CAPÍTULO 2
CRECIMIENTO ECONÓMICO Y EMPLEO: KEYNESIANOS Y NEOCLÁSICOS

En general los modelos de crecimiento parten del supuesto de que tanto en el corto plazo como en el largo plazo, debe mantenerse la igualdad ahorro (S) inversión (I). Es decir, en términos estáticos y dinámicos, en su senda de crecimiento, las economías deben cumplir con la siguiente condición de equilibrio:

$$S = I$$

Donde el ahorro depende del producto y de la propensión marginal a ahorrar s, donde $0 < s < 1$. Es decir, la economía ahorra una proporción s de su ingreso:

$$S = sY$$

Asimismo, la inversión bruta (I) se define como la inversión necesaria para incrementar el *stock* de capital (K) y reponer la depreciación del mismo (δK). Por su parte, la inversión neta es igual al incremento en el *stock* de capital, el cual, en tiempo continuo, se expresa como dk. En otras palabras, la inversión neta equivalente a la inversión bruta menos la depreciación del capital:

$$I = dK + \delta K \quad \text{Inversión bruta}$$

$$dK = I - \delta K \quad \text{Inversión neta}$$

Reemplazando la condición de equilibrio ahorro–inversión en la ecuación de la inversión neta, se obtiene:

$$dK = sY - \delta K$$

Dividiendo entre K:

$$\frac{dK}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$$

Si definimos la relación capital–producto como:

$$v = \frac{K}{Y}$$

Entonces, la variación del *stock* de capital puede ser expresada de la siguiente forma:

(1) $\dfrac{dK}{K} = \dfrac{s}{v} \quad \delta$

Es decir, la tasa de crecimiento del capital dependerá de la propensión marginal a ahorrar (s), de la relación capital–producto (v) y de la tasa de depreciación (δ), si la hubiera. Para que haya crecimiento debe cumplirse que la ecuación (1) sea mayor que cero, es decir:

$$\frac{dK}{K} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{s}{v} > \delta$$

La tasa de crecimiento del ratio capital–trabajo, o capital per cápita, es igual a la tasa de crecimiento del capital menos la tasa a la que crece la fuerza laboral (L):

(2) $\dfrac{dK}{K} - \dfrac{dL}{L} = \left(\dfrac{s}{v} - \delta\right) - n$

Donde n es la tasa de crecimiento de la población, igual a la fuerza laboral. Del mismo modo, para que haya crecimiento en el ratio capital–trabajo (K/L), la ecuación (2) debe tener signo positivo, lo cual implica que:

$$\frac{dK}{K} - \frac{dL}{L} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{s}{v} - \delta > n$$

Generalmente, δ y n son variables determinadas de manera exógena. Por otra parte, de acuerdo con el comportamiento de los parámetros v y s, los modelos de crecimiento económico pueden clasificarse en ciertos tipos:

- En cuanto a la propensión marginal a ahorrar (s), algunos modelos consideran la tasa de ahorro como un parámetro determinado exógenamente al modelo, mientras que otros incluyen las decisiones de los consumidores para determinar la tasa de ahorro de la economía de manera endógena. Dentro de los modelos que consideran la propensión a ahorrar exógena se encuentran los modelos keynesianos de Harrod y Domar y los modelos neoclásicos de Solow y de Uzawa. En el grupo de modelos con optimización del consumo tenemos los modelos neoclásicos de Ramsey, Cass y Koopmans y el modelo de generaciones de Diamond. Hay también modelos keynesianos, como los de Kaldor y

Pasinetti, que hacen depender la propensión a ahorrar de los cambios en la distribución del ingreso.

- Acerca de la relación capital–producto (v), los modelos pueden mantener dicha relación constante, o permitir que esta varíe hasta que la economía llegue a su estado estacionario. Un ejemplo del primer tipo son los modelos keynesianos de Harrod y Domar, los cuales utilizan una función de producción de coeficientes fijos. Los modelos de crecimiento endógeno, como el modelo de Rebelo, también forman parte de este grupo. Estos modelos presentan una función de tecnología *AK* con coeficientes constantes. Por otro lado, los modelos neoclásicos, como el de Solow, dejan que la relación capital–producto sea variable, al permitir la sustitución de factores productivos hasta llegar al estado estacionario.

Cuadro 2.1
Clasificación de los modelos de crecimiento

	Tasa de ahorro exógena	**Tasa de ahorro endógena**
Relación capital–producto constante	Harrod y Domar Rebelo (modelo *AK*)	Kaldor y Pasinetti
Relación capital–producto variable	Solow Swan Uzawa (dos sectores)	Ramsey, Cass y Koopmans Diamond

El cuadro 2.1 muestra la clasificación de los modelos de acuerdo con las características de los parámetros. En este capítulo veremos en primer lugar, modelos con ahorro exógeno. Primero estudiaremos los modelos keynesianos de Harrod y Domar y luego los modelos neoclásicos de Solow y Uzawa (dos sectores). Finalmente veremos los modelos con optimización de consumo. Los modelos de Kaldor y Pasinetti serán tratados en el cuarto capítulo, y los modelos de crecimiento endógeno en el capítulo 5.

1. Modelos con tasa de ahorro exógena

En esta sección se presentan los modelos que toman la tasa de ahorro, conocida también como la propensión a ahorrar, como un parámetro determinado de manera exógena al modelo. Dentro de estos modelos se encuentran los modelos keynesianos de Harrod y Domar y los modelos neoclásicos de Solow y Uzawa (modelo de dos sectores). Cabe resaltar que la principal diferencia metodológica entre los modelos neoclásicos y keynesianos radica en la función de producción utilizada. De este modo, mientras los keynesianos utilizan una función de coeficientes fijos, los neoclásicos utilizan una función de producción con sustitución de factores y rendimientos marginales decrecientes. Esta diferencia en la función de producción se traduce en un ratio capital–producto, v, constante en el caso de los modelos keynesianos, a diferencia de los neoclásicos que permiten que el ratio capital producto varíe en el tránsito hacia el estado estacionario.

Asimismo, los resultados a los que llega cada teoría son distintos. Por un lado, tanto la teoría keynesiana como la neoclásica coinciden en señalar que la acumulación del capital, y por tanto el proceso de crecimiento de la economía, está regulada por la rentabilidad. Sin embargo, los keynesianos señalan que el proceso de acumulación y crecimiento dirigido por la rentabilidad lleva a la economía a una situación de inestabilidad debido a las persistentes diferencias entre la utilización de la capacidad efectiva y la utilización de la capacidad deseada por los inversionistas. Es decir, la inconsistencia entre las expectativas de los inversionistas y el crecimiento efectivo genera situaciones de crecimiento con desempleo permanente o inflación prolongada. Por su parte, los neoclásicos señalan que no existe tal inestabilidad, pues el proceso de acumulación solo es sostenible si las expectativas de inversión son correctas en el largo plazo (Shaikh 2007: 1). Los neoclásicos critican el supuesto de coeficientes fijos y aseguran que si se deja que el ratio capital–producto varíe, entonces puede garantizarse el crecimiento con pleno empleo.

Modelos de crecimiento keynesianos: Harrod y Domar

El modelo de Roy Harrod, publicado en su trabajo «An Essay in Dynamic Theory» de 1939, es una extensión del análisis del equilibrio estático de la *Teoría general* de Keynes. De acuerdo con este modelo, la condición para el equilibrio estático es que los planes de inversión deben ser iguales a los planes de ahorro. De este modo, el modelo introduce una función de inversión que depende de las expectativas de los capitalistas respecto al uso de la capacidad productiva o al nivel de utilización de esta capacidad. En este sentido la relación capital–producto o producto–capital está dada por las expectativas de los capitalistas.

La pregunta que se plantea Harrod es cuál debe ser la tasa de crecimiento del producto para que la condición de equilibrio establecida por la igualdad ahorro–inversión se cumpla a través del tiempo en una economía en crecimiento.

Harrod introduce tres conceptos distintos de tasas de crecimiento:

- Tasa de crecimiento observada o efectiva (g)
- Tasa de crecimiento garantizada (g_w)

- Tasa de crecimiento natural (g_n)

La primera no asegura un equilibrio con un nivel de inversión suficiente para igualar el ahorro planeado. Por otro lado, la tasa garantizada es la tasa de crecimiento requerida para que se igualen los planes de inversión con los planes de ahorro, de modo que la economía permanezca en una senda de crecimiento en la cual se cumplen las expectativas de los inversionistas. De esta forma, si la economía crece a la tasa garantizada se mantendría el pleno empleo del capital. Sin embargo, esta tasa no asegura la plena utilización del trabajo, que depende de la tasa de crecimiento natural, la misma que es igual a la suma de las tasas de crecimiento de la fuerza de trabajo y crecimiento de la productividad.

El propósito del modelo de Harrod es revelar las condiciones necesarias para el equilibrio entre el ahorro agregado y la inversión agregada en una economía en crecimiento, considerando a la inversión en su doble papel: como determinante de la utilización corriente de la capacidad productiva y como factor que crea capacidad de producción. La hipótesis fundamental detrás del modelo sostiene que los capitalistas tienen un *stock* de capital deseado en relación a la demanda de sus mercancías, o en otras palabras, tienen una tasa deseada de utilización de su *stock* de capital. Si su *stock* es sobre utilizado, los inversionistas desearán invertir más, buscando lograr el nivel deseado del *stock* de capital; pero si es subutilizado disminuirán sus inversiones. Por lo tanto, cuando hay plena utilización del capital, no hay sobreproducción ni subproducción, por ende los productores desean hacer inversiones en el futuro a la misma tasa que en el pasado.

El modelo de Harrod

Se asume una función de producción de coeficientes fijos de la forma:

$$(1)\quad Y = \frac{K}{v}$$

La inversa del parámetro v representa una relación producto–capital constante. Además, se define el coeficiente capital–producto deseado por los inversionistas (es decir, aquel que concuerda con sus expectativas) como:

$$(2)\quad v_d = \left(\frac{K}{Y}\right)_d$$

En una versión en tiempo continuo del modelo, la variación del producto y del capital se expresa respectivamente como dY y dK. En la función de producción de coeficientes fijos $Y = \min[(K / v), (L / u)]$, si K o L son superiores a los necesarios para producir Y, el exceso en cada caso permanecerá ocioso. Del mismo modo, dado que el coeficiente capital–producto deseado es constante, tenemos:

(3) $\frac{dK}{K} = \frac{dY}{Y}$

Definimos además la función de inversión, ahorro y la condición de equilibrio:

(4) $I = dK + \delta K$ Función de inversión bruta

Nótese que la ecuación (4) también puede expresarse como:

(5) $I = v_d \, dY + \delta K$

Pues,

(6) $dK = v_d \, dY$

(7) $S = sY$ Función ahorro

Donde δ es la tasa a la que se deprecia el capital y s es la propensión marginal a ahorrar.

(8) $I = S$ Condición de equilibrio

Reemplazando en la condición de equilibrio se obtiene que:

$$sY = v_d dY + \delta K$$

$$s = \frac{v_d dY + \delta K}{Y}$$

$$s = v_d \frac{dY}{Y} + \delta v_d$$

$$\frac{s}{v_d} = \frac{dY}{Y} + \delta$$

Por lo tanto, la tasa garantizada de crecimiento será:

(9) $g_w = \frac{dY}{\mathrm{Y}} = \frac{s}{v_d} - \delta$ Tasa garantizada de crecimiento

Esta es la ecuación fundamental del modelo. La tasa garantizada de crecimiento es la que mantiene el pleno empleo del capital (no hay sobreproducción ni subproducción). La tasa de crecimiento garantizada o deseada indica que, en el estado estacionario (*steady state* en inglés), Y y K deben crecer a la misma tasa. El equilibrio macroeconómico implica que la tasa de crecimiento efectiva del producto (g) sea igual a la tasa de crecimiento deseada del producto (g_w).

Asimismo, para determinar la tasa de crecimiento efectiva (g), definimos el coeficiente técnico determinado por las características de la función de producción:

(10) $v = \frac{K}{Y}$ Coeficiente capital–producto efectivo

En consecuencia, la tasa efectiva de crecimiento será:

(11) $g = \frac{dY}{Y} = \frac{s}{v} - \delta$ Tasa de crecimiento efectiva

Esta ecuación expresa la igualdad *expost* entre el ahorro y la inversión en las cuentas nacionales. En otras palabras, señala que la tasa de crecimiento de un país es por definición igual a su ratio de ahorro dividido por el ratio de nueva inversión (incluyendo la inversión en inventarios) descontando la depreciación del capital.

Asimismo, la tasa natural de crecimiento es definida por:

(12) $g_n = n + \rho$

Donde n es la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo y ρ es la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo, determinada por el progreso técnico. Esta es la máxima tasa de crecimiento alcanzable o la tasa de crecimiento que Harrod denominaba socialmente óptima.

La tasa de crecimiento natural puede entenderse también como la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo en unidades de eficiencia. Tiene dos componentes: el crecimiento de la fuerza de trabajo (n) y el crecimiento de la productividad del trabajo (ρ). La suma de estas dos, nos da la tasa de crecimiento natural (g_n):

(13) $\frac{d(EL)}{EL} = \frac{d(L)}{L} + \frac{d(E)}{E} = n + \rho$

Si todo el trabajo fuera empleado, la tasa de crecimiento observada (g) sería igual a la tasa de crecimiento natural (g_n). Si la primera fuera menor, aumentaría el desempleo estructural. La tasa de crecimiento natural es exógena al modelo. Esta tasa es una restricción al equilibrio: la tasa efectiva de crecimiento no puede ser superior a la tasa de crecimiento natural, debido al carácter fijo del coeficiente de utilización de la mano de obra (principio de complementariedad de los factores de producción).

Relación entre la tasa de crecimiento natural y garantizada en países desarrollados y países subdesarrollados

En los países desarrollados, la tasa garantizada es mayor que la tasa natural, debido a las bajas tasas de natalidad en dichos países. Esto implica que no hay inversión suficiente para igualar los planes de ahorro. Esta situación puede desencadenar un estancamiento en la economía. A pesar de que Keynes no utilizara los términos «tasa natural y tasa garantizada» identificó este desequilibrio en 1937, antes de que se publicara el trabajo de Harrod (Thirlwall 2007: 2-3).

En los países subdesarrollados la tasa natural es mayor que la tasa garantizada. Es decir, la tasa de ahorro es baja y la relación capital–producto es alta, lo cual implica que la productividad del capital es muy baja. En otras palabras, una relación capital–producto elevada refleja una baja productividad de la inversión. De este modo, en las economías en desarrollo, el desbalance entre el crecimiento de la fuerza laboral y la tasa de acumulación del capital es una de las principales causas del desempleo estructural, en términos keynesianos (Thirlwall 2007: 2-3).

Países desarrollados	**Países subdesarrollados**
$g_w > g_n$	$g_n > g_w$

La edad de oro

Harrod describe el *golden age* como la situación de crecimiento equilibrado con pleno empleo de ambos factores: capital y trabajo. En estas circunstancias, las tasas de crecimiento efectiva (g), garantizada (g_w) y natural (g_n) coinciden, al igual que las relaciones capital–producto, efectiva (v) y deseada (v_d).

$$g = g_w = g_n \quad \text{y} \quad v = v_d$$

Cuando esta tasa de crecimiento efectiva y la tasa garantizada son iguales, es decir, hay equilibrio macroeconómico, la propensión a ahorrar es igual a:

(14) $s = gv = g_w v_d$

Definimos además la demanda agregada y la oferta agregada de la economía. Partiendo de la contabilidad del producto por el método del gasto, en una economía cerrada y sin gobierno tenemos que el producto es igual a la suma del consumo y la inversión:

(15) $Y = C + I$

Además, el consumo es igual a un porcentaje del producto, donde c_y es la propensión marginal a consumir:

$$Y = c_y Y + I$$

Por lo tanto, tenemos la demanda agregada en función del multiplicador keynesiano y de la inversión.

$$Y_d = \frac{1}{(1-c_y)} I$$

Debido a que el porcentaje del ingreso que no es consumido se destina al ahorro, es decir, $1 - c_y = s$, tenemos la expresión de la demanda agregada en la ecuación (16).

(16) $Y_d = \dfrac{1}{s} I$

Asimismo, incorporando la relación capital–producto deseada por los inversionistas en la función de producción se obtiene la oferta agregada:

(17) $Y_s = \dfrac{1}{v_d} K$

Si la capacidad de producción que los empresarios han construido con sus inversiones se utiliza a la tasa que ellos desean, entonces la demanda agregada es igual a la oferta agregada y la economía crece a su tasa garantizada.

$$DA = OA \quad \text{y} \quad g = g_w$$

$$(18)\quad \frac{I}{s} = \frac{K}{v_d}$$

$$(19)\quad \frac{dK}{K} = \frac{s}{v_d} - \delta$$

El modelo de Domar

El economista norteamericano Evsey Domar publica en 1946 su obra «Capital Expansion, Rate of Growth and Employment». En ella, arribó a la conclusión fundamental de Harrod trabajando independientemente de él. Domar señala explícitamente que la inversión aumenta tanto la demanda a través del multiplicador keynesiano, como la oferta al expandir capacidad. Se planteó responder a la pregunta: ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la inversión que garantiza que la demanda se iguale a la oferta?

$dY_d = \dfrac{dI}{s}$ Incremento de la demanda

$dY_s = I\varpi$ Incremento de la oferta

Donde ϖ es la productividad del capital: $(dY / I) = (Y / K)$

En equilibrio tenemos que: $dY_d = dY_s \rightarrow \dfrac{dI}{s} = I\varpi$

Esta condición de equilibrio se obtiene de la explícita consideración del doble papel de la inversión: como factor de creación de demanda y como factor de creación de capacidad.

Dado el equilibrio ahorro–inversión, la inversión debe crecer a una tasa igual al producto $s\,\varpi$. Como esto ocurre con pleno empleo del capital, entonces $\varpi = 1/v_d$. Por lo tanto, el resultado de Harrod y Domar para el crecimiento con equilibrio es el mismo. La edad de oro de pleno empleo del capital y del trabajo implica la igualdad de las tres tasas de crecimiento: natural, observada y garantizada.

Si se diera el caso de que las tasas de crecimiento observada y garantizada fueran iguales, asegurando la plena utilización de capital, esto no garantiza la plena utilización del trabajo, pues esta depende de la tasa de crecimiento natural, la cual es exógena al modelo. De este modo, si se emplea todo el trabajo, la tasa de crecimiento observada (g) se aproximaría a la tasa de crecimiento natural. Si la tasa de crecimiento observada se situara por debajo de la natural (g_n), el desempleo estructural aumentaría.

Inestabilidad en los modelos de Harrod y Domar

Hemos definido el *golden age* como el estado en el que se igualan las tasas de crecimiento natural, garantizada y efectiva.

$$g = g_w = g_n$$

$$\frac{s}{v} - \delta = \frac{s}{v_d} - \delta = n + \rho$$

Sin embargo, alcanzar la «edad de oro» es difícil debido a que es altamente improbable lograr que coincidan las decisiones de ahorro de los individuos con las decisiones de inversión de los empresarios. Por un lado, la propensión marginal a ahorrar, s, depende de las preferencias y comportamiento de las familias. Esta tasa es asumida como exógena puesto que no se modelan estas decisiones. Asimismo, la tasa de crecimiento de la población, n, es exógena al modelo y está determinada por la dinámica demográfica. Por otro lado, la relación capital–producto, v, depende del nivel tecnológico asimilado por la economía y es constante. Finalmente, la relación capital–producto deseada, v_d, depende de las expectativas de los capitalistas. Por todo esto, no existe ningún mecanismo que asegure la igualdad entre las tres tasas.

Hay, por lo tanto, dos problemas:

1. La improbabilidad de que la economía crezca a su tasa garantizada y con pleno empleo. Hay desempleo involuntario en un contexto de crecimiento económico.
2. La inestabilidad de la economía capitalista. No existe en ella convergencia al equilibrio.

Por ejemplo, si la tasa de crecimiento observada, sin considerar depreciación, es mayor que la tasa deseada, entonces el ratio capital–producto efectivo debe ser menor al deseado:

$$\left[g > g_w \right] = \left[\frac{s}{v} > \left(\frac{s}{v} \right)_d \right]$$

En otras palabras, dado que la demanda agregada (I / s) es mayor que la oferta agregada (K / v_d), los capitalistas aumentarán sus inversiones para acrecentar la capacidad productiva, es decir, aumentar el *stock* de capital y con ello el ratio capital–producto para alcanzar la demanda. Sin embargo, los planes de inversión excederán a los planes de ahorro, por lo tanto se acelerará el crecimiento, aumentando la diferencia entre las tasas efectiva y garantizada; g se alejará aun más de g_w. Con ello, empeora el exceso de demanda. En otras palabras, el incremento del *stock* de capital, genera una disminución del cociente $1 / v$, así se incrementa la tasa observada, profundizando la diferencia entre ambas tasas. La situación que acabamos de describir alude a una de crecimiento económico acumulativo.

En la otra situación, si la tasa observada es menor a la tasa de crecimiento deseada, la relación capital–producto efectiva es mayor a la relación deseada por los inversionistas. La demanda agregada (I / s), al ser menor que la oferta agregada (K / v_d), genera un incentivo sobre los capitalistas a disminuir sus inversiones. Existe un *stock* de capital excesivo en relación a la dinámica del crecimiento económico expresada por la tasa efectiva de crecimiento.

$$g < g_w = \frac{s}{v} < \left(\frac{s}{v}\right)_d \quad \rightarrow \quad v > v_d$$

Por lo tanto, los inversionistas reducirán su *stock* de capital para igualar la relación efectiva a la deseada. La consecuencia es la desaceleración del crecimiento que empeora la recesión y el desempleo. Esta es una típica situación de insuficiencia de demanda efectiva. No obstante, esta disminución afecta a la tasa de crecimiento efectiva, incrementando el diferencial de tasas. A diferencia del caso anterior, esta es una situación de recesión acumulativa.

El problema de corto plazo (ciclo económico) es la relación entre g y g_w. El problema en el largo plazo es la relación entre g_n y g_w, en otras palabras, la relación entre el crecimiento de la fuerza de trabajo en términos de unidades de eficiencia y el crecimiento del capital.

Si g_n es mayor que g_w, dado que los coeficientes de producción permanecen fijos, habrá desempleo estructural. Los planes de inversión (hay más oportunidades para invertir) exceden a los planes de ahorro, por lo tanto habrá presiones inflacionarias. De aquí se deduce que el desempleo y la inflación no constituyen una paradoja en los países subdesarrollados.

Política económica de acuerdo con los modelos de Harrod y Domar

Como se mencionó, si la tasa de crecimiento natural, g_n es mayor que la tasa de crecimiento garantizada, g_w, la economía se encontrará en una situación de desempleo estructural, situación característica en los países subdesarrollados. Por lo tanto, la tarea de política en los países en desarrollo es igualar g_n y g_w, reduciendo la tasa natural (g_n) e incrementando la tasa garantizada (g_w).

$$g_n > g_w$$

$$n + \rho > \frac{s}{v_d} - \delta$$

El sector público puede intervenir siguiendo dos tipos de política: políticas para influir en la tasa natural, $g_n = n + \rho$, y políticas para afectar la tasa garantizada, $g_w = (s / v_d) - \delta$ (ver cuadro 2.2).

Cuadro 2.2
Política económica en los modelos de Harrod y Domar

Políticas sobre la tasa natural	Políticas sobre la tasa garantizada
• Control de la natalidad • Disminución de la productividad del trabajo	• Reforma y liberalización financiera • Política fiscal y política monetaria • Políticas de tasas de interés en el mercado financiero • Reducción del ratio capital–producto

Políticas sobre la tasa natural

Para controlar la expansión de la tasa natural, g_n, pueden ejecutarse programas de control de la natalidad para reducir el crecimiento de la fuerza laboral, n. Sin embargo, esta opción solo será efectiva en el largo plazo. Otra política para reducir la tasa natural es la disminución de la productividad del trabajo, ρ. No obstante, esta medida afectaría el nivel de vida y la competitividad de la economía (Thirlwall 2007: 4).

Políticas sobre la tasa garantizada

La tasa garantizada, g_w, puede incrementarse si se implementan reformas y liberalización financiera, de modo que se incentive el ahorro (aumentar s). Asimismo, la política fiscal y la política monetaria también podrían resultar de utilidad. Sin embargo, desde el punto de vista keynesiano, esta medida impulsadora del ahorro no asegura necesariamente la realización de los planes de inversión, pues son las decisiones de los inversionistas, guiadas principalmente por sus expectativas, las que conducen el proceso de acumulación del capital.

Si existen expectativas favorables, los inversionistas acudirán al sistema financiero para obtener los fondos que necesitan. Por lo tanto, la política de tasas de interés tiene también un rol crucial. Los economistas a favor de la liberalización financiera sugieren que elevadas tasas de interés real impulsarán el ahorro. Sin embargo, tasas de interés muy altas podrían desincentivar la inversión (Thirlwall 2007: 4-5). Al respecto, en las notas finales de su obra *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero,* John Maynard Keynes señala: «hemos demostrado que la extensión del ahorro efectivo está determinada necesariamente por el volumen de inversión y que este se fomenta por medio de una tasa de interés baja, a condición de que no intentemos alentarla de este modo hasta más allá del nivel que corresponde a la ocupación plena» (1936: 330).

En particular, es probable que el desincentivo de la inversión a causa de elevadas tasas de interés se produzca en economías con alta preferencia por liquidez y bajo deseo de inversión. Asimismo, la preferencia por liquidez suele ser elevada en ámbitos donde la incertidumbre respecto al comportamiento futuro de las tasas de interés para plazos variables es muy alta (Jiménez 1994: 12-14).

Finalmente, la reducción del ratio capital–producto (v_d) implica la utilización de técnicas de producción más intensivas en trabajo. No obstante, es importante analizar si los países en desarrollo son capaces de cambiar su estructura productiva hacia técnicas más intensivas en trabajo sin reducir el nivel de producto y de ahorro (Thirlwall 2007: 6-8).

Modelos neoclásicos de Solow-Swan y de Uzawa

Como se mencionó anteriormente, en los modelos de Harrod y Domar, la relación capital–producto, v, es fija. Por lo tanto, el *stock* de capital, y en consecuencia la relación capital–trabajo, aumentarán solo si aumenta la tasa de ahorro. Sin embargo, la propensión marginal a ahorrar y la tasa de depreciación son exógenas. Por ello, no puede asegurarse la convergencia al equilibrio ni el pleno empleo.

Ante los inconvenientes señalados por Harrod y Domar acerca de la incapacidad de la economía de lograr crecimiento y estabilidad con pleno uso de la fuerza laboral, el economista Robert Solow presentó su modelo de crecimiento neoclásico en «A contribution to the theory of economic growth», de 1956. Trevor Swan, en «Economic Growth and Capital Accumulation», publicado el mismo año 1956, presentó un modelo similar, por eso el modelo neoclásico es conocido como el modelo de Solow-Swan. El propósito de este modelo era mostrar que la economía capitalista puede crecer a la tasa de crecimiento de su fuerza laboral, y que este crecimiento es estable o converge a su equilibrio de largo plazo entre oferta y demanda agregadas.

Los dos problemas señalados por Harrod y Domar (inestabilidad e improbabilidad de crecimiento con pleno empleo) se deben a la ausencia de sustitución entre los factores trabajo y capital. Por lo tanto, la solución a los problemas señalados es permitir que los factores sean sustitutos, de este modo, se hace variable la relación capital–producto. Si es posible, sustituir trabajo por capital, y viceversa, entonces las variaciones de la relación capital–producto permitirán que la economía converja a su equilibrio de largo plazo o a su estado estacionario. Por lo tanto, no habrá razón para un crecimiento con desempleo involuntario. Tampoco habrá razón para la inestabilidad.

El modelo de Solow-Swan

La versión básica del modelo de Solow en tiempo continuo consta de las siguientes ecuaciones:

(1) $S = sY$	Función ahorro
(2) $I = \dot{K} + \delta K$	Inversión bruta
(3) $I = S$	Condición de equilibrio
(4) $\frac{\dot{L}}{L} = n$	Tasa de crecimiento de la fuerza laboral
(5) $Y = F(K, L)$	Función de producción

Donde s es la propensión a ahorrar ($0 < s < 1$), δ es la tasa de depreciación del capital y n es la tasa de crecimiento de la fuerza laboral. Todos estos parámetros son exógenos al modelo.

Por ser una función de producción homogénea de grado uno, es posible transformarla en términos per cápita:

$$y = f(k)$$

Donde $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$

Esta función de producción es neoclásica y bien comportada, es decir, satisface las condiciones de Inada:

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \qquad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

En una economía sin gobierno y sin sector externo, el producto per cápita es:

(6) $y = f(k) = \frac{C}{L} + \frac{I}{L}$

De la condición de equilibrio, ecuación (3), tenemos:

$$\dot{K} + \delta K = sY$$

Expresamos esta ecuación en términos per cápita:

(7) $\frac{\dot{K}}{L} + \delta \frac{K}{L} = s\frac{Y}{L}$ ó $\frac{\dot{K}}{L} + \delta k = sf(k)$

Además, la variación de la relación capital–trabajo se puede expresar como:

$$\dot{k} = \left(\frac{\dot{K}}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}$$

Reemplazando la tasa de crecimiento de la fuerza laboral por su valor (n):

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

(8) $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk$

Introduciendo la ecuación (8) en la ecuación (7):

$$\dot{k} + nk + \delta K = sf(k)$$

De este modo, se obtiene la «ecuación neoclásica fundamental» de crecimiento:

(9) $\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)\,k$

Asimismo, la tasa de crecimiento de la relación capital–trabajo se puede expresar:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Tomando en cuenta a la definición de inversión:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \qquad \text{ó} \qquad \dot{k} = \frac{I - \delta K}{L} - nk$$

$$\dot{k} = \frac{I}{L} - (n + \delta)k$$

De esta ecuación se obtiene la inversión per cápita que es igual a:

$$\frac{I}{L} = \dot{k} + (n + \delta)k$$

De la ecuación (6) se obtiene:

$$f(k) = \frac{C}{L} + \dot{k} + (n + \delta)k$$

Utilizando la función de ahorro per cápita, la ecuación fundamental también puede ser expresada como:

$$sf(k) = f(k) - \frac{C}{L} = \dot{k} + (n+\delta)k$$

Otra forma de expresar la tasa de crecimiento de la relación capital–trabajo es la siguiente. De la ecuación (9), en el estado estacionario, tenemos:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta) = \frac{s}{v} - (n+\delta) = 0$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{s}{v} - (n+\delta) = 0$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v}$$

Como sabemos, la relación capital–producto (v) se halla constante en el estado estacionario, por lo tanto, la tasa de crecimiento del producto es igual a la tasa de crecimiento del capital:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$$

Nótese que el ahorro por trabajador, que es el mismo que la inversión por trabajador, es igual a la inversión que aumenta la relación (K / L) más la inversión que mantiene la relación (K / L) constante en un contexto de crecimiento de la fuerza laboral y depreciación del capital, este último tipo de inversión es también conocida como el monto de inversión necesario para mantener el *stock* de capital per cápita constante (o *break-even investment* en inglés). Cuando no hay variaciones en (K / L) la economía se encontrará en el estado estacionario y crecerá a la tasa (n) que mantiene constante dicha relación (k^*)

Podemos mostrar que el producto y el capital crecen a la tasa n. De la ecuación (9) tenemos que cuando $\dot{k} = 0$, entonces:

$$f(k) = \frac{(n+\delta)k}{s}$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo:

$$\ln f(k) = \ln(n+\delta) + \ln(k) - \ln(s)$$

$$\frac{d\ln f(k)}{dt} = \frac{d\ln(n+\delta)}{dt} + \frac{d\ln(k)}{dt} - \frac{d\ln(s)}{dt}$$

Puesto que n, δ y s son constantes en el tiempo, sus logaritmos también lo son, por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo del logaritmo de cada parámetro es cero. De este modo, en el estado estacionario, el crecimiento del producto per cápita es igual al crecimiento del *stock* de capital per cápita, e igual a cero, pues el *stock* de capital per cápita permanece constante ($\dot{k} = 0$).

$$\frac{d \ln f(k)}{dt} = \frac{d \ln(k)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = 0$$

En el estado estacionario el *stock* de capital per cápita permanece constante y por ende el producto per cápita también. De este modo, podemos calcular la tasa de crecimiento del producto y del *stock* de capital:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Por lo tanto, en el *steady state* (cuando $\dot{k}$ y $\dot{y}$ son iguales a cero), la relación capital–producto, v, también es constante. Para comparar con el modelo de Harrod y Domar, en el estado estacionario, la tasa de crecimiento del producto puede expresarse como:

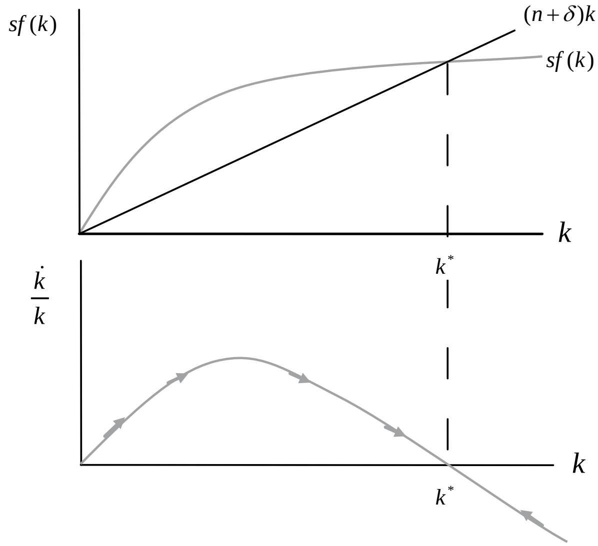
$$(10) \quad g = \frac{sf(k)}{k} - \delta = \frac{s}{v} - \delta = n$$

Donde $v = \dfrac{k}{f(k)}$ es la relación capital–producto

Además, la economía es estable. Cuando $k < k^*$, el *stock* de capital aumenta si el ahorro per cápita supera el *break-even investment*, pues el incremento en el *stock* de capital es más que suficiente para reponer el capital depreciado y dotar de capital a los nuevos miembros de la fuerza laboral. Esto implica que k está creciendo.

Ocurre lo contrario si $k > k^*$. El *stock* de capital disminuye, pues el ahorro per cápita es menor al *break-even investment*. Es decir, no es suficiente para reponer el desgaste del capital y a la vez dotar de capital a la creciente fuerza laboral. Por lo tanto, la relación capital por trabajador decrece (ver gráfico 2.1). De este modo, cada vez que la economía se aleja del estado estacionario, ya sea por exceso o por deficiencia de capital por trabajador, hay fuerzas que la empujan hacia el equilibrio de largo plazo del estado estacionario.

Gráfico 2.1
La relación capital–trabajo y la tasa de crecimiento del capital de equilibrio



En k^* la tasa de crecimiento es igual a n, la misma que es totalmente independiente de la proporción que se ahorra del ingreso. El ahorro por persona alcanza para proporcionar capital a la población en aumento y para reponer el capital depreciado sin causar cambios en el coeficiente de capital por trabajador. Es la «edad de oro» donde el *stock* de capital y el producto crecen a la misma tasa, igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral.

Sin embargo, como acabamos de ver, dado que la relación capital–trabajo está constante, el producto per cápita no crece:

$$y=\frac{Y}{L} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}=n-n=0$$

El modelo de Solow presenta una conclusión alarmante, los supuestos neoclásicos que permiten el crecimiento del producto con pleno empleo generan el estancamiento del producto per cápita. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que el PBI per cápita de los países crece a lo largo del tiempo. De este modo, el modelo de Solow no puede explicar el crecimiento del producto per cápita sin incluir algún factor exógeno. En otras palabras, adoptando una función de producción neoclásica, el crecimiento del producto no es totalmente explicado por el crecimiento de los factores. Existe un residuo en la contabilidad del crecimiento, como vimos en el capítulo uno.

El residuo en la contabilidad del crecimiento

Progreso técnico exógeno (neutral de Hicks):
En este caso el residuo es igual a la tasa de crecimiento de A. En este caso el residuo también es conocido como productividad total de los factores (PTF).

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$

Progreso técnico exógeno aumentador del trabajo (neutral de Harrod):
En este caso el residuo es igual a la tasa de crecimiento de E multiplicada por $(1 - \alpha)$, pues el progreso técnico afecta exclusivamente al trabajo.

$$Y = K^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{E}}{E} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$

La discusión acerca de la existencia de un residuo en la contabilidad del crecimiento se inició en la década de 1930. Varios nombres fueron atribuidos a este residuo: progreso técnico, eficiencia, cambio tecnológico, entre otros. Incluso se crearon diversos tipos de índices que pretendían captar el residuo y analizar su evolución en el tiempo. Sin embargo, los economistas y econometristas reconocían desde entonces las limitaciones de los datos de los que disponían y advertían además que sus estimados debían ser utilizados con sumo cuidado. Como muestra de esta toma de conciencia entre los economistas, Abramovitz (1956) se refería a estos índices como «una medida de nuestra ignorancia» (para una revisión más completa de este debate, véase Griliches 1996).

En su trabajo de 1957 Solow integra la teoría económica basada en una función de producción agregada neoclásica a la metodología de cálculos e índices desarrollada hasta entonces. Los resultados hallados por Solow, utilizando una medida de progreso técnico en sentido amplio, corroboran los resultados presentados por la literatura precedente (ver cuadro 2.3). En términos generales, buena parte del crecimiento del producto, y del producto per cápita, es explicado por el cambio técnico, el cual presenta una tendencia creciente. Además, la economía presenta cambio técnico neutral (Solow 1957: 312 y 316).

Posteriormente, Denison (1985) desagregó el cambio técnico calculado por Solow y encontró que el crecimiento del capital humano y del progreso técnico en términos más estrictos son los factores más importantes para explicar el crecimiento. Según Denison, 34% del cambio en el producto era explicado por el cambio tecnológico.

Sin embargo, Solow (1988) resalta que tanto su trabajo de 1957 como el de Denison (1985) dependen fuertemente de que los factores reciban como remuneración su producto marginal y que el progreso técnico sea neutral.

Cuadro 2.3
Primeros estimados del residuo en el crecimiento de Estados Unidos
(Porcentaje del crecimiento no explicado por los factores convencionales)

Fuente	Período	En el producto	En el producto per cápita
Timbergen (1942)	1870-1914	27%	100%
Stigler (1947) Manufactura	1904-1937	-	89%
Schmookler (1952) Manufactura	1869-1938	37%	-
	1869-1928	31%	88%
Fabricant (1954)	1870-1950	-	92%
Kendrick (1955) Manufactura	1899-1948	-	87%
Abramovitz (1956)	1869-1878 a 1944-1953	48%	86%
Solow (1957)	1909-1949	52%	88%

Fuente: Griliches (1996: 1327)

En suma, para que el modelo de Solow pueda explicar el crecimiento del producto per cápita, es necesario incluir en la función de producción un factor de progreso técnico exógeno. El modelo de Solow con progreso técnico exógeno se presenta a continuación.

Solución del modelo de Solow-Swan en tiempo continuo

La solución cuantitativa del modelo de Solow-Swan es aquella en la que se encuentra la trayectoria del capital y del consumo de la economía.

A partir de la ecuación neoclásica fundamental del crecimiento, ecuación (9):

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)\, k$$

Reemplazando $f(k)$ por la función Cobb- Douglas en términos per cápita:

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = k^{\alpha}$$

La ecuación neoclásica fundamental del crecimiento toma la siguiente forma:

(9') $\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + \delta)k$ ó $\dot{k} + (n + \delta)k = sk^{\alpha}$

La ecuación diferencial obtenida se caracteriza por ser no lineal en k. Las ecuaciones diferenciales con esta forma reciben el nombre de ecuaciones de Bernoulli y presentan la siguiente forma general:

$$\frac{dx}{dt} + Rx = Tx^{m}$$

Donde m es cualquier número distinto de cero o uno. En esta nueva notación, x representa el *stock* de capital per cápita, k, y los parámetros R y T representan a $(n + \delta)$ y s respectivamente, mientras que α es representado por m.

Esta ecuación puede reducirse a una ecuación diferencial lineal y, por lo tanto, tiene una solución (Chiang 1987: 491-500). Dividiendo la expresión anterior entre x^{m}, se obtiene:

$$x^{-m}\frac{dx}{dt} + Rx^{1-m} = T$$

Denotamos una nueva variable $z = x^{1-m}$ para simplificar la notación. La diferencial de la nueva variable z con respecto al tiempo será igual a:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = (1-m)\,x^{-m}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad x^{-m}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1-m)}\frac{dz}{dt}$$

Reemplazamos $x^{-m}\frac{dx}{dt}$ y x^{1-m} por sus respectivos valores en términos de la variable z:

$$\frac{1}{(1-m)}\frac{dz}{dt} + Rz = T$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de primer orden, cuyo método de solución es conocido. Si $m = \alpha$, $R = n + \delta$ y $T = s$, entonces la ecuación (9') puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt} + (n+\delta)z = s$$

Método de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

El método consiste en la suma de dos componentes: la solución complementaria (u homogénea) y la solución particular. Supongamos una ecuación de la forma: $\dot{x} = a\,x + b$.

La solución será igual a:

$$x_t = x_c + x_p = A_0\, e^{a\,t} - \frac{b}{a} \quad \text{Solución general cuando } a \neq 0$$

La solución complementaria (x_c) se obtiene de la resolución de la parte homogénea de la ecuación. Haciendo $b = 0$ y resolviendo:

$$\int \frac{\dot{x}}{x}\, dt = a\, dt$$

Integrando, y aplicando la exponencial, se obtiene:

$$\ln x = at + k \quad \rightarrow \quad x = e^k e^{at} \quad \rightarrow \quad x_c = A_0 e^{at}$$

La solución particular (x_p) es cualquier solución de la ecuación completa $\dot{x} = a\,x + b$. Suponiendo la solución más simple donde x_p es igual a una constante, se tiene:

$$x_p = c \quad \rightarrow \quad \dot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x_p = -\frac{b}{a}$$

Usando un valor inicial conocido para $x_{(0)}$ podemos hallar el valor de la constante A, y obtener la solución definida de la ecuación diferencial. Si $t = 0$:

$$x_{(0)} = A_0\, e^{a(0)} - \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad A_0 = x_{(0)} + \frac{b}{a}$$

$$x_t = x_c + x_p = \left(x_{(0)} + \frac{b}{a} \right) e^{a\,t} - \frac{b}{a} \quad \text{Solución definida cuando } a \neq 0$$

Si $a = 0$, entonces debe tratarse otra solución particular de la forma $x_p = kt$ (para mayor detalle, véase Chiang 1987).

Multiplicando por $(1 - \alpha)$:

$$\frac{dz}{dt} + [(1-\alpha)(n+\delta)z - (1-\alpha)s] = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal no homogénea tiene la siguiente forma:

$$z_t = z_c + z_p$$

$$z_t = Z_0 e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + C$$

Donde la solución complementaria, z_c, es igual a $z_c = Z_0 e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}$. La solución particular, $z_c = C$, la solución particular, se obtiene a partir de suponer que z toma un valor constante, por lo que $\frac{dz}{dt} = 0$:

$$(1-\alpha)(n+\delta)z - (1-\alpha)s = 0$$

$$(n+\delta)z - s = 0$$

$$C = z = \frac{s}{(n+\delta)}$$

El valor de Z_0 se obtiene a partir de suponer una condición inicial. Si suponemos que el capital en el instante $t = 0$ es igual a cero, entonces:

$$z_{(0)} = Z_0 e^{-(1-\alpha)(n+\delta)(0)} + \frac{s}{(n+\delta)}$$

$$z_{(0)} = Z_0 + \frac{s}{(n+\delta)}$$

$$Z_0 = z_{(0)} - \frac{s}{(n+\delta)}$$

Reemplazando los valores en la solución general, se obtiene:

$$z_t = \left[z_{(0)} - \frac{s}{(n+\delta)}\right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{s}{(n+\delta)}$$

Finalmente, reemplazamos $z = k^{1-\alpha}$ para hallar la ecuación del capital

$$k_t^{1-\alpha} = \left[k_{(0)}^{1-\alpha} - \frac{s}{(n+\delta)} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{s}{(n+\delta)}$$

$$k_t = \left(\left[k_{(0)}^{1-\alpha} - \frac{s}{(n+\delta)} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{s}{(n+\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La ecuación del consumo se obtiene de:

$$c_t = (1-s)k^{\alpha}$$

$$c_t = (1-s) \left(\left[k_{(0)}^{1-\alpha} - \frac{s}{(n+\delta)} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{s}{(n+\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Modelo de Solow con tecnología exógena

Definimos una función de producción con tecnología aumentadora de trabajo (E), donde el parámetro E hace más eficiente a la fuerza de trabajo:

(11) $Y = K^{\alpha} (EL)^{1-\alpha}$

Se asume que la tasa de crecimiento de la tecnología (ρ) es exógena. Entonces, la tasa de crecimiento del producto puede expresarse como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\left[\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{E}}{E} \right]$$

(12) $\dfrac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \dfrac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)[n+\rho]$

Para comprender el crecimiento de Y, se debe comprender el crecimiento de K:

$\dot{K} = sY - \delta K$ Inversión neta

Se pueden expresar Y y K en términos de trabajo efectivo medido en unidades de eficiencia, de la siguiente manera:

(13) $\tilde{y} = \dfrac{Y}{EL} = \dfrac{Y/L}{E} = \dfrac{y}{E}$

(14) $\tilde{k} = \dfrac{K}{EL} = \dfrac{K/L}{E} = \dfrac{k}{E}$

Asimismo, la función de producción también se puede expresar en términos de trabajo efectivo medido en unidades de eficiencia (EL):

$$(15)\ \tilde{y} = \frac{K^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}}{EL} \quad \rightarrow \quad \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$$

Tenemos además la variación proporcional de la relación capital–trabajo efectivo:

$$(16)\ \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{E}}{E}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{sY - \delta K}{K} - n - \rho$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{s\tilde{y}}{\tilde{k}} - (\delta + n + \rho)$$

Por lo tanto:

$$(17)\ \dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (\delta + n + \rho)\tilde{k}$$

En el estado estacionario:

$$(18)\ \dot{\tilde{k}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{s\tilde{y}}{\tilde{k}} = (\delta + n + \rho)$$

De la ecuación (17) podemos calcular la tasa de crecimiento del producto por unidad de trabajo efectivo. Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \ln \tilde{y} = \alpha \ln \tilde{k}$$

$$\frac{d \ln \tilde{y}}{dt} = \alpha \frac{d \ln \tilde{k}}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

En el estado estacionario,

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = 0$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del producto por unidad de trabajo efectivo, $\dot{\tilde{y}} / \tilde{y}$, es directamente proporcional al crecimiento del capital por unidad de trabajo efectivo. Puesto que, en el estado estacionario, $\dot{\tilde{k}}$ está constante, $\dot{\tilde{y}}$ también permanecerá constante:

(19) $\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{E}}{E} = 0$

No obstante, el producto per cápita crece a la tasa a la que crece el progreso técnico.

(20) $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{E}}{E} = \rho$

Además, podemos demostrar que el producto (*Y*) y el *stock* de capital (*K*) están creciendo a la tasa ($n + \rho$). De la ecuación (13) tenemos:

$$\tilde{y} = \frac{Y}{EL}$$

$$\ln \tilde{y} = \ln Y - \ln E - \ln L \quad \rightarrow \quad \frac{d \ln \tilde{y}}{dt} = \frac{d \ln Y}{dt} - \frac{d \ln E}{dt} - \frac{d \ln L}{dt}$$

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{L}}{L} = 0$$

(21) $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{L}}{L} = \rho + n$

De la ecuación (14), se obtiene:

$$\tilde{k} = \frac{K}{EL} = \frac{k}{E}$$

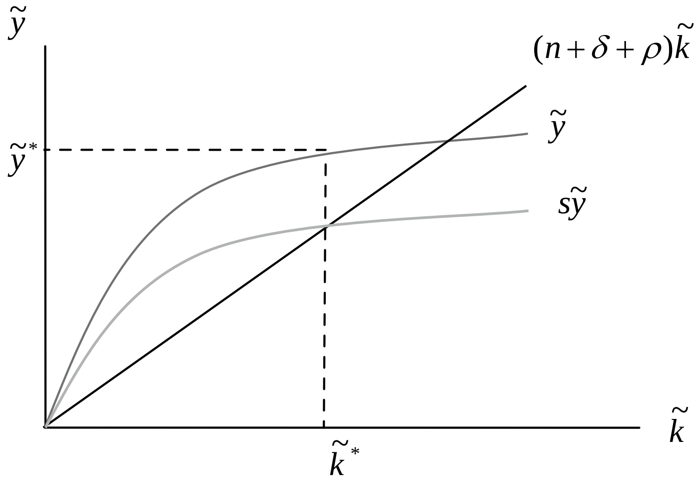
$$\ln \tilde{k} = \ln K - \ln E - \ln L \quad \rightarrow \quad \ln \tilde{k} = \ln k - \ln E$$

$$\frac{d \ln \tilde{k}}{dt} = \frac{d \ln K}{dt} - \frac{d \ln E}{dt} - \frac{d \ln L}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d \ln \tilde{k}}{dt} = \frac{d \ln k}{dt} - \frac{d \ln E}{dt}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{L}}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{E}}{E} = 0$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{L}}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{E}}{E}$$

Gráfico 2.2
Modelo de Solow con tecnología exógena



De la ecuación (17), tenemos;

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - (\delta + n + \rho)$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{s}{v} - \delta - (n + \rho) = 0$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{s}{v} - \delta - (n + \rho) = 0$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} - \delta = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

(22) $\frac{\dot{K}}{K} = \rho + n$

(23) $\frac{\dot{k}}{k} = \rho$

El *stock* de capital y el producto crecen a una tasa igual a la suma de las tasas de crecimiento de la fuerza laboral y del progreso técnico. Las variables per cápita crecen a la tasa de crecimiento del progreso técnico exógeno. Como ya se había mencionado, el producto per cápita crecerá únicamente si hay progreso técnico.

Solución del modelo de Solow-Swan con tecnología aumentadora de trabajo

Seguimos un procedimiento similar al anterior para hallar la solución en el caso de progreso aumentador de trabajo. De la ecuación (17):

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (\delta + n + \rho)\tilde{k}$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal. La única diferencia respecto al caso anterior es que el capital y el producto per cápita están expresados en unidades de eficiencia. Claramente, la ecuación de la tasa de crecimiento del capital refleja la presencia de progreso técnico, que crece a una tasa constante e igual a ρ.

Para hallar la solución, debemos reducir esta ecuación a una ecuación diferencial lineal. Reordenando la expresión:

$$\tilde{k} + (\delta + n + \rho)\tilde{k} = s\tilde{k}^{\alpha}$$

Dividiendo entre $\tilde{k}^{\alpha}$:

$$\frac{d\tilde{k}}{dt}\tilde{k}^{-\alpha} + (\delta + n + \rho)\tilde{k}^{1-\alpha} = s$$

Para simplificar la notación realizamos un cambio de variable. Definimos la variable z, que es igual a $\tilde{k}^{1-\alpha}$. Diferenciando z con respecto al tiempo, se halla una nueva expresión para $\frac{d\tilde{k}}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tilde{k}}\frac{d\tilde{k}}{dt} = (1-\alpha)\tilde{k}^{-\alpha}\frac{d\tilde{k}}{dt}$$

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt} + (\delta + n + \rho)z - s = 0$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea. La solución tiene la forma:

$$z_t = z_c + z_p$$

$$z_t = Z_0\, e^{-(1-\alpha)(n+\delta+\rho)t} + C$$

Donde la solución complementaria es igual a $Z_0\, e^{-(1-\alpha)\,(n+\delta+\rho)t}$. El valor de la solución particular, C, se obtiene a partir de suponer que z toma un valor constante, es decir, cuando $\frac{dz}{dt} = 0$:

$$(1-\alpha)\,(\,\delta+n+\rho\,)\,z-(1-\alpha)\,s=0$$

$$C=z=\frac{s}{(\delta+n+\rho)}$$

Z_0 se obtiene a partir de suponer una condición inicial. Si suponemos que el capital en el instante t = 0 es igual a cero, entonces:

$$z_{(0)}=Z_0\;e^{-(1-\alpha)(n+\delta+\rho)(0)}+\frac{s}{(n+\delta+\rho)}$$

$$Z_0=z_{(0)}-\frac{s}{(n+\delta+\rho)}$$

Finalmente, reemplazamos $z = k^{1-\alpha}$ para hallar la ecuación del capital:

$$k_t=\left(\left[k_{(0)}{}^{1-\alpha}-\frac{s}{(n+\delta+\rho)}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\delta+\rho)t}+\frac{s}{(n+\delta+\rho)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La ecuación del consumo se obtiene de:

$$c_t=(1-s)k^{\alpha}$$

$$c_t=(1-s)\left(\left[k_{(0)}{}^{1-\alpha}-\frac{s}{(n+\delta+\rho)}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\delta+\rho)t}+\frac{s}{(n+\delta+\rho)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Golden rule

Como el ingreso per cápita ya no aumenta en el estado estacionario, es importante saber en qué condiciones se maximiza el nivel de bienestar, es decir el consumo per cápita. Existe un valor de k conocido como la intensidad de capital de la «regla de oro», es decir, el valor del *stock* de capital per cápita que maximiza el consumo per cápita en el estado estacionario.

Partimos de la ecuación neoclásica fundamental, cuando la economía alcanza su estado estacionario para obtener el consumo per cápita.

$$\frac{C}{L}=f(k^*)-sf(k^*)$$

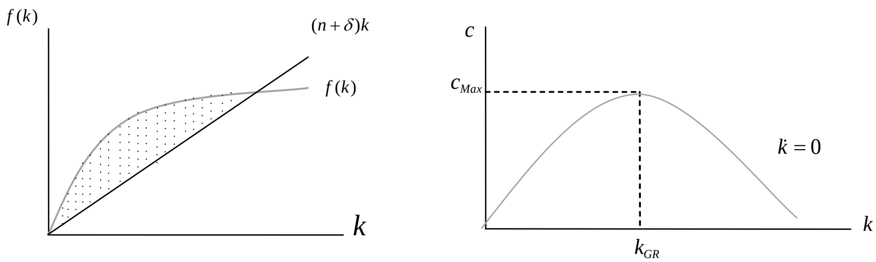
En el estado estacionario, se cumple que:

$$\dot{k}=0\;\;\rightarrow\;\;\frac{C}{L}=f(k^*)-(n+\delta)k^*$$

La regla de oro

En el estado estacionario, tanto el *stock* de capital per cápita, como el producto per cápita, están constantes. Sin embargo, el estado estacionario de una economía puede estar caracterizado por distintas combinaciones de capital per cápita y producto per cápita. Uno de los indicadores de bienestar poblacional más utilizados es el consumo. Como sabemos, en la contabilidad nacional para una economía cerrada, el consumo es la diferencia entre el producto y el ahorro (igual a la inversión).

En el panel izquierdo del gráfico, se muestra la diferencia de la función de producción per cápita y la inversión destinada a reponer el capital gastado y dotar de capital a la nueva población laboral (la zona rayada). La función de producción neoclásica es cóncava en k y cumple las condiciones de Inada. A medida que aumenta k, la productividad marginal alcanza un máximo y luego disminuye.



En el panel derecho, se presenta el consumo per cápita en función del capital per cápita. Como puede apreciarse a bajos niveles de k, el consumo aumenta conforme se incrementa la relación capital–trabajo hasta alcanzar su máximo valor (c_{Max}). A partir de este punto, el consumo decrece a pesar de que la relación capital–trabajo siga aumentando. Por lo tanto, maximizando la función de consumo per cápita con respecto al capital per cápita del estado estacionario podemos hallar el valor de k^* de la *golden rule*. Partimos de la ecuación neoclásica fundamental, cuando la economía alcanza su estado estacionario para obtener el consumo per cápita.

Donde k^* es el nivel del *stock* de capital per cápita del estado estacionario. Para maximizar el consumo per cápita, se iguala a cero la primera derivada de la función con respecto a k^*.

$$\frac{\partial \frac{C}{L}}{\partial k^*} = f'(k_{GR}{}^*) - (n+\delta) = 0 \quad \rightarrow \quad f'(k_{GR}{}^*) - \delta = n$$

La productividad marginal del capital menos la depreciación es igual a la tasa de interés real (r). Por tanto, el consumo per cápita alcanza su máximo valor cuando la tasa de interés real es igual a la tasa de crecimiento natural (n).

$$f'(k_{GR}^{*}) - \delta = n$$

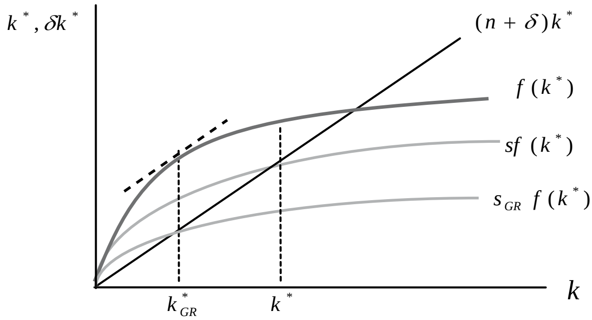
$$r = n$$

Por lo tanto, el capital del estado estacionario cuyo producto marginal neto de depreciación es igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, es el óptimo en el sentido que maximiza el consumo per cápita. En correspondencia con el k de la regla de oro (k^{*}_{GR}), hay una tasa de ahorro que maximiza el consumo per cápita. Para hallar esta tasa de ahorro, despejamos k^{*} de la ecuación neoclásica fundamental de modelo de crecimiento de Solow- Swan sin tecnología exógena, la cual es igual a cero en el estado estacionario.

$$\dot{k} = sf(k^{*}_{GR}) - (n+\delta)k^{*}_{GR} = 0 \qquad \rightarrow \qquad sf(k^{*}_{GR}) = (n+\delta)k^{*}_{GR}$$

$$(24)\ s_{GR} = \frac{(n+\delta)k^{*}_{GR}}{f(k^{*}_{GR})}$$

Gráfico 2.3
La relación capital–trabajo y la tasa de ahorro de la regla de oro



A la derecha de k^{*}_{GR}, la economía se encuentra en una zona de ineficiencia dinámica. Por lo tanto, en la zona ineficiente se cumple que:

$$f'(k^{*}) - \delta < f'(k_{GR}) - \delta$$

$$r_{k^{*}} < n$$

En la zona dinámicamente ineficiente la tasa de interés real es inferior a la tasa de crecimiento agregado. En la gráfico 2.3 se muestra la relación capital–trabajo y la tasa de ahorro de la regla de oro. Se puede apreciar que a la derecha de k^{*}_{GR}, la pendiente de la función de producción, $f(k^{*})$, es menor que la pendiente de la línea $(n+\delta)\ k^{*}$.

La tasa de ahorro de la regla de oro en una función Cobb-Douglas

Partiendo de una función de producción Cobb-Douglas, $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, en términos per cápita, tenemos:

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} \quad \rightarrow \quad y = k^{\alpha}, \quad f'(k) = \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}}$$

Utilizando la ecuación fundamental del modelo de Solow, hallamos el consumo per cápita en el estado estacionario.

$$\frac{C}{L} = k^{\alpha} - sk^{\alpha} = (1-s)k^{\alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{L} = k^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Maximizando el consumo per cápita con respecto al *stock* de capital per cápita, hallamos k_{GR}:

$$\underset{k}{Max} \frac{C}{L} = k^{\alpha} - (n+\delta)k$$

$$\frac{\partial \frac{C}{L}}{\partial k} = \frac{\alpha}{k_{GR}^{1-\alpha}} - (n+\delta) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{k_{GR}^{1-\alpha}} = n+\delta \quad \rightarrow \quad \alpha = (n+\delta)k_{GR}^{1-\alpha}$$

$$k_{GR} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \rightarrow \quad y_{GR} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Reemplazando el valor de k_{GR} en la fórmula hallada para la tasa de ahorro de la *golden rule*, ecuación (24), obtenemos que la tasa de ahorro debe ser igual al coeficiente α.

$$s_{GR} = \frac{(n+\delta)k_{GR}^{*}}{f(k_{GR}^{*})} \quad \rightarrow \quad s_{GR} = (n+\delta)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \rightarrow \quad s_{GR} = \alpha$$

Convergencia en el modelo de Solow

Como se mencionó anteriormente, de la ecuación neoclásica fundamental:

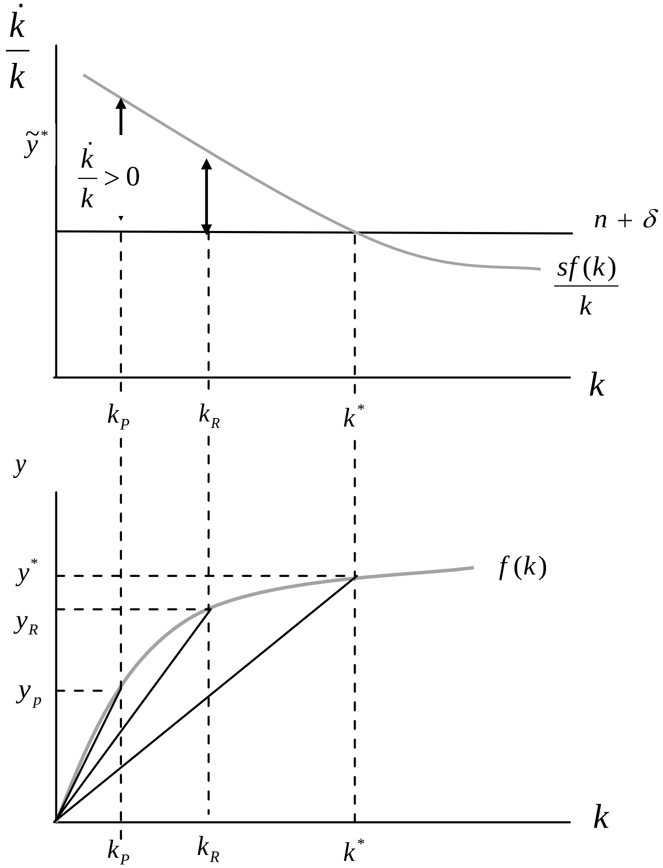
$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$$

Se obtiene la ecuación de la tasa de crecimiento de la relación capital–trabajo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$$

La tasa de crecimiento de las dotaciones de capital por trabajador depende positivamente de la tasa de ahorro y la productividad media del capital, y negativamente de la tasa de crecimiento de la población y de la tasa de depreciación. El primer término es decreciente en el *stock* de capital porque la productividad media del capital lo es a medida que aumenta el *stock* de capital.

Gráfico 2.4
Convergencia en el modelo de Solow



En el panel superior del gráfico 2.4 se representa el producto de la tasa de ahorro y la productividad media del capital, también conocida como la inversión bruta por unidad de capital, como una curva de pendiente negativa. Mientras la curva se mantiene por encima de $n + \delta$, el *stock* de capital per cápita está aumentando ($\dot{k} / k$). En el panel inferior se aprecia que a bajos niveles de k, la tasa de crecimiento del *stock* de capital per cápita es mayor, pues la productividad media de k es más alta y va disminuyendo conforme aumenta k.

$$\frac{y_p}{k_p} > \frac{y_R}{k_R} > \frac{y^*}{k^*}$$

Si k es bajo, la inversión bruta y tasa de crecimiento de k serán altas. Como y sigue la misma trayectoria de k, también crecerá más cuanto más alejada esté la economía del estado estacionario. De este modo, dado que la relación capital–trabajo de un país pobre, k_p es menor que la de un país rico, k_R, el país pobre crecerá más rápido que el rico, hasta que ambos convergerán al mismo nivel de equilibrio de largo plazo, si comparten los mismos parámetros: s, n, δ y la forma de la función de producción F (.). A este tipo de convergencia se le denomina «convergencia absoluta». Desafortunadamente, la evidencia empírica no favorece esta hipótesis. De Long (1988), en un estudio que abarca una amplia muestra de países, no encuentra evidencia de que los niveles de bienestar de los países pobres y ricos se estén acercando.

Por otro lado, con más realismo, se reconoce que los países tienen distintos parámetros fundamentales. Por lo tanto, cada economía convergerá a su propio estado estacionario. Esta convergencia es conocida como «convergencia relativa» o «condicional» (condicionada por los parámetros de cada economía en particular). La evidencia empírica, a diferencia del tipo anterior de convergencia, apoya fuertemente esta hipótesis, como lo demuestran los trabajos de Mankiw, Romer y Weil (1992) y Barro y Sala-i-Martin (1991; 1992).

El tema de la convergencia ha sido muy trabajado en la teoría del crecimiento, no solo por el interés que despierta el tema en sí mismo, sino también porque permite comprobar empíricamente las implicancias de los modelos teóricos y analizar si estos son validados o no por la realidad. Como hemos visto, en el modelo neoclásico, el supuesto de rendimientos decrecientes, conducía finalmente a la formulación de la hipótesis de convergencia. Por otra parte, los modelos de crecimiento endógeno, que serán tratados en el capítulo cinco, surgen como una alternativa ante las deficiencias del modelo neoclásico para explicar principalmente dos hechos estilizados: el crecimiento del producto per cápita sin factores de progreso técnico exógeno y la falta de convergencia entre países (Islam 2003: 312).

El debate empírico acerca de la validez de la hipótesis de convergencia se inicia con el trabajo de Baumol (1986). Utilizando los datos de la muestra recopilada por Angus Maddison en 1982, Baumol comprueba que existe convergencia absoluta para un grupo de dieciséis países industrializados en el período 1870–1979. El estudio también encuentra evidencia de convergencia absoluta en países menos desarrollados, pero rechaza la hipótesis para países subdesarrollados (Romer 1994: 4).

Cómo realizar un test de convergencia absoluta

Generalmente, la hipótesis de convergencia ha sido puesta a prueba por el método de corte transversal (entre países o regiones) utilizando la siguiente regresión:

$$\ln y_{i,t} - \ln y_{i,t=0} = \beta \ln y_{i,t=0} + u_i$$

Donde $y_{i,t}$ es el producto per cápita del país i en el período t. Se asume que β_1, la velocidad de convergencia, puede tomar valores entre [–1,0]. La hipótesis de convergencia implica que $\beta_1 < 0$, de este modo, la tasa de crecimiento, expresada por la diferencia en los logaritmos del producto per cápita en el nivel actual ($t = 1$) y el nivel en un estado inicial ($t = 0$) tendría una relación inversa con el nivel inicial de producto. Es decir, si $\beta_1 < 0$, entonces, los países con menores niveles de producto per cápita inicial estarían creciendo a tasas mayores que aquellos países con mayores niveles de producto inicial. Esta metodología es conocida como «test de convergencia β».
Otra forma de expresar la regresión es:

$$\ln y_{i,t} = (1+\beta) \ln y_{i,t=0} + u_i \qquad \rightarrow \qquad \ln y_{i,t} = \pi \ln y_{i,t=0} + u_i$$

Donde $\pi = 1 + \beta$ y $0 \leq \pi \leq 1$. En este caso, la hipótesis de convergencia implica que $\pi < 1$. Sin embargo, ¿el hecho de que los países pobres crezcan más rápido que los ricos garantiza que eventualmente ambos alcancen el mismo nivel de desarrollo? El test de convergencia β solo comprueba la relación inversa entre tasa de crecimiento y producto inicial. No obstante, la hipótesis de convergencia implica además que, precisamente debido a esta relación inversa, los países pobres eventualmente alcanzarán a los países ricos. Por lo tanto, ¿cómo saber si los niveles de producto per cápita de los distintos países se están acercando?
Lichtenberg (1994: 576) señala que otra forma de realizar un test de hipótesis de convergencia implica analizar la dispersión entre los niveles de producto per cápita de los distintos países y comprobar que esta se reduce conforme transcurre el tiempo. De este modo, el test consistiría en obtener la derivada en el tiempo de la varianza del logaritmo del producto per cápita. Si esta derivada es negativa, entonces hay convergencia, es decir, los países pobres se están acercando a los países ricos en términos de sus niveles de PBI per cápita. Este tipo de hipótesis se denominan «test de convergencia σ» (σ sigma representa la desviación estándar en la muestra de ingresos entre países).

$$d[\mathrm{var}(\ln y_t)]/dt < 0$$

Estas dos formas de corroborar la hipótesis de convergencia son complementarias, pues el cumplimiento de la convergencia β es una condición necesaria pero no suficiente para que se compruebe la convergencia σ. Además, el test de convergencia β permite obtener información sobre parámetros estructurales del modelo de crecimiento, mientras que las pruebas de hipótesis basadas en la distribución del ingreso o producto entre países no (Islam 2003: 314).

Posteriormente, De Long (1988) señaló que los resultados de Baumol (1986), que respaldan la hipótesis de convergencia absoluta, podrían estar sesgados, pues, los países de la muestra de Maddison 1982 solo incluyen las economías que se industrializaron exitosamente para fines del período de la muestra (Romer 1994: 4). Por lo tanto, la validación de la convergencia se da para países que fueron escogidos como una muestra ex post de países con elevado crecimiento en el período 1870-1979. Además, ciertos países que en el año inicial gozaban de buenas perspectivas de crecimiento fueron excluidos del análisis. Si Baumol hubiera considerado países que en 1870 parecían en condiciones de converger (como Irlanda, Portugal, España, entre otros) entonces la hipótesis de convergencia hubiera sido rechazada, pues en los años posteriores estos países se atrasaron con respecto a las economías líderes. Asimismo, De Long (1988) presenta una muestra de 98 países para el período 1960-1985 en la cual se rechaza la hipótesis de convergencia absoluta.

El descarte de la hipótesis de convergencia absoluta generó escepticismo frente al modelo de Solow, pues no se comprobaba empíricamente una de sus principales conclusiones. Sin embargo, el modelo de Solow predice una versión condicional de la convergencia y no una versión absoluta. Incluso Solow, en «Growth theory: an exposition» de 1970, señaló explícitamente que los hechos estilizados referidos a comparaciones entre economías le concernían menos, pues su trabajo se enfocaba en la trayectoria de las variables dentro de una economía (Islam 2003: 313).

En estos trabajos el test de convergencia absoluta está basado en la comprobación de que la tasa de crecimiento de un país de un período a otro está inversamente relacionada con el nivel de producto per cápita inicial. Por su parte, el test de convergencia condicional requiere controlar por las diferencias en las tasas de ahorro y de crecimiento de la población entre países. De este modo, se elimina el efecto que los distintos parámetros de cada economía tienen sobre la tasa de crecimiento y se realiza un test similar al de convergencia absoluta. Los trabajos posteriores se orientaron hacia la comprobación empírica de la hipótesis de convergencia condicional. Al respecto, se ha desarrollado relativo consenso sobre la validez de esta hipótesis. Incluso se estima que la velocidad de convergencia de los países a su nivel de PBI per cápita de estado estacionario es de 2% a 3% anual (Barro & Lee 1994). Para una revisión de literatura del tema más detallada véase Caselli, Esquivel y Lefort (1996).

Entre los principales trabajos del tema destacan los de Mankiw, Romer y Weil (1992) y los de Barro y Sala-i-Martin (1991; 1992). En estos trabajos se utilizaron los datos recopilados por Heston y Summers en 1991, pues la base de Madisson (1982) presentaba problemas de sesgo en la selección de los países (Romer 1994: 4).

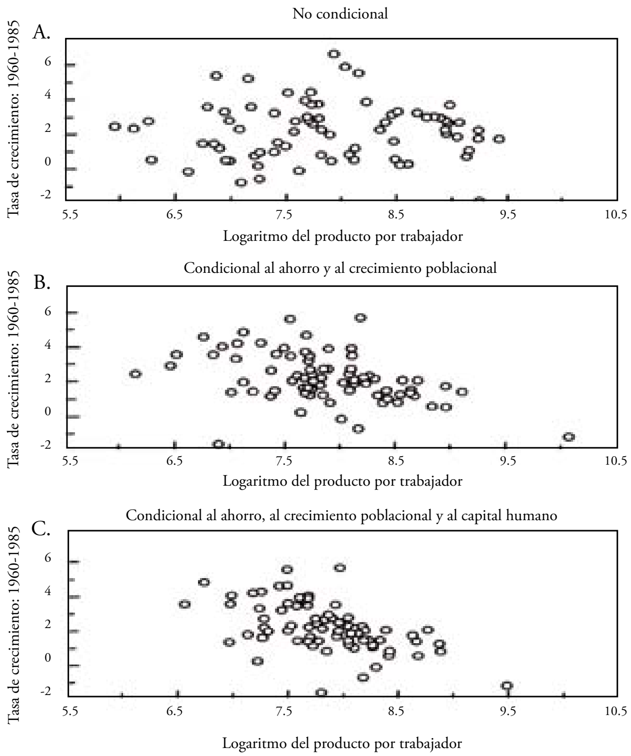
Los resultados de Mankiw, Romer y Weil (1992) sobre el análisis de la convergencia para una muestra de 75 países a lo largo del período 1960-1985 se muestran en el gráfico 2.5. En él se presenta la relación entre la tasa de crecimiento del PBI per cápita promedio anual de 1960 a 1985 (eje de ordenadas) y el logaritmo del producto por trabajador en 1960 (eje de abscisas). Si se formara una relación inversa entre estas variables, la hipótesis de convergencia sería validada empíricamente para estos países. Los autores encontraron que la hipótesis de convergencia absoluta es claramente rechazada, pues como se aprecia en el panel superior del gráfico, no se visualiza una relación clara entre la tasa de crecimiento y el nivel de producto per cápita inicial.

Si se elimina el efecto de las tasas de ahorro y de crecimiento de la población sobre la tasa de crecimiento de los países, sí hay evidencia de convergencia. Como se aprecia en el panel medio del gráfico 2.5, hay una relación inversa entre la tasa de crecimiento del producto y el logaritmo del producto por trabajador. Es decir, se valida la hipótesis de convergencia condicional, pues luego de controlar por las diferencias en los parámetros entre países, los países más pobres estarían creciendo más rápido que los países más ricos. Asimismo, los autores encuentran que, si se controla además por las diferencias entre el capital humano en los países de la muestra, la hipótesis de convergencia condicional es fuertemente respaldada por la evidencia empírica (en el panel inferior del gráfico, la relación inversa entre las variables es más notoria).

Por su parte, Barro y Sala-i-Martin (1992) afirman que en 48 estados contiguos de los Estados Unidos para el período 1880-1988 y en 22 países de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OECD por sus siglas en inglés) para el período 1960-1985, la hipótesis de convergencia absoluta es aceptada. Esto se explica pues estas economías son similares en cuanto a la tecnología y tasas de ahorro. De este modo, los niveles de producto per cápita en el estado estacionario no difieren significativamente entre estados o entre países. Por lo tanto, en estos casos, la convergencia absoluta y la convergencia condicional son equivalentes. Asimismo, Barro y Sala-i- Martin (1991) habían encontrado evidencia de convergencia absoluta entre las regiones de Francia y las prefecturas de Japón. No obstante, para una muestra de 98 países con distintos niveles de desarrollo, para el período 1960-1985 (la misma muestra que trabajaron Mankiw, Romer y Weil de 1992), Barro y Sala-i-Martin (1991) únicamente encontraron evidencia de convergencia condicional.

Por otro lado, Galor (1996: 1057) sostiene que la validación de la hipótesis de convergencia condicional en el modelo neoclásico se halla muy relacionada con la noción de que cada economía está caracterizada por un estado estacionario con un único equilibrio globalmente estable. Sin embargo, si los sistemas dinámicos del modelo estuvieran caracterizados por un estado estacionario con múltiples equilibrios

Gráfico 2.5
Evidencia empírica sobre la convergencia



Convergencia no condicional versus convergencia condicional

Fuente: Mankiw, Romer y Weil (1992), pp.427.

localmente estables, entonces surgiría la hipótesis de convergencia condicional «club». La hipótesis de convergencia condicional «club» señala que los países con características estructurales semejantes convergen al mismo nivel de producto per cápita de estado estacionario si sus niveles de producto per cápita iniciales también eran similares. Si los países tenían distintos niveles iniciales de PBI per cápita, aún si comparten los mismos parámetros, es probable que los países con menor PBI per cápita converjan a un nivel de estado estacionario menor.

Cómo realizar un test de convergencia condicional

La forma de realizar un test de hipótesis de convergencia condicional es muy similar a la hipótesis de convergencia absoluta. Por lo general se ha puesto a prueba por el método de panel data (entre países o regiones), pero a diferencia de la convergencia absoluta, ahora necesitamos controlar por las características estructurales propias de cada país.

Convergencia absoluta	$\ln y_{i,t} - \ln y_{i,t=0} = \beta \ln y_{i,t=0} + u$
Convergencia condicional	$\ln y_{i,t} - \ln y_{i,t=0} = \beta_1 \ln y_{i,t=0} + X_{i,t=0}\beta_2 + \eta_i + \eta_t + u_i$

Para ello, incluimos en la regresión un conjunto de variables independientes en el período inicial que explican la tasa de crecimiento para cada país, representadas por $x_{i,t=0}$. Además incluimos un efecto específico del país i, η_i, el cual recoge los efectos que no son capturados en $x_{i,t=0}$, utilizado como una variable proxy del estado estacionario al que convergen los distintos países, como por ejemplo, variables no observables que representan las diferencias de tecnología entre países. Por su parte, η_t es una variable que recoge el efecto temporal.

Otra forma de expresar la regresión es:

$$\ln y_{i,t} = (1+\beta_1)\ln y_{i,t=0} + X_{i,t=0}\beta_2 + \eta_i + \eta_t + u_i$$

$$\ln y_{i,t} = \pi \ln y_{i,t=0} + X_{i,t=0}\beta_2 + \eta_i + \eta_t + u_i$$

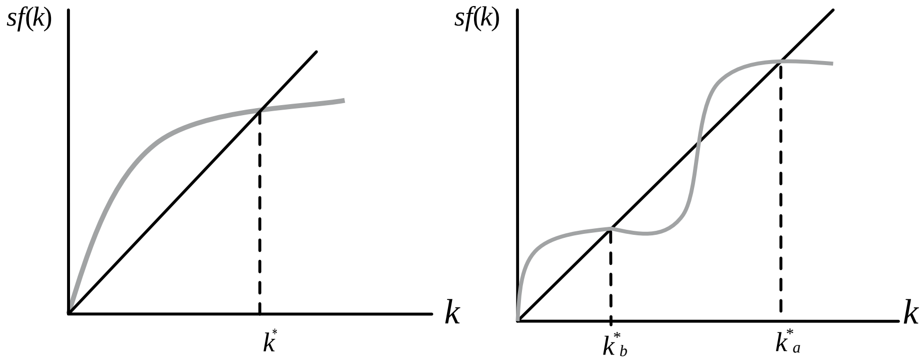
Donde $\pi = 1 + \beta_1$ y $0 \leq \pi \leq 1$. En este caso, la hipótesis de convergencia condicional implica que $\pi < 1$. Sin embargo, Caselli, Esquivel y Lefort (1996) señalan que estas regresiones presentan dos errores que generan que los resultados de la estimación no sean consistentes. Primero, existe correlación positiva entre los regresores η_i y $\ln(y_{i,t=0})$ que origina que el estimador π esté sobreestimado, y de este modo, la velocidad de convergencia, β_1, estará subestimada (recordemos que $\beta_1 \in [-1,0]$.

En segundo lugar, existe un grupo de variables consideradas en el conjunto $X_{i,t=0}$ que presentan problemas de endogeneidad con la tasa de crecimiento, por lo tanto, hay un problema de inconsistencia de los estimadores. Lamentablemente, algunos de los trabajos realizados abordan algunas de estas deficiencias utilizando técnicas de estimación de panel, pero no solucionan los dos inconvenientes a la vez. Para solucionar los dos problemas al mismo tiempo, Caselli, Esquivel y Lefort (1996) presentan una estimación de panel dinámico con estimadores por el método generalizado de momentos (para detalles técnicos, véase el apéndice de Caselli y otros 1996). De este modo, los autores encuentran que la velocidad ▶

de convergencia, β_1 , es alrededor de 10%, mayor que el 2% generalmente aceptado, pues los estimadores anteriores eran ampliamente subestimados.
Esta mayor velocidad de convergencia implica que los países tardan cerca de siete años en aproximarse a la mitad de la distancia entre su posición inicial y su nivel de estado estacionario (si la velocidad es de 2% a 3%, al país le tomaría 30 años recorrer esta distancia). En consecuencia, las diferencias significativas en los niveles de producto per cápita entre países serían explicadas por diferencias en los valores del producto per cápita del estado estacionario entre países (Caselli y otros 1996: 25).

En el modelo neoclásico de un solo sector, la función de producción per cápita, al igual que la función de ahorro, es estrictamente cóncava en el ratio capital–trabajo. Por lo tanto, el estado estacionario está caracterizado por un único equilibrio estable. No obstante, si el modelo incluye individuos heterogéneos, de manera que las tasas de ahorro de los asalariados sean diferentes a las tasas de ahorro de los capitalistas, entonces, la función de ahorro dejaría de ser estrictamente cóncava. Por lo tanto, el estado estacionario podría estar caracterizado por múltiples equilibrios localmente estables.

Gráfico 2.6
Equilibrio único vs. múltiples equilibrios



En el gráfico 2.6 se presentan dos funciones de ahorro distintas. En el panel izquierdo se presenta la función neoclásica de ahorro per cápita convencional, la cual da lugar a un estado estacionario con un solo equilibrio. En este modelo es probable la convergencia condicional. Esta hipótesis establece que, si las economías comparten los parámetros fundamentales, su *stock* de capital per cápita convergerá en el largo plazo al nivel de estado estacionario k^*.

Distintos conceptos de convergencia

La literatura sobre convergencia abarca distintos conceptos de convergencia, de los cuales solo hemos presentado algunos. A continuación se señala brevemente los principales conceptos relacionados con las pruebas de convergencia (para una revisión detallada del tema véase Islam 2003). Naturalmente, estos conceptos no se hallan desvinculados, y en algunos casos son equivalentes.

1. Convergencia entre países o dentro de un solo país

Como ya se mencionó, la hipótesis de convergencia puede analizarse como una comparación entre distintos países o como un tema de tránsito de una economía desde un estado de desarrollo inicial hacia su nivel de estado estacionario.

2. Convergencia de tasas de crecimiento, niveles de ingreso o productividad

Si toda la economía compartiera el mismo nivel de progreso técnico, en el estado estacionario todas crecerían a la misma tasa. Si además, las economías tuvieran la misma función de producción, convergerían en el estado estacionario al mismo nivel de producto. Sin embargo, la convergencia en cuanto a niveles de producto o ingreso depende de la acumulación de capital y de la evolución de la productividad total de factores (PTF). Por lo tanto, otra hipótesis de convergencia consiste en investigar si los niveles de PTF de los distintos países se están acercando en el tiempo.

3. Convergencia β o convergencia σ

Anteriormente señalamos que las pruebas de hipótesis β se centran en el análisis de la relación entre el nivel inicial de producto y la tasa de crecimiento de la economía. Por otro lado, los test de convergencia σ se basan en el análisis de la dispersión entre los niveles de ingreso de los países.

4. Convergencia absoluta o convergencia condicional

Este es el debate más famoso entre la literatura de convergencia. Como hemos visto, la convergencia absoluta sostiene que todos los países convergerán al mismo nivel de producto de estado estacionario (pues los países pobres crecen más rápido que los ricos). La convergencia condicional incorpora el efecto de los distintos parámetros de los países y señala que cada economía convergerá a un nivel de estado estacionario distinto, dependiendo de sus parámetros particulares.

5. Convergencia global o convergencia «club»

También hemos mencionado el debate acerca de la convergencia global y la convergencia «club». Este debate guarda relación directa con la posibilidad de que la economía presente un único equilibrio de estado estacionario (convergencia global) o múltiples equilibrios (convergencia «club»).

En el panel derecho se presenta una función de ahorro con dos equilibrios. En este caso, podría cumplirse la hipótesis de la convergencia condicional «club». Este tipo de convergencia establece que, aún si las economías comparten los mismos parámetros fundamentales, los países pueden converger a distintos niveles de capital per cápita y producto per cápita, dependiendo de los niveles de capital per cápita y producto per cápita iniciales. De este modo, asumiendo los mismos parámetros para un grupo de países, aquellos con bajos niveles de capital per cápita y PBI per cápita inicial convergerán a un nivel k^*_b, inferior al nivel k^*_a, al cual convergerán los países que gozaban de un mayor nivel de *stock* de capital per cápita y producto per cápita inicial.

Por lo tanto, la convergencia «club» implica que, incluso dentro de grupos de países con características estructurales muy similares, habrá cierta tendencia a la polarización, pues algunos países convergen a niveles menores de producto per cápita mientras otros convergen a niveles más elevados. El trabajo de Galor (1996) señala que existe evidencia empírica que respalda la hipótesis de la convergencia condicional «club» en modelos neoclásicos que incorporan nuevos elementos como capital humano, desigualdad en la distribución del ingreso, imperfecciones en los mercados de capitales, entre otros.

No obstante, a pesar del respaldo empírico que tienen las hipótesis de convergencia condicional (ya sea en su versión global o «club») debe tenerse en cuenta que el éxito del proceso de crecimiento económico, depende también de factores sociales y políticos. De este modo, Pipitone (1994) sostiene que si la hipótesis de convergencia fuese válida, el problema del atraso económico experimentado por algunos países sería solo un problema temporal, pues en el largo plazo se llevaría a cabo el proceso de transferencia y difusión tecnológica que permita asegurar la convergencia de los países con menor *stock* de capital per cápita a los niveles de las economías líderes. Sin embargo, continúa el autor, el atraso económico se cimienta sobre una «fisiología socioeconómica», es decir, sobre formas específicas de relación entre economía, sociedad y política, por lo cual el proceso de desarrollo no puede depender exclusivamente de factores de económicos y tecnológicos (Pipitone 1994: 254).

El enfoque de series de tiempo

Cronológicamente, las pruebas de convergencia empezaron empleando una metodología de corte transversal, la cual permite realizar pruebas de convergencia absoluta entre países o regiones, como también pruebas de convergencia β y σ. Posteriormente se utilizó el método de datos de panel para realizar pruebas de convergencia condicional. Finalmente, el método de series de tiempo ha sido empleado para probar la convergencia dentro de una economía y entre países. Según Solow (1970) el modelo neoclásico se enfoca en la convergencia de una economía hacia su nivel de estado estacionario y no de convergencia entre países. Por lo tanto, de esta perspectiva, la forma de probar que una economía se acerca a su nivel de estado estacionario requiere de un enfoque temporal (Islam 2003: 332).

Dentro de un país, la prueba de convergencia consiste en un test de raíz unitaria del siguiente modelo:

$$\ln y_t = \beta_0 + (1+\beta_1)\ln y_{t-1} - \beta_1 gt + u_t$$

Es decir, la existencia de convergencia implica que el término $1 + \beta_1$ sea menor que 1, es decir, que $\beta_1 < 0$.

Las pruebas de convergencia entre países también pueden desarrollarse utilizando series de tiempo. Esta prueba de hipótesis señala que dos economías, i y j, convergen, si sus niveles de producto per cápita ($y_{i,t}$ y $y_{j,t}$) satisfacen la siguiente ecuación:

$$\lim_{k\to\infty} E\left(y_{i,t+k} - a y_{j,t+k} / \Omega_t\right) = 0$$

Donde Ω_t es el conjunto de información disponible en el período t. Es decir, si solo existieran dos economías, i y j, la prueba de hipótesis consiste en analizar si los niveles de producto de estas economías tienden a acercarse a lo largo del tiempo. Sin embargo, cuando se trata de probar convergencia entre más de dos países, se necesita un valor de referencia con respecto al cual comparar el acercamiento de los niveles de producto de los otros países.

Por lo general, esta referencia es el nivel de producto de la economía líder, pero también puede emplearse como referencia el nivel de producto promedio de la muestra. Asimismo, este enfoque permite realizar pruebas de hipótesis de convergencia absoluta (cuando el parámetro a es igual a uno) y condicional (con $a \neq 1$) (Islam 2003: 316).

El modelo de Solow-Swan en tiempo discreto

La versión básica del modelo de Solow en tiempo discreto consta de las siguientes ecuaciones:

$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$S_t = sY_t$	Función de ahorro
$L_{t+1} = (1 + n)L_t$	Tasa de crecimiento de la fuerza laboral
$I_t = S_t$	Condición de equilibrio
$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t$	Inversión bruta

Reemplazando la función de ahorro en la ecuación para la inversión bruta:

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$$

$$K_{t+1} - sY_t + (1 - \delta) K_t$$

Dividiendo entre L_t, se obtiene:

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = s\frac{Y_t}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

Multiplicando y dividiendo el lado izquierdo de la ecuación por L_{t+1}:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = s\frac{Y_t}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

Haciendo algunos reemplazos se obtiene:

$$(1+n)\, k_{t+1} = s\, y_t + (1-\delta)\, k_t$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)}\left[sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)\, k_t\right]$$

Restando a ambos lados k_t, se obtiene la ecuación neoclásica fundamental del crecimiento:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{(1+n)}\left[sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t\right] - k_t$$

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{(1+n)}\left[sAk_t^{\alpha} + (1-\delta-1-n)k_t\right]$$

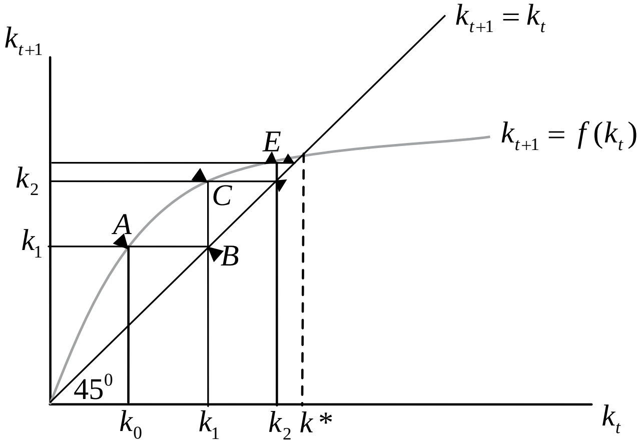
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{(1+n)}\left[sAk_t^{\alpha} - (\delta+n)k_t\right]$$

Esta es una ecuación en diferencias no lineal. Dada la complejidad de la solución, resulta de mayor utilidad caracterizar la trayectoria del capital cerca del equilibrio empleando un diagrama de fase (Chiang 1987: 572). El diagrama de fase es el gráfico de la función $k_{t+1} = f(k_t)$ en el plano (k_t, k_{t+1}).

En el estado estacionario, se cumple que $k_{t+1} = k_t$. Esta igualdad se puede graficar en el plano (k_t, k_{t+1}), como una bisectriz del ángulo recto que forman los ejes de la abscisa y la ordenada. En todos los puntos de la bisectriz se tiene que $k_{t+1} = k_t$.

Dado un valor inicial $k_0 < k^*$, los valores futuros de k se hallan por medio del método iterativo. $k_1 = f(k_0)$ está dado por el punto A, desde el cual se proyecta el valor de k_1 sobre el eje de abscisas a partir de la recta de 45° (punto *B*). Luego, es posible hallar $k_2 = f(k_1)$, $k_3 = f(k_2)$, y así sucesivamente, hasta que $k_{t+1} = k_t$, lo que sucede en el punto *E*.

Gráfico 2.7
Modelo de Solow y la dinámica hacia el equilibrio



Existen distintos tipos de trayectorias temporales. En particular, estas son clasificables de acuerdo a si convergen o no hacia el equilibrio, o si presentan oscilaciones en el tránsito al equilibrio. Si la línea de fase, es decir la ecuación $k_{t+1} = f(k_t)$, presenta las siguientes características:

a) Tiene pendiente positiva.

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n}\left[\alpha\, s\, A\, k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] > 0$$

b) La pendiente, en valor absoluto, es menor a la unidad.

Bajo la condición b) habrá convergencia al equilibrio, mientras que bajo la condición a) la trayectoria hacia el equilibrio será continua y sin oscilaciones (para más detalle, véase Chiang 1987).

Estática comparativa y políticas según el modelo de Solow

Los niveles de k y y en el *steady state* dependen de los parámetros. Si s es mayor, o si la tasa n es menor, la relación k en el estado estacionario sería mayor. Pero la tasa de crecimiento del producto per cápita volvería a ser cero una vez alcanzado el nuevo estado estacionario.

De este modo, las variables exógenas que afectan el crecimiento y el nivel de producto per cápita de la economía y su tasa de crecimiento son principalmente:

- Aumento del ahorro
- Control del crecimiento de la fuerza laboral
- Progreso técnico

Es claro que las políticas para favorecer el crecimiento deben orientarse a aumentar la tasa de ahorro e incentivar el cambio técnico, mediante políticas educativas, tecnológicas, etcétera. Sin embargo, el incremento del ahorro, si bien aumenta la intensidad de capital y el nivel del producto per cápita, no aumenta la tasa de crecimiento de largo plazo del PBI. Por lo tanto, los efectos del aumento de la tasa de ahorro son solo transitorios. Esta afirmación es conocida como la paradoja neoclásica. Esta es una de las principales diferencias entre el modelo de Solow y los modelos Harrod-Domar, pues en ellos la tasa de ahorro sí resulta relevante para la determinación de la tasa de crecimiento de largo plazo.

Por otro lado, cuanto menor es la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, mayor es el nivel producto per cápita. Por ello, los neoclásicos sostienen que es importante aplicar políticas de planificación familiar, sobre todo en países con altas tasas de natalidad. Finalmente, un mayor progreso técnico aumenta la tasa de crecimiento del producto y hace crecer el producto per cápita. Por lo que debe incentivarse la promoción del cambio técnico, variable que es exógena al modelo de crecimiento neoclásico.

La debilidad principal del modelo de Solow es que considera a la tasa de ahorro como un parámetro exógenamente determinado, lo cual claramente carece de fundamentos microeconómicos, pues un agente racional debería optimizar su utilidad para obtener una regla óptima de consumo y derivar residualmente el nivel de ahorro.

Keynesianos vs. neoclásicos

El debate entre keynesianos y neoclásicos gira en torno a la estabilidad del crecimiento con pleno empleo. Como acabamos de ver, los keynesianos sostienen que es poco probable que la tasa natural y la tasa garantizada coincidan con la tasa efectiva de crecimiento. Por otro lado, los neoclásicos sostienen que dicha conclusión se deriva solo bajo el supuesto de que la relación capital–producto esté fija. Al incluir la posibilidad de la sustitución entre factores, este ratio se hace variable. De este modo, bajo el supuesto de proporciones variables y retornos constantes a escala, los neoclásicos señalan que la tasa efectiva de crecimiento tenderá, en el largo plazo, a la tasa garantizada y a la tasa natural.

Por lo tanto la pregunta es si debe asumirse sustitución entre factores o no. Al respecto, Sato (1964: 380) sostiene que las conclusiones que se desprenden del modelo de crecimiento neoclásico dependen fuertemente de qué tan rápido se lleve a cabo el ajuste de la tasa de crecimiento a la tasa natural; en otras palabras, depende de la velocidad a la que se lleva a cabo el proceso de sustitución de factores. De este modo, si el proceso de ajuste es lento o se da a una baja tasa de sustitución entre factores, la relación entre el capital y el trabajo puede ser considerada como fija en términos prácticos.

El autor calcula la velocidad del proceso de ajuste de un equilibrio a otro bajo los supuestos de los modelos neoclásicos. En teoría, en el largo plazo, cuando t tiende a infinito, el ajuste se concreta totalmente. Sin embargo, para consideraciones prácticas, el autor encontró que a una economía desarrollada le tomaría aproximadamente cien años lograr un avance de 90% en el proceso de ajuste de su tasa de crecimiento efectiva hacia la tasa de crecimiento natural. Por lo tanto, si el sistema se desvía de la tasa natural de crecimiento, le tomará al menos un siglo alcanzar la senda de crecimiento con pleno empleo. Asimismo, el autor encontró que elevados valores de la tasa de ahorro de la economía, altas tasas de crecimiento del progreso técnico y bajas tasas de crecimiento de la población contribuyen a disminuir la duración del período de ajuste.

En suma, Sato (1964: 387) concluye que, si bien el modelo neoclásico asegura que la tasa de crecimiento tenderá a la tasa natural en el largo plazo, el proceso de ajuste requiere de un período largo para concretarse. Por lo tanto, dado que la velocidad a la que se lleva a cabo el proceso de sustitución de factores es reducida, suponer que los factores se encuentran prácticamente fijos no resulta muy descabellado.

Modelo de dos sectores

En los primeros años de la década de los sesenta Hirofumi Uzawa publicó su trabajo «On a Two Sector Model of Economic Growth» I y II (1961 y 1963). En este, se exponía un modelo pequeño walrasiano, en el que existen dos sectores:

un sector produce un único bien de consumo homogéneo, mientras que el otro sector produce un bien de capital homogéneo. Ambos sectores presentan factores de producción, capital y trabajo, homogéneos y funciones de producción bien comportadas, es decir, con rendimientos marginales positivos decrecientes y que cumplen las condiciones de Inada.

En el equilibrio, los precios de los bienes de capital, Pm, y de los bienes de consumo, Pc, junto con un salario, w, y un precio por los servicios del capital, r, aseguran que todo el capital y trabajo disponibles se asignan a uno u otro sector. Es decir, existe el pleno empleo. Además, cada sector paga a sus factores el valor de sus productos marginales, cumpliendo así con la condición de maximización de beneficios. El equilibrio, en el cual el ahorro es igual a la inversión, existe y es único. Asimismo, el modelo es estable.

El sector M produce bienes para la inversión, mientras que el sector C produce bienes para el consumo. La producción de cada sector se expresa de la siguiente forma:

(1.a) $Y_m = F_m (K_m, L_m)$ Función de producción sector M

(1.b) $Y_c = F_c (K_c, L_c)$ Función de producción sector C

Debe notarse además que la producción de bienes de capital será igual a la inversión, mientras que el consumo de la economía viene dado por la producción total de bienes de consumo.

(2) $\dot{K} + \delta K = F_m (K_m, L_m)$ Inversión bruta

(3) $C = F_c (K_c, L_c)$ Consumo

De este modo, el equilibrio macroeconómico establece que el producto agregado es igual al consumo y la inversión:

(4) $Y = C + I$ Ecuación de equilibrio macroeconómico

Existe libre movilidad de factores entre sectores, sin costos. Asimismo, el capital es maleable en el sentido de que puede utilizarse en cualquier relación capital–trabajo.

(5.a) $\overline{K} = K_m + K_c$

(5.b) $\overline{L} = L_m + L_c$

Las funciones de producción de ambos sectores pueden ser expresados en términos per cápita. Para simplificar la notación, se omiten los subíndices de las funciones de producción. No obstante, el que las funciones no tengan subíndices, no significa que las tecnologías sean idénticas.

(6.a) $y_m = f(k_m)$ Función de producción per cápita sector M

(6.b) $y_c = f(k_c)$ Función de producción per cápita sector C

Se asume que la fuerza laboral, L, crece a la tasa exógena n. Se supone también que la oferta de trabajo es inelástica al salario real, es decir, no es afectada por este. El modelo supone que el *stock* de capital se deprecia a una tasa constante δ, independientemente de su empleo en cualquier sector. Asimismo, asumiendo competencia perfecta, el equilibrio implica que los factores en ambos sectores son pagados de acuerdo con los valores de sus productos marginales. Adicionalmente, se establece que los precios nominales de los factores son iguales en ambos sectores.

(7) $$w_n = P_m \frac{\partial Y_m}{\partial L_m} \quad ; \quad w_n = P_c \frac{\partial Y_c}{\partial L_c}$$

(8) $$r_n = P_m \frac{\partial Y_m}{\partial K_m} \quad ; \quad r_n = P_c \frac{\partial Y_c}{\partial K_c}$$

Donde w_n y r_n son el salario nominal y la tasa de retorno nominal, respectivamente. La relación salario-beneficio en cada sector será igual a:

(9.a) $$\frac{w_n}{r_n} = \frac{P_m \frac{\partial Y_m}{\partial L_m}}{P_m \frac{\partial Y_m}{\partial K_m}}$$ Relación salario-beneficio en el sector M

(9.b) $$\frac{w_n}{r_n} = \frac{P_c \frac{\partial Y_c}{\partial L_c}}{P_c \frac{\partial Y_c}{\partial K_c}}$$ Relación salario-beneficio en el sector C

Los precios de los bienes se eliminan. Así la relación w / r en cada sector viene dada por la relación entre los productos marginales físicos del trabajo y del capital.

Como se cumple el teorema de Euler, en cada industria el salario debe ser igual a:

(10.a) $w_n = P_m y_m - k_m P_m f'(k_m)$ Salario en el sector M

(10.b) $w_n = P_c y_c - k_c P_c f'(k_c)$ Salario en el sector C

En consecuencia, la relación salario-beneficio será igual a:

$$\frac{w_n}{r_n} = \frac{P_m y_m - k_m P_m f'(k_m)}{P_m f'(k_m)}$$

$$\frac{w_n}{r_n} = \frac{P_c y_c - k_c P_c f'(k_c)}{P_c f'(k_c)}$$

Puede simplificarse de la siguiente manera:

(11.a) $\frac{w_n}{r_n} = \frac{y_m}{f'(k_m)} - k_m$

(11.b) $\frac{w_n}{r_n} = \frac{y_c}{f'(k_c)} - k_c$

Se supone que todos los beneficios son ahorrados y todos los salarios son consumidos, es decir, la propensión a ahorrar de los capitalistas es igual a 1 y la propensión a ahorrar de los trabajadores es igual a cero. Por lo tanto:

(12) $w_n L = P_c Y_c$ Salarios totales = Producción total de bienes de consumo

(13) $r_n K = P_m Y_m$ Beneficios totales = Producción total de bienes de capital

Esta es la ecuación de la igualdad ahorro-inversión, pues los beneficios constituyen el ahorro de la economía y la producción de bienes de capital es la inversión.

De las ecuaciones de inversión bruta y de beneficios totales, se puede obtener la tasa de crecimiento del *stock* de capital:

$\dot{K} = I - \delta K = Y_m - \delta K$ Inversión neta

$\frac{r_n K}{p_m} = I$ Inversión bruta

Puesto que: $I = Y_m = \frac{r_n}{p_m} K$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de K será:

(14) $\frac{\dot{K}}{K} = \frac{r_n}{p_m} - \delta$

(15) $\frac{\dot{K}}{K} = f'(k_m) - \delta$

El producto marginal del capital en el sector de la producción de bienes de inversión es:

(16) $r_n = p_m \frac{\partial F_m}{\partial K_m} = p_m f'(k_m)$

Entonces: $\frac{\partial F_m}{\partial K_m} = f'(k_m) = \frac{r_n}{p_m}$

La producción del sector de maquinaria se utiliza para producir incrementos netos en el *stock* de capital y para reemplazar las máquinas que se han depreciado durante el período de producción.

La ecuación (15) se reemplaza en la ecuación de la tasa de crecimiento de la intensidad de capital representada en la siguiente expresión:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

De este modo se obtiene la ecuación fundamental del modelo de dos sectores:

(17) $\frac{\dot{k}}{k} = f'(k_m) - (\delta + n)$

Donde n es la tasa de crecimiento de la fuerza laboral total $\dot{L}/L$. De este modo, la tasa de crecimiento del capital per cápita es la diferencia del producto marginal del capital del sector de maquinaria, neta de depreciación, respecto de la tasa de crecimiento de la fuerza laboral.

La tasa de crecimiento de la relación capital–trabajo (intensidad de capital), k, es la tasa a la que crece el capital per cápita del conjunto de la economía. La relación K/L total es una media ponderada de las relaciones capital–trabajo de cada sector.

La ecuación fundamental del modelo se puede escribir también así:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\partial Y_m}{\partial K_m} - (\delta + n)$$

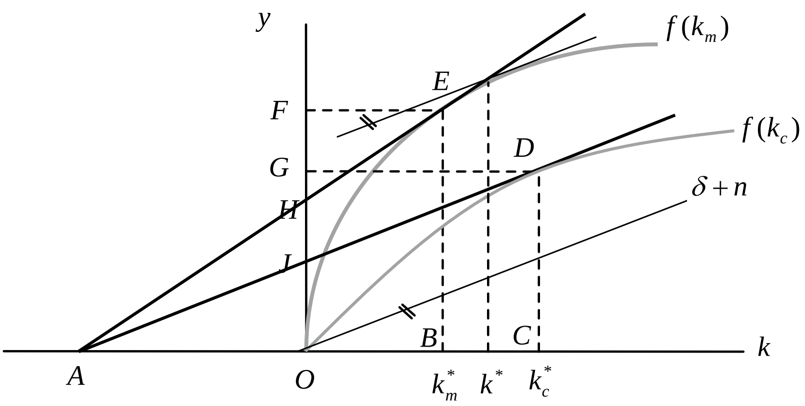
Cuando la economía está en su tasa de crecimiento balanceada, la relación capital–trabajo está constante, es decir, k no varía. En consecuencia:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial K_m} = \delta + n$$

Esto ocurre cuando el producto marginal del capital en el sector productor de máquinas o de capital se iguala a la suma de las tasas constantes de depreciación y de crecimiento de la fuerza laboral.

El gráfico 2.8 ilustra el equilibrio en el modelo de dos sectores. El punto *E* corresponde al estado estacionario en el sector productor de maquinarias. El punto *D* es el que corresponde al estado estacionario del sector productor de bienes de consumo. Entonces, en *E*, la $f'(k_m)$ es igual a $n + \delta$. Asimismo, la relación capital–trabajo de equilibrio en el sector de maquinaria (k^*_m) es igual al segmento $\overline{OB} = \overline{FE}$, mientras que en el sector de bienes de consumo, la relación capital–trabajo de equilibrio (k^*_c) es igual al segmento $\overline{OC} = \overline{GD}$.

Gráfico 2.8
Modelo de dos sectores



Por lo tanto, si queremos hallar la remuneración real del capital en el sector de maquinarias, es decir, el producto marginal de k^*_m, tenemos:

$$\frac{r_n}{P_m} = \frac{\partial Y_m}{\partial K_m} = n + \delta$$

Sabemos que el producto marginal de k^*_m en el gráfico es igual a la tangente del ángulo formado por la recta *AE* y el eje de abscisas, ángulo *EAB*. Por lo tanto, $f'(k^*_m)$ es igual a:

$$f'(k^*_m) = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}$$

Sin embargo, dado que este ángulo, es igual al ángulo *FEH*, pues se trata de ángulos alternos internos (nótese que el segmento *FE* es paralelo al eje de abscisas). Por lo tanto,

$$f'(k^*_m) = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{FE}}$$

De este modo, $r_n = P_m \dfrac{\overline{HF}}{\overline{FE}}$

Asimismo, los beneficios en el sector M serán:

$$r_n k_m = P_m k_m \frac{\overline{HF}}{\overline{FE}} = P_m FE \frac{\overline{HF}}{\overline{FE}} = Pm\overline{HF}$$

El producto per cápita en el sector de maquinarias es $P_m \overline{OF}$; por lo tanto, el salario se obtiene restando a este producto los beneficios obtenidos en el sector.

$$w_n = P_m \overline{OF} - P_m \overline{FH}$$

$$w_n = P_m (\overline{OF} - \overline{FH}) = P_m \overline{OH}$$

Se puede mostrar fácilmente que el segmento $\overline{OA}$ es igual a la relación w_n / r_n.

Como $w_n = Pm\overline{OH}$ y $r_n = Pm\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA}}$, entonces:

$$\frac{w_n}{r_n} = \frac{Pm\overline{OH}}{\dfrac{Pm\overline{OH}}{\overline{OA}}} = \overline{OA}$$

Podemos aplicar el mismo procedimiento para identificar la distribución del ingreso en el sector de bienes de consumo. Recuérdese que el crecimiento es balanceado y hay competencia perfecta.

$$r_n k_c = P_c \overline{JG}$$

$$r_n = P_c \frac{\overline{JG}}{\overline{OC}} = P_c \frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}}$$

Por su parte, el salario en el sector de bienes de consumo y la relación salario-beneficio serán:

$$w_n = P_c \overline{OJ}$$

$$r_n = P_c \frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}}$$

$$\frac{w_n}{r_n} = \frac{P_c \overline{OJ}}{\dfrac{P_c \overline{OJ}}{\overline{OA}}} = \overline{OA}$$

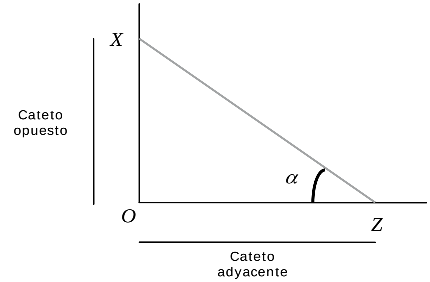
Para el análisis del gráfico

La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por lo tanto, el producto marginal de k_m en el sector de maquinaria es igual a la pendiente de la recta tangente a $f\,(k_m)$ en el punto k^*_m. Recordemos que para hallar la tangente, se aplica la siguiente fórmula.

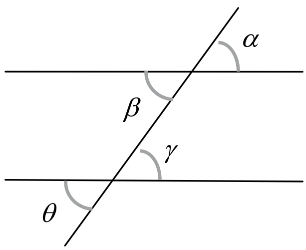
Tangente del ángulo α:

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

$$Tan(\alpha) = \frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}}$$



Por otro lado, resulta útil recordar las propiedades geométricas de los ángulos. Si tenemos dos rectas paralelas cortadas por una recta secante, los ángulos que se encuentren por encima y debajo de las rectas, a lados alternos de la secante son denominados ángulos alternos externos y son iguales. Los ángulos que se encuentran entre las paralelas a lados alternos de la secante son llamados ángulos alternos internos y también son iguales. Asimismo, los ángulos opuestos por el vértice son aquellos formados por la proyección de los segmentos que forman el ángulo hacia el lado opuesto.



$\alpha = \beta = \gamma = \theta$

Ángulos alternos externos:

α y $\theta \;\rightarrow \alpha = \theta$

Ángulos alternos internos:

β y $\gamma \;\rightarrow \beta = \gamma$

Ángulos opuestos por el vértice:

α y $\beta \;\rightarrow \alpha = \beta$

θ y $\gamma \;\rightarrow \theta = \gamma$

La relación salario-beneficio real es la misma para ambos sectores como resultado de la competencia. Podemos hallar además la proporción de la fuerza laboral empleada en el sector de bienes de consumo. Dado que todos los salarios se gastan en bienes de consumo, los salarios totales de la economía deben ser iguales al producto del sector consumo.

$$w_n L = P_c L_c \overline{OG}$$

$$w_n L_c = P_c L_c \overline{OJ}$$

$$\frac{w_n L_c}{w_n L} = \frac{P_c L_c \overline{OJ}}{P_c L_c \overline{OG}}$$

$$\frac{L_c}{L} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OG}}$$

Por otro lado, la relación capital–trabajo total es un promedio ponderado de las participaciones del trabajo de cada sector en el trabajo total.

$$\frac{K}{L} = \frac{K_m + K_c}{L} = \frac{K_m}{L_m}\frac{L_m}{L} + \frac{K_c}{L_c}\frac{L_c}{L}$$

$$\frac{K}{L} = k_m \frac{L_m}{L} + k_c \frac{L_c}{L}$$

Para Uzawa (1961; 1963), la estabilidad exige que la relación capital–trabajo del sector C sea mayor que la relación capital–trabajo del sector M. Si la relación capital–trabajo en el sector de bienes de consumo es mayor que la relación capital–trabajo del sector de maquinarias, existe el equilibrio y es estable.

$$k_c \; > \; k_m$$

Nótese además que $k_c^* > k^* > k_m^*$ y $k^* = \frac{L_m}{L} k_m^* + \left(1 - \frac{L_m}{L}\right) k_c^*$.

La ecuación fundamental nos indica cuando crece o decrece la relación capital–trabajo total:

- Si $f'(k_m) > n + \delta \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{k}}{k} > 0$ La relación capital–trabajo total aumenta.
- Si $f'(k_m) < n + \delta \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{k}}{k} < 0$ La relación capital–trabajo total disminuye.

Para que haya estabilidad, ambos lados de la ecuación deben tender a cero, es decir, a una relación capital–trabajo constante.

- Si k está creciendo, entonces $f'(k_m)$ debe disminuir. Esto significa que k_m debe aumentar hasta que su productividad marginal se iguale a la constante $n + \delta$.
- Si k está disminuyendo, entonces $f'(k_m)$ debe aumentar. Esto significa que k_m debe disminuir hasta que su productividad marginal se iguale a la constante $n + \delta$.

El modelo es estable porque k y k_m varían en la misma dirección. Si la relación w_n / r_n aumenta, las relaciones k_m y k_c de ambos sectores aumentan, pues al disminuir el precio del factor capital en relación al factor trabajo, aumentará la demanda por capital en ambos sectores debido a que resulta más rentable sustituir un factor más costoso (trabajo) por un factor relativamente más barato (capital). Otra forma de explicar esto es recordar que la demanda del factor de producción depende directamente de su precio, por lo tanto, cuando disminuye el precio del capital aumentará la cantidad demandada de capital. Como una relación capital–trabajo mayor es acompañada de una w_n / r_n mayor, el modelo es estable. Pero falta explicar por qué $k_c > k_m$.

De las ecuaciones de salario total y beneficio total, se obtiene:

$$w_n L = P_c Y_c \qquad ; \qquad r_n K = P_m Y_m$$

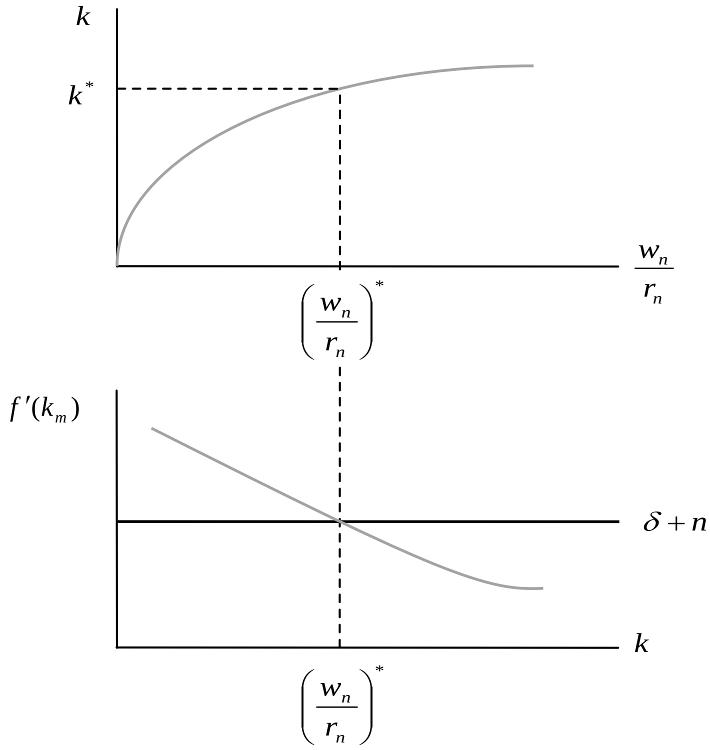
$$\frac{r_n K}{w_n L} = \frac{P_m Y_m}{P_c Y_c} \qquad \rightarrow \qquad \frac{K}{L} = \frac{w_n P_m Y_m}{r_n P_c Y_c}$$

Un incremento de w_n / r_n debe elevar P_m / P_c, si $k_c > k_m$. Como w / r es la misma para ambos sectores, bajo condiciones de competencia perfecta y rendimientos constantes a escala, un incremento de la relación salario–tasa de beneficio (w_n / r_n), genera un aumento de los precios relativos P_m / P_c. Es decir, el precio de los bienes de capital aumentará en relación al precio de los bienes de consumo, pues, por ser una industria más intensiva en trabajo, el sector de maquinarias debe pagar una mayor proporción de su producto en salarios. En otras palabras, un incremento de w_n / r_n aumenta P_m / P_c, porque los salarios son una parte más importante de los costos unitarios en el sector de maquinaria que en el sector de bienes de consumo.

Cuando w_n / r_n y P_m / P_c aumentan, la relación k (y k_m) aumentan, siempre que Y_m / Y_c no disminuya de forma tal que deje inalterado a k. Si Y_m / Y_c disminuye, la producción del sector de bienes de consumo aumenta en relación a la producción del sector de maquinarias.

Por lo tanto, si el sector de bienes de consumo es siempre más intensivo en capital que el sector de maquinarias, k debe variar en la misma dirección que la relación w_n / r_n y en la misma dirección que k_m. En conclusión, la solución del modelo es

Gráfico 2.9
Modelo de dos sectores



estable cuando el sector de bienes de consumo se encuentra más mecanizado que el de bienes de capital.

Para el conjunto de la economía, si w_n / r_n aumenta, k aumenta; sin embargo, si w_n / r_n sigue aumentando, k aumentará cada vez menos, por la forma cóncava de la relación capital–trabajo en función del ratio w_n / r_n que se muestra en el panel superior del gráfico 2.9. Asimismo, a medida que k aumenta, su productividad marginal disminuye. De la ecuación fundamental de Uzawa sabemos que:

$$f'(k_m) = n + \delta$$

Al respecto, Solow señala que «la condición crucial que establece que el sector de consumo sea más intensivo en capital es una condición suficiente para la estabilidad de este modelo, pero no necesaria» (1961: 50). Para probar esto, Solow (1961) plantea una función de producción Cobb-Douglas en cada sector:

Sector de maquinaria

$$F_m = K_m^{\alpha_m} L_m^{(1-\alpha_m)}$$

$$F'(K_m) = \alpha_m K_m^{\alpha_m - 1} L_m^{(1-\alpha_m)}$$

$$F'(K_m) = \frac{r_n}{p_m} = \alpha_m \left(\frac{L_m}{K_m} \right)^{1-\alpha_m}$$

$$r_n = \alpha_m p_m \left(\frac{L_m}{K_m} \right)^{1-\alpha_m} \frac{K_m^{\alpha_m} K_m^{(1-\alpha_m)}}{K_m}$$

$$r_n K_m = \alpha_m p_m Y_m$$

Sector de bienes de consumo

$$F_c = K_c^{\alpha_c} L_c^{(1-\alpha_c)}$$

$$F'(K_c) = \alpha_c K_c^{\alpha_c - 1} L_c^{(1-\alpha_c)}$$

$$F'(K_c) = \frac{r_n}{p_c} = \alpha_c \left(\frac{L_c}{K_c} \right)^{1-\alpha_c}$$

$$r_n = \alpha_c p_c \left(\frac{L_c}{K_c} \right)^{1-\alpha_c} \frac{K_c^{\alpha_c} K_c^{(1-\alpha_c)}}{K_c}$$

$$r_n K_c = \alpha_c p_c Y_c$$

$$r_n K_m + r K_c = \alpha_m p_m Y_m + \alpha_c p_c Y_c$$

$$r_n (K_m + K_c) = \alpha_m p_m Y_m + \alpha_c p_c Y_c$$

$$r_n K = \alpha_m p_m Y_m + \alpha_c p_c Y_c$$

Como ya se mencionó que el valor del capital debe ser igual al valor del producto del sector de bienes de capital:

$$r_n K = p_m Y_m$$

Entonces:

$$p_m Y_m = \alpha_m p_m Y_m + \alpha_c p_c Y_c$$

$$(1 - \alpha_m) p_m Y_m = \alpha_c p_c Y_c$$

$$p_m Y_m = \frac{\alpha_c}{(1 - \alpha^m)} p_c Y_c$$

$$\frac{p_m Y_m}{p_c Y_c} = \frac{\alpha_c}{(1 - \alpha_m)}$$

También se especificó anteriormente que los beneficios se invierten mientras que los salarios se gastan en bienes de consumo, por lo tanto:

$$\frac{p_m Y_m}{p_c Y_c} = \frac{r_n K}{w_n L}$$

$$\frac{r_n K}{w_n L} = \frac{\alpha_c}{1 - \alpha_m}$$

Dado que tanto α_m como α_c son constantes, el ratio del lado derecho es constante. Por lo tanto, ante un incremento de w_n / r_n, k aumenta. Por lo tanto, Solow concluye que: «cuando r_n / w_n cae (k_m aumenta), K / L debe aumentar. Nuevamente, k_m y k se mueven en la misma dirección y el modelo es estable, independientemente de qué sector es más intensivo en capital (sin importar si α_m sea menor o mayor que α_c)» (1961: 50).

Podemos demostrar que los coeficientes α_m y α_c representan el grado de intensidad de uso de factores. Por el teorema de Euler, en términos per cápita, tenemos:

Sector de maquinaria

$$P_m y_m = r_n k_m + w_n$$

$$P_m y_m = \frac{r_n}{P_m}\frac{k_m}{y_m} P_m y_m + w_n$$

$$P_m y_m = \alpha_m P_m y_m + w_n$$

$$w_n = (1-\alpha_m) P_m y_m$$

Sector de bienes de consumo

$$P_c y_c = r_n k_c + w_n$$

$$P_c y_c = \frac{r_n}{P_c}\frac{k_c}{y_c} P_c y_c + w_n$$

$$P_c y_c = \alpha_c P_c y_c + w_n$$

$$w_n = (1-\alpha_c) P_c y_c$$

Donde r y w son la tasa de retorno al capital real y el salario real. Los coeficientes de la función de producción Cobb-Douglas α_m y α_c representan la participación de la remuneración del factor capital en el sector de maquinarias y de consumo, respectivamente.

$$\alpha_m = \frac{r}{P_m}\frac{k_m}{y_m} \quad , \quad \alpha_c = \frac{r}{P_c}\frac{k_c}{y_c}$$

Dado que el salario nominal es el mismo en ambos sectores tenemos:

$$w_n = (1-\alpha_m) P_m y_m = (1-\alpha_c) P_c y_c$$

$$\frac{P_m y_m}{P_c y_c} = \frac{(1-\alpha_c)}{(1-\alpha_m)}$$

Como se mencionó, α_m y α_c son constantes, por lo tanto, el ratio del valor del producto en el sector de maquinaria sobre el valor del producto en el sector de consumo también es constante. Dependiendo del valor nominal del producto de cada sector tenemos tres escenarios:

a) Si $P_m y_m = P_c y_c$, entonces $\alpha_c = \alpha_m$

$$(1-\alpha_c) = (1-\alpha_m)$$
$$-\alpha_c = -\alpha_m$$

b) Si $P_m y_m > P_c y_c$, entonces $\alpha_c < \alpha_m$

$$(1-\alpha_c) > (1-\alpha_m)$$
$$-\alpha_c > -\alpha_m$$
$$\alpha_c < \alpha_m$$

c) Si $P_m y_m < P_c y_c$, entonces $\alpha_c > \alpha_m$

$$(1-\alpha_c) < (1-\alpha_m)$$
$$-\alpha_c < -\alpha_m$$
$$\alpha_c > \alpha_m$$

En el segundo caso, cuando $P_m y_m > P_c y_c$, también se cumple que:

$$P_m y_m = r_n k_m + w_n > P_c y_c = r_n k_c + w_n$$
$$r_n k_m + w_n > r_n k_c + w_n$$
$$k_m > k_c$$

Por lo tanto, $\alpha_c < \alpha_m$ es equivalente a □ k_m □ k_c. Es decir, el sector de maquinaria es más intensivo en el uso del factor capital en relación al sector de bienes de consumo. De este modo, una subida en el precio relativo del factor capital representa un mayor costo para el sector de maquinarias, pues el capital representa una mayor parte en el costo de producción en relación al salario. Por ende, este incremento de los costos se traduce en un incremento del precio de los bienes del sector de maquinaria (P_m) en relación al precio de los bienes del sector consumo (P_c).

$$k_m > k_c \approx \alpha_c < \alpha_m$$

Del mismo modo, en el tercer caso, cuando $P_m y_m < P_c y_c$, tenemos:

$$P_m y_m = r_n k_m + w_n < P_c y_c = r_n k_c + w_n$$
$$r_n k_m + w_n < r_n k_c + w_n$$
$$k_m < k_c$$

Por lo tanto, $\alpha_c < \alpha_m$ es equivalente a $k_m < k_c$. Es decir, el sector de consumo es más intensivo en el uso del factor capital en relación al sector de maquinarias. De esta manera, una subida en el precio relativo del factor capital representa un mayor costo para el sector de consumo. Asimismo, este incremento de los costos se traduce en un incremento del precio de los bienes de consumo (P_c) en relación al precio de los bienes de maquinarias (P_m).

$$k_m < k_c \approx \alpha_c > \alpha_m$$

De este modo, la relación entre los coeficientes del factor capital de la función de producción de cada sector, α_m y α_c (los cuales representan las participaciones del ingreso del capital en el ingreso total de cada sector), reflejan también la relación entre las magnitudes del grado de intensidad en el uso del factor capital de cada sector, k_m y k_c.

Finalmente, Solow señala que los resultados del modelo, y su particular condición de estabilidad, dependen fuertemente del supuesto de que los salarios se gastan totalmente en bienes de consumo y los beneficios se invierten. Sin embargo, este supuesto no es muy consecuente con la realidad. De hecho, el ahorro es una fracción del ingreso agregado de la economía. Si se incluyera esta observación en el modelo de Uzawa, continúa Solow (1961), se obtendría resultados parecidos al modelo de un solo de sector y no podría garantizarse la estabilidad del modelo.

2. Modelo neoclásico con optimización del consumo

Hasta ahora hemos abordado modelos en los cuales la tasa de ahorro como un parámetro que se determina de manera exógena. No obstante, las decisiones de ahorro de las familias están estrechamente vinculadas con las decisiones intertemporales de consumo. Pasamos ahora a presentar los modelos con optimización del consumo: los modelos de Ramsey, Cass y Koopmans y el modelo de generaciones de Diamond.

Modelo neoclásico de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans

Este modelo neoclásico se diferencia del modelo de Solow al obtener la trayectoria del consumo de la familia a partir de fundamentos microeconómicos, mediante la solución del problema de maximización intertemporal. De este modo, la tasa de ahorro no es simplemente un porcentaje fijo de la producción, sino un resultado endógeno de las decisiones de los consumidores que el modelo toma en cuenta.

El modelo parte de los siguientes supuestos:

- Los agentes consumidores viven infinitamente y son «idénticos», pues tienen la misma función de utilidad, la cual se considera bien comportada (presenta utilidades marginales decrecientes y cumple con las condiciones de Inada).

- La utilidad agregada de la sociedad en un instante determinado es igual a $u(c)L(t)$, donde L es la población, igual a la fuerza laboral que crece a una tasa exógena n.
- Los agentes consumidores son propietarios de las empresas y perciben sus beneficios. Además, dividen su ingreso entre consumo y ahorro.
- Los mercados son perfectos, por lo que la solución de asignación de recursos de manera descentralizada es igual a la solución obtenida por el planificador central.
- La economía produce un solo bien, con una función de producción neoclásica bien comportada y bajo competencia perfecta. La economía es cerrada.
- Se asume una tasa de depreciación del capital igual a δ y un factor de descuento intertemporal β que permite expresar la utilidad en valor presente.
- El factor de descuento es mayor que la tasa de crecimiento de la fuerza laboral: $\beta - n > 0$

Para la optimización de la trayectoria del consumo, el modelo supone una función objetivo, que es el índice de bienestar social intertemporal de la sociedad, equivalente al índice intertemporal de bienes del individuo representativo multiplicado por el número de individuos. Este índice se obtiene mediante la suma actualizada (por la tasa de descuento intertemporal a lo largo del horizonte infinito) del bienestar en cada período. En tiempo continuo, esta función debe expresarse como una integral:

$$(1)\quad V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} u\left[c(t)\right] L_t \, dt$$

Donde c_t es el consumo per cápita en el período t, y $u(c_t)$ es la función de utilidad individual. Cuanto mayor es la tasa de descuento β, se prefiere consumo presente (corriente) y disminuyen las posibilidades de consumo futuro. Nótese que la utilidad que proporciona el consumo en el tiempo t, descontada a $t = 0$, es decir, el valor presente de dicha utilidad, está representada por: $u(c(t))\ e^{-\beta t}$.

El problema del planificador social o economía centralizada

El objetivo será el de maximizar el bienestar intertemporal de la sociedad, considerando las restricciones de la técnica, las dotaciones iniciales y la solución final en un horizonte infinito. El problema se puede expresar como sigue:

$$(2)\quad \begin{aligned} &Max\ \ V = \int_{t=0} e^{-(\beta-n)t} u\left[c(t)\right] dt \\ &s.a.\ \ y(t) = c(t) + i(t) \\ &K_0 > 0, \qquad L_0 > 0 \end{aligned}$$

Donde c es el consumo per cápita, i es la inversión bruta per cápita, $y = f(k)$ es la producción per cápita. Asimismo, la fuerza laboral, que es igual a la población, crece a la tasa n. Por lo tanto, la dinámica demográfica se describe como:

$$L_t = L_0 e^{nt}, \text{ con } L_0 = 1 \ \rightarrow \ L_t = e^{nt}$$

De la identidad del producto y dividiendo por K:

$$Y = C + I$$

$$Y = cL + \dot{K} + \delta K$$

$$(3)\quad \frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y}{K} - c\frac{L}{K} - \delta$$

Reescribiendo en términos per cápita:

$$(4)\quad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{y}{k} - \frac{c}{k} - (n+\delta)$$

Dado que el ingreso está determinado por la función de producción:

$$(5)\quad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\left[f(k) - c\right]}{k} - (n+\delta)$$

$$(6)\quad \dot{k} = \left[f(k) - c\right] - k(n+\delta) = sf(k) - k(n+\delta)$$

Ahora se puede solucionar el problema mediante el método de control óptimo:

$$(7)\quad Max\ \ V = \int_{t=0}^{\propto} e^{-(\beta-n)t} u\left[c(t)\right] dt$$

$$(8)\quad \begin{aligned} s.a.\ \ &\dot{k} = sf(k) - k(n+\delta) \\ &k(t=0) = k_0 \end{aligned}$$

La variable de control es el consumo (c), porque está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización intertemporal. Su nivel en cualquier momento del tiempo puede ser elegido. El consumo no puede ser superior al producto, pues la economía cerrada no lo permite.

La variable de estado es el *stock* de capital (k), ya que tiene una ley de movimiento y su nivel en cualquier momento del tiempo es el resultado de las decisiones tomadas sobre la variable de control.

Se plantea el hamiltoniano en valor presente:

(9) $$H = e^{-(\beta-n)t}u[c(t)] + v[f(k) - c - (n+\delta)k]$$

Las condiciones de primer orden serían:

(10) $$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-(\beta-n)t}u'(c) - v = 0$$

(11) $$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{v} = v[f'(k) - (n+\delta)]$$

(12) $$\lim_{t\to 0} k_t v_t = 0$$

La variable v es llamada variable de co-estado, y se interpreta como el precio sombra de la variable de estado expresado en valor presente.

Operando la primera condición, tenemos:

(13) $$e^{-(\beta-n)t}u'(c) = v$$

Esta ecuación nos dice que en cada instante del tiempo, el precio sombra del capital debe ser igual a la utilidad marginal del consumo en valor presente. Si el precio sombra es menor, el valor marginal del capital sería inferior al del consumo, de modo que el bienestar aumentaría si se incrementa el consumo, es decir, si se reduce la inversión. El mayor consumo disminuiría el valor de su utilidad marginal hasta hacerla igual al precio sombra. Ocurre lo contrario si el precio sombra es mayor que la utilidad marginal del consumo. La única situación de equilibrio admisible es la igualdad del precio sombra con la utilidad marginal del consumo.

Por último, la tercera ecuación es la condición de transversalidad. A medida que la familia representativa se acerca al período terminal, el valor del capital será cero (sea porque el capital ha desaparecido o porque su valor es cero) tan pronto se llegue al horizonte temporal respecto al cual se está planificando. Sería ineficiente llegar al final con un valor de *stock* distinto de cero.

Las condiciones de primer orden, ecuaciones (10) y (11) se pueden reformular de la siguiente manera:

(14) $u'(c) = ve^{(\beta - n)t}$

(15) $-\frac{\dot{v}}{v} = f'(k) - (n + \delta)$

Tomando logaritmos a la ecuación (14), derivando con respecto al tiempo y multiplicando y dividiendo el primer miembro de la ecuación por c, se obtiene:

$$\ln u'(c) = \ln v + (\beta - n)t$$

(16) $c\frac{u''(c)}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{v}}{v} + (\beta - n)$

Combinando esta última relación con lo hallado previamente, tenemos:

(17) $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - (\beta + \delta)}{-c\frac{u''(c)}{u'(c)}}$

Esta es la llamada «ecuación de Euler». Esta ecuación nos dice que para que el consumidor decida aceptar óptimamente una senda de consumo creciente, se le debe recompensar con un producto marginal superior.

La ecuación de Euler también puede ser hallada de la siguiente manera:

$$Max \quad \int u[c(t)]dt = Max \quad \int u\left[f(k) - \dot{k} - (n + \delta)k\right]dt$$

La ecuación de Euler será:

$$u_k - \frac{du_{\dot{k}}}{dt} = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$u[f'(k) - (n + \delta)] + u''\dot{c} = 0$$

Donde $u_{\dot{k}} = \frac{du}{dc}\frac{dc}{d\dot{k}} = \dot{u}(-1)$ y $\frac{du_{\dot{k}}}{dt} = -\frac{du'}{dc}\frac{dc}{d\dot{k}} = -u''\dot{c}$.

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\left[\frac{u'(c)}{c.u''(c)}\right][f'(k) - (n + \delta)]$$

De esta última relación se desprende el siguiente concepto:

$$\varepsilon(c) = -c\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

El coeficiente de aversión relativa al riesgo (o elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo) indica la sensibilidad de la utilidad marginal ante cambios en el nivel de consumo. Como en el numerador se encuentra la segunda derivada de la función de utilidad, la elasticidad mide el grado de concavidad de la función de utilidad. Cuanto mayor sea la elasticidad, mayor será la curvatura de la función.

Las ecuaciones de movimiento del consumo, también denominada la regla de Keynes-Ramsey de consumo óptimo (17) y el *stock* de capital (8), conforman un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \beta - \delta}{\varepsilon(c)}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - k(n + \delta)$$

Si la productividad marginal del capital, neta de depreciación, es superior a la tasa de descuento, resulta conveniente destinar buena parte del producto al ahorro (o inversión), con lo que el consumo será mayor en el futuro que en el presente. Por lo tanto, la trayectoria temporal del consumo será creciente.

Si la tasa de descuento es mayor que la productividad neta de depreciación, la estrategia óptima será disminuir el ahorro (inversión) para incrementar el consumo presente con lo cual será menor el consumo futuro. Por lo tanto, la trayectoria temporal del consumo será decreciente.

Finalmente, mientras mayor sea la elasticidad $\varepsilon(c)$, es decir, mientras mayor sea la concavidad de la función de utilidad, la senda óptima del consumo será más estable. Por ejemplo, si dicha elasticidad tiende a infinito, la tasa de crecimiento del consumo tenderá a cero, y por tanto, el comportamiento del consumo será casi constante. Si su valor tiende a cero, la trayectoria del consumo será explosiva.

El problema del mercado descentralizado[1]

Al analizar el problema de manera descentralizada, deben considerarse las decisiones de los consumidores, de las firmas productoras y la interacción de estas en el equilibrio del mercado.

[1] Jiménez 2006-2: 509-532.

Comportamiento de los consumidores

El comportamiento de los consumidores está dado por:

(18) $V = \int_0^\infty u(c(t))L(t)e^{-\beta t}$

Asumimos una función de utilidad del tipo:

(19) $u(c(t)) = \dfrac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$

Esta función de utilidad cumple las siguientes condiciones y propiedades:

• La utilidad marginal es mayor que cero:

$$u'(c(t)) = \frac{(1-\theta)c^{-\theta}}{(1-\theta)} = c^{-\theta} > 0, \ \forall c > 0$$

• Utilidad marginal decreciente:

$$u''(c(t)) = -\theta\, c^{-(1+\theta)} < 0, \ \forall c > 0$$

• Cumple con las condiciones de Inada:

$$\lim_{c \to 0} \left[u'(c(t)) = \frac{1}{c^{\theta}} \right] = \infty \qquad \lim_{c \to \infty} \frac{1}{c^{\theta}} = 0$$

Además:

$$\lim_{c \to 0} \left[u''(c(t)) = -\theta\, c^{-(1+\theta)} \right] = -\infty \qquad \lim_{c \to \infty} \left[-\theta\, c^{-(1+\theta)} \right] = 0$$

Podemos definir la elasticidad de sustitución intertemporal como la inversa del grado de aversión al riesgo:

$$\Omega = \frac{-u''(c(t))c}{u'(c(t))}$$ Grado de aversión al riesgo

$$\Omega = -\frac{\left[-\theta c^{-(1+\theta)}\right]c}{c^{-\theta}} = \theta$$

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\theta}$$ Elasticidad de sustitución intertemporal.

Asimismo, la función de crecimiento de la fuerza laboral es:

(20) $L(t) = L(0)e^{nt}$, donde $L(0) = 1$

La restricción presupuestaria de los consumidores se presenta en la ecuación (21), donde C es el consumo, $\dot{X}$ es la variación en la tenencia de activos, equivalente a la inversión, wL es el ingreso salarial y rX es el retorno por la tenencia de activos. La restricción expresa que los gastos en consumo e inversión deben ser iguales a los ingresos por la tenencia de factores productivos.

(21) $C + \dot{X} = wL + rX$

De esta ecuación se obtiene la restricción presupuestaria intertemporal per cápita de los consumidores:

$$\frac{C(t)}{L(t)} + \frac{\dot{X}(t)}{L(t)} = w(t)\frac{L(t)}{L(t)} + r(t)\frac{X(t)}{L(t)}$$

(22) $c + \frac{\dot{X}}{L} = w + rx$

Sabemos que la variación en la tenencia de activos per cápita, $\dot{x}$, es igual a:

$$\dot{x} = \frac{d\left(\frac{X}{L}\right)}{dt} = \frac{\dot{X}L - X\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{X}}{L} - n\frac{X}{L}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{\dot{X}}{L} = \dot{x} + nx$$

Reemplazando esta relación en la ecuación (22), tenemos:

$$c + \dot{x} + nx = w + rx$$

De aquí se obtiene una expresión para la acumulación de activos per cápita, derivada de la restricción presupuestaria per cápita.

(23) $\dot{x} = w + rx - c - nx$

El incremento de los activos per cápita es igual a la diferencia de la retribución a los factores menos el consumo per cápita y la dotación de activos a la nueva población que se incorpora período tras período.

Por lo tanto, el problema que se plantea el consumidor será:

$$Max \int_0^\infty \left[\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right] L(0)e^{-\beta t}e^{nt}$$

Sujeto a: $\dot{x} = w + rx - (c + nx)$

Es importante recordar que en esta formulación el consumidor está descontando el futuro a la tasa β. La integral representa, por lo tanto, el valor presente de la utilidad acumulada a lo largo del período.

De otro modo:

$$Max \int_0^{\infty} \left[\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] L(0) e^{-(\beta - n)t}$$

Sujeto a: $\dot{x} = w + rx - (c + nx)$

Al igual que en la solución del planificador central, para resolver este problema de optimización se utiliza el método de control óptimo. Para ello se plantea el hamiltoniano en valor corriente:

$$Max \ \overline{H} = \left[\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] + m\left[w + rx - c - nx\right]$$

Donde $\overline{H} = He^{(\beta - n)\,t}$ y m es el precio sombra de los activos de los consumidores expresado en valor corriente.

Condiciones de máximización (CM):

CM1: $\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial c} = 0$

$$c^{-\theta} - m = 0$$

$$c^{-\theta} = m = \lambda\, e^{(\beta - n)t}$$

Donde $c^{-\theta}$ es la utilidad marginal del consumo. Esta condición indica que, en cada instante del tiempo, el precio sombra de los activos de los consumidores expresado en valor corriente (m), debe ser igual a la utilidad marginal del consumo. Esta condición implica que hay una asignación de recursos eficiente entre consumo y activos en todo el horizonte de tiempo.

CM2: $\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial m} = \dot{x}$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial m} = \dot{x} = w + rx - c - nx$$

$$\frac{\partial He^{(\beta - n)}}{\partial \lambda e^{(\beta - n)}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} = w + rx - c - nx$$

La segunda condición de máximo expresa la ecuación de movimiento de la variable de estado. En este problema, la variable de estado es x, la tenencia de activos per cápita.

CM3: $\dot{m} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x} + m(\beta - n)$

$$\dot{m} = -e^{(\rho - n)t}\frac{\partial H}{\partial x} + m(\beta - n)$$

La tercera condición presenta la ecuación de movimiento de la variable de co-estado, el precio sombra de los activos de los consumidores expresado en valor corriente (m).

Como el hamiltoniano en «valor actual» es igual a:

$$H = \left[\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right]e^{-(\beta - n)t} + \lambda\left[w + rx - c - nx\right]$$

Entonces:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda(r - n)$$

En consecuencia:

$$\dot{m} = -e^{(\beta - n)t}\lambda(r - n) + m(\beta - n)$$

Como $m = \lambda e^{(\beta - n)t}$, se deriva que:

$$\dot{m} = \dot{\lambda}e^{(\beta - n)t} + \lambda e^{(\beta - n)t}(\beta - n)$$

De donde se obtiene:

$$\dot{m} = \dot{\lambda}e^{(\beta - n)t} + m(\beta - n)$$

Por lo tanto, igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$\dot{\lambda}\, e^{(\beta - n)t} + m(\beta - n) = -e^{(\beta - n)t}\lambda(r - n) + m(\beta - n)$$

Simplificando:

$$\dot{\lambda}\, e^{(\beta - n)t} = -e^{(\beta - n)t}\lambda(r - n)$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda(r - n)$$

Esta es la regla de ahorro óptimo de Ramsey.

Para explicar la dinámica del crecimiento del consumo, debemos despejar la variable de co-estado y derivarla con respecto al tiempo.

De la CM1 se obtiene que:

$$\lambda = c^{-\theta}e^{-(\beta - n)t}$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\dot{\lambda} = -c^{-\theta} e^{-(\beta-n)t}(\beta-n) - \theta c^{-\theta-1} e^{-(\beta-n)t}\dot{c}$$

$$\dot{\lambda} = e^{-(\beta-n)t}\left[-\theta c^{-\theta-1}\dot{c} - c^{-\theta}(\beta-n)\right]$$

Igualando esta ecuación con $\dot{\lambda} = -\lambda\,(r-n)$, hallamos la ecuación del crecimiento del consumo:

$$e^{-(\beta-n)t}\left[\left(-\theta c^{-\theta-1}\right)\dot{c} - c^{-\theta}(\beta-n)\right] = -(r-n)c^{-\theta} e^{-(\beta-n)t}$$

$$\left(-\theta c^{-\theta-1}\right)\dot{c} - c^{-\theta}(\beta-n) = -(r-n)c^{-\theta}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = (\beta-r)\left[\frac{c^{-\theta}}{(-\theta c^{-\theta-1})c}\right] = (\beta-r)\left(\frac{1}{-\theta}\right)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = (r-\beta)\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

Nótese que esta última ecuación y la ecuación de movimiento de la variable de estado (CM2), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de c y de x.

(24) $\dot{x} = w + rx - c - nx$

(25) $\dot{c} = c(r-\beta)\left(\frac{1}{\theta}\right)$

CM4: $\lim\limits_{t\to\alpha}\left[x(t)\,\lambda(t)\right] = 0$

Finalmente, la cuarta condición de máximo es conocida como la «condición de transversalidad». Esta condición señala que el valor de los activos de las familias, que es igual a la cantidad $x(t)$ multiplicada por su precio sombra en valor actual, debe aproximarse a cero cuando el tiempo se aproxima a infinito. Este precio evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación $\dot{\lambda} = -\,(r-n)\,\lambda$. Integrando esta ecuación, se obtiene:

$$\lambda(t) = \lambda(0)e^{-\int_0^t [r(\lambda)-n]d\lambda}$$

$$\lambda(0) = c(0)^{-\theta} e^{-(\beta-n)(0)} = c(0)^{-\theta}$$

$$\lambda(t) = c(0)^{-\theta} e^{-\int_0^t [r(\lambda)-n]d\lambda}$$

Reemplazando lo anterior en la condición de transversalidad (CM4), tenemos:

$$\lim_{t\to\alpha}\left[x(t)c(0)^{-\theta}e^{-\int_0^t[r(\lambda)-n]d\lambda}\right]=0$$

Esta ecuación debe cumplirse tanto si $x(t)$ es positivo como si es negativo (o cuando hay endeudamiento). No hay endeudamiento a perpetuidad, ni familias que estén dispuestas a acumular activos a una tasa igual o mayor que r.

Comportamiento de las firmas

El comportamiento de la firma está dado por:

(26) $Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ Función de producción

La función de producción cumple con las condiciones y propiedades de una función neoclásica bien comportada.

- Productividades marginales de los factores positivos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}>0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial Y}{\partial K}=\alpha Ak^{\alpha-1}>0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial Y}{\partial L}=(1-\alpha)Ak^{\alpha}>0$$

- Productividades marginales de los factores decrecientes:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}=-\alpha(1-\alpha)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha}<0\text{, o }\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}=-\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{K^2}<0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}=-\alpha(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1}<0\text{, o }\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}=-\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{L^2}<0$$

- Condiciones de Inada:

$$\lim_{K\to 0}\alpha Ak^{\alpha-1}=\lim_{K\to 0}\frac{\alpha Y}{K}=\infty\text{, y }\lim_{K\to\infty}\frac{\alpha Y}{K}=0$$

 Además:

$$\lim_{K\to 0}\left(-\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{K^2}\right)=-\infty\text{, y }\lim_{K\to\infty}\left(-\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{K^2}\right)=0$$

El problema al que se enfrenta la firma al decidir su nivel de producción es la maximización de sus beneficios. Los beneficios son la diferencia del producto menos el costo de los factores de producción:

(27) $B = Y - wL - rK - \delta K$ Beneficios netos de la firma o empresa

Reemplazando la función de producción en los beneficios, tenemos:

$$B = AK^{\alpha} L^{1-\alpha} - wL - rK - \delta K$$

Expresamos el problema de la firma como la maximización de los beneficios en términos per cápita:

$$Max\ B = L\left[Ak^{\alpha} - w - rk - \delta k\right]$$

Condiciones de maximización de beneficios de la firma (CPOF):

CPOF1: $\dfrac{\partial B}{\partial L} = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial L} = Ak^{\alpha} - w - rk - \delta k = 0$$

Despejamos *w*:

$$w = Ak^{\alpha} - k(r + \delta)$$

$$w = f(k) - kf'(k)$$

$$w = Ak^{\alpha} - k\alpha Ak^{\alpha-1}$$

$$w = (1 - \alpha)Ak^{\alpha}$$

Es decir:

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha)Ak^{\alpha}$$

La primera condición de optimización de la firma señala que el salario real debe ser igual a la productividad marginal del trabajo.

CPOF2: $\dfrac{\partial B}{\partial K} = 0$

$$\frac{\partial (AK^{\alpha} L^{1-\alpha} - wL - rK - \delta K)}{\partial K} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - r - \delta = \alpha Ak^{\alpha-1} - r - \delta = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial K} = \alpha Ak^{\alpha-1} = r + \delta$$

La segunda condición de optimización establece que la tasa de interés más la tasa de depreciación debe ser igual a la productividad marginal del capital.

El teorema de Euler

Como la función de producción es «bien comportada», según el teorema de Euler, el producto se agota si los factores de producción reciben como remuneración su producto marginal. A continuación, presentamos una breve demostración:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad \rightarrow \qquad Y = wL + rK = PMg(L)L + Pmg(K)K$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \left[(1-\alpha)Ak^{\alpha}\right]L + \left[\alpha Ak^{\alpha-1}\right]K$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \left[(1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\right]L + \left[\alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}\right]K$$

Factorizamos:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left[(1-\alpha)L + \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{-1}K\right]$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}L\left[(1-\alpha) + \alpha\frac{K}{L}\left(\frac{K}{L}\right)^{-1}\right]$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\left[(1-\alpha)+\alpha\right]$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

El equilibrio

En equilibrio, se puede establecer la nueva restricción presupuestaria de la economía. La tenencia de activos se divide en *stock* de capital y deuda tomada.

$$X(t) = K(t) + D(t)$$

Para la economía cerrada a nivel agregado, el total de los activos de los consumidores debe ser igual al *stock* de capital de la economía en su conjunto porque la deuda es cero (las deudas y los créditos se anulan a nivel agregado):

$$D(t) = 0$$

$$X(t) = K(t)$$

Por consiguiente, en términos per cápita:

$$x(t) = k(t), \text{ y } \dot{x}(t) = \dot{k}(t)$$

Por lo tanto, la restricción presupuestaria del consumidor establecida en la ecuación (24), puede expresarse como:

$$\dot{k} = w + rk - c - nk$$

Reemplazando w de CPOF1:

$$\dot{k} = \left[Ak^{\alpha} - k(r+\delta)\right] + rk - c - nk$$
$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - \delta k - c - nk$$
$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k$$

Así, se obtiene la restricción presupuestaria de la economía en términos per cápita:

(28) $\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k$

Asimismo, podemos hallar la nueva ecuación diferencial para el consumo. De la CPOF2 se tiene que:

$$r = \alpha A^{\alpha-1} - \delta$$

Reemplazando este valor en la ecuación de crecimiento del consumo (CM3), obtenemos lo siguiente:

(29) $\dfrac{\dot{c}}{c} = \left[\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - \beta\right]\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$

Reemplazando $r = \alpha Ak^{\alpha-1} - \delta$ en la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{ k(t)\lambda(0)exp\left[-\int_0^t\left(\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - n\right)d\lambda\right]\right\} = 0$$

De este modo, se obtiene la nueva condición de transversalidad. Esta ecuación significa que en el estado estacionario el producto marginal del capital por trabajador debe ser mayor que $\delta + n$.

El estado estacionario

Este modelo presenta, en ambos tipos de soluciones, un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica del *stock* de capital per cápita y del consumo per cápita. Como vemos en el cuadro 2.4, estas ecuaciones son equivalentes. La diferencia radica en que las ecuaciones de la solución del planificador central son generales mientras que la solución del mercado descentralizado asume ciertas formas funcionales para el comportamiento de los consumidores y los productores. Es decir, en las ecuaciones (28) y (29) la forma de las funciones de utilidad y producción es conocida.

Cuadro 2.4
Sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de Ramsey-Cass y Koopmans

Solución del planificador central	Solución del mercado descentralizado
De la maximización de la función de utilidad intertemporal del agente representativo, sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal se obtuvo las ecuaciones (8) y (17): $\dot{k} = f(k) - c - k(n+\delta)$ $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \beta - \delta}{\varepsilon(c)}$	En el mercado descentralizado las familias maximizan su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria intertemporal y las firmas maximizan sus beneficios sujetos a la tecnología de la función de producción. En el equilibrio se unen ambas maximizaciones y se obtienen las ecuaciones (28) y (29): $\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - k(n+\delta)$ $\frac{\dot{c}}{c} = \left[\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta - \beta\right]\left(\frac{1}{\theta}\right)$
Donde $\varepsilon(c) = \theta = -cu''(c)/u'(c)$. En ambos casos, llegamos al mismo sistema de ecuaciones. Sin embargo, cabe resaltar, que si bien ambos resultados provienen de una maximización intertemporal, las restricciones en cada caso son diferentes. Finalmente, las ecuaciones presentadas difieren en que la forma funcional de las funciones de utilidad y producción que originaron las ecuaciones (28) y (29) es conocida.	

En el estado estacionario, no hay variaciones en los niveles de capital ni consumo, por lo tanto las ecuaciones diferenciales se convierten, en términos generales, en:

$$\dot{c} = 0 \quad \rightarrow \quad f'(k) = \delta + \beta$$

$$\dot{k} = 0 \quad \rightarrow \quad f(k) - c - (n+\delta)k$$

Considerando las ecuaciones de la solución descentralizada, tenemos:

$$\dot{c} = 0 \quad \rightarrow \alpha Ak^{\alpha-1} - (\delta + \beta) = 0$$

$$\dot{k} = 0 \quad \rightarrow Ak^{\alpha} - c - k(n+\delta) = 0$$

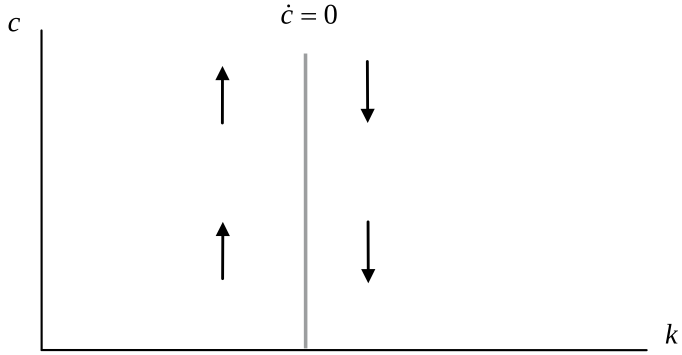
De donde se obtiene:

(30) $\alpha\, Ak^{\alpha-1} = (\delta + \beta)$

(31) $c = Ak^{\alpha} - k\,(n + \delta)$

Trayectoria del consumo: La primera ecuación representa una recta totalmente vertical a partir del valor del estado estacionario del capital per cápita k^*. Para este valor se cumple que $f(k^*) = \delta + \beta$ (ver gráfico 2.10).

Gráfico 2.10
Trayectoria del consumo



Para conocer cómo se comporta la variación del consumo per cápita ante cambios en el *stock* de capital per cápita, derivamos:

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = \frac{c}{\theta}(\alpha - 1)A\alpha k^{\alpha - 2} < 0$$

El signo de esta derivada nos dice que a medida que se incrementa el *stock* de capital, la variación del consumo per cápita disminuye y, por lo tanto, el nivel del consumo. Así, cualquier nivel de capital a la derecha de $\dot{c} = 0$ disminuirá el consumo y cualquier nivel de capital a la izquierda de $\dot{c} = 0$ aumentará el consumo.

Trayectoria del capital: La ecuación (31) representa la diferencia de la función de producción per cápita y la inversión destinada a reponer el capital gastado y dotar de capital a la nueva población laboral. Asimismo, la función de producción es cóncava y tiene la forma de una parábola. A medida que aumenta k la productividad marginal alcanza un máximo y luego disminuye (ver gráfico 2.11). Recordemos que la función de producción cumple las condiciones de Inada.

Para representar la trayectoria del capital necesitamos conocer cómo reacciona la variación del *stock* de capital ante cambios en el consumo per cápita:

$$\frac{d\dot{k}}{dc} = -1 < 0$$

Gráfico 2.11
Función de producción en el modelo de Ramsey-Cass y Koopmans

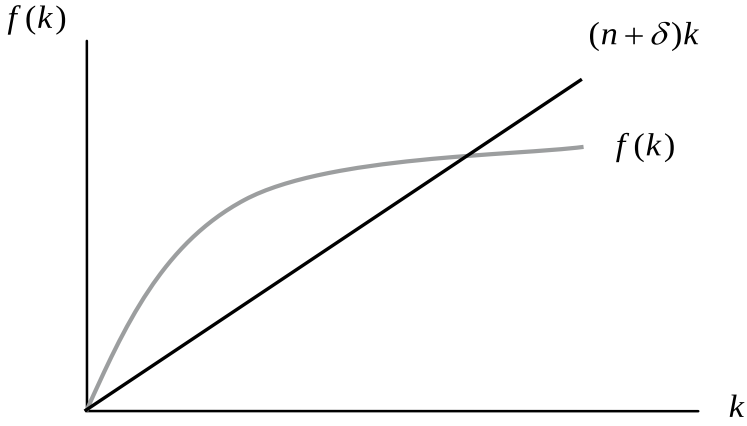
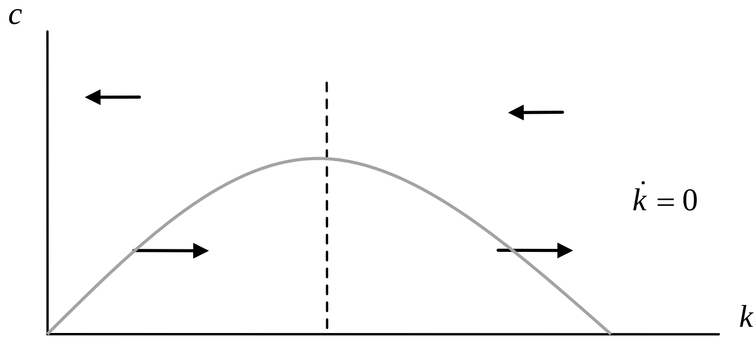


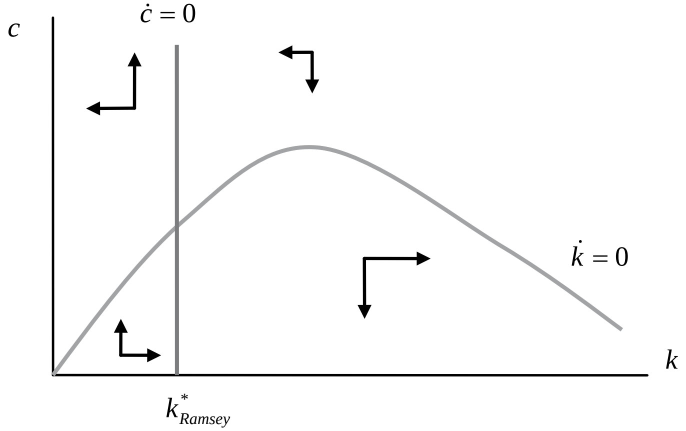
Gráfico 2.12
Trayectoria del capital



El signo de la derivada nos dice que a medida que aumenta el consumo, la variación del *stock* de capital disminuye y, por lo tanto, también el nivel del *stock* de capital. Así cualquier nivel de consumo por encima de $\dot{k} = 0$ disminuirá el *stock* de capital y cualquier nivel de consumo por debajo de $\dot{k} = 0$ aumentará el *stock* de capital (ver gráfico 2.12).

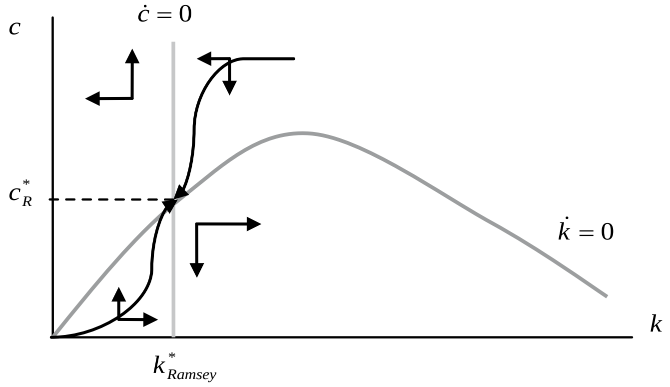
Juntando los gráficos del estado estacionario de $\dot{c}$ y de $\dot{k}$ en el mismo plano, obtenemos el diagrama de fases, el cual se muestra en el gráfico 2.13.

Gráfico 2.13
Diagrama de fases en el modelo de Ramsey-Cass y Koopmans



Por otro lado, el equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales es de ensilladura. Recordemos que los agentes son racionales y hay predicción perfecta. Por lo tanto, el estado estacionario se alcanza solo a través del Saddle Path (gráfico 2.14).

Gráfico 2.14
Saddle Path en el diagrama de fases



Evaluación de la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales

Como vimos en la solución descentralizada, este sistema puede escribirse del modo siguiente:

$$\frac{\dot{k}}{k} = Ak^{-(1-\alpha)} - \frac{c}{k} - (n+\delta)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k^{-(1-\alpha)} - (\delta+\beta)\right]$$

Logaritmo y antilogaritmo

Recordemos algunas propiedades del logaritmo y el antilogaritmo que serán útiles para comprender esta sección.

Tenemos: $k = e^{\ln k}$

Exponente	Producto	Cociente
$k^{\alpha} = e^{\alpha \ln k}$	$\alpha k = e^{\ln \alpha + \ln k}$	$\dfrac{k}{\alpha} = e^{\ln k - \ln \alpha}$
$\ln(k^{\alpha}) = \alpha \ln k$	$\ln(\alpha k) = \ln \alpha + \ln k$	$\ln\left(\dfrac{k}{\alpha}\right) = \ln k - \ln \alpha$

Según las propiedades descritas, podemos expresar las ecuaciones anteriores como:

$$\frac{d\, ln\, k}{d\, t} = Ae^{-(1-\alpha)ln\, k} - e^{ln\, c - ln\, k} - (n+\delta)$$

$$\frac{d \ln c}{dt} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A e^{-(1-\alpha)\ln k} - (\delta+\beta)\right]$$

En el estado estacionario tanto el capital per cápita, como el consumo per cápita, permanecen constantes, es decir:

$$\frac{d\, ln\, k}{dt} = \frac{d\, ln\, c}{dt} = 0$$

Por lo tanto, en el estado estacionario se cumple que:

$$e^{ln\, c^* - ln\, k^*} = Ae^{-(1-\alpha)ln\, k^*} - (n+\delta)$$

$$e^{-(1-\alpha)\ln k^*} = \frac{(\delta+\beta)}{\alpha A}$$

Reemplazando $e^{-(1-\alpha)\ln k^*}$ por el valor de la última ecuación, la primera ecuación adquiere la forma siguiente:

$$e^{\ln c^* - \ln k^*} = A\frac{\delta+\beta}{\alpha A} - (n+\delta)$$

$$e^{\ln c^* - \ln k^*} = \frac{\delta+\beta}{\alpha} - (n+\delta)$$

$$e^{\ln c^* - \ln k^*} = \frac{\beta + \delta(1-\alpha) - \alpha\, n}{\alpha}$$

Las ecuaciones diferenciales expresadas en logaritmos pueden linealizarse mediante la expansión de Taylor alrededor de estos valores del estado estacionario. El resultado de la linealización expresado en forma matricial sería:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\,ln\,k}{d\,t} \\ \dfrac{d\,ln\,c}{d\,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln\,k - ln\,k^* \\ ln\,c - ln\,c^* \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\frac{d\,ln\,k}{d\,t} = Ae^{-(1-\alpha)ln\,k} - e^{ln\,c - ln\,k} - (n+\delta)$$

$$\frac{d\ln c}{dt} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A e^{-(1-\alpha)\ln k} - (\delta+\beta)\right]$$

Hallamos los elementos del jacobiano, J, la matriz de primeras derivadas:

Elemento J_{11}:

$$J_{11} = \frac{d}{d\,ln\,k}\left[\frac{d\,ln\,k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -A(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)ln\,k^*} + e^{ln\,c^* - ln\,k^*}$$

$$J_{11} = \frac{d}{d\,ln\,k}\left[\frac{d\,ln\,k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -A(1-\alpha)\left(k^*\right)^{-(1-\alpha)} + \frac{c^*}{k^*}$$

$$J_{11} = \frac{d}{d\,ln\,k}\left[\frac{d\,ln\,k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -A\left(k^*\right)^{-(1-\alpha)} + A\alpha\left(k^*\right)^{-(1-\alpha)} + \frac{c^*}{k^*}$$

Como en el estado estacionario:

$$Ak^{-(1-\alpha)} - \frac{c}{k} = (n+\delta)$$

Reemplazando:

$$J_{11} = \frac{d}{d\,ln\,k}\left[\frac{d\,ln\,k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -(n+\delta) + A\alpha\left(k^*\right)^{-(1-\alpha)}$$

Recuérdese que $A\alpha\left(k^*\right)^{-(1-\alpha)}$ es la productividad marginal del capital, es decir, como se mostró en la CPOF2, es igual a $(r + \delta)$, entonces:

$$J_{11} = \frac{d}{d\ln k}\left[\frac{d\ln k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -(n+\delta) + (r+\delta)$$

Sabemos que en el estado estacionario, la productividad marginal del capital es igual a (ρ + δ), en consecuencia:

$$J_{11} = \frac{d}{d\ln k}\left[\frac{d\ln k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -(n+\delta)+(\beta+\delta)$$

$$J_{11} = \frac{d}{d\ln k}\left[\frac{d\ln k}{dt}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = \beta - n$$

Elemento J_{12}:

$$J_{12} = \frac{d}{d\,ln\,c}\left[\frac{d\,ln\,k}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -e^{ln\frac{c^*}{k^*}} = -\frac{c^*}{k^*}$$

Con la información de J_{11}, obtenemos que:

$$J_{12} = \frac{d}{d\,ln\,c}\left[\frac{d\,ln\,k}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -\frac{c^*}{k^*} = -\frac{\alpha A k^{-(1-\alpha)}}{\alpha} + (n+\delta)$$

$$J_{12} = \frac{d}{d\ln c}\left[\frac{d\ln k}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -\frac{\beta+\delta}{\alpha} + (n+\delta)$$

$$J_{12} = \frac{d}{d\ln c}\left[\frac{d\ln k}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -\frac{\beta+\delta(1-\alpha)-\alpha\, n}{\alpha}$$

Elemento J_{21}:

$$J_{21} = \frac{d}{d\,ln\,k}\left[\frac{d\,ln\,c}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = \frac{1}{\theta}\left[-A\alpha(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)ln\,k}\right]$$

$$J_{21} = \frac{d}{d\ln k}\left[\frac{d\ln c}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = \frac{1}{\theta} - \left(\frac{A\alpha(1-\alpha)(\delta+\beta)}{\theta\alpha A}\right)$$

$$J_{21} = \frac{d}{d\ln k}\left[\frac{d\ln c}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = -\left(\frac{(1-\alpha)(\delta+\beta)}{\theta}\right)$$

Elemento J_{22}:

$$J_{22} = \frac{d}{d\,ln\,c}\left[\frac{d\,ln\,c}{d\,t}\right]\Bigg|_{k=k^*,c=c^*} = 0$$

Reemplazando estos cuatro valores del jacobiano en el sistema, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\ln k}{dt} \\ \dfrac{d\ln c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta - n) & -\dfrac{\beta + \delta(1-\alpha) - \alpha\, n}{\alpha} \\ -\dfrac{(\beta+\delta)(1-\alpha)}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln\left(\dfrac{k}{k^*}\right) \\ \ln\left(\dfrac{c}{c^*}\right) \end{bmatrix}$$

Este nuevo sistema es lineal en los logaritmos de k y de c. El jacobiano está compuesto solo de parámetros. La ventaja de la linealización consiste en su utilidad para encontrar las sendas temporales óptimas de k y c en el modelo de Ramsey. Hay, sin embargo, una desventaja: el error de aproximación puede incrementarse sustancialmente a medida que k y c se alejan del nivel de estado estacionario.

Condiciones de estabilidad:

Traza:

$$Tr\ (J) = \beta - n > 0$$

Determinante:

$$Det(J) = -\frac{(\beta+\delta)(1-\alpha)\left[\beta + \delta(1-\alpha) - \alpha\, n\right]}{\alpha\theta}$$

$$Det(J) = -\frac{(\beta+\delta)(1-\alpha)\left[(\beta+\delta)(1-\alpha) + \alpha(\beta - n)\right]}{\alpha\theta} < 0$$

El determinante es menor que cero puesto que $\alpha < 1$ y $\beta > n$. En consecuencia se trata de un equilibrio de punto silla con solo dos sendas convergentes posibles. Hay una trayectoria estable hacia el punto de silla.

Comparación del estado estacionario del modelo de Ramsey con la *golden rule* del modelo de Solow

Con las ecuaciones diferenciales del sistema, podemos calcular el valor del *stock* de capital per cápita y del consumo per cápita en el estado estacionario del modelo de Ramsey. Para ello, despejamos el *stock* de capital de la ecuación (30):

$$k^{\alpha-1} = \frac{(\delta+\beta)}{A\alpha}$$

Como $\alpha < 1$, entonces:

$$\frac{1}{k^{1-\alpha}} = \frac{\delta+\beta}{A\alpha}$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{A\alpha}{\delta+\beta}$$

$$\left(k^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\frac{A\alpha}{\delta+\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(32) $k^*_{Ramsey} = \left[\dfrac{A\alpha}{\delta+\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Entonces, en el estado estacionario se cumple que:

$$\left(k^*_{Ramsey}\right)^{\alpha-1} = \frac{(\delta+\beta)}{A\alpha}$$

(33) $\left(k^*_{Ramsey}\right)^{-(1-\alpha)} = \dfrac{\delta+\beta}{A\alpha}$

Para hallar el valor del consumo en el estado estacionario, c^*_{Ramsey}, reemplazamos k^*_{Ramsey} en la ecuación (31):

$$c^*_{Ramsey} = A\left(k^*_{Ramsey}\right)^{\alpha} - \left(k^*_{Rammsey}\right)(n+\delta)$$

$$c^*_{Ramsey} = k^*_{Ramsey}\left[A\left(k^*_{Ramsey}\right)^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)\right]$$

Reemplazando $(k^*_{Ramsey})^{-(1-\alpha)}$ por el valor hallado en la ecuación (33), tenemos:

$$c^*_{Ramsey} = k^*_{Ramsey}\left[A\left(\frac{\delta+\beta}{A\alpha}\right) - (n+\delta)\right]$$

$$c^*_{Ramsey} = k^*_{Ramsey}\left[\frac{\delta+\beta-\alpha\, n-\alpha\delta}{\alpha}\right]$$

$$c^*_{Ramsey} = k^*_{Ramsey}\left[\frac{\delta+\beta-\alpha\, n-\alpha\delta}{\alpha}\right]$$

$$c^*_{Ramsey} = k^*_{Ramsey}\left[\frac{\beta+\delta(1-\alpha)-\alpha\, n}{\alpha}\right]$$

Reemplazando el valor de k^*_{Ramsey} de la ecuación (32), finalmente obtenemos:

$$c^*_{Ramsey} = \left(\frac{A\alpha}{\delta+\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\beta+\delta(1-\alpha)-\alpha\, n}{\alpha}\right]$$

Esta ecuación también puede expresarse como:

$$c^*_{Ramsey} = \left(\frac{A\alpha}{\delta+\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha(\beta-n)+(1-\alpha)(\delta+\beta)}{\alpha}\right]$$

Como acabamos de ver, el valor de k en el estado estacionario del modelo de Ramsey fue derivado de la igualdad entre la productividad marginal de k y la suma de la tasa de descuento intertemporal y la tasa de depreciación, $\beta + \delta$. Por lo tanto, en k^*_{Ramsey} se cumple:

$$\alpha A(k^*_{Ramsey})^{\alpha-1} = \delta + \beta$$

Es claro que k^*_{Ramsey} no es el valor del *stock* de capital per cápita que maximiza el consumo. Para que lo sea, β tendría que ser igual a n; eso no es posible pues la solución del modelo supone $\beta > n$. Como sabemos, el *stock* de capital per cápita de la *golden rule* de Solow ($k^*_{GRSolow}$) es aquel que corresponde al nivel máximo de consumo per cápita. Recordando el modelo de Solow, de la maximización del consumo per cápita obtenemos:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial\left[Ak^{\alpha} - k(n+\delta)\right]}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha Ak^{\alpha-1} = (n+\delta)$$

Es decir:

$$\alpha A(k^*_{Ramsey})^{\alpha-1} = \delta + n$$

Cuando el consumo per cápita alcanza su valor máximo la productividad marginal del capital, $\alpha Ak^{\alpha-1}$, es igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población y de la tasa de depreciación, n + δ. En consecuencia:

$$k^*_{GRSolow} = \left[\frac{A\alpha}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Por lo tanto, dado que el modelo asume que el factor de descuento es mayor que la tasa de crecimiento de la población, tenemos:

$$\beta > n$$

$$f'(k^*_{Ramsey}) - \delta > f'(k^*_{GRSolow}) - \delta$$

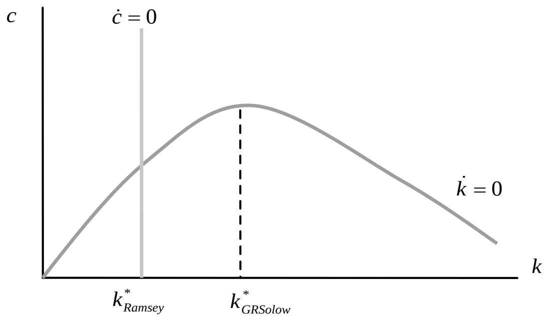
$$f'(k^*_{Ramsey}) > f'(k^*_{GRSolow})$$

Como la función de producción presenta rendimientos marginales decrecientes, entonces un valor más elevado de productividad marginal implica un menor nivel de capital per cápita:

$$k^*{}_{GRSolow} > k^*{}_{Ramsey}$$

$$\left[\frac{A\alpha}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left[\frac{A\alpha}{\delta + \beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Gráfico 2.15
Comparación del k^* de Ramsey y la *golden rule* de Solow



Modelo de Ramsey en tiempo discreto

En este apartado se presenta la solución centralizada del modelo de Ramsey en tiempo discreto. Para la resolución del problema se emplearán elementos de programación dinámica, equivalentes al principio del máximo y la función valor en el caso del tiempo continuo.

Las ecuaciones que componen el modelo de Ramsey en tiempo discreto son las siguientes:

(1) $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ Trayectoria de consumo de las familias

Donde β^t; $0 < \beta < 1$, es el factor de descuento temporal.

(2) $Y_t = C_t + I_t$ Restricción agregada de la economía

(3) $Y_t = F(K_t, L_t)$ Función de producción

(4) $K_{t+1} - K_t = I_t + - \delta K_t$ Inversión bruta

(5) $K_0 > 0$ Condiciones iniciales

La tasa de crecimiento de la población se define como:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n$$

Expresando en términos per cápita la ecuación (4), tenemos:

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{I_t}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

Multiplicando y dividiendo el lado izquierdo de la ecuación por L_{t+1}, se obtiene la ecuación de movimiento del capital.

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{I_t}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

$$(1+n)k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$$

La ecuación (2) en términos per cápita se expresa como:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{C_t}{L_t} + \frac{I_t}{L_t} \quad \rightarrow \quad y_t = c_t + i_t$$

De la ecuación (2) obtenemos la inversión per cápita y la introducimos en la ecuación del movimiento del capital:

$$i_t = y_t - c_t$$

$$(1+n)k_{t+1} = y_t - c_t + (1-\delta)k_t$$

El problema del planificador central consiste en:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$s.a: \quad (1+n)k_{t+1} = y_t - c_t + (1-\delta)k_t$$

Al igual que en el modelo en tiempo continuo, la variable de control es el consumo y la variable de estado es el *stock* de capital.

Planteamos la ecuación de Bellman:

$$V(k_t) = \underset{c_t}{Max}\left\{u(c_t) + \beta V(k_{t+1})\right\}$$

$$(1+n)k_{t+1} = y_t - c_t + (1-\delta)k_t$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

(6) $\dfrac{\partial V(k_t)}{\partial c_t} = u'(c_t) + \beta V'(k_{t+1})\,(-1)\left(\dfrac{1}{1+n}\right) = 0$

(7) $\dfrac{\partial V(k_t)}{\partial k_t} = \beta V'(k_{t+1})\dfrac{(f'(k_t) + (1-\delta))}{(1+n)}$

(8) $(1+n)k_{t+1} = f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t$

De la ecuación (6), se tiene:

(6') $u'(c_t) = \beta V'(k_{t+1})\dfrac{1}{1+n}$

Sustituyendo en la ecuación (7):

$$\frac{\partial V(k_t)}{\partial k_t} = u'(c_t)\left[f'(k_t) + (1-\delta)\right]$$

Iterando esta última ecuación un período adelante:

$$\frac{\partial V(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)\right]$$

Finalmente, reemplazando lo hallado en la ecuación (6') y reacomodando términos, se obtiene la ecuación de Euler en tiempo discreto:

$$u'(c_t) = \beta\frac{u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)\right]}{1+n}$$

(9) $\dfrac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\dfrac{\left[(f'(k_{t+1}) + (1-\delta)\right]}{1+n}$ Ecuación de Euler

Asumiendo una función de utilidad del tipo:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Asumiendo, además, una función de producción Cobb-Douglas que cumple todas las propiedades de una función de producción neoclásica:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

La ecuación de Euler toma la siguiente forma:

$$(9') \quad \frac{c_t^{-\theta}}{c_{t+1}^{-\theta}} = \beta \frac{\left[(\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}) + (1-\delta)\right]}{1+n}$$

A su vez, los valores de estado estacionario del capital ($\bar{k}$) y del consumo ($\bar{c}$) se obtienen a partir de las ecuaciones (9') y (8).

De la ecuación de Euler, en estado estacionario, se tiene que:

$$\frac{c^{-\theta}}{c^{-\theta}} = \beta \frac{\left[(\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}) + (1-\delta)\right]}{1+n} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{\beta}{1+n} \frac{\left[(\alpha A \bar{k}^{\,\alpha-1}) + (1-\delta)\right]}{1+n}$$

$$\bar{k} = \left[\frac{\alpha}{\frac{1+n}{\beta} + (1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

De la ecuación (8), se tiene:

$$(1+n)\bar{k} = A\bar{k}^{\alpha} - \bar{c} + (1-\delta)\bar{k} \quad \Rightarrow \quad (1+n) = A\bar{k}^{\alpha-1} - \frac{\bar{c}}{\bar{k}} + (1-\delta)$$

Reemplazando el valor de (k) en el estado estacionario:

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)\right] - (n+\delta) \quad \Rightarrow \quad \bar{c} = \left[\frac{\alpha A}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)\right) - (n+\delta) \right]$$

A partir de la ecuación de Euler (9') y la ecuación (8) es posible analizar el sistema de ecuaciones en diferencias que conforman el consumo y el capital.

$$c_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+n}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left[(\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}) + (1-\delta)\right]^{\frac{1}{\theta}} c_t$$

$$(1+n)k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta)k_t$$

Para analizar la estabilidad del sistema, es necesario linealizar alrededor del estado estacionario ($\bar{x}$) ambas ecuaciones. Definimos la variable $\hat{x}_t$ como la desviación relativa respecto al estado estacionario de x_t:

$$\hat{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}$$

Una forma de expresar la desviación relativa es:

$$x_t = \bar{x}\,(1+\hat{x}_t)$$

Expresando la ecuación (8) en términos de esta ecuación:

(8') $(1+n)\bar{k}(1+\hat{k}_{t+1}) = A\bar{k}^{\alpha}(1+\alpha\hat{k}_t) - \bar{c}(1+\hat{c}_t) + (1-\delta)\bar{k}(1+\hat{k}_t)$

El valor de la ecuación (8) en el estado estacionario es:

$$(1+n)\bar{k} = A\bar{k}^{\alpha} - \bar{c} + (1-\delta)\bar{k}$$

Restándole a la ecuación (8') su valor en estado estacionario, se obtiene:

$$(1+n)\ \bar{k}\ \hat{k}_{t+1} = \alpha\ A\,\bar{k}^{\alpha}\ \hat{k}_t\ - \bar{c}\ \hat{c}_t + (1-\delta)\ \bar{k}\ \hat{k}_t$$

Dividiendo entre $\bar{k}$:

$$(1+n)\hat{k}_{t+1} = \alpha A\bar{k}^{\alpha-1}\hat{k}_t\ - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + (1-\delta)\hat{k}_t$$

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{(\alpha A\bar{k}^{\alpha-1} + 1 - \delta)}{(1+n)}\hat{k}_t\ - \frac{\bar{c}}{(1+n)\bar{k}}\hat{c}_t$$

Reemplazando $\bar{k}$ por el valor hallado anteriormente:

(8'') $\hat{k}_{t+1} = \dfrac{1}{\beta}\hat{k}_t\ - \dfrac{\bar{c}}{(1+n)\bar{k}}\hat{c}_t$

Expresando la ecuación de Euler (9') en desviaciones, se tiene:

$$(1-n)(1+\theta(\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t)) = \beta\left[\alpha\bar{k}_1^{\alpha-1}(1+(\alpha-1)\hat{k}_{t+1}) + (1-\delta)\right]$$

El valor de estado estacionario de (9') es:

$$(1-n) = \beta\ \alpha\ \bar{k}_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)$$

Restándole su valor de estado estacionario, y reemplazando $\bar{k}$ por el valor hallado:

(9'') $\theta\ \hat{c}_{t+1} + \left[\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{(1-\delta)}{1+n}\right](1-\alpha)\,\hat{k}_{t+1} = \theta\ \hat{c}_t$

Expresando matricialmente las ecuaciones (8'') y (9''), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \left[\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{(1-\delta)}{1+n}\right](1-\alpha) & \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ \dfrac{1}{\beta} & -\dfrac{\bar{c}}{(1+n)\bar{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}$$

Modelo neoclásico de generaciones superpuestas de Diamond

El modelo asume la existencia de muchas firmas o empresas idénticas que operan en mercados competitivos con una función de producción que exhibe rendimientos constantes a escala y satisface las condiciones de Inada.

$$Y = F\,(K, L)$$

En su forma intensiva: $y = f\,(k)$ con $y = \dfrac{Y}{L}$, $k = \dfrac{K}{L}$

Por el teorema de Euler, en mercados competitivos se cumple que:

$$r_t = f'(k_t)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Las firmas alquilan los factores K y L hasta que sus productos marginales se igualen a sus precios. Se asume depreciación nula ($\delta = 0$).

Por otro lado, las familias viven dos períodos, en el primero ganan un ingreso por su trabajo, y en ambos consumen. Por tanto, ahorran en el primer período, por el cual obtienen un retorno igual a la tasa de interés, r. El ahorro aumentado por la tasa de interés es destinado al consumo en el segundo período.

Entonces, si el consumidor nace en el período t, su consumo en el período $(t+1)$, que es cuando se hace viejo, estará dado por:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - C_{1t})$$

Además $C_{1t} + S_t = w_t$

Reordenando términos se obtiene la restricción presupuestaria intertemporal:

$$C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Las funciones de utilidad de las familias son estrictamente cóncavas. En particular, se asume que:

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Donde $\theta > 0$. Además, si θ tiende a 1, por la regla de L'Hôpital–Bernoulli, la función de utilidad se reemplaza por una función del tipo $u(C) = 1\text{n}(C)$.

La regla de l'Hôpital–Bernoulli

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables en $x = c$, si $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero cuando $x \to c$, entonces:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Veamos, $\lim\limits_{\theta\to 1}\dfrac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \to 0$, entonces, aplicando la regla tenemos:

$$\lim_{\theta\to 1}\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} = \lim_{\theta\to 1}\frac{-c^{1-\theta}\ln c}{-1} = \ln c$$

La utilidad intertemporal estará dada por:

$$u_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\beta}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Donde β es la tasa de descuento subjetiva.

Utilizando el método del Lagrangiano para determinar el plan de consumo óptimo, tenemos que:

$$\underset{(C_{1t}C_{2t+1})}{Max}\ L = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\beta}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda\left[w_t - \left(C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}}\right)\right]$$

Condiciones de primer orden:

(1) $C_{1t}^{-\theta} = \lambda$

(2) $\dfrac{1}{1+\beta}C_{2t+1}^{-\theta} = \dfrac{\lambda}{1+r_{t+1}}$

Las familias tratan w_t y r_{t+1} como dados, y escogen C_{1t} y C_{2t+1} para maximizar su función de utilidad, sujeta a su restricción presupuestaria.

Combinando las condiciones de primer orden, tenemos que:

$$\frac{1}{1+\beta}C_{2t+1}^{-\theta} = \frac{C_{1t}^{-\theta}}{1+r_{t+1}}$$

(3) $\dfrac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left(\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$

Reemplazando esta última relación en la restricción presupuestaria:

$$C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} \frac{C_{1t}}{C_{1t}} = w_t$$

$$C_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}} \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{\theta}} C_{1t} = w_t$$

$$C_{1t} + \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}} C_{1t} = w_t$$

$$C_{1t} \left[\frac{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}} \right] = w_t$$

$$(4)\ C_{1t} = \left(\frac{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right) w_t$$

El término que se encuentra entre paréntesis es menor a la unidad, por lo que el agente consume una fracción de su ingreso de trabajo (w_t) durante el primer período. Utilizando la definición de ahorro:

$$(5)\ S_t = w_t - \left(\frac{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right) w_t$$

De donde podemos definir la tasa de ahorro del agente, es decir, su propensión marginal a ahorrar:

$$\frac{dS_t}{dw_t} = \left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right)$$

$$s_w = s(r_{t+1}) = \left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right)$$

Luego:
$$S_r = \frac{\partial S_t}{\partial r_{t+1}} = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1+\beta}{1+r_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)S_t$$

Nótese que:

- $S_r > 0$ si $\theta < 0$
- $S_r < 0$ si $\theta > 0$
- $S_r = 0$ si $\theta = 0$

Entonces, para la forma funcional que adopta la función de utilidad, θ determina si domina el efecto sustitución o el efecto ingreso.

El equilibrio

Debemos determinar el valor de equilibrio de k_t y con este podremos definir los valores de r_t y w_t. El *stock* total de capital en $t + 1$ está dado por el ahorro de la generación (ahora ya vieja) nacida en t.

(6) $K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t w_t$

Donde $s(r_{t+1})w_t$ es el nivel de ahorro por agente, multiplicado por el número L_t de agentes nacidos en el período t, se obtiene el ahorro total, $s(r_{t+1})L_t w_t$, pues todos los agentes son iguales. Nótese que la fuerza laboral crece a la tasa n, por lo tanto:

$$L_{t+1} = (1+n)L_t = (1+n)^{t+1}L_0$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación de movimiento del capital por L_{t+1}:

$$k_{t+1} = s(r_{t+1})w_t \frac{L_t}{L_{t+1}}$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)w_t$$

Utilizando el teorema de Euler, según el cual $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$, tenemos:

$$(7)\quad k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)\left[f(k_t) - k_t f'(k_t)\right]$$

Esta relación es una ecuación no lineal en diferencias en k_t. Para cada valor de k_t, la ecuación determina en forma implícita un valor para k_{t+1}. En el estado estacionario, debe existir un valor k^*, tal que se cumpla $k^* = k_t = k_{t+1}$.

Para las formas funcionales específicas: $u(C)=\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$ y $f(k)=k^{\alpha}$, con $\alpha \in [0,1]$, la ecuación de movimiento del capital (7) toma la siguiente forma:

$$(8)\ k_{t+1}=\frac{1}{1+n}\frac{(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}+(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

Donde

$$s\left(f'(k_{t+1})\right)=\frac{(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{\theta}}+(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}$$

$$f(k_t)-k_t f'(k_t)=(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

Un caso simple

Asumiendo una función de producción de tipo Cobb-Douglas:

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \quad \text{ó} \quad y = k^{\alpha}$$

Y una función de utilidad logarítmica con $\theta = 1$, de la forma:

$$u(c) = 1\mathrm{n}\ (c)$$

En la situación de estado estacionario, se impone un valor tal que $k^{*} = k_t = k_{t+1}$, por lo que obtenemos:

$$k_{t+1}=\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{2+\beta}\right)(1-\alpha)k_t{}^{\alpha}$$

Por tanto, podemos definir el *stock* de capital y la producción en estado estacionario:

$$k^{*}=\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{2+\beta}\right)(1-\alpha)k^{\alpha}$$

$$k^{*}=\left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^{*}=\left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\beta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

El valor de k^{*}es un equilibrio estable. Sin embargo, el supuesto de que $\theta = 1$ no es inocuo, pues implica que la tasa de ahorro es independiente de la tasa de interés.

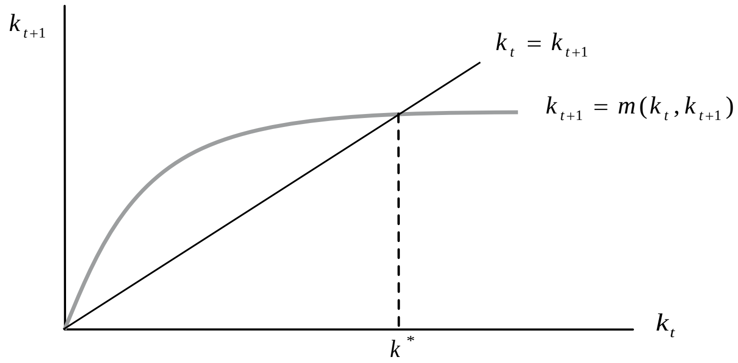
Se entiende que la productividad marginal del capital es igual a la tasa de interés. En el gráfico 2.16, el estado estacionario se parece al del modelo de Solow. Sin embargo, en el modelo de Solow:

- La tasa de ahorro es constante
- La tasa de interés es constante
- La inversión neta es cero

Cuadro 2.5
Resumen: comportamiento de las variables en los modelos de crecimiento económico

Variables	Modelos			
	Harrod y Domar	**Solow Swan**	**Ramsey–Cass-Koopmans**	**Diamond**
Tasa de ahorro	Exógeno	Exógeno	Resultado de optimización intertemporal del consumo	Resultado de optimización intertemporal del consumo
Relación capital–producto	Fija	Variable Fija en el s.s.	Variable Fija en el s.s.	Variable Fija en el s.s.
Estabilidad del modelo	No estable	Estable	Estable	Estable
Empleo de la fuerza laboral	Improbable	Ocurre	Ocurre	Ocurre
Tecnología	Exógena	Exógena	Exógena	Exógena
Edad de oro	Improbable	Ocurre	Ocurre	Ocurre
Regla de oro	No se da	Se cumple	No se da	No se da
Relación K/L óptima (regla de oro)	No se aplica	Se alcanza con una tasa de ahorro determinada	No se alcanza	No se alcanza
Producto marginal del capital	Constante (productividad media)	Menor que el de RCK	Mayor que el de Solow	Mayor que el de Solow
Relación K/L del estado estacionario	No se aplica	Mayor que en RCK	Menor que en Solow	Menor que en Solow

Gráfico 2.16
Equilibrio en el modelo de Diamond



En el modelo de Diamond, las dos primeras son endógenas y están asociados a la conducta optimizadora de los agentes.

Referencias bibliográficas

Abramovitz, Moses
1956 «Resource and Output Trends in the United States Since 1870». *American Economic Review* 96(2), pp. 5-23.

Barro, Robert & Jong Wha Lee
1994 Losers and Winners in Economic Growth. En Michael Bruno and Boris Pleskovic (eds.), Actas de *World Bank Annual Conference on Development Economics* (pp. 267-297). Washington D.C.: Banco Mundial.

Barro, Robert & Xavier Sala-i-Martin
1991 «Convergence Across States and Regions». *Brookings Papers of Economic Activity* 1, pp. 107-182.
1992 «Convergence». *Journal of Political Economy* 100(21), pp. 223-251.

Baumol, William
1986 «Productivity Growth, Convergence and Welfare: What the Long-Run Data Show». *American Economic Review* 76, pp. 1072-1085

Caselli, Francesco, Gerardo Esquivel & Fernando Lefort
1996 «Reopening the Convergence Debate: a New Look at Cross-country Growth empirics». *Journal of Economic Growth* 1, pp. 363-390.

Cass, David
1965 «Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation». *Review of Economic Studies* 32, pp. 233-240.

Chiang, Alpha
1987 *Métodos fundamentales de economía matemática* (3ª ed). México D.F.: McGraw-Hill —Interamericana.

Commendatore, Pasquale, Salvatore D'Acunto, Carlo Panico & Antonio Pinto
2003 «Keynesian Theories of Growth». En Neri Salvadori (Ed.), *The Theory of Economic Growth: A 'Classical' Perspective*. Cheltenham: Edward Elgar.

De Long, Bradford
1988 «Productivity Growth, Convergence, and Welfare: Comment». *American Economic Review* 78(5), pp. 1138-1154.

Denison, Edward
1985 *Trends in American Economic Growth, 1929-1982*. Washington D.C.: The Brookings Institution.

Domar, Evsey
1946 «Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment». *Econometrica* 14, pp. 137-147.

Fabricant, Solomon
1954 «Economic Progress and Economic Change». En National Bureau of Economic Research (Ed.), *34th Annual Report*. New York: National Bureau of Economic Research.

Galor, Oded
1996 «Convergence? Inferences from Theoretical Models». *The Economic Journal* 106(437), pp. 1056-1069.

Griliches, Zvi
1996 «The Discovery of the Residual: a Historical Note». *Journal of Economic Literature* 34(3), pp. 1324-1330.

Harrod, Roy
1939 «An Essay in Dynamic Theory». *Economic Journal* 49, pp. 14-33.

Islam, Nazrul
2003 «What Have we Learnt from the Convergence Debate». *Journal of Economic Survey* 17(3), pp. 309-362.

Jiménez, Félix
1994 «Dinero, inversión y financiamiento: apuntes sobre el discurso teórico de J. M. Keynes». Documento de trabajo n.º 120. Departamento de Economía – Centro de Investigaciones Sociales, Económicas, Políticas y Antropológicas (CISEPA). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.
2006 *Macroeconomía: Enfoques y Modelos* (Vols. 1-2) (3ª ed.). Lima: Fondo Editorial PUCP.

Kaldor, Nicholas & James Mirrlees
1962 «A New Model of Economic Growth». *The Review of Economic Studies* 29(3), pp. 174-192.

Kendrick, John
1955 «Productivity». En Solomon Fabricant (Ed.). National Bureau of Economic Research (Ed.), *Government in Economic Life. 35th Annual Report* (pp. 44-47). New York: National Bureau of Economic Research.

Keynes, John Maynard
1965 [1936] *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero* (7ª ed.). México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Koopmans, Tjalling
1965 *On the Concept of Optimal Economic Growth. The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North Holand.

Lichtenberg, Frank
1994 «Testing the Convergence Hypothesis». *Review of Economics and Statistics* 76(3), pp. 576-579

Mankiw, Gregory, David Romer & David Weil.
1992 «A Contribution to the Empirics of Economic Growth». *The Quarterly Journal of Economics* 107(2), pp. 407-437.

Pipitone, Hugo
1994 *La salida del atraso: Un estudio histórico comparativo*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Ramsey, Frank
1928 «A Mathematical Theory of Saving». *The Economic Journal* 38(152), pp. 543-559.

Rojo, Luis Ángel (Ed.)
1966 *Lecturas sobre la teoría económica del desarrollo*. Madrid: Gredos.

Sato, Ryuzo
1964 «The Harrod-Domar Model vs the Neoclassical Growth Model». *The Economic Journal* 74(294), pp. 380-387.

Shaikh, Anwar
2007 «A Proposed Synthesis of Classical and Keynesian Growth». Documento de trabajo 2007-1. Schwartz Center for Economic Policy Analysis (SCEPA). Nueva York: The New School.

Schmookler, Jacob
1952 «The Changing Efficiency of the American Economy: 1869-1938». *Review of Economic Statistics* 34(3), pp. 214-321.

Solow, Robert

1956 «A Contribution to the Theory Of Economic Growth». *Quarterly Journal of Economics* 70, pp. 65-94.

1957 «Technical Change and the Aggregate Production Function», *The Review of Economics and Statistics* 39(3), pp. 312-320.

1961 «Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth», *The Review of Economic Studies* 29(1), pp.48-50.

1970 «Growth Theory: an Exposition». Londres: Cambridge University Press.

1988 «Growth Theory and After», *The American Economic Review* 78(3), pp. 307-317.

2000 *Growth Theory*. Oxford University Press.

Solow, Robert (Ed.)

2001 *Landmark Papers in Economic Growth*. Northampton: Edward Elgar.

Stigler, George

1947 *Trends in Output and Employment*. Nueva York: National Bureau of Economic Research.

Swan, Trevor

1956 «Economic Growth and Capital Accumulation». *Economic Record* 32, pp. 334-336.

Thirlwall, Anthony

2007 «Keynes and Economic Development». *Economía aplicada* 11(3), pp. 447-457.

Timbergen, Jan

1942 *Zur theorie der Langfirstigen Wirtschaftsentwicklung*. Weltwirts Archiv. 1. Amsterdam: North-Holland.

Uzawa, Hirofumi

1961 «On a Two-Sector Model of Economic Growth». *Review of Economic Studies* 29(78), pp. 40-47.

1963 «On a Two-Sector Model of Economic Growth II». *Review of Economic Studies* 30(2), pp. 105-118.