}$$

Despejando S

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} [2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)] = \frac{n+1}{6} [2(n+1)^2 - 3n - 2] \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Por inducción sobre p probar que se cumple

$$\sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_1 n + A_0 ,$$

en donde A_0, \dots, A_p son constantes.

SOLUCION

Sea $S_p = \sum_{i=1}^n i^p$. Debemos probar que S_p es un polinomio en n cuyo término de mayor grado es $\frac{1}{p+1} n^{p+1}$.

Sumando miembro a miembro las identidades

$$(i+1)^{p+1} - i^{p+1} = (p+1)i^p + \frac{(p+1)p}{2} i^{p-1} + \dots + (p+1)i + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

y aplicando la propiedad telescópica a la suma del primer miembro se obtiene

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p + \frac{(p+1)p}{2} S_{p-1} + \dots + (p+1)S_1 + S_0 \quad (1)$$

Si $p = 0$ tenemos $(n+1) - 1 = S_0$, de donde $S_0 = n$ y se cumple la fórmula indicada.

Supongamos ahora que S_0, \dots, S_{p-1} son polinomios en n de grado $\leq p$. Entonces $Q = \frac{(p+1)p}{2} S_{p-1} + \dots + (p+1)S_1 + S_0$ tiene grado $\leq p$ y (1) se expresa así:

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p + Q \quad (2)$$

Por otro lado tenemos que

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n^{p+1} + \frac{(p+1)p}{2} n^p + \dots + (p+1)n = n^{p+1} + R, \quad (3)$$

en donde R es un polinomio de grado p .

Reemplazando (3) en (2) y despejando S_p resulta

$S_p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{p+1} (R-Q) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + T$, siendo T un polinomio de grado $\leq p$.

Así, para S_p también se cumple la fórmula y concluye la prueba.

PROBLEMA 4

Probar que
$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right].$$

SOLUCION

Usamos la identidad $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ con $a = ix$, $b = \frac{x}{2}$, y obtenemos para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\operatorname{sen} ix \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(i - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(i + \frac{1}{2} \right) x \right] = -\frac{1}{2} (y_{i+1} - y_i), \text{ donde } y_i = \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) x.$$

Sumando miembro a miembro resulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \\ &= -\frac{1}{2} (y_{n+1} - y_1) \quad (\text{propiedad telescópica}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \text{ y por lo tanto} \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Hallar
$$\sum_{i=1}^{100} (2i+5).$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \sum_{i=1}^n (2i+5) &= 2 \sum_{i=1}^n i + 5 \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 5n \\ &= n(n+6). \end{aligned}$$

Luego, para $n = 100$ se obtiene $100(100+6) = 10,600$.

PROBLEMA 6

Hallar
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i.$$

SOLUCION

Tenemos
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 7

Hallar
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p.$$

SOLUCION

Por el problema 3,
$$\sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_0,$$

y por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p+1} + \frac{A_p}{n} + \dots + \frac{A_0}{n^{p+1}} \right] = \frac{1}{p+1}.$$

PROBLEMA 8 Calcular

$$\sum_{i=0}^n i^3$$
 usando el método de los coeficientes indeterminados.

SOLUCION Por el problema 3,

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4} n^4 + A n^3 + B n^2 + C n + D.$$

Dando valores $n = 0, 1, 2$ y 3 , se obtienen las ecuaciones

$$0 = D, \quad 1 = \frac{1}{4} + A + B + C + D,$$

$$9 = \frac{16}{4} + 8A + 4B + 2C + D, \quad 36 = \frac{81}{4} + 27A + 9B + 3C + D,$$

de donde $D = 0$ y resolviendo las ecuaciones restantes

$$A + B + C = \frac{3}{4}, \quad 4A + 2B + C = \frac{10}{4}, \quad 9A + 3B + C = \frac{21}{4},$$

se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = 0$.

Luego
$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4} (n^2 + 2n + 1) = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

2 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO UN LIMITE DE SUMAS

2.1 Sumas de Integral

Definición

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Una **suma de integral** (o **suma de Riemann**) de $f(x)$ en $[a,b]$, es una suma de la forma

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

donde (1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

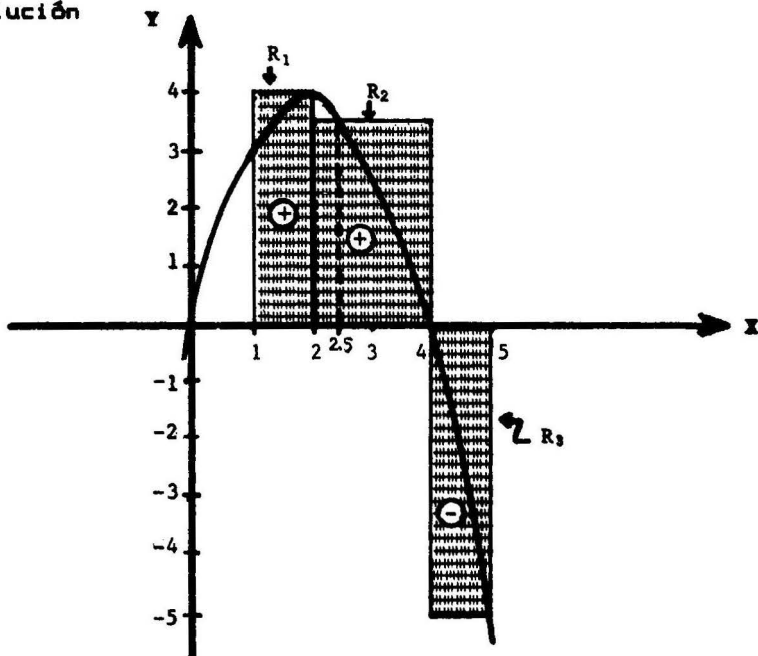
(2) $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3) ξ_i es un número tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Ejemplo Sean $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
 $a = 1, \quad b = 5,$
 $x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5,$
 $\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 2.5, \quad \xi_3 = 5.$

Calcular la suma integral S de $f(x)$ asociada a estos datos e interpretar geoméricamente la suma S .

Solución



Tenemos

i	x_i	ξ_i	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$f(\xi_i)$	$f(\xi_i) \Delta x_i$
0	1				
1	2	2	1	4	4
2	4	2.5	2	3.75	7.50
3	5	5	1	-5	-5

$$\text{Luego } S = \sum_{i=1}^3 f(\xi_i) \Delta x_i = 4 + 7.50 - 5 = 6.50 .$$

Interpretación geométrica de la suma S

En la figura $f(\xi_1) \Delta x_1 = 4 = \text{Area del rectángulo } R_1$

$f(\xi_2) \Delta x_2 = 7.5 = \text{Area del rectángulo } R_2$

$f(\xi_3) \Delta x_3 = -5 = - \text{Area del rectángulo } R_3$

Por lo tanto, $S = \text{Area } R_1 + \text{Area } R_2 - \text{Area } R_3$,

y geoméricamente, S es igual al área algebraica de la región compuesta por R_1 , R_2 y R_3 , si se conviene en asignar el signo + o el signo - al área de un rectángulo según éste se encuentre arriba o abajo del eje X, respectivamente.

Interpretación geométrica de la suma de integral

La interpretación de la suma de integral que hemos dado en el ejemplo precedente admite una generalización inmediata cuando se trata de una función cualquiera. En efecto, consideremos la suma de integral.

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Sea R_i el rectángulo determinado por $f(\xi_i)$ y de base el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces el área de R_i es

$$A_i = \begin{cases} f(\xi_i) \Delta x_i & \text{si } f(\xi_i) \geq 0 \\ -f(\xi_i) \Delta x_i & \text{si } f(\xi_i) < 0 , \end{cases}$$

$$\text{y por lo tanto, } S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (\pm A_i) ,$$

donde para cada i se debe elegir el signo + o el signo - según que R_i se encuentre arriba o por debajo del eje X, respectivamente.

Así, geoméricamente S es el área algebraica de la región compuesta por los rectángulos R_1, R_2, \dots, R_n .

2.2 La Integral Definida

2.2.1 Existencia y Definición de la Integral Definida para Funciones Continuas

Teorema: Existencia

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un número real que se designa con

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{tal que}$$

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad ,$$

donde (1) $\|\Delta\| = \text{máximo} \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i$

(2) el límite indicado significa que dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|\Delta\| < \delta$ implica que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon .$$

Definición

(1) El número $\int_a^b f(x) dx$ se llama la **integral definida** de $f(x)$ desde a a b .

(2) La función $f(x)$ se llama **integrando**

(3) Los números a y b se llaman **límite inferior** y **límite superior**, respectivamente.

Nota

(1) Omitimos dar la prueba del teorema.

(2) Este teorema es muy importante pues nos dice que la hipótesis de la continuidad de $f(x)$ es suficiente para asegurar que las sumas de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ se aproximan a un número fijo, que hemos denotado con $\int_a^b f(x) dx$, cuando $\max \Delta x_i$ es muy pequeño, esto es, cuando las longitudes Δx_i de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se acercan a cero.

2.2.2 Cálculo de la integral definida usando sucesiones de sumas de integral

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que para cada entero $n > 1$ es dada una

suma de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ de $f(x)$ en $[a, b]$. Si

se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0$, donde $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Nota

La prueba del teorema es una consecuencia inmediata del teorema de existencia de la integral definida (2.2.1) Omitimos los detalles.

Ejemplo Cálculo de la integral definida usando intervalos de igual longitud

Si

$$(1) \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

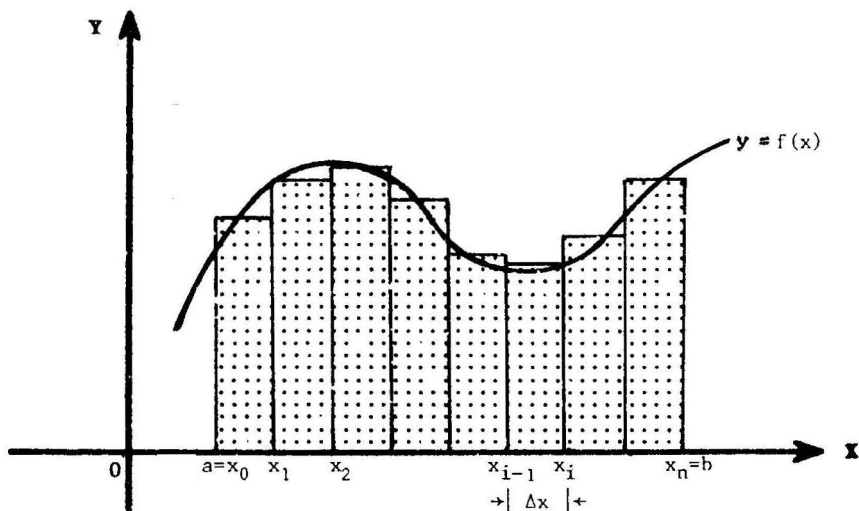
$$(2) \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i=0, 1, \dots, n$$

y (3) ξ_i es un número tal que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$, y por lo tanto, por el teorema precedente, se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x .$$

Representación geométrica



La figura muestra la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Se ha dividido el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ se ha elegido un número ξ_j para formar la suma

de integral $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$. Ahora bien, el teorema que se acaba

de enunciar establece que cuando $\int_a^b f(x) dx$ existe, **para calcular**

este valor basta hallar el límite de S_n cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho de otra

manera, las sumas $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$ **se aproximan al valor de la integral**

cuando el número n de subintervalos de igual longitud **crece indefinidamente**.

2.2.3 Area entre dos curvas

Definición

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Definimos el **área (de la región R comprendida) entre las curvas $f(x)$, $g(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$** , igual al número

$$A = A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (\text{ver fig.1})$$

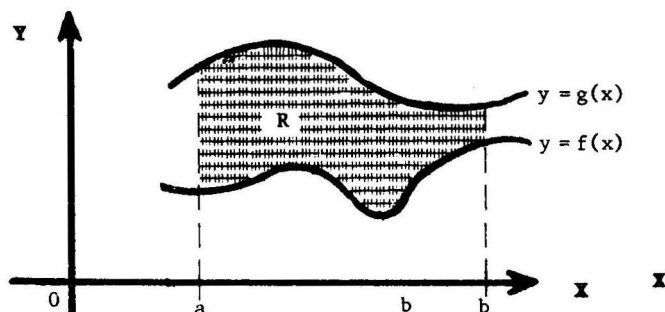


Fig.1 Área entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$

Por ejemplo, si $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$, el **área bajo la curva $f(x)$ y el eje X sobre $[a,b]$** , es igual a

$$A = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{ver fig. 2})$$

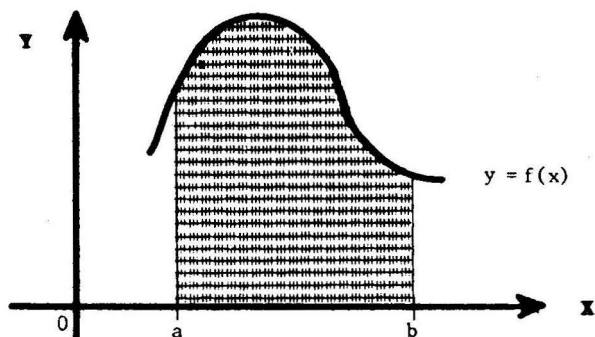


Fig.2 Área bajo la curva $f(x)$

Nota Observemos que la definición dada de área es razonable por cuanto la integral definida es el límite de las áreas de regiones compuestas por rectángulos que se "aproximan a la región comprendida entre las curvas.

Ejemplo 1 Tomando rectángulos inscritos de igual base hallar

$$\int_a^b x \, dx, \quad \text{donde } a < b.$$

Solución

En este caso $f(x) = x$ es una función continua y por lo tanto

existe $\int_a^b f(x) \, dx$.

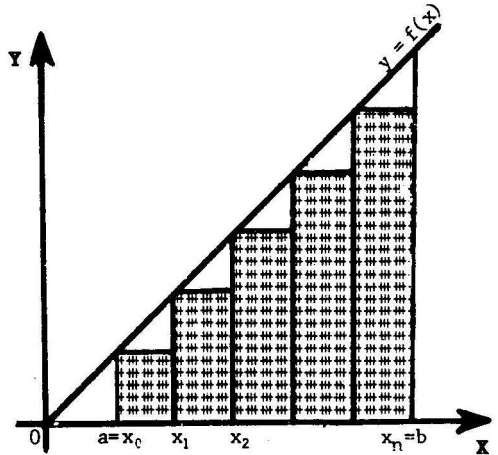
Procedemos a calcular la integral.

Para $n \geq 1$, sean

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad y$$

$$\xi_i = x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$



Luego $f(\xi_i) = \xi_i = x_{i-1} = a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}$.

Formamos la suma

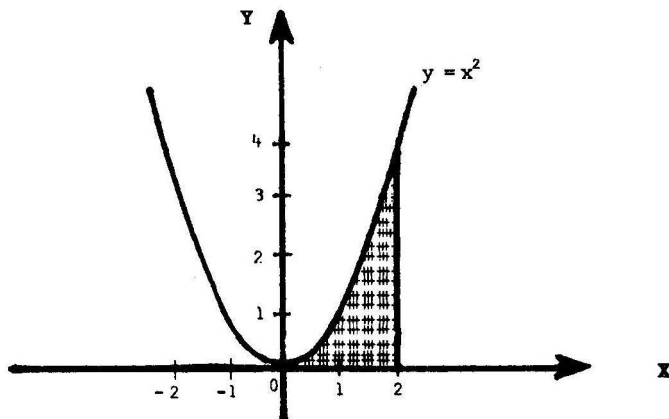
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right] \cdot \frac{(b-a)}{n} \\ &= (b-a) \left[\sum_{i=1}^n \frac{a}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{i(b-a)}{n^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)}{n^2} \right] \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i - \frac{(b-a)}{n} \right] \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n c = nc) \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(b-a)}{n} \right] \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}) \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(b-a)}{n} \right] \end{aligned}$$

Luego, por el teorema 2.2.3

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{2} (1) + 0 \right] \quad (\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0) \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar el área bajo la curva $y=x^2$ desde $x=0$ a $x=2$.



La función $y = f(x) = x^2$ es continua y toma valores ≥ 0 .

Debemos calcular $A = \int_0^2 x^2 dx$.

Sea n es un número entero ≥ 1 y tomemos $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$,

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\xi_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(estamos considerando rectángulos circunscritos a la parábola $y = x^2$)

$$\text{Luego } f(\xi_i) = f(x_i) = x_i^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Tenemos entonces

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (\text{teorema 2.2.2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{8}{3} \quad (\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0).$$

Ejemplo 3

Probar que $\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$, donde p es un entero ≥ 0 , $a > 0$.

Solución Llamemos $f(x) = x^p$.

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos $\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$,

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{ai}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\xi_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Luego } f(\xi_i) = f(x_i) = \frac{a^p i^p}{n^p}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_0^a x^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x && \text{(teorema 2.2.2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a^p i^p}{n^p} \right) \left(\frac{a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \left(\frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_1 n + A_0 \right) \\ &&& \text{(por (1.3.4), pág. 82)} \\ &= \frac{a^{p+1}}{p+1} \quad \left(\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} = 0 \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Hallar $\int_0^a \text{sen } x dx$, donde $a > 0$.

Solución La función $y = \text{sen } x$ es continua y por lo tanto existe

la integral $\int_0^a \text{sen } x dx$. Procedemos a calcular dicha integral.

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos

$$\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{ia}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\xi_i = x_i = \frac{ai}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Luego $y(\xi_i) = \operatorname{sen} \frac{ia}{n}$.

Entonces tenemos

$$\int_0^a \operatorname{sen} x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{sen} \frac{ia}{n} \right) \left(\frac{a}{n} \right) \quad (\text{por el teorema 2.2.2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} \frac{ia}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2n}} \left[\cos \frac{a}{2n} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{a}{n} \right]$$

(aplicando la fórmula (1.3.5) pág. 82, con $x = \frac{a}{n}$)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a}{2n} \right)}{\left(\frac{a}{2n} \right)}} \left[\cos \frac{a}{2n} - \cos \left(1 + \frac{1}{2n} \right) a \right]$$

Ahora bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a}{2n} \right)}{\left(\frac{a}{2n} \right)} = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{2n} = \cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2n} \right) = \cos 0 = 1 ,$$

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(1 + \frac{1}{2n} \right) a = \cos \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right) a \right] = \cos a ,$$

y por lo tanto,

$$\int_0^a \operatorname{sen} x dx = 1 - \cos a .$$

Respuesta

$$\int_0^a \operatorname{sen} x dx = 1 - \cos a, \quad \text{si } a > 0 .$$

Ejemplo 5 Encontrar el área entre la curva $y = \frac{1}{x}$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$.

Solución La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $0 < x$. Sea n un número entero ≥ 1 . Tomemos

$$(1) \quad \begin{cases} x_i = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}, & i = 0, 1, \dots, n \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \xi_i = x_i \end{cases}$$

Sea $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$. Probaremos que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } 0 < \Delta x_i = x_i - x_{i-1} &= a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \\ &< b \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right], \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\Delta\| < b \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \quad (\text{por la continuidad de la función} \\ &\quad \text{exponencial } c^x, c > 0) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1, \end{aligned}$$

$$\text{y por consiguiente } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = 0,$$

y teniendo en cuenta la desigualdad anterior,

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = 0, \text{ de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0,$$

lo que prueba (2).

La propiedad establecida en (2) nos permite usar los puntos

x_0, x_1, \dots, x_n para calcular la integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - r^{\frac{1}{n}}\right), \text{ donde } r = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - r^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - r^{\frac{1}{x}}\right)$$

(pasando a la variable continua x , la igualdad se cumple si el segundo límite existe)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forma indeterminada } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-r^{\frac{1}{x}} \cdot \ln r \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} \quad (\text{Regla de L'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -r^{\frac{1}{x}} \cdot \ln r = -\ln r = -\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

Así,

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

2.3 Propiedades de la integral definida

2.3.1 Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Se cumplen las siguientes propiedades

$$(1) \quad \int_a^b dx = b-a$$

$$(2) \quad \int_a^b k(fx) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(4) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Prueba

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ x_i = a + i\Delta x = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i \\ \xi_i = x_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_a^b dx &= \int_a^b h(x) dx, \quad \text{donde } h(x) \text{ es la función constante} \\ &\quad h(x) = 1 \text{ para todo } x, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta x \quad (\text{por el teorema (2.2.2)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \left(\frac{b-a}{n}\right) \quad (\text{pues } h(\xi_i) = 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) = b-a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x && \text{(por (2.2.2))} \\
 &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x = k \int_a^b f(x)dx && \text{(por (2.2.2))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x && \text{(por (2.2.2))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x \\
 &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx && \text{(por (2.2.2))}
 \end{aligned}$$

(4) De $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, se sigue que $f(\xi_i) \geq 0$, y por lo tanto,

cada suma de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x$ es ≥ 0 . Luego, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \geq 0$, de donde resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \geq 0,$$

cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. ■

2.3.2 Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se tiene

- (1) Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- (2) Si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

- (3) Si $|f(x)| \leq k$ en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b-a)$$

Prueba

- (1) Tenemos $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, $g(x) - f(x) \geq 0$, luego

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0 \quad (\text{por (4) del teorema anterior})$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{por (3) del teorema anterior})$$

$$\text{o sea, } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

- (2) Tenemos $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (\text{por la parte (1)})$$

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \quad (\text{por (2) del teorema anterior})$$

$$\text{y } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad (\text{por (1) del teorema anterior})$$

- (3) Tenemos $|f(x)| \leq k$ en $[a, b]$, o $-k \leq f(x) \leq k$,
y $-k(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq k(b-a)$ (por la parte (2))

$$\text{Luego } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b-a) .$$

2.3.3 Teorema

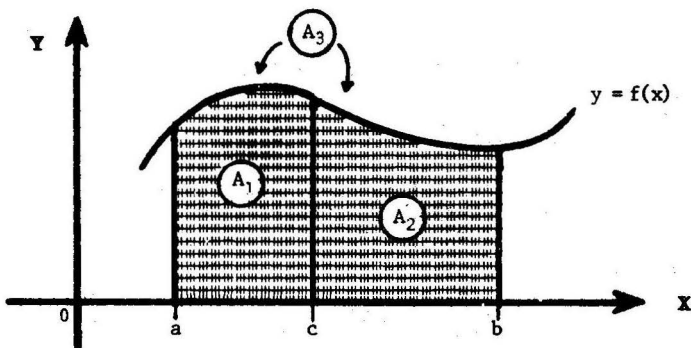
Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se cumple

$$(1) \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

para todo c tal que $a < c < b$.

Representación Geométrica



$$\text{Si } A_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad A_2 = \int_c^b f(x) dx, \quad A_3 = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{entonces } A_1 + A_2 = A_3.$$

Prueba

(1) Si n es un número entero > 1 , tomamos $\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$,

$$x_i = \xi_i = a.$$

$$\text{Luego } \int_a^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (\text{por el teorema } 2.2.2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

(2) Si n es un número entero $n > 1$, tomamos

para el intervalo $[a, c]$:

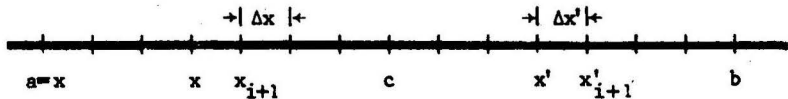
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

para el intervalo $[c, b]$:

$$\Delta x' = \frac{b-c}{n}, \quad x'_i = b + i\Delta x', \quad x'_{i-1} < \xi'_i < x'_i,$$

y para el intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = b:$$



Luego $\|\Delta\| = \max\{\Delta x, \Delta x'\} = \max\left\{\frac{c-a}{n}, \frac{b-c}{n}\right\}$, cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0$.

Tenemos entonces por el teorema 2.2.2

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x' \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x' \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo Hallar $\int_0^4 f(x) dx$ si $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 3 \\ x^2 - 3 & 3 < x < 4. \end{cases}$

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^3 2x dx + \int_3^4 (x^2 - 3) dx \\ &= \frac{55}{3}. \end{aligned}$$

2.3.4 La Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ con $b < a$

Definición

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ se define

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ejemplos

$$(1) \int_3^1 x dx = - \int_1^3 x dx = - \frac{3^2 - 1^2}{2} = -4.$$

$$(2) \int_{\pi}^0 \text{sen } x dx = - \int_0^{\pi} \text{sen } x dx = - [1 - \cos \pi] = -2.$$

La siguiente propiedad constituye una generalización de la propiedad (2) del teorema 2.3.3.

2.3.5 Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado que contiene a los números a , b y c . Entonces se cumple

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

sin importar el orden en el cual se encuentran a , b y c .

Prueba

Debemos considerar seis casos posibles

$$\begin{array}{l} \text{Si } a \leq b \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} c < a \leq b \quad (1) \\ a \leq c \leq b \quad (2) \\ a \leq b < c \quad (3) \end{array} \right. \\ \text{y si } b < a \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} c < b < a \quad (4) \\ b \leq c \leq a \quad (5) \\ b < a < c \quad (6) \end{array} \right. \end{array}$$

Probaremos que se cumple $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ en los casos (1) y (6), dejando al cuidado del lector la verificación de los casos restantes.

Caso 1 Tenemos $\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
(por (2) del teorema (2.3.3), ya que $c < a < b$).

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_a^b f(x)dx &= - \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \end{aligned}$$

Caso 6

Tenemos $\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$
(por (2) del teorema (2.3.3), ya que $b < a < c$)

$$\begin{aligned} \text{Luego } - \int_b^a f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \end{aligned}$$

2.4 Teorema Fundamental del Cálculo

2.4.1 Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{en } a \leq x \leq b$$

es una antiderivada de $f(x)$. Esto es,

$$\boxed{\frac{dF}{dx}(x) = f(x)}, \quad \text{en } a \leq x \leq b.$$

Nota.

(1) En la ecuación

$\frac{dF}{dx}(x)$ es la derivada ordinaria de $F(x)$ si $a < x < b$,

$\frac{dF}{dx}(a)$ es la derivada por la derecha de $F(x)$ en $x = a$,

y $\frac{dF}{dx}(b)$ es la derivada por la izquierda de $F(x)$ en $x = b$.

(2) La ecuación $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ puede escribirse

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)}.$$

Prueba

Fijemos un número x tal que $a \leq x \leq b$. Vamos a probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Paso 1

Si $h \neq 0$ y $x+h$ se encuentra en $[a, b]$, entonces

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt \right] \\ &\quad \left(\text{pues } - \int_a^x f(t) dt = \int_x^a f(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (1)$$

$$\text{(pues } \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt, \text{ (por 2.3.3(2))}$$

$$y \quad f(x) = \frac{1}{h} f(x)h = \frac{1}{h} f(x) \int_x^{x+h} dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \quad (2),$$

(pues $f(x)$ es constante)

y restando miembro a miembro (2) de (1) resulta la expresión deseada.

Paso 2

Sea dado $\varepsilon > 0$. Puesto que $f(t)$ es continua en $t=x$, existe un $\delta > 0$ tal que $|t-x| < \delta$ y t en $[a,b]$, implica $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Paso 3

Si $0 < |h| < \delta$ y $x+h$ se encuentra en $[a,b]$, entonces para todo t en el intervalo cerrado de extremos x y $x+h$, se cumple $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

En efecto, puesto que t está en el intervalo cerrado de extremos x y $x+h$, se tiene $|t-x| \leq |h| < \delta$ y, por lo tanto, por el paso (2), $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Paso 4

Sean ε y δ como en el paso (2). Para todo h tal que $0 < |h| < \delta$ y $x+h$ en $[a,b]$ se cumple

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right|, \quad (\text{por el paso (1)}) \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |x+h-x| \quad (\text{por (3) del teorema 2.3.2, } |f(t) - f(x)| < \varepsilon, \text{ por el paso (3)}) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{definición de derivada}) \\ &= f(x) \quad (\text{por el paso (4)}) \end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Observación

La fórmula $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ también puede escribirse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(x)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{por (1) del paso (1)}) \\ &= \frac{dF}{dx}(x) = f(x). \end{aligned}$$

2.4.2 El Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $G(x)$ es una función tal que

$$\frac{dG}{dx}(x) = f(x) \quad \text{en} \quad a \leq x \leq b,$$

entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Nota

- (1) Este teorema nos dice que **cualquier antiderivada** $G(x)$ de $f(x)$ puede ser empleada para evaluar la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$.
En efecto, el valor $\int_a^b f(x) dx$ es la diferencia de los valores de cualquier antiderivada en los extremos b y a .

- (2) De manera equivalente la fórmula $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ suele escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = G(x) \Big|_a^b ,$$

o

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) ,$$

donde $G'(x) = \frac{dG}{dx}(x) = f(x)$.

- (3) El teorema fundamental del cálculo establece una conexión directa entre los conceptos de integral definida y de integral indefinida. Esta conexión es resaltada cuando escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b ,$$

donde $\int f(x)dx$ es la **integral indefinida** de $f(x)$.

Prueba

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$,

Tenemos $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ (por el teorema anterior)
 $= \frac{dG}{dx}(x)$ (por hipótesis) .

Luego por el teorema 2, pág. 3, de la diferencia constante,
 $F(x) = G(x) + C$, donde C es una constante,

o $\int_a^x f(t)dt = G(x) + C$.

Evaluamos la constante C haciendo $x = a$, $0 = \int_a^a f(t)dt = G(a) + C$,

de donde $C = -G(a)$, y por lo tanto $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$.

Y para $x = b$, $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$,

o llamando x a la variable t , $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Ejemplo 1 Evaluar las siguiente integrales

$$(1) \int_{-1}^2 x^3 dx .$$

$$(2) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx .$$

$$(3) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx .$$

Solución

$$(1) \int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{(2)^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4}$$

$$(2) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 - (-1) = 2 .$$

$$(3) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big|_{-1}^2 = \frac{14}{3} - \left(-\frac{13}{3} \right) = \frac{27}{3} .$$

Ejemplo 2 Encontrar las integrales

$$(1) \int_{-x}^x e^t dt .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{s^3}{s^8 + 1} ds .$$

Solución

$$(1) \int_{-x}^x e^t dt = e^t \Big|_{-x}^x = e^x - e^{-x} .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{s^3}{s^8 + 1} ds = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(s^4)}{(s^4)^2 + 1} = \frac{1}{4} \arctan s^4 \Big|_0^1 \\ = \frac{1}{4} [\arctan 1 - \arctan 0] = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi}{16} .$$

2.4.3 Teorema

Se cumple

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) ,$$

si $f(t)$ es una función continua en $[a, b]$ y $g(x)$ es una función diferenciable con valores en $[a, b]$.

Prueba

$$\text{Sea } F(u) = \int_a^u f(t) dt. \text{ Luego } \int_a^{g(x)} f(t) dt = F(g(x)).$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} F(g(x)) \\ &= \frac{d}{dx} F(u) , && \text{donde } u = g(x) , \\ &= \frac{dF}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx} && \text{(regla de la cadena)} \\ &= f(u) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \quad \left(\text{pues } \frac{dF}{du}(u) = f(u), \text{ por el teo-} \right. \\ & && \text{rema 2.4.1) } \\ &= f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\text{Hallar } \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \cos t dt .$$

Solución

Fijemos un número a cualquiera.

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \cos t dt &= \int_x^a \cos t dt + \int_a^{x^2} \cos t dt \\ &= - \int_a^x \cos t dt + \int_a^{x^2} \cos t dt , \end{aligned}$$

aplicando la fórmula del teorema 2.4.3 resulta

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \cos t dt = - \cos x \cdot \frac{dx}{dx} + \cos(x^2) \cdot \frac{dx^2}{dx} = - \cos x + 2x \cos x^2 .$$

2.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Evaluar las siguientes integrales

$$(1) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(3) \int_1^4 \frac{4 + \sqrt{y}}{y^2} dy$$

SOLUCION

$$(1) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{1}{3} (2x)^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^8 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3} .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan e^x \Big|_0^1 \\ = \arctan e - \arctan e^0 = \arctan e - \frac{\pi}{4} .$$

$$(3) \int_1^4 \frac{4 + \sqrt{y}}{y^2} dy = \int_1^4 (4y^{-2} + y^{-3/2}) dy = -4y^{-1} - 2y^{-1/2} \Big|_1^4 \\ = 4 .$$

PROBLEMA 2 Hallar $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

SOLUCION

$$\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-2}^{-3} = \frac{1}{2} [\ln 2 - \ln 3] = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 3 Evaluar $\int_1^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}}$

SOLUCION.

$$\int_1^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}} = \frac{1}{3} \int_1^0 (x^3 + 8)^{-1/2} d(x^3 + 8) = \frac{2}{3} (x^3 + 8)^{1/2} \Big|_1^0$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2.$$

PROBLEMA 4 Encontrar

(1) $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx$.

(2) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+4x}}$.

SOLUCION

(1) $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^5 = \frac{2}{3} (8) - 0 = \frac{16}{3}.$

(2) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+4x}} = \frac{1}{4} \int_0^4 (9+4x)^{-1/2} d(9+4x) = \frac{1}{2} (9+4x)^{1/2} \Big|_0^4$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

PROBLEMA 5 Encontrar $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$.

SOLUCION Completando cuadrados $x^2 + 3x + 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Luego

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int_0^1 \frac{(x + \frac{3}{2}) dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left[(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \right] \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2(\frac{1}{2})} \ln \left[\frac{(x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}}{(x + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} [\ln 6 - \ln 2] - \frac{3}{2} [\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2}] = \ln \left(\frac{9}{8} \right).$$

PROBLEMA 6 Hallar $\int_{-3}^4 |x+2| dx$.

SOLUCION

Tenemos $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Luego
$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x+2| dx &= \int_{-3}^{-2} |x+2| dx + \int_{-2}^4 |x+2| dx \\ &= - \int_{-3}^{-2} (x+2) dx + \int_{-2}^4 (x+2) dx \\ &= - \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^4 = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int_{-2}^3 \sqrt{|x| - x} dx$.

SOLUCION

Tenemos $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

y $\sqrt{|x| - x} = \begin{cases} \sqrt{x - x} = 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Luego
$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0 \sqrt{|x| - x} dx + \int_0^3 \sqrt{|x| - x} dx \\ &= \int_{-2}^0 \sqrt{-2x} dx + \int_0^3 0 dx = \int_{-2}^0 \sqrt{-2x} dx \\ &= \frac{1}{-2} \cdot \frac{2}{3} (-2x)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = -\frac{1}{3} (-2x)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1+x} \sqrt{x} \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^4 \frac{2}{3} \left[1 + x^{3/2} \right]^{1/2} d(1 + x^{3/2}) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \left[1 + x^{3/2} \right]^{3/2} \Big|_0^4 \\
 &= \frac{4}{9} [27 - 1] = \frac{104}{9}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Evaluar $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 1} = \arctan(x+2) \Big|_0^1 \\
 &= \arctan 3 - \arctan 2.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Encontrar $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

SOLUCION.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1/2} \frac{d(\sqrt{2} x)}{\sqrt{1 - (\sqrt{2} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} x) \Big|_0^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin 0 \right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

SOLUCION

$$I = \int_3^4 \frac{d(x - \frac{3}{2})}{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| \Big|_3^4$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_3^4 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{4}{3}.$$

PROBLEMA 12 Hallar $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$.

SOLUCION

Tenemos $I = \tan x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int_1^{e} \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$.

SOLUCION

$$I = -\cos(\ln x) \Big|_1^e = -\cos(1) + \cos 0 = 1 - \cos 1.$$

PROBLEMA 14 Evaluar $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

SOLUCION

$$I = \int_2^5 \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsen\left(\frac{x-2}{3}\right) \Big|_2^5 = \arcsen 1 - \arcsen 0 = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 15 Hallar $I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sen 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi+2}{8}$$

PROBLEMA 16 Evaluar $I = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+4}}$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(t^3)}{\sqrt{(t^3)^2+4}} = \frac{1}{3} \ln |t^3 + \sqrt{t^6+4}| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

PROBLEMA 17 Hallar $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx$.

SOLUCION

$$= \ln |\sec x| \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \ln \sqrt{2} - \ln \sqrt{2} = 0$$

PROBLEMA 18 Hallar $\frac{d}{dx} \int_2^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{d}{dx} \int_2^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \sqrt{1+x^8} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$
 (aplicando el teorema 2.4.3, pág.111)
 $= 2x \sqrt{1+x^8}$.

PROBLEMA 19 Hallar $I = \frac{d}{dx} \int_{-\sqrt{x}}^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

SOLUCION

$$I = -\frac{d}{dx} \int_0^{-\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{d}{dx} \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{d}{dx}(-\sqrt{x}) + \frac{1}{1+\tan^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + 1.$$

PROBLEMA 20 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, probar que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx.$$

SOLUCION

Tenemos $-|f(x)| < f(x) < |f(x)|$ en $a \leq x \leq b$,

$$-\int_a^b |f(x)| dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{por 2.3.2}),$$

de donde $\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx$.

PROBLEMA 21 Encontrar el valor menor y el valor mayor posibles de

$$A = \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx.$$

SOLUCION Buscamos los valores mínimo y máximo absolutos de

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} = (x-1)^{2/3} (2x+1)^{1/3} \quad \text{en } [-2, 1].$$

Tenemos
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x)}{(2x^3 - 3x^2 + 1)^{2/3}} = \frac{2x}{(x-1)^{1/3} (2x+1)^{2/3}}.$$

Luego $f'(x) = 0$ si $x = 0$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, y por consiguiente, los puntos críticos en el intervalo $[-2, 1]$ son: $-\frac{1}{2}, 0$.

Tenemos

x	f(x)
-2	-3
$-\frac{1}{2}$	0
0	1
1	0

y $m = \text{valor mínimo absoluto de } f(x) \text{ en } [-2, 1] = -3$

$M = \text{máximo absoluto} = 1.$

Así, $-3 \leq \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \leq 1$ para todo x en $[-2, 1]$

$$- \int_{-2}^1 3 \, dx \leq \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx \leq \int_{-2}^1 dx$$

$$-9 \leq \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx \leq 3$$

Así, $-9 \leq A \leq 3.$

PROBLEMA 22

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si

$$\int_a^b f(t) dt \neq 0 \text{ y } k \text{ es un número tal que } 0 < k < 1, \text{ probar que exis}$$

te un número c entre a y b tal que $\int_a^c f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$.

SOLUCION

La función $G(x) = \frac{1}{A} \int_a^x f(t) dt$, donde $A = \int_a^b f(t) dt$, es continua en $[a, b]$, ya que es diferenciable en este intervalo (teorema 2.4.1). Ahora bien, $G(a) = 0$ y $G(b) = 1$, y $0 < k < 1$. Luego, por el teorema del valor intermedio (para funciones continuas) existe un número c en $[a, b]$ tal que $G(c) = k$.

$$\frac{1}{A} \int_a^c f(t) dt = k \quad \text{ó} \quad \int_a^c f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt.$$

Además, $G(a) = 0 < k = G(c) < 1 = G(b)$ implica que $c \neq a$ y b , y por lo tanto, c se encuentra entre a y b .

2.6 Integración por partes para Integrales Definidas

Teorema

Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones que tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se cumple

$$\int_a^b u \, dv = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Prueba

Tenemos
$$\frac{d}{dx} (u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

o
$$u \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} (uv) - v \cdot \frac{du}{dx}$$

e integrando

$$\int_a^b u \cdot \frac{dv}{dx} \, dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (uv) \, dx - \int_a^b v \cdot \frac{du}{dx} \, dx$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v \, du ,$$

(pues $dv = \frac{dv}{dx} \, dx$, $du = \frac{du}{dx} \, dx$ y $\int_a^b \frac{d}{dx} (u \cdot v) \, dx = uv \Big|_a^b$ por el teorema fundamental del cálculo).

Ejemplo 1

Hallar
$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx .$$

Solución

Tenemos
$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

(tomando $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, $v = -\cos x$)

$$= [-\pi \cos \pi + 0] + \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} = \pi .$$

Ejemplo 2

Hallar $I = \int_0^{15} \frac{x \, dx}{(1+x)^{3/4}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 I &= 4x(1+x)^{1/4} \Big|_0^{15} - 4 \int_0^{15} (1+x)^{1/4} \, dx \\
 &\quad \text{(tomando } u = x, \, dv = (1+x)^{-3/4} \, dx, \, v = 4(1+x)^{1/4} \text{)} \\
 &= [120 - 0] - \frac{16}{5} (1+x)^{5/4} \Big|_0^{15} \\
 &= 120 - \frac{16}{5} \cdot [32 - 1] = \frac{104}{5}.
 \end{aligned}$$

2.7 Cálculo de Integrales Definidas por Sustitución o cambio de Variable

Teorema Si $x = \phi(t)$ es una función cuya derivada es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $\phi(a) = A$, $\phi(b) = B$, entonces se cumple

$$\int_A^B f(x) \, dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

para toda función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado de extremos A y B .

Prueba

Sea $G(t) = \int_A^{\phi(t)} f(x) \, dx$.

Entonces $\frac{dG}{dt}(t) = f(\phi(t)) \phi'(t)$ (por el teorema 2.4.3),

y por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt &= G(t) \Big|_a^b = G(b) - G(a) \\
 &= \int_A^{\phi(b)} f(x) \, dx - \int_A^{\phi(a)} f(x) \, dx = \int_A^B f(x) \, dx \quad \text{(pues } \phi(a) = A, \\
 &\quad \phi(b) = B \text{)}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{x+1}$

Solución Tomemos $x+1 = t$. Luego $dx = dt$ y cambiando los límites de integración:

$$\begin{array}{ll} \text{cuando} & x = 0, \quad t = 1, \\ & \text{y} \quad x = 3, \quad t = 4. \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{(t-1)^3 dt}{t} = \int_1^4 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln|t| \right]_1^4 = \frac{15}{2} - \ln 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta d\theta$.

Solución Hagamos $t = \tan \theta$. Luego $1+t^2 = \sec^2 \theta$,
 $dt = \sec^2 \theta d\theta$ y cuando $\theta = 0$, $t = 0$; y $\theta = \frac{\pi}{4}$, $t = 1$.

Por lo tanto, aplicando la fórmula de cambio de variable.

$$I = \int_0^1 (1+t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

2.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int_1^2 x \ln x \, dx$.

SOLUCION

Tenemos
$$I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$
 (tomando $u = \ln x$, $dv = x \, dx$, $v = \frac{x^2}{2}$)

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

PROBLEMA 2 Calcular $A = \int_0^\pi e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION

$$A = \operatorname{sen} x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx$$

(tomando $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^{2x} \, dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$)

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx \quad (\text{pues } \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0)$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} [\cos \pi \cdot e^{2\pi} - \cos 0 \cdot e^0] - \frac{A}{4},$$

de donde $A = \frac{e^{2\pi} + 1}{5}$.

PROBLEMA 3 Calcular $A = \int_0^{1/2} \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 A &= (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)(-\sqrt{1-x^2}) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} (-\sqrt{1-x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad \text{(tomando } u = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -\sqrt{1-x^2} \text{)} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} dx \\
 &= -\frac{\pi \sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Evaluar $\int_0^1 \operatorname{arc} \tan \sqrt{x} dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \operatorname{arc} \tan \sqrt{x}$.

Luego $x = \tan^2 t$, $dx = 2 \tan t \sec^2 t dt$,

y cuando $x = 0$, $t = 0$
 $x = 1$, $t = \pi/4$.

Luego, por la fórmula del cambio de variable

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \operatorname{arc} \tan \sqrt{x} dx &= 2 \int_0^{\pi/4} t \tan t \sec^2 t dt \\
 &= t \tan^2 t \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^2 t dt \\
 &\quad \text{(integrando por partes)} \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 t - 1) dt \\
 &= \frac{\pi}{4} - (\tan t - t) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar $A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$.

SOLUCION Hagamos $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x \, dx$, y cuando
 $x = 0$, $t = 0$
 $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$.

Luego $A = \int_0^1 t^3(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^3 - t^5) dt = \frac{1}{12}$.

PROBLEMA 6 Evaluar $A = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{9-2x}$. Luego $x = \frac{9-t^2}{2}$, $dx = -t \, dt$,
y cuando $x = 0$, $t = 3$; $t = 4$, $t = 1$.

Por lo tanto $A = \int_3^1 \frac{-t \, dt}{t} = - \int_3^1 dt = -t \Big|_3^1 = 2$.

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

SOLUCION Sea $x = a \cos t$. Luego $dx = -a \operatorname{sen} t \, dt$,
 $\sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{sen} t$, y cuando $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; $x = a$, $t = 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^0 (a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t \, dt) = a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int_{-1}^2 \frac{x^2 dx}{x+2}$.

SOLUCION Sea $t = x+2$. Luego $x = t-2$, $dx = dt$
y cuando $x = -1$, $t = 1$; $x = 2$, $t = 4$.

Por lo tanto,

$$I = \int_1^4 \frac{(t-2)^2 dt}{t} = \int_1^4 \left(t - 4 + \frac{4}{t} \right) dt$$

$$= \left. \frac{t^2}{2} - 4t + 4 \ln |t| \right|_1^4 = 4 \ln 4 - \frac{9}{2}.$$

PROBLEMA 9 Si $f(x)$ es una función continua tal que $f(-x) = f(x)$,

probar que $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

SOLUCION

Tenemos $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ (1)

Pero $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt)$ (haciendo el cambio de variable $x = -t$)

$$= - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

(pues $f(-t) = f(t)$)

$$= \int_0^a f(x) dx$$
 (2)

y sustituyendo (2) en (1) resulta la igualdad deseada.

PROBLEMA 10 Si $f(x)$ es una función continua tal que

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{probar que} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

SOLUCION

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (1)$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t)(-dt) = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt \\ &= \int_0^a (-f(t)) dt \quad (\text{pues } f(-t) = -f(t)) \\ &= - \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx \quad (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1) resulta la igualdad deseada.

PROBLEMA 11 Calcular $I = \int_0^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \text{arc sen } x \Big|_0^{-1/2} = \text{arc sen } \left(-\frac{1}{2}\right) - \text{arc sen } 0 \\ &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Probar que
$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{cos} x) dx.$$

SOLUCION. Sea $x = \frac{\pi}{2} - t$. Luego

$$dx = -dt, \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} t \quad \text{y cuando}$$

$$x = 0, \quad t = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad t = 0. \quad \text{Por lo tanto,}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\operatorname{cos} t) (-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{cos} t) dt.$$

2.9 El Teorema del Valor medio para Integrales

Definición Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, se llama **valor promedio de $f(x)$ en $[a, b]$** al cociente

$$\text{V.P.} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo Hallar el valor promedio de $f(x) = x$ en $[a, b]$.

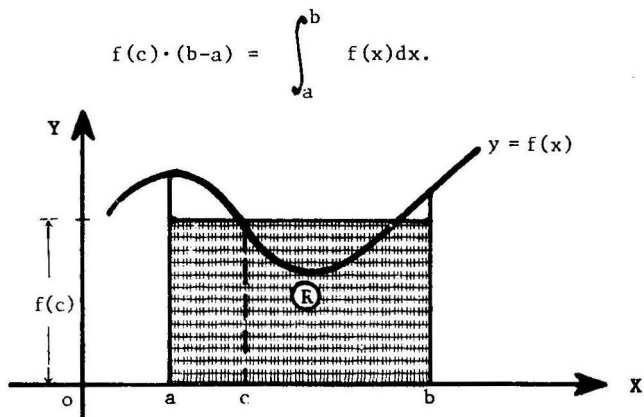
Solución

$$\text{V.P.} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

- Nota** (1) La fórmula indicada puede escribirse: $V.P = f(c)$, para algún c entre a y b .
- (2) Geométricamente, el área del rectángulo R (ver figura) de altura $f(c)$ y base $b-a$ es igual al área bajo la curva



$f(c)$ representa el promedio de los valores de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Prueba del Teorema

Consideremos la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Por el teorema 2.4.1 se sabe que $F(x)$ es diferenciable en $a \leq x \leq b$ y que $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

Luego por el teorema del valor medio para derivadas (teorema 1, pág. 1)

$$\text{se cumple } F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b-a) \quad (1)$$

para algún c tal que $a < c < b$.

$$\text{Pero } F(b) = \int_a^b f(t) dt, \quad F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$F'(c) = f(c),$$

y sustituyendo estos valores en (1)

$$\int_a^b f(t) dt = f(c) \cdot (b-a) \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Ejemplo Si $f(x) = 2+x-x^2$ hallar un c entre 0 y 3 tal que $f(c)$ sea igual al valor promedio de $f(x)$ en $[0,3]$.

Solución Buscamos un número c tal que $0 < c < 3$

$$y \int_0^3 (2+x-x^2) dx = f(c) \cdot (3-0)$$

$$\frac{3}{2} = 3(2+c-c^2) .$$

Resolviendo la ecuación $2c^2 - 2c - 3 = 0$

resultan las raíces $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Luego $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$, ya que es el único valor que cumple $0 < c < 3$.

2.10 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el valor promedio de la función $f(x) = a + b \cos x$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

SOLUCION

$$V.P. = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a + b \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} [ax + b \operatorname{sen} x] \Big|_{-\pi}^{\pi} = a .$$

PROBLEMA 2 Comparar las integrales $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x dx$ y $\int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x dx$, sin calcularlas.

SOLUCION Para $0 \leq x \leq 1$ se tiene

$$x^2 \leq x , \quad x^2 \operatorname{sen}^2 x \leq x \operatorname{sen}^2 x ,$$

y por el teorema 2.3.2 , $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x dx \leq \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x dx$.

PROBLEMA 3 Estimar el valor de

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$$

SOLUCION

Para $-1 < x < 1$ se tiene $7 < 8+x^3 < 9$, o $\frac{1}{9} < \frac{1}{8+x^3} < \frac{1}{7}$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_{-1}^1 \frac{dx}{9} &< \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{7} \\ \frac{2}{9} &< \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \frac{2}{7} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Encontrar el menor valor y el mayor valor posibles de

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx .$$

SOLUCION

Puesto que el integrando $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{x - \tan x}{x^2 \cos x} < 0$$

en $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$$

$$\text{y } \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \geq \frac{1}{2} .$$

2.11 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Evaluar $\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 + x + 4}{(x+1)^2} dx$.

Rpta. $\frac{13}{6}$.

PROBLEMA 2 Hallar $\int_{-1}^1 \frac{t^3 dt}{t+2}$.

Rpta. $\frac{26}{3} - 8 \ln 3$.

PROBLEMA 3 Encontrar $\int_0^3 \frac{x e^x dx}{(1+x)^2}$.

Rpta. $\frac{e^3}{4} - 1$.

PROBLEMA 4 Hallar $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx$.

Sugerencia: Hágase $t = \cos x$.

Rpta. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$.

INTEGRALES IMPROPIAS

1 **DEFINICION**

Decimos que la integral $\int_a^b f(x) dx$ es **impropia** si

(1) la función integrando tiene puntos de discontinuidad en el intervalo $[a,b]$,

o

(2) por lo menos uno de los límites de integración a o b es infinito.

A continuación vamos a dar una definición precisa de la integral

impropia en tales casos. Si $\int_a^b f(x)dx$ resulta ser un número

real, esto es, un valor finito determinado, entonces decimos que la integral es **convergente**. En caso contrario, decimos que es **divergente**.

2 Integral Impropia cuando la Función es Discontinua

Definición

- 1 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $(a, b]$, entonces considerando valores de $\epsilon > 0$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

- 2 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b)$, entonces considerando valores de $\epsilon > 0$, definimos.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

- 3 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en el punto $x = c$, donde $a < c < b$, entonces considerando valores de ϵ y $\epsilon' > 0$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x)dx$$

Ejemplo 1 Calcular la integral impropia $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ o establecer su divergencia.

Solución La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ es continua en todo punto excepto en $x = 1$. Entonces aplicamos (3) de la definición 2.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon'}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x-1}\right) \Big|_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x-1}\right) \Big|_{1+\epsilon'}^3 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon'}\right) = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral es divergente.

Ejemplo 2 Calcular la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ o establecer su divergencia.

Solución La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en el intervalo $(0, 1]$, y tiene un punto de discontinuidad en $x=0$. Aplicamos (1) de la definición 2:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \epsilon > 0 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2[1 - \sqrt{\epsilon}] = 2 & (\text{pues } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\epsilon} = 0). \end{aligned}$$

Luego la integral dada es convergente y su valor es 2.

3 Integral Impropia cuando los Límites de Integración son Infinitos

Definición

1 Si $f(x)$ es continua en $a < x < +\infty$, se define

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2 Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x \leq b$, definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

3 Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < +\infty$, definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 1 Calcular $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ o establecer su divergencia.

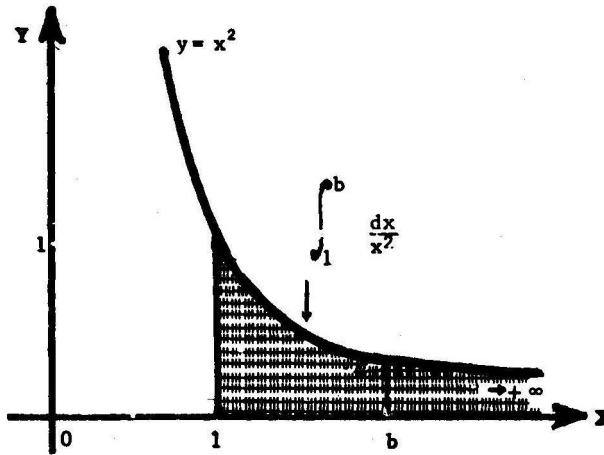
Solución

Tenemos
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} \quad (\text{por (1), definición 3)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

Así, la integral es convergente y su valor es 1.

Interpretación Geométrica



$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ representa el área bajo la curva $\frac{1}{x^2}$ sobre la semirrecta $x > 1$.

Ejemplo 2

Evaluar la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ o establecer su divergencia.

Solución

Por (3) de la definición 3 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\operatorname{arc} \tan \left(\frac{b+2}{\sqrt{5}} \right) - \operatorname{arc} \tan \left(\frac{a+2}{\sqrt{5}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi\sqrt{5}}{5} . \end{aligned}$$

Así la integral es convergente y su valor es $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

4 ALGUNOS CRITERIOS PARA LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS**4.1 Criterio de Comparación****Teorema**

Sean $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b F(x)dx$ dos integrales impropias tales que

$$(1) \quad |f(x)| \leq F(x) \quad \text{en} \quad a < x < b, \quad \text{y}$$

$$(2) \quad \int_a^b F(x)dx \quad \text{es convergente,}$$

entonces $\int_a^b f(x)dx$ es convergente.

Nota Omítimos la prueba del teorema.

4.2 Criterio de Convergencia para Funciones Discontinuas

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en el punto c .

Si (1) $f(x) \geq 0$,

y (2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) |x - c|^m = A$, donde $A \neq 0, +\infty$,

en cuyo caso escribimos $f(x) \sim \frac{A}{(x-c)^m}$ cuando $x \rightarrow c$,

entonces la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$.

(3) es convergente cuando $m < 1$,

y (4) es divergente cuando $m \geq 1$.

Nota La prueba del teorema se ofrece en el problema 1 de la sección 4.5 de problemas resueltos, pág. 145.

Ejemplo Determinar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{(1-x^4)^{1/3}}$ es continua en el intervalo $[0, 1)$.

Además

(1) $f(x) \geq 0$,

y (2) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/3} (1+x)^{1/3} (1+x^2)^{1/3}}$, y cuando

$x \rightarrow 1$, $1+x \rightarrow 2$, $1+x^2 \rightarrow 2$, y por lo tanto

$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/3} (2)^{2/3}} = \frac{A}{(1-x)^m}$, donde $m = \frac{1}{3}$ y $A = \frac{1}{(2)^{2/3}}$

es $\neq 0$ y $\neq +\infty$. Puesto que $m = \frac{1}{3} < 1$ concluimos, por el teorema 4.2, que la integral es convergente.

4.3 Criterio de Convergencia cuando un Límite de Integración es Infinito

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en $a \leq x < +\infty$. Si

(1) $f(x) \geq 0$,

y (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) x^m = A$, donde $A \neq 0, +\infty$,

en cuyo caso escribimos $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ cuando $x \rightarrow +\infty$,

entonces la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

(3) es convergente si $m > 1$,

y (4) es divergente si $m \leq 1$.

Nota La prueba del teorema 4.3 se da en el problema 3 de la sección 4.5 de problemas resueltos, pág. 147.

Ejemplo Determinar si la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^5 + 2}}$ es convergente.

Solución Cuando $x \rightarrow +\infty$ tenemos

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^5 + 2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5 \left(1 + \frac{2}{x^5}\right)}} = \frac{1}{x \sqrt[5]{1 + \frac{2}{x^5}}} \sim \frac{1}{x} = \frac{1}{x^m}$$

con $m = 1$.

Luego, por el teorema 4.3 la integral es divergente.

4.4 Algunos Ejemplos de Integrales Impropias

Ejemplo 1 LA FUNCION BETA

La función beta se define mediante la ecuación

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Probar que la integral es convergente cuando $p > 0$ y $q > 0$.

Solución La función integrando $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ es continua en $0 < x < 1$. Fijemos $0 < a < 1$ y escribamos

$$B(p,q) = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx \quad (1)$$

Vamos a probar que las dos integrales del segundo miembro son convergentes.

Paso 1

La integral $\int_0^a f(x)dx$ es convergente.

Cuando $x \rightarrow 0$, $1-x \rightarrow 1$ y $f(x) \sim x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{x^m}$

con $m = 1-p < 1$, puesto que $p > 0$. Luego, por el teorema 4.2, la integral es convergente.

Paso 2

La integral $\int_a^1 f(x)dx$ es convergente.

Cuando $x \rightarrow 1$ tenemos que $f(x) \sim (1-x)^{q-1} = \frac{1}{(1-x)^{1-q}} = \frac{1}{(1-x)^m}$

con $m = 1-q < 1$, ya que $q > 0$. Luego, por el teorema 4.2, la integral es convergente.

De la igualdad (1) y de los pasos 1 y 2 se sigue que $B(p,q)$ es convergente cuando $p > 0$ y $q > 0$.

Ejemplo 2 LA FUNCION GAMMA

La **función gamma** se define mediante la ecuación

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx .$$

Probar que la integral converge cuando $p > 0$.

Solución La función $f(x) = x^{p-1} e^{-x}$ es continua en $0 < x < +\infty$.

Fijemos un entero $n > p$

Por la regla del L'Hôspital (aplicada n veces)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

vemos que existe un número $a > 0$ tal que $\frac{e^x}{x^n} \geq 1$ para todo $x \geq a$

$$\text{o } e^{-x} \leq \frac{1}{x^n} \quad \text{cuando } x \geq a \quad (1)$$

Escribamos ahora

$$\Gamma(p) = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (2)$$

Vamos a probar que las dos integrales del segundo miembro son convergentes.

Paso 1 La integral $\int_0^a f(x) dx$ es convergente.

En efecto, cuando $x \rightarrow 0$, $e^{-x} \rightarrow e^0 = 1$ y $f(x) \sim x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{x^m}$,

con $m = 1-p < 1$, ya que $p > 0$. Luego, la integral es convergente.

Paso 2 La integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ es convergente. En efecto $e^{-x} \leq \frac{1}{x^n}$ (por (1))

$$x^{p-1} e^{-x} \leq \frac{x^{p-1}}{x^n} = \frac{1}{x^{n-p+1}} = \frac{1}{x^m} \quad , \quad \text{con } m = n-p+1 > 1 .$$

Puesto que $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^m}$ es convergente, se sigue por el criterio de comparación que $\int_a^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ es convergente. De (2) y de los pasos 1 y 2

se sigue que $\Gamma(p)$ es convergente para $p > 0$.

Ejemplo 3

Si $f(x)$ es una función continua en $0 \leq x < \infty$, se define la función $F(s)$, llamada **transformada de Laplace de $f(x)$** , mediante

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$
 en aquellos valores de s para los cuales la integral converge.

Probar que si $|f(x)| \leq Ce^{ax}$ en $x \geq 0$, entonces $F(s)$ converge para todo $s > a$.

Solución

Puesto que $|e^{-sx} f(x)| = e^{-sx} |f(x)| \leq Ce^{-(s-a)x}$, por el criterio de comparación basta probar que la integral $\int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx$ es convergente cuando $s > a$.

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien } \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-(s-a)x}}{s-a} \right) \Bigg|_0^b \\ &= -\frac{1}{s-a} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(s-a)b}} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

(puesto que $s-a > 0$ implica $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{(s-a)b} = \infty$).

4.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Sea $f(x)$ una función en el intervalo $[a, c)$ tal que

$$(1) f(x) > 0,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow c} f(x) |c-x|^m = A, \text{ donde } A \neq 0, +\infty.$$

Probar que la integral $\int_a^c f(x) dx$ es convergente si $m < 1$. y es divergente si $m > 1$.

SOLUCION Puesto que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) |c-x|^m = A > 0$ (pues $f(x) > 0$),

eligiendo $0 < B < A < C$ vemos que existe un número $a < d < c$ tal que $B \leq f(x)(c-x)^m \leq C$ en $d \leq x < c$.

$$\text{Luego } B \int_d^{c-\epsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} \leq \int_d^{c-\epsilon} f(x) dx \leq C \int_d^{c-\epsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} \quad (1)$$

para todo $\epsilon > 0$ tal que $d < c - \epsilon$.

Por (1) y el criterio de comparación $\int_d^c f(x) dx$ es **convergente si y sólo si** $\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es **convergente**.

Así nos resta determinar la convergencia de $\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$.

Caso 1. $m < 1$ La integral $\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es convergente.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } \int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{c-\epsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(c-x)^{-m+1}}{-m+1} \Big|_d^{c-\epsilon} \\ &= \frac{1}{1-m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\epsilon^{1-m} - (c-d)^{1-m} \right] = - \frac{(c-d)^{1-m}}{1-m} \end{aligned}$$

(pues $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-m} = 0$, ya que $1-m > 0$).

Caso 2. $m = 1$ La integral $\int_d^c \frac{dx}{c-x}$ es divergente.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } \int_d^c \frac{dx}{c-x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{c-\epsilon} \frac{dx}{c-x} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln(c-x) \right] \Big|_d^{c-\epsilon} \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln \epsilon - \ln(c-d) \right] \\ &= \infty \quad (\text{pues } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon = -\infty). \end{aligned}$$

Caso 3. $m > 1$ La integral $\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es divergente.

En efecto, como en el caso 1 se tiene

$$\begin{aligned} \int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m} &= \frac{1}{1-m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\epsilon^{1-m} - (c-d)^{1-m} \right] = -\infty \\ & \quad (\text{pues de } m > 1 \text{ se tiene } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-m} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{m-1}} = +\infty) \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Calcular $A = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Sea $f(x)$ una función continua en $a \leq x < +\infty$ tal que

$$(1) \quad f(x) \geq 0,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)x^m = A, \quad \text{donde } A \neq 0, \quad +\infty.$$

Probar que la integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ es convergente si $m > 1$ y es divergente si $m \leq 1$.

SOLUCION Fijemos un número $b > 0$ tal que $a < b$. Puesto que

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

ya que la integral $\int_a^b f(x) dx$ es convergente, es suficiente analizar la convergencia de la integral $\int_b^{\infty} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien } \int_b^{\infty} f(x) dx &= \int_{\frac{1}{b}}^0 f\left(\frac{1}{y}\right) \left(-\frac{dy}{y^2}\right) \quad (\text{cambiando de variable } x = \frac{1}{y}) \\ &= \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2} dy = \int_0^{\frac{1}{b}} g(y) dy, \end{aligned}$$

$$\text{donde } g(y) = \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2} \geq 0,$$

ya que la última integral podemos aplicar el criterio de convergencia 4.2 ya que la función $g(y)$ es continua en $(0, 1/b]$, y es discontinua en 0.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } A &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^m = \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right)y^{-m} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^m} y^{-m+2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} g(y) y^{-m+2}. \end{aligned}$$

Entonces, por el criterio (4.2), la integral $\int_0^{\frac{1}{b}} g(y) dy$

es convergente si $-m+2 < 1$, esto es, cuando $m > 1$,
es divergente si $-m+2 \geq 1$, esto es, cuando $m \leq 1$.

Resumiendo $\int_b^{\infty} f(x) dx$ es convergente si $m > 1$, y es divergente si $m \leq 1$.

PROBLEMA 4 Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ es convergente o divergente.

SOLUCION

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} (1+x^2)^{1/2}}$ es discontinua en $x=1$, y cuando $x \rightarrow 1$, $1+x \rightarrow 2$, $1+x^2 \rightarrow 2$,

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2} (2)} = \frac{A}{(1-x)^m}, \text{ donde } A = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}.$$

Entonces por el criterio 4.2, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 5 Evaluar la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ o establecer su divergencia.

SOLUCION Podemos usar el criterio 4.2 para determinar la convergencia de la integral dada. No obstante preferimos efectuar un cálculo directo.

Si $p=1$, la integral es divergente.

$$\text{En efecto, } \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln \epsilon - \ln 1) = -\infty.$$

$$\text{Cuando } p \neq 1, \text{ se tiene } \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - \epsilon^{1-p}).$$

$$\text{Entonces, si } p < 1, \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \text{ (ya que } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-p} = 0 \text{)}$$

$$\text{y si } p > 1, \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty.$$

PROBLEMA 6 Hallar $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$.

SOLUCION

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

PROBLEMA 7

Evaluar la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

SOLUCION Si $p = 1$, la integral es divergente. En efecto,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Cuando $p \neq 1$, se tiene

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} [b^{1-p} - 1].$$

Entonces, si $p < 1$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = +\infty$ (pues $1-p > 0$)

y la integral es divergente;

y si $p > 1$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0$, y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Así, para $p > 1$, la integral es convergente y su valor es $\frac{1}{p-1}$.

PROBLEMA 8 Calcular $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ o probar que es divergente.

SOLUCION

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x \, dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} (\cos b - \cos 0) \\ &= 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b. \end{aligned}$$

Pero no existe $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$, ya que, por ejemplo, cuando $b = 2n\pi$, $\cos b = 0$;

y cuando $b = (2n+1)\pi$, $\cos b = -1$.

Por lo tanto la integral es divergente.

PROBLEMA 9 Determinar si la integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \, dx$ es convergente.

SOLUCION Puesto que $\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ y la integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es conver-

gente, se sigue por el criterio de comparación que la integral dada es convergente.

PROBLEMA 10
 Hallar $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION

La función $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ es discontinua en $x = 1$.

Tenemos
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{arc sen } (1-\epsilon) - \text{arc sen } 0]$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

PROBLEMA 11 Hallar $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$.

SOLUCION Tenemos

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{-\infty}^{\ln 1/2} \frac{dy}{y} \quad (\text{haciendo } y = \ln x)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln 1/2} \frac{dy}{y} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln |y|) \Big|_a^{\ln 1/2}$$

$$= \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| - \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln |a| = -\infty.$$

Por lo tanto la integral es divergente.

PROBLEMA 12 Hallar $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

SOLUCION Haciendo $y = \ln x$, $x = e^y$, $dx = e^y dy$, tenemos

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{-\infty}^{\ln 1/2} \frac{dy}{y^2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln 1/2} \frac{dy}{y^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_a^{\ln 1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{a} = \frac{1}{\ln 2}.$$

PROBLEMA 13

Analizar la convergencia de la integral

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}, \quad b > 0.$$

SOLUCION

La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3} = \frac{1}{x^{1/4} (x^{1/12} + 2 + x^{11/4})} \quad \text{es discon}$$

tinua en $x=0$, y cuando $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/4}(2)} = \frac{A}{x^m}$, donde $A = \frac{1}{2}$,
 $m = \frac{1}{4} < 1$.

Aplicando el criterio 4.2, concluimos que la integral dada es convergente.

PROBLEMA 14 Decidir la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 4}$$

SOLUCION Tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 4} = \frac{\frac{1}{x^{2/3}}}{\frac{2}{x^{1/3}} + (1 + \frac{1}{x^2})^{1/3} + \frac{4}{x^{2/3}}}$$

y cuando $x \rightarrow +\infty$, el denominador $\rightarrow 1$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{A}{x^m}$,
 donde $A=1$, $m = \frac{2}{3}$.

Por el criterio de convergencia 4.3 concluimos que la integral dada es divergente.

PROBLEMA 15 Estudiar la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{x^3(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$$

$$\text{SOLUCION} \quad f(x) = \frac{x^3(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x^3(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x)^{3/2}(1+x)^{3/2}}$$

$$\text{y cuando } x \rightarrow 1, \quad f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{3/2} (2)^{3/2}} = \frac{A}{(1-x)^m},$$

donde $A = \frac{1}{2^{3/2}}$, $m = \frac{3}{2} > 1$. Entonces por el criterio de comparación 4.2, concluimos que la integral dada es divergente.

PROBLEMA 16 Probar que la integral $A = \int_1^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ es convergente

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\text{sen } x \, dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{\cos x \, dx}{x^2} \right] \\
 &= \left(\cos 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos b}{b} \right) + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \\
 &= \cos 1 + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx .
 \end{aligned}$$

La integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ es convergente por el criterio de comparación ya que $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| < \frac{1}{x^2}$ y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente. Por lo tanto, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 17 Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x} dx$ es convergente.

SOLUCION La función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x}$ es continua y ≥ 0 en $(0, 1]$.

$$\text{Además cuando } x \rightarrow 0, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{x^{-1/2}}{\frac{\text{sen } x}{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{A}{x^m},$$

donde $A = 1$, $m = \frac{1}{2} < 1$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Luego, por el criterio 4.2, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 18. Hallar el valor de c para el cual la integral

$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$ es convergente. Hallar el valor de la integral.

SOLUCION.

Para $b > 0$ se tiene $\int_0^b \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$

$$= \frac{c}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^b = \frac{c}{2} \ln(b^2+1) - \frac{1}{2} \ln(2b+1)$$

$$= \frac{c}{2} \ln b^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{2} \ln b \cdot \left(2 + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \ln b^{c-1/2} + \left[\frac{c}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{2} \ln \left(2 + \frac{1}{b}\right) \right]$$

cuando $b \rightarrow +\infty$ el término [] tiende al valor $-\frac{1}{2} \ln 2$. Luego, la integral I es convergente si y sólo si $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{c-1/2} = L$ cumple $0 < L < +\infty$

Pero cuando $c < \frac{1}{2}$, $L = 0$

$$c = \frac{1}{2}, \quad L = 1$$

$$c > \frac{1}{2}, \quad L = +\infty.$$

De donde resulta que I converge solamente cuando $c = \frac{1}{2}$ y su valor es

$$I = \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

PROBLEMA 19 Sea $a > 0$. Hallar el valor de la integral

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(1+ax^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx.$$

SOLUCION Para $b > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^b \left(\frac{1}{(1+ax^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(x + \sqrt{\frac{1}{a} + x^2}) - \alpha \ln(x+1) \Big|_0^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(b + \sqrt{\frac{1}{a} + b^2}) - \alpha \ln(b+1) - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln b \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{ab^2}} \right) - \alpha \ln b \left(1 + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \sqrt{a} \\ &= \ln b^{\frac{1}{\sqrt{a}} - \alpha} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{ab^2}} \right) - \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \sqrt{a} \right] \end{aligned}$$

cuando $b \rightarrow +\infty$ la expresión [] tiende a $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln 2 \sqrt{a}$. Luego, la integral I es convergente si y sólo si $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{\frac{1}{\sqrt{a}} - \alpha} = L$ cumple $0 < L < +\infty$.

Ahora bien, tenemos

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{a}}, L = +\infty$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}, L = 1$$

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{a}}, L = 0,$$

de donde resulta que el único valor de α para el cual I es convergente es

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$, y en este caso

$$I = \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln 2 \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln 2 \sqrt{a}.$$

PROBLEMA 20 Hallar los valores de p y q para los cuales la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p (1+x)^q} \text{ es convergente.}$$

SOLUCION La función $f(x) = \frac{1}{x^p (1+x)^q}$ es continua en $0 < x < +\infty$.

Se tiene
$$I = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx .$$

Paso 1 Convergencia de la integral $I_1 = \int_0^1 f(x) dx .$

Cuando $x \rightarrow 0$, $1+x \rightarrow 1$ y $f(x) \sim \frac{1}{x^p 2^q} = \frac{A}{x^m}$,

donde $A = \frac{1}{2^q}$, $m = p$.

Luego, por el criterio 4.2, la integral I_1 **es convergente si y sólo si**
 $p < 1$.

Paso 2 Convergencia de la integral $I_2 = \int_1^{\infty} f(x) dx .$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^p (1+x)^q} = \frac{1}{x^{p+q} (1+\frac{1}{x})^q} \sim \frac{1}{x^{p+q}} = \frac{A}{x^m}$,

donde $A = 1$, $m = p+q$.

Luego, por el criterio 4.3, I_2 **es convergente si y sólo si** $m = p+q > 1$
o $1 - q < p$.

Así, la integral dada es convergente si y sólo si $1 - q < p < 1$.

METODOS DE INTEGRACION

1 INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

1.1 Definición Una **función racional** de la forma $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en la variable x con coeficientes reales.

1.2 Cálculo de Integrales de la forma

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

Para encontrar la integral I se procede de la siguiente manera

(1) Se completa cuadrados en el denominador

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

(2) Se hace la sustitución $t = x + \frac{b}{2a}$, con lo cual

$ax^2 + bx + c = a(t^2 + k)$, y la integral I se convierte en

$$I = \int \frac{mt+n}{a(t^2+k)} dt = \frac{m}{a} \int \frac{t dt}{t^2+k} + \frac{n}{a} \int \frac{dt}{t^2+k}.$$

$$(3) \quad \int \frac{t \, dt}{t^2 + k} = \frac{1}{2} \ln | t^2 + k | + C ..$$

(4) Se halla la integral $\int \frac{dt}{t^2 + k}$ aplicando una de las dos siguientes fórmulas

$$\int \frac{du}{u^2 + d^2} = \frac{1}{d} \arctan \frac{u}{d} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - d^2} = \frac{1}{2d} \ln \left| \frac{u-d}{u+d} \right| + C .$$

donde $d \neq 0$.

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx .$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x - 2}{(x-2)^2 + 1} dx && \text{(completando cuadrados)} \\ &= \int \frac{3t + 4}{t^2 + 1} dt && \text{(haciendo la sustitución } t = x-2) \\ &= \frac{3}{2} \ln | t^2 + 1 | + 4 \arctan t + C \\ &= \frac{3}{2} \ln (x^2 - 4x + 5) + 4 \arctan (x-2) + C . \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int \frac{(1-x) dx}{4x^2 - 4x - 3}$.

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= - \int \frac{(x-1) dx}{4(x-\frac{1}{2})^2 - 4} = - \int \frac{(t-\frac{1}{2}) dt}{4t^2 - 4} \quad (\text{haciendo } t = x - \frac{1}{2}) \\
 &= - \frac{1}{4} \int \frac{t dt}{t^2 - 1} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = - \frac{1}{8} \ln |t^2 - 1| + \frac{1}{8(2)} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
 &= - \frac{1}{8} \ln \left| x^2 - x - \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} \right| + C \\
 &= - \frac{1}{8} \ln |4x^2 - 4x - 3| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x - 3}{2x + 1} \right| + C_1.
 \end{aligned}$$

1.3 Integración de una función racional general

Sea dada la función racional $R(x)$. Después de dividir el numerador entre el denominador, $R(x)$ se escribe en la forma

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P_1(x)$ es un polinomio y $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional **propia**, esto es, tal que grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$.

Puesto que la integración del polinomio $P_1(x)$ es inmediata, el cálculo de la integral de $R(x)$ se reduce al de la integral de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Para hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ se emplean usualmente dos métodos:

- (1) El método de descomposición de fracciones parciales.
- (2) El método de Hermite.

1.3.1 Método de Descomposición en Fracciones Parciales

1.3.1.1 Caso 1: TODAS LAS RAICES DE $Q(x)$ SON REALES, ESTO ES $Q(x)$ CONTIENE SOLAMENTE FACTORES LINEALES

Entonces $Q(x) = c(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-k)^\lambda$, donde a, b, \dots, k , son las distintas raíces reales de $Q(x)$, c es un número real, y $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, son números enteros ≥ 1 .

Si grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$, la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone **en una suma de fracciones parciales**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{K_1}{x-k} + \frac{K_2}{(x-k)^2} + \dots + \frac{K_\lambda}{(x-k)^\lambda} \quad (1)$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, \dots, K_1, K_2, \dots, K_\lambda$ son unívocamente determinados por la función racional dada.

Cálculo de los coeficientes Para calcular los coeficientes de la descomposición indicada, se da común denominador en (1) resultando una igualdad de dos polinomios. A continuación se aplica uno de los dos métodos siguientes o una combinación de ellos:

Primer Método: Igualación de coeficientes En este caso se igualan los coeficientes de iguales potencias de x , y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Segundo Método: Danco valores particulares a la variable x En este caso se eligen valores apropiados de la variable x y se evalúan ambos miembros resultando ecuaciones entre los coeficientes. Por ejemplo, a menudo es conveniente tomar $x = a_i$, donde a_i es una de las raíces de $Q(x)$, o también, asignar a x valores enteros pequeños, como 0, ± 1 , ± 2 , \dots , etc.

Ejemplo 1 Calcular $I = \int \frac{dx}{x(x-3)^2}$.

Solución

$$\frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$1 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx \quad (1)$$

Cálculo de los Coeficientes

Primer Método: Igualando coeficientes

$$\text{De } 1 = (A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A$$

$$\text{resulta } 0 = A+B$$

$$0 = -6A - 3B + C$$

$$1 = 9A$$

$$\text{de donde } A = \frac{1}{9}, \quad B = -\frac{1}{9}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Segundo Método: Dando valores a la variable x

$$\text{Haciendo } x = 0 \text{ en (1): } 1 = A(-3)^2, \text{ o } A = \frac{1}{9}$$

$$x = 3 \text{ en (1): } 1 = C(3), \text{ o } C = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \text{ en (1): } 1 = \frac{1}{9}(1-3)^2 + B(1-3) + \frac{1}{3}, \text{ de donde } B = -\frac{1}{9}$$

Tenemos entonces

$$I = \int \frac{\frac{1}{9} dx}{x} + \int \frac{-\frac{1}{9} dx}{x-3} + \int \frac{\frac{1}{3} dx}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{9} \ln|x-3| - \frac{1}{3}(x-3)^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| - \frac{1}{3(x-3)} + C.$$

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Solución

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

de donde

$$1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Haciendo $x+1 = 0$, o $x = -1$, se obtiene $1 = 2A$, o $A = \frac{1}{2}$;

$x+2 = 0$, o $x = -2$, se obtiene $1 = -B$, o $B = -1$;

y $x+3 = 0$, o $x = -3$, se obtiene $1 = 2C$, o $C = \frac{1}{2}$.

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{2} dx}{x+1} + \int \frac{-dx}{x+2} + \int \frac{\frac{1}{2} dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x+1| - \ln |x+2| + \frac{1}{2} \ln |x+3| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

1.3.1.2 Caso General $Q(x)$ TIENE RAICES COMPLEJAS NO REALES, ESTO ES, $Q(x)$ CONTIENE FACTORES CUADRATICOS CON DISCRIMINANTES $p^2 - 4q < 0$

Sea $P(x)$ un polinomio de grado menor que el grado de $Q(x)$.

Entonces $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual a una suma de fracciones parciales que se compone de la siguiente manera:

(1) para cada factor lineal $(x-a)$ de $Q(x)$, repetido α veces, la suma contiene la expresión

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

(2) para cada factor cuadrático $x^2 + px + q$ de $Q(x)$ repetido β veces, donde $p^2 - 4q < 0$ la suma contiene la expresión

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta}$$

Los coeficientes que aparecen en estas expresiones son unívocamente determinados por $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y se calculan aplicando los métodos indicados en el caso 1.

Observemos que las integrales de los términos de (1) son directas. Así, para hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ sólo nos resta determinar

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

El cálculo de tales integrales se efectúa haciendo el cambio $t = x + \frac{p}{2}$ e integrando por partes para reducir el exponente n en una unidad (método de reducción). Ver ejemplo 2, pág. 163. También es aplicable el método de Hermite. Ver 1.3.2, pág. 164.

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$

Solución

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)(x^2 + 4x + 5)}$$

(el factor $x^2 + 4x + 5$ tiene raíces no reales pues su discriminante es $4^2 - 4(5) = -4 < 0$)

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5}$$

de donde

$$1 = A(x-3)(x^2 + 4x + 5) + B(x-1)(x^2 + 4x + 5) + (Cx + D)(x-1)(x-3)$$

Haciendo $x = 1$: $A = -\frac{1}{20}$, $x = 3$: $B = \frac{1}{52}$
 $x = 0$: $D = \frac{6}{52}$, y $x = -1$: $C = \frac{2}{65}$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= -\frac{1}{20} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{52} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{260} \int \frac{8x+30}{x^2+4x+5} dx \\ &= -\frac{1}{20} \ln|x-1| + \frac{1}{52} \ln|x-3| + \frac{1}{260} \int \frac{8x+30}{(x+2)^2+1} dx \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+30}{(x+2)^2+1} dx &= \int \frac{8t+14}{t^2+1} dt && \text{(haciendo } t=x+2) \\ &= 4 \ln|t^2+1| + 14 \operatorname{arc} \tan t + C \\ &= 4 \ln(x^2+4x+5) + 14 \operatorname{arc} \tan(x+2) + C \end{aligned}$$

Finalmente

$$I = -\frac{1}{20} \ln|x-1| + \frac{1}{52} \ln|x-3| + \frac{1}{65} \ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130} \operatorname{arc} \tan(x+2) + C.$$

Ejemplo 2 Hallar $I = \int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx$.

Solución El factor x^2+4x+5 tiene raíces no reales pues su discriminante $4^2 - 4(5) = -4 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } I &= \int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx = \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt && \text{(haciendo } t=x+2) \\ &= \int \frac{t dt}{(t^2+1)^2} - \int \frac{(t^2+1) - t^2}{(t^2+1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2(t^2+1)} - \operatorname{arc} \tan t + \int t \left[\frac{t dt}{(t^2+1)^2} \right] \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int t \left[\frac{t dt}{(t^2+1)^2} \right] &= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= -\frac{t+1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan t + C \\ &= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan(x+2) + C. \end{aligned}$$

1.3.2 Método de Hermite

1.3.2.1 Cálculo de la Integral

$$I = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

TEOREMA Se cumple

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{X(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$$

donde $X(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2(n-1)$ = grado de $(x^2 + px + q)^{n-1}$.

Nota

- 1 Los coeficientes de $X(x)$ así como A y B se hallan derivando ambos miembros y aplicando a continuación los métodos del caso 1 de 1.3.1.
- 2 La integral del segundo miembro se calcula de acuerdo a 1.2, o bien directamente.

PRUEBA DEL TEOREMA

Para $n=1$, se cumple en forma obvia la fórmula indicada.

Supongamos entonces que $n \geq 2$ y procedamos por inducción sobre n .

$$\begin{aligned} \text{Paso 1} \quad \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{M(2x+p) + (2N-Mp)}{(x^2 + px + q)^n} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{c}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} \end{aligned}$$

$$\text{Paso 2} \quad \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} \quad (\text{pues } n \geq 2)$$

Paso 3

$$\text{Sea } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

Entonces se cumple la **fórmula de recurrencia**

$$I_n = \frac{2x + p}{k(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{1}{k} \left(\frac{2n-3}{2n-2} \right) I_{n-1}, \text{ donde } k = q - \frac{p^2}{4}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2 + k)^n} && \text{(haciendo } t = x + \frac{p}{2}\text{)} \\ &= \frac{1}{k} \int \frac{(t^2 + k) - t^2}{(t^2 + k)^n} dt = \frac{1}{k} \int \frac{dt}{(t^2 + k)^{n-1}} - \frac{1}{k} \int \frac{t^2}{(t^2 + k)^n} dt \\ &= \frac{1}{k} I_{n-1} - \frac{1}{k} \int t \left[\frac{t}{(t^2 + k)^n} \right] dt && \text{(integrando por partes)} \\ &= \frac{1}{k} I_{n-1} - \frac{1}{k} \left[t \left(\frac{-1}{2(n-1)(t^2 + k)^{n-1}} \right) - \int \frac{-dt}{2(n-1)(t^2 + k)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{k} I_{n-1} + \frac{t}{2k(n-1)(t^2 + k)^{n-1}} - \frac{1}{2k(n-1)} I_{n-1} \\ &= \frac{2x + p}{4k(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{1}{k} \left(\frac{2n-3}{2n-2} \right) I_{n-1} \end{aligned}$$

Paso 4 De los pasos (1), (2) y (3) se obtiene

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{X_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + d \cdot I_{n-1}$$

donde $X_1(x)$ es un polinomio de grado 1.

Ahora bien por inducción se tiene

$$I_{n-1} = \frac{X_2(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2}} + \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx,$$

siendo X_2 un polinomio de grado $< 2(n-2)$; y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene por lo tanto la fórmula deseada. ■

Ejemplo Hallar

$$I = \int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx.$$

Solución Por el teorema anterior

$$I = \frac{Ax+B}{x^2+4x+5} + \int \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} dx$$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{(x^2+4x+5)A - (Ax+B)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

y dando común denominador

$$x+1 = Cx^3 + (-A+D+4C)x^2 + (-2B+4D+5C)x + (5A-4B+5D)$$

$$\text{Luego } C = 0$$

$$-A + D + 4C = 0$$

$$-2B + 4D + 5C = 1$$

$$5A - 4B + 5D = 1,$$

ecuaciones que resueltas dan $C = 0$, $A = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \\ &= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} \\ &= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan (x+2) + C. \end{aligned}$$

1.3.2.2 Método de Hermite

Teorema

Sea $Q(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_m)^{\alpha_m} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}$

Si $P(x)$ es un polinomio de grado menor que el grado de $Q(x)$, entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + A_1 \int \frac{dx}{x-a_1} + \dots + A_m \int \frac{dx}{x-a_m} + \int \frac{D_1x + E_1}{x^2+p_1x+q_1} dx$$

$$+ \dots + \int \frac{D_nx + E_n}{x^2+p_nx+q_n} dx$$

donde $\begin{cases} Q_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1-1} \dots (x-a_m)^{\alpha_m-1} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n-1} \\ P_1(x) \text{ es un polinomio tal que } \text{grado } P_1(x) < \text{grado de } Q_1(x) \end{cases}$

Nota

- (1) Los coeficientes de $P_1(x)$ así como $A_1, \dots, A_m, D_1, E_1, \dots, D_n, E_n$, son determinados derivando ambos miembros respecto de x .
- (2) Observemos que $Q(x)$ está formado por los mismos factores lineales y cuadráticos de $Q(x)$ con exponentes reducidos en una unidad.

Prueba

En la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones parciales:

- (1) cada factor $(x-a_i)^{\alpha_i}$ contribuye con términos de la forma

$$\frac{A}{(x-a_i)^\gamma}, \quad \gamma \leq \alpha_i, \text{ cuya integral es } A \int \frac{dx}{x-a_i} \text{ si } \gamma = 1 \text{ y}$$

$$\frac{-A}{(\gamma-1)(x-a_i)^{\gamma-1}} \text{ si } \gamma \geq 2$$

- y (2) cada factor $(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i}$ contribuye con términos de la

forma $\frac{Dx+E}{(x^2+p_ix+q_i)^\gamma}$, $\gamma \leq \beta_i$, cuya integral es

$$\frac{X(x)}{(x^2+p_ix+q_i)^{\gamma-1}} + \int \frac{Fx+G}{(x^2+p_ix+q_i)} dx,$$

de acuerdo al teorema 1.3.2.1.

Luego sumando todos los términos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + A_1 \int \frac{dx}{x-a_1} + \dots + A_m \int \frac{dx}{x-a_m} \\ + \int \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + q_1} dx + \dots + \int \frac{D_n x + E_n}{x^2 + p_n x + q_n} dx,$$

donde $Q_1(x)$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que no aparecen bajo el signo de la integral.

Esto concluye la prueba del teorema. ■

Ejemplo Aplicando el método de Hermite encontrar $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$.

Solución Tenemos

$$I = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^2 + 1)^3} + \int \frac{Hx + G}{x^2 + 1} dx .$$

Derivando ambos miembros respecto de x , dando común denominador y agrupando términos

$$1 = Hx^7 + (-A+G)x^6 + (-2B+3H)x^5 + (5A-3C+3G)x^4 + (4B-4D+3H)x^3 \\ + (3C-5E+3G)x^2 + (2D-6F+H)x + (E+G).$$

de donde

$$H = 0 \tag{1}$$

$$-A + G = 0 \tag{2}$$

$$-2B + 3H = 0 \tag{3}$$

$$5A - 3C + 3G = 0 \tag{4}$$

$$4B - 4D + 3H = 0 \tag{5}$$

$$3C - 5E + 3G = 0 \tag{6}$$

$$2D - 6F + H = 0 \tag{7}$$

$$E + G = 1 \tag{8}$$

Resolviendo las ecuaciones tenemos

$$\text{de (1): } H = 0; \quad \text{de (3): } B = 0 \quad \text{de (5): } D = 0;$$

$$\text{de (7): } F = 0; \quad \text{y de (2): } A = G. \quad \text{Las restantes ecuaciones son}$$

$$8A - 3C = 0$$

$$3C - 5E + 3A = 0$$

$$E + A = 1$$

$$\text{de donde } A = \frac{5}{16}, \quad C = \frac{5}{6}, \quad E = \frac{11}{16} \quad \text{y} \quad G = \frac{5}{16}.$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{5}{16}x^5 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{16}x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{16} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{15x^5 + 40x^3 + 33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16} \arctan x + C. \end{aligned}$$

1.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$

y $\frac{3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

$$3 = A(x-3) + B(x-2)$$

haciendo $x = 3$, se obtiene $B = 3$,
 $x = 2$, se obtiene $A = -3$.

Luego $I = \int dx + \int \frac{-3dx}{x-2} + \int \frac{3dx}{x-3}$

$$= x - 3 \ln|x-2| + 3 \ln|x-3| + C$$

$$= x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.$$

PROBLEMA 2 Hallar $A = \int \frac{x+3}{6x-x^2} dx$.

SOLUCION

$$A = \int \frac{x+3}{9-(x-3)^2} dx = - \int \frac{t+6}{t^2-9} dt. \quad (\text{haciendo } t = x-3)$$

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{t dt}{t^2-9} - 6 \int \frac{dt}{t^2-9} \\ &= -\frac{1}{2} \ln |t^2-9| - \frac{6}{2(3)} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln |6x-x^2| - \ln \left| \frac{x-6}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Encontrar $I = \int \frac{3x-2}{1-6x-9x^2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-2}{2-(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{t-3}{2-t^2} dt \quad (\text{haciendo } t=3x+1) \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{t dt}{t^2-2} + \int \frac{dt}{t^2-2} \\ &= -\frac{1}{6} \ln |t^2-2| + \frac{1}{2(\sqrt{2})} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C \\ &= -\frac{1}{6} \ln |1-6x-9x^2| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{-3-x}{4-3x^2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{x+3}{x^2 - \frac{4}{3}} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| x^2 - \frac{4}{3} \right| + \frac{1}{2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| 3x^2 - 4 \right| + \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + C_1. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Hallar $A = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} \\ &= \frac{1}{3 \left(\frac{\sqrt{11}}{6} \right)} \arctan \left(\frac{x - \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{6x-1}{\sqrt{11}} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{(x-1)^2}{x^2 - 6x + 10} dx$.

SOLUCION

$$\frac{(x-1)^2}{x^2 - 6x + 10} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 10} = 1 + \frac{4x - 9}{(x-3)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \int dx + \int \frac{4x-9}{(x-3)^2 + 1} dx = x + \int \frac{4t+3}{t^2+1} dt \quad (\text{haciendo } t = x-3) \\ &= x + 2 \ln |t^2+1| + 3 \arctan t + C \\ &= x + 2 \ln (x^2 - 6x + 10) + 3 \arctan (x-3) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen} x + 12}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 6u + 12} \quad (\text{haciendo } u = \operatorname{sen} x)$$

$$= \int \frac{du}{(u-3)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \tan \frac{u-3}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{\operatorname{sen} x - 3}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

SOLUCION

Caso 1: $a = b$ Entonces $I = \int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C.$

Caso 2: $a \neq b$ Entonces $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$

$$\text{y } 1 = A(x+b) + B(x+a)$$

$$\text{de donde } A = \frac{1}{-a+b} \quad (\text{haciendo } x+a = 0)$$

$$B = \frac{1}{-b+a} \quad (\text{haciendo } x+b = 0)$$

Luego $I = \frac{1}{b-a} \ln |x+a| - \frac{1}{b-a} \ln |x+b| + C$

$$= \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$.

SOLUCION

$$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = 5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} \quad (1)$$

y $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4)$.

Por otra parte $\frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$ (2)

$$25x^2 - 20x + 2 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$$

de donde $A = \frac{1}{2}$ (haciendo $x = 0$)

$$B = -\frac{7}{3} \quad (\text{haciendo } x = 1)$$

$$C = \frac{161}{6} \quad (\text{haciendo } x = 4)$$

Luego de (1) y (2)

$$I = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C.$$

$$= 5x + \ln \left[\frac{|x|^{1/2} |x-4|^{161/6}}{|x-1|^{7/3}} \right] + C.$$

PROBLEMA 10 Calcular $I = \int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$

SOLUCION

$$R(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = x + \frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

y $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$

Luego $R(x) = x + \frac{8(x-2) + 22}{(x-2)^3} = x + \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{22}{(x-2)^3}$

Entonces $I = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + C.$

PROBLEMA 11. Hallar $I = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

SOLUCION

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

Luego $A = 1$ (haciendo $x = 0$)

$C = -1$ (haciendo $x+1 = 0$)

$B = -1$ (haciendo $x = 1$)

e integrando

$$I = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

PROBLEMA 12 Calcular $I = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$.

SOLUCION

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$5x^2 + 6x + 9 = A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2(x+1) + D(x-3)^2$$

de donde $B = \frac{9}{2}$ (haciendo $x-3 = 0$)

$D = \frac{1}{2}$ (haciendo $x+1 = 0$)

y dando los valores $x = 0, 1$, se obtienen las ecuaciones

$$9 = -3A + 9C + 9$$

$$20 = -8A + 8C + 20$$

que resueltas dan $A = 0$, $C = 0$.

Luego $I = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx.$

SOLUCION

$$\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = 1 + \frac{1}{x(x^2 + 1)}$$

$$y \quad \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

de donde $A = 1, \quad C = 0 \quad y \quad B = -1.$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } I &= x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} \\ &= x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} .$

SOLUCION

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 && \text{(diferencia de cuadrados)} \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \end{aligned}$$

$$\text{Tenemos } \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1)$$

$$1 = (A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + (B + D)$$

$$\text{de donde} \quad A + C = 0 \quad (1)$$

$$A + B - C + D = 0 \quad (2)$$

$$A + B + C - D = 0 \quad (3)$$

$$B + D = 1 \quad (4)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

de (1) $C = -A$ (5)

sumando (2) y (3) $B = -A$ (6)

de (2) y (5) $D = C = -A$ (7)

luego en (4) $-2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = C = D = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} \arctan \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \ln \left| (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} \arctan \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right) + C \\ &\quad \left[\text{usando } \arctan a + \arctan b = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab} \right) \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 15 Calcular $I = \int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} dx$.

SOLUCION $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 = t^2 + 1$, donde $t = x-2$

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{t^3+6t^2+12t+9}{(t^2+1)^2} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} t^3 + 6t^2 + 12t + 9 &= (At+B)(t^2+1) + (Ct+D) \\ &= At^3 + Bt^2 + (A+C)t + (B+D). \end{aligned}$$

Luego $A = 1$, $B = 6$, $A+C = 12$ y $B+D = 9$,
de donde $A = 1$, $B = 6$, $C = 11$, $D = 3$, y

$$I = \int \frac{t+6}{(t^2+1)} dt + \int \frac{11t+3}{(t^2+1)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t^2+1| + 6 \arctan t - \frac{11}{2(t^2+1)} + 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

Pero, $I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{(t^2+1) - t^2}{(t^2+1)^2} dt = \arctan t - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2}$

$$= \arctan t - \left[t \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t^2+1} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} \right] = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

(integrando por partes)

Así, $I = \frac{1}{2} \ln |t^2+1| + \frac{15}{2} \arctan t + \frac{3t-11}{2(t^2+1)} + C$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4x + 5) + \frac{15}{2} \arctan (x-2) + \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + C.$$

PROBLEMA 16 Calcular $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

SOLUCION

$$\frac{1}{x^8+x^6} = \frac{1}{x^6(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \frac{Gx+H}{x^2+1}$$

$$1 = Ax^5(x^2+1) + Bx^4(x^2+1) + Cx^3(x^2+1) + Dx^2(x^2+1) + Ex(x^2+1) + F(x^2+1) + (Gx+H)x^6$$

$$1 = (A+G)x^7 + (B+H)x^6 + (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (C+E)x^3 + (D+F)x^2 + Ex + F$$

de donde $A + G = 0$, $B + H = 0$, $A + C = 0$, $B + D = 0$,
 $C + E = 0$, $D + F = 0$, $E = 0$, $F = 1$,

y $F = 1$, $E = 0$, $D = -1$, $C = 0$, $B = 1$, $A = 0$, $H = -1$, $G = 0$.

Luego

$$I = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \arctan x + C.$$

PROBLEMA 17 Emplendo el método de Hermite hallar $I = \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

SOLUCION Por el método 1.3.2.2

$$I = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x+1)(x^2+1)} + D \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex + F}{x^2+1} dx$$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$1 = (Dx+E)x^5 + (-A+D+2E+F)x^4 + (-2B+2D+2E+2F)x^3 + (A-B-3C+2D+2E+2F)x^2 \\ + (2A-2C+D+E+2F)x + (B-C+D+F)$$

$$\text{de donde} \quad D+E=0 \quad (1)$$

$$-A+D+2E+F=0 \quad (2)$$

$$-B+D+E+F=0 \quad (3)$$

$$A-B-3C+2D+2E+2F=0 \quad (4)$$

$$2A-2C+D+E+2F=0 \quad (5)$$

$$B-C+D+F=1 \quad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{2}, \quad F = \frac{1}{4}.$$

Finalmente

$$I = -\frac{x^2-1}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{4} \arctan x + C.$$

PROBLEMA 18 Calcular $I = \int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{(x^7+1)-x^7}{x(x^7+1)} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^6}{x^7+1} dx \\ = \ln|x| - \frac{1}{7} \ln|x^7+1| + C = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x^7}{x^7+1} \right| + C.$$

PROBLEMA 19 Hallar $I = \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(t+1)^2 dt}{t^{10}} && \text{(haciendo } t = x-1 \text{)} \\ &= \int \frac{(t^2 + 2t + 1)}{t^{10}} dt = -\frac{1}{7t^7} - \frac{1}{4t^8} - \frac{1}{9t^9} + C \\ &= -\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 20 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^5+1) - x^5}{x(x^5+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x(x^5+1)} - \int \frac{x^4}{(x^5+1)^2} dx \\ &= \int \frac{(x^5+1) - x^5}{x(x^5+1)} dx + \frac{1}{5(x^5+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^4}{x^5+1} dx + \frac{1}{5(x^5+1)} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{5} \ln|x^5+1| + \frac{1}{5(x^5+1)} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 21 Calcular $I = \int \frac{x dx}{x^4 - 1}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1}, && \text{haciendo } t = x^2 \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 22 Aplicando el método de Hermite encontrar

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx .$$

SOLUCION

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 1 + \frac{P(x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} ,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado ≤ 3 .

Luego por 1.3.2.2

$$I = \int dx + \int \frac{P(x)dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} = x + \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2} dx$$

Derivando respecto de x

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 1 + \frac{(x^2 - 2x + 2)A - (Ax + B)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$$

$$x^4 - 2x^2 + 2 = x^4 + (C-4)x^3 + (8 - A - 2C + D)x^2 + (-8-2B+2C-2D)x + (4+2A+2B+2D)$$

de donde $C - 4 = 0$

$$8 - A - 2C + D = -2$$

$$-8 - 2B + 2C - 2D = 0$$

$$4 + 2A + 2B + 2D = 2 .$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 4, \quad D = -3.$$

Por lo tanto

$$I = x - \frac{-x-3}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{4x-3}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-3}{x^2 - 2x + 2} dx &= \int \frac{4t+1}{t^2+1} dt && (\text{haciendo } t = x-1) \\ &= 2 \ln |t^2+1| + \arctan t + C \end{aligned}$$

y así, $I = x - \frac{x-3}{x^2 - 2x + 2} + 2 \ln(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x-1) + C.$

PROBLEMA 23 Si $Q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ donde a_1, a_2, \dots, a_n son distintos números reales, y $P(x)$ es un polinomio de grado menor que n probar que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \ln |x - a_1| + \dots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \ln |x - a_n| + C$$

SOLUCION

Tenemos
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} .$$

Probaremos que
$$A_i = \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} .$$

Tenemos
$$\frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(a_i)}{x - a_i}} \quad (\text{definición de derivada})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a_i} (x - a_i) \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (\text{pues } Q(a_i) = 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a_i} \left[\left(\frac{x - a_i}{x - a_1} \right) A_1 + \dots + \left(\frac{x - a_i}{x - a_i} \right) A_i + \dots + \left(\frac{x - a_i}{x - a_n} \right) A_n \right]$$

$$= 0 + \dots + A_i + \dots + 0 = A_i$$

Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \ln |x - a_1| + \dots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \ln |x - a_n| + C.$$

2. INTEGRACION DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

2.1 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Solución Completando cuadrados en el trinomio ax^2+bx+c , el cálculo de la integral I se reduce a encontrar una de las siguientes integrales.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sen} \left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

Solución

$$1-x-x^2 = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} - t^2, \quad \text{donde } t = x + \frac{1}{2}$$

Luego

$$I = \int \frac{2t-9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} dt = 2 \int \frac{t dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} - 9 \int \frac{t dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2} - 9 \text{ arc sen} \left(\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C$$

$$= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9 \text{ arc sen} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

2.2 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{dx}{(x-d) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Solución Haciendo $t = \frac{1}{x-d}$ (sustitución inversa), la integral I se transforma en una integral del tipo 2.1

En efecto, tenemos $x = \frac{1}{t} + d$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{a \left(\frac{1}{t} + d\right)^2 + b \left(\frac{1}{t} + d\right) + c}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{C}{t^2} + \frac{B}{t} + A}} \\ &= \mp \int \frac{dt}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}, \end{aligned}$$

donde se debe elegir el signo $-$ ó $+$ según que sea $t > 0$ ó $t < 0$, respectivamente.

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2}}$, para $x > \sqrt{2}$.

Solución

Sea $t = \frac{1}{x-1}$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dt}{t \sqrt{\left(\frac{1}{t} + 1\right)^2 - 2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{2 - (t-1)^2}} = - \text{arc sen} \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= - \text{arc sen} \left| \frac{2-x}{(x-1)\sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

2.3 Integrales de la forma

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$$

Solución Completando cuadrados en el trinomio $ax^2 + bx + c$, la integral I se transforma en una de las dos siguientes integrales (que pueden calcularse mediante sustituciones trigonométricas):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \frac{x}{a} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

Ejemplo Hallar $I = \int \sqrt{10 - 4x + 4x^2} \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{(2x-1)^2 + 9} \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t^2 + 9} \, dt \quad (\text{haciendo } t = 2x-1) \\ &= \frac{1}{4} t \sqrt{t^2 + 9} + \frac{9}{4} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 9} \right| + C \\ &= \frac{(2x-1)}{4} \sqrt{10 - 4x + 4x^2} + \frac{9}{4} \ln \left| 2x-1 + \sqrt{10 - 4x + 4x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

2.4 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

Teorema

Se cumple $I = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, donde Q_{n-1} es un polinomio de grado $n-1$ y K es una constante.

Nota

Los coeficientes de $Q_{n-1}(x)$ y K se calculan derivando ambos miembros respecto de x .

Prueba del Teorema

Si $P_n(x) = A_n x^n + \dots + A_0$ entonces

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = A_n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \dots + A_0 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

y por tanto, es suficiente probar que cada integral $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ puede escribirse en la forma indicada.

Vamos a probar que se cumple la siguiente fórmula de recurrencia

$$J_n = \frac{x^{n-1}}{na} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b(2n-1)}{2na} J_{n-1} - \frac{c(n-1)}{na} J_{n-2} \quad (1)$$

En efecto,

$$J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{n-1} (ax + \frac{b}{2} - \frac{b}{2})}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

(observemos que $d(\sqrt{ax^2 + bx + c}) = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a} \int x^{n-1} \left(\frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right) dx - \frac{b}{2a} J_{n-1} \\
 &= \frac{1}{a} \left[x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c} - (n-1) \int x^{n-2} \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \right] - \frac{b}{2a} J_{n-1} \\
 &\hspace{15em} \text{(integrando por partes)} \\
 &= \frac{x^{n-1}}{a} \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{(n-1)}{a} \int \frac{x^{n-2}(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx - \frac{b}{2a} J_{n-1} \\
 &= \frac{x^{n-1}}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - (n-1) J_n - \frac{b(n-1)}{a} J_{n-1} - \frac{c}{a}(n-1) J_{n-2} - \frac{b}{2a} J_{n-1}
 \end{aligned}$$

Luego $n J_n = \frac{x^{n-1}}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b(2n-1)}{2a} J_{n-1} - \frac{c}{a}(n-1) J_{n-2}$

de donde resulta la fórmula (1).

De (1) se sigue, por inducción sobre n , que

$$J_n = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $\leq n-1$. █

Ejemplo Encontrar $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Solución Tenemos $I = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) \cdot \sqrt{1-x^2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\begin{aligned}
 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) \sqrt{1-x^2} \\
 &\quad + (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{K}{\sqrt{1-x^2}},
 \end{aligned}$$

y dando común denominador y agrupando términos semejantes

$$x^5 = (-5A)x^5 + (-4B)x^4 + (-3C+4A)x^3 + (3B-2D)x^2 + (2C-E)x + (D+K).$$

De donde, $A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{4}{15}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{8}{15}, \quad K = 0.$

Luego $I = -\frac{1}{15}(3x^4 + 4x^2 + 8) \sqrt{1-x^2} + C_1.$

2.5 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{dx}{(x-d)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Solución

Haciendo la sustitución $t = \frac{1}{x-d}$ la integral dada se transforma en una integral del tipo 2.4 (Comparar con 2.2)

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 2x}}$, para $x > 0$.

Solución Hagamos $t = \frac{1}{x+1}$. Luego $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$,

$$\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t} - 1\right)} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{1}{t} \sqrt{1-t^2}$$

(pues $t > 0$ si $x > 0$).

Luego

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{t} \sqrt{1-t^2}} = - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= (At + B) \sqrt{1-t^2} + K \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (\text{aplicando 2.4})$$

Derivando ambos miembros e igualando coeficientes obtenemos

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0 \quad \text{y} \quad K = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente $I = \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} \text{arc sen } t + C$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \text{arc sen}\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$$

(escribiendo $t \sqrt{1-t^2} = t^2 \left[\frac{1}{t} \sqrt{1-t^2} \right] = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \sqrt{x^2 + 2x}$).

2.6 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x \, dx}{\sqrt{5(x - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}}} = \int \frac{(\frac{t+1}{5}) \cdot \frac{dt}{5}}{\sqrt{\frac{t^2+4}{5}}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{haciendo } t = 5(x - \frac{1}{5}) \\ = 5x - 1 \end{array} \right. \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2+4}} + \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{25} \sqrt{25x^2 - 10x + 5} + \frac{\sqrt{5}}{25} \ln \left| t + \sqrt{t^2+4} \right| + C \\
 &= \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 2x + 1} + \frac{\sqrt{5}}{25} \ln \left| x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2 - 2x + 1} \right| + C_1 .
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \sqrt{2 - 2x - x^2} \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{3 - (x+1)^2} \, dx = \int \sqrt{3 - t^2} \, dt \quad (\text{haciendo } t = x+1) \\
 &= \frac{t}{2} \sqrt{3 - t^2} + \frac{3}{2} \arcsen \frac{t}{\sqrt{3}} + C \quad (\text{ver 2.3}) \\
 &= \frac{(t+1)}{2} \sqrt{2 - 2x - x^2} + \frac{3}{2} \arcsen \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) + C .
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \sqrt{x^2 - 8x + 7} \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{(x-4)^2 - 9} \, dx = \int \sqrt{t^2 - 9} \, dx \quad (\text{haciendo } t = x-4) \\ &= \frac{t \sqrt{t^2 - 9}}{2} - \frac{9}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 9} \right| + C \quad (\text{ver 2.3}) \\ &= \frac{(x-4)}{2} \sqrt{x^2 - 8x + 7} - \frac{9}{2} \ln \left| x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 7} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$

SOLUCION Hagamos $u = \cos x$. Luego

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4u + 1}} = - \int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 - 3}} = - \ln \left| (u+2) + \sqrt{(u+2)^2 - 3} \right| + \\ & \quad (\text{ver 2.1}) \\ &= - \ln \left| \cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION La integral es del tipo 2.2. Sea $t = \frac{1}{x}$.

Tenemos

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = - \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 1} \right| + C \\ &= - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{1-x^2} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Calcular $I = \int \frac{\ln x \, dx}{x \sqrt{1 - 4 \ln x + \ln^2 x}}$.

SOLUCION Sea $u = \ln x$. Luego $x = e^u$, $dx = e^u du$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u e^u du}{e^u \sqrt{1 - 4u + u^2}} = \int \frac{u du}{\sqrt{(u-2)^2 - 3}} = \int \frac{(t+2) dt}{\sqrt{t^2 - 3}} \\ & \quad \cdot \text{(haciendo } t = u-2 \text{)} \\ &= \sqrt{t^2 - 3} + 2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 3} \right| + C \\ &= \sqrt{1 - 4 \ln x + \ln^2 x} + 2 \ln \left| \ln x - 2 + \sqrt{1 - 4 \ln x + \ln^2 x} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int x^2 \sqrt{x^2 + 4} \, dx$.

SOLUCION Por (2.4) tenemos

$$I = \int \frac{x^2 (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \sqrt{x^2 + 4} + K \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Derivando ambos miembros respecto de x .

$$\frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} = (3Ax^2 + 2Bx + C) \sqrt{x^2 + 4} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{K}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2 + 4}$, igualando coeficientes y resolviendo las ecuaciones resultantes obtenemos

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0, \quad K = -2.$$

Luego $I = \frac{x^4 + 2x^2}{4} \sqrt{x^2 + 4} - 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$.

PROBLEMA 8 Encontrar $I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$.

SOLUCION

$$I = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| + \ln \left| \frac{x}{2 - x + 2 \sqrt{x^2 - x + 1}} \right| + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$.

SOLUCION

$$I = - \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \left(\text{haciendo } t = \frac{1}{x} \right)$$

$$= (At^3 + Bt^2 + Ct + D) \sqrt{1-t^2} + K \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Luego

$$-\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = (3At^2 + 2Bt + C) \sqrt{1-t^2} + (At^3 + Bt^2 + Ct + D) \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) + \frac{K}{\sqrt{1-t^2}}$$

Multiplicando por $\sqrt{1-t^2}$, igualando coeficientes y resolviendo las ecuaciones resultantes obtenemos

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3}{8}, \quad D = 0 \quad \text{y} \quad K = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Entonces } I = \frac{1}{8}(2t^3 + 3t) \sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8} \arcsen t + C$$

$$= \frac{2 + 3x^2}{8x^4} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8} \arcsen \frac{1}{x} + C.$$

2.7 Integrales de la forma

$$I = \int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_2}, \dots \right] dx$$

donde R es una función racional y r_1, r_2, \dots , son números racionales.

Solución Mediante la sustitución $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde m es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los números racionales r_1, r_2, \dots , la integral dada se transforma en una integral de una función racional $R_1(t)$

$$I = \int R_1(t) dt .$$

2.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$.

SOLUCION Si $t^2 = x-1$ y $dx = 2t dt$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(t^2 + 1)^3}{t} 2t dt = 2 \int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1) dt \\ &= \frac{2}{7} t^7 + \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 + 2t + C \\ &= 2\sqrt{x-1} \left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x \right] + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

SOLUCION Si $t^2 = 1-x$, $dx = -2t dt$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} I &= -2 \int \frac{t dt}{(1+t^2)t} = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \arctan t + C \\ &= -2 \arctan \sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

SOLUCION

Sea $t = \sqrt[3]{ax+b}$. Luego $x = \frac{t^3 - b}{a}$ y $dx = \frac{3t^2}{a} dt$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{a^2} \int \frac{(t^3 - b)t^2 dt}{t} = \frac{3}{a^2} \int (t^4 - bt) dt = \frac{3}{a^2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{bt^2}{2} \right) + C \\ &= \frac{3t^2}{10a^2} (2t^3 - 5b) + C = \frac{3(ax+b)^{2/3}}{10a^2} (2ax - 3b) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Hallar $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$.

SOLUCION

Hagamos $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$. Luego $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ y $dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}$.

Entonces

$$\begin{aligned} I &= -6 \int \frac{t^3 dt}{(t^3-1)^2} = -6 \int t \left| \frac{t^2}{(t^3-1)^2} \right| dt && \text{(integrando por partes)} \\ &= 2 \frac{t}{t^3-1} - 2 \int \frac{dt}{t^3-1} \end{aligned}$$

Por otra parte $\frac{1}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

de donde $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ y $C = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{y } \int \frac{dt}{t^3-1} &= \frac{1}{3} \ln |t-1| - \frac{1}{3} \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |t-1| - \frac{1}{3} \int \frac{(t+\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |t-1| - \frac{1}{6} \ln |t^2+t+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

Finalmente

$$I = \frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

donde $t = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3}$.

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2} - \sqrt[4]{3x-2}}$.

SOLUCION

Sea $t = \sqrt[4]{3x-2}$. Luego $x = \frac{t^4 - 2}{3}$ y $dx = \frac{4t^3}{3} dt$. Entonces

$$I = \frac{4}{3} \int \frac{t^3 dt}{t^2 - t} = \frac{4}{3} \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \frac{4}{3} \int \frac{(t^2 - 1 + 1) dt}{t-1} = \frac{4}{3} \int (t+1) dt + \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t-1}$$

$$= \frac{2}{3} t^2 + \frac{4}{3} t + \frac{4}{3} \ln |t-1| + C$$

donde $t = (3x-2)^{1/4}$.

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

SOLUCION

Tenemos $6 = \text{m.c.m}$ de los denominadores de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

Hagamos $t^6 = x$. Luego

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \frac{(u-1)^3 du}{u} \quad (\text{haciendo } u = t+1)$$

$$= 6 \int (u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}) du$$

$$= 2u^3 - 9u^2 + 18u - 6 \ln |u| + C$$

$$= 2(\sqrt[6]{x} + 1)^3 - 9(\sqrt[6]{x} + 1)^2 + 18(\sqrt[6]{x} + 1) - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C_1.$$

2.9 Integrales de la forma

$$I = \int x^p (a + bx^q)^r dx,$$

donde p, q y r son números racionales.

Solución

Caso 1 Si r es un número entero, la integral se calcula por 2.7

Caso 2 Si $\frac{p+1}{q}$ es un número entero, se hace la sustitución $t^D = a + bx^q$, donde $D =$ denominador de r .

La integral dada queda convertida en una integral de una función racional $R_1(t)$ en t

$$I = \int R_1(t) dt.$$

En efecto $x = \left(\frac{t^D - a}{b}\right)^{1/q}$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{t^D - a}{b}\right)^{p/q} t^{Dr} \frac{1}{q} \left(\frac{t^D - a}{b}\right)^{1/q-1} D t^{D-1} dt \\ &= K \int (t^D - a)^{\frac{p+1}{q} - 1} t^{Dr+D-1} dt, \end{aligned}$$

y todos los exponentes del integrando son números enteros.

Caso 3 Si $\frac{p+1}{q} + r$ es un número entero, se hace la sustitución $t^D = ax^{-q} + b$, donde $D =$ denominador de r .

La integral I es transformada en una integral de una función racional en la variable t .

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } I &= \int x^p (a + bx^q)^r dx = \int x^p x^{qr} (b + ax^{-q})^r dx \\ &= \int x^{p+qr} (b + ax^{-q})^r dx, \end{aligned}$$

y en esta integral se cumple la hipótesis del caso anterior, pues

$$\frac{p+qr+1}{-q} = -\left(\frac{p+1}{q} + r\right) \text{ es un número entero.}$$

2.10 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int x^3(1-2x^2)^{-3/2} dx$.

SOLUCION Tenemos $p = 3$, $q = 2$, $r = -\frac{3}{2}$.

Puesto que $\frac{p+1}{q} = 2$ (caso 2) hacemos la sustitución $t^2 = 1-2x^2$.

Luego $x = \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{1/2}$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{3/2} t^{-3} \frac{1}{2} \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}-1} (-t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1-t^2}{2}\right) t^{-2} dt = -\frac{1}{4} \int (t^{-2}-1) dt \\ &= \frac{1}{4t} + \frac{t}{4} + C = \frac{1+t^2}{4t} + C = \frac{1-x^2}{2\sqrt{1-2x^2}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$.

SOLUCION

De $I = \int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx$ tenemos $p = -4$, $q = 2$, $r = -\frac{1}{2}$ y

$\frac{p+1}{q} + r = -2$. Luego se trata de una integral del caso 3. Escribiendo

$$I = \int x^{-5} (x^{-2}+1)^{-1/2} dx,$$

hacemos la sustitución. $t^2 = x^{-2}+1$, $x = (t^2-1)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} I &= \int (t^2-1)^{5/2} t^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) (t^2-1)^{-3/2} 2t dt = - \int (t^2-1) dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + t + C = \frac{t}{3}(3-t^2) + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3} (2x^2-1) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Hallar $I = \int x^5(a+bx^3)^{1/4} dx$

SOLUCION

Tenemos $p=5$, $q=3$, $r = \frac{1}{4}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$. Luego se trata de la integral del caso 2.

Hagamos $t^4 = a + bx^3$. Entonces $x = \left(\frac{t^4 - a}{b}\right)^{1/3}$ y $dx = \frac{4}{3b} \left(\frac{t^4 - a}{b}\right)^{-2/3} t^3 dt$.

Entonces

$$I = \frac{4}{3b} \int \left(\frac{t^4 - a}{b}\right)^{1/4} t^3 dt = \frac{4}{3b^2} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{a}{5} t^5\right) + C = \frac{4 t^5}{135 b^2} (5t^4 - 9a) + C$$

$$= \frac{4(a+bx^3)^{5/4} (5bx^3 - 4a)}{135 b^2} + C.$$

PROBLEMA 4

Encontrar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}$.

SOLUCION

En $I = \int x^{-3/2} (1 + x^{3/4})^{-1/3} dx$ tenemos $p = -\frac{3}{2}$, $q = \frac{3}{4}$, $r = -\frac{1}{3}$ y $\frac{p+1}{q} + r = -1$. Entonces escribimos

$$I = \int x^{-7/4} (x^{-3/4} + 1)^{1/3} dx$$

y hacemos la sustitución $t^3 = x^{-3/4} + 1$, $x = (t^3 - 1)^{-4/3}$, $dx = -4(t^3 - 1)^{-7/3} t^2 dt$.

Luego

$$I = -4 \int t dt = -2t^2 + C = -2(x^{-3/4} + 1)^{2/3} + C.$$

PROBLEMA 5

Hallar $I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x+2}}}{\sqrt{x+2}} dx$.

SOLUCION

Haciendo $t = x+2$ tenemos $I = \int t^{-1/2} (1 + t^{1/4})^{1/3} dt$

$p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{3}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$.

Sea $u^3 = 1 + t^{1/4}$, $t = (u^3 - 1)^4$, $dt = 12(u^3 - 1)^3 u^2 du$.

Luego

$$I = 12 \int (u^3 - 1)^{-2} u (u^3 - 1)^3 u^2 du = 12 \int (u^3 - 1) u^3 du = \frac{12}{7} u^7 - 3u^4 + C$$

$$= \frac{12}{7} \left[1 + (x+2)^{1/4} \right]^7 - 3 \left[1 + (x+2)^{1/4} \right]^4 + C.$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x^n (1+x^n)^{1/n}}$, $n \geq 2$.

SOLUCION

$$I = \int x^{-n} (1+x^n)^{-1/n} dx, \quad p = -n, \quad q = n, \quad r = -\frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{p+1}{q} + r = -1.$$

$$\text{Luego} \quad I = \int x^{-(n+1)} (x^{-n} + 1)^{-1/n} dx,$$

$$\text{y haciendo} \quad t^n = x^{-n} + 1, \quad x = (t^n - 1)^{-1/n}, \quad dx = -(t^n - 1)^{-\frac{n+1}{n}} t^{n-1} dt.$$

$$\text{Entonces} \quad I = - \int t^{n-2} dt = -\frac{t^{n-1}}{n-1} + C = -\frac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)x^{n-1}} + C.$$

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int \frac{(x^5 + 2x^2)}{(1+x^3)^{3/2}} dx$.

SOLUCION

$$I = \int x^5 (1+x^3)^{-3/2} dx + 2 \int x^2 (1+x^3)^{-3/2} dx.$$

$$\text{Para la primera integral: } p = 5, \quad q = 3 \quad \text{y} \quad \frac{p+1}{q} = 2;$$

$$\text{y para la segunda integral: } p = 2, \quad q = 3 \quad \text{y} \quad \frac{p+1}{q} = 1.$$

$$\text{Hagamos entonces} \quad t^2 = 1+x^3, \quad x = (t^2 - 1)^{1/3}, \quad dx = \frac{2}{3}(t^2 - 1)^{-2/3} t dt.$$

$$\text{Luego} \quad I = \frac{2}{3} \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt + \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3} t - \frac{2}{3t} + C$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(t^2 - 1)}{t} + C = \frac{2x^3}{3 \sqrt{1+x^3}} + C.$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int x^5 (a^3 - x^3)^{3/2} dx$.

SOLUCION Tenemos $p = 5$, $q = 3$, $r = \frac{3}{2}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$.

Luego hacemos la sustitución $t^2 = a^3 - x^3$, $x = (a^3 - t^2)^{1/3}$,
 $dx = -\frac{2}{3} t (a^3 - t^2)^{-2/3} dt$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3} \int (a^3 - t^2)t^4 dt = -\frac{2}{3} \left(\frac{a^3 t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right) + C \\ &= -\frac{2t^5}{3} \left(\frac{a^3}{5} - \frac{t^2}{7} \right) + C = -\frac{2}{3} (a^3 - x^3)^{5/2} \left(\frac{x^3}{7} + \frac{2a^3}{35} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Calcular $I = \int \frac{2\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx$.

SOLUCION

$$I = 2 \int x^{-3} (1+x^4)^{1/2} dx, \quad p = -3, \quad q = 4, \quad r = \frac{1}{2} \quad \dot{y} \quad \frac{p+1}{4} + \frac{1}{2} = 0.$$

Entonces escribimos

$$\begin{aligned} I &= 2 \int x^{-1} (x^{-4} + 1)^{1/2} dx \quad \text{y hacemos la sustitución } t^2 = x^{-4} + 1, \\ x &= (t^2 - 1)^{-1/4}, \quad dx = -\frac{1}{2} t (t^2 - 1)^{-5/4} dt. \quad \text{Tenemos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = - \int dt - \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4} + x^2}{\sqrt{1+x^4} - x^2} \right| + C \\ &= - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \ln \left| x^2 + \sqrt{1+x^4} \right| + C. \end{aligned}$$

3 INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

3.1 Integrales de la forma

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

donde m y n son números enteros.

Caso 1 Al menos uno de los exponentes m o n es un número impar positivo

Solución Supongamos que $m = 2k + 1$ es un número impar positivo. Entonces

$$I_{m,n} = - \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \, d(\cos x)$$

y haciendo la sustitución $t = \cos x$ se obtiene

$$I_{m,n} = - \int (1 - t^2)^k t^n \, dt,$$

que es una integral cuyo cálculo es inmediato.

Una situación similar ocurre cuando n es un número impar positivo.

Ejemplo 1 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, d(\operatorname{sen} x) = \int t^2 (1 - t^2) \, dt \quad (\text{haciendo } t = \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x} \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} \, d(\cos x) = - \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^2} \, dt \quad (\text{donde } t = \cos x) \\ &= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \sec x + 2 \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Caso 2 Ambos exponentes m y n son números pares > 0

Solución Entonces la integral dada se reduce a integrales del caso 1 empleando las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

las cuales permiten disminuir los exponentes.

Ejemplo Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^4 x \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int (\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x)^2 \operatorname{cos}^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x (1 + \operatorname{cos} 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{16} \int \operatorname{sen}^2 2x \, d(\operatorname{sen} 2x) \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \operatorname{cos} 4x) dx + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C. \end{aligned}$$

Caso 3 Ambos exponentes m y n son enteros < 0 de igual paridad

Solución Sean $m = -p$ y $n = -q$. Entonces las sustituciones $t = \tan x$ o $t = \cot x$ convierten $I_{m,n}$ en una integral de una función racional en la variable t .

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \operatorname{sen}^m x \operatorname{cos}^n x \, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^p x \operatorname{cos}^q x} \\ &= \int \operatorname{cosec}^p x \operatorname{sec}^{q-2} x \, d(\tan x) \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{p/2} (1 + \tan^2 x)^{\frac{q-2}{2}} \, d(\tan x) \end{aligned}$$

$$I_{m,n} = \int \frac{(1 + \tan^2 x)^{\frac{p+q}{2} - 1}}{\tan^p x} d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^{\frac{p+q}{2} - 1}}{t^p} dt, \text{ donde } t = \tan x.$$

Observemos que $\frac{p+q}{2}$ es un número entero ya que m y n tienen igual paridad.

Un resultado análogo es válido cuando se toma $t = \cot x$.

Casos Particulares

Si m es impar entonces las integrales $\int \frac{dx}{\sin^m x}$ y $\int \frac{dx}{\cos^m x}$ se reducen al presente caso empleando

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^m \frac{x}{2} \cos^m \frac{x}{2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin^m (x + \frac{\pi}{2})}$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{cosec}^4 x \, dx = - \int \operatorname{cosec}^2 x \, d(\cot x) \\ &= \int (1 + \cot^2 x) \, d(\cot x) = - \cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{cosec}^5 x \sec x \, d(\tan x) = \int (1 + \frac{1}{\tan^2 x})^{5/2} (1 + \tan^2 x)^{1/2} d(\tan x) \\ &= \int \frac{(1 + \tan^2 x)^3}{\tan^5 x} d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^5} dt \quad (t = \tan x) \\ &= - \frac{\cot^4 x}{4} - \frac{3 \cot^2 x}{2} + 3 \ln |\tan x| + \frac{\tan^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Hallar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{tenemos } I &= \frac{1}{2^5} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^4} \int \operatorname{cosec}^5 \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2} d(\tan \frac{x}{2}) \\ &= \frac{1}{16} \int (1 + \frac{1}{t^2})^{5/2} (1 + t^2)^{3/2} dt \quad (\text{haciendo } t = \tan \frac{x}{2}) \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{(1+t^2)^4}{t^5} dt = \frac{1}{16} (-\frac{t}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6 \ln|t| + 2t^2 + \frac{t^4}{4}) + C \\ &= \frac{t^8 - 1}{64 t^4} + \frac{t^4 - 1}{8t^2} + \frac{3}{8} \ln|t| + C \end{aligned}$$

y puesto que $t^2 = \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ se tiene $\frac{t^4 - 1}{t^2} = -4 \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ y

$$\frac{t^8 - 1}{t^4} = -\frac{8 \cos x (2 - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x}, \text{ obtenemos finalmente}$$

obtenemos finalmerte

$$I = -\frac{\cos x}{4 \operatorname{sen}^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \operatorname{sen}^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Caso 4 Integrales de la forma $I = \int \tan^m x \, dx$ o $I = \int \cot^m x \, dx$, donde m es un número entero ≥ 1

Solución Para $m = 1$ tenemos

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C, \quad \int \cot x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C,$$

y para $m \geq 2$, se dispone de **fórmulas de reducción** empleando

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1, \quad \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} \int \tan^m x \, dx &= \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x \, dx \\ \int \cot^m x \, dx &= \int \cot^{m-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x \, dx. \end{aligned}$$

Ejemplo Hallar $I = \int \cot^3 x \, dx$.

Solución

$$I = \int \cot x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x \, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

Caso 5 Caso General: Fórmulas de Reducción

En general la integral $I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ se calcula integrando

por partes dando lugar a **fórmulas de reducción** que permiten expresar la integral dada en términos de otra integral de la misma forma con los exponentes aumentado o disminuídos.

A continuación presentamos tales fórmulas de reducción.

$$(1) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$(2) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$(3) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x \, dx$$

$$(4) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x \, dx$$

Por supuesto dichas ecuaciones son válidas siempre que los respectivos denominadores sean distintos de cero.

(1) y (2) se obtienen integrando por partes y usando la relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Ver ejemplo 1.

(3) y (4) se obtienen de (1) y (2), respectivamente, despejando la integral del segundo miembro.

Ejemplo 1 Probar la fórmula de reducción

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx,$$

donde m y n son números enteros tales que $m+n \neq 0$.

Solución

Sea $I = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$. Tenemos

$$(m+1)I = \int (m+1)\sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

(comando $u = \cos^{n-1} x$, $dv = (m+1)\sin^m x \cos x \, dx$)

$$= \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

(pues $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$= \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - (n-1)I,$$

de donde $(m+n)I = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx,$

y despejando I resulta la fórmula deseada.

3.2 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \tan^3 \frac{x}{3} \, dx$.

SOLUCION Tenemos una integral del caso 4.

$$\begin{aligned} I &= \int \tan \frac{x}{3} (\sec^2 \frac{x}{3} - 1) \, dx = 3 \int \tan \frac{x}{3} \, d(\tan \frac{x}{3}) - 3 \int \tan \frac{x}{3} \, d(\frac{x}{3}) \\ &= \frac{3}{2} \tan^2 \frac{x}{3} + 3 \ln \left| \cos \frac{x}{3} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

$$\text{Hallar } I = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$$

SOLUCION

$$I = - \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)}{\sin^3 x} \quad (\text{CASO 1})$$

$$= - \frac{1}{2 \sin^2 x} - 2 \ln |\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$\text{PROBLEMA 3} \quad \text{Calcular } I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

SOLUCION

$$I = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx \quad (\text{CASO 2})$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$\text{PROBLEMA 4} \quad \text{Encontrar } I = \int \sec^3 x dx.$$

SOLUCION

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \sec x dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int \sec x dx + \left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} \right]$$

$$(\text{integrando por partes: } u = \sin x, dv = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x})$$

$$I = \frac{1}{2} \ln |\tan x + \sec x| + \frac{1}{2} \tan x \sec x + C.$$

PROBLEMA 5Hallar $I = \int \cos^6 3x \, dx$.**SOLUCION** Tenemos una integral de caso 2.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^3 dx && \text{(usando } \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \text{)} \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 6x + 3 \cos^2 6x + \cos^3 6x) dx \\
 &= \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \int (3 + \cos^2 6x) \cos 6x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 6x \, dx \\
 &= \frac{x}{8} + \frac{1}{48} \int (4 - \operatorname{sen}^2 6x) d(\operatorname{sen} 6x) + \frac{3}{16} \int (1 + \cos 12x) dx \\
 &= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144} + \frac{3x}{16} + \frac{1}{64} \operatorname{sen} 12x + C \\
 &= \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{64} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

$$\begin{aligned}
 \text{SOLUCION } I &= \int \operatorname{cosec}^2 x \sec^4 x \, dx = \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) (1 + \tan^2 x) d(\tan x) && \text{(CASO 3)} \\
 &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt && \text{(haciendo } t = \tan x \text{)} \\
 &= -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = -\cot x + 2 \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \cot^4 \theta \, d\theta$

$$\begin{aligned}
 \text{SOLUCION } I &= \int \cot^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta && \text{(CASO 4)} \\
 &= -\int \cot^2 \theta d(\cot \theta) - \int \cot^2 \theta d\theta \\
 &= -\frac{\cot^3 \theta}{3} - \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta = -\frac{\cot^3 \theta}{3} + \cot \theta + \theta + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 8

Encontrar $I = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

SOLUCION

$$I = \int \sec^6 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \, d(\tan x) \quad (\text{CASO 3})$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4) \, dt \quad (\text{haciendo } t = \tan x)$$

$$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

PROBLEMA 9 Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$

SOLUCION

$$I = \int \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2} \, dx \quad (\text{CASO 3})$$

$$= 2 \int \left[1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2}} \right]^{1/2} \left[1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right]^{1/2} d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2 \int \frac{(1+t^2)}{t} dt, \quad (\text{haciendo } t = \tan \frac{x}{2})$$

$$= 2 \ln |t| + t^2 + C$$

$$= 2 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \tan^2 \frac{x}{2} + C.$$

PROBLEMA 10 Calcular $I = \int x \operatorname{sen}^2 x^2 \, dx.$

SOLUCION $I = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x^2}{2} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \int d(\operatorname{sen} 2x^2)$
 $= \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x^2}{8} + C.$

PROBLEMA 11

Encontrar $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} + 0 = \frac{3\pi}{16} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Hallar $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cosec}^2 x - 2 + \operatorname{sen}^2 x) dx \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d(\cot \theta) - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + \cos 2x) dx , \quad (\text{usando } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}) \\ &= - \cot \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(3x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx$.

SOLUCION Sea $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$. Luego

$$\begin{aligned} I &= - \int (1 - t^2)^2 t^{1/3} dt = - \int (t^{1/3} - 2t^{7/3} + t^{13/3}) dt \\ &= - \frac{3}{4} t^{4/3} + \frac{3}{5} t^{10/3} - \frac{3}{16} t^{16/3} + C , \quad \text{donde } t = \cos x . \end{aligned}$$

PROBLEMA 14

$$\text{Hallar } I = \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} .$$

SOLUCION Sea $t = \sqrt{\tan x}$. Entonces $x = \arctan t^2$ y $dx = \frac{2t dt}{1+t^4}$

$$\text{Luego } I = 2 \int \frac{dt}{1+t^4} \quad \text{y}$$

$$\frac{2}{1+t^4} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$\begin{aligned} \text{ya que } t^4+1 &= (t^4+2t^2+1) - (2t^2) = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2 \\ &= (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por $1+t^4$ e igualando coeficientes se ob-

tiene $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $D = 1$.

Integrando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t-1}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt \\ &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dt - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t-\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{1}{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}t+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}t-1) + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right) + C, \end{aligned}$$

donde $t = \sqrt{\tan x}$.

PROBLEMA 15 Encontrar $I = \int \sec^5 4x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{dx}{\cos^5 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\cos^5 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x + \frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen}^5(4x + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{Caso 3})$$

$$= \frac{1}{4(15)} \int \frac{d(2x + \frac{\pi}{4})}{\operatorname{sen}^5(2x + \frac{\pi}{4}) \cos^5(2x + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{64} \int \frac{du}{\operatorname{sen}^5 u \cdot \cos^5 u}$$

(haciendo $u = 2x + \frac{\pi}{4}$)

$$= \frac{1}{64} \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 u}\right)^{5/2} (1 + \tan^2 u)^{3/2} d(\tan u)$$

$$= \frac{1}{64} \left[-\frac{1}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6 \ln |t| + 2t^2 + \frac{t^4}{4} \right] + C$$

Pero $t = \tan u = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$

$$t^2 = \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

$$\frac{t^4 - 1}{t^4} = 4 \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x}$$

$$\frac{t^8 - 1}{t^8} = \frac{8 \operatorname{sen} 4x (2 - \cos^2 4x)}{\cos^4 4x},$$

y por consiguiente

$$I = \frac{3}{32} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x} + \frac{1}{16} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^4 4x} + \frac{3}{32} \ln \left| \tan(2x + \frac{\pi}{4}) \right| + C.$$

3.3 Integrales de la forma

$$I = \int \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx$$

y

$$I = \int \text{sen } mx \text{ cos } nx \, dx$$

$$I = \int \text{cos } mx \text{ cos } nx \, dx$$

Solución. Empleando las identidades

$$\text{sen } mx \text{ cos } nx = \frac{1}{2} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x],$$

$$\text{sen } mx \text{ sen } nx = \frac{1}{2} [\text{cos}(m-n)x - \text{cos}(m+n)x] \quad y$$

$$\text{cos } mx \text{ cos } nx = \frac{1}{2} [\text{cos}(m-n)x + \text{cos}(m+n)x],$$

respectivamente, se obtienen integrales cuyo cálculo es inmediato.

3.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \text{sen}(3x+6) \text{ cos}(5x+10) dx$.

SOLUCION

$$I = \int \text{sen } 3u \text{ cos } 5u \, du, \quad \text{haciendo } u = x+2,$$

$$= \frac{1}{2} \int [\text{sen } 8u + \text{sen}(-2u)] \, du = -\frac{1}{16} \text{cos } 8u + \frac{1}{4} \text{cos } 2u + C$$

$$= -\frac{1}{16} \text{cos}(8x + 16) + \frac{1}{4} \text{cos}(4x + 4) + C.$$

PROBLEMA 2 Encontrar $I = \int \text{sen} \frac{x}{3} \text{ cos } 7x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2} \int [\text{sen } 10x + \text{sen}(-4x)] \, dx = -\frac{1}{20} \text{cos } 10x + \frac{1}{8} \text{cos } 4x + C.$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \text{sen} \frac{x}{3} \text{ sen} \frac{2x}{x} \, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2} \int [\text{cos}(-\frac{x}{3}) - \text{cos } x] \, dx = \frac{3}{2} \text{sen} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \text{sen } x + C.$$

PROBLEMA 4 Hallar $I = \int \cos(ax+b) \cos(ax-b) dx$.

SOLUCION $I = \frac{1}{2} \int [\cos 2b + \cos 2ax] dx = \frac{x \cos 2b}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \sin ax \sin(ax+b) dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2} \int [\cos(-b) - \cos(2ax+b)] dx$$

$$= x \frac{\cos b}{2} - \frac{\sin(2ax+b)}{4a} + C$$

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

SOLUCION Tenemos

$$I = \frac{\sin x}{2} [\cos(-x) - \cos 5x]$$

$$= \frac{1}{4} [\sin 0x + \sin 2x - \sin 6x - \sin(-4x)]$$

$$= \frac{1}{4} [\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x]$$

Luego $I = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} + C.$

PROBLEMA 7 Encontrar $I = \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$

SOLUCION $I = \frac{1}{2} \int [\cos(-2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)] dx = \frac{\sin 2x}{4} + C.$

PROBLEMA 8 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) \cos \frac{3x}{2} dx \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} \int \left[\cos\left(-\frac{x}{2}\right) + \cos \frac{5x}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} - \frac{1}{10} \operatorname{sen} \frac{5x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \cos x \cos^2 5x dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\cos x)(1 + \cos 10x) dx = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{1}{4} \int \left[\cos(-9x) + \cos 11x \right] dx \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{36} + \frac{\operatorname{sen} 11x}{44} + C. \end{aligned}$$

3.5 Integrales de la forma

$$I = \int R(\text{sen } x, \text{cos } x) dx$$

donde $R(u,v)$ es una función racional en las variables u y v .

Caso 1 Caso general

Solución

Efectuando la sustitución $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\text{se tiene } \text{sen } x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{cos } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

y la integral dada se reduce a una integral de una función racional en la variable t :

$$I = \int 2R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo

$$\text{Hallar } I = \int \frac{dx}{\text{sen } x + \text{cos } x}$$

Solución

Haciendo $t = \tan \frac{x}{2}$ resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{1+2t-t^2} = 2 \int \frac{dt}{2-(t-1)^2} \\ &= \frac{2}{2(\sqrt{2})} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + (t-1)}{\sqrt{2} - (t-1)} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1 + \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2} + 1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

y puesto que $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$, se tiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C_1.$$

Caso 2 La función R satisface
 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Solución

En este caso, efectuando la sustitución $t = \tan x$, se tiene
 $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, y la integral se reduce a una función racional en la variable t .

Nota

Para abreviar los cálculos, en ciertos problemas particulares, es preferible recurrir a los **artificios de integración**. Ver problemas 1 y 2, pág 217

Ejemplo

Encontrar $I = \int \frac{dx}{1+3 \cos^2 x}$.

Solución

Haciendo $t = \tan x$ resulta

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+3\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan \frac{t}{2} + C \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{1}{2} \tan x\right) + C.
 \end{aligned}$$

3.6 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \int \tan^2 x dx \\ &= \frac{1}{\cos x} + \int (\sec^2 x - 1) dx = \sec x + \tan x - x + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x} dx$.

SOLUCION Hagamos $\tan \theta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos \theta \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos x}{\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} x + \cos \theta \cdot \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x + \theta)}{\cos(x - \theta)} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(x - \theta + 2\theta)}{\cos(x - \theta)} d\theta = \int [\cos 2\theta \cdot \tan(x - \theta) + \operatorname{sen} 2\theta] dx \\ &= \cos 2\theta \cdot \ln |\sec(x - \theta)| + x \operatorname{sen} 2\theta + C. \end{aligned}$$

Pero $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{12}{13}$, $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$, $\cos(x - \theta) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x)$

y por lo tanto $I = -\frac{5}{13} \ln |3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x| + \frac{12x}{13} + C$.

PROBLEMA 3 Encontrar $I = \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$

SOLUCION Haciendo $t = \tan \frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

tenemos $I = \int \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{2(2)} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \tan \frac{x}{2}}{2 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$.

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{dx}{3 \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{cos}^2 x}$

SOLUCION

Si $R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = \frac{1}{3 \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{3 + 2 \operatorname{cos}^2 x}$, entonces

$R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = R(-\operatorname{sen} x, -\operatorname{cos} x)$ y podemos aplicar el caso 2.

Sea pues $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ y $\operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Luego

$$I = \int \frac{dt}{5 + 3t^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3 \sqrt{\frac{5}{3}}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arc} \tan \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x \right) + C$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$

SOLUCION

$$I = \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx = \int \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \ln \left| \sec \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{\operatorname{cos} 2x dx}{\operatorname{cos}^4 x + \operatorname{sen}^4 x}$

SOLUCION Tenemos

$$\operatorname{cos}^4 x + \operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x)^2 - 2 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^2 x = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 2x$$

Luego $I = \int \frac{d(\operatorname{sen} 2x)}{2 - \operatorname{sen}^2 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} 2x} \right| + C.$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)}$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(3 - \operatorname{sen} x) - (2 - \operatorname{sen} x)}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)} dx = \int \frac{dx}{2 - \operatorname{sen} x} - \int \frac{dx}{3 - \operatorname{sen} x} \\ &= \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} - 2 \int \frac{dt}{3t^2 - 2t + 3} \quad (\text{haciendo } t = \tan \frac{x}{2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \operatorname{arc} \tan \left(\frac{t - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{3 \tan \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Calcular $I = \int \frac{dx}{8 - 4 \operatorname{sen} x + 7 \cos x}$.

SOLUCION Sea $t = \tan \frac{x}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 dt}{t^2 - 8t + 15} = \int \frac{2 dt}{(t-3)(t-5)} = - \int \frac{dt}{t-3} + \int \frac{dt}{t-5} \\ &= \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 5}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{(1 - \cos x)^3}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{d(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^3} = - \frac{1}{2(1 - \cos x)^2} + C.$$

PROBLEMA 10 Hallar $I = \int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} dx.$

SOLUCION

$$I = \int \frac{-2 - (1 + \operatorname{sen} x - \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)} dx$$

$$= \int \frac{2 dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} - x, \quad (1)$$

Pero $\int \frac{2 dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{2 dt}{t^2 + t},$ haciendo $t = \tan \frac{x}{2},$

$$= 2 \int \frac{dt}{t} - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C \quad (2)$$

Luego de (1) y (2)

$$I = 2 \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| - x + C.$$

PROBLEMA 11 Encontrar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x}.$

SOLUCION Tenemos

$$I = \int \frac{dx}{\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x} = \int \frac{d(2x)}{3 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1}, \quad \text{haciendo } t = \tan x,$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \tan x + 3 - \sqrt{13}}{2 \tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C.$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int \frac{dx}{(1 + \tan x) \operatorname{sen}^2 x}$.

SOLUCION Haciendo

$t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, se obtiene

$$I = \int \frac{dt}{(1+t) t^2}$$

Descomponiendo $\frac{1}{(1+t) t^2}$ en fracciones parciales e integrando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = \ln \left| \frac{1+t}{t} \right| - \frac{1}{t} + C \\ &= \ln |1 + \cot x| - \cot x + C. \end{aligned}$$

3.7 Integrales de la forma

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \text{ donde } R \text{ es una funci3n racional}$$

Soluci3n Completando cuadrados en el trinomio $ax^2 + bx + c$ el integrando adquiere una de las formas siguientes

(1) $R(x, \sqrt{m^2 - x^2})$,

(2) $R(x, \sqrt{m^2 + x^2})$,

(3) $R(x, \sqrt{x^2 - m^2})$,

y realizando las sustituciones

(1) $x = m \operatorname{sen} t$,

(2) $x = m \tan t$,

(3) $x = m \operatorname{sec} t$,

respectivamente, la integral dada se reduce a una integral de una funci3n racional de las funciones trigonom3tricas. Ver secci3n 3.5.

Nota Las integrales de la forma indicada tambi3n pueden ser halladas mediante sustituciones hiperb3licas (Ver secci3n 3.9) o directamente como en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5.

3.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION Sea $x = \text{sen } t$. Tenemos

$$I = \int \frac{\cot t \, dt}{(1 + \text{sen}^2 t) \cos t} = \int \frac{dt}{1 + \text{sen}^2 t} = \int \frac{du}{2u^2 + 1},$$

haciendo $u = \tan t$,

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \arctan\left(\frac{u}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}u) + C.$$

Pero expresando u en término de x ,

$$u = \tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ de } x = \text{sen } t,$$

y por lo tanto, $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

PROBLEMA 2 Encontrar $I = \int x \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx.$

SOLUCION

$$I = \int x \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \, dx = \int \left(t - \frac{1}{2}\right) \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \, dt,$$

haciendo $t = x + \frac{1}{2}$,

$$= \int t \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \, dt - \frac{1}{2} \int \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \, dt$$

$$= \frac{1}{3} (t^2 + \frac{3}{4})^{3/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{8} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \right| \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + x + 1)^{3/2} - \frac{(2x+1)}{8} (x^2 + x + 1)^{1/2} - \frac{3}{16} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}}$

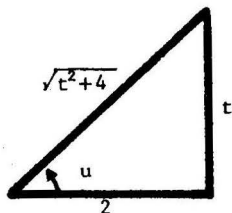
SOLUCION

$$I = \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^{3/2}}, \quad \text{haciendo } t = x-1$$

$$= \int \frac{2 \sec^2 u \, du}{8 \sec^3 u}, \quad \text{haciendo } t = 2 \tan u,$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos u \, du = \frac{\operatorname{sen} u}{4} + C$$

$$= \frac{t}{4\sqrt{t^2+4}} + C = \frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} + C.$$



PROBLEMA 4 Calcular $I = \int (x^2 + x + 1)^{3/2} dx$.

SOLUCION

$$I = \int (t^2 + \frac{3}{4})^{3/2} dt, \quad \text{haciendo } t = x + \frac{1}{2},$$

$$= \frac{9}{16} \int \sec^5 u \, du, \quad \text{haciendo } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan u.$$

Pero $\int \sec^5 u \, du = \int \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\cos^5 u} du = \frac{\operatorname{sen} u}{4 \cos^4 u} + \frac{3}{4} \int \frac{du}{\cos^3 u}$
(integrando por partes)

$$= \frac{\operatorname{sen} u}{4 \cos^4 u} + \frac{3}{4} \int \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\cos^3 u} du$$

$$= \frac{\operatorname{sen} u}{4 \cos^4 u} + \frac{3}{4} \left[\frac{\operatorname{sen} u}{2 \cos^2 u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos u} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} u (2 + 3 \cos^2 u)}{8 \cos^4 u} + \frac{3}{8} \ln |\tan u + \sec u| + C$$

Así resulta

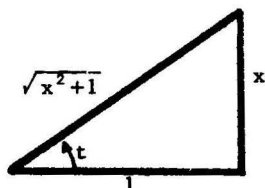
$$I = \frac{1}{64} (2x+1) (8x^2+8x+17) (x^2+x+1)^{1/2} + \frac{27}{128} \ln \left| 2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1} \right| + C_1$$

PROBLEMA 5 Hallar $I = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec t \, dt}{1 - \tan^2 t}, \quad \text{haciendo } x = \tan t \\ &= \int \frac{\cos t \, dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{\cos t \, dt}{1 - 2 \sin^2 t} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{\frac{1}{2} - \sin^2 t} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin t}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin t} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x \sqrt{2}} \right| + C \end{aligned}$$

pues



4 INTEGRACION DE FUNCIONES HIPERBOLICAS

4.1 Definición Recordamos (ver Cap. I, sec. 4.4 que las **funciones hiperbólicas** se definen mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} hx &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{cos} hx &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{tan} hx &= \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{cos} hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cot} hx &= \frac{\operatorname{cos} hx}{\operatorname{sen} hx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \\ \operatorname{sec} hx &= \frac{1}{\operatorname{cos} hx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cosec} hx &= \frac{1}{\operatorname{sen} hx} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes identidades

$$(1) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$(2) \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

$$(3) \quad 1 - \operatorname{coth}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x.$$

$$(4) \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

$$(5) \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$(6) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

$$(7) \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1).$$

$$(8) \quad \sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x.$$

Ejemplo 1 Probar la identidad (1).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Probar la identidad (3).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{cosec}^2 x &= 1 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^2 = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= - \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)^2 = - \operatorname{cosec}^2 x. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Probar la identidad (5).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \cos hx \cdot \cos hy + \operatorname{sen} hx \cdot \operatorname{sen} hy &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} \left[2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)} \right] = \operatorname{cosec} h(x+y) \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Demostrar la identidad (6).

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} 2x &= \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{sen}^2 x && \text{(por (5))} \\ &= 1 + 2 \operatorname{sen}^2 x, && \text{(usando (1))} \end{aligned}$$

de donde resulta (6).

4.2 Integrales Usuales Se cumplen las siguientes fórmulas:

$$(1) \quad \int \operatorname{sen} hx \, dx = -\operatorname{cosec} hx + C$$

$$(2) \quad \int \operatorname{cosec} hx \, dx = \operatorname{sen} hx + C$$

$$(3) \quad \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{tan} x + C$$

$$(4) \quad \int \operatorname{cosec} h^2 x \, dx = -\cot hx + C$$

$$(5) \quad \int \sec hx \tan hx \, dx = -\sec hx + C$$

$$(6) \quad \int \operatorname{cosec} hx \cot hx \, dx = -\operatorname{cosec} hx + C$$

$$(7) \quad \int \tan hx \, dx = \ln |\cos hx| + C$$

$$(8) \quad \int \cot hx \, dx = \ln |\operatorname{sen} hx| + C$$

$$(9) \quad \int \sec hx \, dx = 2 \operatorname{arc} \tan e^x + C$$

$$(10) \quad \int \operatorname{cosec} hx \, dx = \ln \left| \tan h \frac{x}{2} \right| + C$$

Nota Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) han sido establecidas en el problema 4, sec. 4.5 Cap. I. Las fórmulas (7) y (8), y (9) y (10), se prueban en los problemas 6 y 11, respectivamente, de la siguiente sección.

Ejemplo Probar la fórmula (5).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sec hx) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= - \left[\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right] \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right] = -\sec hx \cdot \tan hx. \end{aligned}$$

Nota La integración de funciones que contienen funciones hiperbólicas es enteramente análoga a la integración de las funciones trigonométricas.

4.3 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \cos h^4 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\cos h \, 2x + 1)^2}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int \cos h^2 \, 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos h \, 2x + \frac{1}{4} \int dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\cos h \, 4x + 1) \, dx + \frac{\text{sen } h \, 2x}{4} + \frac{x}{4} \\ &= \frac{\text{sen } h \, 4x}{32} + \frac{\text{sen } h \, 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Calcular $I = \int \text{sen } h^3 x \cos hx \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \text{sen } h^3 x \, d(\text{sen } hx) = \frac{\text{sen } h^4 x}{4} + C.$$

PROBLEMA 3 Encontrar $I = \int \text{sen } h^3 x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int (\cos h^2 x - 1) \, d(\cos hx) = \frac{\cos h^3 x}{3} - \cos hx + C.$$

PROBLEMA 4 Hallar $I = \int \sec h^4 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^2 hx \sec^2 hx \, dx = \int (1 - \tan h^2 x) \, d(\tan hx) \\ &= \tan hx - \frac{\tan^3 hx}{3} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int_{-1}^1 \cos h^2 x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos h 2x + 1}{2} dx = \left[\frac{\text{sen } h 2x}{4} + \frac{1}{2} x \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{4} (\text{sen } h 2 - \text{sen } h(-2)) + 1 = \frac{1}{4} (e^2 - e^{-2}) + 1$$

PROBLEMA 6 Probar que (1) $\int \tan hx \, dx = \ln |\cos hx| + C$.

(2) $\int \cot hx \, dx = \ln |\text{sen } hx| + C$.

SOLUCION

(1) Tenemos $\frac{d}{dx} \ln |\cos hx| = \frac{\frac{d}{dx} (\cos hx)}{\cos hx} = \frac{\text{sen } hx}{\cos hx} = \tan hx$.

(2) En forma similar,

$$\frac{d}{dx} \ln |\text{sen } hx| = \frac{\frac{d}{dx} \text{sen } hx}{\text{sen } hx} = \frac{\cos hx}{\text{sen } hx} = \cot hx.$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \frac{\text{sen } h \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

SOLUCION

$$I = 2 \int \text{sen } h \sqrt{x} \, d(\sqrt{x}) = 2 \cos h \sqrt{x} + C.$$

PROBLEMA 8 Calcular $I = \int \tan h^3 x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \tan hx (1 - \sec^2 x) dx = \int \tan hx \, dx - \int \tan hx \, d(\tan hx)$$

$$= h |\cos hx| - \frac{\tan^2 h x}{2} + C.$$

PROBLEMA 9 Demostrar la identidad

$$\tan h(x+y) = \frac{\tan hx + \tan hy}{1 + \tan hx \cdot \tan hy} .$$

SOLUCION Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\tan hx + \tan hy}{1 + \tan hx \cdot \tan hy} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})} \\ &= \frac{2(e^{x+y} - e^{-x-y})}{2(e^{x+y} + e^{-x-y})} = \tan(x+y) . \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Probar que

$$(1) \int \sec hx \, dx = 2 \operatorname{arc} \tan e^x + x .$$

$$(2) \int \operatorname{cosec} hx \, dx = \ln \left| \tan h \frac{x}{2} \right| + C .$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} (1) \text{ Tenemos } \frac{d}{dx} (2 \operatorname{arc} \tan e^x) &= 2 \frac{e^x}{1+2^{2x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} \\ & \quad \text{(dividiendo entre } e^x \text{)} \\ &= \sec hx . \end{aligned}$$

(2) Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \left| \tan h \frac{x}{2} \right| &= \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}}{\tan h \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} h \frac{x}{2} \cos h \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} hx} = \operatorname{cosec} hx . \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} hx \cos h^2 x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x}{\operatorname{sen} hx \cdot \cos h^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} hx} - \int \frac{d(\cos hx)}{\cos h^2 x} \\ &= \ln \left| \tan h \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\cos hx} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int \frac{dx}{\tan hx - 1}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan hx + 1}{\tan h^2 x - 1} dx \quad (\text{multiplicando por } \tan hx + 1) \\ &= - \int \frac{\tan hx + 1}{\sec h^2 x} dx = - \int (\operatorname{sen} hx \cos hx + \cos h^2 x) dx \\ &= - \int \frac{1}{2} (\operatorname{sen} h 2x + \cos h 2x + 1) dx \\ &= - \frac{1}{4} (\cos h 2x + \operatorname{sen} h 2x) + \frac{x}{2} + C = - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} h^2 x + \cos h^2 x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos h 2x}, \quad \text{gracias a la identidad (4) de 4.1,} \\ &= \int \sec h 2x dx = \frac{1}{2} \int \sec h 2x d(2x) \\ &= \operatorname{arc} \tan e^{2x} + C, \quad \text{por la fórmula (9) de 4.2.} \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Hallar $I = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} hx + 3 \cos hx}$

SOLUCION

$$I = \int \frac{2 dx}{5e^x + e^{-x}}, \quad \text{usando} \quad \operatorname{sen} hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{y} \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{2d(e^x)}{(e^x)^2 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arc} \tan \sqrt{5} e^x + C.$$

PROBLEMA 15 Calcular $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

haciendo la sustitución $x = a \operatorname{cos} ht$.

SOLUCION Tenemos

$$I = \int \frac{(a^2 \operatorname{cos}^2 ht)(a \operatorname{sen} ht) dt}{a \operatorname{sen} ht}$$

$$= a^2 \int \operatorname{cos}^2 ht dt = \frac{a^2}{2} \int (\operatorname{cos} h 2t + 1) dt$$

$$= \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} h 2t + \frac{a^2 t}{2} + C. \quad (1)$$

Pero $\operatorname{cos} ht = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{sen} ht = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a},$

usando, $\operatorname{cos}^2 ht - \operatorname{sen}^2 ht = 1,$

$$\operatorname{sen} h 2t = 2 \operatorname{sen} ht \operatorname{cos} ht = \frac{2x \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2}$$

$$e^t = \operatorname{cos} ht + \operatorname{sen} ht = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$t = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \ln a,$$

y por lo tanto en (1)

$$I = \frac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1.$$

PROBLEMA 16 Empleando la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{sen} ht$

encontrar $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int (a \cos ht)(a \cos ht) dt = \frac{a^2}{2} \int (\cos h 2t + 1) dt \\ &= \frac{a^2 \operatorname{sen} h 2t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + C. \end{aligned} \quad (1)$$

Pero $\operatorname{sen} ht = \frac{x}{a}$, $\cos ht = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$,

$$\operatorname{sen} h 2t = \frac{2x}{a} \sqrt{x^2 + a^2},$$

$$e^t = \operatorname{sen} ht + \cos ht = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

$$t = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| - \ln a,$$

y por lo tanto en (1)

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C_1.$$

5 FORMULAS DE REDUCCION

En muchos casos es posible expresar una integral cuyo integrando depende de un número entero n , en términos de otra integral de la misma forma en donde el número n aparece aumentado o disminuido. Tales expresiones reciben el nombre de **fórmulas de reducción** o de **recurrencia**. En el caso 5 de la sección 3.1 hemos visto algunas fórmulas de reducción de integrales de funciones trigonométricas.

5.1 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar una fórmula de reducción para la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad \text{y encontrar } I_2 \text{ y } I_3.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2 + a^2) - x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left[\frac{-x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{x}{2(n-1)a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } n=2, \quad I_2 &= \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \\ &= \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Y para } n=3, \quad I_3 &= \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 \\ &= \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar una fórmula de recurrencia para la integral

$$I_n = \int \tan^n x \, dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}, \quad \text{cuando } n-1 \neq 0. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Encontrar una fórmula de reducción para la integral

$$I_m = \int x^m e^{ax} dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_m &= \int x^m e^{ax} dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax} dx \\ &\quad \text{(integrando por partes)} \\ &= \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} I_{m-1}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Hallar una fórmula de reducción para la integral

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_m &= \int x^{m-1} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1-x^2} dx \\ &\quad \text{(integrando por partes)} \\ &= -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int \frac{x^{m-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m, \quad \text{de donde} \\ &= -\frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar la fórmula de recurrencia para

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x dx.$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx \quad \text{(integrando por partes)} \\ &= -x^n \cos x + n \left[x^{n-1} \operatorname{sen} x - (n-1) \int x^{n-2} \operatorname{sen} x dx \right] \\ &\quad \text{(integrando por partes)} \\ &= -x^n \cos x + nx^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Hallar una fórmula de reducción para

$$I_m = \int x^m (x+a)^n dx .$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{x^m (x+a)^{n+1}}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^{m-1} (x+a)^{n+1} dx \\ &= \frac{x^m (x+a)^{n+1}}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^{m-1} (x+a)^n (x+a) dx \\ &= \frac{x^m (x+a)^{n+1}}{n+1} - \frac{m}{n+1} I_m - \frac{ma}{n+1} I_{m-1} \end{aligned}$$

de donde

$$I_m = \frac{1}{m+n+1} \left[x^m (x+a)^{n+1} - ma I_{m-1} \right] .$$

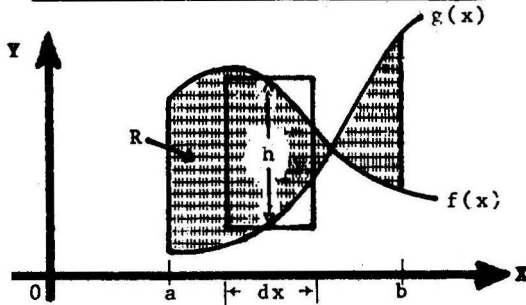
CAP. 6

**APLICACIONES GEOMETRICAS
DE LA INTEGRAL DEFINIDA**

1. AREA DE FIGURAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

1.1 **Definición** El área de la región R del plano XY comprendida entre las dos curvas continuas $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, se define mediante

$$A = A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



En la figura, el **rectángulo genérico** tiene altura $h = |f(x) - g(x)|$; base dx y área $dA = |f(x) - g(x)| dx$. El límite de las sumas de tales áreas es igual a $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ según la definición de integral definida.

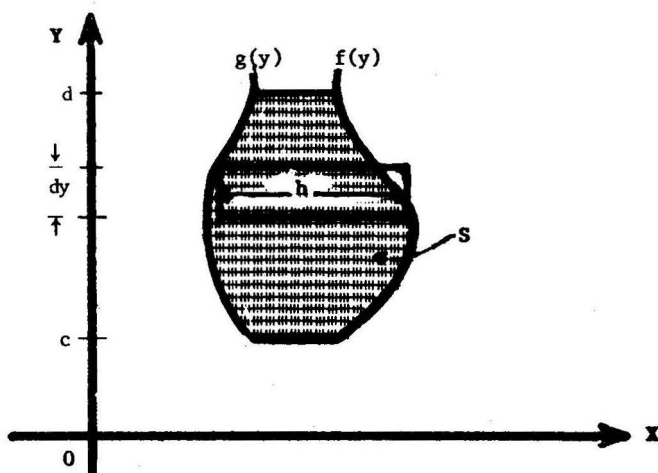
1.2 Caso Particular Si $f(x) > 0$ en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces

$$A = \int_a^b f(x) dx ,$$

es el área bajo la curva $f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$.

1.3 Definición El área de la región S del plano XY comprendida entre las dos curvas continuas $f(y)$ y $g(y)$ y las rectas horizontales $y=c$ e $y=d$, se define mediante

$$A = A(S) = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$$



En la figura, $h = |f(y) - g(y)|$, $dA = h dy$.

1.4 Propiedades de la Función Area

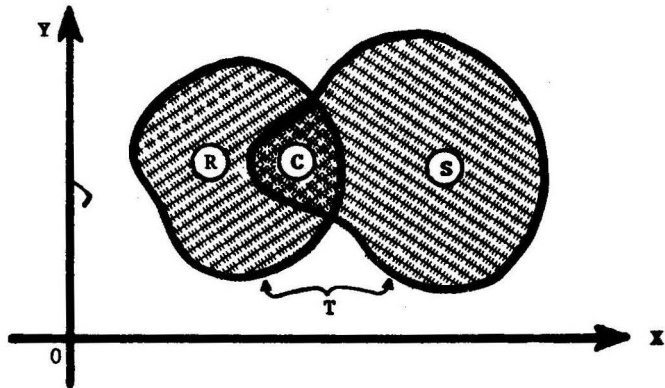
Se cumplen las siguientes propiedades

(1) $A(R) \geq 0$,

(2) Si una región T se compone de dos regiones R y S , entonces

$$A(T) = A(R) + A(S) - A(C)$$

donde C es la región común a R y S .



1.5 Problemas Resueltos

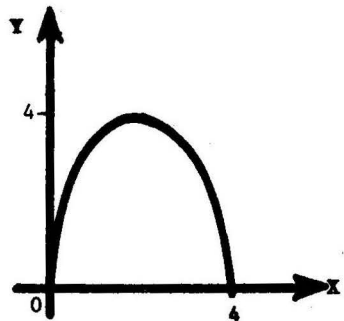
PROBLEMA 1 Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje X .

SOLUCION Calculamos los límites de integración

$$0 = 4x - x^2, \quad x = 0, 4.$$

Tenemos

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$



PROBLEMA 2 Encontrar el área de la región acotada por las curvas

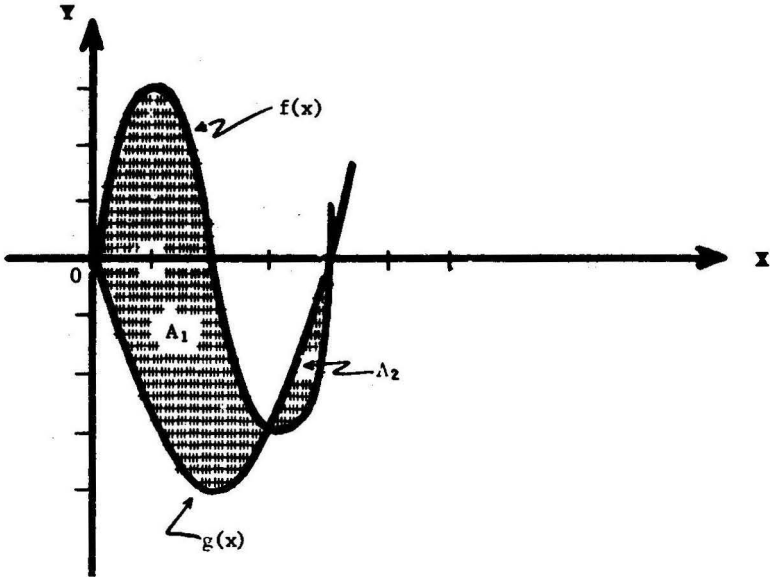
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4x.$$

SOLUCION

Resolviendo la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$ para hallar los límites de integración, tenemos

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \quad \text{o} \quad x(x-3)(x-4) = 0$$

de donde $x = 0, 3, 4$.



Tenemos $f(x) - g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4)$

En $0 \leq x \leq 3$, se tiene $f(x) - g(x) \geq 0$,
y en $3 \leq x \leq 4$, se tiene $f(x) - g(x) \leq 0$, luego

$$A = A_1 + A_2 \quad (\text{ver figura})$$

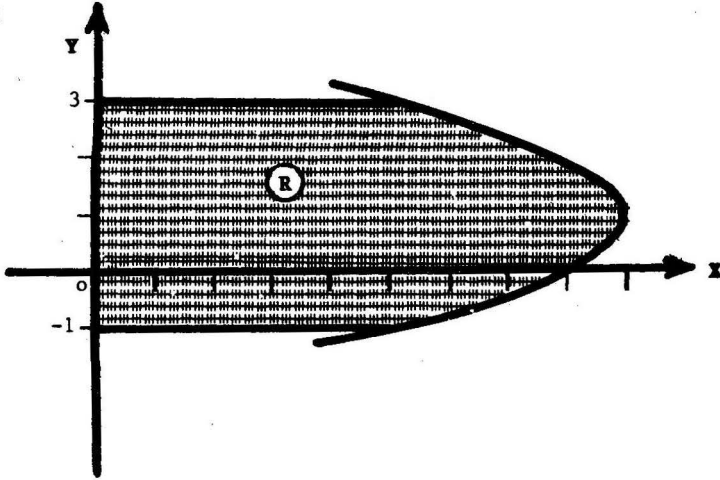
$$= \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx + \int_3^4 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx + \int_3^4 -(f(x) - g(x)) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_0^3 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_3^4 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}.$$

PROBLEMA 3 Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje Y y las rectas $y = -1$ e $y = 3$.

SOLUCION

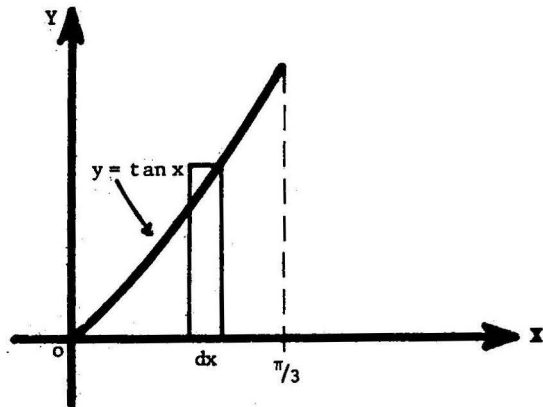


$$A = A(R) = \int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy = \frac{92}{3}.$$

PROBLEMA 4 Hallar el área de la región acotada por la curva $y = \tan x$, el eje X y la recta $x = \frac{\pi}{3}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} \tan x \, dx \\ &= \ln |\sec x| \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$



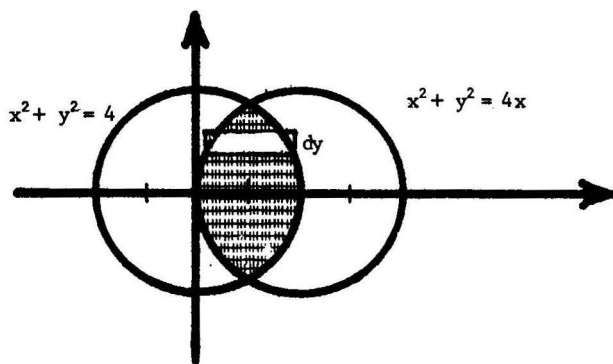
PROBLEMA 5 Hallar el área de la intersección de los círculos

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 4x .$$

SOLUCION Los puntos de intersección de los círculos se obtienen resolviendo la ecuación

$$y^2 = 4 - x^2 = 4x - x^2$$

de donde $x = 1, \quad y = \pm\sqrt{3}$



Despejando x,

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2} \quad , \quad \text{para el círculo de la izquierda}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4y^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}, \quad \text{para el círculo de la derecha.}$$

Luego,

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4 - y^2} - (2 - \sqrt{4 - y^2}) \right] dy \quad (\text{ver figura})$$

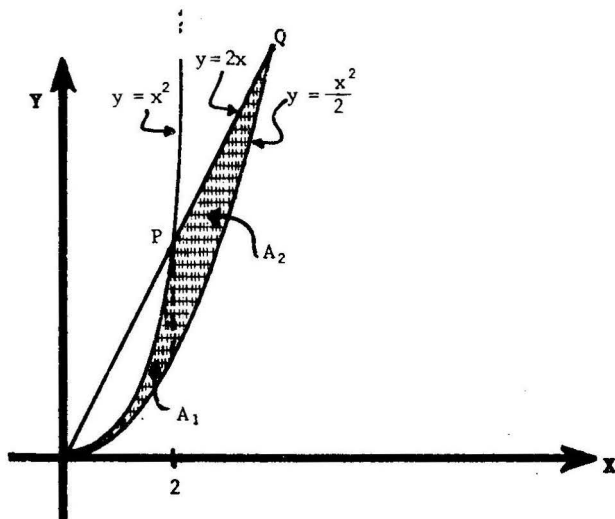
$$= 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1) dy =$$

$$= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{2} - y \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} .$$

PROBLEMA 6 Encontrar el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

SOLUCION



El área buscada es $A = A_1 + A_2$ (ver figura)

Las coordenadas de los puntos P y Q de intersección de la recta $y = 2x$ con las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ son, respectivamente

$$x = 2, \quad y = 4,$$

$$x = 4, \quad y = 8,$$

$$y \quad A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

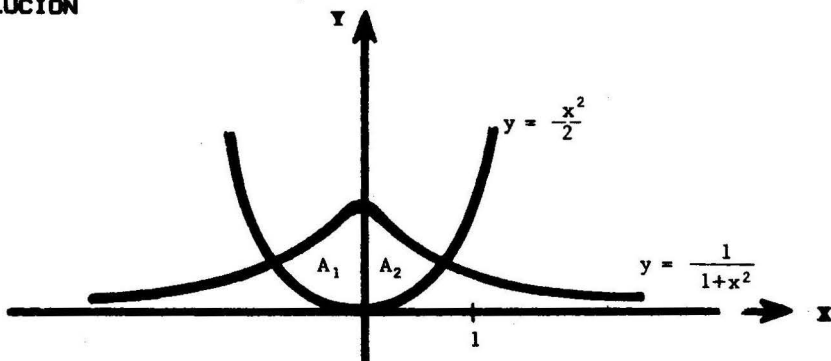
$$A_2 = \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx = x^2 - \frac{x^3}{6} \Big|_2^4 = \frac{8}{3}.$$

Por lo tanto, $A = 4$.

PROBLEMA 7 Hallar el área de la región limitada por la curva

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y la parábola} \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

SOLUCION



Los puntos en los cuales las dos curvas se cortan se obtienen igualando las ordenadas

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2},$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = 1, -2, \quad \text{esto es } x = \pm 1.$$

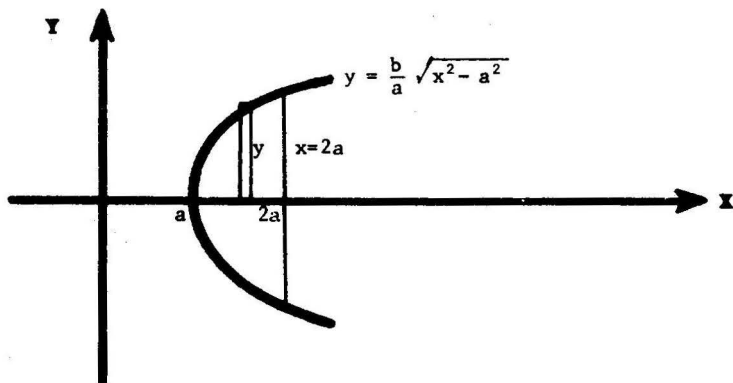
El área buscada es $A = A_1 + A_2 = 2A_2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$
(ver figura)

$$= 2 \left[\arctan x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 8 Encontrar el área de la región acotada por la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y la recta} \quad x = 2a.$$

SOLUCION



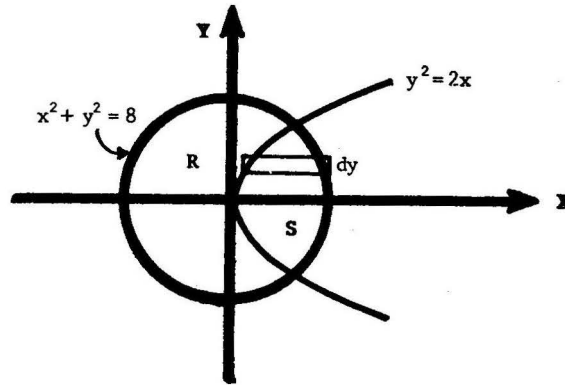
Tenemos $A = \text{área buscada} = 2 \int_a^{2a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right] \Bigg|_a^{2a}$$

$$= 2ab \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \right] = ab \left[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \right]$$

PROBLEMA 9 Hallar el área de las dos regiones en las cuales el círculo $x^2 + y^2 = 8$ es dividido por la parábola $y^2 = 2x$.

SOLUCION



El círculo queda dividido en las regiones R y S (ver figura)

Vamos a calcular el área de la región S. Los puntos de intersección de las dos curvas son:

$$x^2 + 2x = 8,$$

$$x = 2, \quad y = \pm 2,$$

y por lo tanto,

$$A(S) = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{8 - y^2} + 4 \arcsen \frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3} + 2\pi,$$

y $A(R) = \text{Área del círculo} - A(S) = 6\pi - \frac{4}{3}.$

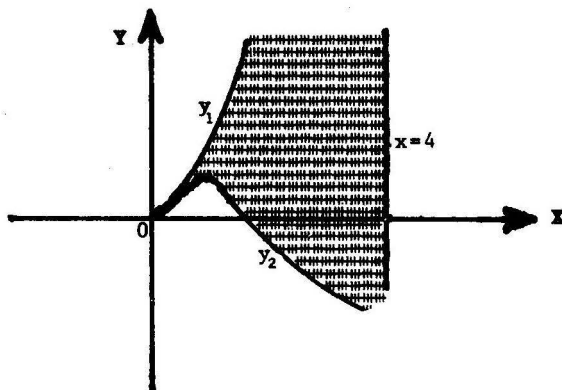
PROBLEMA 10 Hallar el área de la región acotada por la curva

$$x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0 \quad \text{y la recta} \quad x = 4.$$

SOLUCION Despejando y de la ecuación $y^2 - 2xy - (x^3 - x^2) = 0$

$$y = x \pm \sqrt{x^3}.$$

Sean entonces $y_1 = x + \sqrt{x^3}$, $y_2 = x - \sqrt{x^3}$.

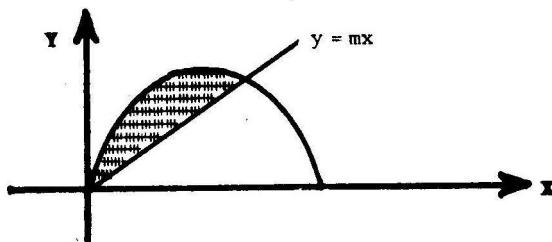


El área buscada es

$$A = \int_0^4 (y_1 - y_2) dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x^3} dx = \frac{4}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{128}{5}.$$

PROBLEMA 11 Hallar m de manera que la región bajo la parábola $y = 2x - x^2$ y sobre la recta $y = mx$ tenga un área igual a 36.

SOLUCION



Calculamos las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con la recta $y = 2x - x^2 = mx$, $x(x+m-2) = 0$, de donde $x = 0$, $x = 2-m$.

$$\text{Luego } A = 36 = \int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx) dx = (2-m) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2-m} = \frac{(2-m)^3}{6}$$

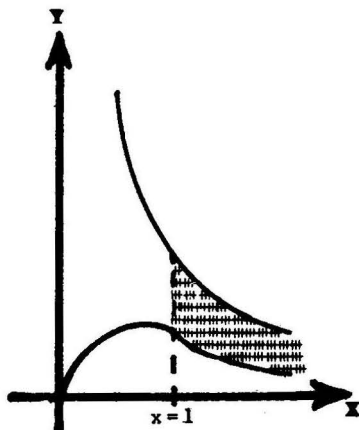
y $2-m=6$, $m=-4$.

PROBLEMA 12 Hallar el área de la región comprendida entre las curvas

$$xy = 1, \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \text{a la derecha de la recta } x = 1.$$

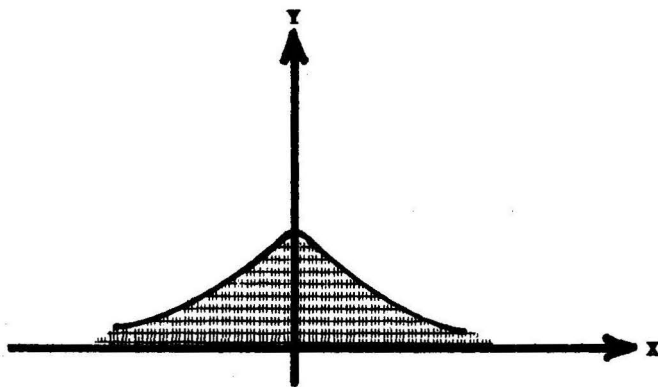
SOLUCION Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right] \\ &= \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$



PROBLEMA 13 Calcular el área acotada por la curva $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ y el eje X.

SOLUCION



$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Encontrar el área de la región acotada por la curva $y^2 = (1 - x^2)^3$.

SOLUCION Tenemos $y = \pm \sqrt{(1-x^2)^3}$, de donde $y_1 = \sqrt{(1-x^2)^3}$, $y_2 = -\sqrt{(1-x^2)^3}$.

Tenemos

$$A = 4 \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx \quad (\text{ver figura})$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} (1-\text{sen}^2 t)^{3/2} \cos t dt,$$

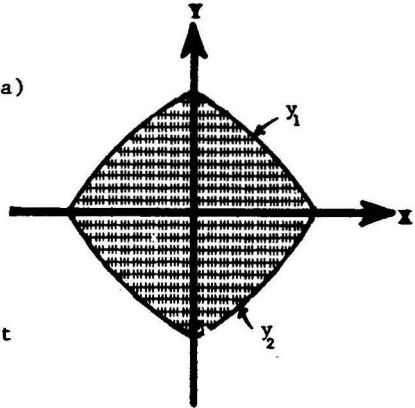
haciendo $x = \text{sent}$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \left(\frac{3}{2} t + 2 \text{sen } 2t + \frac{\text{sen } 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\pi}{4}.$$



PROBLEMA 15 Calcular el área de la región que limita la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

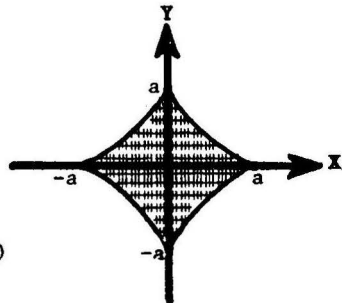
SOLUCION Tenemos $y = \pm (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$,

de donde $y_1 = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $y_2 = -(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.

El área buscada es

$$A = 4 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx \quad (\text{ver figura})$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} (a^{2/3} - a^{2/3} \text{sen}^2 t)^{3/2} a \text{sen}^2 t \cos t dt, \text{ haciendo } x = a \text{sen}^3 t,$$



$$\begin{aligned}
 A &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt + \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t d(\sin 2t) = \frac{3\pi}{8} a^2.
 \end{aligned}$$

2. AREA BAJO UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA

2.1 Teorema Si $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas

de una curva, entonces el área de la región acotada por esta curva, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es dada por

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

donde $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$
 $y(t) \geq 0$ en $[t_1, t_2]$.

Prueba En efecto,

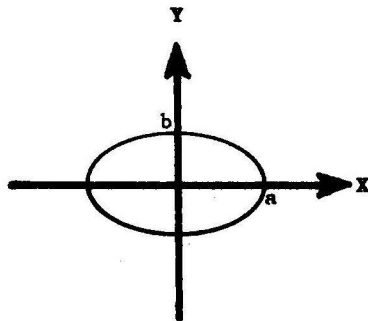
$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b y(x) dx && \text{(definición de área bajo la curva)} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} y(x(t)) x'(t) dt && \text{(cambio de variable } x = x'(t)) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt.
 \end{aligned}$$

2.2 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el área de la elipse, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

SOLUCION Por simetría se tiene

$$\begin{aligned}
 A &= \text{área de la elipse} = 4 \int_0^a y(x) dx \\
 &= 4 \int_{\pi/2}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt \\
 &= \frac{4ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \pi ab.
 \end{aligned}$$



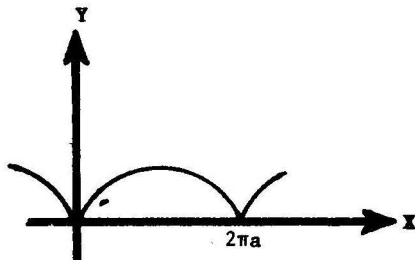
PROBLEMA 2 Encontrar el área de la región comprendida por el eje X y un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

SOLUCION Cuando

$$\begin{aligned}
 t = 0: & \quad x = 0, \quad y = 0 \\
 t = 2\pi: & \quad x = 2\pi a, \quad y = 0.
 \end{aligned}$$

Luego

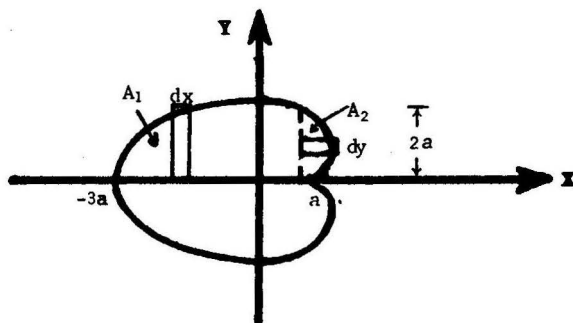
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi a} y(x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t) dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (3 - 4 \cos t + \cos 2t) dt \\
 & \quad \left(\text{usando } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \\
 &= 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$



PROBLEMA 3 Hallar el área de la región encerrada por la

cardioides $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

SOLUCION



La curva es simétrica respecto del eje X ya que

$$a [2 \cos (-t) - \cos 2(-t)] = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$a [2 \sin (-t) - \sin 2(-t)] = -a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Luego el área buscada es

$$A = 2(A_1 + A_2) \quad (\text{ver figura})$$

Tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3a}^a y \, dx = \int_{\pi}^{\pi/2} a(2 \sin t - \sin 2t) a(-2 \sin t + 2 \sin 2t) dt \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

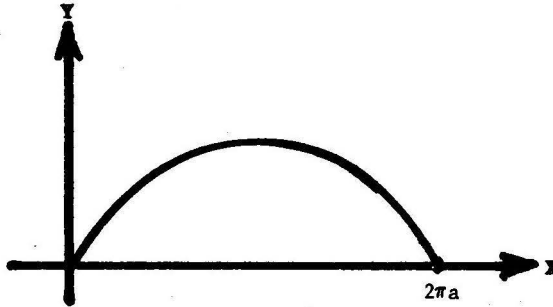
y

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{2a} (x-a) \, dy = \int_0^{\pi/2} a(2 \cos t - \cos 2t - 1) a(2 \cos t - 2 \cos 2t) dt \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 - 4a^2. \end{aligned}$$

Luego $A = 6 \pi a^2$.

PROBLEMA 4 Hallar el área de la región bajo un arco de la curva

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

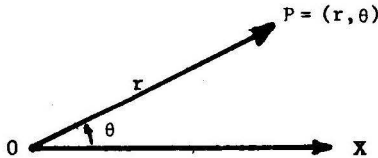


SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a \, dt = a^2(t - \operatorname{sen} t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi a^2 . \end{aligned}$$

3 AREA DE FIGURAS PLANAS EN COORDENADAS POLARES

5.1 Coordenadas Polares Si fijamos una semirrecta X en el plano que se extiende desde un punto O , entonces todo punto P del plano queda determinado por un par de números (r, θ) como sigue:



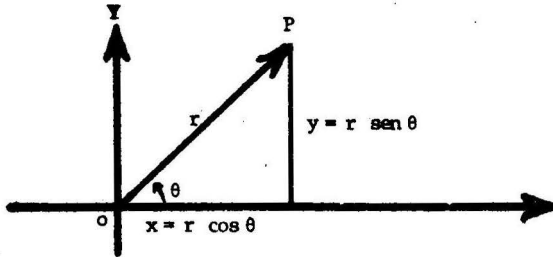
r = longitud del segmento OP ,

θ = ángulo que forma el segmento \overline{OP} con la semirrecta X , medido en el sentido antihorario a partir de X .

La semirrecta X se llama **eje polar**, el punto O se llama **polo**, r es el **radio vector**, y θ , es el **ángulo polar**.

Finalmente, los números r y θ asociados a P reciben el nombre de **coordenadas polares** en este punto.

3.2 Cambio de Coordenadas



Las coordenadas rectangulares o cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P del plano, están relacionadas por las ecuaciones

(1)

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

(ver figura)

y (2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

si $x \neq 0$,

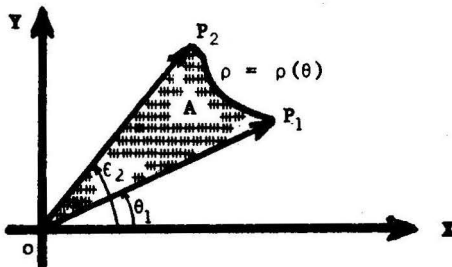
las cuales permiten pasar de un sistema de coordenadas a otro.

3.3 Area en Coordenadas Polares

Definición Si una curva continua es dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área del sector $P_1 O P_2$ acotado por un arco de la curva, y por los radios vectores OP_1 y OP_2 , se define igual a

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho(\theta)]^2 d\theta,$$

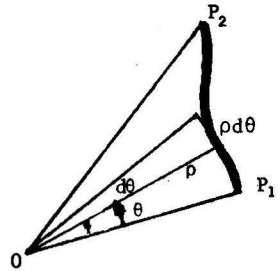
donde θ_1 y θ_2 son los ángulos polares de P_1 y P_2 respectivamente.



Interpretación Geométrica

El área del sector circular genérico de ángulo central $d\theta$ (en radianes) y radio ρ es $dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$. El límite de las sumas de tales áreas es, por definición, la integral definida

$$\frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$$



Nota Si la curva $\rho = \rho(\theta)$ es diferenciable, entonces para el sector $P_1 O P_2$ se cumple

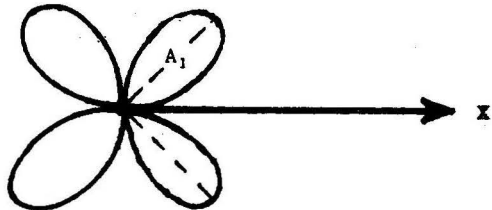
Area en coordenadas rectangulares = Area en coordenadas polares

Omitimos la prueba de este resultado.

3.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el área de la región encerrada por la curva $\rho = a \text{ sen } 2\theta$.

SOLUCION



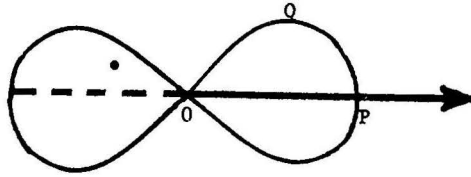
La curva es simétrica respecto de las dos diagonales y por lo tanto el área buscada es

$$\begin{aligned}
 A &= 4A_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\theta && \text{(ver figura)} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (a \text{ sen } 2\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\
 &= a^2 \left(\theta - \frac{\text{sen } 4\theta}{4} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar el área de la región encerrada por la lemniscata

$$\rho^2 = 9 \cos 2\theta$$

SOLUCION



La curva es simétrica respecto de los ejes X e Y, y cuando θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, el radio vector recorre el arco de curva PQO. Luego el área buscada es igual a

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2} d\theta = 18 \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 9.$$

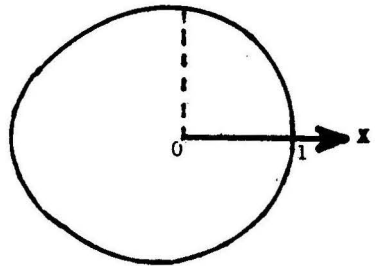
PROBLEMA 3 Encontrar el área de la región acotada por la curva

$$\rho = 2 - \cos \theta.$$

SOLUCION

Puesto que $2 - \cos(-\theta) = 2 - \cos \theta$ la curva es simétrica respecto del eje X. Luego

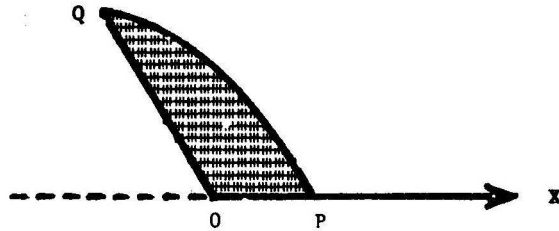
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi} \frac{\rho^2}{2} d\theta = \int_0^{\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{9}{2} - 4 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \pi. \end{aligned}$$



$$\left(\text{usando } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

PROBLEMA 4 Calcular el área acotada por la parábola $\rho = \frac{a}{1 + \cos \theta}$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 120^\circ$.

SOLUCION



Tenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta \quad (\text{usando } 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta)$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) \sec^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

PROBLEMA 5 Probar que el área engendrada por el radio vector de la espiral $\rho = e^\theta$ es igual a la cuarta parte del área de un cuadrado - cuyo lado es el radio vector.

SOLUCION Fijemos un ángulo polar α . Luego el área engendrada por el radio vector cuando crece desde 0 hasta $\rho = e^\alpha$ es

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\alpha} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{2\theta} d\theta = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left. \frac{1}{4} e^{2\theta} \right|_b^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{4} e^{2\alpha} - \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{2b} = \frac{1}{4} e^{2\alpha} = \frac{L^2}{4}$$

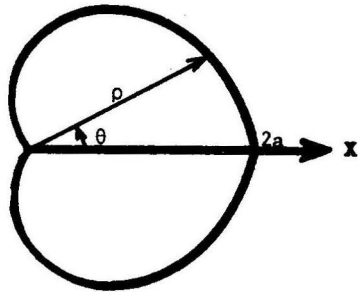
donde $L = e^\alpha$.

PROBLEMA 6 Encontrar el área de la región encerrada por la cardiode $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION

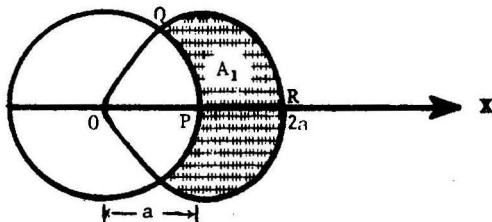
La curva es simétrica respecto del eje polar X. Luego

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\pi \rho^2 d\theta = \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$



PROBLEMA 7 Encontrar el área de la región acotada por la curva $\rho = 2a \cos \theta$ y que se encuentra fuera del círculo $\rho = a$.

SOLUCION



Las dos curvas se intersecan cuando

$$\rho = 2a \cos \theta = a, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

Tenemos

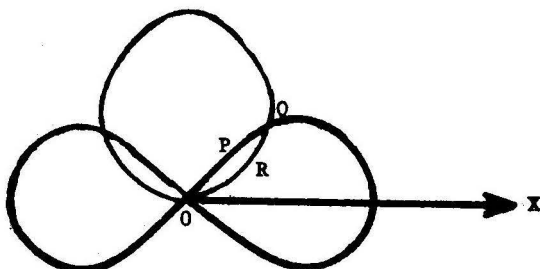
$A_1 =$ Área del sector OQR - Área del sector circular OQP (ver figura)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2a \cos \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \frac{\pi a^2}{6} = \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2. \end{aligned}$$

Luego por simetría el área buscada es $A = 2A_1 = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. 273

PROBLEMA 8 Hallar el área de la región común a las regiones encerradas por las curvas $\rho = \sqrt{2} \text{ sen } \theta$, $\rho^2 = \cos 2\theta$.

SOLUCION



Las dos curvas se intersecan cuando $\rho^2 = (\sqrt{2} \text{ sen } \theta)^2 = \cos 2\theta$
 $(1 - 2 \text{ sen}^2 \theta) - 2 \text{ sen}^2 \theta = 0$, o $\text{sen } \theta = \pm \frac{1}{2}$, esto es, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y el ángulo polar de Q es $\frac{\pi}{6}$.

Luego el área buscada es (ver figura)

$$A = 2 \left[\text{Area del sector OPQ} + \text{Area del sector ORQ} \right]$$

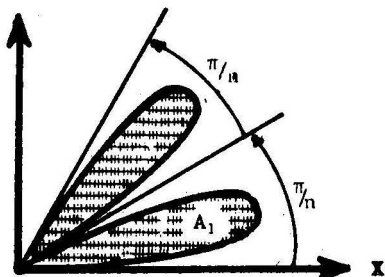
$$= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\sqrt{2} \text{ sen } \theta)^2 d\theta \right],$$

(cuando θ varía entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$, el radio vector de la curva $\rho^2 = \cos 2\theta$ recorre el arco QP)

$$A = \frac{1}{6} (\pi + 3 - 3\sqrt{3}) .$$

PROBLEMA 9 Hallar el área de la región encerrada por la curva $\rho = a \text{ sen } n\theta$.

SOLUCION



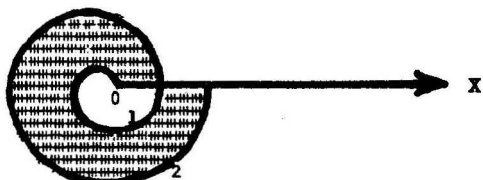
La curva encierra $2n$ regiones ("hojas") de igual área. Luego el área buscada es

$$A = 2n A_1 = 2n \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/n} \rho^2 d\theta$$

$$= n \int_0^{\pi/n} a^2 \text{ sen}^2 n\theta d\theta$$

$$= \frac{na^2}{2} \int_0^{\pi/n} (1 - \cos 2n\theta) d\theta = \frac{\pi a^2}{2} .$$

PROBLEMA 10 Encontrar el área de la región rayada limitada por el eje polar y las dos primeras vueltas de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$.



SOLUCION El área pedida es igual a

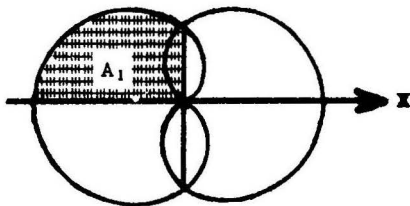
A = Área de la región encerrada por la segunda vuelta
 - Área de la región encerrada por la primera vuelta

$$= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} (a\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = 8\pi^3 a^2.$$

PROBLEMA 11 Hallar el área de la región acotada por la curva

$$\rho = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

(Ver figura)



SOLUCION Se tiene

$$\begin{aligned} A &= 4A_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^2 d\theta = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

(cuando θ varía entre $\frac{\pi}{2}$ y π el radio vector genera la región de área A_1)

PROBLEMA 12 Hallar el área de la región encerrada por la elipse

$$\rho = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\epsilon < 1).$$

SOLUCION Por simetría el área buscada es

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\pi \rho^2 d\theta = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2(1+t^2)dt}{[(1+\epsilon) + (1-\epsilon)t^2]^2},$$

haciendo $\tan \frac{\theta}{2} = t$, $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \int_0^\infty \frac{2(1+t^2)dt}{(m^2+t^2)^2}, \quad \text{donde } m^2 = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} > 0,$$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2(1+m^2 \tan^2 s)}{m^3 \sec^2 s} ds, \quad \text{haciendo } t = m \tan s,$$

$$= \frac{2}{(1-\epsilon)^2 m^3} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 s + m^2 \operatorname{sen}^2 s) ds$$

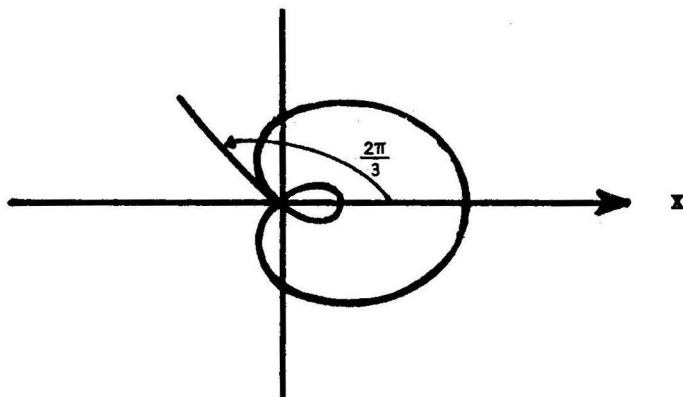
$$= \frac{2}{(1-\epsilon)^2 m^3} \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{1+m^2}{2}\right) + \frac{(1-m^2)}{2} \cos 2s \right] ds$$

$$= \frac{\pi(1+m^2)}{2(1-\epsilon)^2 m^3} = \frac{\pi}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

PROBLEMA 13 Hallar el área de cada uno de los lazos de

$$\rho = \frac{1}{2} + \cos \theta.$$

SOLUCION



Lazo Mayor El área encerrada por el lazo mayor es igual al doble del área de la región que el radio vector barre cuando θ varía desde 0 hasta $\frac{2\pi}{3}$:

$$A_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Lazo Menor El área encerrada por el lazo menor es igual al doble del área de la región que el radio vector barre cuando θ varía desde $\frac{2\pi}{3}$ hasta π .

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} . \end{aligned}$$

4 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PLANA

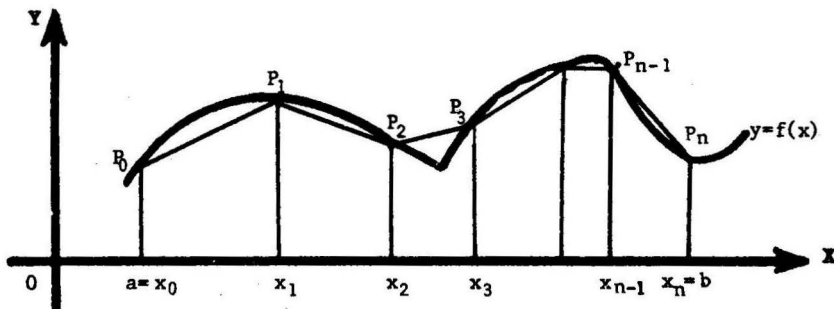
4.1 **Definición** Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si existe un número L tal que

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} P_i = (x_i, y_i) \text{ son puntos de la curva } y = f(x) \\ a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b \\ d(P_{i-1}, P_i) = \text{distancia de } P_{i-1} \text{ a } P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\ \|\Delta\| = \max \Delta x_i, \end{array} \right.$

entonces L se llama **la longitud del arco de la curva** $y = f(x)$ del punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$.

Interpretación Geométrica



La figura muestra la gráfica de una curva $y = f(x)$ definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$.

La suma $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$ representa la longitud de la línea poligonal determinada por los puntos P_0, P_1, \dots, P_n .

Cuando $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$ es muy pequeño, las abscisas x_{i-1} y x_i se encuentran muy cerca, la poligonal asociada a tales puntos se "ajusta" a la curva, y por lo tanto, intuitivamente pensamos que el límite de las longitudes de las poligonales así obtenidas representa la longitud del arco de la curva.

4.2 Cálculo de la Longitud del Arco de una Curva Plana

4.2.1 En Coordenadas Rectangulares

TEOREMA 1 Sea $y = y(x)$ una función tal que $\frac{dy}{dx}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con abscisas $x = a$ y $x = b$, es dada por la fórmula.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Nota Se define la **diferencial de longitud de arco de la curva**

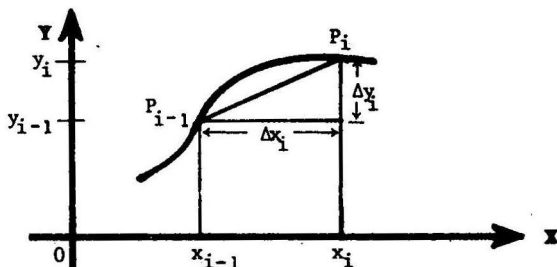
mediante $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Luego $L = \int_a^b ds$.

PRUEBA Consideremos la longitud $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$ de la poligonal determinada por los puntos P_0, \dots, P_n , donde $P_i = (x_i, y_i)$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$; $y_i = y(x_i)$.

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$



Probaremos que se cumple

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{1 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta x_i, \quad (1)$$

para algún ξ_i tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

En efecto,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (\text{por definición})$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i, \quad (2)$$

Pero $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = y(x_i) - y(x_{i-1}) = \frac{dy}{dx}(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

para algún $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, por el teorema del valor medio para derivadas, luego

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{dy}{dx}(\xi_i) \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) resulta (1).

De (1) se sigue que la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i, \tag{4}$$

y, por consiguiente, tomando límites cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

(definición de la integral definida, ya que $\frac{dy}{dx}$ es continua)

$$= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) \tag{por (4)}$$

$$= L, \tag{definición de longitud del arco}.$$

Ejemplo Encontrar la longitud de la circunferencia del círculo

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Solución

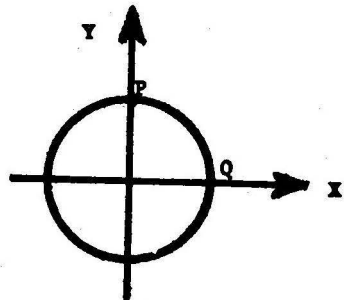
Calculamos la longitud L_1 del arco PQ.

Tenemos $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ y

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx$$

$$= a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} \Big|_0^a$$

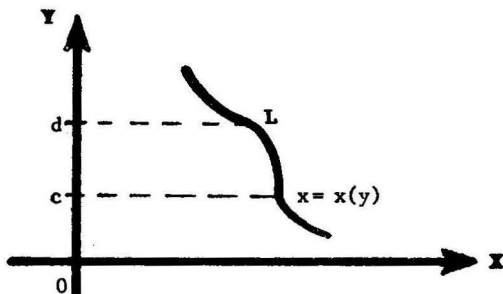
$$= \frac{\pi a}{2}.$$



Luego, la longitud de la circunferencia es $L = 4L_1 = 2\pi a$.

TEOREMA 2 Sea $x = x(y)$ una función tal que $\frac{dx}{dy}$ es continua en el intervalo cerrado $[c, d]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con ordenadas $y=c$ e $y=d$, es dada por la fórmula

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$



La prueba de este teorema es similar a la del teorema 1.

Ejemplo Hallar la longitud de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x=0$ hasta $x=1$.

Solución Tenemos $x = \frac{y^2}{4}$ y cuando $x=0$ y $x=1$ se tiene $y=0$ e $y=2$, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 + y^2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 + y^2} + 2 \ln |y + \sqrt{4 + y^2}| \right]_0^2 \\ &= \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4.2.2 Longitud del Arco cuando la Curva es dada por Ecuaciones Paramétricas

TEOREMA Si una curva es definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ,$$

donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son funciones continuas en un intervalo $[t_1, t_2]$, entonces la longitud del arco de la curva con extremos

$P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ y $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$, es dada por

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

PRUEBA Sabemos que

$$L = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{por el teorema 1}),$$

Puesto que $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ y $dx = \frac{dx}{dt} dt$, la diferencial de longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

Luego

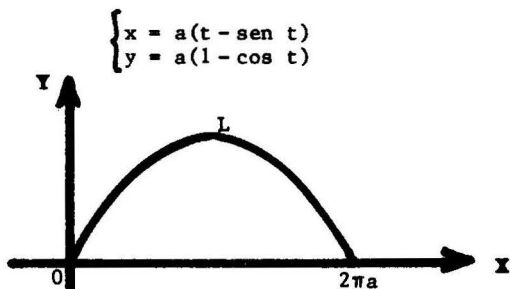
$$L = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt ,$$

por la fórmula del cambio de variable para integrales definidas.

Nota Se acaba de establecer que la diferencial de longitud de

arco en función de un parámetro t es $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$

Ejemplo. Hallar la longitud de un arco completo de la cicloide



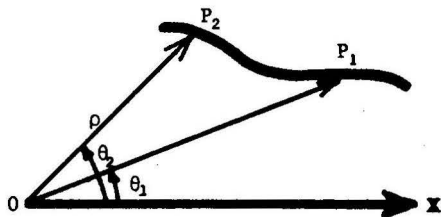
Solución

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \text{cos } t)^2 + a^2 \text{sen}^2 t} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \text{sen } \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

4.2.3 Longitud del Arco de Curva en Coordenadas Polares

TEOREMA Si una curva es definida mediante la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, donde $\frac{d\rho}{d\theta}$ es una función continua, entonces la longitud del arco de la curva cuyos puntos extremos tienen ángulos polares θ_1 y θ_2 , respectivamente, es dada por

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



PRUEBA La curva dada también es definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

de donde $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta$

y $(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 = \rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2$ (usando $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

Luego por el teorema 4.2.2

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta,$$

lo que establece la fórmula deseada.

Nota Se acaba de probar que la diferencial de la longitud de arco en coordenadas polares es

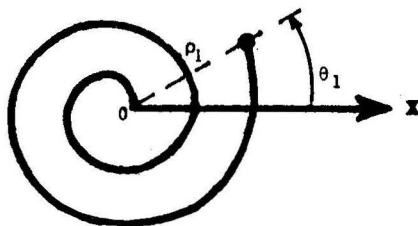
$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta.$$

Ejemplo Calcular la longitud

del arco de la espiral

$$\rho = a e^{m\theta}$$

desde el origen hasta el punto (ρ_1, θ_1) .



Solución Tenemos

$$\rho = a e^{m\theta}, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = a m e^{m\theta} \quad \text{y} \quad \rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2 = a^2 (1+m^2) e^{2m\theta}$$

Cuando θ varía desde $-\infty$ hasta θ_1 , el radio vector recorre el arco de la espiral con extremos el origen y el punto (ρ_1, θ_1) . Luego

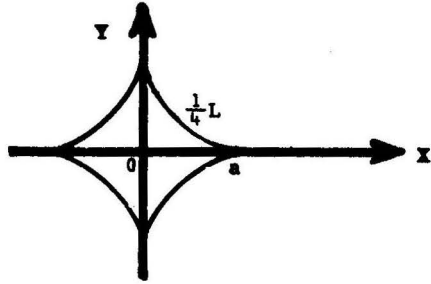
$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta = a \sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{\theta_1} e^{m\theta} d\theta \\ &= \frac{a \sqrt{1+m^2}}{m} \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{m\theta} \Big|_b^{\theta_1} = \frac{a \sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\theta_1} \quad (\text{puesto que } \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{mb} = 0) \\ &= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \rho_1. \end{aligned}$$

4.3 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Hallar la longitud de la asteroide (hipocicloide)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$



SOLUCION Diferenciando la ecuación implícita respecto de x

$$x^{-1/3} + y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}},$$

luego

$$\frac{1}{4}L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2} dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2}a,$$

de donde $L = 6a$.

PROBLEMA 2 Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ desde el origen al punto cuya abscisa es $x = 5a$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$. Luego $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9x}{4a}$ (usando $ay^2 = x^3$)

$$L = \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx = \frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{3/2} \Big|_0^{5a} = \frac{335a}{27}.$$

PROBLEMA 3 Encontrar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 4px$ desde el vértice hasta un extremo del lado recto.

SOLUCION El lado recto es, por definición, la cuerda vertical de la parábola que pasa por $(p,0)$. Luego, uno de los puntos extremos del lado recto es $(p,2p)$.

Tenemos $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2p}$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{4p^2}$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2p} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}} dy = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \sqrt{4p^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2p} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4p^2 + y^2} + 2p^2 \ln \left| y + \sqrt{4p^2 + y^2} \right| \right]_0^{2p} \\ &= p \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln \sec x$ desde el origen hasta el punto $(\frac{\pi}{3}, \ln 2)$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \tan x$. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/3} \sec x dx = \ln \left| \sec x + \tan x \right| \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar la longitud del arco de la catenaria

$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $(0, a)$ hasta (b, c) .

SOLUCION Se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \operatorname{sen} h \frac{x}{a}$.

Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 h \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{cos} h \frac{x}{a} dx, \quad (\text{usando } \operatorname{cos}^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1) \\ &= a \operatorname{sen} h \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sen} h \frac{b}{a} = a \sqrt{\operatorname{cos}^2 h \frac{b}{a} - 1} \\ &= \sqrt{c^2 - a^2}, \quad (\text{pues } c = a \operatorname{cos} h \frac{b}{a}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

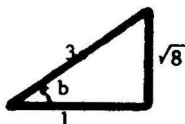
SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Luego

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx,$$

y haciendo $x = \tan t$ (ver problema 6)

$$= \left[\sec t + \ln |\operatorname{cosec} t - \cot t| \right]_a^b$$

donde $b = \arctan \sqrt{8}$ y $a = \arctan \sqrt{3}$, y por consiguiente



Entonces

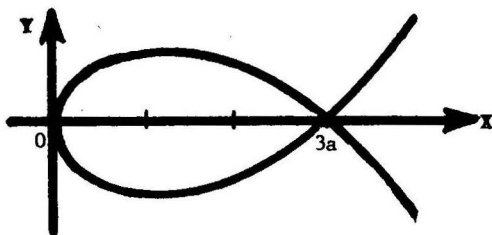
$$L = \left[3 + \ln \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \right] - \left[2 + \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

PROBLEMA 9

Encontrar la longitud del lazo de la curva

$$9ay^2 = x(x-3a)^2$$



SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-3a)(x-a)}{6ay}$,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(x-a)^2}{4ax}$ (usando $9ay^2 = x(x-3a)^2$). Luego por simetría

$$L = 2 \int_0^{3a} \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{4ax}} dx = \int_0^{3a} \frac{x+a}{\sqrt{ax}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} + 2ax^{1/2} \right]_0^{3a}$$

$$= 4\sqrt{3}a.$$

PROBLEMA 10 Hallar la longitud del arco de la curva $8y = x^4 + \frac{2}{x^2}$ desde $x=1$ hasta $x=2$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right)$. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{\left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar la longitud del arco de la curva

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

desde $t=0$ hasta $t=T$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dx}{dt} = a t \cos t$ y $\frac{dy}{dt} = a t \operatorname{sen} t$. Luego

$$L = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^T a t dt = \frac{aT^2}{2}.$$

PROBLEMA 12 Encontrar la longitud total de la curva

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

SOLUCION La curva es simétrica respecto del eje X y cuando t varía desde $t=0$ hasta $t=\pi$, el punto (x,y) recorre el arco superior de la curva. Luego

$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = 8 \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt,$$

pues $\frac{dx}{dt} = a(-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t)$, $\frac{dy}{dt} = a(2 \cos t - 2 \cos 2t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= a^2 [8 - 8 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t - 8 \cos t \cos 2t] \\ &= a^2 [8 - 8 \cos(2t - t)] = 8a^2 (1 - \cos t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$L = 8a \int_0^\pi \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = -16a \cos \frac{t}{2} \Bigg|_0^\pi = 16a$$

PROBLEMA 13 Calcular la longitud del arco de la curva $\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ desde $t=0$ hasta $t = \pi/2$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}, \quad \text{y por lo tanto}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1)$$

PROBLEMA 14 Encontrar la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 3 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases} \quad \text{desde } t=0 \text{ hasta } t=1.$$

SOLUCION Tenemos $\frac{dx}{dt} = 2t + 2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 2,$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 8(1 + t^2).$$

Luego

$$L = \int_0^1 \sqrt{8(1+t^2)} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 + \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2})$$

PROBLEMA 15 Calcular la longitud de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$.

SOLUCION Tenemos $\rho = a\theta$ y $\frac{d\rho}{d\theta} = a$. Luego

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta$$

$$= a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{1+\theta^2} \right| \right]_0^{2\pi}$$

$$= a \left[\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln (2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \right].$$

PROBLEMA 16 Encontrar la longitud del arco de la curva $\theta = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ desde $\rho = 1$ hasta $\rho = 3$.

SOLUCION Despejando ρ tenemos $\rho = \theta \pm \sqrt{\theta^2 - 1}$, y por lo tanto, cuando $\rho > 1$,

$$\rho = \theta + \sqrt{\theta^2 - 1}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1 + \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 - 1}} = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}}{\sqrt{\theta^2 - 1}}$$

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})^2 \cdot \theta^2}{\theta^2 - 1}$$

Cuando ρ varía desde $\rho = 1$ hasta $\rho = 3$, el ángulo polar θ varía desde $\theta = 1$ hasta $\theta = \frac{5}{3}$.

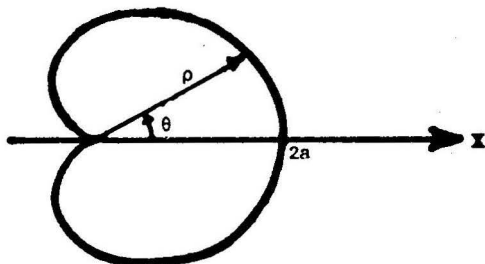
Luego

$$L = \int_1^{5/3} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_1^{5/3} \left(\theta + \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2 - 1}}\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \sqrt{\theta^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 - 1} \right| \right]_1^{5/3} = \frac{4 + \ln 3}{2}$$

PROBLEMA 17 Hallar la longitud de la cardiode $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION



La curva es simétrica respecto del eje X. Cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, el radio vector recorre el arco superior de la curva. Puesto que

$$\rho = a(1 + \cos \theta), \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -a \sin \theta$$

$$y \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 2a^2(1 + \cos \theta) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\text{tenemos } L = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

PROBLEMA 18 Calcular la longitud de la curva $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Se tiene $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \sec^2 \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \sec^6 \frac{\theta}{2} \quad \text{Luego}$$

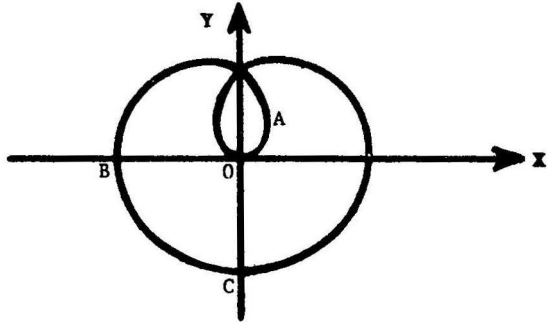
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} a \sec^3 \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} d\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2a \left[\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sec \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} + \sec \frac{\theta}{2} \right| \right]_0^{\pi/2} = a \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Probar que la longitud total de la curva

$$\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$$

es $\frac{3\pi a}{2}$.



SOLUCION

La curva es simétrica respecto del eje X y cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{3\pi}{2}$, el radio vector recorre el arco OABC.

Por otra parte, $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$, $\frac{d\rho}{d\theta} = a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}$, y $\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{3}$.

Por consiguiente,

$$L = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{3} d\theta = a \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos \frac{2\theta}{3}) d\theta = \frac{3\pi a}{2}.$$

PROBLEMA 20 Encontrar la longitud de la espiral logarítmica

$$\rho = \frac{a}{\theta} \quad \text{desde} \quad (\rho_1, \theta_1) \quad \text{hasta} \quad (\rho_2, \theta_2) .$$

SOLUCION Tenemos $\rho = \frac{a}{\theta}$, $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$

$$\text{y} \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \left(\frac{1 + \theta^2}{\theta^4}\right) .$$

Por lo tanto

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta = a \left[\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) - \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

(la integral se calcula haciendo $\theta = \tan t$)

$$= a \left[\ln\left(\frac{\theta_2 + \sqrt{\theta_2^2 + 1}}{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 1}}\right) + \frac{\sqrt{1 + \theta_2^2}}{\theta_2} - \frac{\sqrt{1 + \theta_1^2}}{\theta_1} \right]$$

O substituyendo $\theta_1 = \frac{a}{\rho_1}$ y $\theta_2 = \frac{a}{\rho_2}$

$$L = a \cdot \ln \frac{\rho_1 (a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2 (a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})} + \sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} .$$

5 VOLUMEN DE SOLIDOS

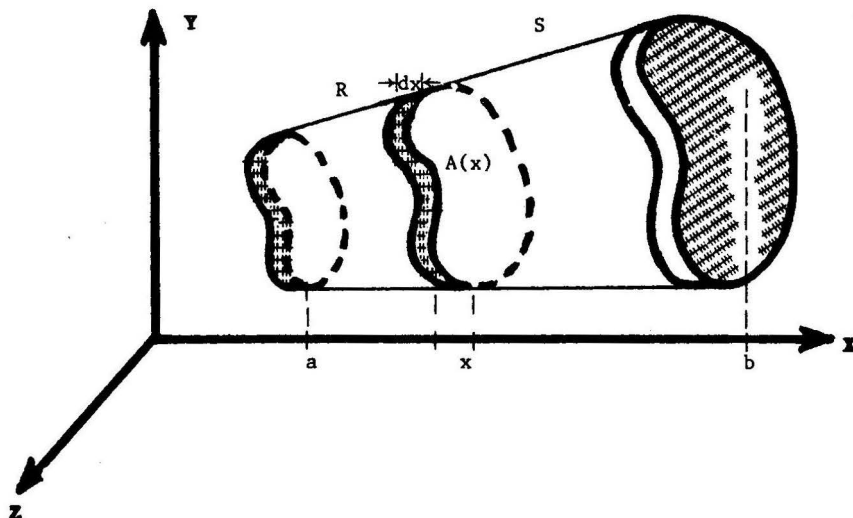
5.1 Definición del Volumen de un Sólido en términos del Área Seccional

Definición Sea S una región del espacio XYZ que se encuentra entre dos planos perpendiculares al eje X : $x = a$ y $x = b$. Entonces el **volumen del sólido S** se define por la fórmula

$$V = \int_a^b A(x) dx ,$$

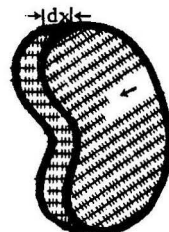
donde $A(x)$ es el área de la sección de S trazada perpendicularmente al eje X en el punto x , y donde se supone que $A(x)$ es una función continua.

Interpretación Geométrica



El cilindro elemental R de la derecha tiene área $A(x)$ en la base y altura dx . Luego, su volumen es $dV = A(x)dx$. Las sumas de los volúmenes de tales cilindros elementales se aproximan al volumen del sólido ya que

$$V = \int_a^b A(x)dx = \lim \sum A(x)dx$$



por definición de integral definida.

Nota Análogamente, el volumen de un sólido S del espacio comprendido entre dos planos perpendiculares al eje Y: $y=c$ e $y=d$, se define mediante

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

donde $A(y)$ es el área de la sección plana de S trazada perpendicularmente al eje Y en el punto y .

5.1 DEFINICION DEL VOLUMEN DE UN SOLIDO EN TERMINOS DEL AREA SECCIONAL

Ejemplo 1 Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro recto circular de radio r , por un plano que pasa a través del diámetro de la base y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Hallar el volumen de la cuña.

Solución

La ecuación del segmento OP es $y = x$.

Las dimensiones del paralelepípedo elemental de la figura son:

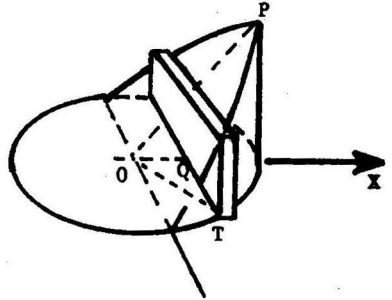
$$\begin{aligned} \text{ancho} &= dx \\ \text{base} &= 2 \overline{QT} = 2 \sqrt{(\overline{OT})^2 - (\overline{OQ})^2} \\ &= 2 \sqrt{r^2 - x^2} \\ \text{altura} &= y = x. \end{aligned}$$

Por tanto su volumen es

$$dV = 2 \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx,$$

y cuando x varía desde $x=0$ hasta $x=r$, se obtiene la cuña. Luego, el volumen de la cuña es

$$V = \int_0^r dV = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx = -\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3.$$



Ejemplo 2 Calcular el volumen de una esfera de radio a .

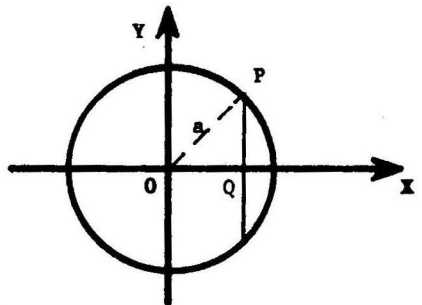
Solución

La sección plana de la esfera trazada perpendicularmente al eje X en el punto x , es un círculo de radio $\overline{PQ} = y$, y por tanto, su área es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2).$$

La esfera se obtiene cuando x varía desde $x=-a$ hasta $x=a$. Luego, el volumen de la esfera es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a A(x) dx = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{4 \pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

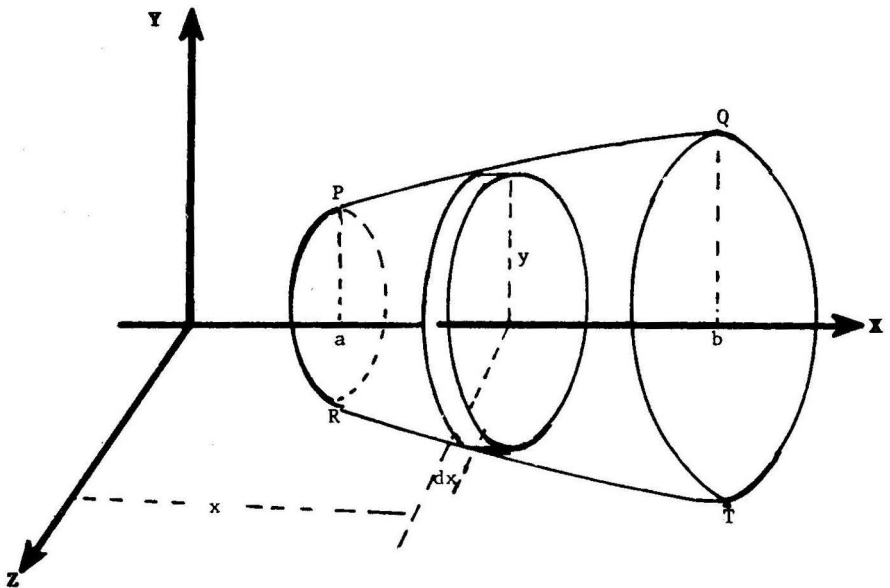


5.2 Volumen de un Sólido de Revolución

5.2.1 Método del Disco Circular

TEOREMA Sea $y = y(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $y(x) \geq 0$. Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje X la región limitada por la curva $y = y(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$. Entonces, el volumen de S es dado por

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$



PRUEBA Al rotar la región $PQab$ del plano XY alrededor del eje X , se genera el sólido de revolución $PQRT$. En la figura se muestra un cilindro o disco circular de radio $=y$, altura $=dx$, área de la base $A(x) = \pi y^2$, y volumen $dV = \pi y^2 dx$.

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

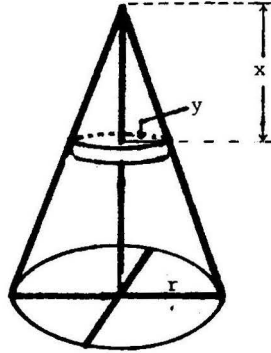
Ejemplo 1 Probar que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Solución

El disco circular elemental de la figura tiene volumen $dV = \pi y^2 dx$, donde $\frac{y}{x} = \frac{r}{h}$ por semejanza de triángulos.

Luego

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h dV = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$



Ejemplo 2 Hallar el volumen del sólido engendrado cuando se rota alrededor del eje X la región acotada por un arco completo de la curva $y = a \sin x$.

Solución Cuando x varía desde $x=0$ hasta $x=\pi$, se obtiene un arco completo de la curva dada.

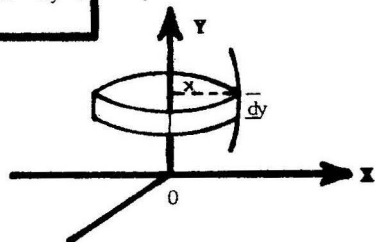
Luego

$$V = \pi \int_0^\pi a^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

5.2.2 Nota En forma análoga, el volumen del sólido de revolución S obtenido al rotar alrededor del eje Y la región limitada por la curva $x = x(y)$, el eje Y y las rectas $y=c$ e $y=d$ es dado por

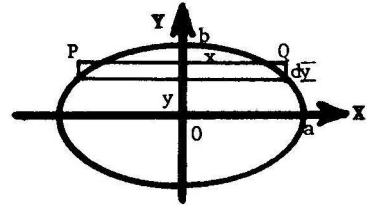
$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy.$$

En este caso, $dV = \pi x^2 dy$ es el volumen de un disco circular elemental (ver figura).



Ejemplo Hallar el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje Y la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución Al rotar el rectángulo PQ alrededor del eje Y se obtiene un disco circular de radio = x, y volumen $V = \pi x^2 dy$. Cuando y varía desde $y = -b$ hasta $y = b$, se obtiene un sólido cuyo volumen es entonces

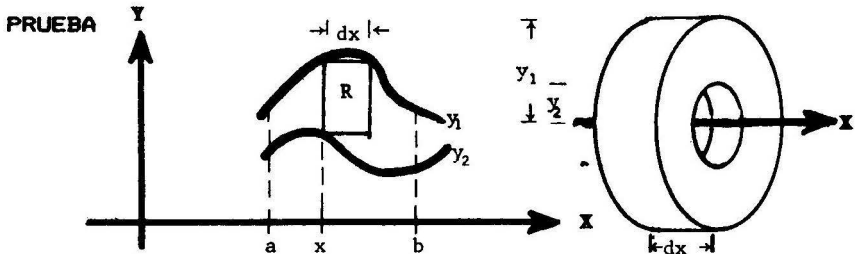


$$V = \int_{-b}^b \pi x^2 dy = \pi \int_{-b}^b \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) dy = \frac{4\pi a^2 b}{3}$$

5.2.3 Método del Anillo Circular

TEOREMA El volumen del sólido de revolución engendrado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por las curvas $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, donde $y_1(x) \geq y_2(x) \geq 0$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dado por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

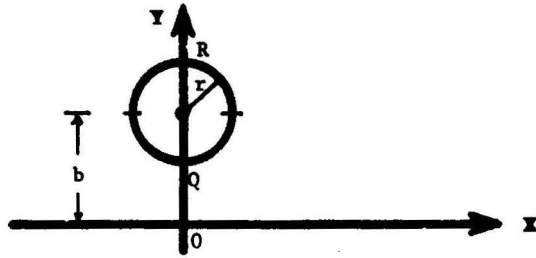


En la figura se muestra un rectángulo elemental R determinado por la abscisa x, las ordenadas y_1, y_2 . Al rotar R alrededor del eje X se obtiene un anillo circular, como el que se ilustra en el lado de recho de la figura, cuya base tiene un área $A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2)$, y cuyo volumen es $dV = A(x)dx = \pi(y_1^2 - y_2^2) dx$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución obtenido cuando x varía desde $x = a$ hasta $x = b$, es

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

Ejemplo Encontrar el volumen del anillo sólido (o **toro**) obtenido cuando se rota un círculo de radio r alrededor de un eje exterior en su plano y a b unidades de su centro.



Solución Consideramos un sistema de coordenadas como el que se indica en la figura. El círculo rota alrededor del eje X. La ecuación del círculo es $(x - 0)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Luego $y = b \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, y por lo tanto,

el arco superior R es descrito por $y_1 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$, y

el arco inferior Q es descrito por $y_2 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$,

cuando x varía desde $-r$ hasta r . El elemento de volumen es

$$dV = \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = 4\pi b \sqrt{r^2 - x^2}.$$

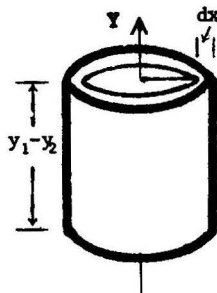
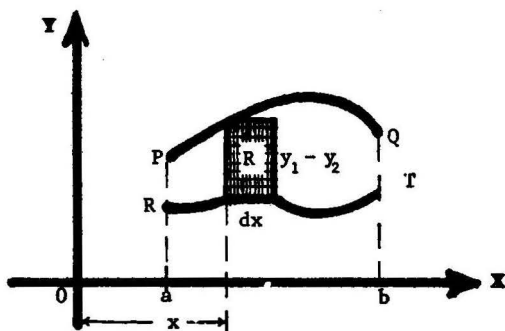
Finalmente $V = 4\pi b \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 r^2 b$.

5.2.4 Método del Tubo Cilíndrico

Definición El volumen del sólido de revolución S engendrado por rotación alrededor del eje Y de la región acotada por las curvas $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, donde $y_1(x) \geq y_2(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dado por la fórmula

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_1 - y_2) dx.$$

Interpretación Geométrica



Al rotar alrededor del eje Y el rectángulo R, se obtiene un tubo cilíndrico, como el que se ilustra en el lado derecho de la figura, cuyo volumen aproximado es

$$dV = (\text{perímetro de la base}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{altura})$$

$$= (2\pi x)(dx)(y_1 - y_2).$$

El volumen del sólido obtenido al rotar la región PORT alrededor del eje Y es entonces

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x(y_1 - y_2) dx.$$

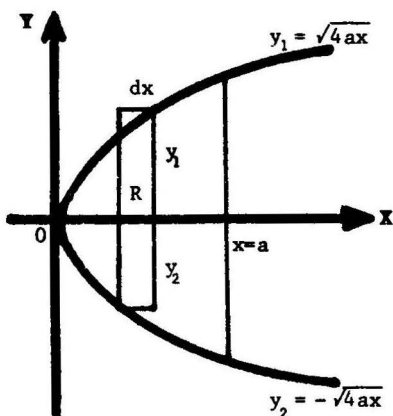
Ejemplo Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor de la recta $x = a$ la región acotada por esta recta y la parábola $y^2 = 4ax$, ($a > 0$).

Solución El tubo cilíndrico elemental obtenido al rotar la región R alrededor de la recta $x = a$, tiene radio $= x - a$, y volumen $dV = 2\pi(x-a)(y_1 - y_2) dx = 4\pi(x-a)\sqrt{4ax} dx$.

Luego

$$V = \int_0^a 4\pi(a-x)\sqrt{4ax} dx$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{16}{5}\pi a^3 = \frac{32}{15}\pi a^3$$



5.3 Volumen de un Sólido de Revolución en Coordenadas Polares

Teorema El volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva $\rho = \rho(\theta)$ y los ángulos polares $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, es dado por la fórmula

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Prueba Tenemos

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

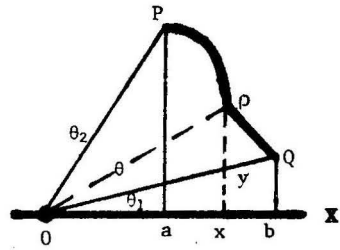
$$a = \rho_2 \cos \theta_2, \quad b = \rho_1 \cos \theta_1.$$

Sean

V_1 = volumen de la región engendrada por el triángulo OQb

V_2 = volumen de la región engendrada por el triángulo OPa

V_3 = volumen de la región engendrada por PQab.



Entonces el volumen V del sólido engendrado por la región OPQ es

$$V = V_3 - V_1 + V_2.$$

Puesto que, por el ejemplo 1 de la sección 5.2.1, un cono circular recto de radio r y altura h , tiene volumen igual a $\frac{\pi r^2 h}{3}$, tenemos

$$V_i = \frac{\pi (\rho_i \operatorname{sen} \theta_i)^2 \rho_i \cos \theta_i}{3} = \frac{\pi \rho_i^3 \operatorname{sen}^2 \theta_i \cos \theta_i}{3} \quad \text{donde } i=1,2. \quad (1)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} V_3 &= \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta (\rho' \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} [\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta] d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

y como

$$\begin{aligned} d(\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta) &= \left\{ 3\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + 2\rho^3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta \right\} d\theta \\ &= \left\{ 3[\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta] + 2\rho^3 \operatorname{sen} \theta \right\} d\theta \\ &\quad (\text{usando } \cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \end{aligned}$$

de donde

$$d\left(\frac{\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta}{3}\right) = [\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta] d\theta + \frac{2}{3} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta,$$

y por lo tanto en (2)

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} d \frac{\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta}{3} - \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \frac{\pi \rho_1^3 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \cos \theta_1}{3} - \frac{\pi \rho_2^3 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos \theta_2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + V_1 - V_2 \end{aligned}$$

y así $V = V_3 - V_1 + V_2 = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta,$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Ejemplo Calcular el volumen de un sólido obtenido por rotación de la región acotada por la curva $\rho = a \cos^2 \theta$ alrededor del eje polar.

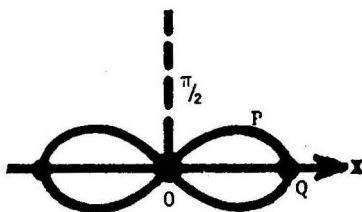
Solución

Cuando varía desde $\theta = 0$ hasta

$\theta = \frac{\pi}{2}$, el radio vector ρ barre

la región QPO. Por simetría

tenemos que



$$V = 2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^3 \pi}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^3 \pi}{3} \left(-\frac{\cos^7 \theta}{7} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4a^3 \pi}{21}$$

5.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el volumen de un sólido formado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por el eje X y la parábola $y = 2x - x^2$.

SOLUCION La parábola dada corta el eje X cuando $y = 2x - x^2 = 0$, esto es cuando $x = 0$ y $x = 2$.

El área seccional $A(x)$ es $A(x) = \pi y^2 = \pi x^2 (2-x)^2$.

$$\text{Luego } V = \int_0^2 A(x) dx = \pi \int_0^2 x^2 (2-x)^2 dx = \frac{16}{15} \pi.$$

PROBLEMA 2 Encontrar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje X la región acotada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje X y la recta $x = 1$.

SOLUCION La región está comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$. El elemento de volumen es

$$dV = \pi y^2 dx = \pi x^3 dx.$$

$$\text{Tenemos entonces } V = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{4}.$$

PROBLEMA 3 Calcular el volumen de un sólido obtenido por rotación, alrededor del eje X, de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION

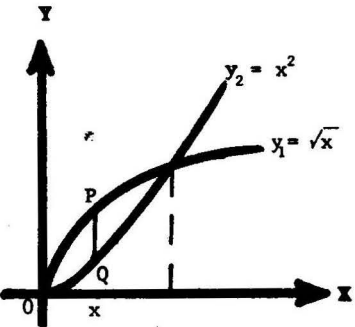
Las parábolas se intersecan cuando $x = 0$ y $x = 1$.

El área seccional del anillo circular engendrado por el segmento PQ es

$$A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2) = \pi(x - x^4)$$

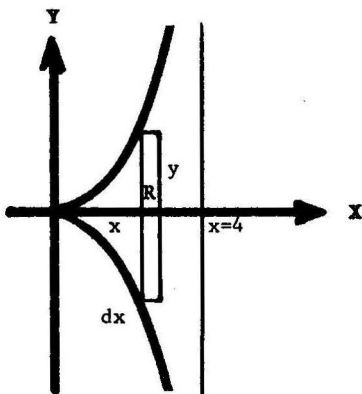
Luego

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}.$$



PROBLEMA 4 Hallar el volumen del sólido generado por rotación de la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$ alrededor de su asíntota $x = 4$.

SOLUCION Cuando el rectángulo R rota alrededor de la recta $x = 4$ engendra un tubo cilíndrico elemental de espesor dx , radio en la base $= 4-x$ y altura $= 2y$.



Luego su volumen es

$$dV = 2\pi(4-x)(2y)dx = 4\pi(4-x)y dx$$

y el volumen del sólido es

$$V = \int_0^4 dV = 4\pi \int_0^4 (4-x) \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{1/2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^4 x \sqrt{x(4-x)} dx$$

Completando cuadrados: $x(4-x) = 4 - (2-x)^2$, sugiere el cambio de variables $2-x = 2 \cos \theta$, o $x = 2(1 - \cos \theta)$.

Los nuevos límites de integración son $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por lo tanto

$$V = 4\pi \int_0^\pi 2(1 - \cos \theta) 2 \sin \theta d\theta = 16\pi.$$

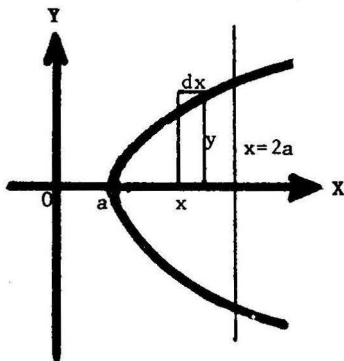
PROBLEMA 5 Probar que el volumen del sólido obtenido por rotación alrededor del eje X de la región limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = 2a$, es igual al volumen de una esfera de radio a .

SOLUCION El volumen del disco circular obtenido al rotar el rectángulo elemental de la figura alrededor del eje X es $dV = \pi y^2 dx$.

Se tiene entonces

$$V = \int_a^{2a} dV = \pi \int_a^{2a} (x^2 - a^2) dx = \frac{4}{3} \pi a^3$$

que es igual al volumen de una esfera de radio a .



PROBLEMA 6 Encontrar el volumen de un cono recto elíptico cuya base es una elipse con semiejes 4 y 3, y altura 5.

SOLUCION A una distancia h del vértice el disco elíptico elemental E de la figura tiene semiejes a y b , los cuales son dados, por semejanza de triángulos, por

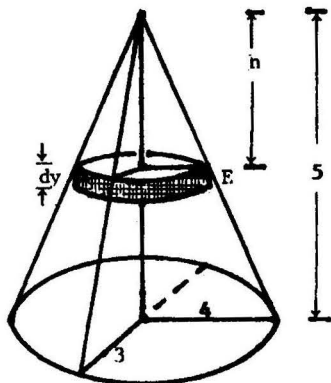
$$\frac{a}{h} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \frac{b}{h} = \frac{3}{5}, \quad \text{o} \quad a = \frac{4}{5}h$$

$$\text{o} \quad a = \frac{4}{5}h \quad \text{y} \quad b = \frac{3}{5}h.$$

Puesto que el área de una elipse es πab , el volumen de E es

$$dV = \pi ab dh = \frac{12}{25} \pi h^2 dh. \quad \text{Luego}$$

$$V = \int_0^5 dV = \frac{12}{25} \pi \int_0^5 h^2 dh = 20\pi.$$



PROBLEMA 7 La base de un sólido es un círculo de radio a . Si todas las secciones planas del sólido perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadradas, hallar el volumen del sólido.

SOLUCION

El paralelepípedo rectangular elemental de la figura tiene volumen

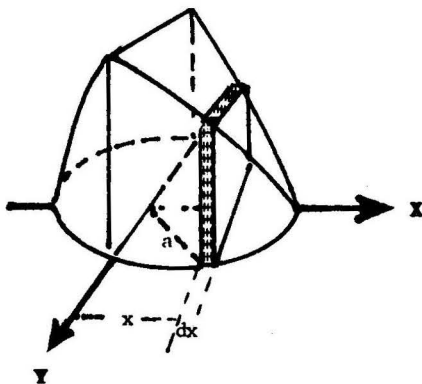
$$dV = (2y)^2 dx,$$

donde $x^2 + y^2 = a^2$. Luego

$$V = \int_{-a}^a dV$$

$$= 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}.$$

$$= \frac{16a^3}{3}$$

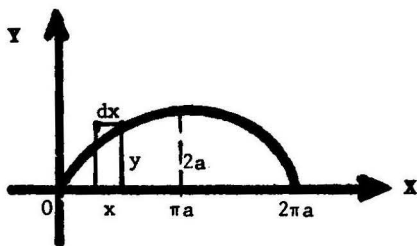


PROBLEMA 8 Calcular el volumen del sólido formado por rotación de la figura acotada por un arco completo de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \text{cos } t)$ y el eje X, alrededor del

- (1) eje Y
- (2) eje de simetría de la figura.

SOLUCION

- (1) El cubo cilíndrico elemental obtenido al rotar el rectángulo de la figura alrededor del eje Y, tiene volumen $dV = 2 \pi x y dx$.



Puesto que $x = 0$ cuando $t = 0$, y $x = 2 \pi a$ cuando $t = 2 \pi$, tenemos

$$V = \int_0^{2\pi a} 2\pi x y dx = 2 \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \text{sen } t)(1 - \text{cos } t)^2 dt = 6\pi^2 a^3.$$

- (2) El eje de simetría de la figura es la recta $x = \pi a$. El volumen del tubo cilíndrico obtenido por rotación, alrededor de esta recta, del rectángulo de la figura es

$$dV = 2\pi(\pi a - x)y dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi a} dV = 2 \pi a^3 \int_0^{\pi} (\pi - t + \text{sen } t)(1 - \text{cos } t)^2 dt \\ &= 2 \pi a^3 \int_0^{\pi} (\pi - t + \text{sen } t) \left(\frac{3}{2} - 2 \text{cos } t + \frac{\text{cos } 2t}{2} \right) dt \\ &\hspace{15em} \left(\text{usando } \text{cos}^2 t = \frac{1 + \text{cos } 2t}{2} \right) \\ &= \frac{\pi a^3 (9 \pi^2 - 16)}{6} . \end{aligned}$$

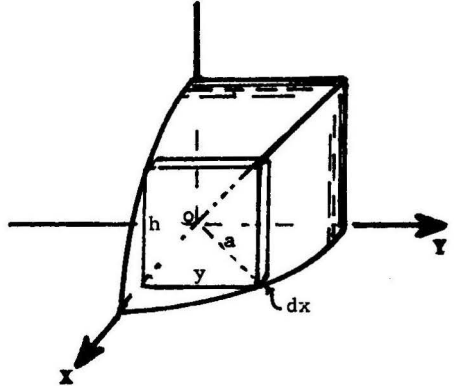
PROBLEMA 9 Encontrar el volumen del sólido común a dos cilindros rectos circulares de radio a , cuyos ejes se intersecan en ángulos rectos.

SOLUCION El paralelepípedo de la figura tiene volumen $dV = h y dx = y^2 dx$ ya que $h = \sqrt{a^2 - x^2} = y$.

Entonces tenemos

$V = 8$ veces el volumen de la región que se muestra en la figura

$$\begin{aligned} &= 8 \int_0^a y^2 dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{16}{3} a^3 . \end{aligned}$$



PROBLEMA 10 Un círculo deformable se mueve de manera que uno de los puntos de su circunferencia se encuentra en el eje X , el centro describe una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y el plano del círculo es perpendicular al eje X . Calcular el volumen del sólido.

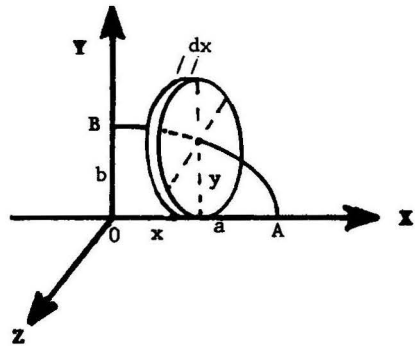
SOLUCION El volumen del disco circular elemental de la figura es $dV = \pi y^2 dx$, donde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Por lo tanto,

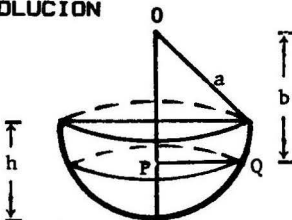
$V = 4$ veces el volumen de la región que corresponde al arco \widehat{AB} .

$$= 4 \int_0^a \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{8\pi}{3} ab^2$$



PROBLEMA 11 Hallar el volumen de un segmento de esfera de radio a y altura h .

SOLUCION



El volumen de un disco circular elemental es $dV = \pi(PQ)^2 dy$, donde $\overline{PQ}^2 = a^2 - \overline{OP}^2 = a^2 - y^2$. Luego,

$$\begin{aligned} V &= \int_{a-h}^a \pi(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{\pi}{3} h^2 (3a - h) . \end{aligned}$$

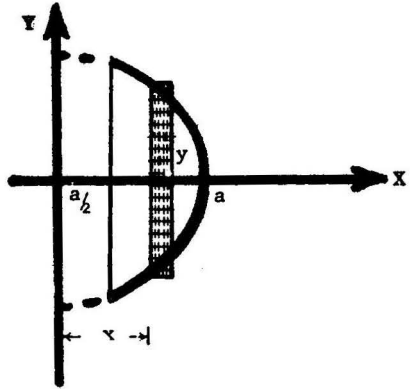
PROBLEMA 12 Una esfera de radio a tiene un hueco cilíndrico recto de base circular de diámetro a . Si el eje del cilindro es un diámetro de la esfera, hallar el volumen de la esfera hueca.

SOLUCION El tubo cilíndrico obtenido al rotar alrededor del eje Y el rectángulo de la figura, tiene volumen

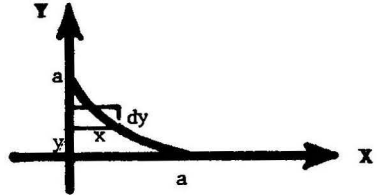
$$dV = (2\pi x)(2y)dx. \text{ Por lo tanto.}$$

$$V = \int_{a/2}^a dV = 4\pi \int_{a/2}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= -\frac{4}{3} \pi (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{a/2}^a = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a.$$



PROBLEMA 13 Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Y .



SOLUCION $dV = \pi x^2 dy = \pi(a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy.$

Luego $V = 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy = \frac{32\pi a^3}{105}.$

PROBLEMA 14 Sobre las cuerdas de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, paralelas al eje X , se construyen cuadrados perpendiculares al plano XY y cuyos lados son iguales a las longitudes de tales cuerdas. Encontrar el volumen del sólido formado.

SOLUCION $dV = (2x)^2 dy$

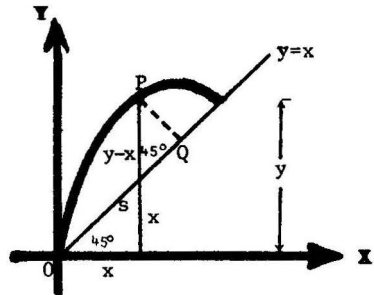
$$V = 2 \int_0^a (2x)^2 dy = 8 \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy$$

$$= \frac{128}{105} a^3.$$

PROBLEMA 15 Calcular el volumen engendrado al rotar la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = 3x - x^2$, alrededor de la recta.

SOLUCION Las curvas dadas se intersecan usando $x = 0$ y $x = 2$.

Sean $\left\{ \begin{array}{l} P = (x, y) \text{ un punto del arco} \\ \text{de la parábola,} \\ Q = \text{el pie de la perpendicular} \\ \text{trazada desde el punto P a} \\ \text{la recta diagonal,} \\ s = \overline{OQ}, \\ t = \overline{PQ}. \end{array} \right.$



$$\text{Tenemos } t = (y-x)\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2x - x^2),$$

$$s = x \sec 45^\circ + t = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2),$$

$$y \quad dV = \pi t^2 ds = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} x^2 (2-x)^3 dx.$$

$$\text{Luego } V = \int_0^2 dV = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \int_0^2 x^2 (2-x)^3 dx = \frac{8\pi \sqrt{2}}{15}.$$

PROBLEMA 16 Hallar el volumen del sólido obtenido por rotación alrededor del eje polar de la figura acotada por la cardiode $\rho = 4 + 4 \cos \theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Aplicamos la fórmula del teorema 5.3, pág. 285,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \theta d\theta = \frac{128\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{128\pi}{3} \cdot \frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \Bigg|_0^{\pi/2} = 160\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 17 Calcular el volumen del sólido formado por rotación alrededor del eje polar de la curva $\rho = 3 \sin 2\theta$.

SOLUCION

$$V = 2\left(\frac{2}{3}\pi\right) \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \theta d\theta = 288\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{576}{35} \pi.$$

PROBLEMA 18 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloides $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$ y los planos $z = 2$ y $z = 5$.

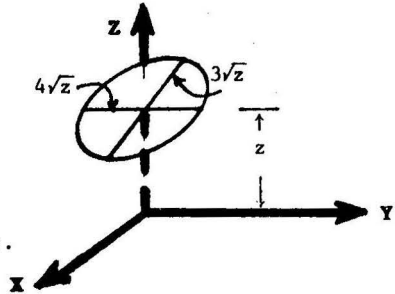
SOLUCION

La sección del sólido determinada por un plano paralelo al plano XY y a una distancia z del origen es una elipse de área

$$A = \pi xy = \pi(3\sqrt{z})(4\sqrt{z}) = 12\pi z.$$

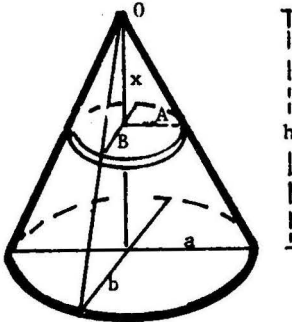
Luego

$$V = \int_2^5 A dz = 12\pi \int_2^5 z dz = 126\pi.$$



PROBLEMA 19 Hallar el volumen de un cono recto de altura h , cuya base es una elipse de semiejes a y b .

SOLUCION



El disco elíptico elemental de la figura tiene volumen $dV = \pi AB dx$, donde los semiejes A y B , por semejanza de triángulos, satisfacen las relaciones

$$\frac{A}{a} = \frac{x}{h} \quad \text{y} \quad \frac{B}{b} = \frac{x}{h}$$

Luego

$$V = \int_0^h dV = \frac{\pi ab}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi abh}{3}.$$

PROBLEMA 20 Hallar el volumen del sólido encerrado por la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

SOLUCION Para cada z tal que $-c \leq z \leq c$, se tiene una sección plana elíptica paralela al plano XY acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{c^2 - z^2}{c^2}.$$

El área de tal sección plana es

$$A = \pi \cdot \text{producto de los semiejes de la elipse} \\ = \pi \left[\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2} \right] \cdot \left[\frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2} \right] = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2).$$

Por lo tanto, el volumen pedido es

$$V = \int_{-c}^c A dz = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c (c^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

5.5 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Un triángulo equilátero variable se mueve con su plano perpendicular al eje X, los extremos de su base sobre los puntos de las parábolas $y^2 = 16x$ e $y^2 = 4x$, $y \geq 0$, y el tercer vértice encima del plano XY. Calcular el volumen del sólido engendrado por el triángulo cuando se mueve desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

PROBLEMA 2 Calcular el volumen del sólido acotado por la su perficie

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

PROBLEMA 3 Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A,B y a,b, respectivamente, y la altura es h.

PROBLEMA 4 Un triángulo móvil de altura constante h se mueve con un plano perpendicular a un diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es una cuerda del círculo. En contrar el volumen del sólido engendrado cuando el triángulo se desplaza desde un extremo del diámetro hasta el otro.

PROBLEMA 5 Encontrar el volumen del sólido engendrado por la figura encerrada por la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y la recta $x+y=1$, cuando rota alrededor de dicha recta.

PROBLEMA 6 Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor del eje Y la figura acotada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$$

RESPUESTAS 1 $\frac{\sqrt{3}}{2} .$

2 $\frac{8}{5} \pi abc .$

3 $\frac{h}{3} (AB + \frac{Ab + aB}{2} + ab) .$

4 $\frac{1}{2} \pi a^2 h .$

5 $\frac{\pi \sqrt{2}}{15} .$

6 $\frac{4}{5} \pi a^2 b .$

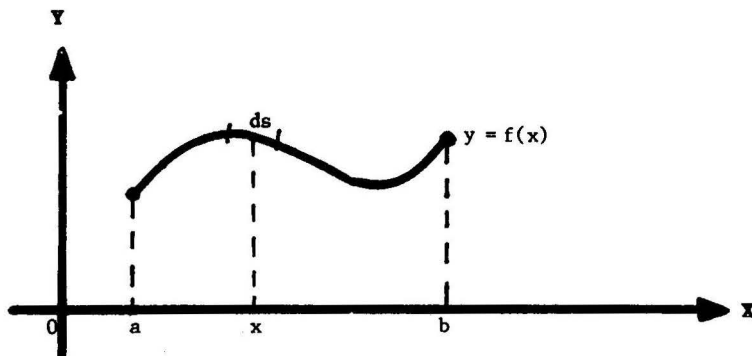
6 AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION

6.1 Area en Coordenadas Rectangulares

Definición El área de la superficie S obtenida por rotación, alrededor del eje X , del arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$, se define mediante la fórmula

$$A = 2\pi \int_a^b y \, ds$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ (= diferencial de longitud de arco)} \\ \text{se asume que } \frac{dy}{dx} \text{ es continua en el intervalo } a \leq x \leq b. \end{array} \right.$



Cuando un elemento de arco, de longitud ds , rota alrededor del eje X , engendra un "cilindro" circular de altura $h = ds$, radio $r = y$, y superficie lateral $dA = 2\pi y ds$.

Nota De manera análoga, el área de la superficie S obtenida por rotación, alrededor del eje Y , de un arco de la curva $x = f(y)$, entre los puntos $y = c$ e $y = d$, se define mediante

$$A = 2\pi \int_c^d x \, ds$$

donde $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$.

6.2 Area de una Superficie de Revolución cuando la Curva es dada en forma Paramétrica

TEOREMA Sea una curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{tal que } \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ son continuas en } \alpha < t < \beta.$$

Entonces

El área de la superficie obtenida por rotación alrededor del eje X, del arco de la curva entre $t = \alpha$ y $t = \beta$, es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Nota

(1) Si se rota alrededor del eje Y, el área de la superficie es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

(2) La prueba del teorema es una consecuencia inmediata de la definición 6.1 y de la fórmula de cambio de variable para la integral definida.

Recordemos que $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ (ver Nota, 4.2.2)

Ejemplo 1 Encontrar el área de la superficie obtenida por rotación de un arco completo de la curva $y = \sin x$.

Solución Cuando x varía desde $x = 0$ hasta $x = \pi$, se obtiene un arco completo de la curva dada. Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du, \quad \text{haciendo } u = \cos x, \\ &= 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du = 2\pi \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Hallar el área de la superficie de la esfera engendrada al rotar un círculo de radio R alrededor de un diámetro.

Solución Sea $x^2 + y^2 = R^2$ la ecuación del círculo respecto de un sistema de coordenadas rectangulares. Hagamos $x = R \cos t$,
 $y = R \operatorname{sen} t$.

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -R \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = R \cos t \quad y$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = R dt.$$

Cuando t varía desde $t=0$ hasta $t=\pi$, se obtiene el semicírculo de diámetro contenido en el eje X. Por tanto, el área buscada es

$$A = 2\pi \int_0^\pi (R \operatorname{sen} t) R dt = -2\pi R^2 \cdot \cos t \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

6.3 Área de una Superficie de Revolución en Coordenadas Polares

TEOREMA Si una curva es definida mediante la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, donde $\frac{d\rho}{d\theta}$ es una función continua, entonces el área de la superficie obtenida por rotación, alrededor del eje polar X, del arco de la curva cuyos puntos extremos tienen ángulos polares θ_1 y θ_2 , respectivamente, es dada por

$$A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \operatorname{sen} \theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

PRUEBA Tenemos $x = x(\theta) = \rho \cos \theta$, $y = y(\theta) = \rho \operatorname{sen} \theta$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (\text{ver nota 4.2.3})$$

Luego, aplicando el teorema 6.2 se obtiene la fórmula requerida. ■

Ejemplo Calcular el área de la superficie formada al rotar la cardiode $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ alrededor del eje polar.

Solución Observemos que la curva dada es simétrica respecto del eje polar, y que cuando θ varía desde 0 hasta π , se tiene el arco superior de la cardiode.

Puesto que $\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 4a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2(-\operatorname{sen} \theta)^2 = 8a^2(1 + \cos \theta)$

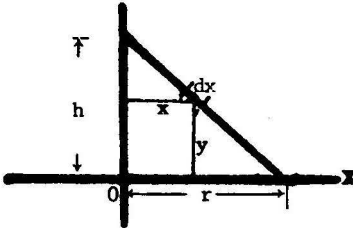
se tiene que el área pedida es

$$A = 8\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} \operatorname{sen} \theta d\theta = 8\sqrt{2} \pi a^2 \left(-\frac{2}{5}\right) (1 + \cos \theta)^{5/2} \Big|_0^\pi = \frac{128\pi a^2}{5}$$

6.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el área de la superficie lateral de un cono recto de altura h y base circular de radio r .

SOLUCION



Por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{x}{h-y} = \frac{r}{h}, \quad x = r - \frac{r}{h}y = \frac{r}{h}(h-y).$$

$$\text{Luego, } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h} dy$$

y el área de la superficie lateral del cono, que se obtiene rotando AB alrededor del eje Y , es

$$A = 2\pi \int_0^h \frac{x \sqrt{h^2 + r^2}}{h} dy = \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^h = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

PROBLEMA 2 Encontrar el área de la superficie de revolución obtenida al rotar alrededor del eje X la curva $y = e^{-x}$, desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

SOLUCION

$$ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{1 + e^{-2x}} dx,$$

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx = -2\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du,$$

(haciendo $u = e^{-x}$)

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

PROBLEMA 3 Calcular el área de la superficie formada por rotación alrededor del eje X del arco de la curva $4y = x^2 - 2 \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{x^2 + 1}{2x} dx$.

$$\text{Luego, } A = 2\pi \int_1^4 x ds = \pi \int_1^4 (x^2 + 1) dx = 24\pi.$$

PROBLEMA 4 Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar, alrededor del eje X, el lazo de la curva

$$9ay^2 = x(3a - x)^2 .$$

SOLUCION Cuando x varía desde 0 hasta 3a se obtiene el arco superior de la curva. Diferenciando implícitamente

$$18ay \frac{dy}{dx} = (3a - x)^2 - 2x(3a - x)$$

de donde,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)(a - x)}{6ay}$$

$$\begin{aligned} y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \frac{1}{6a} \sqrt{36 a^2 y^2 + (3a - x)^2 (a - x)^2} dx \\ &= \frac{(3a - x)(a + x)}{6a} dx \quad (\text{empleando } 9ay^2 = x(3a - x)^2) \end{aligned}$$

Luego
$$A = 2\pi \int_0^a \frac{(3a - x)(a + x)}{6a} dx = 3\pi a^2 .$$

PROBLEMA 5 Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al rotar alrededor del eje X la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} .$$

SOLUCION

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} , \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} , \quad dx = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx$$

(usando $a^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$)

Cuando x varía desde 0 hasta a se tiene el arco de la curva que se encuentra en el primer cuadrante. Por simetría se tiene entonces

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^a y ds = 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx \\ &= -\frac{6}{5} \pi a^{1/3} (a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2} \Big|_0^a = \frac{6}{5} \pi a^2 . \end{aligned}$$

Luego
$$A = \frac{12}{5} \pi a^2 .$$

PROBLEMA 6 Encontrar el área del elipsoide de revolución engendrado por rotación, alrededor del eje X, de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

SOLUCION Hagamos $x = a \cos t$. Entonces sustituyendo en la ecuación de la elipse se obtiene $y = b \sin t$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Cuando t varía desde 0 hasta π , se obtiene el arco superior de la elipse. Luego el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= 2\pi b \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du, \quad \text{haciendo } u = \cos t, \\ &= 2\pi b \sqrt{a^2 - b^2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - u^2} du \\ &= 2\pi b \sqrt{a^2 - b^2} \left[\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a^2}{a^2 - b^2} \arcsen \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right] \\ &= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsen e, \quad \text{donde } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 El arco de la parábola cúbica $9y = x^3$ entre $x=0$ y $x=3$ se rota alrededor del eje X. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada.

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^3 y ds = 2\pi \int_0^3 \frac{x^3}{9} \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \frac{2\pi}{27} \int_0^3 x^3 \sqrt{9+x^4} dx \\ &= \frac{2\pi}{27} \left. \frac{1}{6} (9+x^4)^{3/2} \right|_0^3 = \frac{\pi}{3} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Probar que el área de la superficie de revolución obtenida al rotar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, alrededor del eje Y, es $A = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$, donde $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

SOLUCION Hagamos $x = a \cos t$. De la ecuación de la elipse se obtiene $y = b \sin t$, y por lo tanto

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt.$$

Cuando t varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, se obtiene el arco de la elipse ubicado en el primer cuadrante.

Luego por simetría

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^{\pi/2} x dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} a \cos t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} du, \quad (\text{haciendo } u = \sin t) \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \left[\frac{u}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} + \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)} \ln \left(u + \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} \right) \right]_0^1 \\ &= \pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right), \end{aligned}$$

de donde $A = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$.

PROBLEMA 9 Encontrar el área de la superficie obtenida por rotación de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ alrededor del eje X desde $x = 0$ hasta $x = a$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$, $ds = \sqrt{1 + (\sinh \frac{x}{a})^2} dx = \cosh \frac{x}{a} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } A &= 2\pi \int_0^a a \cosh^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_0^a \frac{1}{2} (\cosh \frac{2x}{a} + 1) dx \\ &= \pi a \left[\frac{a}{2} \sinh \frac{2x}{a} + x \right]_0^a = \pi a^2 \left(\frac{\sinh 2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4). \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Calcular el área de la superficie de un **toro** formado al rotar el círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ alrededor del eje X ($b > a$).

SOLUCION Tenemos

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Calculamos el área A_1 de la superficie engendrada por rotación del arco PQ.

El arco PQ es definido por la ecuación

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

y por lo tanto

$$A_1 = 2\pi \int_0^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (1)$$

Calculamos el área A_2 de la superficie engendrada por rotación del arco RQ. El arco RQ es definido por la ecuación

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

Luego

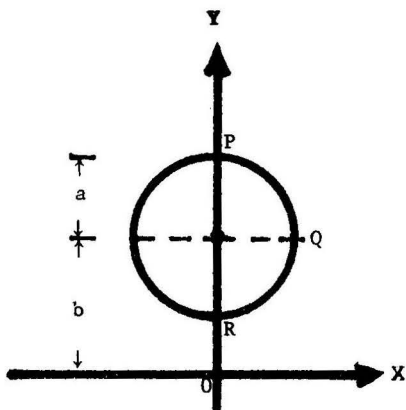
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad y$$

$$A_2 = 2\pi \int_0^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (2)$$

Luego, si A es el área de la superficie del toro, por simetría, tenemos que

$$A = 2(A_1 + A_2) = 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [\text{sumando (1) y (2)}]$$

$$= 8\pi ab \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4\pi^2 ab.$$



PROBLEMA 11 Calcular el área de la superficie obtenida al rotar un arco completo de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{sen} t) \\ y &= a(1 - \operatorname{cos} t), \end{aligned}$$

alrededor de la tangente a la cicloide en su punto más alto.

SOLUCION Cuando t varía desde 0 hasta 2π se obtiene un arco completo de la cicloide. El punto más alto de la cicloide en este intervalo

ocurre cuando $t = \pi$, y, puesto que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1 - \operatorname{cos} t)}$, la pendiente de la tangente es $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = 0$.

Luego, $y = 2a$ es la ecuación de la tangente.

La distancia del punto (x, y) de la cicloide a la recta tangente es $2a - y$, y por consiguiente el área pedida es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2a - y) ds = 2\pi a \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{cos} t) \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 (1 - \operatorname{cos} t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \operatorname{cos}^2 \frac{t}{2}\right) 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = -\frac{16 \pi a^2}{3} \operatorname{cos}^3 \frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{32 \pi a^2}{3} \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Calcular el área de la superficie obtenida al rotar, alrededor del eje polar, la lemniscata $\rho^2 = a^2 \operatorname{cos} 2\theta$.

SOLUCION Cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{4}$ se obtiene el arco de la curva ubicado en el primer cuadrante. Tenemos $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \frac{a^2}{\rho} d\theta \quad (\text{usando } \rho^2 = a^2 \operatorname{cos} 2\theta)$$

Por simetría, si A es el área buscada tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \operatorname{sen} \theta ds = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= -2\pi a^2 \operatorname{cos} \theta \Bigg|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego $A = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$.

PROBLEMA 13 Calcular el área de la superficie generada por rotación, alrededor del eje X, del arco de la curva $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = e^t (\operatorname{sen} t + \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),$$

$$ds = \sqrt{2} e^t dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (e^t \cos t) \sqrt{2} e^t dt = 2\sqrt{2} \pi \int_0^{\pi/2} e^{2t} \cos t dt \\ &= 2\sqrt{2} \pi \left[\frac{e^{2t}}{5} (\operatorname{sen} t + 2 \cos t) \right]_0^{\pi/2} \quad (\text{integrando por partes}) \\ &= \frac{2\sqrt{2} \pi}{5} (e^\pi - 2). \end{aligned}$$

CAP. 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL A PROBLEMAS DE LA FISICA

1 MASA, MOMENTOS ESTATICOS Y DE INERCIA, Y CENTRO DE MASA

1.1 Caso I: Sistemas de puntos materiales

Dado un sistema de n puntos materiales de masas m_1, m_2, \dots, m_n , ubicados en un plano de la recta fija E , llamada **eje**, definimos

(a) la masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^n m_i ,$$

(b) el momento estático respecto del eje E

$$M_E = \sum_{i=1}^n d_i m_i ,$$

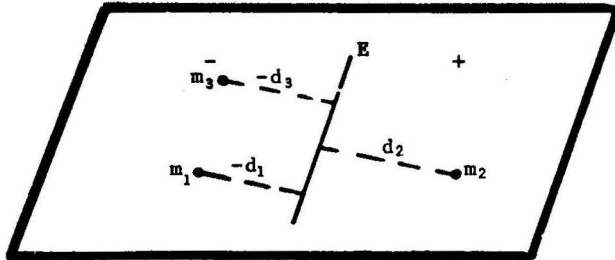
(c) el momento de inercia respecto del eje E

$$I_E = \sum_{i=1}^n d_i^2 m_i$$

(d) el centro de masa respecto del eje E

$$\bar{d} = \frac{M_E}{M}$$

en donde $d_i = \pm$ distancia del i -ésimo punto al eje E , debiendo elegirse el signo $+$ para aquellos puntos que se encuentran a un lado del eje E , y el signo $-$, para aquellos puntos que se encuentran al otro lado.



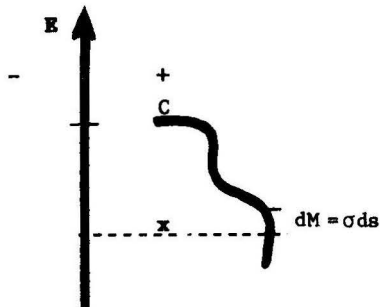
(e) radio de giro respecto del eje $E = R$, donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M}$$

, $R > 0$

1.2 Caso II: Curvas Planas

Sea un alambre delgado (o hilo) que tiene la forma de una curva C contenida en un plano de una recta fija E y supongamos que en cada punto de la curva es dada una densidad σ de masa por unidad de longitud. La masa de un arco elemental de longitud ds es $dM = \sigma ds$.



Sea $x = \pm$ distancia de dM al eje E , donde debe elegirse el signo $+$ según que dM se encuentra a un lado del eje E , y el signo $-$, si dM encuentra al otro lado.

El **momento estático de dM respecto de E** es $dM_E = x dM$, y el **momento de inercia de dM respecto de E** es $dI_E = x^2 dM$.

Damos entonces las siguientes definiciones para el alambre dado.

(a) **Masa total**

$$M = \int dM ,$$

(b) **momento estático respecto del eje E**

$$M_E = \int x dM ,$$

(c) **momento de inercia respecto del eje E**

$$I_E = \int x^2 dM ,$$

(d) **radio de giro respecto del eje $E = R$** , donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M} , \quad R > 0 ,$$

(e) si XY es un sistema de coordenadas rectangulares en el plano del alambre, se define

Centro de masa = (\bar{x}, \bar{y})

donde $\bar{x} = \frac{M_Y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_X}{M}$.

Nota

- (1) En las fórmulas (a), (b) y (c) los límites de integración se determinan de manera que el elemento de masa dM recorre toda la curva.
- (2) Si la densidad σ es constante decimos que la masa es **homogénea** o uniforme. En tal caso, el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) también se denomina **centroide**.
- (3) En general, cuando se **trata de figuras geométricas se asume** que $\sigma = 1$, resultando la masa del alambre numéricamente igual a la longitud.
- (4) Si la curva es simétrica respecto de E (y la masa es homogénea) entonces el centro de masa se encuentra en tal eje.

Ejemplo

Hallar el centro de masa de un arco del círculo de radio R que subtende un ángulo 2α .

Solución

Sea $C = (\bar{x}, \bar{y})$ el centro de masa del arco AB. Por simetría respecto del eje X, C se encuentra en el eje X; luego $y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Hagamos } x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t. \end{aligned}$$

Cuando t varía desde $t = -\alpha$ hasta $t = \alpha$ se obtiene el arco AB. Luego

$$ds = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$$

$$= R dt$$

$$dM_y = x ds = R^2 \cos t dt$$

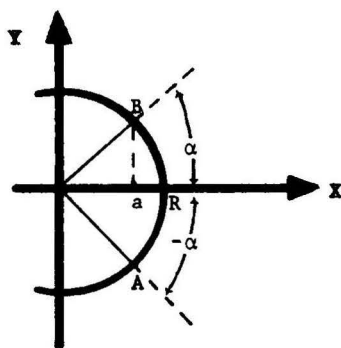
y por lo tanto

$$M = L = \int_{-\alpha}^{\alpha} ds = 2\alpha R,$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} dM_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos t dt = R^2 \sin t \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2R^2 \sin \alpha,$$

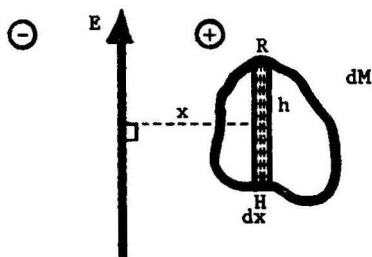
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

$$C = \left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right).$$



1.3 Caso III: Figuras Planas

Consideremos una "lámina fina" que tiene la forma de una región S contenida en un plano. Supongamos que la masa de la lámina es homogénea, esto es, que la densidad σ de masa por unidad de área es constante. Sea E una recta fija en dicho plano. La masa de un rectángulo elemental con dos lados paralelos al eje E (franjas paralelas al eje E) es $dM = \sigma h dx$, siendo h la altura y dx la base de dicho rectángulo.



Sea $x = \pm$ distancia de R al eje E , donde se mantiene la convención de signos establecida en 1.2.

El **momento estático de dM respecto de E** es $dM_E = x dM$, y su **momento de inercia respecto de E** es $DI_E = x^2 dM$.

Para la lámina damos entonces las siguientes definiciones

- (a) **Masa total**

$$M = \int dM ,$$

- (b) **momento estático respecto del eje E**

$$M_E = \int x dM ,$$

- (c) **momento de inercia respecto del eje E**

$$I_E = \int x^2 dM ,$$

- (d) **radio de giro respecto del eje $E = R$** , donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M} , \quad R > 0 ;$$

(e) **centroide de S** = (\bar{x}, \bar{y})

donde $\bar{x} = \frac{M_Y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_X}{M}$, siendo XY un sistema de coordenadas rectangulares en el plano de la lámina,

(f) **momento de inercia relativa al origen (o momento polar)**

$$I_0 = \int (x^2 + y^2) dM = I_X + I_Y$$

(g) si R es la región del plano acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces se cumple

$$M_X = \frac{1}{2} \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx \quad (1)$$

$$M_Y = \int_a^b x [y_2 - y_1] dx \quad (2)$$

$$I_X = \frac{1}{3} \int_a^b [y_2^3 - y_1^3] dx \quad (3)$$

$$I_Y = \int_a^b x^2 [y_2 - y_1] dx \quad (4)$$

Las fórmulas (1) y (2) se prueban en el problema 7, de la sección 1.8. La fórmula (3) se establece en el ejemplo 3 que sigue.

Ejemplo 1 Encontrar las coordenadas del centro de masa de la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y los ejes de coordenadas ($x \geq 0, y \geq 0$).

Solución Tenemos

$$y = f_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y = f_1(x) = 0.$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

tenemos $dM = y dx = -ab \sin^2 t dt$

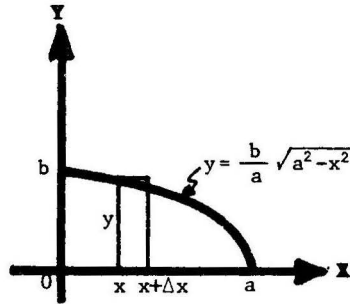
$$dM_x = \frac{1}{2} y^2 dx = -\frac{1}{2} ab^2 \sin^3 t dt$$

$$dM_y = xy dx = -a^2 b \sin^2 t \cos t dt,$$

e integrando respecto de t desde $\frac{\pi}{2}$ hasta 0 resulta

$$M = \frac{\pi ab}{4}, \quad M_x = \frac{ab^2}{3}, \quad M_y = \frac{a^2 b}{3}.$$

Luego $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}$



Ejemplo 2 Probar que los momentos estáticos y de inercia de un anillo circular plano de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) alrededor de un eje E perpendicular al plano del anillo y que pasa por el centro del mismo son dados por

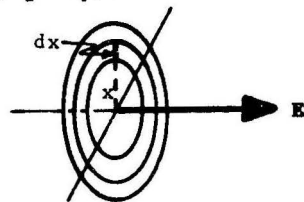
$$M_E = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \quad \text{y} \quad I_E = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Solución Para el anillo circular de radio x y espesor dx se tiene

$$dA = 2 \pi x dx,$$

$$dM_E = x dA = 2 \pi x^2 dx,$$

$$\text{y } dI_E = x^2 dA = 2 \pi x^3 dx.$$



Luego,
$$M_E = \int_{R_1}^{R_2} dM_E = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \quad \text{y} \quad I_E = \int_{R_1}^{R_2} dI_E = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Ejemplo 3 Probar que el momento de inercia respecto del eje X de una región R acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, y las curvas continuas

$$0 < y_1(x) < y_2(x), \quad \text{es} \quad I_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3) dx.$$

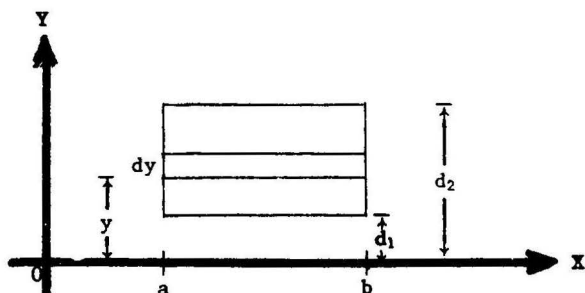
Solución

Caso 1: R es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

Sean $d_1 < d_2$ las distancias al eje X de los lados de R paralelos a este eje. Probaremos que

$$I_X = \frac{1}{3} (d_2^3 - d_1^3) \cdot B, \quad \text{donde } B = \text{base del rectángulo}$$

$$B = b - a.$$



El área del rectángulo elemental de la figura es $dA = (b-a)dy = B dy$ y por lo tanto

$$I_X = \int_{d_1}^{d_2} y^2 dA = B \int_{d_1}^{d_2} y^3 dy = \frac{B}{3} (d_2^3 - d_1^3).$$

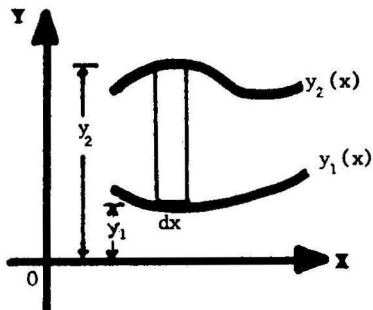
Caso 2: R es la región indicada en el enunciado del ejemplo.

Por el caso 1, el momento de inercia respecto del eje X del rectángulo elemental de la figura es

$$dI_X = \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx.$$

Luego

$$I_X = \int_a^b dI_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3) dx.$$



1.4 Caso IV: Superficies de Revolución Sea S una superficie obtenida por rotación alrededor del eje X de la curva

$$0 \leq y = y(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Se define

(1) **Area de S** = $2\pi \int_a^b y \, ds$;

(2) **Momento estático de S respecto del eje X**

$$M_X = 2\pi \int_a^b y^2 \, ds ,$$

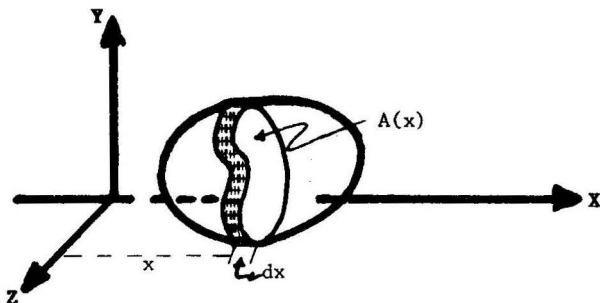
(3) **Momento de inercia de S respecto del eje X**

$$I_X = 2\pi \int_a^b y^3 \, ds ;$$

donde $ds =$ diferencial de longitud de arco = $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$.

1.5 Caso V: Sólidos

1.5.1 Sea S un sólido (o cuerpo) de densidad constante σ de masa por unidad de volumen en el espacio XYZ, comprendido entre los planos $x=a$ y $x=b$. Si $A(x)$ designa el área de la sección de S paralela al plano YZ en el punto x , $a \leq x \leq b$, entonces la masa del cilindro elemental de base $A(x)$ y altura dx es $dM = \sigma A(x) dx$. Se define



(a) masa de S

$$M = \int dM$$

(b) momento estático de S respecto del plano YZ.

$$M_{YZ} = \int x \, dM$$

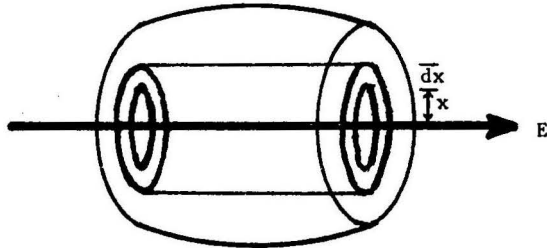
(c) centroide de S = $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\text{donde } \bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{XZ}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Nota

Si una figura geométrica (curva, área o volumen) es simétrica respecto de E (eje o plano) entonces su centroide se encuentra en E. (Ver problema 4, sección 1.8, problemas resueltos pág 320).

1.5.2 Sea S un sólido generado por rotación de una figura plana R alrededor de un eje E. Designemos con dM la masa de un tubo cilíndrico cuyo eje es E.



Se define

(a) momento de inercia de S respecto de E

$$I_E = \int x^2 \, dM$$

(b) radio de giro de S respecto de E = R, donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M}$$

$$R \geq 0,$$

siendo M = masa total de S.

1.5.3 Nota Cuando se trata de calcular los momentos estáticos o de inercia es conveniente descomponer la masa del cuerpo dado en elementos de masa para los cuales se conocen estos momentos y a continuación se integran dichos elementos.

Ejemplo 1 Sea R el sólido generado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por $x = a$, $x = b$, la curva $y = y(x) \geq 0$ y el eje X. Probar que los momentos estáticos y de inercia de R respecto del eje de revolución son dados por

$$M_X = \frac{2}{3} \pi \int_a^b y^3 dx \quad \text{y} \quad I_X = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4 dx .$$

Solución Consideremos un disco circular perpendicular al eje X de radio $y = y(x)$ y espesor dx . Aplicando las fórmulas derivadas en el ejemplo 2, 1.3, pág. 312, se tiene

$$dM_X = \frac{2}{3} \pi y^3 dx \quad \text{y} \quad dI_X = \frac{\pi}{2} y^4 dx .$$

Finalmente, integrando respecto de la variable x desde $x = a$ hasta $x = b$ se obtienen las fórmulas indicadas.

Ejemplo 2 Calcular el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo, respecto a su eje, si el radio de la base es r y altura h .

Solución Sea la densidad constante de masa por unidad de volumen. El momento de inercia del tubo cilíndrico generado por rotación del rectángulo elemental R alrededor del eje Y es

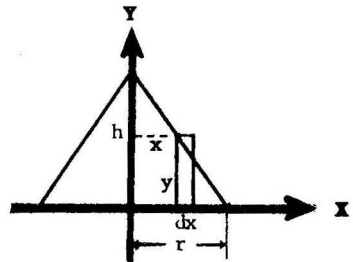
$$dI_Y = x^2 \cdot \text{masa} = x^2 \sigma (2\pi xy dx) \\ = 2 \pi \sigma x^3 y dx$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{y}{r-x} = \frac{h}{r} \quad \text{o} \quad y = \frac{h}{r}(r-x)$$

$$\text{Luego} \quad I_Y = \int_0^r 2 \pi \sigma x^3 \frac{h}{r}(r-x) dx = \frac{\pi h r^4 \sigma}{10} = \frac{3}{10} M r^2 ,$$

$$\text{donde} \quad M = \text{masa} = \sigma \frac{\pi r^2}{3} h .$$



1.6 TEOREMAS DE PAPPUS

TEOREMA 1

El área de la superficie obtenida al rotar un arco de una curva plana alrededor de un eje, que se encuentra en el plano de la curva, y que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masa - del arco de la curva

$$A = 2 \pi \bar{y} L$$

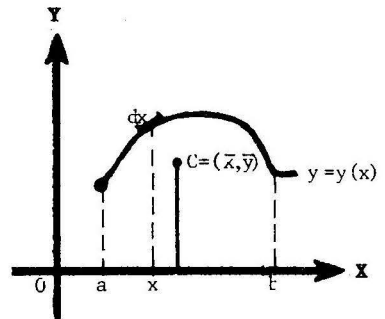
donde

L = longitud de la curva,

\bar{y} = distancia del centro de masa de la curva al eje,

A = área de la superficie generada por la curva.

En la figura se encuentra el arco de la curva $y = y(x) > 0$ entre $x = a$ y $x = b$; $C = (\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de masa, y se asume que la curva rota alrededor del eje X .



PRUEBA

Designemos con ds la diferencial de longitud de arco.

Tenemos

$$A = 2 \pi \int_a^b y \, ds \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b y \, ds}{L} \quad (2)$$

y substituyendo $\int_a^b y \, ds = \bar{y} L$ en (1) resulta

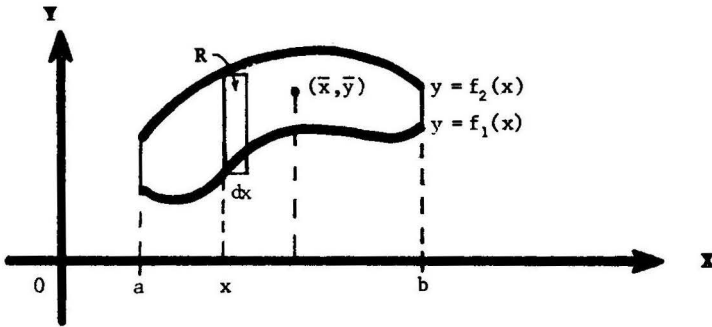
$$A = 2 \pi \bar{y} L .$$

TEOREMA 2

El volumen de un sólido obtenido al rotar una región del plano alrededor de un eje que se encuentra en el plano de la región y que no la corta, es igual al producto del área de la región por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masa de la región

$$V = 2 \pi \bar{y} A$$

donde A = área de la región,
 \bar{y} = distancia del centro de masa de la región al eje dado,
 V = volumen del sólido generado por la región.



En la figura se muestra una región contenida en el plano XY que rota alrededor del eje X y cuyo centroide es (\bar{x}, \bar{y}) .

PRUEBA

Vamos a suponer que la región dada está acotada por

- 1) las rectas $x = a, x = b, a < b$,
 - y 2) las curvas continuas $y = f_1(x), y = f_2(x)$,
- donde $0 < f_1(x) \leq f_2(x)$, en $a \leq x \leq b$.

Tenemos entonces

$$V = \pi \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx \tag{1}$$

$$y \quad \bar{y} A = M_X = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx \tag{2}$$

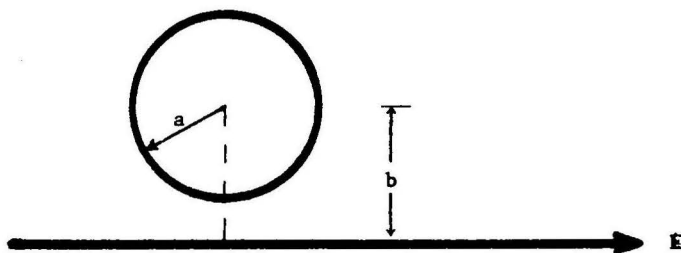
teniendo en cuenta (g), 1.3, pág 311.

Dividiendo miembro a miembro resulta

$$\frac{V}{\bar{y} A} = 2\pi \quad \text{o} \quad V = 2\pi \bar{y} A$$

Ejemplo

Encontrar el área de la superficie y el volumen de un toro obtenido por rotación de un círculo de radio a alrededor de un eje en el plano del círculo y a una distancia $b > a$ de su centro.

Solución

Consideremos un círculo como el que se muestra en la figura.

El centro de masa del círculo (y de la región acotada por el círculo) se encuentra a la distancia b del eje E .

Luego, por los teoremas 1 y 2 de Pappus, respectivamente, se tiene

$$A = 2 \pi b \cdot (\text{longitud de la curva})$$

$$= (2 \pi b)(2 \pi a)$$

$$= 4 \pi^2 ab$$

$$V = 2 \pi b \cdot (\text{área del círculo})$$

$$= (2 \pi b)(\pi a^2)$$

$$= 2 \pi^2 a^2 b .$$

1.7 TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

Sea un cuerpo con masa M y E un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo. Se cumple entonces

$$I_{E_1} = I_E + Ma^2,$$

donde E_1 es un eje paralelo al eje E ,
 a = distancia de E a E_1 ,
 I_E, I_{E_1} son los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes E y E_1 , respectivamente.

PRUEBA. Sea $x = \pm$ distancia del elemento de masa dM al eje E .

Entonces $x - a = \pm$ distancia de dM al eje E_1 ,

y
$$\bar{x} = \int x dM = 0, \quad \text{pues } E \text{ pasa por el centro de masa de } M.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_{E_1} &= \int (x-a)^2 dM = \int (x^2 - 2xa + a^2) dM \\ &= \int x^2 dM - 2a \int x dM + a^2 \int dM = I_E - 2a\bar{x} + a^2 M \\ &= I_E + Ma^2. \end{aligned}$$

1.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Un alambre tiene la forma de un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el primer cuadrante. Hallar su masa y su momento de inercia respecto de los ejes X e Y si la densidad ρ en el punto (x,y) es $(x+y)$.

SOLUCION Tenemos $x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad ds = r dt,$

$$\rho = x+y = r(\cos t + \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Tenemos } M = \int_0^{\pi/2} \rho ds = \int_0^{\pi/2} r(\cos t + \sin t)r dt = 2r^2$$

$$I_X = \int_0^{\pi/2} y^2 dM = \int_0^{\pi/2} (r^2 \sin^2 t)r(\cos t + \sin t)r dt$$

$$= r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t + \sin t) dt = r^4.$$

De igual modo $I_Y = r^4.$

PROBLEMA 2 Encontrar el centroide de un arco de la catenaria $y = 4 \cosh \frac{x}{4}$ desde $x = -4$ hasta $x = 4$.

SOLUCION

Tenemos $y' = \sinh \frac{x}{4}$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \cosh \frac{x}{4} dx$,

$$L = \text{longitud del arco indicado} = \int_{-4}^4 ds = 4 \sinh \frac{x}{4} \Big|_{-4}^4$$

$$= 4 [\sinh 1 - \sinh(-1)] = 8 \sinh 1,$$

ya que $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$.

$$M_X = \int_{-4}^4 y ds = 4 \int_{-4}^4 \cosh^2 \frac{x}{4} dx = 2 \int_{-4}^4 \left[\cosh \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right] dx$$

$$= 8 \sinh 2 + 16$$

$$M_Y = \int_{-4}^4 x ds = \int_{-4}^4 x \cosh \frac{x}{4} dx = 0$$

(integrando por partes y usando $\cosh(-x) = \cosh x$)

Luego $\bar{x} = \frac{M_Y}{L} = 0$,

$$\bar{y} = \frac{M_X}{L} = \frac{8 \sinh 2 + 16}{8 \sinh 1} = \frac{2 + \sinh 2}{\sinh 1}.$$

PROBLEMA 3 Calcular los momentos estáticos, respecto de los ejes X e Y, y las coordenadas del centro de masa del arco de la asteroide $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ que se encuentra en el primer cuadrante.

SOLUCION Por simetría $M_X = M_Y$, $\bar{x} = \bar{y}$, de manera que es suficiente calcular M_Y e \bar{y} .

Tenemos $y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx$,

$$L = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2} a, \quad M_Y = \int_0^a x dx = \int_0^a a^{1/3} x^{2/3} dx = \frac{3}{5} a^2,$$

$$\bar{y} = \frac{M_Y}{L} = \frac{2}{5} a.$$

Luego $M_X = M_Y = \frac{3}{5} a^2$, y $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5} a$.

PROBLEMA 4 Probar que si una figura plana (curva o área) es simétrica respecto de un eje E, entonces se cumple

- (1) $M_E =$ momento estático respecto de E = 0,
- (2) el centroide de la figura se encuentra en el eje E.

Nota La misma propiedad se cumple si un sólido es simétrico respecto de un plano E.

SOLUCION.

- (1) Sea $x = \pm$ distancia de un elemento de masa al eje E, $-a \leq x \leq a$,
y $\rho(x) =$ densidad lineal de masa respecto de la variable x .

Por simetría se tiene $\rho(-x) = \rho(x)$ y por lo tanto la función $f(x) = x\rho(x)$ es impar, esto es, $f(-x) = -f(x)$. Luego,

$$M_E = \int_{-a}^a x \rho(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = 0. \text{ (prob.10, pág.128)}$$

- (2) $\bar{x} = \frac{M_E}{M} = 0.$

PROBLEMA 5 Determinar las coordenadas del centro de masa de un arco completo de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= a(t - \text{sen } t) \\ y &= a(1 - \text{cos } t) \end{aligned}$$

SOLUCION Tenemos $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2a \text{sen } \frac{t}{2} dt$
(usando $2 \text{sen}^2 \frac{t}{2} = 1 - \text{cos } t$)

Luego $L = \int_0^{2\pi} ds = 8a,$

$$\begin{aligned} M_X &= \int_0^{2\pi} y ds = \int_0^{2\pi} a(1 - \text{cos } t) 2a \text{sen } \frac{t}{2} dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^3 \frac{t}{2} dt = \frac{32a^2}{3}, \end{aligned}$$

e $\bar{y} = \frac{M_X}{L} = \frac{4a}{3}.$

Puesto que el arco es simétrico respecto de la recta $x = a\pi$, la abscisa \bar{x} del centro de masa se encuentra en esta recta (ver problema 4).

Luego, $\bar{x} = a\pi.$

PROBLEMA 6 Determinar el centroide de la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION Puesto que la curva es simétrica respecto del eje X se cumple $\bar{y} = 0$.

Por otra parte,

$$dr = -a \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Luego

$$L = 2 \int_0^\pi x ds = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a,$$

$$\begin{aligned} M_Y &= 2 \int_0^\pi x ds = 2 \int_0^\pi (r \cos \theta) ds = 4a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi \left(2 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\quad \left(\text{usando } \cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 8a^2 \int_0^\pi \left(1 - 3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5} a^2, \end{aligned}$$

$$y \quad \bar{x} = \frac{M_Y}{L} = \frac{4}{5} a.$$

PROBLEMA 7 Probar que si R es la región del plano acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces

$$(1) \quad M_Y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$

$$(2) \quad M_X = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

SOLUCION

$$(1) \quad \text{Por definición} \quad M_Y = \int_a^b x dA, \quad \text{donde } dA \text{ es el área de}$$

un rectángulo elemental de lados paralelos al eje Y (franjas verticales, de altura $y_2 - y_1$ y base dx).

$$\text{Luego } dA = (y_2 - y_1) dx \quad y \quad M_Y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx.$$

(2) Tenemos $M_X = \int_a^b dM_X$, donde dM_X es el momento de un rectángulo elemental de lados paralelos al eje Y (franjas verticales), de altura $y_2 - y_1$ y base dx .

Por el problema 4, el centro de masa de tal rectángulo, por simetría, coincide con su centro geométrico y por lo tanto se encuentra a una distancia $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ del eje E. Luego

$$dM_X = ydA = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (y_2 - y_1) dx = \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{2} dx$$

$$y \quad M_X = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx .$$

PROBLEMA 8 Hallar el centroide del área acotada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION Los puntos de intersección de las curvas dadas se obtienen cuando $y = x^2 = \sqrt{x}$ o $x^4 = x$, esto es, cuando $x = 0, 1$.

Tenemos

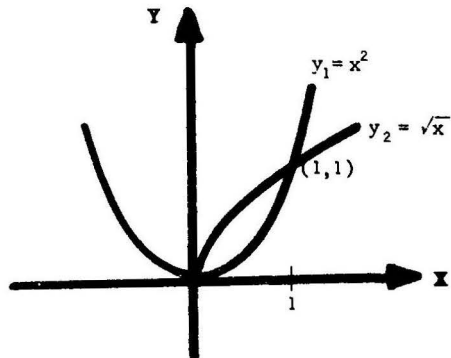
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3},$$

$$M_Y = \int_0^1 x [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{3}{20},$$

$$M_X = \int_0^1 \frac{1}{2} [y_2^2 - y_1^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{20} .$$

Luego, $\bar{x} = \frac{9}{20}$, $\bar{y} = \frac{9}{20}$.



Nota También puede calcularse M_X empleando rectángulos elementales horizontales:

$$M_X = \int_0^1 y(x_2 - x_1) dy, \quad \text{donde } x_1 = \sqrt{y}, \quad x_2 = y^2 .$$

PROBLEMA 9. (Teorema de Pappus). Sean R_1 y R_2 dos regiones disjuntas del plano con masas M_1 y M_2 y centroides (\bar{x}_1, \bar{y}_1) y (\bar{x}_2, \bar{y}_2) , respectivamente. Probar que el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la región R compuesta por las dos regiones R_1 y R_2 viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2}{M_1 + M_2}, \quad \bar{y} = \frac{M_1 \bar{y}_1 + M_2 \bar{y}_2}{M_1 + M_2}$$

SOLUCION. Tenemos

$$M = \text{masa de } R = M_1 + M_2$$

M_X = Momento estático de R respecto del eje X

$$\begin{aligned} &= \int x \, dm = \int x \, dM_1 + \int x \, dM_2 \quad (\text{pues las dos regiones } R_1 \\ &\quad \text{y } R_2 \text{ son disjuntas.}) \\ &= M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \bar{x} = \frac{M_X}{M} = \frac{M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2}{M_1 + M_2}.$$

En forma análoga se establece la otra fórmula.

PROBLEMA 10. Probar que el centroide de un triángulo coincide con el punto de intersección de las medianas.

SOLUCION. Bastará probar que el centroide de un triángulo de altura h se encuentra a una distancia $\frac{h}{3}$ medida desde la base.

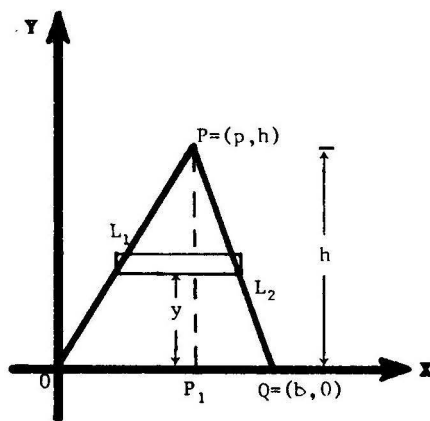
Dado el triángulo OPQ consideremos un sistema de coordenadas rectangulares como el que se muestra en la figura.

Debemos calcular

$$M_X = \int_0^h y(x_2 - x_1) \, dy.$$

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son respectivamente,

$$L_1: x_1 = \frac{p}{h} y, \quad L_2: x_2 = \frac{p-b}{h} y + b,$$



$$\text{y por lo tanto, } M_X = \int_0^h y \left(-\frac{b}{h} y + b\right) dy = \frac{bh^2}{6}. \text{ Así, } \bar{y} = \frac{M_X}{\text{Area}} = \frac{h}{3}.$$

OTRA SOLUCION. (Usando el Teorema 2 de Pappus). Si hacemos que el triángulo OPQ rote alrededor del eje, el volumen del sólido generado es

$$V = \text{Volumen generado por } OPP_1 + \text{Volumen generado por } PP_1Q$$

$$= \frac{1}{3} p (\pi h^2) + \frac{1}{3} (b-p) (\pi h^2) = \frac{1}{3} b \pi h^2 \quad (1)$$

Pero por el teorema de Pappus

$$V = 2\pi \bar{y} \cdot \text{Area de OPQ} = 2\pi \bar{y} \frac{bh}{2} = \pi \bar{y} bh \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\bar{y} = \frac{1}{3} h .$$

PROBLEMA 11. Encontrar el momento de inercia y el radio de giro respecto del eje X de la región acotada por la curva $y = x e^{-x}$ y el eje X en el primer cuadrante.

$$y = x e^{-x}$$

y el eje X en el primer cuadrante.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula $I_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3)$

dada en el ejemplo 2, 1.3, con $a=0$, $b=+\infty$, $y_2 = x e^{-x}$ y $y_1 = 0$.

Luego

$$I_X = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{27} (9x^3 + 9x^2 + 6x + 2) \Big|_0^{+\infty}$$

(integrando por partes)
(usando $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$)

$$= \frac{2}{27}$$

Por otra parte $A = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$

Luego,

$$R^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{2}{27} ,$$

de donde $R = \frac{\sqrt{6}}{9} .$

PROBLEMA 12 Probar que los momentos estáticos respecto de los ejes X e Y de una región R acotada por la curva $r = r(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, son dados por las fórmulas

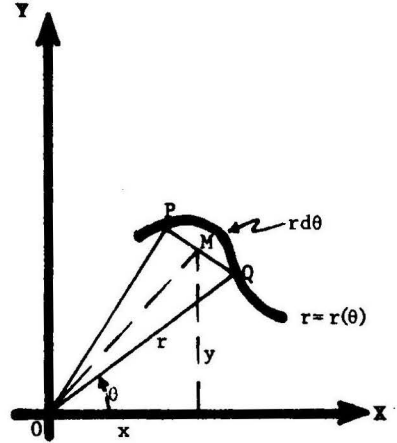
$$M_Y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta \quad \text{y} \quad M_X = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta \, d\theta.$$

SOLUCION Por el problema 10, el centro de masa $C = (\bar{x}, \bar{y})$ del triángulo elemental OPQ de la figura se encuentra en la mediana OM a $\frac{2}{3}$ de \overline{OM} del polo O. Luego $\bar{x} = \frac{2}{3}x$, $\bar{y} = \frac{2}{3}y$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } dM_X &= \bar{y} \cdot \text{Area de OPQ} = \frac{2}{3}y \cdot \frac{r^2 d\theta}{2} \\ &= \frac{2}{3}r \sin \theta \cdot \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{1}{3}r^3 \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

e integrando respecto de θ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ resulta

$$M_X = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta.$$



De igual manera se obtiene la fórmula correspondiente a M_Y .

PROBLEMA 13 Calcular el centroide del área encerrada por la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION Teniendo en cuenta que la región es simétrica respecto del eje X se obtiene $\bar{y} = 0$.

$$\text{Por otra parte} \quad dA = \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$dM_Y = \frac{1}{3} r^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{a^3}{3} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta,$$

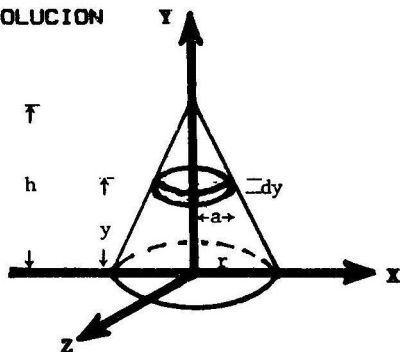
y por tanto

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

$$M_Y = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{4} \pi a^3. \quad \text{Así, } \bar{x} = \frac{M_Y}{A} = \frac{5}{6} a.$$

PROBLEMA 14 Hallar el centro de masa de un cono homogéneo circular recto de altura h y radio en la base r .

SOLUCION



Por simetría del centro de masa se encuentra en el eje Y . Luego $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$.

Calcularemos M_{XZ} = momento estático del cono respecto del plano XZ . El disco elemental de la figura (de bases paralelas al plano XZ) tiene volumen

$dV = \pi a^2 dy$, donde el radio a cumple por semejanza de triángulos la relación

$$a = \frac{r}{h}(h-y).$$

Así tenemos que

$$M_{XZ} = \int_0^h y dV = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y(h-y)^2 dy = \frac{\pi r^2 h^2}{12}$$

$$y \quad \bar{y} = \frac{M_{XZ}}{V} = \frac{h}{4}, \quad \text{ya que} \quad V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Por lo tanto el centroide del cono se encuentra en el eje del cono a $\frac{h}{4}$ unidades de distancia respecto de la base.

PROBLEMA 15

- (1) Probar que el momento de inercia de la región encerrada por un círculo de radio r alrededor de uno de sus diámetros es $I = \frac{\pi r^4}{4}$.
- (2) Encontrar el momento de inercia de un cono circular recto de altura h y radio r en la base respecto de un diámetro de su base.

SOLUCION

- (1) Podemos asumir que la ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = r^2$ y que el diámetro está contenido en el eje Y . Luego

$$I = I_Y = 2 \int_{-r}^r x^2 y dx = -2r^4 \int_{\pi}^0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

(haciendo $x = r \cos \theta$, $y = \sin \theta$)

$$= -\frac{1}{2} r^4 \int_{\pi}^0 \sin^2 2\theta d\theta = -\frac{r^4}{4} \int_{\pi}^0 (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{4}.$$

- (2) Consideremos un disco circular R de radio a y espesor dy con bases paralelas al plano XZ.

Por la parte 1, el momento de inercia de R respecto de uno de sus diámetros D' es aproximadamente igual a

$$\frac{\pi}{4} a^4 dy.$$

Luego, por el teorema de Steiner (1.7) su momento de inercia respecto del eje X será

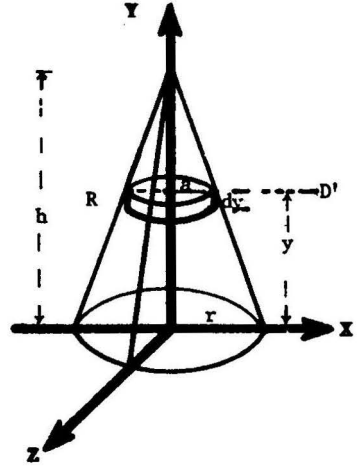
$$dI_X = \frac{\pi}{4} a^4 dy + (\text{volumen de R}) y^2 \\ = \left(\frac{\pi}{4} a^4 + \pi a^2 y^2 \right) dy \quad (\alpha)$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a}{r} = \frac{h-y}{h} \quad \text{o} \quad a = \frac{r}{h}(h-y) \quad (\beta)$$

Sustituyendo (β) en (α) e integrando respecto de la variable y desde $y=0$ hasta $y=h$ resulta

$$I_X = \int_0^h dI_X = \frac{\pi r^2 h}{60} (2h^2 + 3r^2).$$



PROBLEMA 16 Hallar el momento de inercia respecto del eje X de la superficie generada por rotación, alrededor del eje X, de un arco completo de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \text{cos } t)$.

SOLUCION El momento de inercia respecto del eje X de la superficie cilíndrica elemental de radio

$$y = a(1 - \text{cos } t) = 2a \text{sen}^2 \frac{t}{2} \quad \text{y altura} \quad ds = 2a \text{sen} \frac{t}{2} dt \quad \text{es}$$

$$dI_X = y^2 dA = y^2 (2\pi y ds) = 32\pi a^4 \text{sen}^7 \frac{t}{2} dt.$$

Integrando desde 0 hasta 2π resulta

$$I_X = \frac{2048}{35} \pi a^4.$$

PROBLEMA 17

Probar que el centro de masa de un hemisferio sólido de radio r se encuentra respecto de la base a la distancia

- (1) $\frac{3}{8} r$, si la masa es homogénea;
 (2) $\frac{8}{15} r$, si la densidad de cualquier punto P es proporcional a la distancia de P a la base del hemisferio.

SOLUCION

El volumen de un disco circular de espesor dx y radio $a = \sqrt{r^2 - x^2}$ con base paralela y a una distancia x de la base del hemisferio es

$$dV = \pi a^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx.$$

Por simetría, en ambos casos el centro de masa se encuentra en la perpendicular a la base levantada desde su centro.

- (1) **La masa es homogénea** En este caso $\rho = \text{densidad} = \text{cte.}$

$$y \quad M = \rho \int_0^r dV = \pi \rho \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2\pi r^3 \rho}{3},$$

$M_B =$ momento respecto al plano de la base del hemisferio

$$= \int_0^r x dM = \pi \rho \int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi r^4 \rho}{4}$$

Luego
$$\bar{x} = \frac{M_B}{M} = \frac{3r}{8} .$$

- (2) **La densidad $\rho(x)$ es proporcional a x** Sea $\rho(x) = Cx$ donde C es una constante de proporcionalidad. Entonces $dM = (x) dV$

$$dM = \rho(x) dV = c\pi x(r^2 - x^2) dx ,$$

$$M = C \pi \int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi r^4 C}{4}$$

$$M_B = \int_0^r x dM = C \pi \cdot \int_0^r x^2 (r^2 - x^2) dx = \frac{2\pi r^5}{15} C ,$$

$$\bar{x} = \frac{M_B}{M} = \frac{8}{15} r .$$

PROBLEMA 18 Encontrar el centroide de una cáscara hemisférica homogénea de radio interior R_1 y radio exterior R_2 .

SOLUCION El volumen de la cáscara es $V = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$, y el momento del hemisferio de radio R_1 respecto del plano de las bases es $M_1 = \frac{\pi R_1^4}{4}$ (por el problema 17 parte 1). Aplicando el teorema de Pappus (problema 9) se tiene $M_2 = \bar{x}V + M_1$,

$$\text{de donde } \bar{x} = \frac{M_2 - M_1}{V} = \frac{\frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)}{\frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Así el centroide de la cáscara se encuentra a \bar{x} de la base en la perpendicular que pasa por el centro de la base.

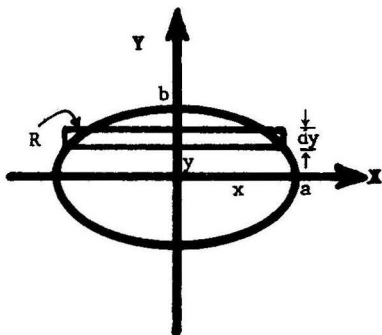
PROBLEMA 19 Calcular el momento de inercia con respecto al eje de revolución del sólido generado por rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje X.

SOLUCION El momento de inercia del tubo cilíndrico generado por rotación, alrededor del eje X, del rectángulo elemental R de la figura de base dy y altura 2x es

$$dI_X = y^2 dV = y^2 (2\pi y)(2x) dy = 4\pi y^3 x dy.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_X &= \int_0^b dI_X = 4\pi \int_0^b y^3 x dy \\ &= 4\pi ab^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^2 t dt \quad (\text{haciendo } x = a \cos t, y = b \sin t) \\ &= 4\pi ab^4 \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{8\pi ab^4}{15}. \end{aligned}$$



Nota. Si $a = b$, el sólido generado es una esfera de radio a y el momento de inercia es $I = \frac{8\pi a^5}{15} = \frac{2}{5} Va^2$, donde $V = \frac{4}{3} \pi a^3 =$ volumen de la esfera.

OTRA SOLUCION Empleando discos circulares al eje X, de espesor dx y radio y , se tiene, según la fórmula dada en el ejemplo 1, 1.5.3, que

$$I = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4 dx = \frac{\pi b^4}{2a^4} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{8\pi ab^4}{15}.$$

PROBLEMA 20 Calcular el momento de inercia de una superficie esférica de radio r respecto de un eje que pasa por el centro de la esfera encerrada por la superficie.

SOLUCION La superficie se obtiene por rotación, alrededor del eje X, del círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

Aplicamos la fórmula $I_X = 2\pi \int_a^b y^3 ds$ dada en (3), 1.4.

Tenemos $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $ds = r d\theta$, y por tanto

$$I_X = 2\pi \int_0^\pi r^4 \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} r^4.$$

1.9 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Encontrar el centroide del área acotada por las curvas $y = (x+1)^2$, $x+y = 5$, $y = 0$, $x = 2$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = \frac{39}{37}, \quad \bar{y} = \frac{281}{185}.$$

PROBLEMA 2 Calcular el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ de los centroides de las regiones acotadas por las curvas $y = x^n$, el eje X y $x = 1$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = 1, \quad \bar{y} = \frac{1}{4}.$$

PROBLEMA 3 Determinar el momento del volumen comprendido en un octante y la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, respecto al plano XY.

$$\text{Rpta } \frac{\pi abc^2}{16}.$$

PROBLEMA 4 Hallar el momento de inercia de un

- a) triángulo con base b y altura h alrededor de su base;
 b) rectángulo con lados a y b alrededor de su diagonal.

$$\text{Rpta } \text{ a) } \frac{bh^3}{12}; \quad \text{ b) } \frac{a^3 b^3}{6(a^2 + b^2)}.$$

PROBLEMA 5 Encontrar el centroide del sector hiperbólico acotado por la hipérbola equilátera $x = \frac{3}{2} \sec \theta$, $y = \frac{3}{2} \tan \theta$ y los radios vectores $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = \frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}, \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}.$$

2 APLICACIONES A PROBLEMAS DE FISICA

2.1 Camino Recorrido por un Punto

Definición La longitud del camino recorrido por un punto P en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, cuando éste se mueve a lo largo de una curva, se define por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

donde $v(t)$ = (valor absoluto de la) velocidad.

Ejemplo Encontrar el camino recorrido por un punto desde que se inicia el movimiento hasta el instante en que se detiene, si su velocidad de movimiento es

$$v(t) = t e^{-0.2t} \text{ mt/seg.}$$

Solución Puesto que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$, el punto se irá deteniendo cuando el tiempo crezca indefinidamente. Luego, integrando por partes se tiene

$$s = \int_0^{+\infty} t e^{-0.2t} dt = 25 \text{ mts.}$$

2.2 Trabajo realizado por una fuerza

Definición El trabajo realizado sobre un intervalo $[x_1, x_2]$ por una fuerza $F = f(x)$, que actúa en la dirección del eje X, se define por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Ejemplo. Calcular el trabajo que debe realizarse para bombear el agua de un tanque cilíndrico vertical de altura H y radio R en la base, por encima del tanque.

Solución. El peso del agua contenida en un disco cilíndrico de espesor dx y de base horizontal a una distancia x de la base del tanque es

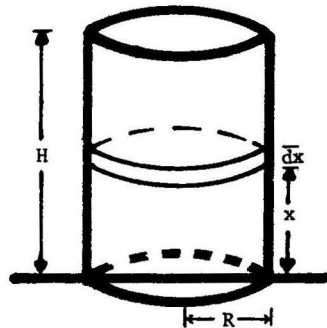
$$\rho \pi R^2 dx,$$

donde ρ = peso de una unidad de volumen de agua.

El trabajo requerido para levantar este disco desde x hasta H es

$$dW = (H-x) \rho \pi R^2 dx.$$

Luego,
$$W = \int_0^H dW = \rho \pi R^2 \int_0^H (H-x) dx = \frac{\rho \pi}{2} R^2 H^2.$$



2.3 Energía Cinética

Definición La energía cinética de un cuerpo se define mediante la fórmula

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

donde v es la velocidad de un elemento de masa dm .

Ejemplo Hallar la energía cinética de un disco de masa M y radio R cuando rota con velocidad angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro perpendicular al plano del disco.

Solución La energía cinética de un anillo circular de radio interior x y radio exterior $x+dx$ es $dK = \frac{1}{2} (\text{masa}) \cdot (\text{velocidad})^2 = \frac{\rho(2\pi x dx)}{2} (x\omega)^2$, donde $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ = densidad de masa por unidad de área. (Observemos que ca (Observemos que cada punto del anillo rota con igual velocidad $v = x\omega$).

Luego

$$K = \int_0^R dK = \pi \rho \omega^2 \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi \rho \omega^2 R^4}{4} = \frac{MR^2 \omega^2}{4} .$$

2.4 Presión de un líquido

Deseamos calcular la presión de un líquido sobre una pared ver tical.

Asumimos las siguientes hipótesis experimentales:

- 1) La fuerza de presión de un líquido sobre una superficie actúa normalmente a la superficie y su **valor por unidad de área a una profundidad x** de la superficie del líquido es igual a

$$p(x) = \gamma x$$

donde γ = peso de una unidad de volumen de líquido.

- 2) La fuerza de presión a una profundidad x es la misma en cada dirección.

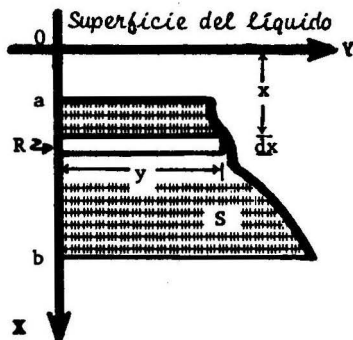
Sea S una superficie verti cal sumergida en un líquido como se muestra en la figura. Dividimos S en franjas horizontales elementales R de base y , altura dx y a la profundidad x .

De acuerdo a (1) la fuerza de presión del líquido sobre R es aproximadamente

$$\begin{aligned} dP &= p(x) \cdot \text{Area de } R \\ &= \gamma y x dx \end{aligned}$$

Luego, la fuerza de presión total del líquido sobre S es

$$P = \int_a^b dP = \gamma \int_a^b y x dx .$$



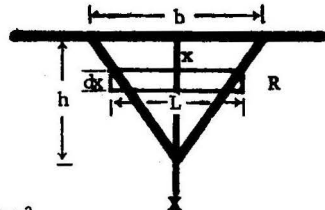
Ejemplo Hallar la fuerza de presión del agua sobre un triángulo vertical con base b y altura h sumergido con el vértice hacia abajo de manera que su base se encuentra en la superficie del agua.

Solución La presión del agua sobre el rectángulo elemental R de la figura de lados L y dx y a la profundidad x es $dP = \gamma x L dx$.

Por semejanza de triángulos $L = \frac{b}{h}(h-x)$

Luego

$$P = \int_0^h dP = \frac{\gamma b}{h} \int_0^h x(h-x) dx = \frac{\gamma b h^2}{6}, \text{ donde } \gamma = 1 \text{ para el agua.}$$



2.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Encontrar la altura alcanzada por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si su velocidad es dada por la fórmula

$$v = c \cdot \tan\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right),$$

siendo v_0 = velocidad inicial g = aceleración de la gravedad
 t = tiempo c = cte.

SOLUCION El cuerpo alcanza su máxima altura $h_{\text{máx}}$ cuando su velocidad es cero, esto es, en el instante t_1 tal que

$$-\frac{g}{c}t_1 + \arctan \frac{v_0}{c} = 0 \quad \text{o} \quad t_1 = \frac{c}{g} \arctan \frac{v_0}{c}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} h_{\text{máx}} &= \int_0^{t_1} v dt = c \int_0^{t_1} \tan\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right) dt \\ &= -\frac{c^2}{g} \ln \sec\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right) \Bigg|_0^{t_1} \\ &= \frac{c^2}{g} \ln \sec\left(\arctan \frac{v_0}{c}\right) = \frac{c^2}{g} \ln \frac{\sqrt{c^2 + v_0^2}}{c} \\ &= \frac{c^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba es dada por $v = v_0 - gt$, donde t = tiempo, g = aceleración de la gravedad y v_0 = velocidad inicial. Hallar

- 1) la altura s del cuerpo desde su posición inicial después de t segundos.
- 2) la altura máxima que alcanza el cuerpo.

SOLUCION

$$1) \quad s = \int_0^t v \, dt = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Big|_0^t = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

- 2) La altura máxima que el cuerpo alcanza se obtiene cuando $v = 0$, o sea en el instante t_1 tal que $v_0 - g t_1 = 0$, o $t_1 = \frac{v_0}{g}$.

$$\text{Luego, } s_{\text{máx}} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} .$$

PROBLEMA 3 Un punto sobre el eje X ejecuta oscilaciones armónicas simples alrededor del origen de coordenadas, con velocidad $v = v_0 \cos \omega t$, donde t = tiempo, y v_0 y ω son constantes.

- 1) Hallar la posición x del punto si cuando $t = 0$, $x_0 = 0$.
- 2) Encontrar el valor medio del valor absoluto de la velocidad del punto durante una oscilación.
- 3) Probar que el promedio de la energía cinética respecto del tiempo durante un múltiplo de un cuarto de período es igual a la mitad de la energía cinética máxima.

SOLUCION

$$1) \quad \text{Tenemos } x - x_0 = \int_0^t v \, dt = \frac{v_0}{\omega} \text{ sen } \omega t .$$

$$\text{Luego } x = \frac{v_0}{\omega} \text{ sen } \omega t .$$

2) El punto efectúa una oscilación completa en el tiempo

$T = \text{período} = \frac{2\pi}{\omega}$. Luego, el promedio del valor absoluto de la velocidad en este intervalo de tiempo es

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{T} \int_0^T |v| dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v_0 |\cos \omega t| dt \\ &= \frac{v_0}{\omega T} \int_0^{2\pi} |\cos s| ds \quad (\text{haciendo } s = \omega t) \\ &= \frac{4v_0}{\omega T} \int_0^{\pi/2} \cos s ds = \frac{4v_0}{\omega T} = \frac{2v_0}{\pi}. \end{aligned}$$

3) La energía cinética del punto en el instante t es

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Así, $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2} m v_0^2$. (1)

El promedio \bar{K} de la energía cinética durante el intervalo de tiempo $\left[0, n\frac{T}{4}\right]$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y n entero ≥ 1 , es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{n\frac{T}{4}} \int_0^{nT/4} \frac{mv_0^2}{2} dt = \frac{2mv_0^2}{nT} \int_0^{n\pi/4} \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{2mv_0^2}{\omega nT} \int_0^{n\pi/2} \cos^2 s ds. \quad (\text{haciendo } s = \omega t) \\ &= \frac{mv_0^2}{\omega nT} \cdot \frac{n\pi}{2} = \frac{mv_0^2}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2), resulta $\bar{K} = \frac{K_{\text{máx}}}{2}$.

PROBLEMA 4 ¿Qué trabajo debe hacerse para estirar un resorte desde 3 cms. hasta 5 cms. si con una fuerza de 1 Kg-f se estira en 1 cm? Se sabe, por la ley de Hook, que la fuerza F requerida para estirar un resorte es proporcional a la longitud x de éste.

SOLUCION Tenemos $F = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad. Haciendo $x = 0.01$ mts y $F = 1$ Kg-f = $k(0.01)$ mts. o

$$k = 100 \frac{\text{Kg-f}}{\text{mts}}.$$

Luego, el trabajo requerido es

$$W = \int_{0,03}^{0,05} 100 x^2 dx = 50 x^2 \Big|_{0,03}^{0,05} = 0.08 \text{ Kg-f. mts.}$$

PROBLEMA 5 Encontrar el trabajo requerido para bombear el agua que llena un recipiente hemisférico de radio R , por encima del recipiente.

SOLUCION El peso del disco circular de espesor dx y base paralela a la base del recipiente es

$$F = \rho(\pi r^2) dx,$$

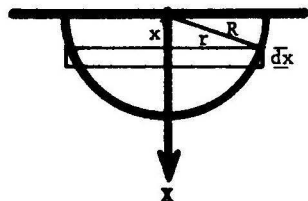
donde ρ = peso de una unidad de volumen de agua

$$\text{y } r^2 = R^2 - x^2.$$

El trabajo requerido para levantar este disco la altura x es por tanto

$$dW = F \cdot x = \rho \pi x(R^2 - x^2) dx.$$

$$\text{Así, } W = \rho \pi \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \frac{\rho \pi R^4}{4}.$$



PROBLEMA 6 Hallar la energía cinética de un cono circular recto de masa homogénea M que rota con velocidad angular constante ω alrededor de su eje. El radio de la base del cono es R y la altura es H .

SOLUCION Se sabe que la energía cinética es dada por $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, donde I es el momento de inercia del cono respecto de su eje (ver problema 9)

Por otra parte $I = \frac{3}{10} MR^2$ (ver ejemplo 2, sección 1.5, pág 316).

$$\text{Luego } K = \frac{3}{20} M^2 R^2 \omega^2.$$

PROBLEMA 7 ¿Qué trabajo debe hacerse para subir un cuerpo de masa m desde la superficie de la tierra (radio R) a una altura h ? ¿Cuál sería el trabajo requerido para llevar el cuerpo al infinito? (esto es, cuando $h \rightarrow +\infty$).

SOLUCION A la distancia x del centro de la tierra la fuerza de atracción sobre el cuerpo es $F = k \frac{Mm}{x^2}$.

Luego, el trabajo pedido se calcula según

$$W = \int_R^{R+h} F dx = k Mm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (1)$$

Puesto que para $x=R$ se tiene $F =$ peso del cuerpo $= gm = K \frac{Mm}{R^2}$,

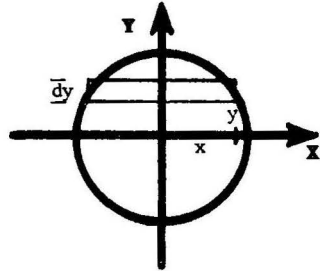
$$\text{obtenemos} \quad kMm = gmR^2, \quad (2)$$

y de (1) y (2), resulta $W = gmR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$, donde g es la aceleración de la gravedad.

Finalmente si $h \rightarrow +\infty$, se obtiene $W_\infty = gmR$.

PROBLEMA 8 ¿Qué trabajo debe hacerse para detener una esfera homogénea de radio R que rota con velocidad angular constante ω alrededor de su diámetro?

SOLUCION El trabajo requerido es igual a la energía cinética K de la esfera. El cilindro elemental generado por rotación alrededor del eje X del rectángulo de altura dy , y base $2x$ paralela al eje X tiene un volumen $(2x)(2\pi y)dy$ y su energía cinética es $dK = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{masa} \cdot (\text{velocidad})^2$
 $= 2\rho\pi\omega^2 x y^3 dy$, donde
 $\rho =$ densidad de masa por unidad de volumen



$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{Luego} \quad K = 2\pi\omega^2 \int_0^R x y^3 dy = \frac{4}{15} \rho \pi \omega^2 R^5 = \frac{MR^2 \omega^2}{5}$$

OTRA SOLUCION Usando la fórmula $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, del problema 9 que sigue.

Gracias a la nota dada en el problema 19 de la sección 1.8 de problemas resueltos, el momento de inercia de una esfera alrededor de un diámetro es igual a

$$I = \frac{2}{5} MR^2. \text{ Luego } I = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) \omega^2 = \frac{MR^2 \omega^2}{5}$$

PROBLEMA 9 Probar que si un cuerpo sólido rota con velocidad angular constante ω alrededor de un eje E, entonces se cumple

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

donde K = energía cinética del cuerpo,

I = momento de inercia del cuerpo respecto del eje E.

SOLUCION Por definición $dK = \frac{1}{2}(dM)v^2$, donde v es la velocidad de un elemento de masa dM , a una distancia x del eje E. Luego

$$v = x \omega y$$

$$y \quad K = \int dK = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \int x^2 dM = \frac{1}{2} \omega^2 I,$$

que era lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 10 Encontrar el trabajo que debe hacerse para extraer el agua contenida en un recipiente cónico recto invertido de radio r en la base y altura h .

SOLUCION El peso de un disco cilíndrico elemental de base paralela a la base del cono, y a la distancia x de la base del cono, es

$$\rho \pi a^2 dx ,$$

donde a y dx designan el radio y altura del disco, respectivamente.

Por semejanza de triángulos $\frac{a}{r} = \frac{h-x}{h}$. Luego el trabajo requerido para levantar el disco es

$$dW = x(\rho \pi a^2 dx) = \frac{\pi a^2 r^2 \rho}{h^2} x (h-x)^2 dx, \text{ y por tanto}$$

$$W = \int_0^h dW = \frac{\pi a^2 r^2}{h^2} \rho \int_0^h x (h-x)^2 dx$$

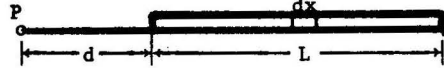
$$= \frac{\pi a^2 h^2 r^2}{12} \rho .$$

PROBLEMA 11 Encontrar la fuerza de atracción de una barra delgada homogénea de longitud L y masa M sobre un punto P de masa m situado en la recta de la barra y a una distancia d de uno de sus extremos.

SOLUCION Sea $\rho = \frac{M}{L}$ = densidad de masa por unidad de longitud.

La fuerza de atracción del elemento de la barra de masa ρdx a la distancia x de P es

$dF = \frac{km\rho dx}{x^2}$, donde k es una constante.



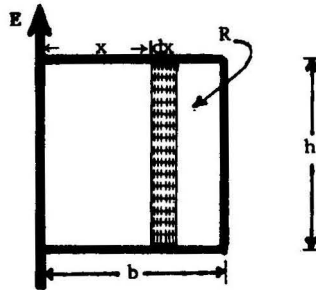
Luego,
$$F = \int_d^{d+L} dF = km\rho \int_d^{d+L} \frac{dx}{x^2} = km\rho \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right) = k \frac{mM}{d(d+L)}.$$

PROBLEMA 12 El viento ejerce una presión uniforme p gr-f/cm² sobre una puerta de altura h cm y ancho b cm. Calcular el momento de la fuerza de presión con que el viento tiende a girar la puerta alrededor de uno de sus lados verticales.

SOLUCION Consideremos un rectángulo elemental R vertical de altura h y base dx . La fuerza con que el viento actúa sobre R es $p \cdot \text{área de } R = ph dx$ y el momento de esta fuerza alrededor del eje E es $xph dx$.

Luego, el momento total será

$$M_E = \int_0^b xph dx = \frac{phb}{2} \text{ gr-f.cm}$$



PROBLEMA 13 Un cable homogéneo de L metros de profundidad pesa ρ Kg-f por metro y tiene atado en su extremo inferior un peso de P Kg-f. ¿Qué trabajo total debe hacerse para subir el cable con el peso hasta la posición del extremo superior?

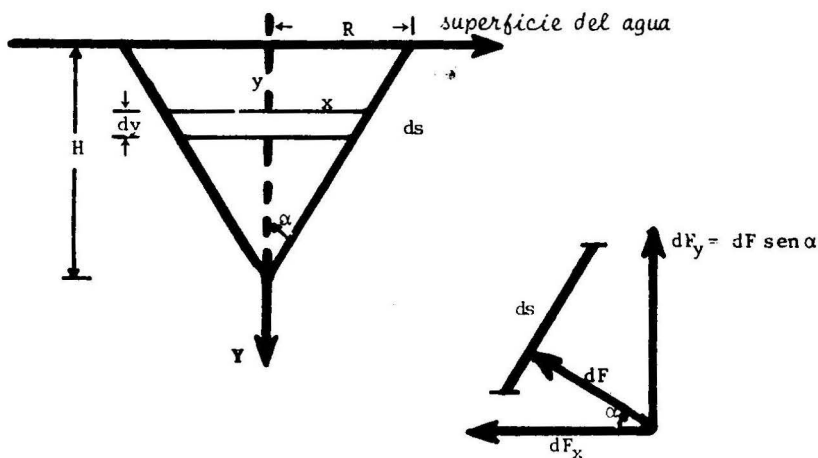
SOLUCION El trabajo de una porción de cable a una distancia x del extremo superior de longitud dx es $dW = x\rho dx$, siendo ρdx el peso del elemento de cable. Luego, el trabajo para levantar el cable es

$$W = \int_0^L x\rho dx = \rho \frac{L^2}{2}.$$

Finalmente el trabajo total requerido es $W_T = W + PL = \frac{L}{2}(\rho L + 2P)$.

PROBLEMA 14 Calcular la presión del agua sobre un cono circular vertical con radio R y altura H , sumergido en agua con su vértice hacia abajo de tal manera que su base se encuentra en la superficie del líquido.

SOLUCION La fuerza de presión del agua actúa normalmente a la superficie del cono, y su valor para una porción de superficie comprendida entre dos discos paralelos a la base del cono y a las distancias y , $y+dy$, respectivamente, es $dF = p \cdot \text{área} = \rho y (2\pi x ds)$, donde $\rho = 1$, x = radio del disco y ds = longitud de una arista entre dos discos.



Tenemos $x = (H-y)\tan \alpha$, $\alpha = \angle$ (eje Y y una arista),

$$ds = \sec \alpha dy .$$

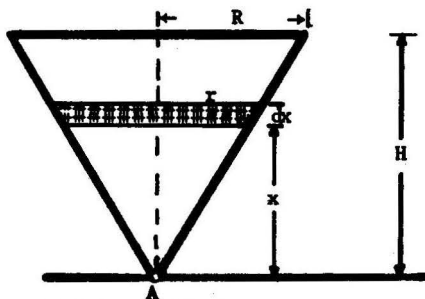
Luego $dF = 2\pi \tan \alpha \cdot \sec \alpha y(H-y)dy$.

La componente horizontal de la fuerza de presión es nula por simetría. La componente vertical está dirigida hacia arriba y vale

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^H \text{sen } \alpha dF = 2\pi \tan^2 \alpha \int_0^H y(H-y)dy = 2\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{H^3}{6} \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{H^3}{6} = \frac{\pi R^2 H}{3} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 15 Un recipiente lleno de agua tiene la forma de un cono invertido recto circular de radio R en la base y altura H . Encontrar el tiempo que se requiere para vaciar el recipiente a través de un orificio de área A en el vértice.

SOLUCION



Se sabe que la velocidad de salida del agua es igual a la velocidad de un cuerpo en caída libre desde una altura x igual a la profundidad del agua. Así, la velocidad de salida es $v = \sqrt{2gx}$, donde g es la aceleración de la gravedad, y el volumen de agua que sale por el orificio durante un incremento de tiempo dt es

$$Q = Av dt = A\sqrt{2gx} dt \quad (1)$$

Este volumen puede ser calculado de otra manera. En efecto, si en el mismo intervalo de tiempo dt el nivel del agua ha descendido en una altura dx , el volumen perdido es igual a

$$Q = \text{volumen de un cilindro circular de radio } r \text{ y espesor } dx \\ = \pi r^2 dx,$$

donde, por semejanza de triángulos, $r = \frac{R}{H} x$.

Luego

$$Q = \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 dx. \quad (2)$$

Usando (1) y (2) resulta

$$dt = \frac{\pi R^2 x^2 dx}{AH^2 \sqrt{2gx}}$$

e integrando respecto de la variable x desde 0 hasta H se obtiene

$$t = \int_0^H dt = \frac{2\pi R^2}{5A} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

PROBLEMA 16 Una cisterna hemisférica de radio R está llena de agua. Dos hombres A y B deben vaciar el contenido de la cisterna de manera que cada uno haga la mitad del trabajo requerido. Si A empieza primero, ¿cuál será la profundidad h del agua cuando A ha terminado su trabajo?

SOLUCION

Por el problema 5, el trabajo requerido para levantar un disco desde la distancia x de la base del hemisferio es

$$dW = \rho \pi x(R^2 - x^2) dx,$$

y el trabajo total es $W = \frac{\rho \pi R^2}{4}$.

Buscamos h tal

$$\frac{W}{2} = \int_0^{R-h} dW.$$

Cancelando el factor $\rho \pi$ e integrando resulta la ecuación

$$2(R-h)^4 - 4(R-h)^2 R^2 + R^4 = 0$$

que resuelta para $(R-h)^2$ da $(R-h)^2 = R^2 \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right)$

Puesto que $(R-h) \leq R$, debemos descartar el signo +.

Luego

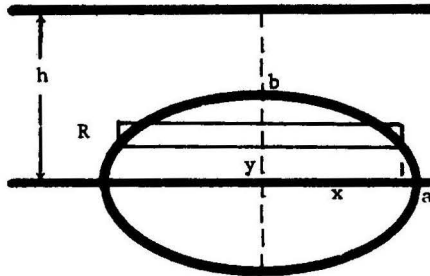
$$h = R \pm R \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

y por tanto

$$h = R \left(1 - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \right)$$

PROBLEMA 17 Una superficie tiene la forma de una elipse de semiejes a y b . Se sumerge verticalmente en un líquido con su eje mayor paralelo a la superficie del líquido hasta que el centro de la elipse se encuentra a una profundidad h . ¿Cuál es la presión del líquido sobre la superficie?

SOLUCION



La presión del líquido sobre un rectángulo elemental R , en la elipse, de lados x , dy , es igual a

$$dF = \rho(h-y)2x \, dy .$$

Luego,

$$\begin{aligned} F &= \int_{-b}^b dF = 2\rho \int_{-b}^b (h-y)x \, dy \\ &= 2\rho ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (h-b \operatorname{sen} t) \cos^2 t \, dt \\ &\quad \text{(haciendo } x = a \operatorname{cost} t, \, y = b \operatorname{sen} t \text{)} \\ &= \rho \pi a b h . \end{aligned}$$

INDICE ALFABETICO

A

- Antiderivada de una función, 5
- Area bajo una curva: coordenadas rectangulares, 254
- Area de figuras planas:
 - Coordenadas polares, 268, 269
 - Coordenadas rectangulares, 253
 - Forma paramétrica, 265
- Area de una superficie de revolución:
 - Coordenadas polares, 314
 - Coordenadas rectangulares, 312
 - Ecuaciones paramétricas, 313
- Area entre dos curvas, 99

C

- Cálculo de integrales definidas por sustitución o cambio de variables, 129
- Centro de masa, 326, 327, 330, 334
- Centroide, 328
- Coordenadas polares, 268
- Criterio de convergencia cuando un límite de integración es infinito, 151
- Criterios de:
 - Comparación de integrales impropias, 149
 - Convergencia de integrales de funciones discontinuas, 150

E

- Energía cinética, 353

F

- Fórmula del cambio de variable, 56
- Fórmulas de reducción, 246
- Función:
 - Beta, 152
 - Gamma, 153
 - Integrando, 9, 96
 - Racional, 169
- Funciones hiperbólicas, 13, 237

I

- Integración de funciones:
 - Hiperbólicas, 237
 - Irracionales, 195
- Integración de funciones racionales:
 - Método de fracciones parciales, 172
 - Método de Hermite, 177, 180
- Integración de funciones trigonométricas, 213
- Integración por partes, 53
- Integración por partes de integrales definidas, 128
- Integral convergente, 145
- Integral definida: definición, 6
- Integral divergente, 145
- Integral indefinida, 96
- Integrales impropias, 145

L

Límites de integración, 96
Longitud de arco de una curva plana:
 Coordenadas polares, 283
 Coordenadas rectangulares, 279
 Ecuaciones paramétricas, 282
Longitud de un camino, 352

M

Masa, 325, 327, 329, 333
Momento:
 de inercia, 325, 327, 329, 333, 334
 estático, 325, 327, 329, 333, 334
 polar, 330

P

Presión de un líquido, 354
Propiedades de la integral definida, 106

R

Radio de giro, 326, 327, 329, 334

S

Sumas de integral, 94
Sustituciones trigonométricas, 59

T

Teorema de:
 la diferencia constante, 5
 la función constante, 3
 Steiner o de los ejes paralelos, 339
Teorema del:
 valor medio, 3
 valor medio para integrales, 137
Teorema fundamental del cálculo, 113, 115
Teoremas de Pappus, 336, 337, 344
Trabajo realizado por una fuerza, 353
Transformada de Laplace, 154

V

Valor promedio de una función, 137
Volumen de un sólido de revolución:
 Coordenadas polares, 301
 Método del anillo circular, 298
 Método del disco circular, 296
 Método del tubo cilíndrico, 299
Volumen de un sólido: Área seccional, 293

Cálculo integral de Maynard Kong
se terminó de imprimir el mes de marzo del 2004
en los talleres de Servicio Copias Gráficas S.A.
(R.U.C. 20100699126), Jr. Jorge Chávez 1059,
Telf. 424-9693, Lima 5, Perú. La edición estuvo al
cuidado de Miguel Angel Rodríguez Rea.
Se hicieron quinientos ejemplares

**BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DEL FONDO EDITORIAL DE LA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU**

MARCIAL RUBIO CORREA

El sistema jurídico (Introducción al Derecho). 4a. ed. (Colección de Textos Jurídicos, 1).

HUGO MEDINA GUZMAN

Física básica; teoría y problemas. (Agotado).

CARLOS BLANCAS y MARCIAL RUBIO CORREA

Derecho constitucional general. 2a. (Colección de Textos Jurídicos, 2).

MAYNARD KONG

Basic

Lenguaje de programación Pascal. 3a. ed.

Lenguaje de programación C

Lenguaje ensamblador Macro Assembler

Cálculo diferencial

Cálculo integral

ISBN 9972-42-195-3



9 789972 421952