MIGUEL PIAGGIO HENDERSON

FÍSICA con ejercicios

VOLUMEN 2
(segunda edición)

EDICIÓN COLECCIÓN

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 2001

FÍSICA

con ejercicios

FÍSICA

CON EJERCICIOS

VOLUMEN 2
(segunda edición)

2001

MIGUEL PIAGGIO HENDERSON

Pontificia Universidad Católica del Perú
Fondo Editorial 2001

Primera edición, junio de 1992
Segunda edición, enero de 2001

FÍSICA CON EJERCICIOS

Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria, cuadra 18, San Miguel
Teléfonos: 460-0872, 460-2870 anexos 220 y 356
Email: feditor@pucp.edu.pe

ISBN: 9972-42-262-3
Hecho el Depósito Legal: 150105-2001-0115

Impreso en Perú - Printed in Peru

Deseo expresar aquí mi sincera gratitud y reconocimieto a todos y a cada uno de los colegas y amigos con quienes he tenido la oportunidad de codictar durante numerosos semestres el curso de Física General en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

En particular mi agradecimiento a los profesores: Hernán Montes, Alberto Gago, Gualberto Montero y Juan Carlos Abad, que leyeron partes del escrito original. Asimismo a los profesores: María Elena López, Hugo Medina y Maynard Kong por la ayuda que me han brindado.

Me siento en deuda con las autoridades de la Universidad por la acogida y las facilidades concedidas para poder llevar a cabo la publicación de este segundo volumen.

M.P.H.

PREFACIO

Este es un libro dirigido a estudiantes universitarios tanto de Ciencias como de Ingeniería. La diferencia que a menudo se da, esto es, en ingeniería con preponderancia a las aplicaciones y a la resolución de una gran cantidad de problemas a costa de tratar menos temas y con menor profundidad, en cambio, en ciencias se tiende a cubrir un número mayor de temas e insistiendo con mayor profundidad en los principios, pero dedicando menos esfuerzo a los problemas y aplicaciones prácticas. Una separación o tendencia diferenciadora, en uno u otro sentido, creo que es perjudicial e inconveniente en los primeros ciclos, por el contrario, debe buscarse un sano equilibrio, para que los estudiantes de ciencias se beneficien con la tendencia a la aplicación práctica de los de ingeniería y estos con una mayor preocupación por los principios, desarrollando con suficiente profundidad y amplitud los temas a los cuales se orientan las diversas ramas de la ingeniería.

La resolución de problemas es parte muy importante en el estudio de cualquier disciplina científica. No debe pensarse que es solo una tarea académica sin mayor trascendencia, por el contrario, la solución de problemas es imprescindible para desarrollar el sentido autocrítico y la capacidad creativa, ambos necesarios para que el estudiante se pueda enfrentar a las numerosas dificultades que le planteará su futura ocupación ya sea profesional o de investigación. Por eso el título Física con ejercicios, las leyes físicas son pocas y las situaciones que se nos presentan, muchas veces denominada teoría, solo son soluciones de importantes casos particulares. Por supuesto que es absurdo desarrollar una gran cantidad y no variedad de problemas, como también lo es querer aprenderse de memoria las soluciones. Se advierte a los estudiantes, muy seriamente, que se desvirtuará todo objetivo si pretende hacerlo y que, a la corta o a la larga, lo conducirá inevitablemente al fracaso.

Las matemáticas necesarias para desarrollar el curso, sin ser elementales, tampoco son de muy alto nivel ni se requiere demasiado formalismo, más bien se precisa familiaridad para manejar con soltura algunos elementos, como el manejo de las operaciones fundamentales del álgebra vectorial, geometría analítica y teoría de funciones, sobre todo derivación e integración, así como también las nociones sobre las ecuaciones diferenciales; temas que paralelamente deben profundizarse en un curso de análisis matemático. Es poco conocido que Euler fue el primero en escribir la segunda ley de Newton en la forma hoy conocida: «Fuerza igual a masa por aceleración», es decir, en forma de ecuación diferencial, en el curso estas ecuaciones se manejan sin formalismos de un modo intuitivo. En cursos posteriores, además, no hay que dejar de lado el enfoque propio de estos tiempos con el cálculo numérico y la utilización, cada vez más popular, de las computadoras, que hacen posible el manejo de ecuaciones que con los métodos analíticos son poco eficaces.

La descripción de los fenómenos físicos combina la reflexión teórica con el análisis matemático y el método experimental moderno. Consecuentemente, para el desarrollo del curso es también indispensable la ejecución paralela de trabajos experimentales en el laboratorio.

En este volumen 2, primero se desarrollan los importantes conceptos de trabajo y energía, luego se trata la dinámica de los sistemas de partículas y cuerpo rígido, y se finaliza con un capítulo presentando la gravitación.

Son muchas las personas que han contribuido de un modo o de otro para poder escribir este libro, no quisiera omitir a ninguna de ellas. Reconociendo la deuda en que estoy con los autores que me han precedido en este campo, doy las gracias a todos los alumnos, profesores, colegas y amigos que han hecho posible la edición de este nuevo volumen.

Miguel Piaggio Henderson
Departamento de Ciencias - Sección Física
Pontificia Universidad Católica del Perú

CONTENIDO

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPITULO V

TRABAJO Y ENERGIA

- INTRODUCCION
- TRABAJO HECHO POR UNA FUERZA SOBRE UNA PARTICULA.
- TEOREMA DEL TRABAJO Y ENERGIA CINETICA.
- FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGIA POTENCIAL - ALGUNOS CASOS PARTICULARES: FUERZA GRAVITACIONAL CONSTANTE, FUERZA ELASTICA Y FUERZA GRAVITACIONAL UNIVERSAL.
- CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA TOTAL-SOLUCION DEL CASO GENERAL UNIDIMENSIONAL CUANDO LA FUERZA DEPENDE SOLO DE LA POSICION.
- FUERZAS NO CONSERVATIVAS Y CONSERVACION DE LA ENERGIA TOTAL.
- POTENCIA.

5.1 Introducción.-

Con lo estudiado hasta el capítulo anterior estamos en condiciones de plantear la ecuación diferencial del movimiento para una partícula, en cualquier sistema de referencia, sometida a la acción de diversas fuerzas expresadas por sus leyes de fuerzas.

El problema es resolver esta ecuación, esto es, encontrar la ecuación del movimiento $\bar{r}_{(t)}$ para las condiciones iniciales dadas. Esto lo hemos hecho fácilmente para el caso particular de una fuerza F constante. En general, cuando la fuerza F no es constante, es más complicada la solución, llegando en muchos casos a soluciones numéricas y se necesitará la ayuda de una computadora para obtener resultados.

Es posible adoptar un procedimiento alternativo tomando un atajo para poder obtener información del movimiento en determinado instante, como la velocidad, sin tener que resolver el problema para todo instante. Para ello es necesario complicar un poco las cosas al principio introduciendo los conceptos de Trabajo y Energía, pero se llega a una formulación simple que nos permitirá resolver el problema en los términos mencionados y nos conduce o culmina con uno de los más importantes principios de la Física, principio o Ley de la Conservación de la Energía.

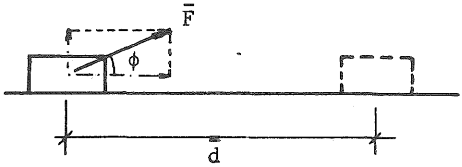
Estos conceptos de trabajo y energía ya han sido presentados en cursos anteriores, sin embargo, es necesario estudiarlos nuevamente precisándolos en forma más general.

5.2 Trabajo hecho por una Fuerza sobre una partícula.

En primer lugar, recordemos que el trabajo hecho por una fuerza constante sobre una partícula es una cantidad escalar dada por el producto escalar de los vectores $\bar{F}$ fuerza y $\bar{d}$ distancia:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{d}$$

W es el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento por la distancia que la partícula se mueve a lo largo de esta línea:



$$W = F\ d \cos \phi$$
$$W = (F \cos \phi)d$$

Observe que la componente perpendicular al movimiento no contribuye al desplazamiento, el trabajo es cero.

Si la componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento, se opone al desplazamiento ejecutado, el trabajo será negativo. Por supuesto que sobre la partícula actúan diversas fuerzas,que de acuerdo con la ley de Newton, hacen que la partícula se desplace la distancia $\bar{d}$, cada una de las fuerzas independientemente contribuirá o se opondrá a ese movimiento; decimos entonces que hacen un trabajo positivo, nulo o negativo, según sea el caso, dado por el coseno del ángulo ϕ.

Este concepto de trabajo definido en física no debe confundirse con el sentido usual en el lenguaje cotidiano que se refiere el trabajo fisiológico, por ejemplo, decimos comúnmente que una persona que sostiene un peso hace trabajo, pero en mecánica, en física, no, porque no hay desplazamiento.

La unidad de trabajo, es el trabajo hecho por una fuerza unidad al mover un cuerpo la unidad de distancia en la dirección de la fuerza; en el sistema internacional SI, la unidad de trabajo es un Newton-metro llamado Joule, abreviando:

$$1\ N - m = 1\ J$$

Veamos ahora , el caso general, cuando actúa sobre la partícula, que se mueve sobre una trayectoria C, una fuerza $\bar{F}$ variable. El trabajo hecho por esa fuerza sobre la partícula, cuando se desplaza sobre C desde un punto A hasta otro punto B, lo calculamos dividiendo la curva en un gran número N de pequeños interva los o desplazamientos $d\bar{r}$ en la dirección del movimiento a lo largo de la trayectoria, como se muestra en la figura 5.1 para un punto en particular.

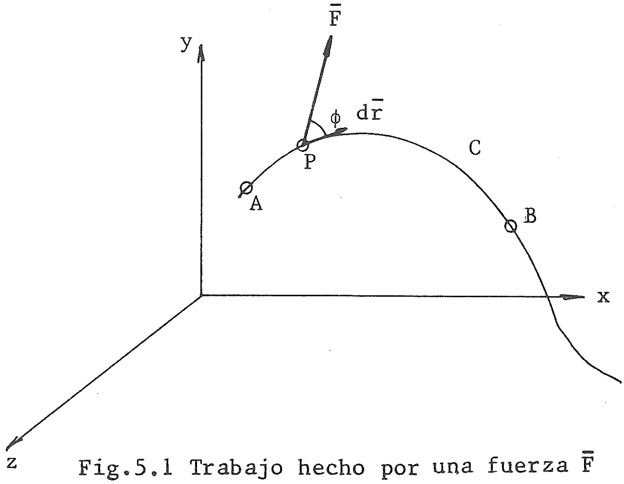


Fig.5.1 Trabajo hecho por una fuerza $\bar{F}$ variable sobre una partícula que se mueve sobre la trayectoria C, desde un punto A a otro B. Se muestra la fuerza $\bar{F}$ el desplazamiento $d\bar{r}$ y el ángulo ϕ que forman en un punto particular P.

El trabajo hecho por $\bar{F}$ sobre la partícula en el desplazamiento $d\bar{r}$, será:

$$dW \simeq \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

El trabajo total, con gran aproximación, será la suma de todos estos trabajos elementales.

$$W_{AB}^{C} \simeq \sum_{i=0}^{i=N} \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i$$

Pasando al límite cuando $d\bar{r} \to 0$, se tendrá la integral:

$$W_{AB}^{C} = {}_C\int_{A}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Esta es la expresión matemática más general del trabajo. La integral a lo largo de una curva recibe el nombre de Integral curvilínea o Integral de Línea, cuyo estudio y forma de evaluar se rán con mayor rigurosidad en sus cursos de matemáticas.

Expresando $\bar{F}$ y $d\bar{r}$ en sus componentes cartesianas;

$$\bar{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

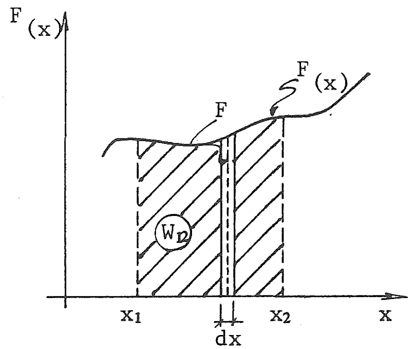
$$d\bar{r} = d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}$$

Considerando el producto escalar de estos dos vectores, el trabajo será:

$$W_{AB}^{C} = {}_{C}\int_{A}^{B} (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz)$$

Como caso particular consideremos una fuerza que actúa a lo largo del movimiento x, pero que es función variable de la posición $F_{(x)}$.

Grafiquemos $F_{(x)}$ vs x y consideremos un pequeño desplazamiento



dx, el trabajo elemental será:

$$dW \cong F \, dx$$

El trabajo total efectuado por F al desplazarse el cuerpo desde X_1 a X_2 será:

$$W_{12} \cong \sum_{x_1}^{x_2} F \, dx$$

En el límite cuando $dx \to 0$, se tendrá la integral:

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_{(x)} \, dx$$

En este caso la integral puede ser interpretada gráficamente como un área en el gráfico $F_{(x)}$ vs x, es igual al área encerrada por la curva $F_{(x)}$ y el eje x entre los límites X_1 y X_2.

5.3 Teorema del Trabajo y Energía Cinética.-

Consideremos un cuerpo de masa m sobre el cual actúa una Fuerza Resultante $\bar{F}$ produciendo una aceleración $\bar{a}$, teniéndose de acuerdo a la Ley de Newton:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

multiplicando escalarmente por $d\bar{r}$ ambos miembros,

$$\bar{F}.d\bar{r} = m \frac{d\bar{v}}{dt} . d\bar{r}$$

Como: $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, se tiene que: $d\bar{r} = \bar{v}\, dt$

luego:

$$\bar{F}.d\bar{r} = m \frac{d\bar{v}}{dt} . \bar{v}\, dt = m\, d\bar{v} . \bar{v}$$

multiplicando y dividiendo por 2 el segundo miembro,

$$\bar{F}.d\bar{r} = \frac{1}{2} m\, 2(d\bar{v} . \bar{v}) = \frac{1}{2} m(d\bar{v} . \bar{v} + \bar{v}. d\bar{v})$$

luego:

$$\bar{F}.d\bar{r} = \frac{1}{2} m\, d(\bar{v} . \bar{v}) = \frac{1}{2} m\, d(v^2)$$

integrando, de un punto 1 al punto 2, se tiene:

$$_C\int_1^2 \bar{F}.d\bar{r} = \frac{1}{2} m \int_{v_1}^{v_2} d(v^2) = \frac{1}{2} m\, (v_2^2 - v_1^2)$$

como el primer miembro de esta expresión es el trabajo hecho por la fuerza resultante $\bar{F}$ cuando la partícula se desplaza del punto 1 al 2 a lo largo de la trayectoria C, se tiene que:

$$W_{12}^C = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2$$

llamando Energía Cinética de una partícula a la mitad del producto de su masa por el cuadrado del módulo de su velocidad o rapidez, esto es:

$$K \equiv \frac{1}{2} m\, v^2$$

Podemos escribir:

$$W_{12} = K_2 - K_1$$

o bien:

$$W = \Delta K$$

Este resultado es el Teorema del Trabajo y Energía Cinética: El trabajo hecho por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

Observe que éste teorema es simplemente una relación obtenida de la Ley de Newton, donde hemos convenientemente denominado o definido trabajo y energía cinética.

Esta relación es muy útil cuando es fácil calcular el trabajo y sólo deseamos conocer la velocidad en ciertas posiciones. Pero su mayor importancia reside en el hecho que nos conduce al principio de la conservación de la energía, Ley que es de mayor generalidad en Física.

En algunos casos es más fácil y útil calcular el trabajo hecho independientemente por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, es decir si,

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \ldots \bar{F}_n$$

se tendrá:

$$W_1 + W_2 + W_3 + \ldots W_n = \Delta K$$

La energía cinética, como el trabajo, es una cantidad escalar que tiene como unidad el Joule en el SI.

5.4 Fuerzas Consérvativas y Energía Potencial.-

Si se tiene una fuerza $\bar{F}$ tal que su trabajo sobre una partícula a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es siempre cero se denomina fuerza conservativa, término que se justificará plenamente más adelante, matemáticamente se escribe:

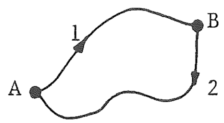
$$W_{AA}^{C} = {}_{C}\oint \bar{F}.d\bar{r} = 0$$

Ejemplos de fuerzas importantes que tienen esta condición son la gravitacional y la elástica.

Del teorema trabajo-energía cinética, $\Delta K = W$. Si $W = 0$, se tiene: $\Delta K = 0$. En un recorrido de ida y vuelta la energía cinética K no se altera si la fuerza es conservativa.

Para poder desarrollar la idea de energía potencial, podemos probar que si una fuerza es conservativa, el trabajo hecho por ella sobre una partícula que se mueve entre dos puntos depende solamente de éstos puntos y no de la trayectoria seguida.

Veamos, para las trayectorias arbitrarias 1 y 2 recorriendo el camino A B A, se tiene:

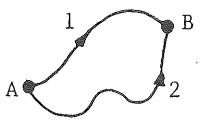


$$W^1_{AB} + W^2_{BA} = 0$$

o sea:

$$W^1_{AB} = - W^2_{BA}$$

Pero:



$$W^2_{AB} = - W^2_{BA}$$

Luego:

$$W^1_{AB} = W^2_{AB}$$

Es otra forma equivalente de identificar a una fuerza conservativa. Resultado que nos conduce al concepto de Energía Potencial, como el trabajo de éstas fuerzas depende solamente de la posición de los puntos inicial y final de la trayectoria, cualquiera que sigue el cuerpo, podemos asociar al espacio, o encontrar, una función escalar de la posición U(x, y, z) tal que, su variación es igual al trabajo realizado por la fuerza. Por conveniencia la definimos con signo negativo, como se justificará más adelante al conducirnos a la energía mecánica total.
O sea, el trabajo de las fuerzas conservativas será igual a menos la variación de la energía potencial, esto es:

$$W^C_{AB(\text{conservativo})} \equiv - \Delta U$$

Conociendo la energía potencial se puede determinar la fuerza, en el caso de una dimensión, se tiene:

$$\int_A^B F\, dx = -\Delta U$$

$$F\, dx = -dU$$

luego:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Podemos generalizar en el espacio, en coordenadas cartesianas:

$$\bar{F} = -\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

o bien

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} U$$

en general se tiene: $\bar{F} = -$ gradiente U

Expresiones que se estudiarán, analizarán y utilizarán en cursos más avanzados de mecánica.

Esto nos permite mostrar que si sobre una partícula actúan dos o más fuerzas conservativas, la energía potencial total es la suma de las energías potenciales de ellas, mostrémoslo para el caso unidimensional.

Si, $$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

se tiene que:

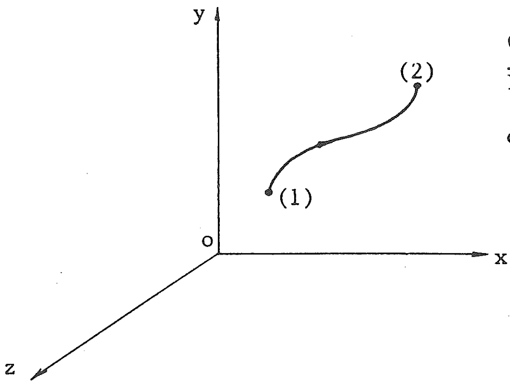
$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} - \ldots - \frac{dU_n}{dx}$$

$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n$$

En general, presenta la ventaja de trabajar con energías potenciales, puesto que, es más fácil sumar escalares (energía potencial) que sumar vectores (fuerzas).

Analicemos algunos importantes casos particulares:

- Fuerza gravitacional constante.



Como:

$\bar{F} = - mg\ \hat{j}$

$d\bar{r} = dx\ \hat{i} + dy\ \hat{j} + dz\ \hat{k}$

el trabajo será:

$$W_{12} = \int_1^2 \bar{F}.d\bar{r} = - mg \int_{y_1}^{y_2} dy = - mg\ (y_2 - y_1)$$

Si $y_1 = 0$, $W = - mg\ y$

Observe que este valor es independiente del camino seguido, depende sólo de los puntos final e inicial y si $y_2 = y_1$ el trabajo es cero.

Luego, esta fuerza es conservativa y la energía potencial correspondiente será:

$$U_2 - U_1 = - W_{12} = mg(y_2 - y_1) = mg\ y_2 - mg\ y_1$$

tomando arbitrariamente $U_1 = 0$ para $y_1 = 0$, se tiene:

$$U = mg\ y$$

Observe que la referencia generalmente se escoje para obtener la expresión más simple de la función U, dentro de la familia que satisfacen la condición $\Delta U = - W$. Pruebe Ud. con otro valor.

Conociendo U podemos encontrar F, veamos:

$$F_y = - \frac{dU}{dy} = - \frac{d}{dy}\ (mg\ y) = - mg$$

- Fuerza elástica.

Como:

$\bar{F} = - kx\ \hat{\imath}$

$d\bar{r} = dx\ \hat{\imath}$

el trabajo será:

$$W_{12} = \int_1^2 F . d\bar{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{(x)} dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x\ dx = - \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

si $x_1 = 0$, $W = - \frac{1}{2} kx^2$

Observe que este valor es independiente del camino seguido, depende solo de los puntos final e inicial y si $x_2 = x_1$, el trabajo es cero.

Luego, ésta fuerza es conservativa y la energía potencial correspondiente será:

$$U_2 - U_1 = - W_{12} = \frac{1}{2} k\ (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$

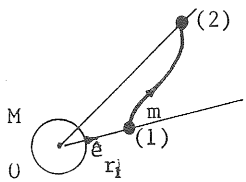
tomando arbitrariamente $U_1 = 0$ para $x_1 = 0$, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Conociendo U, podemos determinar F:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = - kx$$

- Fuerza gravitacional universal.



Como:

$\bar{F} = - \frac{GMm}{r^2}\ \hat{e}_r$

$d\bar{r} = dr\ \hat{e}_r + d\theta\ \hat{e}_\theta$

el trabajo será:

$$W_{12} = \int_1^2 \bar{F} . d\bar{r} = - GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - GMm \left| - \frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Si $r_2 > r_1$, $\frac{1}{r_2} < \frac{1}{r_1}$ y $W_{12} < 0$.

Este valor es indpendiente de la trayectoria, depende solo de los puntos final e inicial y si $r_2 = r_1$, el trabajo es cero.

Luego, esta fuerza es conservativa y la energía potencial correspondiente será:

$$U_2 - U_1 = - W_{12} = - GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = - \frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1}$$

Tomando arbitrairamente $U_1 = 0$ para $r_1 = \infty$, se tiene:

$$U = - \frac{GMm}{r}$$

Como en los casos anteriores, la referencia escogida es la más adecuada para obtener la expresión más simple de U. Observe que para $r = \infty$ se obtiene, como debe ser, $U = 0$.
También conociendo la energía potencial podemos determinar la fuerza correspondiente:

$$F_r = - \frac{dU}{dr} = - \frac{d}{dr}\left(- \frac{GMm}{r}\right) = - \frac{GMm}{r^2}.$$

5.5 Conservación de la Energía Mecánica Total.-

De la Ley de Newton hemos establecido el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W = \Delta K$$

donde W es el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.
Si se tiene que todas éstas fuerzas son conservativas podemos también escribir que:

$$W = - \Delta U$$

luego, en este caso se tendrá:

$$\Delta K = - \Delta U$$

Expresión que nos dice que si se presenta una disminución de la energía cinética,ésta debe ser compensada con un aumento de la energía potencial y viceversa.
O bien,podemos tener que:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

ó:

$$\Delta(K + U) = 0$$

definimos entonces la Energía Mecánica total como la suma de la Energía Cinética y la Energía Potencial,

$$E \equiv K + U$$

y se tiene:

$$\Delta E = 0$$

Expresión que nos dice que cuando sobre un cuerpo actúan solo fuerzas conservativas, la energía mecánica total se conserva. Este es el principio o Ley de la conservación de la energía mecánica total para fuerzas conservativas.

Expresamente, entre dos estados:

$$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0$$

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = 0$$

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 = E = \text{constante}$$

esto es, la suma de las energías cinética y potencial es constante, constante determinada por las condiciones iniciales.

Ahora podemos ver porque definimos el trabajo de las fuerzas conservativas igual a la variación de energía potencial con signo negativo: para poder definir la energía mecánica total como la suma de las energías cinética y potencial, que es más cómodo pues en caso contrario tendríamos la diferencia de éstas. Observe que esto no altera el aspecto físico puesto que al calcular el trabajo lo que evaluamos es el cambio de la energía potencial y no la energía potencial propiamente dicha.

* Resolvamos el problema general unidimensional de fuerzas conservativas que sólo dependen de la posición $F_{(x)}$.
  Calculamos la energía potencial

$$\Delta U = - W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_o)} = - \int_{x_o}^{x} F_{(x)} dx$$

Tomando arbitrariamente $U_{(x_o)} = 0$ para la posición de referencia x_o,

$$U_{(x)} = - \int_{x_o}^{x} F_{(x)}\, dx$$

Conociendo $U_{(x)}$, para la condición inicial de energía mecánica total E, por la conservación se tiene:

$$K + U_{(x)} = E$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + U_{(x)} = E$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{(x)}}$$

Como:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{(x)}}}$$

Integrando: $$\int_{o}^{t} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - U_{(x)}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - U_{(x)}}}$$

después de efectuar la integral, para el particular valor de $U_{(x)}$, podemos obtener la posición $x_{(t)}$ y de ésta también $v_{(t)}$, ya sea derivando $x_{(t)}$ o sustituyendo su valor en $v_{(x)}$.

Aún cuando ésta integral sea difícil de evaluar, la ecuación de conservación de energía nos permite obtener una información cualitativa útil de los posibles movimientos, dibujando la gráfica de $U_{(x)}$ vs x y teniendo en cuenta que $E \geqslant U_{(x)}$.

Como ejemplo, en la figura 5.2 se muestra una función de energía potencial. Dejamos al lector el análisis de los posibles movimientos de la partícula para diferentes condiciones iniciales o valores de E_i, determinando los puntos de retorno los de equilibrio y los de máxima velocidad.

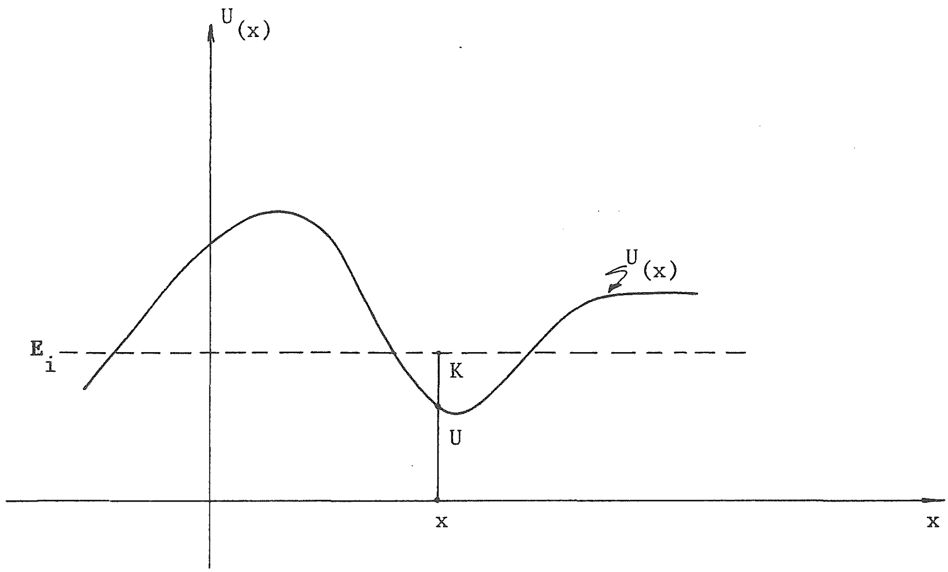


Fig. 5.2 Gráfica $U_{(x)}$ vs x

5.6 Fuerzas No conservativas y la conservación de la Energía total.

Las fuerzas que no cumplen con las condiciones establecidas anteriormente para fuerzas conservativas, se denominan Fuerzas No Conservativas. Para éstas,no será posible encontrar una energía potencial función de la posición, el trabajo realizado por ellas depende del camino seguido.

Consideremos que sobre una partícula actúan fuerzas conservativas y no conservativas, al aplicar el teorema trabajo y energía cinética, se tendrá:

$$W_c + W_{nc} = \Delta K$$

como:

$$W_c = - \Delta U$$

se tiene:

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U$$

ó,

$$W_{nc} = \Delta E$$

Vemos que en este caso la energía mecánica no se conserva, $\Delta E \neq 0$.

Supongamos en primer lugar que se tiene una sola fuerza no conservativa debida a la fricción, teniéndose:

$$W_f = \Delta E$$

como en este caso, $W_f < 0$, se tendrá que $\Delta E < 0$, o bien : $E_2 < E_1$. La fricción es una fuerza disipativa que disminuye la energía mecánica de la partícula.

En el caso de la fricción la pérdida de energía mecánica aparece como calor, se produce un aumento de la temperatura generando un cambio de la energía interna ΔU_i, términos que estudiaremos con más detalle en los capítulos posteriores de Termodinámica.

Así como el trabajo de una fuerza conservativa lo asociamos con menos el cambio de energía potencial, el trabajo de la fuerza no conservativa de fricción lo asociamos con menos el cambio de energía interna del cuerpo:

$$W_f = - \Delta U_i$$

teniéndose que:

$$\Delta E + \Delta U_i = 0$$

Por lo tanto, la suma de las energías mecánica e interna calorífica no cambia, permaneciendo constante y decimos que la Energía Total se conserva.

Generalizando cuando actúan otras fuerzas no conservativas:

$$W_c + W_f + W_{onc} = \Delta K$$

o bien:

$$W_{onc} = \Delta K + \Delta U + \Delta U_i$$

$$W_{one} = \Delta E + \Delta U_i$$

Para cualquier otra fuerza no conservativa, siempre se encuentra otra forma de energía (Electromagnética, Química , Sonora , etc) que corresponda al trabajo que realiza, esto es:

$$W_{onc} = - \text{cambio de otra forma de energía}$$

$$W_{onc} = - \Delta U_e$$

y nuevamente tenemos ,

$$\Delta E + \Delta U_i + \Delta U_e = 0$$

sea, $E + U_i + U_e = E_T$

se tiene $\Delta E_T = 0$

y decimos que la Energía total es constante, E_T = const.

La Energía puede transformarse de una forma en otra pero no se crea ni se destruye.

Este es el principio o Ley de la conservación de la Energía. Relaciona la mecánica con las otras áreas de la física, está presente en toda la física, con mayor generalidad que la propia Ley de Newton de la cual la hemos aquí obtenido.

5.7 Potencia

Muchas veces no sólo nos interesa saber el trabajo total hecho, sino también la rapidez con la cual se hace el trabajo.

La potencia media será:

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t}$$

y la potencia instantánea:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

su unidad en el SI es el Joule/seg llamado Watt o vatio, abreviando:

$$1\ J/s = 1W$$

Teniendo como múltiplo el kilowatt: $1Kw = 10^3 w$.

Definida ésta unidad de potencia, el trabajo algunas veces se expresa en unidades de potencia x tiempo, dando lugar al término frecuente de Kilowatt-hora.

La potencia instantánea, se puede tener en función de la fuerza y velocidad en ese instante. De la definición de trabajo

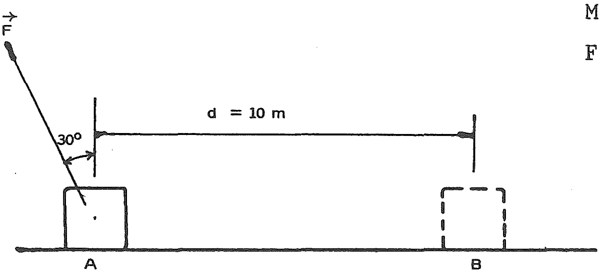
$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$\frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$P = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

PROBLEMAS

1. Calcular el trabajo hecho por la fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre un bloque, cuando éste pasa de la posición A a la B, como se muestra en la figura



M = 100 Kg

F = 40 N

$$W_{AB} = \bar{F} \cdot \bar{d} = F\ d \cos 120°$$

$$W_{AB} = 40 \times 10 \times (-0.5)$$

$$W_{AB} = -\ 200\ J$$

2. Una fuerza neta de 0.2N actúa sobre un cuerpo de 10Kg que está inicialmente en reposo. Calcular el trabajo hecho por la fuerza en el 1º, en el 2º y en el 3º segundo y la potencia instantánea al término del 3º segundo.

La aceleración que se imprime al cuerpo es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0.2}{10} = 0.02\ m/s^2$$

Los espacios recorridos son:

- en el 1º segundo: $d_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \times 0.02 \times 1^2 = 0.01m$
- en el 2º segundo: $d_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 - d_1 = \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2^2 - 0.01 = 0.03m$

- en el 3º segundo: $d_3 = \frac{1}{2} a t_3^2 - (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \times 0.02 \times 3^2 - (0.01 + 0.03)$

$$d_3 = 0.09 - 0.04 = 0.05m$$

Los trabajos pedidos serán:

$$W_1 = \bar{F} \cdot \bar{d}_1 = Fd_1 = 0.2 \times 0.01 = 0.002 \text{ J}$$

$$W_2 = \bar{F} \cdot \bar{d}_2 = Fd_2 = 0.2 \times 0.03 = 0.006 \text{ J}$$

$$W_3 = \bar{F} \cdot \bar{d}_3 = Fd_3 = 0.2 \times 0.05 = 0.010 \text{ J}$$

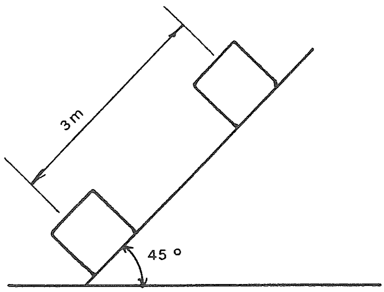
La velocidad al término del 3° segundo es:

$$v_3 = at_3 = 0.02 \times 3 = 0.06 \text{ m/s}$$

Luego la potencia:

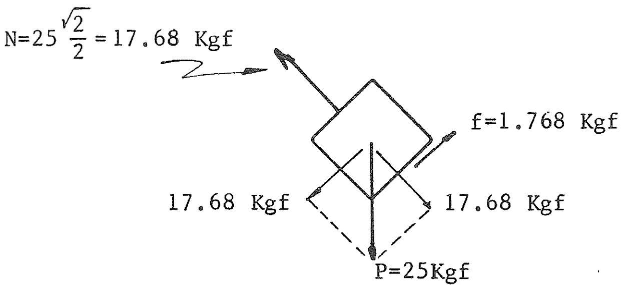
$$P = \bar{F}.\bar{v} = Fv = 0.2 \times 0.06 = 0.012\text{W}$$

3. Determinar el trabajo realizado sobre un bloque que pesa 25 Kgf y se mueve 3m hacia abajo en un plano inclinado como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción es 0.1. Si el blo - que parte del reposo, ¿cuál es su velocidad final?



Del diagrama de cuerpo libre, se ve que sólo la fuerza de fricción y la componente del peso paralela al plano contribuyen al trabajo. Como las fuerzas que actúan son constantes y la trayectoria es rec tilínea, se tiene:

$$W = W_{F.\text{gravitatoria}} + W_{F.\text{fricción}}$$



$$W = 17.68 \times 3 \times \cos 0° + 17.68 \times 0.1 \times 3 \times \cos 180°$$

$$W = 53.04 - 5.30$$

$$W = 47.74 \text{ Kg-m}$$

como:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_o^2$$

y al partir del reposo, $v_o = 0$

queda:

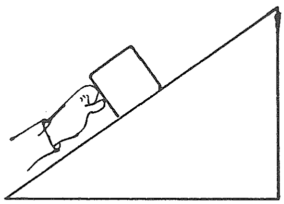
$$W = \frac{1}{2}\, mv^2$$

Luego, $\quad 47.74 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9.81}\right) v^2$

$$v^2 = 37.47$$

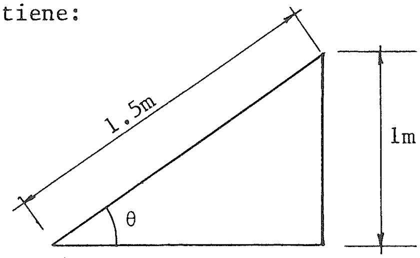
$$v = 6.12 \text{ m/s}$$

4. Un bloque de hielo de 445N, resbala por un plano inclinado de 1.50m de largo y 1.00m de alto. Un hombre sostiene el hielo paralelamente al plano de modo que desliza el bloque con velocidad constante. El coeficiente de fricción entre el hielo y el plano inclinado es de 0.10. Encontrar:
   a) La fuerza ejercida por el hombre
   b) El trabajo hecho por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque, en un recorrido de 0.5m
   c) El trabajo hecho por la resultante sobre el bloque en el mismo recorrido
   d) El cambio de energía cinética del bloque.



---

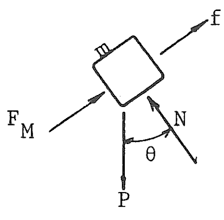
a) Se tiene:



$$\text{sen } \theta = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1.5^2 - 1^2}}{1.5} = 0.745$$

D.C.L.



La fuerza del hombre es la requerida para equilibrar la suma de fuerzas a lo largo del plano inclinado, esto es:

$$F_M = P \,\text{sen}\theta - \mu P \cos\theta$$

$$F_M = 445 \times 0.667 - 0.1 \times 445 \times 0.745$$

$$F_M = 263.67N$$

b) - Trabajo hecho por el hombre:

$$W_M = \bar{F}_M \cdot \bar{d} = F_M d \cos 180° = -\ 263.67 \times 0.5 = -131.83J$$

- Trabajo hecho por la atracción gravitacional:

$$W_g = \bar{P} \cdot \bar{d} = Pd\cos(90° - \theta) = Pd\operatorname{sen}\theta = 445 \times 0.5 \times 0.667 = 148.41J$$

- Trabajo hecho por el plano inclinado,

*Fricción:

$$W_f = \bar{f} \cdot \bar{d} = fd\cos 180° = (\ \mu P\cos\theta)d\cos 180° = -\mu Pd\cos\theta$$

$$W_f = -0.1 \times 445 \times 0.5 \times 0.745 = -\ 16.58J$$

*Normal:

$$W_N = \bar{N} \cdot \bar{d} = Nd \cos 90° = 0$$

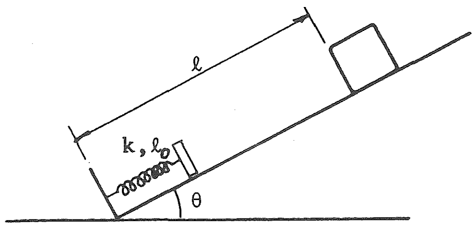
c) El trabajo hecho por la resultante es cero puesto que la suma de fuerzas es cero, el bloque no está acelerado. Como comprobación:

$$W_R = W_M + W_g + W_f = -131.84 + 148.41 - 16.58 = 0$$

d) El bloque no cambia de energía puesto que se mueve con velocidad constante, o bien:

$$\Delta K = W_R = 0$$

5. Con relación al sistema mostrado en la figura, encontrar la compresión máxima del resorte, si el cuerpo de masa m se deja caer desde la distancia ℓ. Coeficiente de fricción del plano μ



El bloque parte del reposo: $v_o = 0$.

Al darse la compresión máxima del resorte: $v_f = 0$.

Luego, el cambio de energía cinética es: $\Delta K = 0$

Por otro lado, el trabajo total realizado es:

$$W_R = W_P + W_f + W_k$$

* peso $\Rightarrow$ $W_P = mg \text{ sen } \theta \; (\ell - \ell_o + \Delta\ell_o)$

* fricción $\Rightarrow$ $W_f = - \mu \text{ mg cos } \theta (\ell - \ell_o + \Delta\ell_o)$

* resorte $\Rightarrow$ $W_K = - \frac{1}{2} k(\Delta\ell_o)^2$

Como: $W_R = \Delta K = 0$

Entonces: $mg \text{ sen}\theta(\ell - \ell_o + \Delta\ell_o) - \mu mg\cos\theta(\ell - \ell_o + \Delta\ell_o) - \frac{1}{2} k(\Delta\ell_o)^2 = 0$

$$\Delta\ell_o^2 + \frac{2mg}{k}(\mu\cos\theta - \text{sen}\theta)\Delta\ell_o + \frac{2mg}{k}(\mu\cos\theta - \text{sen}\theta)(\ell - \ell_o) = 0$$

Ecuación de 2° grado en $\Delta\ell_o$ que al resolverla nos da la compresión máxima del resorte.

llamando: $\begin{cases} \frac{2mg}{k}(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta) = b \\ b(\ell - \ell_o) = c \end{cases}$

$$\Delta\ell_o^2 + b\Delta\ell_o + c = 0$$

$$\Delta\ell_o = - \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

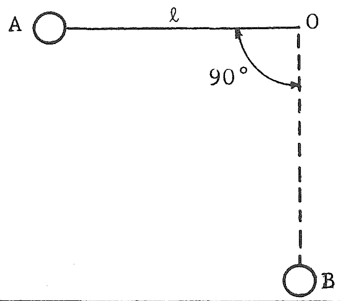
6. Un péndulo simple se suelta del reposo como se muestra en la figura. Cuando la lenteja llega a la parte más baja de su trayectoria determinar:

a) El trabajo realizado por el peso.

b) El trabajo realizado por la tensión del hilo.

c) El trabajo resultante.

d) La velocidad de la lenteja.



a) Como el peso es una fuerza conservativa:

$$W_P = -\Delta U$$

Luego, tomando como nivel de referencia la horizontal que contiene el punto O, se tiene que: $U_A = 0$ y $U_B = -mg\ell$,

$$\Delta U = U_B - U_A = -mg\ell - 0 = -mg\ell$$

$$W_P = mg\ell$$

b) Por definición de trabajo, para la tensión:

$$W_T = {}_C\int_A^B \bar{T}.d\bar{r}$$

Como en todo instante: $\bar{T} \perp d\bar{r}$, $\bar{T}.d\bar{r} = 0$

Teniéndose: $W_T = 0$

c) El trabajo resultante será:

$$W_R = W_P + W_T$$

luego,

$$W_R = mg\ell$$

d) Como: $W_R = \Delta K$

se tiene:

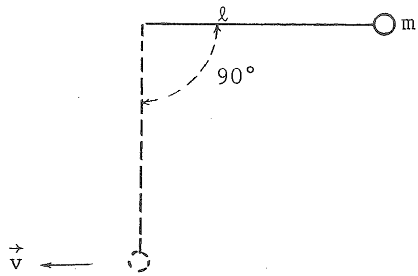
$$mg\ell = \frac{1}{2} mv_B^2 \text{ , dado que } v_A = 0$$

luego: $v_B = \sqrt{2g\ell}$

7. Demuestre el siguiente problema tomando del Horologium Oscilatorio de Huygens: "Si un péndulo simple oscila con su máxima oscilación lateral, esto es, si desciende todo un cuadrante de círculo, cuando llega al punto más bajo de la circunferencia tira del hilo con una fuerza tres veces mayor que la que le produciría si estuviese simplemente suspendido de él."

Cuando el cuerpo está simplemente suspendido la fuerza que actúa hacia abajo es el peso: $P = mg$ y lo equilibra la tensión de la cuerda $T = mg$

Cuando se suelta como se muestra en la figura



Por conservación de la energía, como se vió en el problema anterior la velocidad en el extremo mas bajo es:

$$v^2 = 2g\,\ell$$

y la aceleración centrípeta será: $a_c = \dfrac{v^2}{\ell} = 2g$

Por lo tanto, la fuerza resultante centrípeta necesaria es:

$$F_c = ma_c = 2mg$$

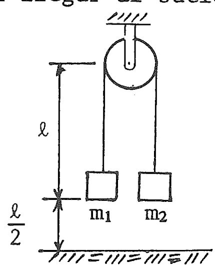
Luego, la tensión en la cuerda será:

$$T - P = F_c$$

$$T = F_c + P = 2mg + mg = 3mg$$

De aquí: $\dfrac{T}{P} = 3$

8. En la figura se muestra la posición inicial de una máquina de Atwood ($m_1 = 2m_2$). En ese instante el sistema está en reposo. Aplicando la conservación de la energía mecánica, encuentre la velocidad que lleva m_1 al llegar al suelo.



Consideremos como nivel de referencia cero, el suelo, En la posición inicial la energía total es:

$$E_i = m_1 g \frac{\ell}{2} + m_2 g \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2} m_2 g\ell$$

Como ambas masas tienen la misma velocidad, por la ligazón existente, en el instante del choque con el suelo la energía es:

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g \ell = \frac{3}{2} m_2 v^2 + m_2 g\ell$$

Por la conservación de la energía:

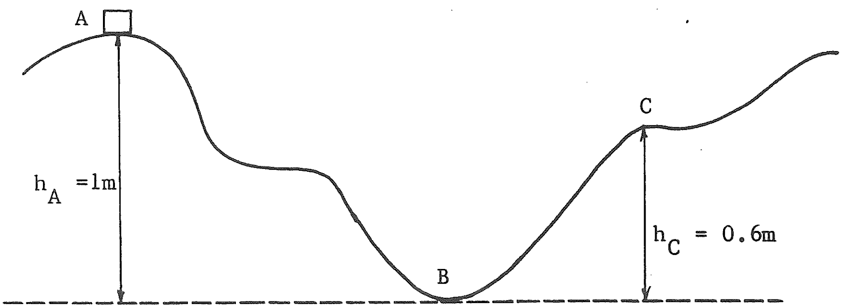
$$\frac{3}{2} m_2 g \ell = \frac{3}{2} m_2 v^2 + m_2 g \ell$$

$$\frac{3}{2} v^2 = \frac{1}{2} g \ell$$

$$v^2 = \frac{g\ell}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{g\ell}{3}}$$

9. Una partícula se desliza sin rozamiento sobre una trayectoria como se muestra en la figura.
Si la velocidad de la partícula es de 4 m/s cuando está en el punto A. ¿Cuál será su velocidad en los puntos B y C?



Como la energía mecánica total se conserva,

$$E = K_A + U_A = K_B + U_B = K_C + U_C$$

Tomando como nivel de referencia el punto más bajo B, se tiene:

$$\frac{1}{2} mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2} mv_B^2 + 0$$

La velocidad v_B será:

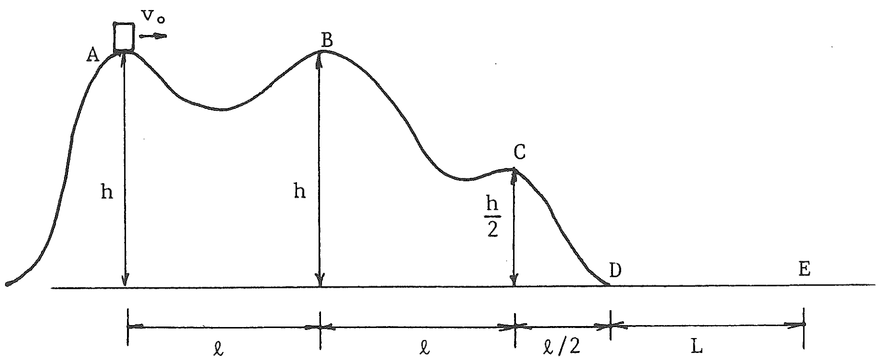
$$v_B = \sqrt{2gh_A + v_A^2} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 1 + 4^2} = 5.97 \text{ m/s}$$

Para hallar la velocidad en C procedemos de la misma manera entre los puntos A y C:

$$\frac{1}{2} mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2} mv_C^2 + mgh_C$$

$$v_C = \sqrt{2\, g(h_A - h_C) + v_A^2} = \sqrt{2 \times 9.81(1 - 0.6) + 4^2} = 4.88 \text{m/s}$$

10. En una "montaña rusa", sin rozamiento, un carrito de masa m comienza en el punto A con una velocidad v_o, como se muestra en la figura. Supóngase que el carrito se puede considerar como una partícula y que siempre permanece en contacto con la vía.
a) ¿Cuál será la velocidad del carrito en los puntos B y C?
b) ¿Qué desaceleración constante se requiere para que el carrito se detenga en el punto E si los frenos se aplican a partir del punto D?



Por conservación de energía,
a) En B, como está a la misma altura que A, tendrá la misma velocidad:

$$v_B = v_A = v_o$$

En C, se tiene:

$$mgh + \frac{1}{2} mv_o^2 = mg \frac{h}{2} + \frac{1}{2} mv_C^2$$

$$v_C = \sqrt{v_o^2 + gh}$$

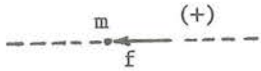
b) El trabajo de la fuerza no conservativa de la fricción es igual al cambio de energía mecánica total:

$$W_f = \Delta U + \Delta K = \Delta E$$

$$- fL = 0 - mg\ h - \frac{1}{2} mv_o^2$$

aplicando la Ley de Newton:

$$- f = ma$$



Luego,

$$maL = - mgh - \frac{1}{2} mv_o^2$$

$$a = - \left(\frac{gh + \frac{1}{2} v_o^2}{L} \right)$$

$$a = - \left(\frac{2gh + v_o^2}{2L} \right)$$

Equivalentemente también, por conservación de energía entre A y D,

$$mgh + \frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} mv_D^2$$

Podemos obtener la velocidad en el punto D:

$$v_D^2 = 2gh + v_o^2$$

y como la velocidad final en el punto E es cero, la desacelera - ción constante en este tramo DE, producida por la fuerza de fric ción, será:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2aL$$

$$0 = v_D^2 + 2aL$$

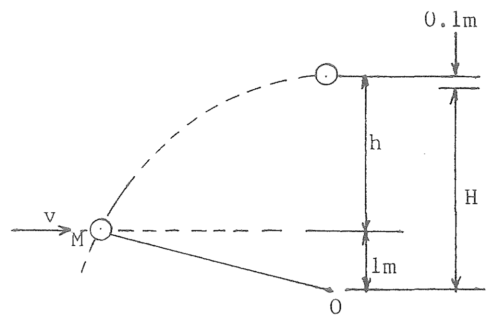
$$a = - \frac{v_D^2}{2L} = - \left(\frac{2gh + v_o^2}{2L} \right)$$

Por supuesto, el mismo valor obtenido anteriormente.

11. Un atleta de masa m puede alcanzar una velocidad de 10m/s corriendo horizontalmente. ¿Cuál será su record de salto con garrocha? considere su masa concentrada en su centro de gravedad a 1m. del suelo cuando está corriendo y que cuando pasa la barra horizontalmente su centro de gravedad está a 0.1m al interior de su espesor.

Si el mismo atleta desea alcanzar la misma altura con un par de resortes de constante k, ¿cuánto se deberán comprimir estos resortes? ($m = 80$ kg y $k = 4000$ N/m).

Toda la energía cinética se convierte en energía potencial y se tiene:



$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{100}{2 \times 9.8} = 5.1\text{m}$$

Por lo tanto, su record será:

$$H = h + 1 - 0.1$$

$$H = 5.1 + 0.9 = 6.0\text{m}$$

Con los resortes, la energía potencial de la deformación de cada resorte es: $U = \frac{1}{2} kx^2$

y para los dos resortes,

$$U_T = 2U = kx^2$$

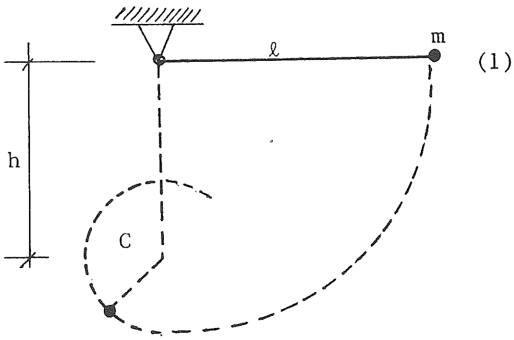
Esta energía se convertirá en energía cinética y luego en potencial gravitatoria, considerando que siempre su centro de gravedad está a 1m del suelo, se tendrá:

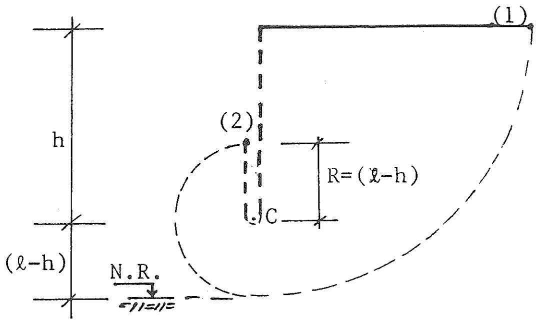
$$kx^2 = mgh$$

$$x = \sqrt{\frac{mgh}{k}} = v\sqrt{\frac{m}{2k}} = 10\sqrt{\frac{80}{2 \times 4000}} = 1.0\text{m}$$

12. El péndulo mostrado se suelta desde el reposo en la posición (1) y oscila hasta completar un ángulo de 90° antes de que la cuerda toque la clavija C fija a una distancia vertical h del punto O de suspensión del péndulo.

Determinar el valor mínimo de h para el cual la plomada del péndulo describirá un círculo alrededor de la clavija.





En la posición (2), se tiene:

$$-mg - T = ma_c = -\frac{m\,v_2^2}{(\ell-h)}$$

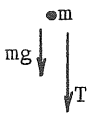
$$\frac{m\,v_2^2}{(\ell - h)} = mg+T$$

el valor mínimo se tendrá

cuando $T_2 = 0$

esto es: $\quad v_2^2 = g(\ell - h)$

D.C.L. (2)



Por conservación de energía entre (1) y (2),tomando como nivel de referencia el punto más bajo, se tiene :

$$mg\ell = mg2(\ell - h) + \frac{1}{2}\,mv_2^2$$

Con el valor requerido de v_2, se obtiene el valor de h:

$$mg\ell = mg2(\ell - h) + \frac{1}{2}\,mg(\ell - h)$$

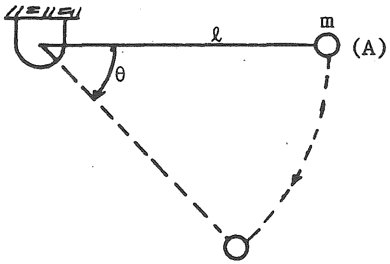
$$\ell = 2(\ell - h) + \frac{1}{2}\,(\ell - h)$$

$$\ell = \frac{5}{2}(\ell - h)$$

$$h = \ell - \frac{2}{5}\,\ell$$

$$h = \frac{3}{5}\,\ell$$

13. Un péndulo simple se suelta desde la posición A mostrada en la figura. Sabiendo que la cuerda puede soportar una tensión máxima 50% mayor que el peso del bobo, determinar el ángulo θ para el cual se romperá.



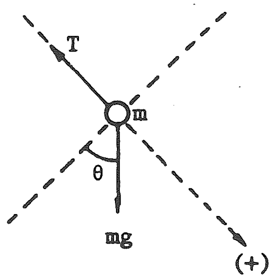
Por conservación de energía se puede determinar la velocidad v en función de θ, tomando como nivel de referencia la posición A, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = K_1 + U_1 = 0 + 0 \\ E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell sen\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg\ell sen\theta$$

Luego: $v = 2g\ell sen\theta$

Aplicando la Ley de Newton:

D.C.L. (m)



$$-T + mgsen\theta = ma_c = -\frac{mv^2}{\ell}$$

para $T = T_{máx} = mg + \frac{1}{2}mg = \frac{3}{2}mg$

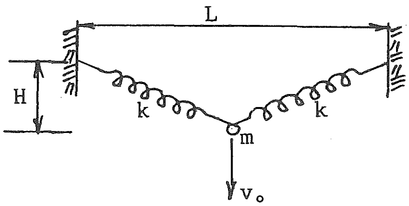
y con el valor obtenido de v^2, se tiene:

$$mg(sen\theta - \frac{3}{2}) = -\frac{m}{\ell}\ 2g\ell sen\theta$$

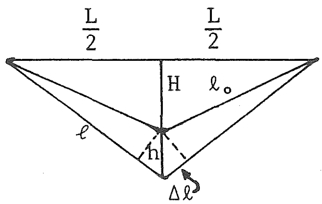
$$sen\ \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30°$$

14. En el sistema mostrado en la figura, se le comunica a la masa m una velocidad inicial v_o hacia abajo. ¿Cuál será su velocidad cuando ha descendido una altura h de su posición de equilibrio?



En primer lugar determinemos la deformación de los resortes cuando la masa ha descendido la altura h.



Longitud inicial de los resortes

$$\ell_o = \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}$$

Longitud "final" de los resortes

$$\ell = \sqrt{(H + h)^2 + \frac{L^2}{4}}$$

Deformación:

$$\Delta\ell = \ell - \ell_o$$

$$\Delta\ell = \sqrt{(H + h)^2 + \frac{L^2}{4}} - \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}$$

Con esta deformación podemos determinar la energía potencial de los resortes:

$$U = \frac{1}{2}\,k(\Delta\ell)^2$$

Para el sistema (los resortes):

$$U_R = 2U = k(\Delta\ell)^2$$

$$U_R = k\left(\sqrt{(H + h)^2 + \frac{L^2}{4}} - \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}\right)^2$$

Ahora, tomando como nivel de referencia la posición inicial, la energía total inicial del sistema es:

$$E_o = \frac{1}{2}\,mv_o^2$$

y la energía total para el sistema deformado.

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 + U_R - mgh$$

como el sistema es conservativo :

$$E = E_o = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + U_R - mgh = \frac{1}{2}\,mv_o^2$$

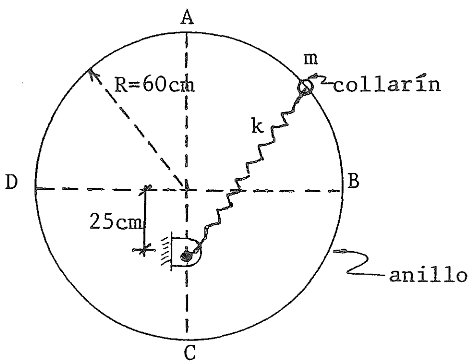
despejando v,

$$v = \sqrt{v_o + 2gh - \frac{2U_R}{m}}$$

reemplazando el valor arriba encontrado de U_R

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2gh - \frac{2k}{m}\left(\sqrt{(H+h)^2 + \frac{L^2}{4}} - \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}\right)^2}$$

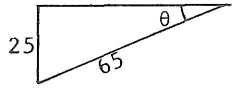
15. Un collarín de 10kg está unido a un resorte y resbala sin rozamiento a lo largo de un anillo circular que se encuentra en un plano horizontal, dispuesto como se muestra en la figura. El resorte tiene una constante $k = 15 \times 10^2$ N/m y está sin deformar cuando el collarín está en la posición C. Si el collarín se suelta del reposo desde la posición A; calcular, cuando pasa por B, su velocidad y la fuerza que hace el anillo sobre él.



Longitud del resorte sin deformar: $\ell_o = 60 - 25 = 35$cm.

Deformación del resorte:

- en A: $\Delta\ell_A = 60 + 25 - 35 = 50$cm
- en B:



$\Delta\ell_B = 65 - 35 = 30$ cm.

Energía:

- en A : $E_A = K_A + U_A = 0 + \frac{1}{2}k\,\Delta\ell_A^2 = \frac{1}{2}x15 \times 10^2 \times 25 \times 10^{-2} = 187.5$ J

- en B : $E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_B^2 = \frac{1}{2}x10 \times v_B^2 + \frac{15}{2}x10^2 x\ 9 \times 10^{-2} =$

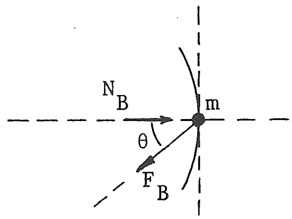
$$= 5v_B^2 + 67.5 \text{ J}$$

Por conservación de energía: $\Delta E = 0 \Rightarrow E_B = E_A$

$$5v_B^2 + 67.5 = 187.5 \Rightarrow v_B^2 = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow v_B = 4.90\text{m/s}$$

Aplicando la Ley de Newton:

D.C.L. (m)



- en la posición B:

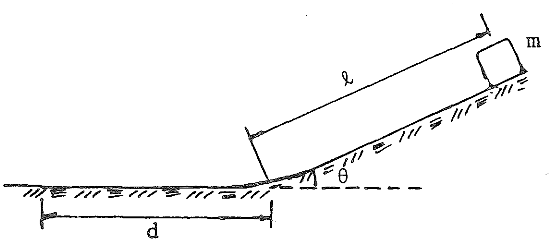
$$N_B - F_B\cos\theta = ma_C = -m\frac{v_B^2}{R}$$

$$N_B = F_B\cos\theta - m\frac{v_B^2}{R} = k\Delta\ell_B\cos\theta - m\frac{v_B^2}{R}$$

$$N_B = 15 \times 10^2 \times 30 \times 10^{-2} \times \frac{60}{65} - 10 \times \frac{24}{60 \times 10^{-2}}$$

$$N_B = 415.39 - 400 = 15.39\text{N}$$

16. Un cuerpo de masa m comienza a moverse, a partir del reposo, bajando por un plano inclinado de longitud ℓ y que forma un ángulo θ con la horizontal. Tómese como coeficiente de fricción 0.2 y encuentre la velocidad del cuerpo en el punto más bajo del plano. ¿Qué distancia d recorrerá resbalando horizontalmente en una superficie igual a la anterior, después de llegar al punto más bajo del plano inclinado?. Resuelva el problema usando los conceptos de energía y trabajo, luego comprobar sus resultados utilizando directamente las leyes de Newton.



m = 10 kg

θ = 30°

ℓ = 20m

- Determinación de la velocidad.

  En la parte más alta la energía mecánica es: $U = mg\ell \ \mathrm{sen}\theta$

  En la parte más baja la energía mecánica es: $K = \frac{1}{2} mv^2$

  Trabajo realizado por la fuerza de fricción: $W_f = -\mu(mg\cos\theta)\ell$

  Luego, el trabajo realizado por esta fuerza no conservativa es igual al cambio de energía mecánica

$$W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$-\mu mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2} mv^2 - mg\ell\mathrm{sen}\theta$$

  Despejando la velocidad

$$v^2 = 2g\ell(\mathrm{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

$$v^2 = 2 \times 9.81 \times 20(0.5 - 0.2 \times 0.866) = 128.32$$

$$v = 11.33 \ \mathrm{m/s}$$

Comprobación utilizando la Ley de Newton,

la aceleración es: $ma = mg\mathrm{sen}\theta - \mu mg\cos\theta$

$$a = g(\mathrm{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

y la velocidad final después de recorrer el espacio ℓ es:

$$v^2 = 2a\ell$$

$$v^2 = 2g\ell(\mathrm{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

$$v = 11.33 \mathrm{m/s}$$

- Determinación de la distancia horizontal d.

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 11.33^2 = 642 \text{ Joules}$$

  Al iniciar el recorrido horizontal, la energía mecánica es: $K = \frac{1}{2} mv^2$

  Al finalizar el recorrido horizontal y detenerse la energía mecá - nica es cero.

  El trabajo realizado por la fuerza de fricción en este recorrido es: $W_f = -\mu mgd$

  Luego el trabajo realizado por esta fuerza no conservativa es igual al cambio de energía mecánica:

$$W_f = \Delta U + \Delta K = \Delta E$$

$$-\mu mgd = 0 - \frac{1}{2} mv^2$$

  despejando la distancia d:

$$d = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{128.32}{2 \times 0.2 \times 9.81} = 32.70 \mathrm{m}$$

Comprobación utilizando la Ley de Newton, la aceleración es:

$$ma = - \mu mg$$

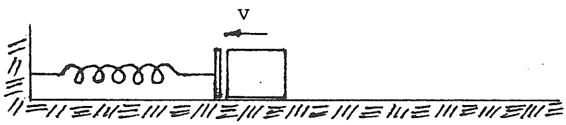
$$a = - \mu g$$

y el espacio recorrido hasta detenerse será:

$$0 = v^2 + 2ad = v^2 - 2\mu gd$$

$$d = \frac{v^2}{2\mu g} = 32.70m$$

17. Un bloque de 10 Kg choca con un resorte horizontal sin peso y de constante 2N/m, como se muestra en la figura. El bloque comprime el resorte 4m a partir de su posición de reposo. Suponiendo que el coeficiente de fricción dinámico entre el bloque y la superficie horizontal es de 0.25, ¿Cuál será la velocidad del bloque en el instante del choque?



La energía mecánica en el momento del choque es: $K = \frac{1}{2} mv^2$. Llamando x a la distancia que se comprime el resorte, la energía mecánica cuando el bloque se detiene es: $U = \frac{1}{2} kx^2$

El trabajo realizado por la fuerza de fricción en éste recorrido es:

$$W_f = - \mu mgx$$

Luego el trabajo realizado por esta fuerza no conservativa es igual al cambio de energía mecánica:

$$W_f = \Delta U + \Delta K = \Delta E$$

$$- \mu mgx = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} mv^2$$

despejando la velocidad

$$v = \sqrt{2\mu gx + \frac{k}{m} x^2}$$

$$v = \sqrt{2 \times 0.25 \times 9.81 \times 4 + \frac{2}{10} \times 4^2}$$

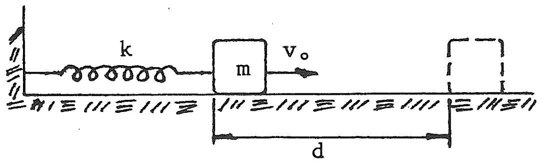
$$v = 4.78 \text{ m/s}$$

18. El bloque de masa m que se muestra en la figura tiene originalmente una velocidad v_o hacia la derecha y su posición es tal que el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre él. El bloque se mueve una distancia d antes de detenerse como se muestra en la figura. La constante del resorte es k y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el piso es μ.

a) Determinar el trabajo hecho por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque, al recorrer la distancia d.

b) ¿Cuál es el trabajo total hecho sobre el bloque?

c) Aplicando el teorema del trabajo y la energía, obtenga el valor de d en función de m, v_o, μ, g, k.



---

a)-Trabajo hecho por la fuerza de rozamiento

$$W_f = \vec{f} \cdot \vec{d} = - \mu \, mgd$$

-Trabajo hecho por el resorte

$$W_r = \int_0^d \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_0^d kxdk = - \frac{1}{2} kd^2$$

-Trabajo hecho por la normal

$$W_N = \bar{N} \cdot \bar{d} = 0$$

b) Trabajo total sobre el bloque

$$W_T = W_f + W_r = - (\mu \, mgd + \frac{1}{2} kd^2)$$

c) El cambio de energía cinética es igual al trabajo realizado:

$$\Delta K = W_T$$

$$0 - \frac{1}{2} mv_o^2 = - (\mu mgd + \frac{1}{2} kd^2)$$

$$\frac{1}{2} mv_o^2 = \mu mgd + \frac{1}{2} kd^2$$

despejando d,

$$d^2 + \frac{2\mu mg}{k} d - \frac{mv_o^2}{k} = 0$$

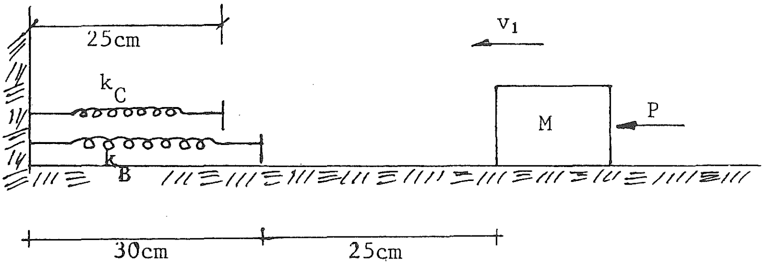
$$d = - \frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{mv_o^2}{k}}$$

siendo la respuesta el valor positivo de d:

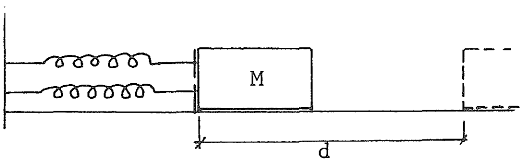
$$d = \frac{1}{k}\left(\sqrt{\mu^2 m^2 g^2 + mkv_o^2} - \mu mg\right)$$

19. El coeficiente de fricción entre el bloque de 4kg y la superficie es 0.2. El bloque está sometido a la acción de una fuerza horizontal $P = 30N$ y tiene una velocidad de $v_1 = 5$ m/s en la posición mostrada en la figura. Determinar la máxima deformación del resorte B, sabiendo que las constantes de rigidez de los resortes B y C son:

$k_B = 2 \times 10^3$ N/m y $k_C = 6 \times 10^3$ N/m, respectivamente. En la figura se indican las longitudes.



Llamando x a la distancia que se comprime el resorte C, la distancia total d recorrida por el bloque M es:



$$d = 0.25 + 0.05 + x$$

$$d = 0.30 + x$$

Aplicando el concepto de trabajo y energía:

$$W = \Delta E$$

$$Pd - fd = \frac{1}{2} k_B x_B^2 + \frac{1}{2} k_C x_C^2 - \frac{1}{2} Mv_1^2$$

$$2(P - \mu Mg)(0.3 + x) = k_B(x + 0.05)^2 + k_C x^2 - Mv_1^2$$

$$(k_B + k_C)x^2 + [0.1k_B - 2(P - \mu Mg)]x + 0.0025k_B - 0.6(P - \mu Mg) - Mv_1^2 = 0$$

reemplazando valores:

$$8 \times 10^3 x^2 + 155.70x - 108.29 = 0$$

$$x^2 + 0.01946 - 0.01354 = 0$$

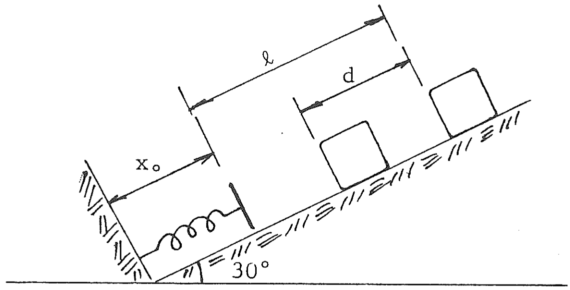
tomando el valor positivo de la solución:

$$x \cong 0.1067 = 10.67\,cm$$

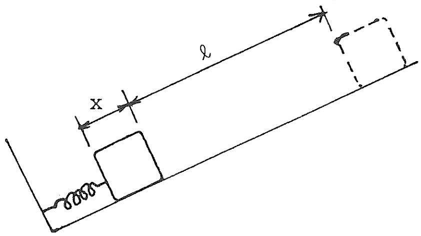
La deformación del resorte B será:

$$x_B = x + 5 = 10.67 = 15.67\ cm$$

20. Un cuerpo de masa m = 1 kg parte del reposo, desliza por un plano inclinado 30° una distancia de ℓ = 3m, choca contra un resorte de constante k = 20 N/m y longitud propia x_o = 0.5m. Utilizando el teorema de trabajo y energía, calcular la distancia d de máxima aproximación, tras el regreso, a la posición de partida.
Coeficiente de rozamiento por deslizamiento μ = 0.25



En la siguiente figura se muestra la posición más baja, que alcanza la masa m cuando el resorte se ha comprimido una longitud x.



El trabajo realizado por la fuerza no conservativa de fricción es igual al cambio de energía mecánica: $W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$

$$-\mu mg\cos 30°(\ell + x) = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\,sen30°$$

$$x^2 - \frac{2mg}{k}(\text{sen } 30° - \mu\cos 30°)x - \frac{2mg}{k}(\text{sen } 30° - \mu\cos 30°)\ell = 0$$

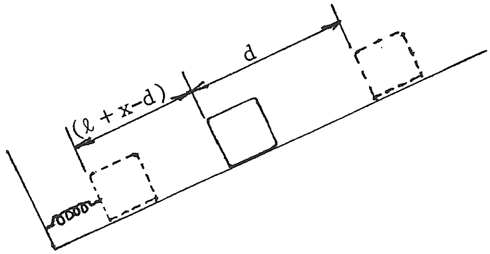
$$x^2 - 0.981(0.284)x - 0.981(0.284)3 = 0$$

$$x^2 - 0.28x - 0.85 = 0$$

cuya solución positiva es: $x = 1.08$m

Solución que tiene significado físico real, tal como se ha asumido al plantear la ecuación de acuerdo a la figura.

Después de éste instante la masa vuelve hacia atrás hasta alcanzar la posición mostrada en la siguiente figura.



La energía potencial que tiene el resorte al iniciarse el retroceso se convierte en energía potencial gravitatoria del bloque más la pérdida por fricción. Luego, entre estos dos estados nuevamente se tiene: $W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$

$$-\mu\, mg\cos 30°(\ell + x - d) = mg(\ell + x - d)\text{sen } 30° - \frac{1}{2}kx^2$$

$$mg(\text{sen } 30° + \mu\cos 30°)d = mg(\text{sen}30° + \mu\cos 30°)(\ell + x) - \frac{1}{2}kx^2$$

$$d = (\ell + x) - \frac{kx^2}{2mg(\text{sen}30° + \mu\cos 30°)}$$

$$d = (3 + 1.08) - \frac{20(1.08)^2}{2 \times 1 \times 9.81(0.5 + 0.25 \times 0.866)}$$

$$d = 2.43\text{m}$$

21. Un cuerpo se deja caer, vinculado de tal forma, que describe una trayectoria como la indicada en la figura. Unicamente existe rozamiento en el tramo horizontal.

Calcular:

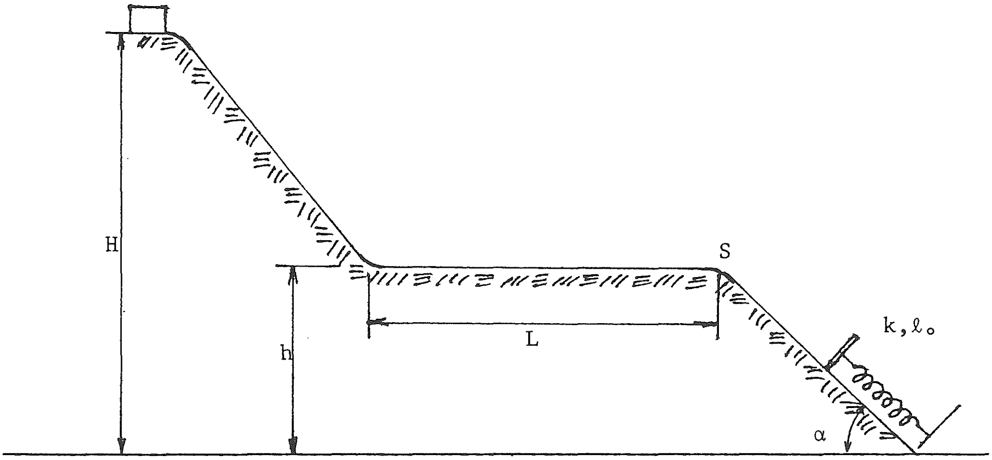
a) El módulo de la velocidad del cuerpo en el punto S.

b) ¿Cuánto se comprime el resorte?

c) ¿Cuál debería ser la altura $H = H'$ para que el cuerpo se detuviera en S sin caer por el plano inclinado inferior?

Se conoce: $m = 50Kg$, $H = 14m$, $h = 10m$, $L = 10m$, $\mu = 0.3$,

$\ell_o = 80$ cm, $k = 500Kg/cm$, $\alpha = 37°$



a) El trabajo realizado por la fuerza no conservativa de la fricción es igual al cambio de la energía mecánica total entre el punto inicial, más alto, y el punto S:

$$W_f = \Delta U + \Delta K = \Delta E$$

$$-\mu mgL = mg(h - H) + \frac{1}{2} mv^2$$

despejando la velocidad en el punto S,

$$v = \sqrt{2g(H - h - \mu L)}$$

$$v = \sqrt{2 \times 9.81(14 - 10 - 0.3 \times 10)} = \sqrt{2 \times 9.81} = 4.43 \text{ m/s}$$

b) Por conservación de energía entre el punto S y el punto más bajo, cuando el resorte se ha comprimido una longitud x,

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgh = mg(\ell_o - x)\text{sen } \alpha + \frac{1}{2} kx^2$$

resolviendo para x,

$$x^2 - \frac{2mg\text{sen}\alpha}{k} x - \frac{mv^2}{k} - \frac{2mg}{k} (h - \ell_o\text{sen}\alpha) = 0$$

$$x^2 - \frac{2mg\text{sen}\alpha}{k} x - \frac{2mg}{k} (1 + h - \ell_o\text{sen}\alpha) = 0$$

(En el S.I.: $k = 500 \times 9.8 \times 100 = 49 \times 10^4$ N/m, $\ell_o = 0.8$m)

efectuando se obtiene:

$$x^2 - 0.0012x - 0.0211 = 0$$

teniéndose como solución positiva:

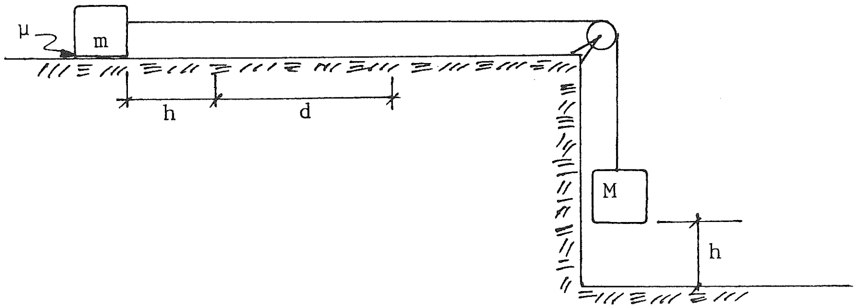
$$x = 0.146m$$

c) Para que el cuerpo se detenga en el punto S, se tendrá que v = 0 en la expresión de la energía encontrada en la parte(a) con H=H', esto es:

$$mg(H' - h) = \mu mgL$$

$$H' = h + \mu L = 10 + 0.3 \times 10 = 13m$$

22. Una forma de medir el coeficiente de fricción cinético es montando el dispositivo mostrado en la figura. La masa M se suelta del reposo cayendo una altura h hasta llegar al piso, acelerando a la masa m, la cual se desliza sobre la superficie hasta detenerse cuando ha recorrido una distancia (h + d). Los valores de M, m, h y d se miden. Determinar μ en función de ellos.



Cuando el sistema recorre la distancia h, la masa m, partiendo del reposo, adquiere una velocidad v, aplicando el concepto de Trabajo Energía, se tiene:

$$W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$-\mu\, mgh = \frac{1}{2}\,(M + m)v^2 - Mgh$$

despejando v:

$$v^2 = \frac{2gh(M - \mu m)}{M + m}$$

Cuando la masa m recorre la distancia d, partiendo con la velocidad v hasta detenerse, se tiene:

$$W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$-\mu mgd = -\frac{1}{2}\,mv^2$$

despejando v:

$$v^2 = 2\mu gd$$

igualando ambas expresiones y despejando μ, se obtiene:

$$\frac{2gh(M - \mu m)}{M + m} = 2\mu gd$$

$$\mu = \frac{h\,M}{d(M+m) + hm}$$

Por supuesto que, igualmente simple, se puede obtener esta expresión aplicando directamente la Ley de Newton en ambos tramos:

- recorrido h:

$$Mg - \mu mg = (M + m)a \Rightarrow a = g\,\frac{(M - \mu m)}{M + m}$$

$$v^2 = 0 + 2ah \Rightarrow v^2 = \frac{2gh(M - \mu m)}{M + m}$$

- recorrido d:

$$-\mu mg = ma' \Rightarrow a' = -\mu g$$

$$0 = v^2 + 2a'd \Rightarrow v^2 = 2\mu gd$$

igualando: $\mu = \dfrac{hM}{d(M + m) + hm}$

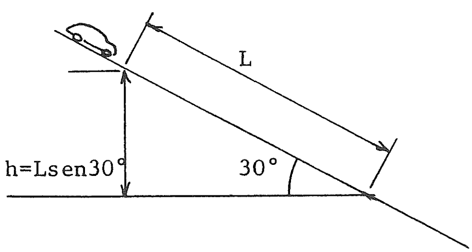
23. Un auto de 1,600 Kg, baja una cuesta de 30°. Cuando la velocidad del auto es de 36 Km/hora el conductor aplica los frenos:

a) ¿ Qué fuerza F deben hacer los frenos para que el coche se detenga después de recorrer 50m frenando?

b) ¿Cuál es el valor del coeficiente de rozamiento entre el piso y llantas?

---

a) La velocidad del auto es: v = 36 Km/hora = 10m/s



El trabajo realizado por la fuerza no conservativa de frenado es igual al cambio de energía mecánica total, esto es:

$$W_{F_f} = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$- F_f L = 0 - \frac{1}{2} mv^2 - mgh + 0$$

luego:

$$F_f = \frac{\frac{1}{2} mv^2 + mgh}{L} = \frac{mv^2}{2L} + mg sen30° = \frac{mv^2}{2L} + \frac{mg}{2}$$

$$F_f = 1600 + 7848 = 9448N$$

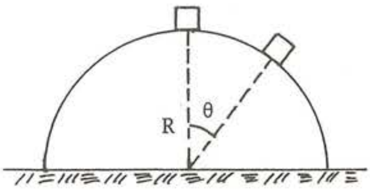
b) Como $F_F = \mu N \Rightarrow F_F = \mu mg \cos 30°$

$$\mu = \frac{9448}{1600 \times 9.81 \times 0.866} = 0.695 \simeq 0.7$$

24. Un bloque pequeño, de masa m, se halla inicialmente en reposo en el punto más elevado de un hemisferio liso de radio R. En un instante determinado se impulsa levemente al bloque y comienza a deslizar . Despreciando el rozamiento, hallar:

a) La fuerza de contacto en función de la posición.

b) El ángulo (medido a partir de la vertical) al cual el bloque abandonará la superficie del hemisferio.



a) Por conservación de energía

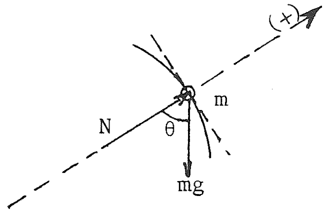
$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 + mgR \cos \theta$$

despejando la velocidad en función del ángulo θ,

$$v^2 = 2Rg [1 - \cos \theta]$$

la aceleración centrípeta será: $a = - \frac{v^2}{R} = - 2g(1 - \cos\theta)$ y la fuerza de contacto:

D.C.L.



$$N - mg\cos\theta = ma_C = -2mg(1-\cos\theta)$$

$$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta)$$

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg$$

$$N = mg(3\cos\theta - 2)$$

b) El bloque abandona la superficie del hemisferio cuando la fuerza de contacto N es cero, esto es:

$$N = mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$3\cos\theta - 2 = 0$$

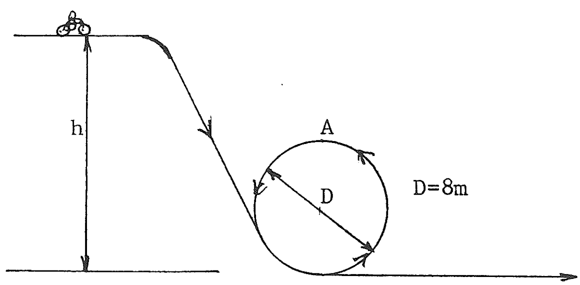
$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = 48.19°$$

25. Una prueba acrobática consiste en dejarse caer rodando en bicicleta por una plataforma inclinada que se transforma unos metros más abajo en una curva ascendente hasta dar la vuelta sobre sí misma formando un cilindro para luego terminar horizontal, como muestra el croquis.

a) Se desea conocer la altura h que debe existir sobre el piso para dar la vuelta completa sin peligro de caer.

b) ¿Cuánto debería ser h para que la fuerza que ejerce sobre la pista curva en su punto más alto A sea igual a su peso?



---

a) Por conservación de energía, la energía potencial a la altura h debe de ser igual a la energía mecánica total en el punto A:

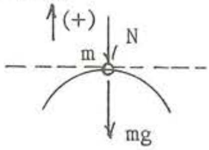
$$mgh = mgD + \frac{1}{2}mv^2$$

despejando la velocidad v en el punto A:

$$v^2 = 2g(h - D)$$

Por otro lado, aplicando directamente la Ley de Newton en el punto A, la fuerza de contacto es:

D.C.L.



$$-N - mg = ma_c = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N + mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg$$

Para que no exista peligro de caer, se debe tener que:

$$N > 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{R} > mg$$

$$v^2 > gR$$

y el valor pedido de h será:

$$2g(h - D) > gR$$

$$2(h - D) > \frac{D}{2}$$

$$h > \frac{5}{4}D = 10m$$

b) Si la fuerza de contacto en A es igual peso: $N = mg$, se tiene:

$$mg = \frac{mv^2}{R} - mg$$

$$\frac{v^2}{R} = 2g$$

$$v^2 = 2gR$$

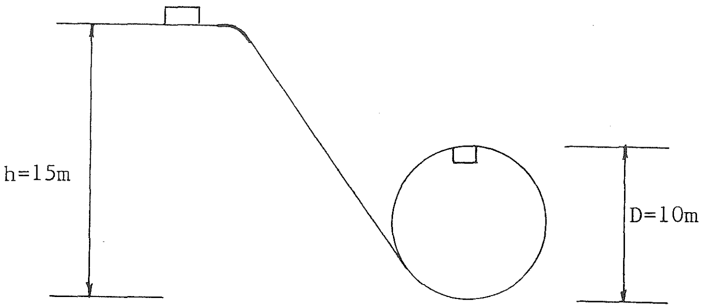
Luego, el valor de h en esta condición será:

$$2g(h - D) = 2gR$$

$$h - D = \frac{D}{2}$$

$$h = \frac{3}{2}D = 12m.$$

26. En un aparato de feria para rizar el rizo (looping) de 10m de diámetro, un coche que pesa 500Kg deja la plataforma a 15m de altura respecto al fondo de la circunferencia vertical. ¿Cuál es la reacción normal de la vía sobre el coche en lo más alto de la circunferencia?.
Suponer que el centro de gravedad del coche está a nivel del piso.



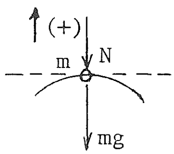
Como en el problema anterior se tiene la misma situación, por conservación de energía:

$$mgh = mgD + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2g(h - D)$$

y en el punto más alto de la circunferencia se tiene:

D.C.L.



$$-N - mg = ma_c = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg$$

$$N = m\frac{2g(h - D)}{R} - mg = 4mg\left(\frac{h}{D} - 1\right) - mg = 4mg\left(\frac{1}{2}\right) - mg = 2mg - mg$$

$$N = mg = P = 500 \text{ Kg}$$

Observe que, según el problema anterior la condición para que N = P, es: $h = \frac{3}{2}D$, que se cumple, pues h = 15m y D = 10m.

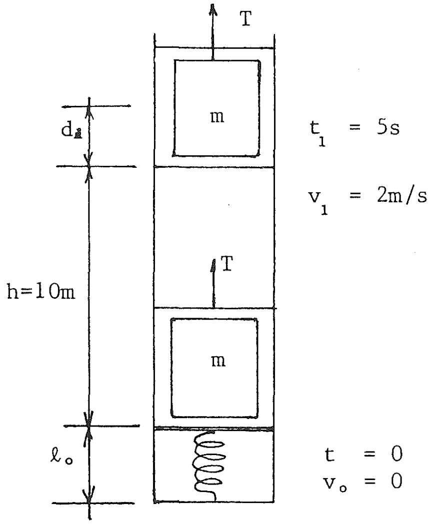
27. El cable que sostiene a un ascensor de masa m = 2000 Kg lleva a éste desde el primer piso hasta una altura de 10m. Al llegar a esa altura el ascensor tiene una velocidad de 2m/s y ha tardado 5s. Existe una fuerza de rozamiento constante entre los rieles y el ascensor de f = 2000N y en el piso se encuentra un resorte de constante k = 10,000 N/cm y longitud propia ℓ_o.

Calcular:

a) El trabajo realizado por la fuerza que hace el cable entre el instante inicial y t = 5s.

b) Si se rompe el cable en ese instante, ¿Hasta donde sube el ascensor antes de detenerse?

c) Luego de detenerse, inicia su descenso, ¿Con qué velocidad llega nuevamente al primer piso?



d) Posteriormente, ¿cuánto se comprime el resorte?

e) Finalmente, ¿Hasta dónde rebota el ascensor?

---

a) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética:

$$W = \Delta k$$

$$W = W_f + W_P + W_T = \Delta K$$

- El cambio de energía cinética es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 2000 \times 4 = 4000J$$

- El trabajo de la fuerza de fricción es:

$$W_f = \bar{f}\,.\,\bar{h} = -\;2000 \times 10 = -\;20{,}000J$$

- El trabajo de la acción gravitacional es:

$$W_P = -\,\Delta U_g = -\,mgh = -\;2000 \times 9.81 \times 10 = -\;196{,}200J$$

Luego el trabajo realizado por el cable (fuerza de tensión T), será:

$$W_T = \Delta K - W_f - W_P$$

$$W_T = 4000 + 20{,}000 + 196{,}200 = 220{,}200J$$

b) En este caso, como T = 0, se tiene $W_T = 0$

Como $v_2 = 0$, el cambio de energía cinética es:

$$\Delta K = -\,\frac{1}{2}\,mv_1^2$$

y el trabajo total es:

$$W = W_P + W_f = -\,mgd_1 - f\,d_1 = -\,(mg + f)d_1$$

igualando, $W = \Delta K$ y despejando d_1 :

$$d_1 = \frac{mv_1^2}{2(mg + f)} = \frac{2000 \times 4}{2(2000 \times 9.81 + 2000)} = \frac{8000}{43240} = 0.185m$$

c) Aplicando, $W_{NC} = \Delta E = \Delta K + \Delta U_g$ (o equivalentemente, $W = \Delta K$)

$$- f\ (h + d_1) = \frac{1}{2} mv^2 - mg(h + d_1)$$

despejando la velocidad v con la cual llega nuevamente al primer piso:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(mg - f)(h + d_1)} = \sqrt{(19.62-2)10.185} = \sqrt{179.46} = 13.40m/s$$

d) Aplicando,

$$W_{NC} = \Delta E = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r$$

Considerando el cambio desde el instante que inicia el descenso y cuando se detiene comprimiendo el resorte:

$$- f\ (h + d_1 + x) = 0 - mg(h + d_1 + x) + \frac{1}{2} kx^2$$

resolviendo en x:

$$x^2 + \frac{2}{k}(f - mg)x + \frac{2}{k}(f - mg)(h + d_1) = 0$$

(trabajando con distancias en cm y la constante k en N/cm)

$$x^2 - 3.5x - 3,598.2 = 0$$

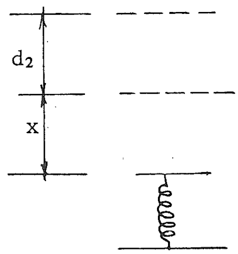
$$x = 61.77 \text{ cm}$$

Luego, el resorte se comprime 0.62m

e) Aplicando, nuevamente: $W_{NC} = \Delta E$ se tiene,

$$- f\ (x + d_2) = mg(d_2 + x) - \frac{1}{2} kx^2$$

despejando d_2,



$$d_2 = \frac{1}{2}\ \frac{kx^2}{(mg + f)} - x$$

$$d_2 = 8.21m$$

28. El cable de un ascensor de 2000Kg se corta cuando está en reposo en el 1er piso a una altura de 4m sobre un resorte amortiguador de constante : $k = 120,000$ N/m.

Un sistema de seguridad afianza las guías contra los rieles de mane ra que al movimiento del elevador se opone una fuerza de roce constante de 5000 N.

Calcular:

a) La velocidad del ascensor en el momento que va a pegar contra el resorte.

b) La deformación del resorte.

c) La distancia que "rebotará" el ascensor hacia arriba.

---

a) Aplicando la relación trabajo-energía:

$$W = \Delta K \Rightarrow W_{NC} = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$-fh = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$v^2 = \frac{2h}{m}(mg - f) = 2h(g - \frac{f}{m}) = 2\times 4(9.81 - \frac{5000}{2000}) = 58.48$$

$$v = 7.65 \text{ m/s}$$

b) La deformación x del resorte, será:

$$W_{NC} = \Delta E$$

$$-fx = \frac{1}{2}kx^2 - mgx - \frac{1}{2}mv^2$$

$$x^2 - \frac{2}{k}(mg - f)x - \frac{m}{k}v^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{120{,}000}(2000 \times 9.81 - 5000)x - \frac{2000 \times 58.48}{120{,}000}$$

$$x^2 - 0.244x - 0.975 = 0$$

teniendo como solución positiva:

$$x = 0.122 + \sqrt{0.0149 + 0.975} = 0.122 + 0.995 = 1.12\text{m}$$

c) La distancia d que rebotará, será:

$$W_{NC} = \Delta E$$

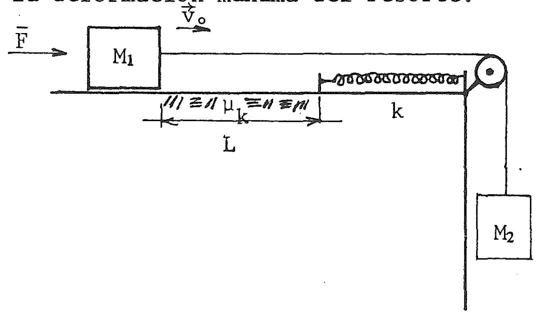
$$-f(d + x) = mg(d + x) - \frac{1}{2}kx^2$$

$$(d + x) = \frac{kx^2}{2(mg + f)} = \frac{120{,}000 \times 1.12^2}{2(2000 \times 9.81 + 5000)} = 3.05 \text{ m}$$

finalmente, $d = 3.05 - 1.12 = 1.93\text{m}$

29. En el sistema mostrado en la figura, La masa M_1 tiene una velocidad v_o en la posición inicial mostrada y en ese momento es afectada por la fuerza F que actúa solamente mientras ésta masa se desplaza sobre una superficie rugosa de coeficiente cinético de fricción μ_k y de longitud L. Al finalizar el recorrido L, en este instante desaparece la acción de la fuerza F y la fricción, iniciándose la deformación del resorte cuya constante elástica es k.

Encontrar la ecuación del movimiento descrito, que nos permite determinar la deformación máxima del resorte.



Tomando como nivel de referencia la posición mostrada, el sistema tiene inicialmente una energía totalmente cinética:

$$E_o = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2$$

luego la fuerza F realiza un trabajo que le dá al sistema una energía:

$$E_F = FL$$

y por otro lado la fricción realiza un trabajo opuesto tal que el sistema pierde una energía:

$$E_f = - fL = - \mu M_1 gL$$

Finalmente, cuando el resorte se ha comprimido una distancia x, el sistema tiene una energía compuesta por la energía potencial de deformación del resorte $\frac{1}{2}kx^2$ y la energía potencial gravitatoria, que respecto al nivel cero de referencia adoptado inicialmente es: $-M_2 g(L+x)$,

o sea: $E_T = \frac{1}{2}kx^2 - M_2 g(L + x)$

Resumiendo, por conservación de energía del sistema: lo que tenía inicialmente + lo que se le dió - lo que perdió = A lo que tiene finalmente.

Esto es:

$$E_o + E_F - E_f = E_T$$

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2 + FL - \mu M_1 gL = \frac{1}{2}kx^2 - M_2 g(L + x)$$

luego:

$$\frac{1}{2}kx^2 - M_2 gx - L(M_2 g + F - \mu M_1 g) - \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2 = 0$$

Ecuación pedida que nos permite obtener la deformación máxima x del resorte.

Observe que, por supeusto se obtendrá la misma ecuación si se aplica directamente la expresión del teorema Trabajo - Energía: $W = \Delta K$.

El cambio de energía cinética del sistema es:

$$\Delta K = K_2 - K_1$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2$$

y el trabajo realizado por las fuerzas: F, fricción, resorte y gravitatoria es:

$$W = FL - \mu M_1 gL - \frac{1}{2}kx^2 + M_2 g(L + x)$$

igualando:

$$-\frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2 = FL - \mu M_1 gL - \frac{1}{2}kx^2 + M_2 g(L + x)$$

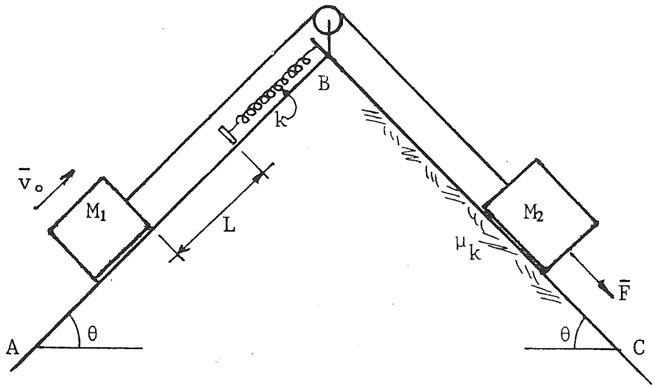
que es la misma expresión para x,

$$\frac{1}{2}kx^2 - M_2 gx - L(M_2 g + F - \mu M_1 g) - \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_o^2 = 0$$

30. Con referencia al sistema mostrado en la figura, se tiene:

- La masa M_1 tiene una velocidad v_o en la posición inicial mostrada.
- Una fuerza F actúa sobre la masa M_2 jalándola solamente mientras M_1 se desplaza una longitud L.
- En la superficie AB no hay fricción y en la BC el coeficiente cinético de fricción es. μ_k.
- Al desaparecer la fuerza F se inicia la deformación del resorte de constante elástica k.

Plantear la ecuación del movimiento descrito, que permite determinar la deformación máxima del resorte.



Este problema, conceptualmente, es similar al anterior. Por tanto, plantearemos la solución sin mayor explicación, utilizando conversión de la energía en el sistema:

- Energía inicial

  (tenía) $\Longrightarrow \frac{1}{2} M_1 v_o^2 + \frac{1}{2} M_2 v_o^2 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v_o^2$

- Energía que entra

  (trabajo dado por F) $\Longrightarrow FL$

- Energía que sale

  (pérdida) $\Rightarrow -(\mu M_2 g \cos\theta)(L+x) = -\mu M_2 g (L + x)\cos\theta$

- Energía final

  (tiene) $\Rightarrow \frac{1}{2} kx^2 + (M_1 g \operatorname{sen}\theta)(L + x) - (M_2 g \operatorname{sen}\theta)(L + x) =$

  $\frac{1}{2} kx^2 + g(M_1 - M_2)(L + x)\operatorname{sen}\theta$

Igualando:

$$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) v_o^2 + FL - \mu M_2 g (L + x)\cos\theta = \frac{1}{2} kx^2 + g(M_1 - M_2)(L+x)\operatorname{sen}\theta$$

luego:

$$\frac{1}{2} kx^2 + g(L+x)[(M_1 - M_2)\operatorname{sen}\theta + \mu M_2 \cos\theta] - FL - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v_o^2 = 0$$

Ecuación pedida de la cual se obtiene x, deformación máxima del resorte.

31. La energía potencial de una partícula está expresada por:

$$U_{(x)} = -\frac{A}{x^3} + \frac{2A}{x^2}$$

para $x > 0$ y donde A es una constante.
Hacer un croquis de $U_{(x)}$ vs. x. Determinar todos los puntos de equilibrio indicando, si los hay, cuales son estables, inestables e indiferentes. Calcular $F_{(x)}$.

Para graficar $U_{(x)}$, en primer lugar, graficamos independientemente:

$$-\frac{A}{x^3} \quad y \quad \frac{2A}{x^2}$$

luego, encontramos la intersección de $U_{(x)}$ con el eje x, esto es:

$$U_{(x)} = 0$$

$$-\frac{A}{x^3} + \frac{2A}{x^2} = 0$$

$$\frac{A}{x^3} = \frac{2A}{x^2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

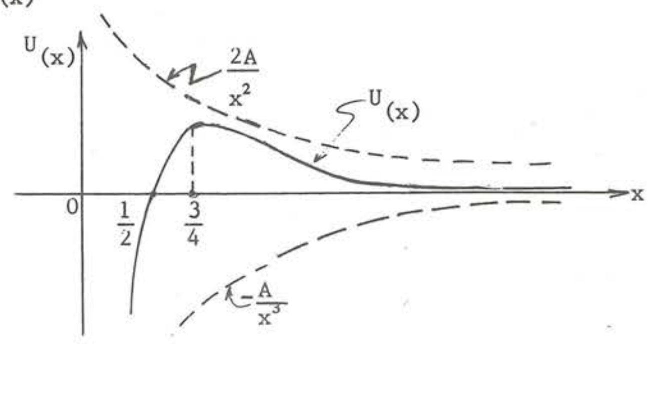
y determinemos los puntos para los cuales: $\dfrac{dU_{(x)}}{dx} = 0$

$$\frac{3A}{x^4} - \frac{4A}{x^3} = 0$$

$$\frac{3A}{x^4} = \frac{4A}{x^3}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Con estos dos puntos y con las gráficas que limitan la función podemos graficar $U_{(x)}$ vs x:



teniéndose un solo punto de equilibrio inestable en: $x = \frac{3}{4}$.

La fuerza $F_{(x)}$ será:

$$F_{(x)} = - \frac{dU_{(x)}}{dx}$$

Como ya hemos determinado: $\frac{dU_{(x)}}{dx}$, se tiene:

$$F_{(x)} = \frac{4A}{x^3} - \frac{3A}{x^4}$$

32. Una partícula de masa m se mueve con una energía potencial:

$$U_{(x)} = - \frac{U_o(k^2 + x^2)k^2}{(8k^4 + x^4)} \text{, teniéndose } \begin{cases} k \geqslant 0 \\ U_o \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Graficar $U_{(x)}$ vs x

b) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre m?

c) En el gráfico $U_{(x)}$ localizar los puntos de equilibrio, indicando el tipo de cada uno.

d) Analizar el movimiento cuando se tiene una energía total $E = -\frac{U_o}{4}$.

---

a) Para determinar la gráfica $U_{(x)}$, encontremos algunos puntos notables:

- para $x = 0 \implies U_{(x)} = - \frac{U_o}{8}$

- para $x \to \infty \implies U_{(x)} \to 0$

- para encontrar máximos y mínimos, derivando la función e igualando a cero,

$$\frac{dU_{(x)}}{dx} = - \frac{U_o k^2 [2x\ (8k^4 + x^4) - 4x^3 (k^2 + x^2)]}{(8k^4 + x^4)^2}$$

$$\frac{dU_{(x)}}{dx} = \frac{2U_o k^2 x}{(8k^4 + x^4)^2} (x^4 + 2x^2 k^2 - 8k^4) = 0$$

* para $x = 0 \implies U_{(x)} = - \frac{U_o}{8}$ (máximo)

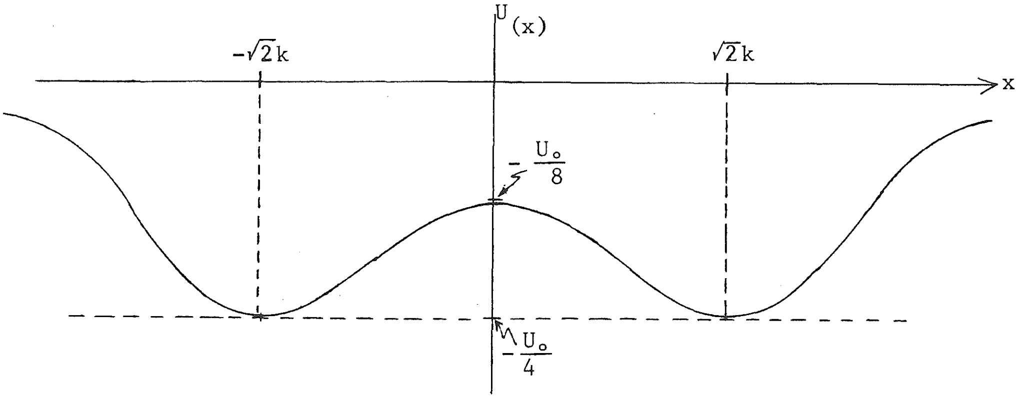
* para $x^4 + 2x^2k^2 - 8k^4 = 0$, resolviendo en x^2

$$x^2 = - k^2 + \sqrt{k^4 + 8k^4} = - k^2 + 3k^2 = 2k^2$$

(sólo consideramos la solución positiva puesto que x^2 es positivo).

luego, para $x = \pm\sqrt{2}\,k \Rightarrow U_{(x)} = \dfrac{-U_\circ(k^2 + 2k^2)k^2}{8k^4 + 4k^4} = -\dfrac{U_\circ}{4}$ (mínimo)

con estos puntos podemos graficar $U_{(x)}$ vs x:



b) Habiendo encontrado $\dfrac{dU_{(x)}}{dx}$, la fuerza es:

$$F = -\frac{dU_{(x)}}{dx} = \frac{-2U_\circ k^2 x}{(8k^4 + x^4)^2}(x^4 + 2x^2k^2 - 8k^4) = \frac{-2U_\circ k^2 x}{(8k^4 + x^4)^2}(x^2 + 4k^2)(x^2 - 2k^2)$$

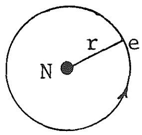
c) Puntos de equilibrio:

- para $x = 0 \Rightarrow$ inestable
- para $x \to \infty \Rightarrow$ indiferente
- para $x = \pm\sqrt{2}\,k \Rightarrow$ estable

teniéndose, para el equilibrio $\dfrac{d^2U_{(x)}}{dx^2} \Rightarrow \begin{cases} <0 & \text{inestable} \\ = 0 & \text{indiferente} \\ >0 & \text{estable} \end{cases}$

d) Si $E = -\dfrac{U_\circ}{4}$, solamente se podrá tener que: $E = U$ y $K = 0$ en $x = \pm\sqrt{2}\,k$, y la partícula está en uno de los puntos de equilibrio estable y no se moverá de éste.

Si hacemos el estudio simplificado de la teoría atómica de Bohr considerando sólo órbitas circulares, la energía del electrón en el átomo de Hidrógeno es:



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{e^2}{r}$$

Bohr consideró que la cantidad de movimiento angular del electrón - sólo podría tener valores:

$$\ell_\circ = n\,\frac{h}{2\pi}\ , \text{ para } n = 1,2,3,\ldots.$$

Demostrar que el radio orbital del electrón, según esta considera - ción de Bohr , es igual a:

$$r = \frac{\varepsilon_o n^2 h^2}{\pi\ m\ e^2} \quad , \text{ para } n = 1,2,3,\ldots$$

siendo:

e = carga eléctrica del electrón

m = masa del electrón

ε_o = constante de Permitividad Eléctrica

h = constante de Planck

v = velocidad del electrón

r = radio orbital del electrón

Como : $E = K + U$ y $K = \frac{1}{2} mv^2$, se tiene que la energía potencial es: $U_{(r)} = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{e^2}{r}$

luego, la fuerza que actúa sobre el electrón es:

$$F_{(r)} = - \frac{dU_{(r)}}{dr} = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{e^2}{r^2}$$

Aplicando la Ley de Newton, $F = ma$, se obtiene la velocidad:

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{e^2}{r^2} = - m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o mr}}$$

La cantidad de movimiento angular del electrón es:

$$\bar{\ell}_o = \bar{r} \times \bar{p} \Rightarrow \ell_o = m\ r\ v$$

introduciendo la consideración de Bohr, la velocidad será:

$$m\ r\ v = n \frac{h}{2\pi} \Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi mr}$$

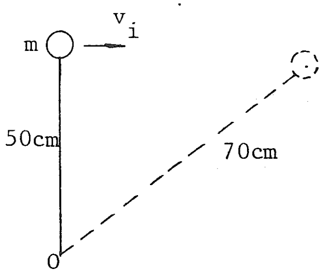
igualando ambos valores de v,

$$\frac{nh}{2\pi mr} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o mr}}$$

depejando el radio r:

$$r = \frac{\varepsilon_o n^2 h^2}{\pi\ m\ e^2} \quad , \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

34. Una partícula de masa m = 2Kg se encuentra sobre una superficie horizontal lisa y está unida a un punto fijo O, mediante una cuerda elástica de constante k = 40N/m y longitud propia, sin deformar, ℓ_o =50cm. Si se le comunica a la partícula una velocidad inicial v_i = 3m/s, como se muestra en la figura, calcular la velocidad con la cual se está estirando la cuerda en el instante que su longitud es de 70cm.

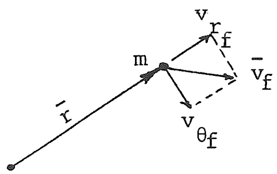


Por conservación de energía: $\Delta E = 0 \implies E_i = F_f$

$$\frac{1}{2} mv_i^2 = \frac{1}{2} mv_f^2 + \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 - \frac{k}{m} \Delta\ell^2 = 3^2 - \frac{40}{2} (70 - 50)^2 \times 10^{-4} = 8.20m^2/s^2$$

Como el torque $\bar{\tau}_o = 0$, por conservación de la cantidad de movimiento angular: $\Delta\ell_o = 0 \implies \bar{\ell}_{o_i} = \bar{\ell}_{o_f}$



$$m\bar{r}_i x \bar{v}_i = m\, \bar{r}_f x\, \bar{v}_f$$

$$r_i v_i = r_f\, v_{\theta f}$$

$$v_{\theta f}^2 = (\frac{r_i}{r_f} v_i)^2 = (\frac{50}{70}\, 3)^2 = 4.59 m^2/s^2$$

Luego, la velocidad pedida del estiramiento de la cuerda elástica, será: $v_{rf} = \sqrt{v_f^2 - v_{\theta f}^2} = \sqrt{8.20 - 4.59} = 1.9$ m/s

35. Un automóvil de 1,000kg se acelera desde el reposo con aceleración constante de 1.5m/s^2 durante 10 segundos. Determinar la potencia empleada por la máquina como una función del tiempo durante este período.

La fuerza requerida para darle una aceleración $a = 1.5 m/s^2$, es:

$$F = ma = 1000 \times 1.5 = 1{,}500 N$$

la velocidad en función del tiempo es:

$$v = at = 1.5t$$

luego, la potencia requerida es:

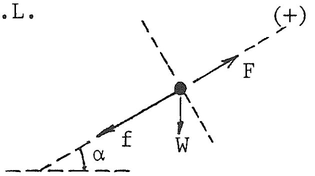
$$P = \bar{F} \cdot \bar{v} = Fv = 2{,}250t \text{ Watts.}$$

36. Un peso W sube por una rampa, inclinada α grados con la horizontal, con una velocidad constante V_o, impulsado por un motor a reacción. Horizontalmente, con el mismo motor y a la misma velocidad, puede arrastrar como remolque, además del peso W, otro peso. Conociendo el coeficiente μ de resistencia que ofrece el piso al movimiento en ambos casos, determinar el peso Q del remolque.

En ambos casos se mueven con velocidad constante V_o, la potencia será: $P = FV_o$

- cuando sube la rampa, se tiene:

D.C.L.

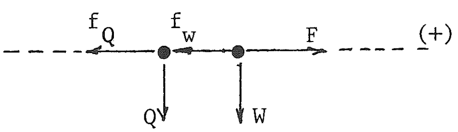


$$F - W \text{ sen } \alpha - f = 0$$

$$F = W \text{ sen } \alpha + \mu W \cos \alpha$$

$$P = W(\text{sen } \alpha + \mu \cos\alpha)\, V_o$$

- horizontalmente, cuando jala el remolque, se tiene:



$$F - f_W - f_Q = 0$$

$$F = \mu W + \mu Q$$

$$P = \mu(W + Q)V_o$$

Igualando ambos valores de la potencia, se obtiene el valor de Q:

$$\mu(W + Q)V_o = W(\text{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)V_o$$

$$Q = \frac{W}{\mu}(\text{sen}\alpha + \mu\cos\alpha) - W$$

$$Q = W\left(\frac{\text{sen}\alpha}{\mu} + \cos\alpha - 1\right)$$

37. En la figura mostrada, un bloque de masa m descansa sobre la faja que se mueve a velocidad constante V. A un tiempo inicial $t = 0$ se aplica al bloque una fuerza horizontal constante, que le produce una aceleración a.

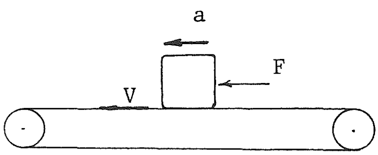
El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la faja es μ.

a) Determinar la fuerza F aplicada.

b) Determinar la potencia disipada en fricción como función del tiempo.

c) Si la fuerza F es ejercida por un hombre que se encuentra sobre la faja. Determinar la potencia que éste libera en función del tiempo.

d) Si la fuerza F es ejercida por un hombre caminando sobre el piso al costado de la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.



---

a) La fuerza F debe acelerar a la masa y vencer la fuerza de fricción, esto es:

$$F - \mu mg = ma$$

$$F = ma + \mu\, mg$$

(la aceleración a es conocida).

b) La fuerza de fricción es: $f = \mu mg$ y la velocidad: $v = at$,

luego: $P = f\ v = \mu mgat$ es la potencia disipada en fricción.

c) La fuerza que hace el hombre es: $F = ma + \mu mg$

La velocidad en función del tiempo es: $v = at$

Luego la potencia que debe dar el hombre es:

$$P = Fv = (ma + \mu mg)at.$$

d) La fuerza que hace el hombre es: $F = ma + \mu mg$

La velocidad del hombre en función del tiempo es: $v_T = V + at$

Luego la potencia que debe dar el hombre es:

$$P = F\ v_T = (ma + \mu\ mg)(V + at)$$

38. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\bar{F}_{(x,y)} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ a lo largo de la trayectoria $y = x^2$, desde el origen de coordenadas hasta el punto P(1, 1). ¿Cuánto será el trabajo realizado por esta fuerza si la trayectoria es una línea recta entre los mismos puntos?

El trabajo es:

$$W_{OP}^{C} = \int_{O}^{P} \bar{F} \cdot d\bar{r} = {}_{C}\int_{O}^{P} (F_x\, dx + F_y\, dy)$$

$$W_{OP}^{C} = {}_{C}\int_{O}^{P} (-y\, dx + x\, dy)$$

La curva C es: $y = x^2$, diferenciando: $dy = 2xdx$

reemplazando:

$$W_{OP}^{C} = \int_{O}^{x_P} [-x^2 dx + x(2x\, dx)] = \int_{O}^{x_P} (-x^2 dx + 2x^2 dx)$$

$$= \int_{O}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{3}\ \mathrm{J}$$

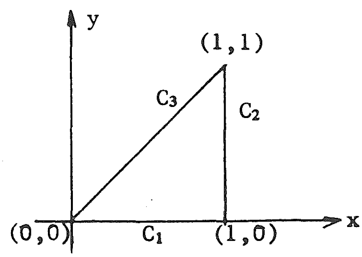
En Joules, si la fuerza está dada en Newtons y longitud en metros.

Si la trayectoria es: $y = x$ diferenciado $dy = dx$, y reemplazando en la expresión del trabajo se tiene:

$$W = \int_{0}^{1} (-x\, dx + x\, dx) = \int_{0}^{1} 0 = 0$$

39. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\bar{F}_{(x,y)} = (x+y)\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath}$ a lo largo de una trayectoria quebrada cerrada C: de (0,0) a (1,0) a (1, 1) a (0,0). ¿Será una fuerza conservativa?

El trabajo es:



$$W_{OO}^{C} = \oint_{C} \bar{F}.d\bar{r} = \oint_{C} F_x\, dx + F_y\, dy$$

$$W_{OO}^{C} = \oint_{C} [\,(x + y)dx + y^2 dy\,]$$

considerando cada segmento , $C = C_1 + C_2 + C_3$;

En C_1 : $y = 0$, $dy = 0$

En C_2 : $x = 1$, $dx = 0$

En C_3 : $y = x$, $dy = dx$

reemplazando se tiene:

$$W_{oo}^{C} = {}_{C_1}\int_0^1 [\,(x+0)dx + 0\,] + {}_{C_2}\int_0^1 [\,(1+y)0 + y^2 dy\,] + {}_{C_3}\int_1^0 [\,(x+x)dx + x^2 dx\,]$$

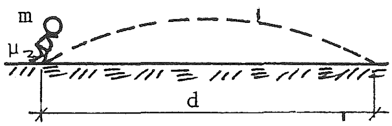
$$= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 y^2 dy + \int_1^0 (2x + x^2)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 + \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}\ \text{J}$$

En Joules, si la fuerza está en Newtons y longitud en metros.

Como el trabajo realizado a lo largo de una curva cerrada no es cero, ésta fuerza No es Conservativa.

40. Una persona de masa "m" se encuentra parada sobre una superficie rugosa de coeficiente de rozamiento "μ". Luego se impulsa de tal manera que efectúa un salto que le permite lograr el máximo alcane "d". (La persona es capaz de darse un mayor impulso pero el coeficiente de fricción no le permite lograr mayor alcance). ¿Cuánta energía disipa la fuerza de fricción?



Dado que no hay deslizamiento sobre la superficie, la fuerza de fricción no disipa energía. En el instante del despegue la fuerza de rozamiento estático alcanza su mayor valor para el máximo alcance, posteriormente durante el vuelo no hay fuerza de fricción con el piso.

$$\Delta U_{i_f} = 0$$

CAPITULO VI

DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

- CENTRO DE MASAS.

- MOVIMIENTO DE TRANSLACION DE UN SISTEMA DE PARTICULAS:
  MOMENTUM LINEAL Y LEY DE NEWTON.

- CONSERVACION DEL MOMENTUM LINEAL.

- SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS.
  MOMENTUM LINEAL Y ENERGIA CINETICA.

- COLISIONES.

- ROTACIONES EN UN SISTEMA DE PARTICULAS:
  MOMENTUM ANGULAR Y LEY DE NEWTON.

- CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.

- MOMENTUM ANGULAR EN EL SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS.

6.1 CENTRO DE MASAS.-

Al estudiar la dinámica de un sistema de partículas hay un punto cuyas propiedades son muy útiles para describir su movimiento. Este punto es el centro de masas, primero lo definiremos y calcularemos su posición, luego estudiaremos sus propiedades.

En una dimensión, si se tienen n partículas a lo largo de una línea recta X, el centro de masas del sistema se define mediante su coordenada X_{cm} respecto al origen O, como el promedio de las posiciones x_i ponderado con las masas m_i, esto es:

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n}$$

$$X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

Observe que si todas las partículas tuvieran igual masa, el centro de masas coincidiría con el promedio de las coordenadas x_i :

$$X_{cm} = \langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$, por lo tanto, X_{cm} es algo similar a

$\langle X \rangle$, pero en el que damos mayor contribución a las partículas que tienen mayor masa.

Este punto centro de masas tiene la propiedad:

$$M X_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Si las partículas están distribuídas en el espacio, las coordenadas del centro de masas respecto al origen O del sistema de referencia particular serán:

$$X_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \ , \quad Y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ , \quad Z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Vectorialmente, en coordenadas cartesianas, el vector posición del centro de masas es:

$$\bar{r}_{cm} = \hat{i}\, X_{cm} + \hat{j}\, Y_{cm} + \hat{k}\, Z_{cm}$$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} [m_i \,(\hat{i}\, x_i + \hat{j}\, y_i + \hat{k}\, z_i)\,]$$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \bar{r}_i$$

El centro de masas de un sistema de partículas depende solamente de las masas de las partículas y de sus posiciones relativas. Su localización física en el espacio es independiente del sistema de referencia utilizado para ubicarlo.

En un sistema de referencia, centro de masas SCM, su origen O' coincide con el centro de masas y $\bar{r}'_{cm} = 0$, luego se tiene que: $\sum_{i=1}^{n} m_i\, \bar{r}'_i = 0.$

Un cuerpo rígido puede considerarse como un sistema de partículas. Dividamos el cuerpo en n pequeños elementos diferenciales de masa Δm_i. Se tendrá aproximadamente:

$$X_{cm} \approx \frac{\sum_1^n \Delta m_i\, x_i}{\sum_1^n \Delta m_i}\ ,\quad Y_{cm} \approx \frac{\sum_1^n \Delta m_i\, y_i}{\sum_1^n \Delta m_i}\ ,\quad Z_{cm} \approx \frac{\sum_1^n \Delta m_i\, z_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

en el límite cuando $n \to \infty$, $\Delta m_i \to 0$ y se tendrá exactamente:

$$X_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i\, x_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x\, dm$$

$$Y_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i\, y_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

$$Z_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i z_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z\, dm$$

vectorialmente:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \bar{r}\, dm$$

Si el cuerpo es homogéneo, de densidad uniforme $\rho = \frac{M}{V}$; dividimos en elementos diferenciales de volumen dv y como: $dm = \rho dv$, el centro de masa estará dado por:

$$X_{cm} = \frac{1}{V} \int x dv \ , \quad Y_{cm} = \frac{1}{V} \int y\, dv \ , \quad Z_{cm} = \frac{1}{V} \int z\, dv$$

o bien:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int \bar{r}\, dv$$

En el caso de una placa de espesor t uniforme, como : $dv = t da$, el centro de masa, que se denomina centroide, será:

$$X_{cm} = \frac{1}{A} \int x\, da \ , \quad Y_{cm} = \frac{1}{A} \int y\, da \ , \quad Z_{cm} = 0$$

vectorialmente en el plano:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{A} \int \bar{r}\, da$$

En el caso de una barra de espesor t y ancho e,uniforme como: $da=edx$ se tendrá:

$$X_{cm} = \frac{1}{L} \int x\, dx$$

En general cuando el cuerpo tiene un punto, una línea o un plano de simetría, el centro de masa estará en el punto, en la línea o en el plano de simetría. Por ejemplo, en una esfera estará en su centro.

El centro de masas de un sistema se puede determinar encontrando primero el de dos de ellos, que estará ubicado en la línea que los une, luego suponemos un cuerpo de masa $m_1 + m_2$ en este punto y buscamos el centro de masa entre éste y un tercer cuerpo y así sucesivamente hasta llegar a la última partícula.

Es importante que el lector encuentre el centro de masas de algunas figuras que se plantean en la sección de problemas.

6.2 MOVIMIENTO DE TRANSLACION DE UN SISTEMA DE PARTICULAS: MOMENTUM LINEAL Y LEY DE NEWTON.-

Al estudiar el movimiento de un sistema de partículas, es evidente que podríamos tratar a cada partícula por separado, estudio que se complica con el número de partículas que conforman el sistema y más aún su solución pues no se conoce en general todas las condiciones iniciales de cada una de las partículas.

Por lo tanto, debemos contentarnos con obtener una descripción de las características generales del movimiento del sistema aunque perdamos los detalles del mismo. Como veremos, el movimiento del centro de masas nos describe el movimiento de translación del conjunto.

De la definición de centro de masas se tiene:

$$M \bar{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i$$

Derivando respecto al tiempo:

$$M \bar{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i$$

Como el momentum lineal de cada partícula es:

$$\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$$

Se tiene:

$$M \bar{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i$$

Si definimos al momentum lineal del sistema de partículas como la suma de todos los momentum lineal de cada una de las n partículas que forman el sistema, esto es:

$$\bar{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i$$

Tenemos, al igual que para una partícula,

$$\bar{P} = M \bar{v}_{cm}$$

El momentum lineal total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema y la velocidad de su centro de masas.

Si volvemos a derivar la expresión del centro de masas:

$$M \bar{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i$$

De la segunda Ley de Newton:

$$\bar{F}_i = m_i \bar{a}_i$$

donde $\bar{F}_i$ es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i.

Se tiene:

$$M \bar{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

o bien,

$$\bar{F} = M \bar{a}_{cm}$$

donde $\bar{F}$ es la resultante de la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas que conforman el sistema. Entre todas estas fuerzas, hay fuerzas internas ejercidas por las partículas entre sí y fuerzas externas ejercidas por el ambiente,

$$\bar{F}^{int.} + \bar{F}^{ext.} = M \bar{a}_{cm}$$

Por la tercera Ley de Newton, las fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestas, por lo tanto, siendo $\bar{F}^{int.}$ la suma vectorial de todas estas fuerzas, se tiene que: $\bar{F}^{int} = 0$ y nos queda, al igual que para una partícula:

$$\bar{F}^{\text{ext.}} = M\,\bar{a}_{cm}$$

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula con la masa total del sistema concentrada y sobre la cual están aplicadas todas las fuerzas externas.

Esta expresión, considerando que: $\bar{P} = m\,\bar{v}_{cm}$, podemos escribirla:

$$\bar{F}^{\text{ext.}} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

que es la generalización de la Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas.

La solución de esta ecuación nos dá el movimiento de translación del sistema en conjunto, sin discriminar los movimientos particulares de cada una de las partículas que lo conforman. Si se trata de un cuerpo rígido el cuerpo puede estar al mismo tiempo vibrando o rotando, solo tenemos por ahora el movimiento de translación del centro de masas.

6.3 CONSERVACION DEL MOMENTUM LINEAL.-

Si la resultante de las fuerzas externas que actuan sobre un sistema de partículas es nula, el momentum lineal total del sistema se conserva, veamos:

$$\text{si,} \Longrightarrow \quad F^{ext} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{d\bar{P}}{dt} = 0$$

$$\bar{P} = \text{constante}$$

Este resultado simple es completamente general y es el principio o Ley de la Conservación del Momentum Lineal.

Siendo el momentum una cantidad vectorial, se tienen tres ecuaciones escalares, una para cada dirección. Si ocurre que solo alguna de las componentes de la resultante sea nula, por ejemplo en la componente x, si $F_x = 0$ se tendrá que: P_x = constante.

Esta Ley de Conservación del Momentum Lineal, como la de Energía, son mas fundamentales que los principios de Newton, de los cuales las hemos obtenido o deducido como principios; mantienen su validez en los campos de la física donde la mecánica Newtoniana no se cumple.

6.4 SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS. MOMENTUM LINEAL Y ENERGIA CINETICA.-

Al estudiar el movimiento de un sistema de partículas, en muchos casos es conveniente montar un sistema de referencia con origen coincidente con el centro de masas. A este sistema lo llamamos Sistema Centro de Masa, SCM.

En este sistema la velocidad del centro de masas es:

$$\bar{v}_{cm} = 0$$

Por lo tanto, se tendrá que el momentum lineal total siempre es:

$$\bar{P}_{SCM} = 0$$

Es frecuente utilizar este sistema de referencia para describir choques, se logra una gran simplicidad y simetría.

Cualquier otro sistema de referencia inercial fijo en un punto, se le denomina Sistema del Laboratorio, SL. En choques generalmente se escoje un SL en el cual una de las partículas está en reposo antes del choque, denominada partícula Blanco.

Encontremos la relación entre la energía cinética en un SL y en el SCM:

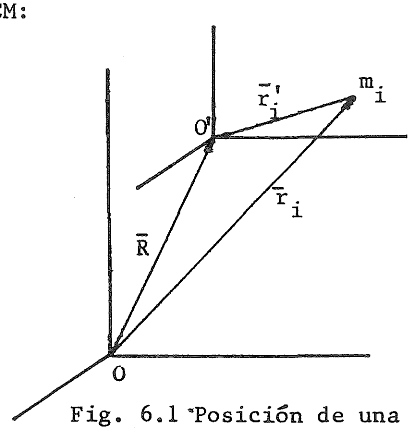


Fig. 6.1 Posición de una partícula m_i en los sistemas de referencia O y O'.

La energía cinética del sistema de partículas en O es:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

la relación de transformación de velocidades entre dos sistemas O y O' es:

$$\bar{v}_i = \bar{V} + \bar{v}_i'$$

Teniéndose:

$$v_i^2 = \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = (\bar{V} + \bar{v}_i') \cdot (\bar{V} + \bar{v}_i') = V^2 + 2\bar{V} \cdot \bar{v}_i' + v_i'^2$$

luego,

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (V^2 + 2\bar{V}.\bar{v}_i' + v_i'^2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i V^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i (\bar{V}.\bar{v}_i') + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) V^2 + \bar{V}. \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i' \right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Como la energía cinética y el momentum lineal del sistema de partículas en O' son:

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad , \quad \bar{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i'$$

con: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$, se tiene:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \bar{V} \cdot \bar{P}' + K'$$

esta expresión es la relación entre la energía cinética en dos sistemas cualquiera O y O'. En particular estamos interesados cuando O' es el centro de masas del sistema de partículas, donde se tiene que: $\bar{P}' = 0$ y $\bar{V} = \bar{v}_{cm}$

luego: $K_{SL} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K_{SCM}$

Esta expresión nos conduce a la siguiente interpretación: la energía cinética total es la suma de las energías cinéticas Externa e Interna. La energía cinética externa es la energía del conjunto como un todo en el centro de masas con masa M y velocidad $\underline{v}_{cm}$, $K_{ext} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. La energía cinética interna es la energía cinética de las partículas respecto al centro de masas,

$$K_{int} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Luego :

$$K_{total} = K_{externa} + K_{interna}.$$

Observe que $K_{int.}$ es la mínima energía cinética del sistema de partículas cuando $v_{cm} = 0$, $K_{ext} = 0$, luego: $K_{t.t.} \geqslant K_{int.}$

En general el movimiento de un sistema de partículas lo podemos separar en dos: el movimiento del centro de masas y el movimiento respecto al centro de masas, como seguiremos viendo nuevamente más adelante.

Es conveniente y útil determinar la energía cinética interna para el caso particular de dos partículas. En este caso de solo dos partículas podemos hablar de la velocidad relativa entre ellas y encontrar K_{SCM} en función de esta velocidad. Veamos:

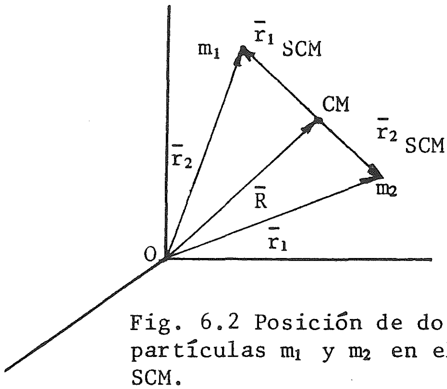


Fig. 6.2 Posición de dos partículas m_1 y m_2 en el SCM.

La relación de transformación de velocidades para ambas partículas son:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{CM} + \bar{v}_{1\,SCM}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_{CM} + \bar{v}_{2\,SCM}$$

la velocidad del CM es:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}$$

luego las velocidades de las dos partículas en el SCM son:

$$\bar{v}_{1\,SCM} = \bar{v}_1 - \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m}\bar{v}_{21} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{v}_{12}$$

$$\bar{v}_{2\,SCM} = \bar{v}_2 - \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{v}_{12}$$

siendo $\bar{v}_{12}$ la velocidad de la partícula 2 respecto a la 1 y teniéndose que: $\bar{v}_{12} = -\bar{v}_{21}$.

La energía cinética en el SCM será:

$$K_{SCM} = \frac{1}{2}m_1 v_{1\,SCM}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2\,SCM}^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}v_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}v_{12}^2$$

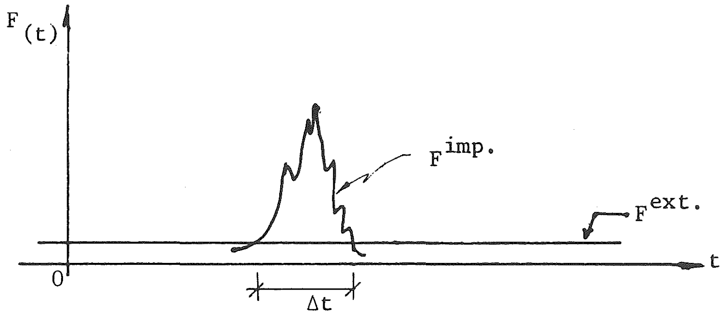
$$K_{SCM} = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}v_{12}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_{12}^2 = \frac{1}{2}\mu\, v_{12}^2$$

llamando a: $\mu = \dfrac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}$, la masa reducida del sistema de dos partículas; note que μ es menor que m_1 , o que m_2 . También: $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$.

El resultado obtenido nos conduce a interpretarlo equivalentemente como la energía cinética de una partícula de masa μ en 2 que se mueve con una velocidad v_{12} vista desde 1. Más adelante volveremos con ésta interpretación, en general el problema de dos cuerpos puede ser reducido matemáticamente equivalente al problema de un cuerpo con masa reducida μ.

6.5 COLISIONES.-

En una colisión o choque interactúan dos partículas bajo la acción interna de una fuerza impulsiva. Recuerde que hemos denominado a las fuerzas impulsivas como aquellas fuerzas que actuando durante un tiempo muy corto varían en ese tiempo en forma muy compleja alcanzando valores relativamente muy grandes comparados con las fuerzas externas que puedan actuar sobre el sistema. Ver fig. 6.3 .



6.3 Fuerza Impulsiva.

Observe que este proceso de interacción se puede dar durante un tiempo muy corto cuando se encuentran las partículas muy próximas sin que entren necesariamente en contacto, luego hablamos de choque aún cuando las partículas no se toquen.

En un choque se produce un cambio en el movimiento de las partículas en un corto tiempo, luego podemos hacer una separación bastante clara de los instantes: Antes del choque y Después del choque, que denotamos como inicial (i) y final (f).

Apesar que no conocemos los detalles del proceso de interacción, apli cando las leyes de conservación podremos predecir resultados después del choque, conociendo los movimientos de las partículas antes del choque.

Habiendo considerado que no actúan fuerzas externas, solo internas , el momentum lineal total del sistema se conserva; no cambia por el choque,

esto es : $\Delta\bar{P} = 0$ $\Longrightarrow$ $\bar{P}$ = constante.

como: $\bar{P} = M\,\bar{v}_{cm}$ $\Longrightarrow$ $\bar{v}_{cm}$ = constante.

y: $K_{ext} = \frac{1}{2} M\, v_{cm}^2$ $\Longrightarrow$ $K_{ext.}$ = constante.

En general en un fenómeno de choque la energía cinética varía, variando la energía cinética interna, pudiendo no conservarse convirtiéndose en otra forma de energía (deformación elástica, calorifica- interna, etc.).

De acuerdo a la variación de esta energía: $\Delta K_{int} = K_{int(f)} - K_{int(i)}$,

podemos clasificar los choques:

- Si $\Delta K_{int} = 0$, decimos que se tiene un choque Elástico.

  La energía cinética se conserva, K_{int} = constante.

  Por supuesto que también, K_{tot} = constante, puesto que siempre K_{ext} = constante.

  Los choques entre cuerpos rígidos con dimensiones no son estrictamente elásticos, hay pérdida de energía cinética, pero frecuentemente es pequeña y podemos tratarlos aproximadamente como elásticos.

- Si $\Delta K_{int} \neq 0$, decimos que se tiene un choque Inelástico.

  La energía cinética no se conserva, teniéndose dos casos:

  * Si $\Delta K_{int.} < 0$, decimos que se tiene un choque Plástico.

    La energía cinética disminuye, en el proceso se absorbe energía. Un caso particular, importante, de éstos choques es el denominado Completamente o Totalmente Plástico, cuando los dos cuerpos quedan unidos después del choque. Teniéndose:

$K_{int(f)} = 0$ y $\Delta K_{int} = - K_{int(i)}$, pero observe que: $K_{tot(f)} \neq 0$,

luego esta denominación no indica que se pierde toda la energía cinética inicial; la pérdida es tan grande como lo permite la conservación del momentum.

* Si $\Delta K_{int} > 0$, decimos que se tiene un choque Explosivo.

La energía cinética aumenta, en el proceso se libera energía.

Generalmente en mecánica no detallamos este último caso y cuando nos referimos a un choque inelástico nos estamos refiriendo al caso plástico.

En la fig. 6.4 se muestran los diferentes tipos de choques, graficando la variación de energía cinética en función de la velocidad relativa después del choque conociendo la velocidad relativa antes del choque, utilizando la expresión que encontramos en el item anterior 6.4:

$$\Delta K_{int} = \frac{1}{2} \mu \, v_{12\,f}^2 - \frac{1}{2} \mu \, v_{12\,i}^2 = \frac{1}{2} \mu \, (v_{12\,f}^2 - v_{12\,i}^2)$$

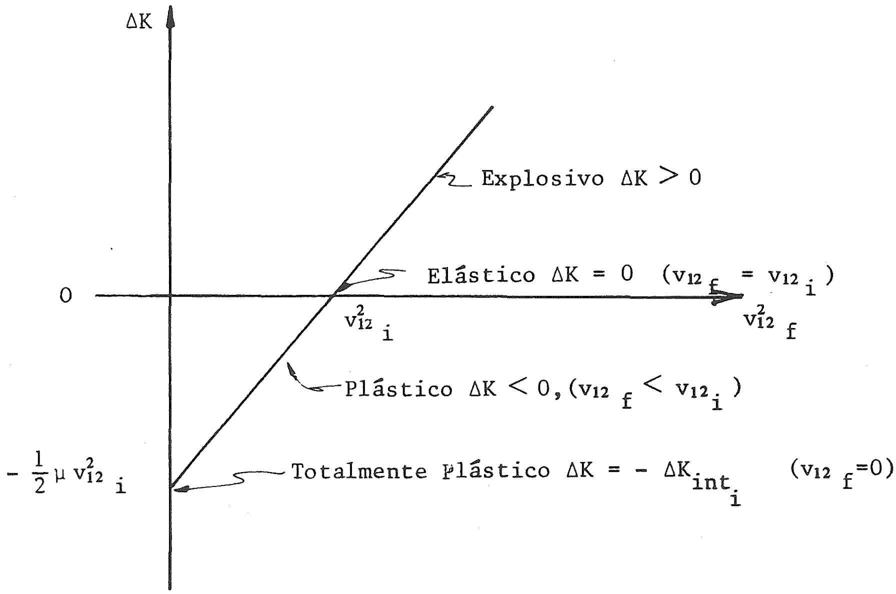


Fig. 6.4 Gráfica de ΔK vs $v_{12\,f}^2$. Clasificación de los choques.

Analicemos en particular algunos choques:

- Choque elástico en una dimensión.

  Dos partículas de masas m_1 y m_2 o esferas rígidas que efectúan un choque frontal, moviéndose en una misma línea antes y después del choque. En la fig. 6.5 se muestran sus velocidades.

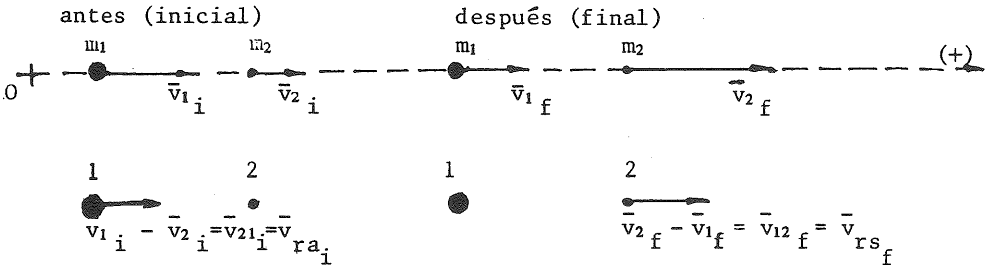


Fig. 6.5 Dos partículas en un choque elástico unidimensional.

$\bar{v}_{21_i}$=velocidad relativa de la partícula 1 con respecto a 2 antes del choque.

$\bar{v}_{ra_i}$ =velocidad relativa de aproximación antes del choque.

$\bar{v}_{12_f}$=velocidad relativa de la partícula 2 con respecto a 1 después del choque.

$\bar{v}_{rs_f}$ =velocidad relativa de separación después del choque.

Por conservación del momentum lineal:

$$m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f} \Longrightarrow m_1 (v_{1_i} - v_{1_f}) = m_2 (v_{2_f} - v_{2_i})$$

Por conservación de la energía cinética (choque elástico):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_f}^2 \Rightarrow m_1 (v_{1_i}^2 - v_{1_f}^2) = m_2 (v_{2_f}^2 - v_{2_i}^2)$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{v_{1_i}^2 - v_{1_f}^2}{v_{1_i} - v_{1_f}} = \frac{v_{2_f}^2 - v_{2_i}^2}{v_{2_f} - v_{2_i}} \Rightarrow \frac{(v_{1_i} + v_{1_f})(v_{1_i} - v_{1_f})}{(v_{1_i} - v_{1_f})} = \frac{(v_{2_f} + v_{2_i})(v_{2_f} - v_{2_i})}{(v_{2_f} - v_{2_i})}$$

Considerando que: $v_{1_i} \neq v_{1_f}$ y $v_{2_f} \neq v_{2_i}$, caso contrario, de ser iguales físicamente sería como si no se produjera el choque. Se tiene:

$$v_{1_i} + v_{1_f} = v_{2_f} + v_{2_i}$$

$$v_{1_i} - v_{2_i} = v_{2_f} - v_{1_f} \Rightarrow v_{21_i} = v_{12_f} \Rightarrow v_{ra_i} = v_{rs_f}$$

Obteniéndose que: la velocidad relativa de aproximación antes del choque es igual a la velocidad relativa de separación después del choque. Esto es consecuencia de haber asumido choque elástico $\Delta K=0$ correspondiente a la clasificación establecida; como $v_{12_f} = v_{21_i} = -v_{12_i}$, se tiene que: $\Delta K_{int} = \frac{1}{2}\mu\,(v_{12_f}^2 - v_{12_i}^2) = 0$.

Con la expresión de igualdad de velocidades relativas, reemplazándola en las de conservación, se obtienen las velocidades finales de las partículas en función de las iniciales, y por supuesto de sus masas:

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i}$$

$$v_{2_f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i}$$

Reduscamos estas expresiones para algunos casos importantes:

* Si ambas partículas son iguales,

$$m_1 = m_2 = m \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{1_f} = v_{2_i} \\ v_{2_f} = v_{1_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{las partículas intercambian velocidades.}$$

* Si una de las partículas está en reposo inicialmente, llamada partícula blanco, sistema de referencia generalmente llamado de laboratorio en choques,

$$v_{2_i} = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{1_f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} \\[2ex] v_{2_f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} \end{array}\right.$$

Si además,

$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{1_f} = 0 \\ \\ v_{2_f} = v_{1_i} \end{array} \right\} \Longrightarrow$ intercambiando velocidades, la partícula incidente se detiene y la blanco sale con esa velocidad.

$m_2 \gg m_1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{1_f} \approx -v_{1_i} \\ \\ v_{2_f} \approx 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$ la partícula incidente invierte su movimiento y la blanco casi no se mueve.

$m_1 \gg m_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{1_f} \approx v_{1_i} \\ \\ v_{2_f} \approx 2v_{1_i} \end{array} \right\} \Longrightarrow$ la partícula incidente casi no altera su movimiento y la blanco sale disparada con aproximadamente el doble de ésa velocidad.

Podemos también calcular el impulso de la fuerza del choque, sobre la partícula 1: $J_1 = P_{1_f} - P_{1_i} = m_1 (v_{1_f} - v_{1_i})$ reemplazando el valor encontrado de v_{1_f}, se obtiene:

$$J_1 = -\left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_{1_i} - v_{2_i}) = -\left(\frac{2m_1\ m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{ra_i} = -2\mu\ v_{ra_i}$$

similarmente se puede encontrar para la partícula 2:

$J_2 = P_{2_f} - P_{1_i} = m_2 (v_{2_f} - v_{2_i})$

Pero como, por la 3º Ley de Newton, se tiene que: $J_2 = -J_1$, o también conservación de momentum: $\Delta\bar{P} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 = 0$.

- Choque plástico en una dimensión.

En todo choque se conserva el momentum lineal y la energía total. En este caso $\Delta K < 0$ y no $\Delta K = 0$ como en el caso anterior. Para evaluarlo consideraremos cuanto difiere del caso elástico, la velocidad relativa de separación después del choque ya no será igual a la velocidad relativa de aproximación antes del choque, luego, mediante la relación de estas velocidades encontramos un número que definimos como Coeficiente de Restitución.

$$e = \frac{v_{2_f} - v_{1_f}}{v_{1_i} - v_{2_i}} = \frac{v_{12_f}}{v_{21_i}} = \frac{v_{rs_f}}{v_{ra_i}}$$

teniéndose en este caso, ver fig. 6.4, $0 \leq v_{rs_f} \leq v_{ra_i} \Rightarrow 0 \leq e \leq 1$

Para,

$e = 1$ choque elástico

$0 < e < 1$ choque plástico

$e = 0$ choque completamente inelástico.

No debe llamar la atención cuando se encuentra esta expresión con signo menos, observe que:

$$e = -\frac{v_{1_f} - v_{2_f}}{v_{1_i} - v_{2_i}} = -\frac{v_{21_f}}{v_{21_i}}$$

Se define en términos de la velocidad relativa de una de las partículas respecto a la otra, tanto antes como después del choque, aquí, de la partícula 1 respecto a la 2. Ambas expresiones son equivalentes dado que: $v_{21_f} = -v_{12_f}$. No definen las velocidades relativas de aproximación y separación como hemos preferido dado que ambas son positivas en un choque.

Con la ecuación de conservación de momentum:

$$m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f}$$

y la definición del coeficiente de restitución:

$$(v_{1_i} - v_{2_i})e = v_{2_f} - v_{1_f}$$

resolviendo se obtiene las velocidades finales:

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1_i} + \left(\frac{(1 + e)\, m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i}$$

$$v_{2_f} = \left(\frac{(1 + e)m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - e\, m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i}$$

Por supuesto que para $e = 1$ se reducen a las expresiones anteriormente encontradas para el choque elástico.

El impulso de la fuerza del choque sobre la partícula 1 será : $J_1 = P_{1_f} - P_{1_i} = m_1 (v_{1_f} - v_{1_i})$, reemplazando el valor de v_{1_f} encontrado, se obtiene:

$$J_1 = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(1+e)(v_{1_i} - v_{2_i}) = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(1+e)v_{ra_i} = -\mu(1+e)v_{ra_i}$$

o bien, como: $(v_{1_i} - v_{2_i})e = (v_{2_f} - v_{1_f})$

$$J_1 = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{1+e}{e}\right)(v_{2_f} - v_{1_f}) = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{1+e}{e}\right)v_{rs_f} = -\mu\left(\frac{1+e}{e}\right)v_{rs_f}$$

Para la partícula 2: $J_2 = P_{2_f} - P_{2_i} = m_2(v_{2_f} - v_{2_i})$, pero por la 3ª Ley de Newton: $J_2 = -J_1$.

Por supuesto que para $e = 1$ se reducen al caso elástico.

La pérdida de energía cinética será:

$$\Delta K = \Delta K_{int} = \frac{1}{2}\mu\,(v^2_{rs_f} - v^2_{ra_i})$$

Como : $v_{rs_f} = e\, v_{ra_i}$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu(e^2 v^2_{ra_i} - v^2_{ra_i}) = \frac{1}{2}\mu(e^2-1)v^2_{ra_i} = \frac{1}{2}(e^2-1)\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_{1_i} - v_{2_i})^2$$

o también: $\Delta K = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)v^2_{rs_f} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_{2_f} - v_{1_f})^2$

para, $e = 1 \implies \Delta K = 0$, choque elástico, sin pérdida de energía cinética.

Observe que siendo $e = \dfrac{v_{rs_f}}{v_{ra_i}} \implies e^2 = \dfrac{\frac{1}{2}\mu\, v^2_{rs_f}}{\frac{1}{2}\mu\, v^2_{ra_i}} = \dfrac{K_{int\ f}}{K_{int\ i}}$,

es diferente a la relación de energías cinéticas totales:

$$k = \frac{K_{tot\ f}}{K_{tot\ i}} = \frac{K_{ext} + K_{int\ f}}{K_{ext} + K_{int\ i}} = \frac{\frac{1}{2}M\,v^2_{cm} + K_{int\ f}}{\frac{1}{2}M\,v^2_{cm} + K_{int\ i}} = \frac{Mv^2_{cm} + 2e^2 K_{int\ i}}{M\,v^2_{cm} + 2\,K_{int\ i}}$$

- Choque completamente inelástico.

  En este caso ambas partículas se mueven juntas después del choque: $\bar{v}_{1_f} = \bar{v}_{2_f} = \bar{v}_f$.

  Por conservación del momentum, sin necesidad de restringirse a una dimensión, se tiene:

$$m_1\,\bar{v}_{1_i} + m_2\bar{v}_{2_i} = (m_1 + m_2)\bar{v}_f$$

$$\bar{v}_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\bar{v}_{1_i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\bar{v}_{2_i}$$

Note que con e = 0 en las expresiones anteriores del choque plástico, se obtiene ésta expresión unidimensional.
Igualmente para el impulso y pérdida de energía cinética, con e = 0, se obtiene:

$$J_1 = -\left(\frac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_{1_i} - v_{2_i}) = -\mu \, v_{ra_i}$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_{1_i} - v_{2_i})^2 = -\frac{1}{2}\mu \, v^2_{ra_i}$$

- Choque elástico en dos dimensiones:

Consideremos una partícula proyectil de masa m_1 que incide con un parámetro de impacto b sobre otra partícula blanco de masa m_2. Ver fig. 6.6.

Se llama Parámetro de Impacto a la distancia b entre la línea del movimiento inicial de la partícula proyectil y la paralela a ésta que pasa sobre la partícula blanco.

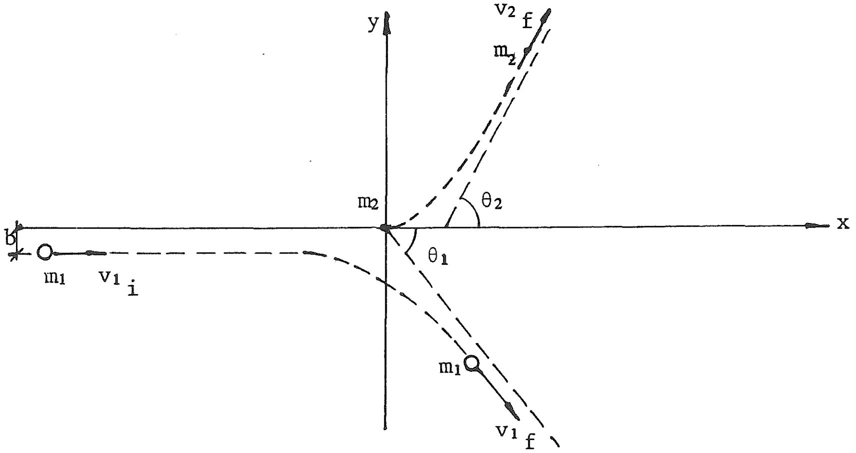


Fig. 6.6 Choque en dos dimensiones.
b = Parámetro de Impacto

Por conservación de momentum:

- componente x $\Longrightarrow m_1 v_{1_i} = m_1 v_{1_f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2_f} \cos\theta_2$

- componente y $\Longrightarrow 0 = m_1 v_{1_f} \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v_{2_f} \operatorname{sen}\theta_2$

Por conservación de energía cinética (choque elástico):

$$\frac{1}{2} m_1 v^2_{1_i} = \frac{1}{2} m \, v^2_{1_f} + \frac{1}{2} m_2 v^2_{2_f}$$

Teniéndose cuatro incógnitas después del choque: v_{1f}, v_{2f}, θ_1 y θ_2; se presenta una dificultad, pues solo contamos con tres ecuaciones. Luego solo será posible obtener una solución si experimentalmente determinamos una de ellas, siendo más simple medir uno de los ángulos de desviación o retroceso.

- Choque elástico en tres dimensiones.
  No podremos obtener una solución, pues estamos en peores condiciones que en caso anterior, ahora se tienen seis incógnitas y solo cuatro ecuaciones que las relacionan.

6.6 ROTACIONES EN UN SISTEMA DE PARTICULAS: MOMENTUM ANGULAR Y LEY DE NEWTON.-

Hemos visto que el centro de masas nos describe el movimiento de translación del conjunto de partículas como un todo. Ahora estamos interesados en considerar las rotaciones del sistema de partículas producidas por las acciones dinámicas que actúan sobre él.

Primero, definimos el momentum angular del sistema de partículas como la suma vectorial de todos los momentum angulares de cada una de las n partículas que forman el sistema, esto es:

$$\bar{L}_o \equiv \sum_{i=1}^{n} \bar{\ell}_{o_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{p}_i$$

y el torque total como la suma vectorial de todos los torques de las fuerzas actuantes,

$$\bar{T}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{\tau}_{o_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i \,,$$

donde $\bar{F}_i$ es la suma vectorial de todas las fuerzas internas y externas al sistema que actúan sobre la partícula i, luego:

$$\bar{T}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times (\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}) = \sum_{i=1}^{n} r_i \times \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int}$$

Pero ocurre que los torques producidos por las fuerzas internas se anulan de a pares, veámoslo considerando dos partículas como se muestra en la fig. 6.7 , teniéndose:

$$\bar{\tau}_{o_1} + \bar{\tau}_{o_2} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{21} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{12} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}_{12} = \bar{r}_{12} \times \bar{F}_{12} = 0$$

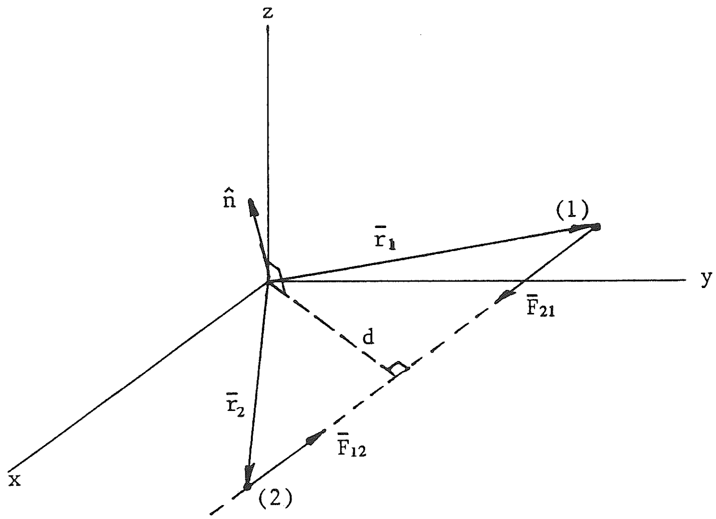


Fig. 6.7 Los torques de las fuerzas internas se anulan. Las fuerzas internas son colineales, $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$, a una distancia d del origen O, formando un plano con los vectores $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$.

$$\bar{\tau}_{o_1} + \bar{\tau}_{o_2} = -dF_{21}\,\hat{n} + d\,F_{12}\,\hat{n} = 0$$

Obteniéndose: $T_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} = \bar{T}_o^{ext}$

Derivando la expresión del momentum angular:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \frac{d\bar{p}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times \bar{p}_i$$

introduciendo la Ley de Newton para la partícula i,

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{F}_i = \bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}$$

y efectuando:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i$$

los dos últimos términos son nulos, quedando finalmente:

$$\bar{T}_o^{ext} = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

expresión que es la generalización de la Segunda Ley de Newton para rotaciones en un sistema de partículas.

6.7 CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.-

Si el torque total, resultante de los torques de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas es nulo, el momentum angular total del sistema se conservará, veamos:

Si, $\Longrightarrow \quad T_{\circ}^{ext} = 0 \Longrightarrow \frac{d\bar{L}_{\circ}}{dt} = 0$

$$\bar{L}_{\circ} = \text{constante.}$$

6.8 MOMENTUM ANGULAR EN EL SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS.-

Encontremos la relación entre el momentum angular con respecto a un SL y al SCM, como hicimos antes para le energía cinética.

En el SL : $\bar{L}_{\circ} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{r}_i \times \bar{v}_i)$

las relaciones de transformación de posiciones y velocidades entre dos sistemas de referencia cualquiera O y O' son:

$$\bar{r}_i = \bar{R} + \bar{r}'_i$$

$$\bar{v}_i = \bar{V} + \bar{v}'_i$$

luego, $\bar{L}_{\circ} = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\bar{R} + \bar{r}'_i) \times (\bar{V} + \bar{v}'_i)$

efectuando:

$$\bar{L}_{\circ} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{R} \times \bar{V} + \bar{R} \times \bar{v}'_i + \bar{r}'_i \times \bar{V} + \bar{r}'_i \times \bar{v}'_i) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} m_i)\bar{R} \times \bar{V} + \bar{R} \times (\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}'_i) + (\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}'_i) \times \bar{V} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times m_i\bar{v}'_i$$

Como en O' :

$$\bar{L}'_{\circ} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times \bar{p}'_i$$

$$\bar{P}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}'_i$$

$$M\bar{r}'_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}'_i \Longrightarrow$$ donde $\bar{r}'_{cm}$ es la posición del CM en el sistema de referencia O'.

se tiene:

$$\bar{L}_o = M\,\bar{R} \times \bar{V} + \bar{R} \times \bar{P}' + M\,\bar{r}'_{cm} \times \bar{V} + \bar{L}'_o$$

esta expresión es la relación entre el momentum angular en dos sistemas cualquiera O y O'. En particular estamos interesados cuando O' es el centro de masas del sistema de partículas, donde se tiene que:

$\bar{V} = \bar{v}_{cm}$, $\bar{P}' = 0$ y $\bar{r}'_{cm} = 0 \Longrightarrow$ posición del CM en el SCM.

Luego:

$$\bar{L}_{SL} = \bar{R} \times \bar{P} + \bar{L}_{SCM}$$

Similarmente, como vimos para la energía cinética, este resultado nos conduce nuevamente a la interpretación que podemos separar en dos partes el movimiento. El momentum angular total del sistema será la suma de: uno global del conjunto como un todo en el centro de masas con masa M y velocidad v_{cm} ($\bar{L}_c = \bar{R} \times \bar{P}$), más otro interno o intrínseco que tienen las partículas respecto al centro de masas ($\bar{L}_{int} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times \bar{p}'_i$). $\bar{L}_{tot} = \bar{L}_c + \bar{L}_{intrínseco}$, cuando $v_{cm} = 0$, se tiene: $\bar{L}_{tot} = \bar{L}_{int}$

Luego el movimiento de rotación de un sistema de partículas lo podemos separar en dos: el movimiento del centro de masas y el movimiento de rotación respecto al centro de masas. El movimiento del centro de masas como una partícula lo hemos tratado con suficiente profundidad y extensión, debemos pues, preocuparnos por el movimiento de rotación respecto al centro de masas para conocer el movimiento de todo el sistema. Volveremos sobre él en el próximo capítulo al tratar el movimiento del cuerpo rígido.

Es conveniente ver ahora, la relación que existe entre el momentum angular intrínseco y la velocidad angular respecto al centro de masas para un sistema de solo dos partículas.

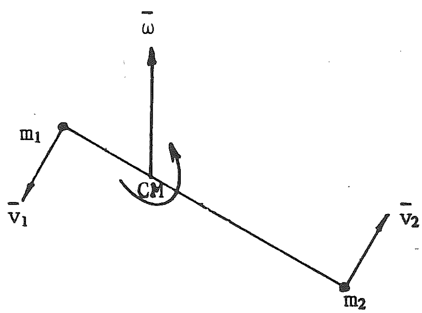


Fig. 6.8 Rotación de dos partículas respecto al centro de masas.

Si se tienen dos partículas el CM estará alineado con ellos y tendrán la misma velocidad angular $\bar{\omega}$ respecto a él.

Observe que respecto al CM:

$$\bar{P}_{SCM}=0 \Longrightarrow \bar{P}_{1_{SCM}} = -\bar{P}_{2\,SCM}$$

teniéndose:

$$m_1 \bar{v}_{1_{SCM}} = -m_2 \bar{v}_{2\,SCM}$$

las velocidades de las partículas son paralelas y de sentido opuesto.

El momentum angular respecto al CM es:

$$\bar{L}_{SCM} = m_1 \bar{r}_{1\,SCM} \times \bar{v}_{1\,SCM} + m_2 \bar{r}_{2\,SCM} \times \bar{v}_{2\,SCM}$$

como: $\bar{r} \times \bar{v} = r^2 \bar{\omega}$

se tiene:

$$\bar{L}_{SCM} = (m_1\ r_{1\,SCM}^2 + m_2\ r_{2\,SCM}^2)\bar{\omega}$$

llamando a la expresión entre paréntesis momento de inercia del sistema respecto a un eje que pasa por el centro de masas, I_{CM}, podemos escribir:

$$\bar{L} = I_{CM}\ \bar{\omega}$$

Esta relación entre $\bar{L}$ y $\bar{\omega}$ que se da para una rotación, la podemos comparar con la relación de translación entre $\bar{P}$ y $\bar{V}$, $\bar{P} = M\bar{V}$. La masa M es la inercia al movimiento de translación e I lo podemos interpretar como la inercia a la rotación. En el siguiente capítulo definiremos esta cantidad física, Momento de Inercia, para un cuerpo rígido.

PROBLEMAS

1. Encontrar el centroide (CM) de las siguientes figuras planas:

   a) Rectángulo

   b) Triángulo isósceles

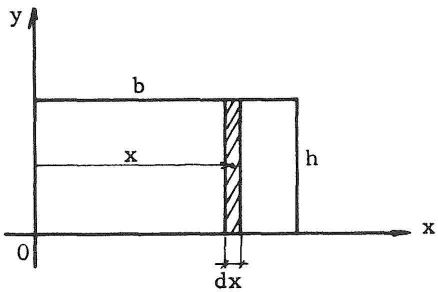
   c) Semicírculo

---

a) Rectángulo:

Por simetría el CM estará en: $x_{cm} = \frac{b}{2}$, $y_{cm} = \frac{h}{2}$.

Sin embargo, como práctica, determinemos el CM por integración. Considerando como partícula al elemento diferencial que se muestra en la figura, se tendrá:



$A = bh$

$da = h\,dx$

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\int x\,da$$

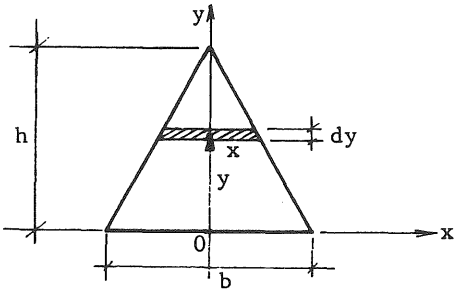
$$x_{cm} = \frac{1}{bh}\int_0^b xh\,dx = \frac{1}{b}\int_0^b x\,dx =$$

$$x_{cm} = \frac{1}{b}\,\frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$$

procediendo similarmente se obtendrá:

$$y_{cm} = \frac{h}{2}$$

b) Triángulo isósceles:



Por simetría: $x_{cm} = 0$.

Considerando el elemento diferencial mostrado en la figura, se tiene:

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int y\,da$$

$A = \frac{1}{2}bh$

$da = 2x\,dy$

$\frac{x}{b/2} = \frac{h-y}{h}$

$x = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$

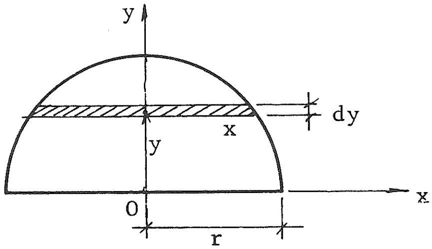
$da = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)dy$

$$y_{cm} = \frac{1}{\frac{1}{2}bh}\int y\,2x\,dy = \frac{2}{bh}\int_0^h y\,b\left(1 - \frac{y}{h}\right)dy$$

$$y_{cm} = \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)y\,dy = \frac{2}{h}\int_0^h y\,dy - \frac{2}{h^2}\int_0^h y^2\,dy$$

$$y_{cm} = \frac{2}{h}\,\frac{h^2}{2} - \frac{2}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h$$

c) Semicírculo:



Por simetría $x_{cm} = 0$. Considerando el elemento diferencial mostrado en la figura, se tiene:

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int y da$$

$$y_{cm} = \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_0^r y 2\sqrt{r^2 - y^2}\, dy =$$

$x^2 + y^2 = r^2$

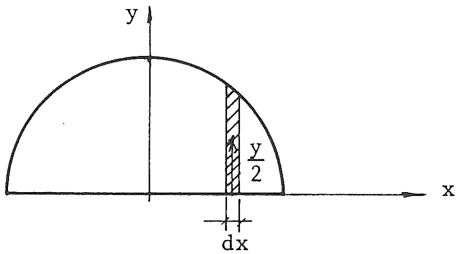
$A = \frac{\pi r^2}{2}$

$da = 2x\, dy$

$da = 2\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$

$$y_{cm} = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r y(r^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{4}{\pi r^2} \left[-\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^r$$

$$y_{cm} = \frac{4}{\pi r^2} \left(\frac{r^3}{3} \right) = \frac{4r}{3\pi}$$



Como práctica, determinemos el CM considerando ahora otro elemento diferencial como se muestra en la figura:

$da = y\, dx$

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int \frac{y}{2} da = \frac{2}{\pi r^2} \int \frac{y}{2} y dx$$

$$y_{cm} = \frac{1}{\pi r^2} \int y^2 dx \, \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$y_{cm} = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r r^2 dx - \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r x^2 dx$$

$$y_{cm} = \frac{2}{\pi} (r) - \frac{2}{\pi r^2} \left(\frac{r^3}{3} \right) = \frac{2r}{\pi} - \frac{2r}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

2. Encontrar el centroide (CM) de las siguientes figuras planas:

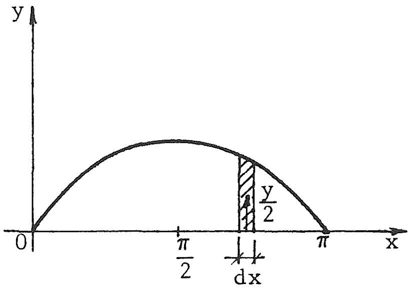
   a) Area bajo un arco de la curva seno en 1/2 periodo, y el eje x.

   b) Area encerrada por un arco de la parábola $y^2 = kx$, desde el origen hasta un punto P(a, b) sobre ella, con el eje horizontal y una recta perpendicular a éste pasando por el punto P.

c) El mismo arco de parábola anterior, pero con el eje vertical y una recta perpendicular a éste pasando por el punto P.

---

a)



$y = \text{sen } x$

$da = y\, dx$

Por simetría, $x_{cm} = \frac{\pi}{2}$. Considerando el elemento diferencial mostrado en la figura determinemos el área total encerrada:

$$A = \int da = \int y\, dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx$$

$$A = \left| -\cos x \right|_0^{\pi} = 2$$

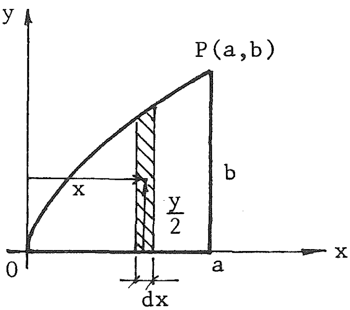
y la coordenada y_{cm} del CM, será:

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int \frac{y}{2}\, da = \frac{1}{A} \int \frac{y}{2}\, y\, dx = \frac{1}{2A} \int y^2 dx$$

$$y_{cm} = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{sen } 2x \right|_0^{\pi}$$

$$y_{cm} = \frac{\pi}{8}$$

b)



$y^2 = kx$

$da = y\, dx$

Primero determinamos el área total encerrada:

$$A = \int da = \int y\, dx = \int_0^a k^{1/2} x^{1/2}\, dx$$

$$A = k^{1/2} \left| \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^a = \frac{2}{3} k^{1/2} a^{3/2}$$

Como el punto P pertenece a la curva:

$$b^2 = k\, a \Longrightarrow k = \frac{b^2}{a}, \text{ luego:}$$

$$A = \frac{2}{3} \frac{b}{a^{1/2}} a^{3/2} = \frac{2}{3}\, ba$$

Las coordenadas del CM serán:

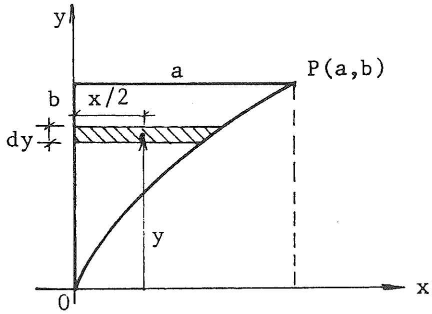
$$x_{cm} = \frac{1}{A} \int x\, da = \frac{1}{A} \int x\, y\, dx = \frac{1}{A} \int x\, k^{1/2} x^{1/2}\, dx = \frac{k^{1/2}}{A} \int_0^a x^{3/2} dx$$

$$x_{cm} = \frac{b/a^{1/2}}{\frac{2}{3}\,ba} \left| \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right|_{o}^{a} = \frac{3}{2}\ a^{-3/2}\ \frac{2}{5}\,a^{5/2} = \frac{3}{5}\,a$$

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int \frac{y}{2}\,da = \frac{1}{A}\int \frac{y}{2}\,y\,dx = \frac{1}{2A}\int y^2\,dx = \frac{1}{2A}\int_{o}^{a} k\,x\,dx$$

$$= \frac{b^2/a}{\frac{4}{3}\,ba} \left| \frac{x^2}{2} \right|_{o}^{a} = \frac{3}{4}\ \frac{b}{a^2}\ \frac{a^2}{2} = \frac{3}{8}\,b$$

c)



El área total encerrada la podemos determinar por integración, o bien, por diferencia con el área inferior ya encontrada en la figura anterior:

$$A = ab - \frac{2}{3}\,ab = \frac{1}{3}\,ab$$

$$y^2 = kx$$

$$da = x\,dy$$

Considerando el elemento diferencial mostrado en la figura, las coordenadas del CM serán:

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\int \frac{x}{2}\,da = \frac{1}{A}\int \frac{x}{2}\,x\,dy = \frac{1}{2A}\int x^2\,dy = \frac{1}{2A}\int \frac{y^4}{k^2}\,dy$$

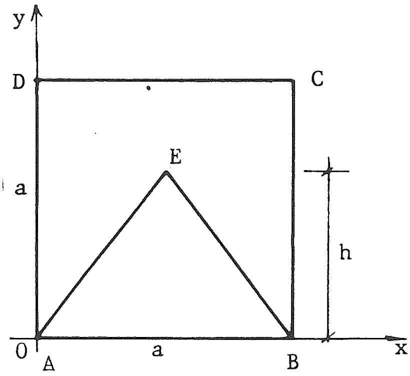
$$x_{cm} = \frac{1}{2Ak^2}\int_{o}^{b} y^4\,dy = \frac{1}{2\,\frac{1}{3}\,ab\,\frac{b^4}{a^2}} \left| \frac{y^5}{5} \right|_{o}^{b} = \frac{3}{2}\ \frac{a}{b^5}\ \frac{b^5}{5}$$

$$x_{cm} = \frac{3}{10}\,a$$

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int y\,da = \frac{1}{A}\int y\,x\,dy = \frac{1}{A}\int y\,\frac{y^2}{k}\,dy = \frac{1}{Ak}\int_{o}^{b} y^3\,dy$$

$$y_{cm} = \frac{1}{\frac{1}{3}\,ab\,\frac{b^2}{a}} \left| \frac{x^4}{4} \right|_{o}^{b} = \frac{3}{b^3}\ \frac{b^4}{4} = \frac{3}{4}\,b$$

3. A un cuadrado ABCD de lado a y espesor e, se le recorta un triángulo isósceles ABE. Encontrar la altura h de este triángulo de manera que su vértice E sea justamente el CM o centroide de la superficie que resta.



Para las figuras formadas: cuadrado ABCD, triángulo isósceles AEB y la que resta AEBCD, se tiene un eje de simetría y sus C.M. estarán sobre este eje:

$$x_{cm} = \frac{a}{2}$$

Para el cuadrado, también por simetría, la coordenada $y_{\square cm}$ de su CM, será:

$$y_{\square cm} = \frac{a}{2}$$

Para el triángulo isósceles, ver problema Nº 1b, será:

$$y_{\triangle cm} = \frac{h}{3}$$

Luego, para la figura que resta AEBCD su coordenada y_{cm} será:

$$y_{cm} = \frac{A_\square\, y_\square - A_\triangle\, y_\triangle}{A_\square - A_\triangle} = \frac{a^2 \times \frac{a}{2} - \frac{ah}{2} \times \frac{h}{3}}{a^2 - \frac{ah}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{h^2}{6}}{a - \frac{h}{2}}$$

Como el problema requiere que: $y_{cm} = h$, se tiene:

$$h = \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{h^2}{6}}{a - \frac{h}{2}} \Longrightarrow ha - \frac{h^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{h^2}{6} \Longrightarrow h^2 - 3ah + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

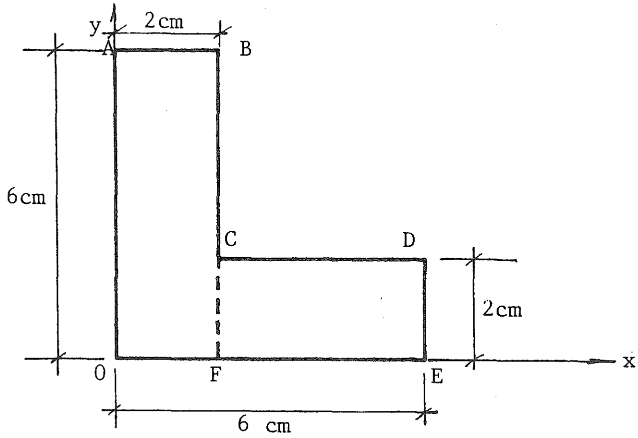
resolviendo:

$$h = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{3}{2}a)^2 - \frac{3}{2}a^2} = \frac{3}{2}a \pm \frac{3}{2}a\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}a(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$$

para la solución positiva se tiene que: $h > a$ y no se obtendría el triángulo recortado de la plancha dada. Por lo tanto, la altura pedida corresponde a la solución negativa.

$$h = \frac{3}{2}a\,(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$$

4. Encontrar el centro de masas de la figura ABCDEO mostrada, si los rectángulos ABFO y CDEF tienen espesores diferentes: 2 y 1 cm respectivamente, pero ambos del mismo material.



- Rectángulo ABFO $\Rightarrow$ (i)

$$\begin{cases} X_{1\,cm} = 1 \text{ cm} \\ Y_{1\,cm} = 3 \text{ cm} \\ V_1 = A_1 \times e_1 = 2 \times 6 \times 2 = 24 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

- Rectángulo CDEF $\Rightarrow$ (2)

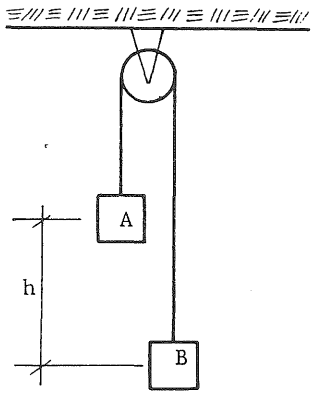
$$\begin{cases} X_{2\,cm} = 4 \text{ cm} \\ X_{1\,cm} = 1 \text{ cm} \\ V_2 = A_2 \times e_2 = 4 \times 2 \times 1 = 8 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

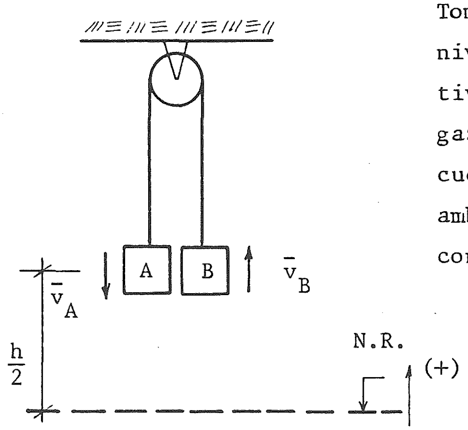
- Figura compuesta ABCDEO:

$$x_{cm} = \frac{V_1 \; X_{1\,cm} + V_2 \; X_{2\,cm}}{V_1 + V_2} = \frac{24 \times 1 + 8 \times 4}{24 + 8} = \frac{56}{32} = \frac{7}{4} = 1.75 \text{ cm}$$

$$y_{cm} = \frac{V_1 Y_{1\,cm} + V_2 Y_{2\,cm}}{V_1 + V_2} = \frac{24 \times 3 + 8 \times 1}{24 + 8} = \frac{80}{32} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ cm}$$

5. Calcular la velocidad del centro de masas de los cuerpos A y B, ligados como se muestra en la figura, en el instante cuando ambos se encuentran a igual nivel horizontal. Teniéndose que $m_A = 2m_B = 2m$ y parten del reposo con una separación vertical h.





Tomando como nivel de referencia el nivel de partida del cuerpo B y positivo hacia arriba, de acuerdo a la ligazón existente cuando ambos se encuentran a igual nivel, se tiene que ambos están al nivel: $y = \frac{h}{2}$

con velocidades: $\bar{v}_A = -\bar{v}_B = -v\,\hat{j}$.

Por conservación de energía obtendremos la velocidad v de los cuerpos en ese instante:

$$0 + (2m)gh = \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{1}{2}(m)v^2 + (2m)g\frac{h}{2} + (m)g\frac{h}{2}$$

$$2gh = \frac{3}{2}v^2 + \frac{3}{2}gh$$

$$\frac{3}{2}v^2 = \frac{1}{2}gh$$

$$v^2 = \frac{1}{3} gh$$

$$v = \frac{1}{3} \sqrt{3 \, gh}$$

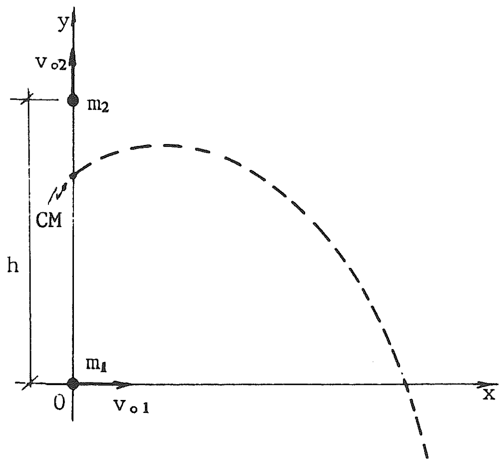
La velocidad del centro de masas será:

$$v_{cm} = \frac{(2m)(-v) + (m)(v)}{2m + m} = \frac{-m v}{3m} = -\frac{1}{3} v$$

$$\bar{v}_{cm} = -\frac{1}{9} \sqrt{3gh} \; \hat{j}$$

6. Una partícula m_2 se encuentra a una altura h verticalmente sobre otra partícula m_1. En ese instante la partícula m_2 se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez v_{o2} y la partícula m_1 se lanza horizontalmente con una rapidez v_{o1}
Determinar la aceleración $\bar{a}_{(t)}$, velocidad $\bar{v}_{(t)}$, posición $\bar{r}_{(t)}$ y trayectoria del centro de masas. Calcular el tiempo transcurrido para que el CM llegue al nivel que partió la partícula m_1.

Tomemos como referencia el punto de partida de la partícula m_1 y un sistema de coordenadas (x-y) en el plano vertical coincidente con el lanzamiento de ésta misma partícula.



Las C.I. de las partículas son:

$$\left. \begin{array}{l} x_{o1} = 0 \\ y_{o1} = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{r}_{o1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{o2} = 0 \\ y_{o2} = h \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{r}_{o2} = h \, \hat{j}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{o_{x_1}} = v_{o1} \\ v_{o_{y_1}} = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{v}_{o1} = v_{o1} \, \hat{i}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{o_{x_2}} = 0 \\ v_{o_{y_2}} = v_{o2} \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{v}_{o2} = v_{o2} \, \hat{j}$$

luego, llamando $M = m_1 + m_2$, las C.I. del CM serán:

$$\bar{r}_{o_{cm}} = \frac{m_1 \bar{r}_{o1} + m_2 \bar{r}_{o2}}{M} = \left(\frac{m_2}{M} h\right) \hat{j}$$

$$\bar{v}_{o_{cm}} = \frac{m_1 \bar{v}_{o1} + m_2 \bar{v}_{o2}}{M} = \left(\frac{m_1}{M} v_{o1}\right)\hat{i} + \left(\frac{m_2}{M} v_{o2}\right)\hat{j}$$

Translación del CM, aplicando la ley de Newton:

- aceleración:

$$M\bar{a}_{cm} = \bar{F}^{ext} = - m_1 g\hat{j} - m_2 g\hat{j} = - Mg\hat{j} \Longrightarrow \bar{a}_{cm} = - g\hat{j} = \text{constante}.$$

como la aceleración es constante se tiene:

- velocidad:

$$\bar{v}_{cm} = \bar{v}_{o_{cm}} + \bar{a}_{cm} t = \frac{m_1}{M} v_{o1}\hat{i} + \frac{m_2}{M} v_{o2}\hat{j} - gt\hat{j} = \left(\frac{m_1}{M} v_{o1}\right)\hat{i} + \left(\frac{m_2}{M} v_{o2} - gt\right)\hat{j}$$

- posición:

$$\bar{r}_{cm} = \bar{r}_{o_{cm}} + \bar{v}_{o_{cm}} t + \frac{1}{2}\bar{a}_{cm} t^2 = \frac{m_2}{M} h\,\hat{j} + \frac{m_1}{M} v_{o1} t\,\hat{i} + \frac{m_2}{M} v_{o2} t\,\hat{j} - \frac{1}{2} g\, t^2 \hat{j} =$$

$$\bar{r}_{cm} = \left(\frac{m_1}{M} v_{o1} t\right)\hat{i} + \left(\frac{m_2}{M} h + \frac{m_2}{M} v_{o2} t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{j}$$

- trayectoria:

$$\text{ec. paramétricas} \quad \begin{cases} x_{cm} = \dfrac{m_1}{M} v_{o1} t \\[2ex] y_{cm} = \dfrac{m_2}{M} h + \dfrac{m_2}{M} v_{o2}\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

eliminando el tiempo,

$$y_{cm} = \frac{m_2}{M} h + \frac{m_2/M \;\; v_{o2}}{m_1/M \;\; v_{o1}} x_{cm} - \frac{1}{2} \frac{g}{\frac{m_1^2}{M^2} \; v_{o1}^2} x_{cm}^2$$

$$y_{cm} = \frac{m_2}{M} h + \frac{m_2 \; v_{o2}}{m_1 \; v_{o1}} x_{cm} - \frac{1}{2} \frac{g\, M^2}{m_1^2 \; v_{o1}^2} x_{cm}^2$$

se tiene una trayectoria parabólica.

El tiempo que demora el CM en llegar al nivel $y = 0$, será:

$$y_{cm} = \frac{m_2}{M} h + \frac{m_2}{M} v_{o2} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

resolviendo:

$$\frac{1}{2}\, gMt^2 - m_2 v_{o2}\, t - m_2 h = 0$$

$$t^2 - 2\,\frac{m_2\ v_{o2}}{M\ g}\, t - 2\,\frac{m_2\ h}{M\ g} = 0$$

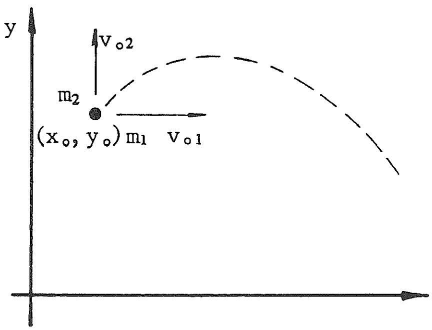
$$t = \frac{m_2\ v_{o2}}{M\ g} \pm \sqrt{\frac{m_2^2\ v_{o2}^2}{M^2\ g^2} + 2\,\frac{m_2 h}{M\ g}}$$

$$t = \frac{1}{M\ g}\left(m_2\ v_{o2} + \sqrt{m_2^2\ v_{o2}^2 + 2Mg\ m_2 h} \right)$$

Tomando solamente el signo más que corresponde a la solución positiva, puesto que se tiene: $m_2\ v_{o2} < \sqrt{m_2^2 v_{o2}^2 + 2Mg\ m_2 h}$.

La solución matemática negativa corresponde a la extensión de la trayectoria hacia atrás cuando intersecta el eje x.

7. En un punto del espacio $(x_o, y_o, 0)$ se encuentra en reposo una masa M. Luego, en un instante $t = 0$, se divide en 2 partes de masas m_1 y m_2 con velocidades $v_{o1}\hat{i}$ y $v_{o2}\hat{j}$ respectivamente.
Determinar la aceleración $\bar{a}_{(t)}$, velocidad $\bar{v}_{(t)}$, posición $\bar{r}_{(t)}$ y la trayectoria de centro de masas.



Posición inicial del CM :

$$\bar{r}_{o_{cm}} = x_o\hat{i} + y_o\hat{j}$$

velocidad inicial del CM :

$$\bar{v}_{o_{cm}} = \frac{m_1 \bar{v}_{o1} + m_2 \bar{v}_{o2}}{M}$$

$$\bar{v}_{o_{cm}} = \frac{m_1}{M}\, v_{o1}\,\hat{i} + \frac{m_2}{M}\, v_{o2}\,\hat{j}$$

Sobre el CM actúa la atracción gravitacional (ver problema anterior), luego:

$$- Mg\hat{j} = M\bar{a}_{cm} \implies \bar{a}_{cm} = - g\hat{j}$$

$$\bar{v}_{cm} = \bar{v}_{o\,cm} + \bar{a}_{cm} t \implies \bar{v}_{cm} = \left(\frac{m_1}{M} v_{o1}\right)\hat{i} + \left(\frac{m_2}{M} v_{o2} - gt\right)\hat{j}$$

$$\bar{r}_{cm} = \bar{r}_{o\,cm} + \bar{v}_{o\,cm} t + \frac{1}{2}\bar{a}_{cm} t^2 \implies \bar{r}_{cm} = \left(x_o + \frac{m_1}{M} v_{o1} t\right)\hat{i} + \left(y_o + \frac{m_2}{M} v_{o2} t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{j}$$

trayectoria, eliminando el tiempo de las ecuaciones paramétricas:

$$x_{cm} = x_o + \frac{m_1}{M} v_{o1} t \implies t = \frac{M(x_{cm} - x_o)}{m_1 \; v_{o1}}$$

$$y_{cm} = y_o + \frac{m_2}{M} v_{o2} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_o + \frac{m_2}{M} v_{o2} \frac{M(x_{cm} - x_o)}{m_1 \; v_{o1}} - \frac{1}{2} g \frac{M^2 (x_{cm} - x_o)^2}{m_1^2 \; v_{o1}^2}$$

$$(y_{cm} - y_o) = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_{o2}}{v_{o1}} (x_{cm} - x_o) - \frac{1}{2} \frac{g \; M^2 (x_{cm} - x_o)^2}{m_1^2 \; v_{o1}^2}$$

Movimiento parabólico.

8. Tres partículas de masas: $m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$ y $m_3 = 3kg$, tienen como vectores posición:

$\bar{r}_1 = 5t\hat{i} - 2t\,\hat{j} + (3t - 2)\hat{k}$

$\bar{r}_2 = (2t - 3)\hat{i} + (12 - 5t^2)\hat{j} + (4 + 6t - 3t^3)\hat{k}$

$\bar{r}_3 = (2t - 2)\hat{i} + (t^2 + 2)\hat{j} - t^3\hat{k}$

donde, para t el tiempo en segundos, la posición r en centímetros.

Encontrar:

-La cantidad de movimiento lineal total del sistema.

-Analizar si el sistema es aislado o no.

- posición del centro de masas:

$$\bar{R} = 2\,[5t\hat{i} - 2t^2\hat{j} + (3t - 2)\hat{k}] + 1\,[(2t - 3)\hat{i} + (12 - 5t^2)\hat{j} + (4 + 6t - 3t^3)\hat{k}] + 3\,[(2t - 1)\hat{i} + (t^2 + 2)\hat{j} - t^3\hat{k}]/(2 + 1 + 3)$$

$$\bar{R} = [(3t - 1)\hat{i} + (-t^2 + 3)\hat{j} + (-t^3 + 2t)\hat{k}] \quad cm$$

- velocidad del centro de masas:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{R}}{dt} = [3\hat{i} - 2t\hat{j} - (3t^2 - 2)\hat{k}] \quad cm/s$$

- cantidad de movimiento lineal total del sistema:

$\bar{P} = M\bar{V} = 6[3\hat{i} - 2t\hat{j} - (3t^2 - 2)\hat{k}] = [18\hat{i} - 12t\hat{j} - 6(3t^2 - 2)\hat{k}]$ kg cm/s

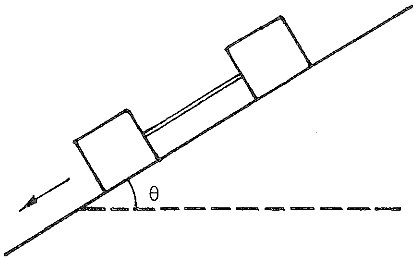
derivando:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -12\hat{j} - 36t\hat{k} \neq 0 \implies P \neq \text{constante.}$$

luego no es un sistema aislado,

$$\bar{F}^{ext} = [-12\hat{j} - 36t\hat{k}] \text{ kg cm/s}^2 = [-0.12\hat{j} - 0.36t\hat{k}] \text{ N}$$

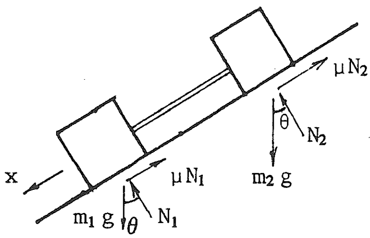
9. Considere el sistema de dos partículas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable como se muestra en la figura. Si las masas resbalan bajo la influencia de la gravedad, encontrar la aceleración del sistema en términos de m_1, m_2, θ y de los coeficientes de fricción cinéticos μ_1 y μ_2.



Aplicando la Ley de Newton al sistema:

$$F_x^{ext} = M\frac{d^2x_{cm}}{dt^2} = M\,a_{x_{cm}}$$

se tiene:



$$m_1 g\,\text{sen}\,\theta - \mu_1 m_1 g\cos\theta + m_2 g\,\text{sen}\,\theta - \mu_2 m_2 g\cos\theta = (m_1 + m_2)a_{x_{cm}}$$

$$a_{x_{cm}} = \frac{(m_1 + m_2)g\,\text{sen}\,\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g\cos\theta}{(m_1 + m_2)}$$

10. Un hombre de 900N de peso está de pie en una superficie de fricción despreciable y da un puntapie a una piedra de 0.5N que está a sus pies, arrojándola con una velocidad de 3m/s., ¿qué velocidad adquiere el hombre?

La cantidad de movimiento en el sistema (hombre-piedra) se conserva, pues no hay fuerzas externas actuando sobre él; $\bar{P}$ = const.
La cantidad de movimiento total antes y después es cero, dado que ambos están inicialmente en reposo, $\bar{P} = 0$.
Teniéndose sólo movimiento horizontal:

$$m_h v_h + m_p v_p = 0$$

$$v_h = -\frac{m_p}{m_h} v_p = -\frac{W_p/g}{W_h/g} v_p = -\frac{W_p}{W_h} v_p = -\frac{0.5}{900} \times 3 = -\frac{1}{600}$$

$$v_h = -0.0017 \text{ m/s}$$

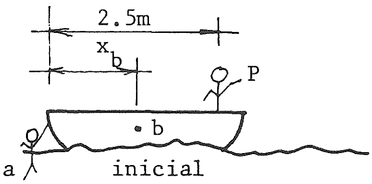
La velocidad del hombre es en sentido opuesto al movimiento de la piedra.

11. Una persona que pesa 70 kg. está pescando sobre el extremo de un bote estacionario que pesa 200kg. Su ayudante, que no sabe nadar, está en el agua cogido del extremo opuesto; cuando se suelta, el pescador corre 2.5 metros hasta alcanzar éste extremo. ¿A qué distancia del ayudante ahogándose se encontrará el pescador cuando alcance el extremo del bote?

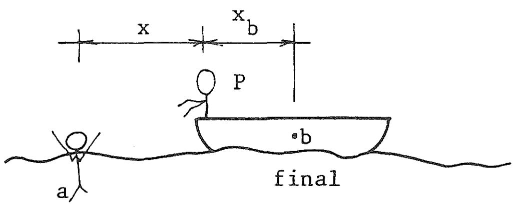
Tomemos como punto de referencia la posición del ayudante en el extremo del bote, al soltarse seguirá en la misma posición. Con respecto a él consideremos la posición del centro de masas del sistema pesacador-bote en la situación inicial y final, ver figuras

- inicial:

$$x_{CM_i} = \frac{m_b x_b + m_p (2.5)}{m_b + m_p}$$



- final:



$$x_{CM_f} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

Por conservación,la posición del centro de masas del sistema es invariante, considerando que no hay fuerzas externas aplicadas al sistema y que inicialmente ambos, P y b, están en reposo:

$$\bar{P} = Mv_{cm} = 0 \Longrightarrow x_{CM_i} = x_{CM_f}$$

Se tiene:

$$\frac{m_b\ x_b + m_p(2.5)}{m_b + m_p} = \frac{m_b\ (x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

$$m_p(2.5) = (m_b + m_p)x$$

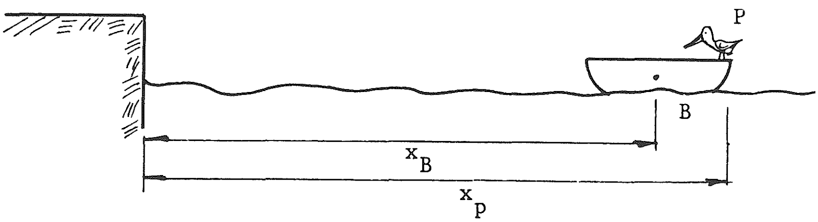
$$x = \frac{m_p(2.5)}{m_b + m_p} = \frac{W_{p/g}(2.5)}{(W_b + W_p)/g} = \frac{W_p(2.5)}{W_b + W_p} =$$

$$x = \frac{70 \times 2.5}{(200 + 70)} = \frac{175}{270} = \frac{35}{54} = 0.648 \text{ m}$$

El pescador estará a 0.65 metros del ayudante.

12. Un pelícano que pesa 200N está de pie en un bote que se encuentra a 6 metros del desembarcadero. Camina 2.5 metros en el bote hacia el desembarcadero y se detiene. El bote pesa 2000N y no hay fricción con el agua. ¿A qué distancia del desembarcadero estará el bote cuando el pelícano se detenga?

Considerando las distancias del bote x_B y del pelícano x_P respecto al desembarcadero como se muestra en la figura.



En el sistema Bote-Pelícano.

- Posición inicial del CM:

$$X_{CM_i} = \frac{m_B X_{Bi} + m_P X_{Pi}}{m_B + m_P}$$

- Después de haber caminado el pelícano, la posición final del CM es:

$$X_{CM_f} = \frac{m_B x_{Bf} + m_P X_{Pf}}{m_B + m_P}$$

Como no hay fuerzas externas aplicadas al sistema: $\bar{P}$ = const. y como inicialmente ambos, B y P están en reposo: $\bar{v}_{cm} = 0$, luego : X_{CM} = const. e igualando $X_{CM_i} = X_{CM_f}$, se tiene:

$$m_B(X_{Bi} - X_{Bf}) + m_P (X_{Pi} - X_{Pf}) = 0$$

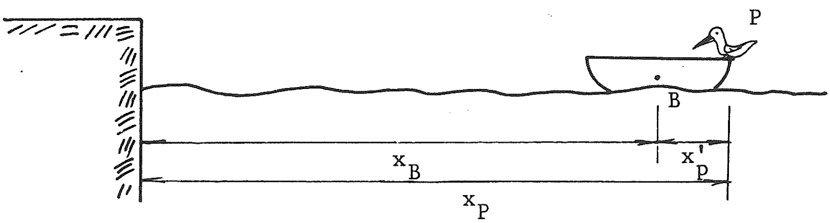
$$W_B(X_{Bi} - X_{Bf}) + W_P(X_{Pi} - X_{Pf}) = 0$$

Como: $\frac{W_B}{W_P} = 10$, se obtiene:

$$10(X_{Bi} - X_{Bf}) + (X_{Pi} - X_{Pf}) = 0$$

$$(X_{Pi} - X_{Pf}) = - 10(X_{Bi} - X_{Bf})$$

Sabemos además que hay una relación entre la posición del pelícano respecto al bote y respecto de tierra. Como la distancia que recorre el pelícano d = 2.5m es sobre el bote hay que relacionar las posiciones iniciales y finales del bote y pelícano. Llamando X'_P la posición del Pelícano respecto al Bote, ver figura. La diferencia: $X'_{Pi} - X'_{Pf} = d$.



se tienen: $X_P = X'_P + X_B$

la diferencia de posición inicial y final, será:

$$X_{Pi} - X_{Pf} = X'_{Pi} + X_{Bi} - X'_{Pf} - X_{Bf} = (X'_{Pi} - X'_{Pf}) + (X_{Bi} - X_{Bf})$$

$$X_{Pi} - X_{Pf} = d + (X_{Bi} - X_{Bf})$$

reemplazando en la expresión obtenida por conservación, queda:

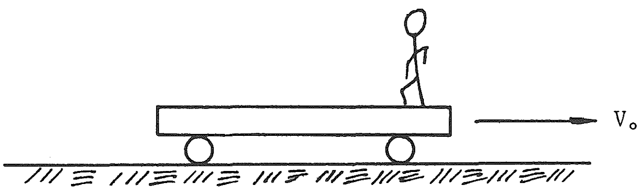
$$d = -11(X_{Bi} - X_{Bf})$$

$$X_{Bi} - X_{Bf} = -\frac{2.5}{11}\ m = -0.227\ m$$

$$X_{Bf} = X_{Bi} + 0.227 = 6.0 + 0.227 = 6.227$$

El bote estará a 6.23 m del desembarcadero.

13. Una plataforma de ferrocarril de masa M puede rodar sin fricción en una vía recta horizontal. Inicialmente un hombre de masa m está de pie en la plataforma que se mueve hacia la derecha con una velocidad V_o como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cambio de velocidad de la plataforma si el hombre corre hacia la izquierda, de modo que su velocidad con respecto a la plataforma es v_r cuando está a punto de saltar por el extremo izquierdo.



La cantidad de movimiento antes que comience a correr el hombre es:

$$P_i = MV_o + m\ V_o$$

La cantidad de movimiento cuando el hombre tiene velocidad v_r respecto a la plataforma y en ese instante la plataforma tiene una velocidad V, es: $P_f = MV + m(V - v_r)$

teniendo en cuenta que la velocidad de la persona respecto a tierra en ese instante es: $V - v_r$.

Por conservación de la cantidad de movimiento, $P_i = P_f$:

$$(M + m)V_o = MV + m(V - v_r)$$

$$(M + m)V_o = (M + m)V - mv_r$$

$$V = V_o + \frac{m}{(M + m)} v_r$$

o sea, la velocidad aumenta en: $\frac{m}{(M + m)} v_r$

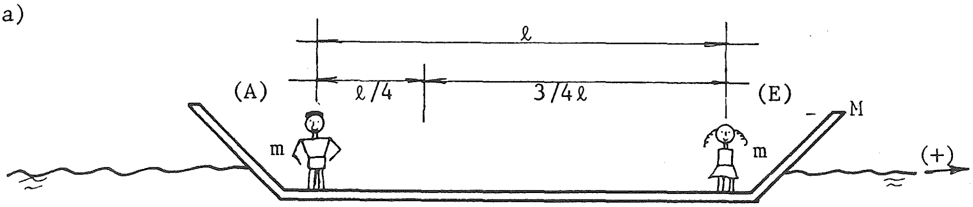
y el cambio de velocidad es:

$$V - V_o = \frac{m}{(M + m)} v_r$$

14. Adan y Eva están parados sobre un bote de masa M en reposo en aguas tranquilas, distantes ℓ metros uno del otro. En el momento en que los dos se encuentran con las miradas, empiezan a correr cada uno al encuentro del otro con velocidades constantes respecto al bote.
Si la velocidad de Adan es v_o y el encuentro se efectúa a $\ell/4$ metros de él, teniendo ambos igual masa, encontrar.
a) La velocidad del bote respecto a tierra antes del encuentro.
b) Si al encontrarse los dos vuelven a quedar parados, ¿cuál es la velocidad del bote?
c) Cuánto avanza el bote desde que empiezan a correr hasta que se juntan.

---

a)



velocidad de Adan: $v_A = v_o$=constante

tiempo transcurrido para el encuentro: $t = \frac{\ell/4}{v_o} = \frac{\ell}{4\ v_o}$

velocidad de Eva: $v_E = \frac{-3/4\ \ell}{t} = \frac{-3/4\ \ell}{\ell/4v_o} = -\ 3v_o$

Como: $\bar{F}_x^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P}_x$ = constante y como parten del reposo: $\bar{P}_x = 0$.

Siendo V la velocidad del bote respecto a tierra, se tiene:

$$m(v_o + V) + m(-3\ v_o + V) + M\ V = 0$$

$$-\ 2m\ v_o + (M + 2m)V = 0$$

$$V = (\frac{2\ m}{M + 2m})v_o$$

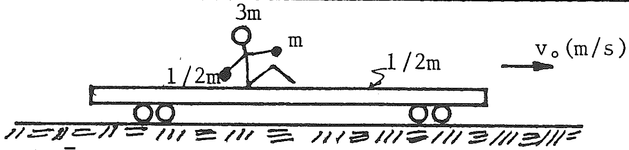
b) Teniéndose en todo momento $\bar{P}_x = 0$, cuando A y E se detienen:

$M\ V = 0 \Longrightarrow V = 0$, el bote vuelve a quedar en reposo.

c) El espacio recorrido por el bote será:

$$e = Vt = \frac{2m}{M + 2m} v_o \frac{\ell}{4v_o} = (\frac{m}{M + m}) \frac{\ell}{2}$$

15. Una persona de masa 3m se encuentra sentada sobre la plataforma de un vagón de masa $\frac{1}{2}$ m que se mueven juntos con velocidad v_o(m/s) sobre una superficie horizontal sin fricción. La persona lleva consigo en cada mano 2 bolas de masas m y $\frac{1}{2}$ m. En un determinado instante lanza horizontalmente la bola de masa m hacia adelante con velocidad v_o(m/s) medida por el lanzador y luego en un instante posterior lanza horizontalmente la otra bola de masa $\frac{1}{2}$ m hacia atrás con velocidad $-\ v_o$(m/s), también medida por el lanzador.
Encontrar el impulso total sobre la persona debido al lanzamiento de ambas masas.



Como $\bar{F}_x^{\ ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P}_x$ = constante.

- 1º lanzamiento:

$$(3m + \frac{1}{2} m + m + \frac{1}{2} m)v_o = (3m + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m)v_1 + m (v_1 + v_o)$$

$$v_1 = \frac{4}{5} v_o \ (m/s)$$

- 2º lanzamiento:

$$(3m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} m)v_1 = (3m + \frac{1}{2} m)v_2 + \frac{1}{2} m(v_2 - v_o)$$

$$4m \frac{4}{5} v_o = \frac{8}{2} m v_2 - \frac{1}{2} m v_o$$

$$v_2 = \frac{37}{40} v_o$$

El impulso total para la persona de masa 3m, será:

$$J = \Delta p = p_f - p_i = 3m(\frac{37}{40} v_o - v_o) = - \frac{9}{40} m v_o \ \text{Ns}$$

16. Una vagoneta cargada que pesa 1000kg se mueve sobre una vía recta horizontal con una velocidad de 30km/hora. Calcular la velocidad que adquiere la vagoneta en los siguientes casos:

a) Se arroja hacia atrás un peso de 50kg con una velocidad de 30km/h, relativa al suelo.

b) Desde afuera y por delante se arroja dentro de la vagoneta un peso de 50kg. con una velocidad de 30km/h. relativa a la vagoneta.

c) Se arroja un peso de 50kg en dirección vertical hacia arriba y con una velocidad de 30km/h relativa a la vagoneta.

d) Se arroja 50kg en dirección perpendicular a las vías, horizontalmente y con una velocidad de 30km/h relativa a la vagoneta.

Como en la dirección de la vía no actúan fuerzas externas, se tiene conservación de la cantidad de movimiento lineal en todos los casos, esto es:

$$\bar{P}_{antes} = \bar{P}_{después}$$

apliquemos esta igualdad en la dirección de la vía en cada uno de los casos:

a) $\Longrightarrow$ $1000 \times 30 = (1000 - 50)V - 50 \times 30$

de aquí:

$$V = \frac{30,000 + 1,500}{950} = \frac{31.500}{950} = 33.16 \text{ km/h}$$

b) $\Longrightarrow$ $1000 \times 30 + 50(30 - 30) = (1000 + 50)V$

de aquí:

$$V = \frac{30,000}{1050} = 28.57 \text{ km/h}$$

c) $\Longrightarrow$ $1000 \times 30 = (1000 - 50)V$

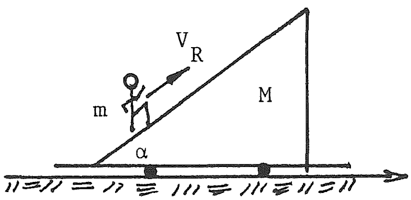
de aquí:

$$V = \frac{30,000}{950} = 31.58 \text{ km/h}$$

d)En la dirección de la vía no hay diferencia con el caso anterior, luego:

$$V = 31.56 \text{ m/h}$$

17. Una cuña de ángulo α y masa M se encuentra apoyada en el suelo sin fricción. Una persona de masa m comienza a subir por el plano inclinado de la cuña con una velocidad constante V_R relativa a la cuña. Encontrar la velocidad V de la cuña respecto a tierra. Analizar el resultado obtenido para: $m \ll M$ y para: $m \gg M$.



La cuña tiene libertad de movimiento horizontalmente.

Como $\bar{F}_x^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P}_x$ = constante

e inicialmente m y M están en reposo:

$$\bar{P}_x = 0$$

Cuando m sube, su velocidad respecto a tierra es: $\bar{V} + \bar{V}_r$, en la dirección x: $V + V_r \cos\alpha$, luego se tiene:

$$0 = MV + m(V + V_r \cos\alpha) \Longrightarrow V = -\frac{m V_R \cos\alpha}{m + M} = -\frac{V_R \cos\alpha}{1 + \frac{M}{m}}$$

la cuña se moverá hacia atrás.

- Si $m \ll M \Longrightarrow V \approx 0$
- Si $m \gg M \Longrightarrow V \approx - V_R \cos\alpha$

18. Una locomotora que pesa 10,000 kg se mueve con una velocidad de 54km/h por un tramo de vía recta y horizontal y choca con otra máquina igual, que se encuentra detenida y la arrastra (se enganchan).

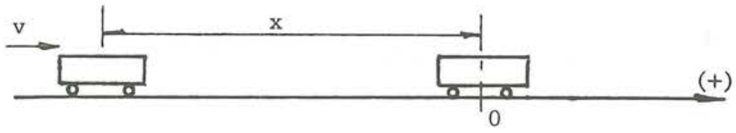
a) Hallar el centro de masas del sistema y su velocidad antes del choque.

b) ¿Cuál es la velocidad de ambos después del encuentro?

c) ¿Qué cantidad de energía cinética se pierde durante la colisión?

---

a) Considerando como referencia la posición de la locomotora detenida



La posición del centro de masas x_{cm} del sistema es:

$$x_{cm} = \frac{m(-x) + m(0)}{m + m} = -\frac{x}{2}$$

y su velocidad:

$$v_{cm} = \dot{x}_{cm} = -\frac{\dot{x}}{2} = \frac{v}{2} = \frac{54}{2} = 27 \text{ km/h}$$

b) Como las locomotoras al chocar se enganchan moviéndose juntas, se tiene una colisión totalmente plástica. Por conservación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$mv = (m + m)v_f$$

$$v_f = \frac{v}{2} = \frac{54}{2} = 27 \text{ km/h}$$

c) La pérdida de energía cinética será:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m + m)v_f^2 - \frac{1}{2} m v^2 = m\left(\frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta K = -\frac{1}{4} m v^2 = -\frac{1}{4} \times 10000\left(54 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 = -2500(15)^2 = -2500 \times 225$$

$$\Delta K = -56.25 \times 10^4 \text{ J}$$

El signo menos indica que se pierde energía cinética durante el choque.

19. Una bala de 5gr se dispara horizontalmente hacia un bloque de 5kg en el cual queda embebida. El bloque se mueve hacia adelante recorriendo una distancia de 20 cm antes de detenerse. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal sobre la cual descansa es 0.25, determinar la velocidad de la bala cuando llegó al bloque.

El trabajo no conservativo hecho por la fricción entre el bloque y la superficie es:

$$W_f = \bar{f}.\bar{d} = -\mu(m + M)gd$$

El cambio de energía cinética del bloque es:

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}(m + M)V = -\frac{1}{2}(m + M)V$$

Aplicando la Ley de Newton: $W_f = \Delta K$, se tiene:

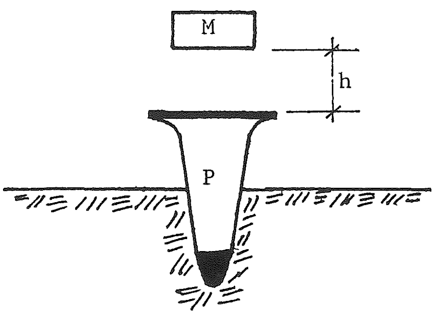
$$-\frac{1}{2}(m + M)V = -\mu(m + M)gd \Longrightarrow V = \sqrt{2\mu gd} = \sqrt{2 \times 0.25 \times 9.81 \times 0.2} =$$

$$= \sqrt{0.98} = 0.99 \text{ m/s}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal en el choque:

$$m\,v = (m + M)V \Longrightarrow v = (1 + \frac{M}{m})V = (1 + \frac{5000}{5})0.99 = 991 \text{ m/s}$$

20. La masa M = 750kg de un martillo se suelta desde una altura h=1.2 m sobre la cabeza de un pilote de 200kg. En cada impacto el pilote se introduce 0.1m en el suelo. Determinar la resistencia promedio que ejerce el suelo sobre el pilote en la penetración, considere que al caer la masa M del martillo sobre la cabeza del pilote P se efectúa un choque perfectamente plástico.



La velocidad que adquiere M en su caída antes del impacto es:

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = Mgh \Longrightarrow v_M = \sqrt{2g\,h}$$

Considerando choque plástico, la velocidad del pilote y M inmediatamente después del impacto será:

$$M\ v_M = (M + m)v_f$$

$$v_f = \frac{v_M}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{\sqrt{2 \times 9.81 \times 1.2}}{1 + \frac{200}{750}} = \frac{4.85}{1.27} = 3.82\ m/s$$

El trabajo no conservativo de la resistencia del suelo es:

$$W_{nc} = < \bar{F} > . \bar{d} = - < F > d = - 0.1 < F >$$

Cambio de energía mecánica:

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2}(M + m)v_f^2 - (M + m)gd$$

$$\Delta E = - \frac{1}{2}\, 950\ (3.82)^2 - 950 \times 9.81 \times 0.1 = - 7863.3\ J$$

igualando, de acuerdo a la Ley de Newton:

$$- 0.1 < \quad > = - 7863.3$$

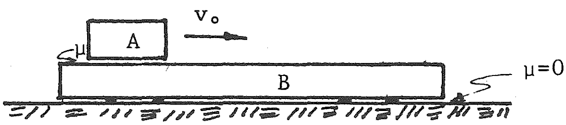
$$< F > = 78633 N$$

21. En la figura mostrada los bloques A y B tienen masas m_A y m_B respectivamente; el coeficiente de fricción cinético entre ambos es μ y entre B y el piso no hay fricción. Para $t = 0$ se tiene que: $v_A = v_o$ y $v_B = 0$. Luego de un intervalo de tiempo $t = t_f$ ambos bloques se mueven con igual velocidad. Utilizando el teorema trabajo-energía determinar:

a) Las distancias recorridas x_A y x_B, por A y B entre $t=0$ y $t=t_f$.

b) La distancia relativa x_r que recorre A sobre B, determinada por un observador fijo a B.

c) Comparar los resultados obtenidos en a) y b), comprobando que : $_r = x_A - x_B$.

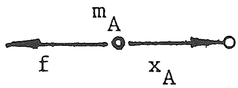


a) Con respecto a tierra :

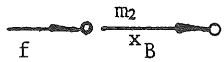
Conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$m_A\, v_o = (m_A + m_B) v_f \Longrightarrow v_f = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) v_o = \frac{v_o}{\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)}$$

teorema trabajo-energía: $W_f = \Delta K$.

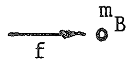
- bloque A: 

$$-\mu m_A g x_A = \frac{1}{2} m_A\, v_f^2 - \frac{1}{2} m_A\, v_o^2 \Longrightarrow x_A = \frac{v_o^2 - v_f^2}{2\,\mu g} = \frac{v_o^2\,(m_B^2 + 2m_A m_B)}{2\mu g\,(m_A + m_B)^2}$$

- bloque B: 

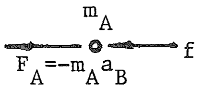
$$\mu m_A\, g x_B = \frac{1}{2} m_B\, v_f^{\,2} - 0 \Rightarrow x_B = \frac{m_B\, v_f^2}{2\mu m_A g} = \frac{m_A\, m_B\, v_o^2}{2\mu g\,(m_A + m_B)^2}$$

b) En el sistema no inercial fijo a B.

Aceleración del sistema respecto a tierra: 

$$\mu m_A g = m_B\, a_B \Rightarrow a_B = \frac{\mu\, m_A g}{m_B}$$

teorema Trabajo-Energía: $\Delta K = W_{nc}$

- bloque A: 

$$0 - \frac{1}{2}\, m_A v_o^2 = -(f + F_A) x_r = -(\mu m_A g + m_A \frac{\mu m_A g}{m_B})x_r = -\mu m_A g\, \left(\frac{m_A + m_B}{m_B}\right) x_r$$

$$x_r = \frac{m_B\, v_o^2}{2\mu g\,(m_A + m_B)}$$

c) Con los valores encontrados respecto a tierra, la distancia relativa de A con respecto a B será:

$$X_A - X_B = \frac{v_o^2\,(m_B^2 + 2m_A\, m_B)}{2\mu g\,(m_A + m_B)^2} - \frac{m_A\, m_B\, v_o^2}{2\,\mu g\,(m_A + m_B)^2}$$

$$X_A - X_B = \frac{v_o^2}{2\mu g\,(m_A + m_B)^2}\,(m_B^2 + 2m_A\, m_B - m_A\, m_B)$$

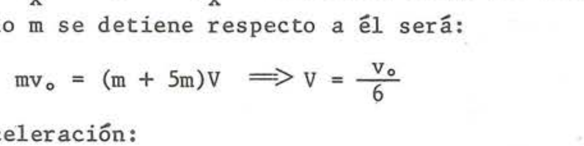
$$X_A - X_B = \frac{v_o^2 \quad m_B(m_A + m_B)}{2\mu g(m_A + m_B)^2}$$

$$X_A - X_B = \frac{v_o^2 \, m_B}{2\mu g(m_A + m_B)}$$

Comparando con el valor obtenido en el sistema no inercial B, se tiene, como era de esperar que:

$$X_r = X_A - X_B.$$

22. Una masa m es lanzada con una velocidad v_o horizontal sobre la plataforma de un vagón de masa M = 5m que se encuentra en ese instante en reposo. Después de recorrer la masa m una distancia sobre el vagón en un tiempo t=5s queda en reposo respecto a él.
El vagón puede deslizar libremente sobre el suelo.
Determinar:
a) Las velocidades de la masa y el vagón con respecto a tierra para un tiempo t cualquiera. Graficar.
b) La distancia d recorrida por la masa m sobre la plataforma y el coeficiente de rozamiento entre la masa y la plataforma del vagón.
c) La energía cinética inicial y final del sistema. Comparar resultados, ¿es lo esperado con relación al trabajo no conservativo hecho por la fricción?



---

a) Como: $\bar{F}_x^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P}_x$ = constante, luego la velocidad del vagón cuando m se detiene respecto a él será:

$$mv_o = (m + 5m)V \Longrightarrow V = \frac{v_o}{6}$$

su aceleración:

$$V = V_o + at \Longrightarrow a = \frac{V}{t} = \frac{v_o/6}{5} = \frac{v_o}{30}$$

su velocidad en función del tiempo para $0 < t < 5$:

$$V = \frac{v_o}{30}\, t$$

para la masa m, su aceleración relativa al vagón será:

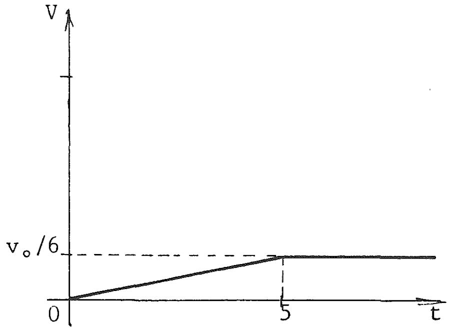
$$v_r = v_o + a_r t \Longrightarrow a_r = -\frac{v_o}{t} = -\frac{v_o}{5}$$

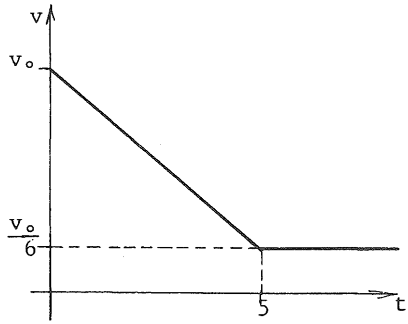
su velocidad relativa en función del tiempo para $0 < t < 5$:

$$v_r = v_o - \frac{v_o}{5}\, t = v_o(1 - \frac{1}{5}\, t)$$

su velocidad respecto a tierra para $0 < t < 5$:

$$v = v_r + V = v_o - \frac{v_o}{5}\, t + \frac{v_o}{30}\, t = v_o(1 - \frac{1}{6}\, t)$$





b) Distancia recorrida por m sobre la plataforma del vagón:

$$v_r^2 = v_o^2 + 2a_r d \Longrightarrow d = -\frac{v_o^2}{2a_r} = -\frac{v_o^2}{2(-\frac{v_o}{5})} = \frac{5}{2}\; v_o$$

coeficiente de fricción, aplicando la Ley de Newton al vagón, se tiene:

$$\xrightarrow{M}{}_{o} \qquad \mu mg = 5ma \Longrightarrow \mu = \frac{5a}{g} = \frac{5\,(\frac{v_o}{30})}{g} = \frac{v_o}{6g}$$

$f = \mu mg$

c) Energía cinética:

$$K_i = \frac{1}{2}\, m\, v_o^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}\,(m + 5m)\,(\frac{v_o}{6})^2 = \frac{1}{12}\, m\, v_o^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right) m_o\, v^2 = - \frac{5}{12}\, m\, v_o^2$$

trabajo no conservativo hecho por la fricción:

$$W_f = \bar{f}.\bar{d} = -\ (\mu mg)\left(\frac{5}{2}\, v_o \right) = -\left(m\, \frac{v_o}{6}\right)\left(\frac{5}{2}\, v_o \right) = -\ \frac{5}{12}\ m\, v_o^2$$

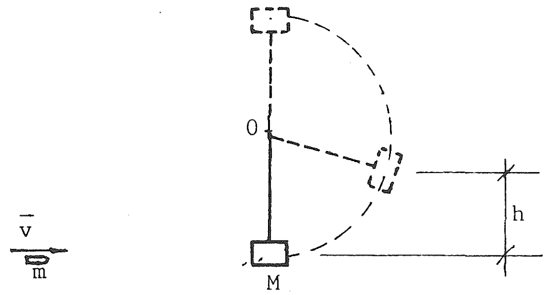
por supuesto se tiene que: $W_f = \Delta K$

23. Un proyectil de masa m = 10 gr., choca contra un péndulo balístico de masa M = 2kg y longitud ℓ = 2 metros. Como consecuencia del impacto, la bala se incrusta en el péndulo y cuyo centro de masa se eleva 12cm.

a) ¿Qué velocidad tenía el proyectil?

b) ¿Cuál sería la mínima velocidad necesaria para que el péndulo de una vuelta completa alrededor del punto de suspensión?

c) ¿Cómo varía ésta velocidad si la varilla del péndulo no es rígida? (cuerda)



a) La velocidad que tiene la masa (M + m) después del choque la podemos encontrar por conservación de energía entre ese instante y el instante que alcanza la altura h:

$$\frac{1}{2}\,(M + m)V^2 = (M + m)gh$$

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.12} = \sqrt{2.35} = 1.53 \text{ m/s}$$

y por conservación de la cantidad de movimiento en el choque inelástico podemos determinar la velocidad del proyectil.

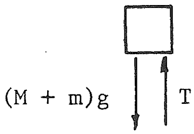
$$mv = (M + m)V$$

$$v = \frac{(M + m)}{m}\, V = \frac{2000 + 10}{10} \times 1.53 = 308 \text{ m/s}$$

b) Para que dé una vuelta completa, por conservación de energía entre el punto más bajo y el más alto, se tiene:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)g\,2\ell + \frac{1}{2}(M+m)V_a^2$$

considerando que la varilla del péndulo balístico es rígida, la velocidad V_a mínima es cero cuando $T = (M+m)g$, de acuerdo a la Ley de Newton:



$$\Rightarrow (M+m)g - T = (M+m)\frac{V_a^2}{\ell} \Rightarrow T = (M+m)g \Rightarrow V_a^2 = 0$$

luego la velocidad V mínima necesaria será:

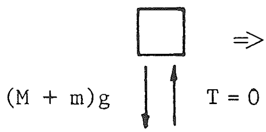
$$V = \sqrt{4g\ell} = \sqrt{4 \times 9.81 \times 2} = 8.86 \text{ m/s}$$

y por conservación de la cantidad de movimiento en el choque inelástico podemos determinar la velocidad mínima del proyectil:

$$m\,v = (M+m)V$$

$$v = \frac{M+m}{m}V = \frac{2000+10}{10} \times 8.86 = 1781 \text{ m/s}$$

c) Si la varilla no es rígida, la velocidad V_a mínima ya no es cero, será mínima cuando $T = 0$, de acuerdo a la Ley de Newton:



$$\Rightarrow (M+m)g + T = (M+m)\frac{V_a^2}{\ell} \Rightarrow T = 0 \Rightarrow V_a^2 = g\ell$$

la velocidad V mínima necesaria será:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)2g\ell + \frac{1}{2}(M+m)g\ell$$

$$V = \sqrt{5g\ell} = \sqrt{5 \times 9.81 \times 2} = \sqrt{98.1} = 9.90 \text{ m/s}$$

y la velocidad v mínima del proyectil será:

$$v = \frac{M+m}{v}V = \frac{M+m}{m}\sqrt{5g\ell} = 201 \times 9.90 = 1991 \text{ m/s}$$

Diferencia de v(c − b): $\Delta v = (\sqrt{5} - 2)\frac{M+m}{m}\sqrt{g\ell} = 210$ m/s

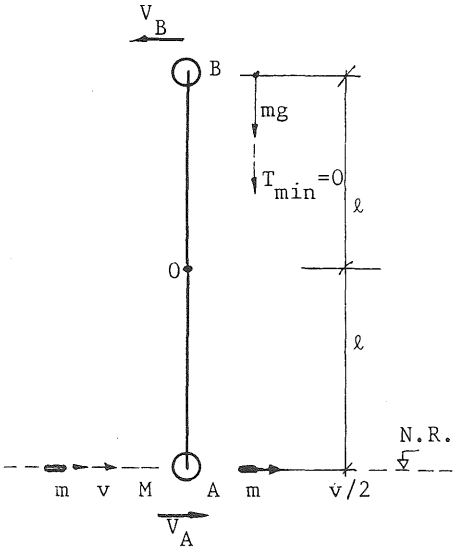
24. Una masa M cuelga del extremo de una cuerda de longitud ℓ. Una bala de masa m con velocidad v pasa rápidamente a través del bobo del péndulo saliendo con velocidad v/2, asuma que la trayectoria de la bala es en todo momento horizontal.

Encontrar:

a) El menor valor de v para el cual el bobo completará una circunferencia entera alrededor del punto de suspensión.

b) La velocidad del centro de masas del sistema bobo-bala cuando el bobo se encuentra en el punto más alto, para el caso de v mínimo.

c) ¿Se conserva la energía mecánica? Explique, en caso de pérdidas evaluadas.



a) En la posición A, por conservación de la cantidad de movimiento lineal en el choque, P_x=const. se tiene:

$$mv = MV_A + m\frac{v}{2} \Longrightarrow V_A = \frac{m}{M}\frac{v}{2}$$

En la posición B, la velocidad mínima para dar la vuelta, ver problema anterior, será:

$$Mg = M\frac{V_B^2}{\ell} \Longrightarrow V_{B_{min}} = \sqrt{g\ell}$$

Después del choque se conserva la energía mecánica, para el péndulo entre las posiciones A y B, se tiene:

$$\frac{1}{2}MV_A^2 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg\,2\ell = \frac{1}{2}M\,g\ell + Mg\,2\ell = \frac{5}{2}Mg\ell$$

$$V_{A_{min}} = \sqrt{5g\ell}$$

igualando ambos valores de V_A:

$$\frac{m}{M}\frac{v}{2} = \sqrt{5g\ell} \Longrightarrow v_{min} = 2\frac{M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

b) Velocidad del CM cuando el péndulo se encuentra en la posición B:

$$V_{x_{cm}} = \frac{m\,v/2 - MV_B}{m + M} = \frac{m\,v/2 - M\sqrt{g\ell}}{m + M}$$

$$\text{como : } M\sqrt{g\ell} = \frac{m\,v}{2\sqrt{5}} \quad , \quad y : v_{min} = 2\,\frac{M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

$$V_{x_{cm}} = \frac{m\,v/2 - \dfrac{m\,v}{2\sqrt{5}}}{m + M} = \frac{m\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)}{2(m + M)} \qquad v_{min} = \frac{M\sqrt{g\ell}\,(\sqrt{5} - 1)}{(M + m)}$$

$$V_{y_{cm}} = 0$$

c) Durante el choque las fuerzas internas realizan trabajo no conser-vativo.

La pérdida de energía cinética es:

$$K_i = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}\,MV_A^2 + \frac{1}{2}\,m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,M\,\frac{m^2}{M^2}\,\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}\,m\,\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{v^2}{4}\left(\frac{m}{M} + 1\right)$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}\,mv^2\left(\frac{m}{4M} + \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2}\,mv^2\,\frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right) = -\frac{1}{2}\,mv^2\left(\frac{3M - m}{4M}\right)$$

25. Una bola de 4kg que se desplaza a razón de 5m/s incide frontalmente sobre otra de 6kg que se encuentra en reposo y en el impacto pierde 30% de su energía cinética.
Encontrar las velocidades de cada bola después del choque. Luego, calcular el coeficiente de restitución.

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$4 \times 5 + 6 \times 0 = 4v_1 + 6v_2 \implies 2v_1 + 3v_2 = 10$$

Teniendo en cuenta la pérdida de energía cinética durante el choque, se tiene:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5^2 \times 0.7 = \frac{1}{2} \times 4 \times v_1^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times v_2^2 \implies 2v_1^2 + 3v_2^2 = 35$$

Resolviendo éstas dos expresiones:

$$2v_1^2 + \frac{1}{3}\,(3v_2)^2 = 35$$

$$2v_1^2 + \frac{1}{3}(10 - 2v_1)^2 = 35$$

$$6v_1^2 + 100 - 40\,v_1 + 4v_1^2 = 105$$

$$10v_1^2 - 40v_1 - 5 = 0$$

$$v_1^2 - 4v_1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$v_1 = 2 \pm \sqrt{2^2 + \frac{1}{2}} = 2 \pm \sqrt{\frac{9}{2}} = 2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2} \Longrightarrow \begin{cases} +\ 4.121 \\ -\ 0.121 \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{1}{3}(10 - 2v_1) = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\left(2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 2 \mp \sqrt{2} \Longrightarrow \begin{cases} +\ 0.586 \\ +\ 3.414 \end{cases}$$

La primera solución: $v_1 = 4.121$ m/s y $v_2 = 0.586$ m/s, no es aceptable en un choque real pues: $v_2 < v_1$; la velocidad relativa de separación después del choque sería negativa: $v_2 - v_1 = 0.586 - 4.121 = -3.535$ m/s, por definición al ser de separación, debe ser positiva.

La segunda solución: $v_1 = -\ 0.121$ m/s y $v_2 = 3.414$ m/s, si corresponde a un choque real, teniéndose como velocidad relativa de separación después del choque:

$v_{rs} = v_2 - v_1 = 3.414 - (-\ 0.121) = 3.535$ m/s

Como la velocidad relativa de aproximación antes del choque es:

$v_{ra} = 5 - 0 = 5$m/s, el coeficiente de restitución será:

$$e = \frac{v_{rs}}{v_{ra}} = \frac{3.535}{5} = 0.707$$

26. Un cañón dispara un proyectil con un ángulo de 45° con la horizontal y con una velocidad de salida de 140 m/s.

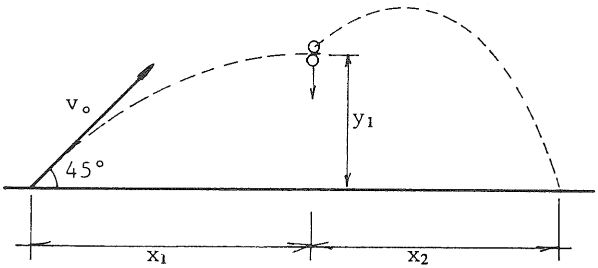
En el punto más alto de su trayectoria el proyectil explota y se divide en dos fragmentos de igual masa. Un fragmento cae verticalmente con una velocidad inicial de 100 m/s.

a) ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento?

b) ¿Qué diferencia hay con la distancia que alcanzaría el proyectil sin estallar?

---

a)



La velocidad vertical v_y al momento en que se encuentra a máxima altura es: $v_y = 0$

y el tiempo empleado será: $0 = v_o \text{ sen } 45° - gt_1$

$$t_1 = \frac{v_o \text{ sen } 45°}{g} = \frac{140 \times \sqrt{2}}{9.81 \times 2} = 10.1s$$

La velocidad horizontal es:

$$v_x = v_o \cos 45° = 140 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 99 \text{ m/s}$$

y las coordenadas del punto más alto serán:

$$x_1 = v_x t_1 = 99 \times 10.1 = 999.9m$$

$$y_1 = v_o \text{ sen } 45° \; t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$y_1 = 99 \times 10.1 - \frac{1}{2} 9.81 \times (10.1)^2$$

$$y_1 = 999.9 - 500.36 = 499.54 \text{ m}$$

En el instante que se produce la explosión, se conserva la cantidad de movimiento: (fuerza impulsiva mucho mayor que la fuerza externa de la gravedad).

$$m\bar{v} = \frac{m}{2} \bar{v}_1 + \frac{m}{2} \bar{v}_2$$

$$mv_x\hat{i} + mv_y\hat{j} = \frac{m}{2} v_{1x}\hat{i} + \frac{m}{2} v_{1y}\hat{j} + \frac{m}{2} v_{2x}\hat{i} + \frac{m}{2} v_{2y}\hat{j}$$

reemplazando valores:

$$99\hat{i} + 0\hat{j} = \frac{1}{2} 0\hat{i} - \frac{1}{2} 100\hat{j} + \frac{1}{2} v_{2x}\hat{i} + \frac{1}{2} v_{2y}\hat{j}$$

$$99\hat{\imath} = -50\hat{\jmath} + \frac{1}{2} v_{2x}\hat{\imath} + \frac{1}{2} v_{2y}\hat{\jmath} = \frac{1}{2} v_{2x}\hat{\imath} + (\frac{1}{2} v_{2y} - 50)\hat{\jmath}$$

de aquí obtenemos

$$99 = \frac{v_{2x}}{2} \Longrightarrow v_{2x} = 198 \text{ m/s}$$

$$0 = -50 + \frac{v_{2y}}{2} \Longrightarrow v_{2y} = 100 \text{ m/s}$$

La ecuación del recorrido vertical del segundo fragmento es:

$$y = y_1 + v_{2y}t - \frac{1}{2} gt^2$$

cuando y = 0, éste toca suelo, luego:

$$0 = 499.54 + 100t_2 - \frac{1}{2} 9.81 \times t_2^2 \Longrightarrow t_2^2 - 20.39t_2 - 101.84 = 0$$

y el tiempo transcurrido será:

$$t_2 = 10.20 \pm \sqrt{103.94 + 101.84} = 10.20 \pm 14.35$$

$$t_2 = 24.55 \text{ s}$$

La distancia en que toca suelo éste fragmento, con referencia al cañón es:

$$x = x_1 + x_2 = x_1 + v_{2x} t_2$$

$$x = 999.9 + 198 \times 24.55$$

$$x = 5860.8\text{m}$$

b) La distancia que alcanzaría el proyectil sin estallar sería:

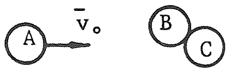
$$2x_1 = 2 \times 999.9 = 1999.8\text{m}$$

y la diferencia:

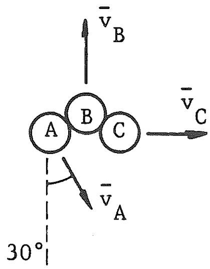
$$d = x - 2x_1 = 5860.8 - 1999.8 = 3861\text{m}$$

27. Sobre una mesa de billar, la bola A se mueve con una velocidad v_o=3m/s cuando choca con las bolas B y C que se encuentran en reposo una junto a la otra como se muestra en la figura. Después del choque, las tres bolas se mueven en las direcciones indicadas también en la fig. Determinar las velocidades que tienen después del choque las tres bo-

las. El choque es perfectamente elástico y las tres bolas idénticas.



(antes)



(después)

Conservación de la cantidad de movimiento lineal:

-Horizontal: $\xrightarrow{(+)}$ $m v_o = m v_A \operatorname{sen} 30° + m\, v_C \Longrightarrow v_o = \frac{1}{2} v_A + v_C$

-Vertical : $\uparrow (+)$ $0 = m\, v_B - m\, v_A \cos 30° \Longrightarrow 0 = v_B - \frac{\sqrt{3}}{2} v_A$

Conservación de la energía cinética (choque elástico):

$$\frac{1}{2} m\, v_o^2 = \frac{1}{2} m\, v_A^2 + \frac{1}{2} m\, v_B^2 + \frac{1}{2} m\, v_C^2 \Longrightarrow v_o^2 = v_A^2 + v_B^2 + v_C^2$$

Resolviendo estas 3 ecuaciones, se obtiene las velocidades pedidas:

$$v_o^2 = v_A^2 + \frac{3}{4} v_A^2 + (v_o - \frac{1}{2} v_A)^2 = 2v_A^2 + v_o^2 - v_o v_A$$

$$v_A = \frac{1}{2} v_o = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot v_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_o}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} v_o = 1.3 \text{ m/s}$$

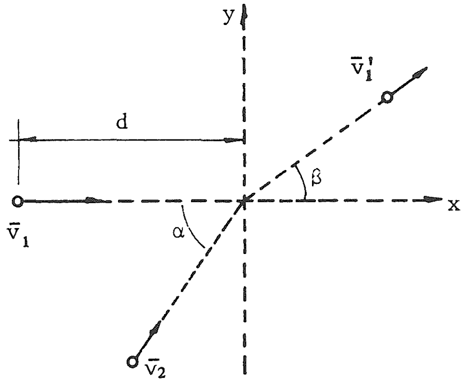
$$v_C = v_o - \frac{1}{2} v_A = v_o - \frac{1}{2} \frac{v_o}{2} = \frac{3}{4} v_o = 2.25 \text{ m/s}$$

28. En un parque de diversiones dos amigos juegan con los autitos chocadores. En cierto momento las direcciones de ambos vehículos forman un ángulo α. Un auto se dirige con velocidad $\bar{v}_1$ y el otro con velocidad $\bar{v}_2$ de modo tal que chocan. Después del choque el auto 1 sale con velocidad $\bar{v}_1'$ cuya dirección forma un ángulo β con la dirección que tenía. En la figura se indican los valores medidos.

a) Hallar la velocidad del auto 2 luego del impacto.

b) Determinar las ecuaciones paramétricas del movimiento del centro de masas, se conoce la posición inicial del auto 1.

c) ¿El choque es elástico?



$m_1 = m_2 = 200$ kg

$v_1 = 3$m/s , $v_2 = 1$m/s

$v_1' = 2$m/s

$\alpha = 54°$, $\beta = 36°$

d = 3m

---

a) Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\bar{p}_{antes} = \bar{p}_{después} \Longrightarrow m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2'$$

se conocen : $\bar{v}_1 = 3\hat{i}$

$$\bar{v}_2 = 1 \times \cos 54°\hat{i} + 1 \text{ sen } 54°\hat{j} = 0.588\hat{i} + 0.809\hat{j}$$

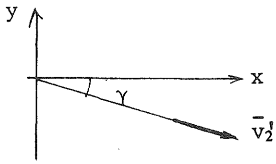
$$\bar{v}_1' = 2 \times \cos 36°\hat{i} + 2 \times \text{sen } 36°\hat{j} = 1.618\hat{i}+1.176\hat{j}$$

$$m_1 = m_2$$

reemplazando:

$$3\hat{i} + 0.588\hat{i} + 0.809\hat{j} = 1.618\hat{i} + 1.176\hat{j} + \bar{v}_2'$$

$$\bar{v}_2' = 1.97\hat{i} - 0.367\hat{j}$$



de módulo, dirección y sentido:

$$v_2' = \sqrt{1.97^2 + 0.367^2} = \sqrt{4.016} = 2\text{m/s}$$

$$\text{tg}\gamma = -\frac{0.367}{1.97} = -0.186 \Longrightarrow \gamma = 10.55°$$

b) Como se conoce la posición inicial de la masa m_1, para determinar la posición inicial del centro de masas es necesario conocer la posición inicial de la masa m_2.

El tiempo que demora m_1 para llegar al punto de choque es:

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

éste es el mismo tiempo que demora m_2 desde su posición inicial para que se encuentre con m_1 y se produzça el choque. Luego,la posición inicial de m_2 es:

$$x_{o2} = - v_x t = - 0.588x1= -0.588m$$

$$y_{o2} = - v_y t = -0.809x1 = - 0.809m$$

y la posición inicial del CM es:

$$x_{o\,cm} = \frac{m_1 x_{o1} + m_2 \; x_{o2}}{m_1 + m_2} = \frac{-3 - 0.588}{2} = - 1.794m$$

$$y_{o\,cm} = \frac{m_1 \; y_{o1} + m_2 y_{o2}}{m_1 + m_2} = \frac{0 - 0.809}{2} = - 0.405m$$

Las ecuaciones paramétricas del movimiento del centro de masas serán:

- Antes del choque:

$$x_{cm} = x_{o\,cm} + \frac{m_1 (v_{1x} t) + m_2 (v_{2x} t)}{m_1 + m_2} = - 1.794 + \frac{3t + 0.588t}{2}$$

$$x_{cm} = - 1.794 + 1.794t = 1.794(t - 1)$$

$$y_{cm} = y_{o\,cm} + \frac{m_1 (v_{1y} t) + m_2 (v_{2y} t)}{m_1 + m_2} = - 0.405 + \frac{0 + 0.809t}{2}$$

$$y_{cm} = - 0.405 + 0.405t = 0.405(t - 1)$$

- Después del choque:

$$x_{cm} = \frac{m_1 (v'_{1x} t) + m_2 (v'_{2x} t)}{m_1 + m_2} = \frac{1.618t + 1.97t}{2}$$

$$x_{cm} = 1.794t$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 (v'_{1y} t) + m_2 (v'_{2y} t)}{m_1 + m_2} = \frac{1.176t - 0.367t}{2}$$

$$y_{cm} = 0.405t$$

c) La energía cinética antes del choque es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times (3^2 + 1^2) = 1{,}000J$$

La energía cinética después del choque es:

$$K_f = \frac{1}{2} m\, v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times (2^2 + 2^2) = 800J$$

El cambio de energía cinética es:

$$\Delta K = K_f - K_i = 800 - 1000 = -200J$$

Hay pérdida de energía cinética, luego, el choque no es elástico.

29. Un cuerpo de 50kg se mueve con una velocidad $\bar{v} = 15\hat{i}$ (m/s). Al pasar por el punto P(30, 10, -20)m se divide en tres partes de masas : $m_A = 12kg$, $m_B = 18kg$ y $m_C = 20kg$. Si las velocidades que tienen A y B después de la división son: $\bar{v}_A = 20\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ (m/s) y $\bar{v}_B = 10\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ (m/s), encontrar la posición de C luego de 6 segundos si no actúa sobre ella ninguna fuerza. ¿Se conserva la energía cinética en la división?,¿aumenta o disminuye?

Como en la división: $\bar{F}^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P}$ = constante. Luego :

$$50(15\hat{i}) = 12(20\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + 18(10\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + 20(c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k})$$

$$750\hat{i} = 20(21 + c_1)\hat{i} + 20(1.5 + c_2)\hat{j} + 20(-2.7 + c_3)$$

igualando componentes obtenemos la velocidad de c:

$$\left.\begin{array}{l} 750 = 20(21 + c_1) \Longrightarrow c_1 = 16.5 \text{ m/s} \\ 0 = 20(1.5 + c_2) \Longrightarrow c_2 = -1.5 \text{ m/s} \\ 0 = 20(-2.7 + c_3) \Longrightarrow c_3 = 2.7 \text{ m/s} \end{array}\right\} \quad \bar{v}_c = 16.5\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.7\hat{k}\,(m/s)$$

Como no actúa ninguna fuerza sobre c, su posición será:

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \bar{v}_c t = 30\hat{i} + 10\hat{j} - 20\hat{k} + 99\hat{i} - 9\hat{j} + 16.2\hat{k}$$

$$\bar{r} = 129\hat{i} + 1\hat{j} - 3.8\hat{k} \text{ (m)}$$

Luego, estará en el punto: P'(129, 1, - 3.8)m

Energía Cinética:

$$K_i = \frac{1}{2}\,50(15)^2 = 5625\text{J}$$

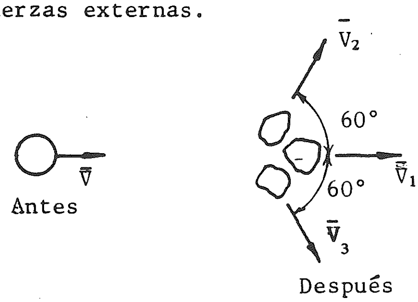
$$K_f = \frac{1}{2}\,12(20^2 + 2^2 + 3^2) + \frac{1}{2}\,18(10^2 + 3^2 + 5^2) + \frac{1}{2}\,20(16.5^2 + 1.5^2 + 2.7^2)$$

$$K_f = 6 \times 413 + 9 \times 134 + 10 \times 281.79 = 6502 \text{ J}$$

Se tiene: $K_f > K_i$, la energía cinética aumenta: $\Delta K = 877\text{J}$

30. Un misil en vuelo explota en tres partes iguales. Una parte continua a lo largo de su línea original de vuelo y las otras dos van en direcciones cada una inclinada 60° a ambos lados de la trayectoria original. La energía liberada en la explosión es dos veces más grande que la energía que tenía el misil en el momento de la explosión Determinar la energía cinética de cada fragmento inmediatamente después de la explosión.

Tenemos las direcciones como se indica en el diagrama.En el momento de la explosión se desprecian las fuerzas externas. Por lo tanto, el momentum lineal debe conservarse en las 3 direcciones x, y, z, independientemente, de allí que $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$ y $\bar{V}$ deben ser coplanares y $V_2 = V_3$.



Teniéndose en la dirección original:

$$MV = \frac{1}{3}MV_1 + \frac{1}{3}MV_2\cos 60° + \frac{1}{3}MV_3\cos 60° = \frac{1}{3}M(V_1 + \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2})$$

$$V = \frac{1}{3}(V_1 + V_2) \quad \ldots \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado, se sabe que la energía cinética es:

$$K_i = \frac{1}{2}MV^2 \implies K_f = 2\,\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{3}{2}MV^2$$

Como también:

$$K_f = \frac{1}{2}\frac{M}{3}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}V_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}V_3^2 = \frac{1}{6}M(V_1^2 + 2V_2^2)$$

igualando ambos valores de K_f:

$$\frac{3}{2} MV^2 = \frac{1}{6} M(V_1^2 + 2V_2^2) \Longrightarrow V^2 = \frac{1}{9} (V_1^2 + 2V_2^2) \qquad \ldots \qquad (II)$$

de (I) y (II) se obtiene:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 (V_1 + V_2)^2 = \frac{1}{9} (V_1^2 + 2V_2^2)$$

$$(V_1 + V_2)^2 = V_1^2 + 2V_2^2$$

$$V_1^2 + 2V_1 V_2 + V_2^2 = V_1^2 + 2V_2^2$$

$$V_2 = 2V_1 \Longrightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} (V_1 + V_2) = V \\ V_2 = 2V_1 = 2V \\ V_3 = V_2 = 2V \end{cases}$$

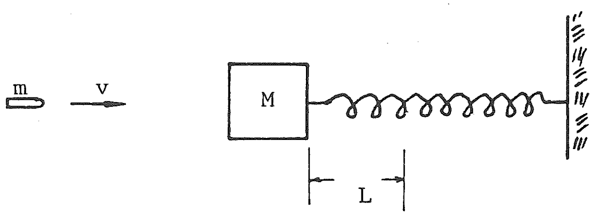
finalmente:

$$K_{1f} = \frac{1}{2} \frac{M}{3} V^2 = \frac{1}{6} MV^2$$

$$K_{2f} = \frac{1}{2} \frac{M}{3} (2V)^2 = \frac{2}{3} MV^2$$

$$K_{3f} = K_{2f} = \frac{2}{3} MV^2$$

31. Calcular la velocidad v de una bala de masa m que al introducirse en un bloque de masa M hace que éste se mueva comprimiendo una longitud L el resorte que se muestra en la figura. Considere que el bloque se mueve sin fricción.



Al introducirse la bala en el bloque se tiene un choque completamente Ineslástico, si llamamos V a la velocidad que adquiere el conjunto (m + M) después del choque, por conservación de la cantidad de movimiento lineal se tiene:

$$mv = (m + M)V \quad \ldots \qquad (I)$$

y el conjunto (m + M) adquiere una energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}(m + M)V^2$$

Cuando se detiene, esta energía cinética se convierte en energía potencial del resorte, esto es:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}kL^2 \implies (m + M)V^2 = kL^2 \quad \ldots \qquad (II)$$

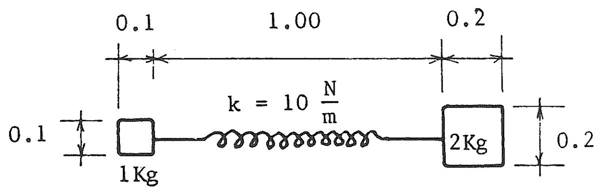
De (I) y (II)

$$(m + M)\frac{m^2 v^2}{(m + M)^2} = kL^2$$

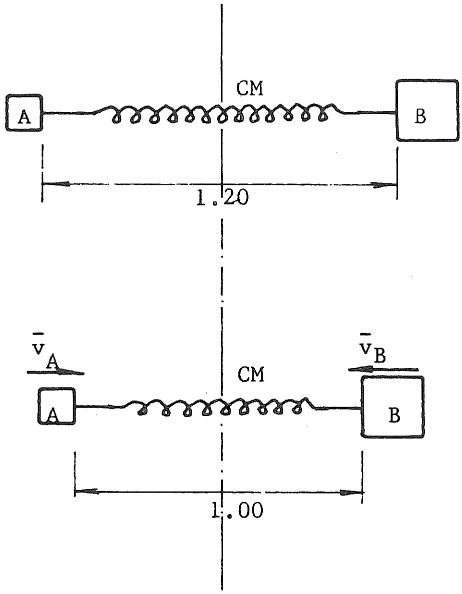
$$v^2 = \frac{kL^2 (m + M)}{m^2}$$

$$v = \frac{L}{m}\sqrt{k(m + M)}$$

32. Un sistema formado por dos cubos unidos por un resorte esta sobre una superficie horizontal sin rozamiento y cuyas características se muestran en la figura. La longitud del resorte sin deformar es de 1m, cuando las masas se separan 1.20m y se sueltan simultáneamente, determinar las velocidades y distancias recorridas de cada cubo en el momento cuando el resorte recupera su longitud no deformada.



Como sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa ($F = 0$), la velocidad de traslación del centro de masa es constante ($\dot{\bar{R}}$ = constante), pero como inicialmente no hay movimiento de traslación del sistema ésta velocidad es nula ($\mathring{\bar{R}} = 0$).
Luego, el centro de masa del sistema permanece inmóvil con respecto a tierra.



Por lo tanto, tomaremos como sistema de referencia el CM.
Y aplicando las leyes de conservación, se tiene:

- Momentum:

$$m_A v_A - m_B v_B = 0 \implies m_A v_A = m_B v_B \qquad \ldots \quad (I)$$

- Energía:

$$\frac{1}{2} k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \implies k(\Delta x)^2 = m_A v_A^2 + m_B v_B^2 \quad \ldots (II)$$

Resolviendo (I) y (II), obtenemos v_A y v_B :

$$k(\Delta x)^2 = m_A v_A^2 + m_B \frac{m_A^2}{m_B^2} v_A^2$$

$$k(\Delta x)^2 = (m_A + \frac{m_A^2}{m_B}) v_A^2 = m_A (1 + \frac{m_A}{m_B}) v_A^2$$

$$v_A = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)}} = 0.2 \sqrt{\frac{10}{1\left(1 + \frac{1}{2}\right)}} = 0.2\sqrt{\frac{20}{3}} = 0.4\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$v_A = 0.516$ m/s

$$v_B = \frac{m_A}{m_B} v_A = \frac{1}{2} V_A = 0.258 \text{ m/s}$$

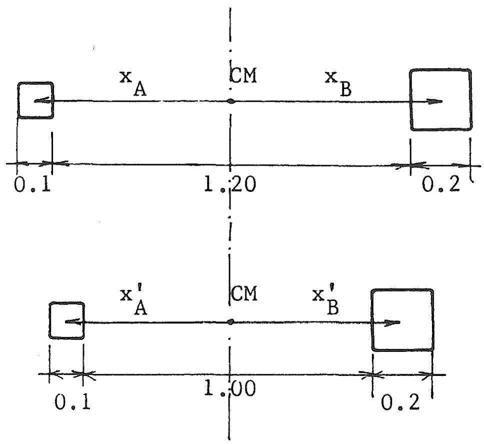
Observe que hemos obtenido los valores absolutos de v_A y v_B, estas velocidades son de sentido opuesto como hemos considerado al plantear la ecuación del momentum, v_A es positiva y v_B es negativa.

De la definición de centro de masas, en este sistema de referencia, para los dos estados (deformado, sin deformar), se tiene: (ver figura)

$$\left.\begin{aligned} -m_A x_A + m_B x_B &= 0 \\ -m_A x'_A + m_B x'_B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(III)}$$

Como:

$$\left.\begin{aligned} x_A + x_B &= 1.20 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.1}{2} = 1.35 \\ x'_A + x'_B &= 1.00 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.1}{2} = 1.15 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(IV)}$$



Resolviendo (III) y (IV) se obtienen las distancias recorridas:

$$-m_A x_A + m_B(1.35 - x_A) = 0 \rightarrow x_A = 1.35 \left(\frac{1}{1 + \frac{m_A}{m_B}} \right)$$

$$-m_A x'_A + m_B(1.15 - x'_A) = 0 \rightarrow x'_A = 1.15 \left(\frac{1}{1 + \frac{m_A}{m_B}} \right)$$

Como: $\Delta x_A = x_A - x'_A$

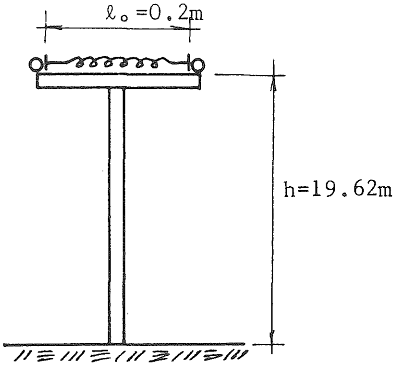
$$\Delta x_A = 0.20 \left(\frac{1}{1+\frac{m_A}{m_B}} \right) = 0.20 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \right) = 0.20 \times \frac{2}{3} = 0.133 \text{ m}$$

para obtener Δx_B, más rápidamente, utilizamos el hecho que:

$$\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B$$

$$\Delta x_B = \Delta x - \Delta x_A = 0.2 - 0.133 = 0.067 \text{ m}$$

33. Considerando el sistema mostrado en la figura. El resorte de longitud propia ℓ_o es comprimido y al liberarse empuja a las masas m_1 y m_2. Suponga que ambas masas llegan simultáneamente a los bordes de la plataforma y que el resorte no está ligado a ellas. Se conoce : $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 10$ kg y la velocidad de m_2 al llegar al borde es $v_2 = 3$ m/s



Encontrar:

a) La velocidad de la masa m_1 al salir de la plataforma.

b) El movimiento del CM hasta que tocan tierra.

c) La posición donde tocan tierra, ambas masas.

---

a) La fuerza del resorte es interna al sistema. Mientras están sobre la plataforma, las fuerzas externas son las reacción normal y el peso, que se anulan. No hay fricción. Entonces:

$$\Sigma \bar{F}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{P} = \text{constante} = 0$$

Luego:

$$P_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

$$v_{1x} = - \frac{m_2}{m_1} v_{2x} = - \frac{10}{5} x\ 3 = - 6 \text{ m/s}$$

b) Al salir de la plataforma actúa solamente la fuerza externa de la atracción gravitacional vertical.

$$\bar{F}^{ext} = M\bar{a}_{cm}$$

Luego:

$$F_x^{ext} = M\, a_{x_{cm}} = 0 \Longrightarrow v_{x_{cm}} = \text{constante} = 0$$

$$x_{cm} = x_{o\,cm}$$

$$\bar{F}_y^{ext} = M\, a_{y\,cm} \Longrightarrow - Mg = M\, a_{ycm} \Longrightarrow a_{y\,cm} = - g$$

$$y_{cm} = y_{o\,cm} - \frac{1}{2} gt^2$$

El tiempo de caída será para $y_{cm} = 0$

$$t_c = \sqrt{2\, \frac{y_{o\,cm}}{g}} = \sqrt{2\, \frac{19.62}{9.81}} = 2 \text{ s}$$

c) Como, $P_x = 0 \Longrightarrow v_{1x} = \text{constante}$ y v_{2x}=constante. Luego:

$$x_1 = x_{o_1} + v_{1x} t$$

$$x_2 = x_{o_2} + v_{2x} t$$

al llegar a tierra $t = t_c = 2\text{s}$, y con:

$$v_{1x} = - 6\text{m/seg} \qquad x_{o_1} = - 0.1 \text{ m}$$

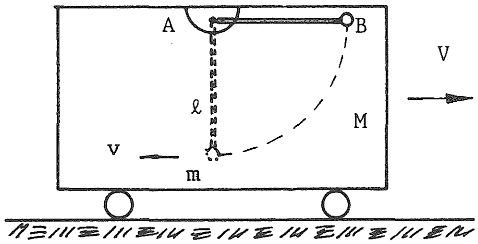
$$v_{2x} = 3\text{m/seg} \qquad x_{o_2} = 0.1 \text{ m}$$

se tiene:

$$x_1 = - 0.1 - 12 = - 12.1\text{m}$$

$$x_2 = 0.1 + 6 = 6.1 \text{ m}$$

34. Un vagón de masa M reposa sobre un plano sin fricción. Una masa m se ata en el extremo de la varilla AB, de longitud ℓ, la cual está pivota da al techo en A. La varilla se libera del reposo en la posición horizontal. Determinar la velocidad del vagón cuando la varilla pasa por la posición vertical. Considerar despreciable la masa de la varilla y las fricciones.



No habiendo fuerzas externas en la dirección horizontal, se conserva la cantidad de movimiento lineal $\bar{P}_x$, estando inicialmente en reposo se tiene:

$$P_x = 0 \implies MV + mv = 0 \implies V = -\frac{m}{M} v$$

Considerando despreciable el trabajo de las fuerzas internas, tenemos que la energía mecánica se conserva esto es, al pasar la masa por la posición vertical se tiene:

$$\Delta E = 0 \implies \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2 = mg\ell \implies mv^2 + MV^2 = 2mg\ell$$

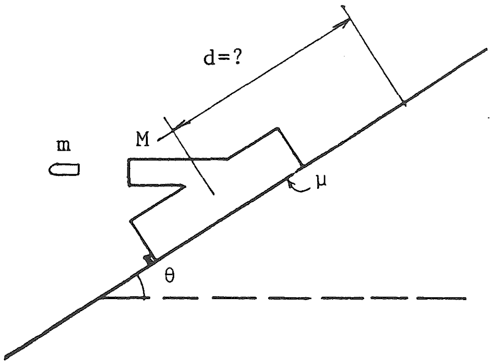
Como: $v = -\frac{M}{m} V$, se obtendrá:

$$m \frac{M^2}{m^2} V^2 + MV^2 = 2mg\ell \implies MV^2 \left(\frac{M}{m} + 1\right) = 2mg\ell$$

finalmente:

$$V^2 = \frac{2g\ell}{\frac{M}{m}\left(\frac{M}{n} + 1\right)} \implies V = \sqrt{\frac{2g\ell}{\frac{M}{m}\left(\frac{M}{m} + 1\right)}}$$

35. Un cañón de masa M se encuentra sobre un plano inclinado tal como se muestra en la figura. En un momento dado se dispara un proyectil de masa m. Si la energía liberada por la explosión es Q y un tercio de la misma se transforma en energía cinética del cañón y proyectil, encontrar la distancia que sube el cañón por el plano inclinado.



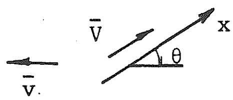
La fuerza gravitatoria y el rozamiento pueden despreciarse frente a las fuerzas impulsivas internas. La fuerza normal que hace el plano sobre el cañón en el instante del disparo no puede despreciarse pues es también una fuerza impulsiva.

Por lo tanto, en la direc. x del plano inclinado podemos considerar conservación de la cantidad de movimiento lineal .

P_x = constante y como inicialmente están en reposo $P_x = 0$, luego:

$$MV - m\,v\cos\theta = 0$$

$$v = \frac{MV}{m\cos\theta}$$



Nos dicen que:

$$\frac{Q}{3} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Luego:

$$\frac{Q}{3} = \frac{1}{2}m\,\frac{M^2V^2}{m^2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}MV^2$$

Obtenemos:

$$V^2 = \frac{2}{3}\,\frac{m}{M}\,Q\,\frac{\cos^2\theta}{(M + m\cos^2\theta)}$$

Una vez que el cañón comienza a moverse hacia arriba, actúan el peso y el rozamiento hasta que se detiene.

Teniéndose: $W_f = \Delta E$

$$- \mu Mg \cos\theta \; d = Mgd \text{ sen } \theta - \frac{1}{2} MV^2$$

$$gd(\text{sen } \theta + \mu \cos\theta) = \frac{1}{2} V^2$$

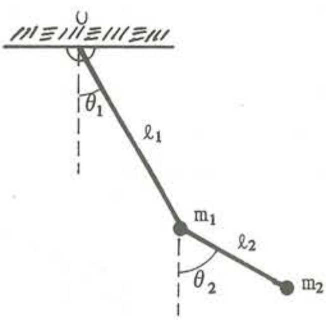
$$V^2 = 2gd(\text{sen } \theta + \mu \cos \theta)$$

igualando con el valor obtenido de V; se tiene:

$$d = \frac{1}{3} \frac{m}{M} Q \quad \frac{\cos^2\theta}{g(\text{sen } \theta + \mu \cos\theta)(M + m \cos^2 \theta)}$$

36. Considere el péndulo doble en el instante mostrado en la figura, con los valores indicados en la misma.

Calcular la energía mecánica total del sistema



$\theta_1 = 30°$, $\mathring{\theta}_1 = 2$ rad/s

$\theta_2 = 60°$, $\mathring{\theta}_2 = 4$ rad/s

$m_1 = 5$gr , $\ell_1 = 10$cm

$m_2 = 10$gr $\ell_2 = 5$ cm

Tomando en el punto de suspensión el sistema de coordenadas (x-y)mostrado:

- Energía potencial.

$$U = U_1 + U_2 = - m_1 g\ell_1 \cos\theta_1 - m_2 g(\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2)$$

$$U = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \cos\theta_1 - m_2 g\ell_2 \cos\theta_2$$

$$U = -\ 15 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 0.1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 0.05 \times \frac{1}{2}$$

$$U = -\ (3\sqrt{3}\ + 1)\ \frac{1}{4} \times 9.81 \times 10^{-3}$$

$$U = -\ 15.2 \times 10^{-3}\ J$$

- Energía Cinética.

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

cálculo de v_1:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ell_1 \cos\theta_1 \implies \dot{x}_1 = -\ \ell_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \\ y_1 = \ell_1 \operatorname{sen}\theta_1 \implies \dot{y}_1 = \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \end{array}\right\} \quad v_1^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}_1^2$$

$$v_1^2 = \ell_1^2\ \dot{\theta}_1^2 = (\ell_1\ \dot{\theta}_1)^2 = (0.1 \times 2)^2 = (0.2)^2 = 0.04$$

cálculo de v_2 :

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \ell_2 \cos\theta_2 \implies \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \ell_2\ \dot{\theta}_2\ \operatorname{sen}\theta_2 \\ y_2 = y_1 + \ell_2 \operatorname{sen}\theta_2 \implies \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \ell_2\ \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \end{array}\right\} \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

$$v_2^2 = (\dot{x}_1 - \ell_2\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2)^2 + (\dot{y}_1 + \ell_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 \ell_2\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 \operatorname{sen}^2\theta_2 + \dot{y}_1^2 + 2\dot{y}_1 \ell_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2\theta_2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + 2\ell_2\dot{\theta}_2\,(-\dot{x}_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \dot{y}_1 \cos\theta_2) + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\ell_2\dot{\theta}_2\,(\ell_1\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \ell_1\dot{\theta}_1\ \cos\theta_1 \cos\theta_2) + (\ell_2\ \dot{\theta}_2)^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\ell_1 \ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\,(\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2) + (\ell_2\ \dot{\theta}_2)^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\ell_1 \ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (\ell_2\ \dot{\theta}_2)^2$$

$$v_2^2 = 0.04 + 2 \times 0.1 \times 0.05 \times 2 \times 4 \times \cos(60° - 30°) + (0.05 \times 4)^2$$

$$v_2^2 = 0.04 + 0.08\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.04 = 0.04\ (2 + \sqrt{3}) = 0.149$$

luego:

$$K = \frac{1}{2}\ 5 \times 10^{-3} \times 0.04 + \frac{1}{2}\ 10 \times 10^{-3} \times 0.15 = (0.1 + 0.75) \times 10^{-3}$$

$K = 0.85 \times 10^{-3}$ J

finalmente la energía total mecánica será:

$E = K + U = (0.85 - 15.2) \times 10^{-3} = -14.35 \times 10^{-3}$ J

37. Sea un sistema aislado de tres partículas con masas, posiciones y velocidades dadas en un instante con respecto a un sistema de referencia "O" :

$m_1 = 10$ Kg , $\bar{r}_1 = (3, 4, 4)$m, $\bar{v}_1 = (2, 3, 1)$ m/s

$m_2 = 5$ Kg , $\bar{r}_2 = (-4, 4, 5)$m, $\bar{v}_2 = (-1, -1, 4)$ m/s

$m_3 = 15$ Kg , $\bar{r}_3 = (2, -4, 1)$m, $\bar{v}_3 = (-2, 4, 5)$ m/s

Calcular:

a) $\bar{v}_{cm}$ (velocidad del centro de masas)

b) $\bar{p}$ (cantidad de movimiento lineal total)

c) K_t (energía cinética total en el sistema de referencia 0)

d) K_{SCM} (energía cinética en el sistema de referencia CM)

e) $\bar{L}_o$ (cantidad de movimiento angular total con respecto a 0)

f) $\bar{L}_{SCM}$ (cantidad de movimiento angular total con respecto al CM)

---

a) $$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

reemplazando los valores dados:

$$\bar{v}_{cm} = \frac{10(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 5(-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + 15(-2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})}{10 + 5 + 15}$$

$$\bar{v}_{cm} = \frac{(20 - 5 - 30)\hat{i} + (30 - 5 + 60)\hat{j} + (10 + 20 + 75)\hat{k}}{30}$$

$$\bar{v}_{cm} = -\frac{15\hat{i} + 85\hat{j} + 105\hat{k}}{30}$$

$$\bar{v}_{cm} = \left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{17}{6}\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}\right)\text{m/s}$$

b) $\bar{P} = (m_1 + m_2 + m_3)\,\bar{v}_{cm} = (10 + 5 + 15)\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{17}{6}\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}\right)$

$\bar{P} = (-15\hat{i} + 85\hat{j} + 105\hat{k})$ kg m/s

c) Las velocidades (rapidez) con respecto a 0 son:

$$v_1 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$v_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18}$$

$$v_3 = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{45}$$

de aquí,

$$K_t = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$= \frac{1}{2} (10)(14) + \frac{1}{2} (5)(18) + \frac{1}{2} (15)(45) = 70 + 45 + 337.5 = 452.5\text{J}$$

d) Las velocidades con respecto al centro de masa son: $\bar{v}_{SCM} = \bar{v} - \bar{v}_{cm}$

$$v_{1\,SCM} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - (-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{17}{6}\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}) = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{1}{6}\hat{j} - \frac{5}{2}\hat{k}$$

$$v_{1\,SCM} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (-\frac{5}{2})^2} = \frac{\sqrt{451}}{6}$$

$$v_{2\,SCM} = (-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) - (-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{17}{6}\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}) = -\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{23}{6}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

$$v_{2\,SCM} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{23}{6})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{547}}{6}$$

$$v_{3\,SCM} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) - (-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{17}{6}\hat{j} + \frac{7}{2}\hat{k}) = -\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{7}{6}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}$$

$$v_{3\,SCM} = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (\frac{7}{6})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{211}}{6}$$

de aquí:

$$K_{SCM} = \frac{1}{2} m_1 v^2_{SCM} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2{}_{SCM} + \frac{1}{2} m_3 v_3^2{}_{SCM}$$

$$K_{SCM} = \frac{1}{2}(10)(\frac{451}{36}) + \frac{1}{2}(5)(\frac{547}{36}) + \frac{1}{2}(15)(\frac{211}{36}) = 62.64 + 37.99 + 43.96 =$$

$$K_{SCM} = 144.59 \text{ J}$$

e) La cantidad de movimiento angular con respecto a 0 es:

$$\bar{L}_o = m_1 \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + m_2 \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 + m_3 \bar{r}_3 \times \bar{v}_3$$

efectuando:

$$\bar{r}_1 \times \bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21\hat{i} + 11\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\bar{r}_3 \times \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -24\hat{i} - 12\hat{j}$$

se tendrá:

$$\bar{L}_o = 10(-8\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) + 5(21\hat{i} + 11\hat{j} + 8\hat{k}) + 15(-24\hat{i} - 12\hat{j})$$

$$\bar{L}_o = (-80 + 105 - 360)\hat{i} + (50 + 55 - 180)\hat{j} + (10 + 40)\hat{k}$$

$$\bar{L}_o = (335\hat{i} - 75\hat{j} + 50\hat{k}) \text{ kg m}^2/\text{s}$$

f) La cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masas será:

como; $\bar{L}_o = \bar{L}_{SCM} + \bar{r}_{cm} \times \bar{P} \implies \bar{L}_{SCM} = \bar{L}_o - \bar{r}_{cm} \times \bar{P}$

$\bar{L}_o$ y $\bar{P}$ ya los tenemos calculados y $\bar{r}_{cm}$ es:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{10(3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}) + 5(-4\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + 15(2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})}{10 + 5 + 15}$$

$$= \frac{40\hat{i} + 80\hat{k}}{30} = \frac{4}{3}\hat{i} + \frac{8}{3}\hat{k}$$

Calculamos: $\bar{r}_{cm} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ -15 & 85 & 105 \end{vmatrix} = -226.67\hat{i} - 180\hat{j} + 113.33\hat{k}$

finalmente:

$$\bar{L}_{SCM} = 335\hat{i} - 75\hat{j} + 50\hat{k} + 226.67\hat{i} + 180\hat{j} - 113.33\hat{k}$$

$$\bar{L}_{SCM} = (561.67\hat{i} + 105\hat{j} - 63.33\hat{k})\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

38. Sobre una superficie horizontal lisa, se encuentran dos partículas m_1 y m_2 ligadas a dos puntos fijos A y B respectivamente, tal como se muestra en la figura. Los elementos de ligazón son inextensibles y de masas despreciables. A la partícula m_1 se le imprime una velocidad con módulo v_o de modo que está obligada a chocar elásticamente con la partícula m_2 que se encuentra en reposo.

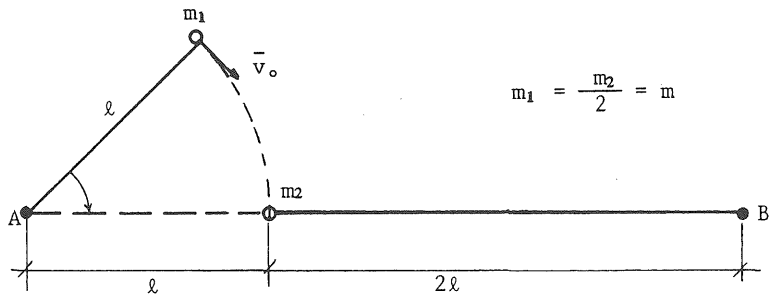
Encontrar:

a) La energía cinética, cantidad de movimiento lineal y angular del sistema antes del choque.

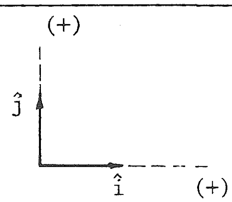
b) Las velocidades de las partículas después del choque.

c) La energía cinética, cantidad de movimiento lineal y angular del sistema después del choque. Comparar con los valores iniciales obtenidos. ¿Son los esperados?

d) El tiempo transcurrido después del primer choque hasta que vuelvan a chocar las masas por segunda vez.



Tomando como referencia al punto A, se tiene:



a) $K_i = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 + 0 = \frac{1}{2} m\, v_o^2$

$\bar{P}_i = m_1 \bar{v}_o + 0 = -\, m\, v_o \hat{j}$

$\bar{L}_{Ai} = \bar{r} \times \bar{P} = \ell\, \hat{i} \times (-m\, v_o \hat{j}) = -\, m\, \ell\, v_o\, \hat{k}$

b) Conservación de energía cinética: K = constante:

$\frac{1}{2} m_1 v_o^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \implies v_o^2 = v_1^2 + 2v_2^2$

conservación de la cantidad de movimiento angular: $\bar{L}_A$ = constante.

$$- m_1 r_1 v_o \hat{k} = - m_1 r_1 v_1 \hat{k} - m_2 r_2 v_2 \hat{k} \implies v_o = v_1 + 2v_2$$

resolviendo ambas expresiones:

$$(v_1 + 2v_2)^2 = v_1^2 + 2v_2^2 \implies v_1 = -\frac{v_2}{2} \implies \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{3} v_o & \uparrow \quad \bar{v}_1 \\ v_2 = \frac{2}{3} v_o & \downarrow \quad \bar{v}_2 \end{cases}$$

c) Tomando como referencia el mismo punto A, se tiene:

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m(-\frac{1}{3} v_o)^2 + \frac{1}{2}(2m)(\frac{2}{3} v_o)^2 = \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$\bar{P}_f = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m(\frac{1}{3} v_o)\hat{j} + 2m(\frac{2}{3} v_o)(-\hat{j}) = - m v_o \hat{j}$$

$$\bar{L}_{A_f} = m_1 r_1 v_1 (\hat{k}) + m_2 r_2 v_2 (-\hat{k}) = m\ell(\frac{1}{3} v_o)\hat{k} - 2m\ell(\frac{2}{3} v_o)\hat{k} = -m\ell v_o \hat{k}$$

Por supuesto,como estas tres cantidades se conservan,sus valores finales son iguales a los iniciales.

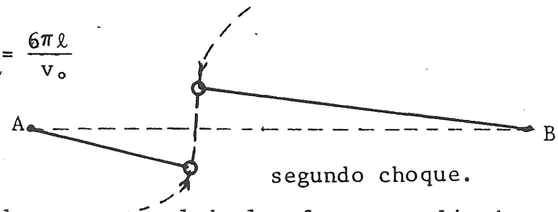
d) Sus velocidades angulares $\omega = \frac{v}{r}$ alrededor de sus respectivos puntos de giro son:

$$\omega_A = \frac{v}{\ell} = \frac{1/3\ v_o}{\ell} = \frac{v_o}{3\ell} \implies \text{sentido de giro alrededor de A:}$$

$$\omega_B = \frac{v_2}{2\ell} = \frac{2/3\ v_o}{2\ell} = \frac{v_o}{3\ell} \implies \text{sentido de giro alrededor de B:}$$

Como sus velocidades angulares son iguales ambos recorren una vuelta en el mismo tiempo y volverán a chocar. El tiempo empleado será:

$$2\pi = \omega t \implies t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v_o/3\ell} = \frac{6\pi\ell}{v_o}$$



segundo choque.

39. Encontrar la relación entre el torque tótal de las fuerzas aplicadas a un sistema de partículas, con respecto a un sistema de referencia SL y el SCM.

Podemos partir de la relación encontrada en el item 6.8 para el momentum angular,

$$\bar{L}_{SL} = \bar{R} \times \bar{P} + \bar{L}_{SCM}$$

derivando:

$$\dot{\bar{L}}_{SL} = \dot{\bar{R}} \times \bar{P} + \bar{R} \times \dot{\bar{P}} + \dot{\bar{L}}_{SCM}$$

siendo, $\dot{\bar{R}} \times \bar{P} = \dot{\bar{R}} \times M\dot{\bar{R}} = 0$, queda:

$$\dot{\bar{L}}_{SL} = \bar{R} \times \dot{\bar{P}} + \dot{\bar{L}}_{SCM}$$

de la Ley de Newton, para el sistema de partículas,

$$\dot{\bar{L}}_{SL} = \bar{T}^{ext}_{SL} , \quad \dot{\bar{P}} = \bar{F}^{ext} \quad y \quad \dot{\bar{L}}_{SCM} = \bar{T}^{ext}_{SCM}$$

se tiene:

$$\bar{T}^{ext}_{SL} = \bar{R} \times \bar{F}^{ext} + \bar{T}^{ext}_{SCM}$$

Nuevamente, con esta expresión, se obtiene una idéntica separación para los torques externos aplicados al sistema. Suma de dos: uno global, como si todas las fuerzas se aplicarán sobre una partícula de masa M ubicada en el centro de masas, más otro respecto a él (CM).

40. Determinar el momentum angular con respecto al centro de masas para el caso particular de un sistema de solo dos partículas. Encontrar la relación en función del movimiento relativo entre ellas.

El momentum angular es: $\bar{L}_{SCM} = \bar{r}_{1\,SCM} \times \bar{P}_{1\,SCM} + \bar{r}_{2\,SCM} \times \bar{P}_{2\,SCM}$

como: $\bar{P}_{SCM} = 0 \implies \bar{P}_{1\,SCM} = -\bar{P}_{2\,SCM}$

luego: $\bar{L}_{SCM} = (\bar{r}_{2\,SCM} - \bar{r}_{1\,SCM}) \times \bar{P}_{2\,SCM}$

pero : $\bar{r}_{2\,SCM} - \bar{r}_{1\,SCM} = \bar{r}_{12}$, posición relativa de la partícula 2 respecto a la 1.

Además, como encontramos en el item 6.4: $\bar{v}_{2\,SCM} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\bar{v}_{12}$, siendo $\bar{v}_{12}$ la velocidad relativa de la partícula 2 respecto a la 1, se tiene que: $\bar{P}_{2\,SCM} = m_2 \bar{v}_{2\,SCM} = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}\ \bar{v}_{12} = \mu\bar{v}_{12}$, donde μ es la denominada masa reducida.

Reemplazando se obtiene:

$$\bar{L}_{SCM} = \bar{r}_{12} \times \mu\ \bar{v}_{12}$$

Vemos que el resultado depende de las masas de las dos partículas (μ) y solo de la posición y velocidad relativas de una de ellas respecto a la otra ($\bar{r}_{12}$ y $\bar{v}_{12}$), independiente de cualquier sistema de referencia.

Nuevamente, como vimos en el item 6.4 para la energía cinética el problema de 2 cuerpos se puede reducir al de 1 cuerpo de masa μ.

41. Se tiene un sistema de solo dos partículas de masas m_1 y m_2. Analizar la descripción del movimiento de rotación alrededor del centro de masas, si el torque total de las fuerzas externas aplicadas al sistema es nulo.

Si, $\bar{T}^{ext}_{SCM} = 0$, de acuerdo a la Ley de Newton se tendrá conservación del momentum angular:

$$\bar{L}_{SCM} = \text{constante.}$$

Para un sistema de solo dos partículas, en el item 6.8 hemos encontrado que:

$$\bar{L}_{SCM} = (m_1 r^2_{1\,SCM} + m_2 r^2_{2\,SCM})\bar{\omega} = I_{CM}\bar{\omega}$$

luego:

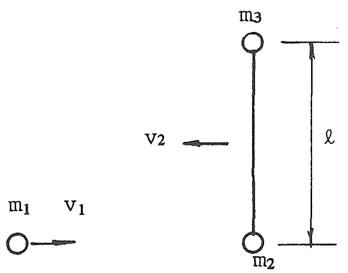
$$(m_1 r^2_{1\,SCM} + m_2 r^2_{2\,SCM})\ \bar{\omega} = \text{constante}$$

Analicemos la magnitud, dirección y sentido de este vector constante (igual al momentum angular).

- Dirección constante: nos indica que el movimiento de las dos partículas siempre será en un plano perpendicular a esta dirección.
- Sentido constante: nos indica que el sentido de giro de las dos partículas alrededor de su centro de masas será siempre el mismo (no se invierte).

- Módulo constante: nos indica que el producto $(m_1 r_{1\,SCM}^2 + m_2 r_{2\,SCM}^2)\omega$ permanece constante, si bien las posiciones y la velocidad angular pueden variar, el producto expresado no. (Observe que el módulo ω de la velocidad angular puede variar, si varían las posiciones respecto al centro de masas).

42. Una partícula de masa m_1 se desplaza sobre un plano horizontal con velocidad v_1 y dos partículas de masas m_2 y m_3 unidas por una varilla de masa despreciable se mueven con velocidad v_2 también en el mismo plano horizontal, como se indica en la figura.
Suponiendo un choque totalmente plástico, calcular:
a) La posición del centro de masas respecto de la masa m_2 en el momento del choque.
b) El movimiento del centro de masas.
c) La velocidad angular de rotación alrededor del centro de masas después del choque.



$\ell = 1$ m
$v_1 = 20$m/s
$v_2 = 10$m/s
$m_1 = m_2 = m_3 = 1$kg.

---

a) En el momento de choque el centro de masas está en una posición, tomando como referencia m_2 :

$$x_{cm} = \frac{m_1(0) + m_2(0) + m_3(0)}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{(m_1 + m_2)(0) + m_3(\ell)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\ell}{3}\text{ m}$$

b) La cantidad de movimiento lineal se conserva: $\bar{P} = M\bar{V} =$ constante.

$$m_1 v_1 \hat{i} - (m_2 + m_3)v_2 \hat{i} = (m_1 + m_2 + m_3)\bar{V}$$

$$\bar{V} = \frac{m_1 v_1 - (m_2 + m_3)v_2}{m_1 + m_2 + m_3}\hat{i}$$

$$\bar{V} = \frac{1(20) - 2(10)}{3}\hat{i}$$

$$\bar{V} = 0$$

Luego, después del choque el centro de masas permanece en la misma posición.

c) Cantidad de movimiento angular antes del choque con respecto al centro de masas:

$$\bar{L}_{SCM} = m_1 \bar{r}_1' \times \bar{v}_1' + m_2 \bar{r}_2' \times \bar{v}_2' + m_3 \bar{r}_3' \times \bar{v}_3'$$

donde: $\bar{r}_1' = -\frac{1}{3}\hat{j}$ y: $\bar{v}_1' = (20 - 0)\hat{i} = 20\hat{i}$

$\bar{r}_2' = -\frac{1}{3}\hat{j}$ $\bar{v}_2' = (-10- 0)\hat{i} = -10\hat{i}$

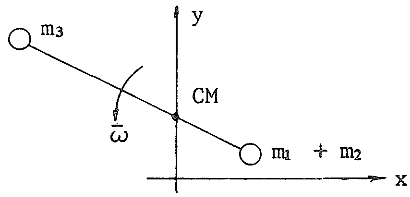
$\bar{r}_3' = \frac{2}{3}\hat{j}$ $\bar{v}_3' = (-10- 0)\hat{i} = -10\hat{i}$

reemplazando y efectuando:

$$\bar{L}_{SCM} = 1\{[(-\frac{1}{3}\hat{j})\times(20i)] + [(-\frac{1}{3}\hat{j})\times(-10\hat{i})] + [(\frac{2}{3}\hat{j})\times(-10\hat{i})]\} = 10\hat{k}$$

Al no haber torques externos, esta cantidad de movimiento angular se conserva y como la cantidad de movimiento angular después del choque con respecto al centro de masas en función de la velocidad angular $\bar{\omega}$ de rotación alrededor del centro de masas es:

$$\bar{L}_{SCM} = I_{CM}\,\bar{\omega}$$



se tiene:

$$\frac{10}{3}\hat{k} = I_{CM}\,\bar{\omega}$$

siendo: $I_{CM} = m_1 r_{1\,CM}^2 + m_2 r_{2\,CM}^2 + m_3 r_{3\,CM}^2 = 1(-\frac{1}{3})^2 + 1(-\frac{1}{3})^2 + 1(\frac{2}{3})^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

La velocidad angular de rotación es:

$$\omega = \frac{10}{2/3}\hat{k} = 15\hat{k} \text{ rad/s}$$

43. Dos patinadores sobre hielo de 50kg cada uno, se aproximan siguiendo caminos paralelos y separados 3m. Llevan velocidad de sentidos opuestos y módulos iguales a 10m/s, respecto a tierra. El primer patinador lleva una varilla ligera de 3m de longitud y el otro patinador la coge del otro extremo al pasar frente a él. Supóngase al hielo exento de rozamiento.

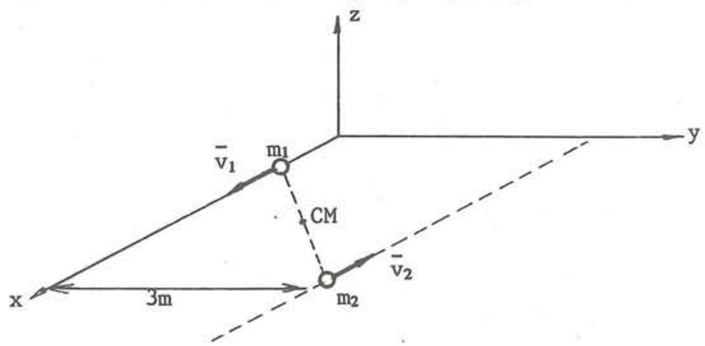
a) Describir el movimiento del sistema, luego de estar unidos por la varilla.

b) Supóngase que uno de los patinadores va jalando de la varilla hasta reducir a 1m la distancia al otro patinador. ¿Cuál es entonces su movimiento?

c) Comparar las energías cinéticas del sistema para los items a) y b). ¿Aumenta o disminuye?

---

a) El movimiento del sistema se puede describir en dos partes, como una combinación de la traslación del CM y la rotación de ambos patinadores alrededor de un eje que pasa por el CM.



Al no existir rozamiento no hay fuerzas horizontales externas sobre el sistema y, además, al ser la superficie horizontal, el peso y la normal se anulan.

- translación del CM.

  Teniéndose: $\bar{F}^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{P} = \text{constante} \Longrightarrow \bar{v}_{cm} = \text{constante}.$

  Como inicialmente, antes del encuentro: $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$ y además $m_1 = m_2$, la velocidad del centro de masas será:

$$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

  El CM del sistema está en reposo respecto a tierra y permanece después del encuentro, pues $\bar{v}_{cm}$ es constante.

  Al encontrarse los patinadores girarán alrededor del CM unidos por la varilla con una cierta velocidad angular.

- Rotación alrededor del CM.

  Teniéndose $\bar{T}^{ext}_{SCM} = 0 \Longrightarrow \bar{L}_{SCM} = \text{constante}.$

$$\bar{L}_{SCM} = m_1 \bar{r}_1' \times \bar{v}_1' + m_2 \bar{r}_2' \times \bar{v}_2'$$

Al estar quieto el CM es lo mismo resolver respecto a tierra que respecto al CM, pero no será así en general.

Antes del encuentro será:

$$\bar{L}_{SCM_i} = (m_1 \frac{\ell}{2} v_1 + m_2 \frac{\ell}{2} v_2)\hat{k}$$

$$\bar{L}_{SCM_i} = m \ \ell \ v \ \hat{k}$$

Para 2 partículas en función de $\bar{\omega}$, se tiene:

$$\bar{L}_{SCM} = I_{CM} \bar{\omega}$$

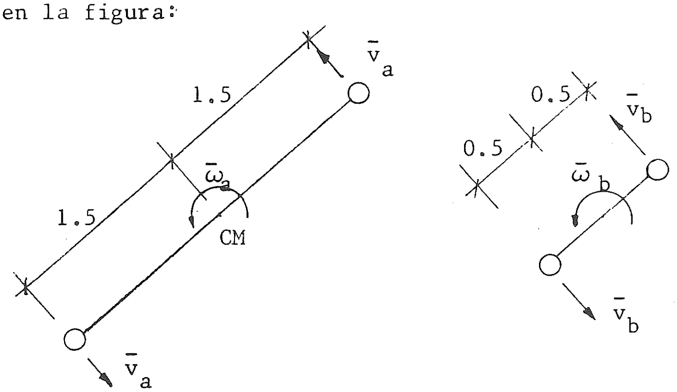
siendo: $I_{CM} = m_1 (\frac{\ell}{2})^2 + m_2 (\frac{\ell}{2})^2 = \frac{m \ell^2}{2}$

después del encuentro: $\bar{L}_{SCM_f} = \frac{1}{2} m \ \ell^2 \bar{\omega}$

luego: $\bar{\omega} = \frac{\bar{L}}{I_{CM}} = \frac{m \ell v}{\frac{m\ell^2}{2}} \hat{k} = \frac{2v}{\ell} \hat{k} = \frac{20}{3} \hat{k}$ rad/s

observe que: $v\hat{k} = \omega \frac{\ell}{2} \hat{k} \Longrightarrow v = \omega \frac{\ell}{2}$

b) Considerando ambas situaciones, antes y después, como se muestra en la figura:



Por supuesto el CM no se mueve pues las fuerzas con que jalan son internas.

Teniéndose: $\bar{L}_{SCM}$ =constante $\Longrightarrow \bar{L}_{SCM_a} = \bar{L}_{SCM_b} \Longrightarrow I_{CM_a} \bar{\omega}_a = I_{CM_b} \bar{\omega}_b$

$$\bar{\omega}_b = \frac{I_{CMa}}{I_{CM_b}} \bar{\omega}_a$$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} I_{CM_b} = m(0.5)^2 + m(0.5)^2 = 2m(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}m \\ \\ I_{CM_a} = m(1.5)^2 + m(1.5)^2 = 2m(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{2}m \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{I_{CM_a}}{I_{CM_b}} = \frac{9/2m}{1/2m} = 9$$

obtenemos: $\bar{\omega}_b = 9\,\bar{\omega}_a = 9\,\frac{20}{3}\hat{k} = 60\hat{k}$ rad/s

$$v_b = \omega_b \frac{\ell}{2} = 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ m/s}$$

Los patinadores continúan girando alrededor del CM con ésta velocidad angular.

a) Energía: $K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = mv^2$

o bien:

$$K = m(\frac{\ell}{2})^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

con estas expresiones, comparando los valores de K_a y K_b, se tiene:

$$\frac{K_b}{K_a} = \frac{I_{CM_b}}{I_{CM_a}} \left(\frac{\omega_b}{\omega_a}\right)^2 = \left(\frac{v_b}{v_a}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

$$K_b > K_a$$

La energía cinética aumenta debido a que se ha realizado un trabajo no conservativo.

44. Resolver el problema anterior considerando ahora que los patinadores tienen diferente masa, suponga $m_1 = 2m_2 = 100$kg.

---

a) Translación del CM.

Como: $m_1 = 2m_2$ y $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1$, la velocidad del CM será:

$$\bar{v}_{cm} = \frac{2m_2\bar{v}_1 - m_2\bar{v}_1}{3m_2} = \frac{1}{3}\bar{v}_1 = \frac{1}{3} v\,\hat{i}$$

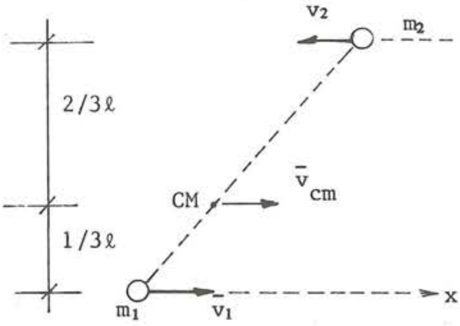
Por supuesto constante, antes y después del encuentro.

Con coordenadas:

$$y_{cm} = \frac{2m_2\,(0) + m_2\,\ell}{3m_2} = \frac{1}{3}\,\ell$$

$$x_{cm} = \frac{2m_2\,(x_{o1} + vt) + m_2\,(x_{o2} - vt)}{3m_2}$$

$$x_{cm} = \frac{2x_{o1} + x_{o2}}{3} + \frac{1}{3}\,vt$$



$$x_{cm} = x_{o\,cm} + \frac{1}{3}\,vt = x_{o\,cm} + v_{cm}t \text{ (como era de esperar)}$$

- Rotación alrededor del CM.

$$\bar{L}_{SCM} = m_1\,\bar{r}_1' \times \bar{v}_1' + m_2\,\bar{r}_2' \times \bar{v}_2'$$

teniéndose antes del encuentro:

$$\bar{r}_1' = \bar{r}_1 - \bar{r}_{cm} \Longrightarrow \bar{v}_1' = \bar{v}_1 - \bar{v}_{cm} = \bar{v}_1 - \frac{1}{3}\,\bar{v}_1 = \frac{2}{3}\,\bar{v}_1 = \frac{2}{3}\,v\,\hat{i}$$

$$\bar{r}_2' = \bar{r}_2 - \bar{r}_{cm} \Longrightarrow \bar{v}_2' = \bar{v}_2 - \bar{v}_{cm} = -\,\bar{v}_1 - \frac{1}{3}\,\bar{v}_1 = -\,\frac{4}{3}\,\bar{v}_1 = -\,\frac{4}{3}\,v\,\hat{i}$$

$$\bar{L}_{SCM_i} = (2m_2\,\frac{1}{3}\,\ell\,\frac{2}{3}\,v + m_2\frac{2}{3}\,\ell\,\frac{4}{3}\,v)\hat{k} = \frac{4}{3}\,m_2\,\ell\,v\,\hat{k}$$

en función de $\bar{\omega}$,

$$\bar{L}_{SCM} = I_{CM}\;\omega$$

teniéndose después del encuentro:

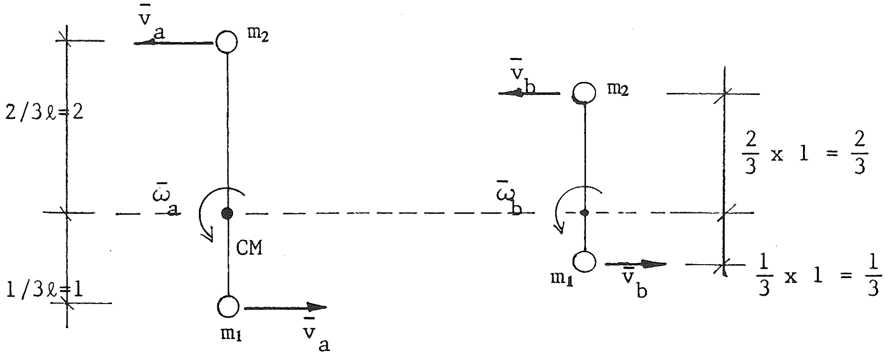
$$I_{CM} = 2m_2\,(\,\frac{1}{3}\,\ell)^2 + m_2\,(\,\frac{2}{3}\,\ell)^2 = \frac{2}{3}\;m_2\,\ell^2$$

$$\bar{L}_{SCM_f} = \frac{2}{3}\,m_2\,\ell^2\;\bar{\omega}$$

Como, $\bar{L}_{SCM}$ = constante, igualando se obtiene $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = \frac{\frac{4}{3}\,m_2\;\ell\;v}{\frac{2}{3}\,m_2\;\ell^2}\;\hat{k} = 2\,\frac{v}{\ell}\;\hat{k} = \frac{20}{3}\,\hat{k}\quad \text{rad/s}$$

b) Al acercarse a un metro de distancia como se muestra en la figura, antes y después, se tiene:



$$\left.\begin{aligned} \text{Como: } I_{CM_b} &= 2m_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + m_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} m_2 \\ I_{CM_a} &= \frac{2}{3} m_2 \ell^2 = \frac{2}{3} m_2 (3)^2 = \frac{18}{3} m_2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{I_{CM_a}}{I_{CM_b}} = \frac{\frac{18}{3} m_2}{\frac{2}{3} m_2} = 9$$

$$\text{Obtenemos: } \bar{\omega}_b = \frac{I_{CM_a}}{I_{CM_b}} \bar{\omega}_a = 9 \bar{\omega}_a = 9 \frac{20}{3} \hat{k} = 60\hat{k} \quad \text{rad/s}$$

c) Como en el problema anterior:

$$\frac{K_b}{K_a} = \frac{I_{CM_b}}{I_{CM_a}} \left(\frac{\omega_b}{\omega_a}\right)^2 = \frac{1}{9} (9)^2 = 9$$

C A P I T U L O VII

DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO

- MOVIMIENTO DE TRANSLACION Y ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO: ECUACIONES FUNDAMENTALES.
- MOMENTO DE INERCIA.
- EL MOMENTUM ANGULAR Y LA VELOCIDAD ANGULAR.
- ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO: ECUACION DE MOVIMIENTO.
- CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.
- ENERGIA CINETICA DE ROTACION.
- RODADURA.
- MOVIMIENTO DE PRECESION.
- CENTRO DE GRAVEDAD.
- EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO: ESTATICA.

7.1 MOVIMIENTO DE TRANSLACION Y ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO: ECUACIONES FUNDAMENTALES.-

Un cuerpo formado por una distribución contínua de materia puede considerarse compuesto de masas puntuales discretas. Si la subdividimos en n elementos infinitesimales de masa Δm_i, la suma de estos elementos, en el límite cuando $n \to \infty$ y $\Delta m_i \to 0$, será la masa M del cuerpo, ésto es:

$$M = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$$

Considerando elementos diferenciales de masa **dm** , se tiene:

$$M = \int dm$$

Si el cuerpo es homogéneo de densidad uniforme $\rho = \frac{M}{V}$, se tiene:

$$M = \rho \int dv$$

En un Cuerpo Rígido sus partículas tienen una relación fija entre sí, las distancias entre dos cualesquiera de ellas es siempre constante. Ningún cuerpo real es estrictamente rígido, pero muchos cuerpos pueden considerarse aproximadamente como tales para que podamos despreciar cualquier deformación o vibración.

Por lo tanto, en general, el movimiento de cuerpo rígido consta de un movimiento de translación y de una rotación. Para describir su movimiento se necesitan seis coordenadas independientes. Tres coordenadas de un punto O' del cuerpo, respecto a un sistema de referencia O(x, y, z), fijan su movimiento de translación. Otras tres coordenadas angulares especifican la orientación del sistema de referencia O'(x', y', z') fijo al cuerpo, respecto a O, en su movimiento de rotación. Ver fig. 7.1.

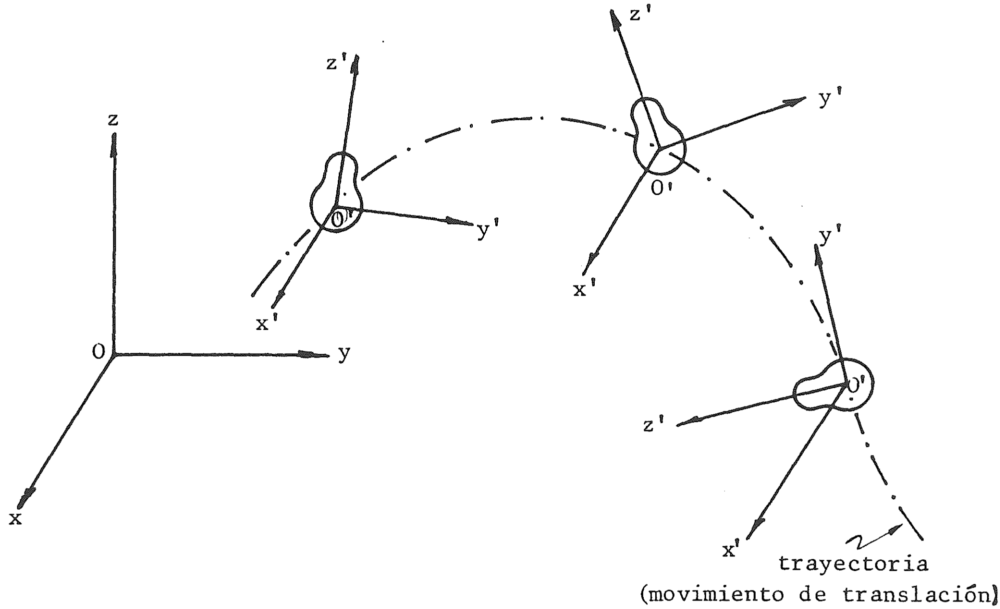


Fig. 7.1-Movimiento de translación y rotación de un cuerpo rígido. Por simplicidad de dibujo se muestra el caso de $x \| x' \| \bar{\omega}$. Ver la fig. 2.1 que mostraba solo su movimiento de translación, ahora el cuerpo gira conforme se traslada.

Pudiendo considerarse el cuerpo rígido como un sistema de partículas, sistema particular como hemos especificado, todas las expresiones generales desarrolladas en el capítulo anterior se podrán aplicar para el cuerpo rígido.

Luego, el movimiento de translación de un cuerpo rígido puede describirse con el movimiento de su centro de masa como si fuera una partícula de masa M sobre la cual actúa la resultante $\bar{F}$ de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo de masa M. Entonces, con respecto a un sistema inercial, :

$$\bar{F} = M\, \bar{a}_{cm}$$

La solución de ésta ecuación diferencial nos describe el movimiento de translación del cuerpo rígido. El movimiento de una partícula lo hemos tratado con suficiente profundidad y extensión en los primeros capítulos, por lo tanto, no es necesario insistir más sobre la traslación de un cuerpo rígido.

Para describir el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, en un sistema inercial tenemos la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\,\bar{L}_o}{dt}$$

Observe que si determinamos $\bar{T}_o$ y $\bar{L}_o$ respecto a un punto cualquiera arbitrario que se mueve en forma complicada ésta ecuación no se cumple, recuerde que se obtuvo con respecto al origen 0 de un sistema de referencia inercial. Sin embargo, también recuerde que en el capítulo anterior establecimos que el movimiento de un sistema de partículas se puede separar en dos, el movimiento de translación de su centro de masas y el movimiento de rotación alrededor de dicho centro de masas. Por lo tanto, se podrá utilizar esta ecuación si se toma con respecto al centro de masa del cuerpo, cualquiera que sea su movimiento.

El estudio general, a partir de esta ecuación fundamental, del movimiento de rotación de un cuerpo rígido es bastante complicado que escapa al nivel de este libro. Nos limitaremos a considerar sólo algunos casos particulares, principalmente estudiaremos el caso bastante frecuente de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en un sistema inercial, otros casos serán el de rodadura y el trompo.

La complejidad comienza con el cálculo del momentum angular $\bar{L}_o$, en general su relación con la velocidad angular $\bar{\omega}$ no es simple. Hemos visto con anterioridad para un par de casos particulares, de una y dos partículas, que sí tienen una relación sencilla mediante una cantidad que evalua la inercia a la rotación. Cantidad muy importante para estudiar el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, luego primero la definiremos y calcularemos para algunos cuerpo geométricos. Después continuaremos el análisis de la relación entre $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$, una vez calculado $\bar{L}_o$ podemos derivarlo e igualarlo a la suma de los torques aplicados al cuerpo, tal como lo establece la ecuación fundamental o segunda Ley de Newton.

7.2 MOMENTO DE INERCIA.-

Para un sistema de partículas el momento de inercia, algunas veces denominado también como inercia rotacional, con respecto a un eje de rotación particular es una cantidad escalar definida como la suma de los productos de las masas de las partículas por los cuadrados de sus distancias respectivas a ese eje. Si designamos a esta cantidad por I_e, o simplemente I, se tendrá:

$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2$$

En el sistema internacional SI, las dimensiones del momento de inercia se expresan en: Kg - m^2.

Si se tiene una distribución contínua de materia, como el cuerpo rígido, la suma Σ se convierte en una integración $\int$ que comprende a toda la masa M del cuerpo, esto es:

$$I \equiv \int r^2 \, dm$$

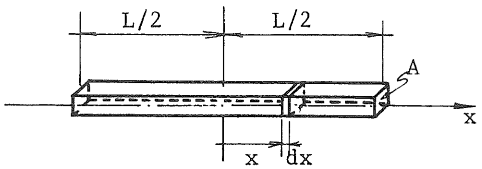
y si el cuerpo es homogéneo de densidad constante y uniforme $\rho = \frac{M}{V}$, entonces:

$$I \equiv \rho \int r^2 \, dv$$

donde la integral abarca todo el volumen V del cuerpo.

Para cuerpos de forma geométrica sencilla y para algunos ejes, la integral del momento de inercia puede evaluarse relativamente fácil. Como ilustración evaluaremos el momento de inercia de algunos cuerpos uniformes de masa total M.

- Varilla delgada de longitud L, con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro.



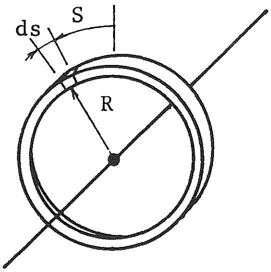
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{AL} \Rightarrow \rho A = \frac{M}{L}$$

$$I = \int r^2 \, dm = \rho \int r^2 \, dv = \rho A \int x^2 \, dx$$

$$I = \frac{M}{L} \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{2}{3} \frac{M}{L} \frac{L^3}{8}$$

$$I = \frac{1}{12} M L^2$$

- Aro delgado de radio R, con respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro.
  Es frecuente denominar a este eje como eje polar y su correspondiente momento como momento de inercia polar.



$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dv = \rho R^2 A \int ds$$

$$I = \frac{MR}{2\pi} \Big| s \Big|_0^{2\pi R} = \frac{MR}{2\pi} \; 2\pi R$$

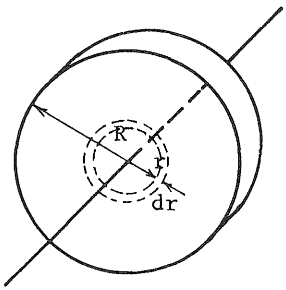
$$I = M\,R^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{LA} = \frac{M}{2\pi RA} \Rightarrow \rho R^2 A = \frac{MR}{2\pi}$$

$$dv = A\;ds$$

Resultado obvio, ya que, en este caso, toda la masa del aro equidista la distancia R del eje polar.

- Disco o cilindro de radio R, con respecto a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro.
  Nuevamente como en el ejemplo anterior, podemos denominarlos eje polar y momento de inercia polar.



$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dv = 2\pi e \rho \int r^3 dr$$

$$I = 2\pi e \rho \left| \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{2M}{R^2} \; \frac{R^4}{4}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 e} \Rightarrow 2\pi e \rho = \frac{2M}{R^2}$$

$$dv = 2\pi r \; dr \; e$$

Observe que, a igualdad de masa, el momento de inercia del disco es menor que el aro.

Conociendo algunos momentos de inercia, existen dos teoremas muy útiles para encontrar de forma simple otros momentos de inercia.

- Teorema del momento de inercia polar de una placa:

El momento de inercia polar de una placa con respecto a un eje perpendicular a la misma es igual a la suma de los momentos de inercia de la placa con respecto a dos ejes perpendiculares en el plano de la placa los cuales se intersectan con el eje polar considerado.

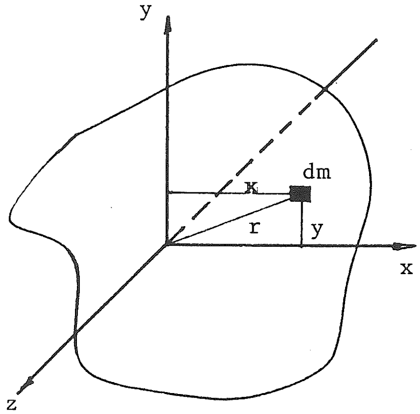


Fig.7.2-Momento de inercia polar de una placa. $I_z = I_x + I_y$

Tomemos dos ejes rectangulares x e y en el plano de la placa y que se intersectan con el eje polar dado que denominaremos z, como se muestra en la figura 7.2. Considerando un elemento diferencial de masa dm, el momento de inercia polar será:

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_z = \int y^2 dm + \int x^2 \ dm$$

Pero: $\begin{cases} I_x = \int y^2 dm \\ I_y = \int x^2 dm \end{cases}$

luego: $I_z = I_x + I_y$

Como ejemplo, conociendo el momento de inercia polar de un disco encontrar su momento de inercia respecto a un diámetro.

Por simetría: $I_x = I_y$

luego : $I_z = I_x + I_y = 2I_x$

como conocemos: $I_z = \frac{1}{2} MR^2$

se tiene: $I_x = \frac{1}{4} MR^2$

-Teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

El momento de inercia I_P de un cuerpo respecto a un eje dado es igual al momento de inercia I_{cm} del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior y que pase por el centro de masa, más el producto de la masa M del cuerpo por el cuadrado de la distancia h que hay entre ambos ejes.

Consideremos un cuerpo de forma arbitraria y una sección transversal del mismo que contenga al punto P y al CM. Denominemos a los ejes paralelos que pasan por esos puntos como z y z' respectivamente. Para facilitar la demostración escogamos los ejes de coordenadas P(x,y,z) y CM(x', y', z') como se muestran en la fig. 7.3. Por claridad no se muestra el cuerpo ni la sección transversal.

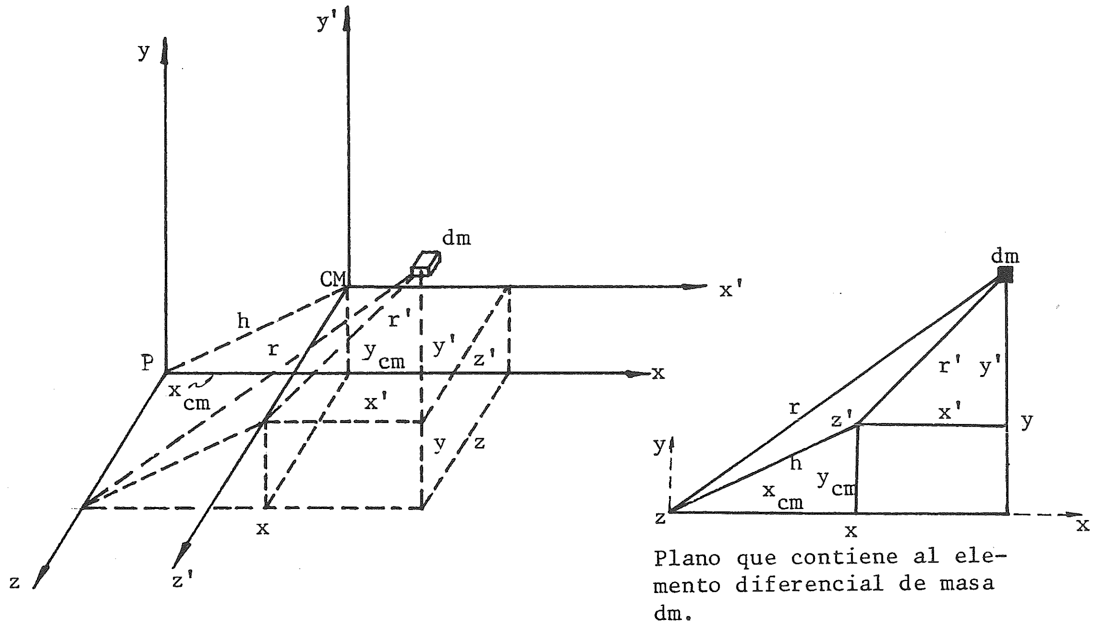


Fig. 7.3-Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
$I_P = I_{CM} + Mh^2$

Tomando un elemento dm, por definición se tiene:

$$I_z = \int r^2 dm$$

De la figura, de acuerdo a los ejes escogidos, se tiene las siguien - tes relaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = x_{cm} + x'$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2$$
$$h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 \qquad y = y_{cm} + y'$$

reemplazando y efectuando:

$$I_z = \int (x^2 + y^2)dm = \int [(x' + x_{cm})^2 + (y' + y_{cm})^2]dm$$

$$I_z = \int (x'^2 + y'^2)dm + \int (x^2_{cm} + y^2_{cm})dm + \int 2\, x_{cm}\, x'dm + \int 2\, y_{cm}\, y'dm$$

$$I_z = \int r'^2 dm + h^2 \int dm + 2\, x_{cm} \int x'dm + 2\, y_{cm} \int y'dm$$

por definiciones:

$$\int r'^2\, dm = I_{z'}$$

$$\int dm = M$$

$$\int x'dm = Mx'_{cm} = 0$$

$$\int y'dm = M\, y'_{cm} = 0$$

luego:

$$I_z = I_{z'} + M\, h^2$$

por lo tanto, finalmente:

$$I_p = I_{CM} + M\, h^2$$

Como ejemplo, conociendo el momento de inercia de una varilla con respecto a un eje perpendicular que pasa por su CM, encontrar el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por un extremo de la varilla. Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_p = I_{CM} + M\, h^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{4}{12}\, ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

- Radio de Giro: Cualquiera que sea la forma de un cuerpo, siempre será posible encontrar una distancia radial al eje dado en la cual se podría concentrar toda la masa del cuerpo para tener igual momento de inercia al del cuerpo respecto a dicho eje. A esta distancia se llama radio de giro K, teniéndose:

$$MK^2 \equiv I \implies K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

En la práctica es conveniente definir esta cantidad. Los radios de giro para los ejemplos desarrollados anteriormente serán:

. Varilla, eje perpendicular por el CM: $I = \frac{1}{12} ML^2 \implies K = \frac{L}{2\sqrt{3}}$

. Aro, eje polar por su CM : $I = MR^2 \implies K = R$

. Disco, eje polar por su CM: $I = \frac{1}{2} MR^2 \implies K = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Observe que, en general, la masa del cuerpo no puede considerarse como concentrada en su CM para clacular momentos de inerica.

7.3 EL MOMENTUM ANGULAR Y LA VELOCIDAD ANGULAR.-

Como ya se ha mencionado anterioremente la relación entre $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ no es sencilla. Aquí nos limitaremos a analizar esta relación para cuerpos rígidos que rotan alrededor de un eje fijo en un sistema de referencia inercial. En el apéndice 1 se presenta adicionalmente una introducción para el caso más general de rotaciones alrededor de un punto fijo.

Consideremos un cuerpo rígido que rota con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo en un sistema inercial, que tomaremos con su origen O y eje z de coordenadas coincidente con él. Por lo tanto, $\bar{\omega} = \omega\,\hat{k}$. Una partícula o elemento diferencial dm de este cuerpo se mueve en una circunferencia de radio $a = r \operatorname{sen} \alpha$ alrededor del eje z y con una rapidez $v = a\,\omega$ (todos los elementos o partículas del cuerpo tienen igual velocidad angular ω), tal como se muestra en la fig. 7.4

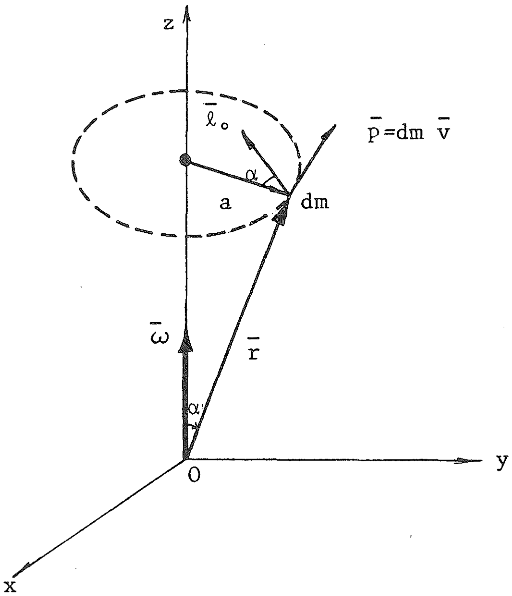


Fig. 7.4-Un cuerpo rígido rota con velocidad angular $\bar{\omega}$ alrededor del eje z de un sistema inercial. Se muestra una partícula o elemento diferencial dm de este cuerpo, por claridad no se dibuja el cuerpo. También se muestran los vectores correspondientes al elemento dm: $\bar{r}$, $\bar{p}$ y $\bar{\ell}_o$.

El momentum angular del elemento dm respecto al origen 0, será:

$$\bar{\ell}_o = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times \bar{v}\ dm$$

como $\bar{r}$ y $\bar{v}$ son perpendiculares, el módulo de este vector es:

$$\ell_o = r\ v\ dm \Longrightarrow \text{con: } \left\{ \begin{array}{l} r = \dfrac{a}{\text{sen } \alpha} \\ v = a\ \omega \end{array} \right\}, \text{ se tiene: } \ell_o = \left(\frac{a^2\ dm}{\text{sen } \alpha} \right) \omega$$

su dirección es perpendicular al plano formado por $\bar{r}$ y $\bar{v}$, teniendo un ángulo α con el radio horizontal de giro a. Por lo tanto, $\bar{\ell}_o$ es un vector que no tiene la misma dirección de $\bar{\omega}$. Su componente en la dirección de $\bar{\omega}$ será:

$$\ell_{o_z} = \ell_o \text{ sen } \alpha = \frac{a^2\ dm}{\text{sen } \alpha}\ \omega \text{ sen } \alpha = (a^2\ dm)\omega$$

Observe que a^2 dm es el momento de inercia de la partícula respecto al eje z.

Continuemos, la componente z al momentum angular total del cuerpo rígido respecto al origen 0, se obtendrá sumando todos estos valores ℓ_{o_z}, esto es:

$$L_{o_z} = \int \ell_{o_z} = \left(\int a^2 dm \right) \omega$$

llamando I al momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje z,

$$I = \int a^2 \, dm$$

se tiene:

$$L_{o_z} = I \, \omega$$

Como $\bar{\omega}$ tiene la dirección z, podemos escribir vectorialmente:

$$\bar{L}_{o_z} = I \, \bar{\omega}$$

Note que no podemos asegurar que el momentum angular total $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ tengan la misma dirección, mas bien, en general se tiene que: $\bar{L}_o \neq I \, \bar{\omega}$. Sólo en algunos casos particulares se podrá obtener una igualdad en esta relación como veremos a continuación.

Consideremos ahora un cuerpo rígido simétrico con respecto a un eje y que rota con velocidad angular ω alrededor de ese eje, que denominaremos nuevamente por simplicidad como eje z. Luego, como el cuerpo es simétrico respecto al eje de rotación, para cada elemento dm del cuerpo que consideramos habrá otro elemento de masa idéntico que se encuentra en una posición diametralmente opuesta a la misma distancia del eje de rotación.

Para calcular en este caso el momentum angular, tomemos dos de estas partículas o elementos, que denotaremos con subíndices 1 y 2, como se muestra en la fig. 7.5

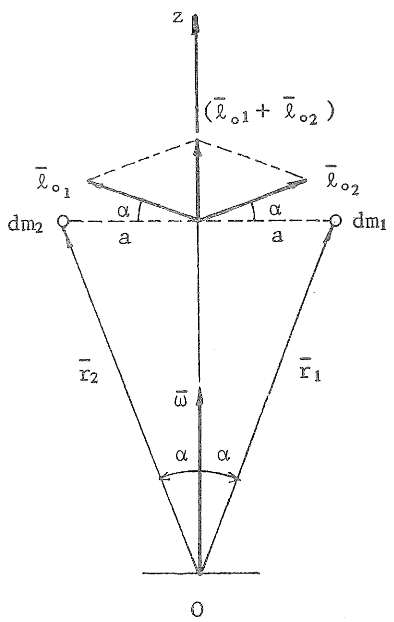


Fig. 7.5 - Un cuerpo rígido simétrico rota con velocidad angular ω alrededor de su eje de simetría z. Por claridad no se dibuja el cuerpo y se muestra un corte o sección transversal que contiene a dos partículas o elementos dm_1 y dm_2 del cuerpo situados en posiciones diametralmente opuestas. También se muestran los momentum angulares con respecto a 0 de estos elementos y su suma: $(\bar{\ell}_{o1} + \bar{\ell}_{o2})$, por conveniencia los vectores se han trasladado hacia el eje central de rotación.

Los momentum angulares de estos dos elementos con respecto a 0 tienen igual magnitud, como hemos visto anteriormente, su valor es:

$$\ell_o = \left(\frac{a^2 \ dm}{\text{sen } \alpha} \right) \omega$$

también, las direcciones de ambos estan en un mismo plano con el eje y se elevan igualmente un ángulo α con relación al plano horizontal de giro, pero sus orientaciones son opuestas respecto al eje z.
Por lo tanto, sus proyecciones sobre el plano horizontal siendo iguales y opuestas al sumarlas se anularán. Sus componentes sobre el eje z son iguales y del mismo sentido, teniendo cada una como valor:

$$\ell_{o_z} = (a^2 \ dm) \ \omega$$

Luego, el vector resultante tiene la dirección z como se indica en la fig. 7.5 .

Como $(\bar{\ell}_{o1} + \bar{\ell}_{o2})$ y $\bar{\omega}$ tienen igual dirección y sentido para cada par de estos elementos, el sumar para todos los elementos del cuerpo rígido simétrico se tendrá que $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ también tienen igual dirección y sentido, obteniéndose:

$$\bar{L}_o = \int \bar{\ell}_{o_z} = \left(\int a^2 \, dm \right) \bar{\omega}$$

$$\bar{L}_o = I \, \bar{\omega}$$

En cursos más avanzados de mecánica se demuestra que cada cuerpo rígido, independiente de su forma, tiene una terna de ejes perpendiculares entre sí en su centro de masa, de modo que si el cuerpo rota en torno a alguno de ellos $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ están también relacionados por: $\bar{L}_o = I\bar{\omega}$. Estos ejes se denominan Ejes Principales de Inercia (Lea el apéndice 1).

Resumiendo, si un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo se tiene que:

$$\bar{L}_{o_z} = I \, \bar{\omega}$$

en general:

$$\bar{L}_o \neq I \, \omega$$

si el cuerpo es simétrico respecto a ese eje:

$$\bar{L}_o = I \, \bar{\omega}$$

si el eje es uno de los ejes denominados ejes principales de inercia, así el cuerpo no sea simétrico respecto a él, también:

$$\bar{L}_o = I \, \bar{\omega}$$

7.4 ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO. ECUACION DE MOVIMIENTO.-

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fi jo en un sistema de referencia inercial es un caso particular muy frecuente e importante en el estudio del cuerpo rígido. Como hemos visto anteriormente su movimiento general puede separarse en el movimiento de translación de su centro de masa y en el movimiento de rotación alrededor del centro de masa. Por lo tanto, cuando nos referimos a rotaciones en torno a un eje fijo en un sistema inercial incluye el caso de rotaciones en torno a un eje que pase por el centro de masa, asi no esté fijo en el sistema de referencia inercial, siempre y cuando el eje móvil se mantenga en todo instante paralelo asimismo (eje fijo respecto al CM).

En el item anterior hemos encontrado, para este caso, que:

$$I_{o_z} = I\,\bar{\omega}$$

aplicando la Ley de Newton, en este eje se tiene:

$$\bar{T}_{o_z} = \frac{d\,\bar{L}_{o_z}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\,\bar{\omega})$$

luego:

$$\bar{T}_{o_z} = I\,\bar{\alpha}$$

Como $\bar{T}_{o_z}$, $\bar{\omega}$ y $\bar{\alpha}$ tienen la misma dirección, a lo largo del eje fijo de rotación, para resolver este caso particular nos bastará la relación escalar de la ecuación del movimiento, considerando a tales vectores algebraicamente con dos sentidos opuestos, mas y menos. Esto es:

$$T_{o_z} = I\,\alpha$$

Esta es la ecuación de movimiento o Ley de Newton para rotaciones en torno a un eje fijo, como F = ma para el movimiento rectilíneo de translación. Por lo tanto, el momento de inercia I es una cantidad que valora la resistencia que el cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de rotación (ω) por la aplicación de un torque dado, así como la masa m lo hace en el movimiento de translación.

Analicemos la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo cuando se aplica sobre él una fuerza $\bar{F}$ en un punto P como se muestra en la fig. 7.6. El cuerpo está ligado al eje z que se mantiene fijo por medio de cojinetes en ambos extremos.

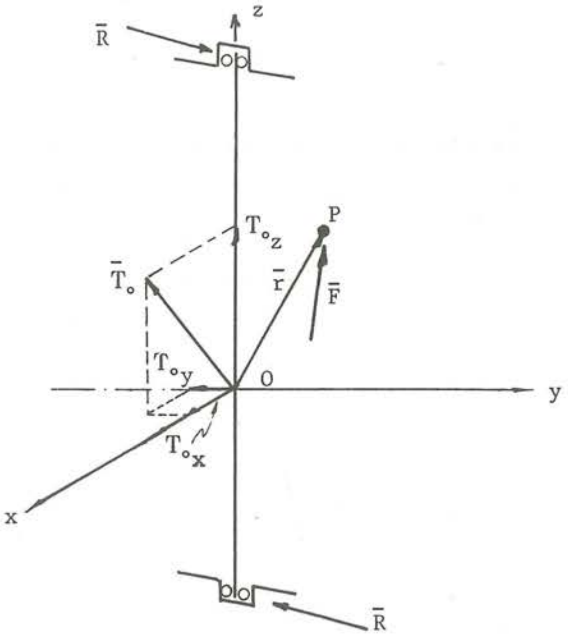


Fig. 7.6- Una fuerza $\bar{F}$ actúa en un punto P de un cuerpo rígido ejerciendo un torque $\bar{T}_\circ$ sobre el cuerpo, que por claridad no se dibuja. El cuerpo puede girar libremente alrededor del eje z que se mantiene fijo por medio de cojinetes en ambos extremos. Las reacciones $\bar{R}$ deben producir un torque que anulen las componentes $T_{\circ_x}$ y $T_{\circ_y}$.

Como se tiene un cuerpo rígido, la fuerza $\bar{F}$ que actúa en el punto P ejerce un torque $\bar{T}_\circ = \bar{r} \times \bar{F}$ sobre el cuerpo. En general, el vector $\bar{T}_\circ$ no estará dirigido sobre el eje alrededor del cual puede girar el cuerpo. Solo la componente $T_{\circ_z}$ a lo largo del eje puede hacer que el cuerpo gire en torno de dicho eje z. La proyección del torque sobre el plano xy perpendicular al eje tienden a hacer girar el cuerpo tratando de sacar al eje de su posición fija, por lo tanto, los cojinetes reaccionaran ejerciendo fuerzas perpendiculares al eje que transmitiran al cuerpo produciendo un torque, respecto a 0, que será perpendicular al eje con dirección opuesta a la mencionada proyección, es decir, de modo tal que anule los componentes $T_{\circ_x}$ y $T_{\circ_y}$.

Analicemos también la rotación de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular ω en torno a un eje fijo no existiendo ninguna fuerza $\bar{F}$ que actúe directamente sobre el cuerpo, en este caso se tendrá que:

$$\bar{T}_{o_z} = 0 \Longrightarrow \bar{\alpha} = 0 \Longrightarrow \bar{\omega} = \text{constante}$$

Si el cuerpo no es simétrico con respecto al eje de giro, las fuerzas de reacción en los cojinetes producen un torque que será perpendicular al eje en todo instante y la velocidad angular ω permanecerá constante. Como ejemplo consideremos una barra con un eje de rotación fijo que pasa por su centro de masa formando un ángulo α con ella como se muestra en la fig. 7.7 (a).

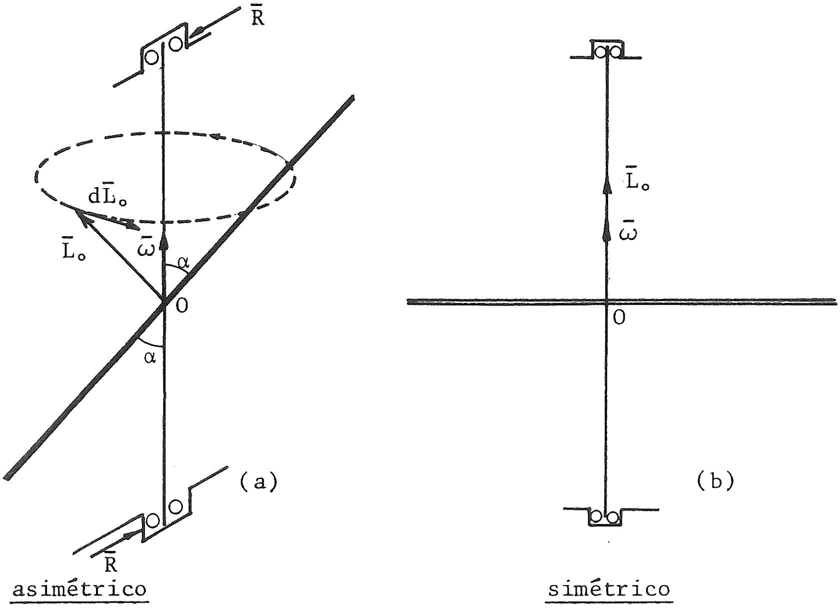


Fig. 7.7 - Cuerpo rígido (barra) que gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa O.

Como hemos visto, el momentum angular de cada elemento dm respecto al origen O, es:

$$\bar{\ell}_o = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times \bar{v}\, dm$$

su dirección es perpendicular al plano formado por $\bar{r}$ y $\bar{v}$, en este caso, para cualquier elemento es perpendicular a la barra y como puede comprobarse aplicando la regla de la mano derecha el producto vectorial $\bar{r} \times \bar{v}$ todos tienen igual dirección y sentido. Por lo tanto, su suma, el momentum angular total $\bar{L}$, será perpendicular a la barra como se muestra en la fig. 7.7 (a).

$\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ no son paralelos y forman un plano, el momentum angular $\bar{L}_o$ gira con la barra en torno al eje fijo de rotación permaneciendo su magnitud constante como lo establece la relación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

Las reacciones $\bar{R}$ estarán en el plano que forman $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ y producirán el torque $\bar{T}_o$ que será perpendicular a dicho plano en el sentido de giro, teniéndose:

$$\bar{T}_o \perp \bar{L}_o \Longrightarrow d\bar{L}_o \perp \bar{L}_o$$

luego, $\bar{L}$ gira con velocidad angular ω alrededor del eje manteniendo su magnitud constante. Observe que las fuerzas de reacción $\bar{R}$ y el $\bar{T}_o$ giran con el cuerpo manteniéndose en todo instante la perpendicularidad de $d\bar{L}_o$ y $\bar{L}_o$. Note también que el torque no tiene componente sobre el eje de giro, $\bar{T}_{o_z} = 0$, por lo tanto, la velocidad angular ω permanece constante.

Si el cuerpo es simétrico respecto al eje de giro, como se muestra en la fig. 7.7(b), el momentum angular total $\bar{L}_o$ tiene la dirección de $\bar{\omega}$ y permanece constante de acuerdo a la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

no existiendo fuerzas de reacción en los cojinetes, teniéndose:

$$\bar{T}_o = 0 \Longrightarrow \bar{L}_o = \text{constante}$$

. Comentario: cuando se tiene un cuerpo asimétrico giratorio se produce un "cabeceo" del eje en los cojinetes, en cambio, si es simétrico, no existe tal cabeceo. Si la velocidad de giro es alta se tendrán esfuerzos internos inportantes en los cojinetes acompañado de vibraciones, efectos que causan serios problemas a los motores y máquinas que tienen piezas giratorias, tales como las turbinas.

Generalmente los elementos se diseñan simétricos, pero en la práctica hay que hacer las correcciones necesarias con exactitud para subsanar las pequeñas deficiencias de fabricación, montaje y posterior mantenimiento. Por todo esto habrá que recurrir a la técnica del "Análisis Vibracional" y al "Balanceo Dinámico". Es conocido que el desbalance en las llantas de los automóviles producen vibraciones que se transmiten a la dirección y que cuando se alcanza cierta velocidad, por resonancia, efecto que estudiaremos más adelante en el capítulo de oscilaciones, es de mayor amplitud.

Hemos planteado la ecuación de movimiento para la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo cualquiera en un sistema de referencia inercial, $\bar{T}_{\circ_z} = I\bar{\alpha}$, adicionalmente diremos que si el eje es un eje principal de inercia, ver item 7.3, como:

$$\bar{L}_\circ = I\bar{\omega}$$

aplicando la Ley de Newton se tiene:

$$\bar{T}_\circ = \frac{d\bar{L}_\circ}{dt} = \frac{d}{dt}(I\bar{\omega})$$

luego:

$$\bar{T}_\circ = I\,\bar{\alpha}$$

siendo I el momento de inercia respecto al eje principal de inercia y $\bar{\alpha}$ la aceleración angular de giro alrededor de dicho eje.

7.5 CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.-

Si el torque total sobre un cuerpo rígido es nulo, el momentum angular se conserva, esto es:

$$\text{si,} \Longrightarrow \bar{T}_\circ = 0 \Longrightarrow \frac{dL_\circ}{dt} = 0$$

$$\bar{L}_\circ = \text{constante.}$$

Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo, tenemos:

$$\bar{L}_{\circ_z} = I\,\bar{\omega} \qquad \text{y} \qquad \bar{T}_{\circ_z} = I\,\bar{\alpha}$$

Luego, si $T_{o_z} = 0$, entonces: $\alpha = 0$ y ω = constante.

Un caso relevante de la conservación del momentum angular es cuando el momento de inercia I de un cuerpo respecto al eje fijo de rotación puede cambiar por una modificación de la configuración de sus partes, variando de una forma rígida a otra. En este caso la conservación del momentum angular se expresa como:

$$\bar{L}_{o_z} = I\bar{\omega} = \text{constante} \Longrightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Si I cambia, ω debe cambiar a pesar de que $T_{o_z} = 0$. Como I depende del cuadrado de la distancia de los elementos del cuerpo al eje de rotación, variando estas distancias se puede obtener una considerable variación de ω.

Recuerde que el caso de eje fijo incluye el caso de eje que pasa por el CM manteniéndose paralelo así mismo.

Los bailarines, patinadores, acróbatas, trapecistas, clavadistas,etc, frecuentemente utilizan este principio. Cuando saltan con una cierta velocidad angular respecto a un eje que pasa por su centro de masa, recogiendo sus brazos o ambas extremidades, según sea el caso, hacia el eje de giro, reduce su momento de inercia aumentando su velocidad angular y mayor será el número de revoluciones que podrá dar en el tiempo de vuelo, antes de caer.

Para recalcar este hecho e ilustrar la ley de conservación del momentum angular, seguramente su profesor hará en clase una exhibición demostrativa didáctica, utilizando una plataforma o banco giratorio alrededor de un eje vertical, pesas auxiliares, una rueda de bicicleta, y la colaboración de un estudiante. Ver fig. 7.8.

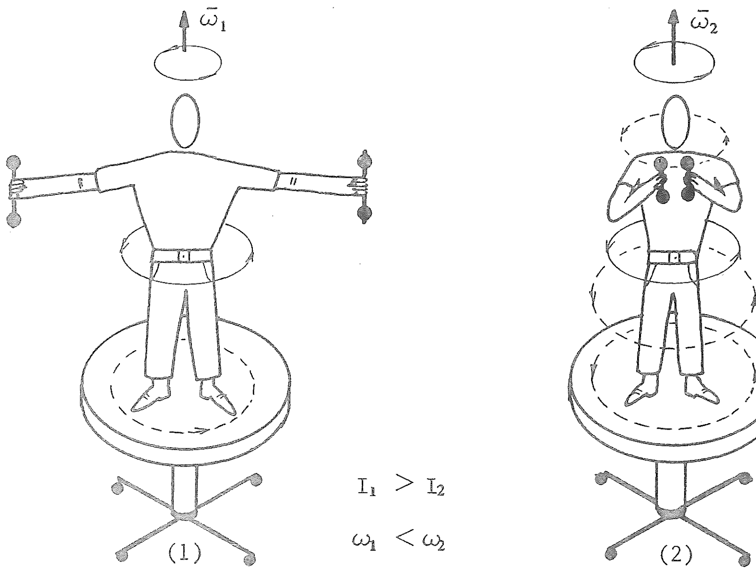


Fig. 7.8 - Conservación del momentum angular alrededor de eje fijo. El momento de inercia I disminuye, la velocidad angular ω aumenta.

7.6 ENERGIA CINETICA DE ROTACION.-

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular ω, un elemento de masa dm situado a una distancia perpendicular r del eje de rotación, tiene una velocidad v = r ω. Luego, su energía cinética es: $\frac{1}{2}\,dm\,v^2 = \frac{1}{2}\,dm\,r^2\omega^2$ y la energía cinética total del cuerpo será: $\frac{1}{2}\left(\int r^2\,dm\right)\omega^2$. Como $\int r^2\,dm$ es el momento de inercia I del cuerpo respecto al eje de rotación, se tiene:

$$K = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 .$$

Por lo tanto, la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo tiene una expresión análoga a la de la energía cinética de translación de un cuerpo. Nuevamente vemos la correspondencia que existe entre el momento de inercia I y la masa M, y entre la velocidad angular ω y la velocidad lineal v.

Analicemos ahora la relación Trabajo-Energía cuando se aplica una fuerza $\bar{F}$ a un cuerpo rígido que puede rotar alrededor de un eje fijo z. En un tiempo dt, un punto P del cuerpo se moverá una distancia ds siguiendo una trayectoria circular de radio r al girar un ángulo $d\theta$, teniéndose $ds = r\,d\theta$, ver fig. 7.9. El trabajo dW hecho por la fuerza $\bar{F}$ durante la rotación $d\theta$ es:

$$dW = \bar{F}.d\bar{s} = F_t ds = F_t r\, d\theta$$

en donde F_t es la componente de $\bar{F}$ en la dirección de $d\bar{S}$. Pero, $F_t r$ es la magnitud de la componente del torque instantáneo sobre el eje de rotación, T_{o_z}, ejercido por la acción de $\bar{F}$ sobre el cuerpo. Luego: $dW = T_{o_z} d\theta$

Esta expresión para el trabajo diferencial efectuando en la rotación en torno a un eje fijo es análoga a la expresión del trabajo diferencial efectuado en la translación a lo largo de una línea recta, $dW = F_x dx$.

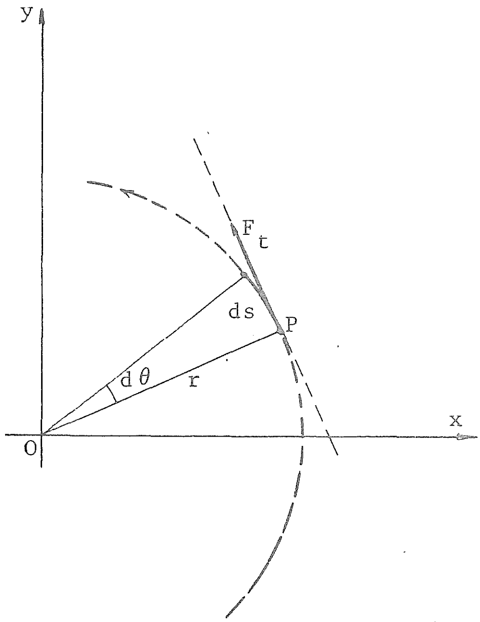


Fig.7.9-Trabajo hecho por una fuerza $\bar{F}$ en un desplazamiento angular $d\theta$. Por simplicidad no se muestra el cuerpor rígido. $dW = T_{o_z} d\theta$

Si sobre el cuerpo actúa más de una fuerza, la componente del torque resultante sobre el eje z, algebraicamente se tendrá:

$T_{o_z} = T_{o_{z_1}} + T_{o_{z_2}} + T_{o_{z_3}} + \ldots + T_{o_{z_n}}$ y el trabajo diferencial total será:

$$dW = T_{o_z}\, d\theta$$

En el item 7.4 hemos establecido que la ecuación de movimiento para rotaciones de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo es:

$$T_{o_z} = I\,\alpha = I\,\frac{d\omega}{dt}$$

luego, reemplazando en la expresión del trabajo se obtiene:

$$dW = I\,\frac{d\omega}{dt}\,d\theta = I\,\frac{d\theta}{dt}\,d\omega = I\,\omega\, d\omega$$

finalmente, el trabajo total entre dos estados 1 y 2 será:

$$W_{12} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\,\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\,\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Esto es, el trabajo del torque resultante es igual al cambio de la energía cinética de rotación, en analogía con la relación trabajo-energía para el movimiento rectilíneo de translación.

Para obtener la potencia instantánea P en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, consideremos nuevamente la expresión diferencial del trabajo para un desplazamiento angular $d\theta$, teniéndose en un dt:

$$\frac{dW}{dt} = T_{o_z} \frac{d\theta}{dt}$$

$$P = T_{o_z}\, \omega$$

Nuevamente, obtenemos una expresión rotacional análoga a $P = F_x v$ correspondiente al movimiento rectilíneo de translación.

Antes de seguir adelante, analizando algunos movimientos en los cuales el eje de rotación no está fijo, aprovechemos la oportunidad para resumir la analogía que hemos encontrado repetidamente entre el movimiento rectilíneo de translación y el movimiento de rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo.

- Inercia:	.... m(masa) $\Longleftrightarrow$ I(momento de inercia)
- Cantidad de movimiento, Momentum	.... $P = m\,v \Longleftrightarrow L_o = I\,\omega$
- Ecuación de movimiento, Ley de Newton.	.... $F = m\,a \Longleftrightarrow T_o = I\alpha$
- Trabajo.	.... $W = \int F\,dx \Longleftrightarrow W = \int T_o\, d\theta$
- Energía Cinética	.... $K = \frac{1}{2} mv^2 \Longleftrightarrow K = \frac{1}{2} I\,\omega^2$
- Potencia	.... $P = F\,v \Longleftrightarrow P = T_o\, \omega$

7.7 RODADURA.-

Hasta ahora sólo hemos considerado cuerpos rígidos que rotan alrededor de un eje fijo. Cuando un cuerpo rígido rueda se tiene un movimiento combinado de translación y rotación. Consideremos un disco o cilindro, de masa M y radio R, que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal como se muestra en la fig. 7.10

Si el disco gira con una velocidad angular ω transladándose con una velocidad lineal v_{cm}, rodando, estas dos cantidades están relacionadas

dado que: $ds = R\,d\theta$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

se tiene: $v_{cm} = R\,\omega$

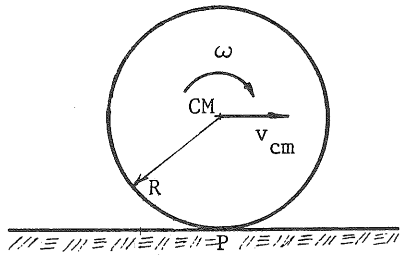


Fig. 7.10.- Disco rodando.
velocidad angular ω
velocidad lineal v_{cm}
P punto de contacto.

Recordemos ahora, como vimos en el item 6.4, la energía cinética total en un movimiento combinado de translación y rotación puede expresarse como:

$$K_{SL} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K_{SCM}$$

El primer término está asociado con el movimiento de translación del centro de masa, y el segundo término con el movimiento de rotación respecto a un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo rígido. El disco rueda manteniéndose en el plano de la figura, luego, el eje se mantiene paralelo asímismo y como vimos en el item 7.4 este caso puede considerarse como eje fijo. Por lo tanto, la energía cinética respecto al centro de masa, conforme hemos encontrado en el item anterior, será:

$$K_{SCM} = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

y la energía cinética total:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

Si el momento de inercia del disco es: $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$, se tiene:

$$K = \frac{1}{2} M v^2_{cm} + \frac{1}{4} M(R\ \omega)^2$$

como: $R\ \omega = v_{cm}$, queda:

$$K = \frac{3}{4} M v^2_{cm}$$

Observe que en este caso se tiene:

$\frac{2}{3} K = \frac{1}{2} M v^2_{cm} \Longrightarrow$ Energía cinética de Translación del CM.

$\frac{1}{3} K = \frac{1}{4} M v^2_{cm} \Longrightarrow$ Energía cinética de rotación alrededor del CM.

También podemos hacer la siguiente transformación de la expresión de la energía cinética total, que nos conducirá a una interesante interpretación física, veamos:

Como: $v_{cm} = R\ \omega$ se tiene,

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} (MR^2 + I_{CM}) \omega^2$$

Recordando el teorema de Steiner: $I_P = I_{CM} + MR^2$ en donde I_P es el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa a través del punto de contacto P, eje que se denomina Eje Instantáneo de Rotación. La energía cinética total toma la forma:

$$K = \frac{1}{2} I_P\ \omega^2$$

Por lo tanto la rodadura de un cuerpo rígido puede ser considerado equivalentemente como una rotación pura en torno al eje instantáneo de rotación.

7.8 MOVIMIENTO DE PRECESION.-

Consideremos también otro caso particular de rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje móvil: Movimiento de un Trompo Simétrico con un punto fijo en un sistema de referencia inercial.

En la fig. 7.11 se muestra, en un instante dado, a un trompo que gira rápidamente con una velocidad angular $\bar{\omega}$ en torno a su eje de simetría manteniendo su punta fija en el origen O, como pivote, de un sistema de referencia inercial (x, y, z). El eje del trompo formando un ángulo θ con el eje vertical z, se mueve de manera relativamente lenta en torno a la vertical en un movimiento llamado de precesión, con una velocidad angular de precesión $\bar{\omega}_p$ ($\omega_p << \omega$).

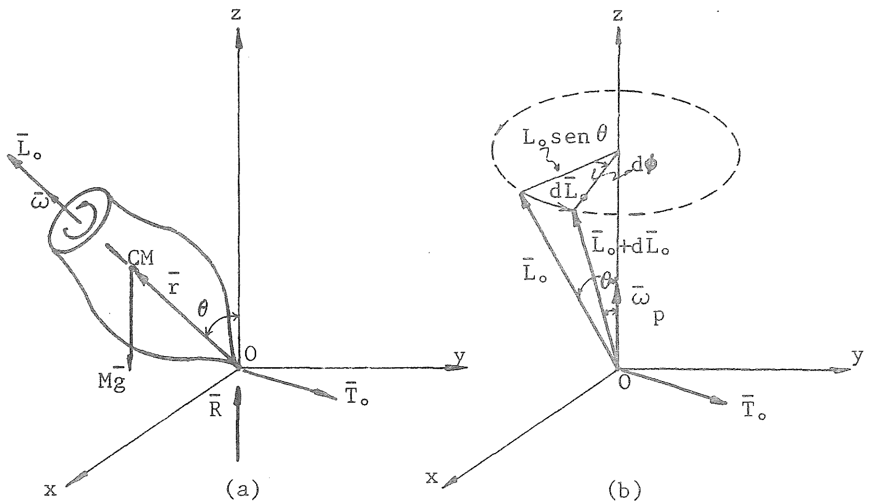


Fig. 7.11- a) Trompo simétrico con un punto fijo O.
b) Movimiento de precesión del eje del trompo alrededor de la vertical.

Si el eje de simetría del Trompo estuviera fijo en el espacio, como vimos en el item 7.3, se tendría: $\bar{L}_o = I\,\bar{\omega}$. Pero éste eje está rotando en torno a la vertical, luego: $\bar{L}_o \neq I\,\bar{\omega}$, esto es, $\bar{L}_o$ no coincide con el eje del trompo. Sin embargo, si $\omega_p << \omega$, como hemos asumido, la desviación que se presenta por este efecto, de $\bar{L}_o$ con respecto a $\bar{\omega}$ que está sobre el eje, la podemos despreciar. Por lo tanto, podemos considerar que $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$ son coaxiales y que $\bar{L}_o$ rota con el eje del trompo en torno al eje z como se muestra en la fig. 7.11.

La fuerza $\bar{R}$ en el apoyo O no ejerce torque respecto a él. El torque resultante es debido al peso $m\bar{g}$, que actúa hacia abajo en el centro de masa o centro de gravedad como sabemos por cursos anteriores, y que precisaremos con más detalle posteriormente en este mismo capítulo, luego:

$$\bar{T}_o = \bar{r} \times m\bar{g}$$

La dirección de $\bar{T}_o$ es perpendicular al plano formado por $\bar{r}$ y $\bar{g}$, y por lo tanto al eje del trompo en el sentido indicado en la fig. 7.11, con magnitud:

$$T_o = m\ g\ r\ \mathrm{sen}(180° - \theta) = m\ g\ r\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Observe que conforme el trompo precesa el plano mencionado, y por lo tanto también $\bar{T}_o$, giran en torno al eje z.

Aplicando la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

se tiene:

$$d\bar{L}_o = \bar{T}_o\ dt$$

Luego, $d\bar{L}_o$ tiene la dirección de $\bar{T}_o$ y como $\bar{T}_o$ es perpendicular a $\bar{L}_o$, el nuevo momentum angular $\bar{L}_o + d\bar{L}_o$, transcurrido un intervalo de tiempo dt, tiene la misma magnitud que $\bar{L}_o$ pero diferente dirección. Por lo tanto, conforme transcurre el tiempo, la punta del vector $\bar{L}_o$ se mueve en un círculo horizontal de radio $L_o \mathrm{sen}\theta$, como se muestra en la fig. 11(b). Como el vector $\bar{L}_o$ se encuentra a lo largo del eje del trompo, este eje también rota en torno a la vertical con el punto de apoyo O fijo, movimiento que hemos denominado de precesión.

Calculemos la velocidad angular de precesión $\bar{\omega}_p$, observando la fig. 7.11(b) podemos escribir que:

$$dL_o = d\phi L_o\ \mathrm{sen}\ \theta \Longrightarrow \frac{dL_o}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\ L_o \mathrm{sen}\ \theta$$

como en este caso: $\frac{dL_o}{dt} = T_o$ y $\frac{d\phi}{dt} = \omega_p$, se tiene:

$$T_o = \omega_p\ L_o\ \mathrm{sen}\ \theta$$

luego: $$\omega_p = \frac{T_o}{L_o \operatorname{sen}\theta}$$

como además: $T_o = m\,g\,r\,\operatorname{sen}\theta$, obtenemos:

$$\omega_p = \frac{m\,g\,r}{L_o}$$

vectorialmente, como $\bar{\omega}_p$ es un vector que tiene dirección vertical podemos escribir:

$$\bar{\omega}_p = \frac{m\,g\,r}{L_o}\ \hat{k}$$

su sentido dependerá del sentido de giro $\bar{\omega}$ del trompo, será positivo si $\bar{L}_o$ apunta hacia la cabeza del trompo como en la fig. 7.11 y negativo si $\bar{L}_o$ tiene sentido opuesto.

Considerando la aproximación asumida, podemos poner que $L_o = I\,\omega$ y se tendrá:

$$\omega_p = \frac{m\,g\,r}{I\,\omega}$$

Por lo tanto ω_p es inversamente proporcional a ω. Si ω es relativamente grande, ω_p será pequeña. Teniéndose como requerimos inicialmente $\omega_p << \omega$. Note también que ω_p es independiente del ángulo θ.

Cuando un trompo real se pone a "bailar", por fricciones ω decrece y ω_p aumenta. Hecho que los niños, en algunos lugares, dicen que el trompo se pone "borracho". Como también ya no se tiene la aproximación $\omega_p << \omega$, el ángulo θ aumenta hasta que el cuerpo del trompo llega al piso.

Los vectores $\bar{\omega}_p$, $\bar{L}_o$ y $\bar{T}_o$ pueden relacionarse vectorialmente, a partir de la expresión escalar planteada para este movimiento: $T_o = \omega_p\ L_o \operatorname{sen}\theta$ y con la usual regla de la mano derecha, se puede fácilmente identificar la relación entre ellos como un producto vectorial, esto es:

$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_p \times \bar{L}_o$$

Para experimentar este efecto de precesión con un ángulo mayor al mostrado, p.e. $\theta = 90°$, se puede utilizar un juguete comercialmente vendido como un trompo giroscópico, ilustrado en la fig. 7.12.

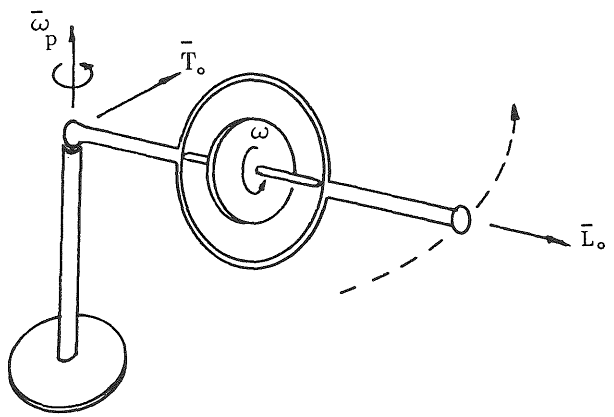


Fig. 7.12-Trompo giroscópico. Relación vectorial general:

$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_p \times \bar{L}_o$$

Observe que si el trompo no está rotando ($\omega = 0$). El momentum angular $\bar{L}_o + d\bar{L}_o$ es igual a $d\bar{L}_o$ luego de un tiempo dt y de acuerdo a la Ley de Newton tiene la dirección de $\bar{T}_o$. Por lo tanto, no se da un movimiento de precesión, el trompo simplemente rotará, descendiendo el extremo no apoyado,en torno a un eje que pasando por el punto de apoyo tiene la dirección de $\bar{T}_o$. Pero si el trompo está inicialmente rotando, como hemos analizado previamente, precesará, manteniéndose su eje en un plano horizontal. Este hecho es similar a la situación que se da en translación, la trayectoria que describe una partícula, cuando se le aplica una fuerza, depende de la velocidad inicial que tiene.

En la figura 7.13 también se ilustra otro aparato demostrativo muy didático. Consta de un aro de bicicleta con un contrapeso móvil en su eje al otro extremo del apoyo, todo esto montado sobre un banco giratorio. Variando la posición del contrapeso se puede cambiar el sentido del torque y por consiguiente el sentido del movimiento de precesión.

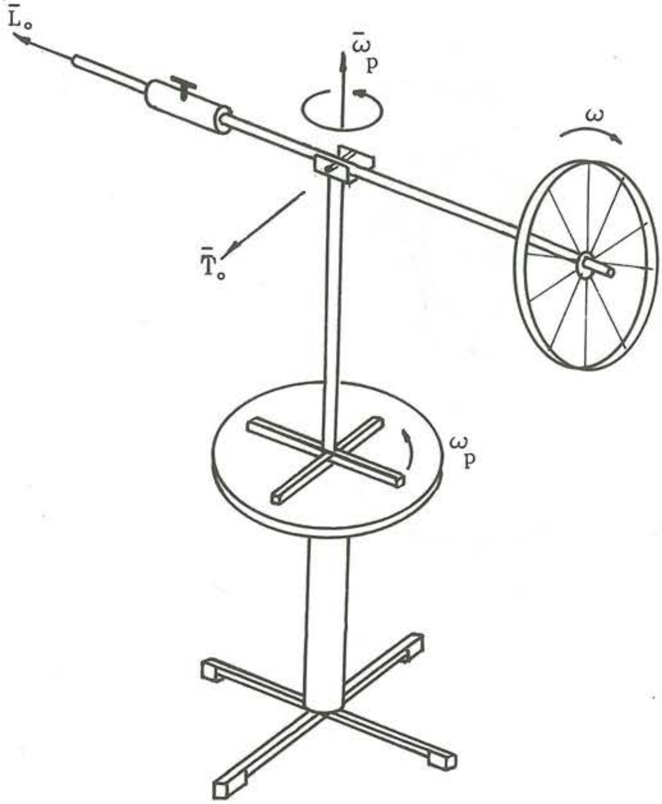


Fig. 7.13 - Aparato demostrativo del movimiento de precesión. El contrapeso móvil permite cambiar el sentido de $\bar{T}_o$, invirtiéndose el sentido de $\bar{\omega}_p$.

El giróscopo o giroscopio es otro aparato basado en los principios que acabamos de estudiar, de mucha utilidad práctica. Fue inventado en 1852 por Foucault para demostrar experimentalmente la rotación de la tierra. Consta de una volante con su eje montado en tres bastidores o gimbalos como se muestra en la fig. 7.14, todo esto con rodamientos y apoyos de fricción despreciable.

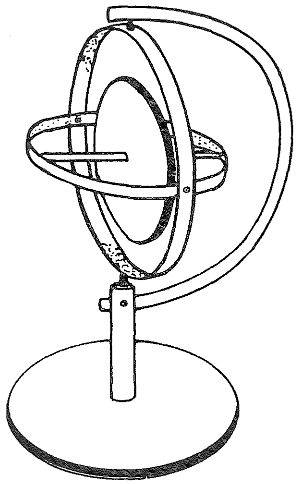


Fig. 7.14 - Giróscopo

Los instrumentos basados en el principio giroscópico se utilizan cuando se requiere conservar una referencia direccional. En los pilotos automáticos de aviones, cohetes, submarinos, etc.

También se utilizan los giróstatos como estabilizadores de naves, torpedos y aviones.

7.9 CENTRO DE GRAVEDAD.-

Al estudiar el movimiento de cuerpo, o partícula, una de las fuerzas que interviene es la fuerza de atracción de la tierra. A esta fuerza gravitacional la llamamos Peso.

En particular, cuando se tiene un cuerpo rígido, cada partícula del cuerpo es atraída por la tierra hacia su centro. En la práctica, considerando que la distancia al centro de la tierra es muy grande y que las dimensiones del cuerpo son frecuentemente pequeñas, estas fuerzas pueden considerarse paralelas perpendicularmente a la superficie horizontal de la tierra y que todas las partículas están sometidas a la misma aceleración $\bar{g}$ de la gravedad.

El peso de un cuerpo es la suma de todas estas fuerzas. Luego, en este caso, podemos escribir:

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\bar{g} = M\bar{g}$$

Ahora nos preguntamos si habrá un punto, tal que, ubicando la resultante o peso pasando por ese punto se reproducirán, equivalentemente, los mismos efectos del movimiento, tanto de translación como también de rotación, que producen las fuerzas gravitacionales que actúan independientemente sobre cada una de las partículas que constituyen el cuerpo rígido. Este punto existe y se le denomina: Centro de Gravedad. Para encontrarlo debemos establecer, consecuentemente, que se cumpla que el torque total resultante sea igual al torque de la fuerza resultante, ambos tomados respecto a un mismo punto arbitrario cualquiera.

Con el objeto de ser más generales, no nos limitemos al caso gravitacional, consideremos un conjunto cualquiera de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido. En general, el efecto que este sistema de fuerzas produce sobre el cuerpo no puede ser reproducido por la acción de una única fuerza, la resultante. En otras palabras, no siempre es posible encontrar un punto de aplicación de la fuerza resultante, tal que, el torque de la resultante sea igual al torque resultante del sistema de fuerzas. Esto será posible solo en algunos casos particulaes, cuando existe este punto suele llamarse en forma genérica: Centro de Fuerzas. Estos casos particulares son tres:

- Fuerzas concurrentes en un punto, en este caso, el centro de fuerzas estará localizado en el punto de concurrencia como puede verse fácilmente, dado que todas las fuerzas tienen igual vector posición respecto al centro de momentos, origen O escogido.

  Como hemos establecido, se requiere encontrar la posición $\bar{r}_{cf}$ de la resultante $\bar{F}$ del sistema de fuerzas $\bar{F}_i$ tal que el torque resultante sea igual al torque de la resultante, en este caso se tiene:

  Torque resultante: $\bar{T}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{r} \times \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{r} \times \bar{F}$

  Torque de la resultante : $\bar{T}_o = \bar{r}_{cf} \times \bar{F}$

  igualando : $\bar{r}_{cf} = \bar{r}$

- Fuerzas coplanares, en este caso, no solo hay un punto si no un conjunto de puntos del plano que forman una recta de igual pendiente a la dirección de la resultante que cumplen con el requerimiento establecido. Ver problema Nº 52. .

- Fuerzas paralelas, este es el caso que nos interesa analizar. Como las fuerzas son paralelas todas tienen igual dirección espacial, digamos $\hat{k}$, entonces:

$$\bar{F}_i = F_i \hat{k}$$

  y la resultante será:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \hat{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)\hat{k}$$

  El torque total del sistema de fuerzas paralelas, con respecto a un punto O cualquiera, es:

$$\bar{T}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times F_i \hat{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \bar{r}_i \right) \times \hat{k}$$

y el torque de la fuerza resultantes, respecto al mismo punto O, es:

$$\bar{T}_\circ = \bar{r}_{cf} \times \bar{F} = \bar{r}_{cf} \times \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)\hat{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_{cf} \right) \times \hat{k}$$

Se quiere encontrar la posición $\bar{r}_{cf}$ del punto de aplicación de $\bar{F}$ para que ambos torques encontrados sean iguales, esto es:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_{cf} \right) \times \hat{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_i \right) \times \hat{k}$$

como se tiene igual dirección, esta igualdad se satisface si:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_{cf} = \sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_i$$

luego, finalmente se tiene:

$$\bar{r}_{cf} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \, \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Volviendo al caso gravitacional, este centro de fuerzas se denomina centro de gravedad, teniéndose:

$$\bar{r}_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i \, \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, g_i \, \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, g_i}$$

si consideramos campo gravitacional uniforme, esto es, g_i=g=constante, se tendrá:

$$\bar{r}_{cg} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, \bar{r}_i \right) g}{Mg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \bar{r}_i}{M} = \bar{r}_{cm}$$

Vemos pues, que en este caso, el centro de gravedad coincide con el centro de masa del cuerpo rígido. Este es el caso que nos interesa y que nos será de mucha utilidad. Recuerde que el centro de masa es un punto invariable que depende solo de las masas de las partículas y de sus posiciones relativas, independientemente del sistema de referencia. Además, observe que si se toma como centro de momentos, punto O, el centro de gravedad del cuerpo, entonces se tendrá que: $\bar{T}_o = 0$. Luego, la línea de acción del peso pasa siempre a través del centro de gravedad independientemente de la orientación relativa espacial del cuerpo.

Este resultado nos proporciona un método experimental para determinar el centro de masa de una placa cualquiera, como se muestra en la fig. 7.15. El cuerpo se suspende de un punto cualquiera y cuando está en reposo se traza una línea vertical que pasa por el punto de suspensión, el centro de gravedad debe estar sobre esta línea para que el torque total sea nulo. Este procedimiento se repite con otro punto de suspensión. El centro de masa estará localizado en el punto de intersección de ambas rectas. Como comprobación se repetirá la operación para un tercer punto de suspensión.

Fig. 7.15 Método experimental para determinar el centro de masa de una placa.

Si el campo gravitacional no es uniforme, $g_i \neq$ constante, manteniendo la consideración de paralelismo, como hemos visto, el centro de gravedad está definido. Pero si se tiene un cuerpo muy largo inclinado con respecto a la horizontal, el centro de gravedad no coincidirá con el centro de masa y no solo esto, sino que, además, su localización variará con la inclinación del cuerpo. Por lo tanto, en este caso, el centro de gravedad no tiene mucha utilidad.

En consecuencia, finalmente diremos que, las fuerzas de atracción gravitacional que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido pueden ser equivalentemente reemplazadas, en cuanto a sus efectos, por una sola fuerza igual al peso total del cuerpo, $\bar{W} = M\bar{g}$, pasando a través del centro de masa.

7.10 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO: ESTATICA.-

En el capítulo III estudiamos el equilibrio de una partícula, con relación a su movimiento de translación. Cuando se tiene un cuerpo rígido, en general, se traslada y rota. Por lo tanto, de acuerdo a las ecuaciones de movimiento anteriormente encontradas, un cuerpo rígido estará en equilibrio mecánico cuando en un sistema de referencia inercial se tengan las siguientes condiciones:

- Translación: $\bar{a}_{cm} = 0, \quad \bar{v}_{cm} = \text{constante} \quad \Longrightarrow \quad \bar{F} = 0$
- Rotación : $\bar{\alpha} = 0, \quad \bar{\omega} = \text{constante} \quad \Longrightarrow \quad \bar{T}_\circ = 0$
  en torno a cualquier eje fijo.

Como siempre es posible encontrar un sistema inercial en el cual el cuerpo está en reposo, generalmente hablamos de equilibrio estático cuando en particular se tiene que: $\bar{v}_{cm} = 0$ y $\bar{\omega} = 0$. Pero observe que dinámicamente no hay ninguna distinción.

En un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido serán:

- Translación: $F_x = \Sigma F_{x_i} = 0, \quad F_y = \Sigma F_{y_i} = 0, \quad F_z = \Sigma F_{z_i} = 0$
- Rotación : $T_{\circ_x} = \Sigma \tau_{\circ_{x_i}} = 0, \quad T_{\circ_y} = \Sigma \tau_{\circ_{y_i}} = 0, \quad T_{\circ_z} = \Sigma \tau_{\circ_{z_i}} = 0$

En consecuencia, se tienen seis ecuaciones escalares independientes que corresponden a los seis grados de libertad de un cuerpo rígido, tres de translación y tres de rotación. Por lo tanto, el máximo número de incógnitas que se pueden tener en un problema práctico de equilibrio son seis.

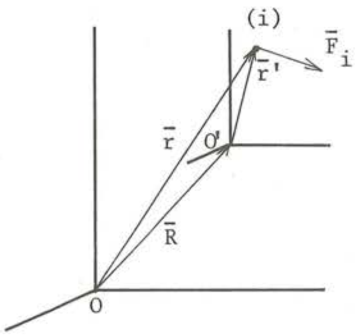
Si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son coplanares, las condiciones de equilibrio se reducen a tres. En un plano x - y, con eje z perpendicular a él, serán:

- Translación: $F_x = \Sigma F_{x_i} = 0$, $F_y = \Sigma F_{y_i} = 0$

- Rotación : $T_{\circ z} = \Sigma \tau_{\circ z_i} = 0$

Ecuaciones que corresponden a los tres grados de libertad del movimiento de un cuerpo rígido en un plano, dos de translación y una de rotación. Teniéndose tres incógnitas como máximo posible. Este caso, en un plano, es el que con mayor frecuencia se nos pedirá resolver. Es importante aclarar que en la condición de equilibrio rotacional, el torque resultante $\bar{T}_\circ$ se calcula respecto a cualquier punto O. Vamos a demostrar que en equilibrio traslacional, cuando $\bar{F} = 0$, el torque resultante $\bar{T}_{\circ'}$ con respecto a cualquier otro punto O' arbitrario es igual a $\bar{T}_\circ$ y en equilibrio rotacional se tendrá además que ambos son nulos, esto es: $T_\circ = T_{\circ'} = 0$.

Con el objeto de generalizar, encontremos primero la relación que existe entre los torques resultantes con respecto a dos orígenes O y O'.



El torque resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, con respecto al origen O es:

$$\bar{T}_\circ = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

Fig. 7.16-Posición de una fuerza $\bar{F}_i$ en los sistemas de referencia O y O'.

La relación de transformación de posiciones entre dos sistemas de referencia cualquiera O y O' es: $\bar{r}_i = \bar{R} + \bar{r}'_i$. Luego,

$$\bar{T}_\circ = \sum_{i=1}^{n} (\bar{R} + \bar{r}'_i) \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times \bar{F}_i + \bar{R} \times \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

como el torque resultante con respecto a O' es: $\bar{T}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i \times \bar{F}_i$

y con: $\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$, se tiene:

$$\bar{T}_o = \bar{T}_{o'} + \bar{R} \times \bar{F}$$

esta expresión es la relación general entre los torques resultantes $\bar{T}_o$ y $\bar{T}_{o'}$ con respecto a dos orígenes cualquiera O y O'. En particular estamos interesados cuando se cumple la condición de equilibrio traslacional, es decir, cuando: $\bar{F} = 0$. Luego, en este caso queda solamente:

$$\bar{T}_o = \bar{T}_{o'}$$

si además, el cuerpo se encuentra en equilibrio rotacional, entonces:

$$\bar{T}_o = \bar{T}_{o'} = 0$$

Por lo tanto, el tratar problemas de equilibrio, luego de haber planteado las ecuaciones de equilibrio traslacional, la condición de equilibrio rotacional deberá plantearse con respecto a un solo punto y no a varios puntos simultáneamente, buscando tantas ecuaciones como incógnitas. Solamente es aconsejable escoger aquel punto que más nos simplifique los cálculos.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la igualdad de torques ($\Sigma \bar{\tau}_o = \Sigma \bar{\tau}_{o'}$) es válida si se tiene equilibrio de translación ($\Sigma \bar{F} = 0$), observando que estas expresiones ($\Sigma \bar{\tau}_o$ y $\Sigma \bar{\tau}_{o'}$) si bien son iguales generalmente contienen diferentes variables o incógnitas y teniendo también en cuenta que en equilibrio rotacional ambas independientemente son iguales a cero ($\Sigma \bar{\tau}_o = 0$ y $\Sigma \bar{\tau}_{o'} = 0$), es posible, plantear previamente la condición de equilibrio rotacional a diferentes puntos, pero hecho esto, cada punto que tomemos nos eliminará la posibilidad de utilizar una ecuación de translación.

En algunos problemas por simplicidad de cálculo será conveniente utilizar esta alternativa, p.e.: ver problema Nº 60. Pero, recuerde siempre, solo se podrán plantear tantas ecuaciones de equilibrio como grados de libertad.

En la solución de problemas de equilibrio de un cuerpo rígido también es conveniente recordar las recomendaciones dadas en el capítulo III para una partícula. Además, al plantear las condiciones de equilibrio en un sistema de coordenadas, tenga presente que en las ecuaciones algebraicas obtenidas se consignan los valores absolutos de las fuerzas con las direcciones y sentidos asumidos en el diagrama del cuerpo libre. Por lo tanto, al despejar las incógnitas deben obtenerse valores absolutos, es decir positivos, si se obtiene algún valor negativo esto significa simplemente que la fuerza actúa sobre el cuerpo en equilibrio en sentido opuesto al considerado previamente en el D.C.L.

Finalmente, mencionaremos que el estado de equilibrio de un cuerpo rígido puede ser estable, inestable o indiferente, correspondientemente como vimos en el Capítulo IV para una partícula en un campo conservativo.

Cuando a un cuerpo rígido se le desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, si regresa a su posición original el equilibrio es estable, si el desplazamiento aumenta y el cuerpo no regresa a su posición original el equilibrio es inestable y si el cuerpo permanece en equilibrio en la nueva posición el equilibrio es indiferente. En la fig. 7.17 se muestran tres cuerpos sobre una mesa en estados de equilibrio estable, inestable e indiferente o neutro.

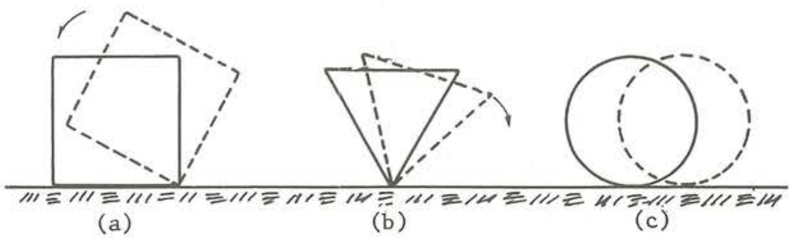


Fig. 7.17-Estados de equilibrio de un cuerpo rígido.

a) Un cubo en equilibrio estable.

b) Un cono en equilibrio inestable.

c) Una esfera en equilibrio indiferente.

Nota : La fricción no permite deslizamientos.

APENDICE 1

INTRODUCCION AL CALCULO DE $\bar{L}_o$ PARA ROTACIONES DE UN CUERPO RIGIDO.

Consideremos que el cuerpo gira con una velocidad angular instantánea $\bar{\omega}$ en torno a un punto fijo O del cuerpo rígido en un sistema inercial, o como ya se ha mencionado se puede tomar respecto al CM.

Tomando un elemento diferencial dm del cuerpo con vector posición $\bar{r}$ respecto al punto O y velocidad $\bar{v}$ en el sistema inercial, el momentum angular total del cuerpo será:

$$\bar{L}_o = \int \bar{r} \times \bar{p} = \int (\bar{r} \times \bar{v}) dm$$

Como los vectores $\bar{r}$ son de módulo constante, la velocidad correspondiente al elemento dm considerado será:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Por lo tanto, se tendrá que:

$$\bar{L}_o = \int [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm$$

desarrollando el producto triple vectorial con la identidad:

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{A}) = A^2 \bar{B} - \bar{A}(\bar{A} . \bar{B})$$

queda:

$$\bar{L}_o = \int [r^2 \bar{\omega} - \bar{r}(\bar{r} . \bar{\omega})] dm$$

si el cuerpo es homogéneo de densidad uniforme ρ, se tiene:

$$\bar{L}_o = \rho \int [r^2 \bar{\omega} - \bar{r}(\bar{r} . \bar{\omega})] dv$$

desarrollando ésta expresión podemos escribir sus componentes en la siguiente forma:

$$L_{o_x} = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_{o_y} = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_{o_z} = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

Los coeficientes con subíndices iguales, por ejemplo I_{zz}, son de la forma:

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm = \rho \int (x^2 + y^2)dv$$

y reciben el nombre de Momentos de Inercia.

Los coeficientes con subíndices diferentes, por ejemplo I_{xz}, son de la forma:

$$I_{xz} = - \int xz\ dm = - \rho \int xz\ dv$$

y reciben el nombre de Productos de Inercia.
Los nueve coeficientes forman un conjunto de elementos que se les denomina como las componentes del Tensor de Inercia.

Si la rotación es en torno a un eje fijo, digamos z, entonces: $\bar{\omega} = \omega_z \hat{k}$, y se tendrá:

$$L_{o_x} = I_{xz}\ \omega_z$$

$$L_{o_y} = I_{yz}\ \omega_z$$

$$L_{o_z} = I_{zz}\ \omega_z$$

Si adicionalmente este eje es tal que los productos de inercia I_{xz}, I_{yz} se anulan, lo cual es posible pues se tienen valores positivos y negativos de sus coordenadas y los correspondientes productos xz, yz que intervienen en el cálculo de los mismos. El momento de inercia I_{zz} con respecto a este eje no se anulará, puesto que $x^2 + y^2$ es siempre positivo, para cualquier partícula o elemento dm. Luego el momentum angular total del cuerpo que gira en torno a este eje con velocidad angular ω, será:

$$\bar{L}_o = I\ \bar{\omega}$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto a ese eje.

A este particular eje se le denomina Eje Principal de Inercia. Un cuerpo rígido siempre tiene tres ejes mutuamente perpendiculares para los cuales se cumple esta relación simple entre $\bar{L}_o$ y $\bar{\omega}$, llamados: Ejes Principales de Inercia.

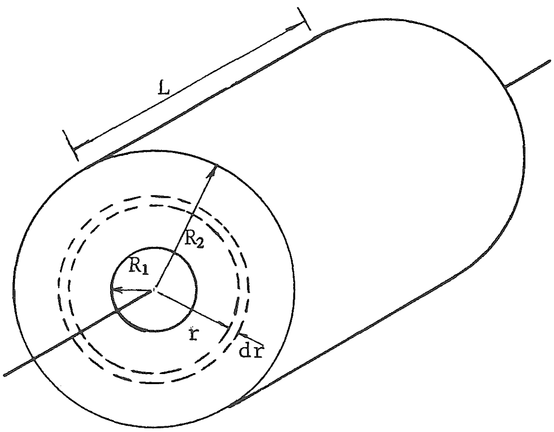
En un cuerpo con simetría respecto a un eje, o figura de revolución, éste eje y los correspondientes ejes perpendiculares entre sí en el centro de masa, son los ejes principales de inercia.

Finalmente mencionaremos que cuando un cuerpo rota en torno a un eje que no es principal, el momentum angular se puede expresar en función de los momentos de inercia respecto a los ejes principales de inercia y de las componentes de la velocidad angular sobre los mismos. Esto es:

$$\bar{L}_o = I_1 \; \omega_1 \; \hat{e}_1 + I_2 \; \omega_2 \; \hat{e}_2 + I_3 \; \omega_3 \; \hat{e}_3$$

todos estos cálculos y determinación de los ejes principales de inercia se desarrollan formalmente en cursos avanzados de mecánica.

1. Determinar el momento de Inercia de un cilindro hueco con respecto a su eje de simetría. El cilindro de densidad uniforme tiene una masa total M y radios R_1 y R_2.



$$I = \int r^2\,dm = \rho \int r^2\,dv$$

$$I = 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$

$$I = \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)} \left| \frac{r^4}{4} \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$I = \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{2(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$I = \frac{1}{2} M(R_2^2 + R_1^2)$$

Note que I es independiente de L. De aqui podemos obtener los momentos de inercia obtenidos anteriormente.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)L}$$

$$2\pi\rho L = \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$dv = 2\pi r\;dr\;L$$

-Disco. Para $\begin{Bmatrix} R_1 = 0 \\ R_2 = R \end{Bmatrix} \Rightarrow I = \frac{1}{2} MR^2$

-Aro . Para $\{R_1 \approx R_2 = R\} \Rightarrow I = MR^2$

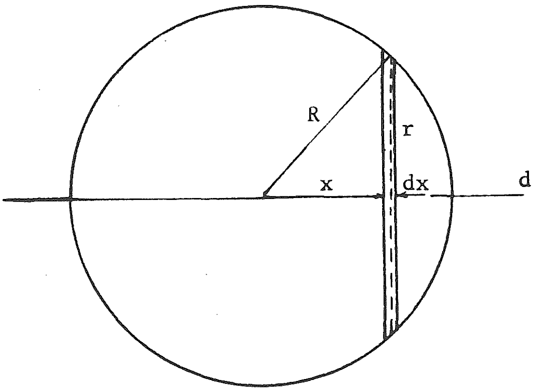
2. Determinar el momento de inercia de una esfera con respecto a un diámetro. La esfera de densidad uniforme tiene una masa total M y radio R. Considerar:

a) Esfera sólida.

b) Cáscara esférica.

---

a) Esfera sólida.



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho\pi = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}$$

$$r^2 = R^2 - x^2$$

$$dm = \rho\, dv = \rho\,\pi\, r^2 dx$$

$$dm = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}(R^2 - x^2)dx$$

Dividamos la esfera en discos de radio r y espesor dx.

Tomando como elemento diferencial un disco, su momento de inercia, como sabemos, será:

$$dI = \frac{1}{2}(dm)r^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\frac{M}{R^3}(R^2 - x^2)dx\right](R^2 - x^2)$$

$$dI = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}(R^2 - x^2)^2 dx$$

Luego, para toda la esfera, integrando para una semiesfera por simetría y duplicando, se tiene:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left[2\int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx\right]$$

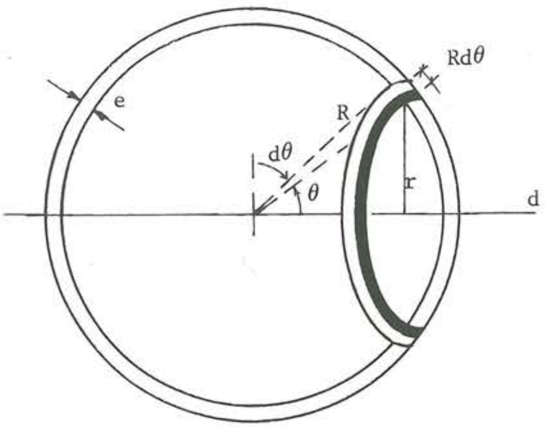
$$I = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}\int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx$$

$$I = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5}\right)$$

$$I = \frac{3}{4}\frac{M}{R^3}\left(\frac{8}{15}R^5\right)$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

b) Cáscara esférica:



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^2\ e} \Rightarrow 2\pi\rho e R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

$r = R \text{ sen } \theta$

$dv = (2\pi r)(Rd\theta)(e) = 2\pi e R^2 \text{ sen}\theta\, d\theta$

Tomemos como elemento diferencial un aro de radio r, ancho $Rd\theta$ y espesor e. El momento de inercia del cascarón será:

$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dv$$

$$I = \rho \int (R\text{sen}\theta)^2 (2\pi e R^2 \text{ sen}\theta) d\theta$$

$$I = 2\pi\rho e R^4 \int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta\ d\theta$$

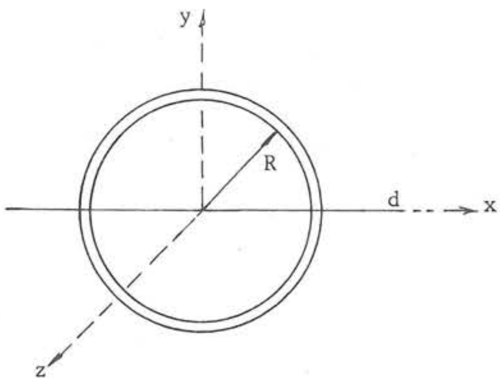
$$I = \frac{1}{2} MR^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta\ d\theta$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \left| -\frac{\cos\theta}{3}(2 + \text{sen}^2\theta) \right|_0^{\pi}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \left[\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})\right] = \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

3. Determinar los momentos de inercia de un aro delgado uniforme, de radio R y masa M, con respecto a un diámetro y con respecto a una tangente.



Conocemos el momento de inercia polar: $I_o = MR^2$

a) Con respecto a un diámetro.

Aplicando el Teorema del momento de inercia polar:

$$I_o = I_x + I_y$$

y por simetría:

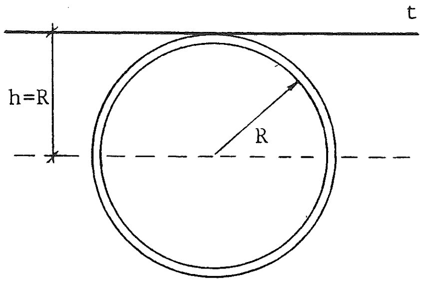
$$I_x = I_y = I_d$$

luego:

$$I_o = 2I_d \Longrightarrow I_d = \frac{1}{2} I_o \Longrightarrow I_d = \frac{1}{2} MR^2$$

b) Con respecto a una tangente.

Aplicando el Teorema de Steiner:



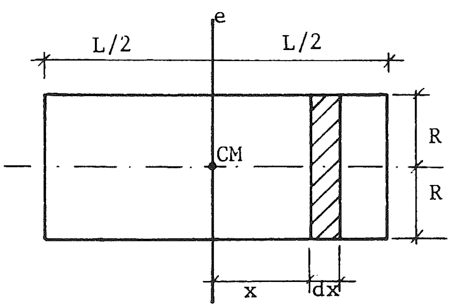
$$I_t = I_{CM} + Mh^2$$

$$I_t = I_d + MR^2$$

$$I_t = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2$$

$$I_t = \frac{3}{2} MR^2$$

4. Determinar el momento de inercia de un cilindro sólido con respecto a un eje que pasando por el CM es perpendicular al eje central. El cilindro de densidad uniforme tiene una masa total M, radio R y longitud L.



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L} \Longrightarrow \rho\pi R^2 = \frac{M}{L}$$

$$dm = \rho \; \pi R^2 dx$$

Dividamos el cilindro en discos de radio R y espesor dx. Tomemos uno de estos discos como elemento diferencial. Conocemos su momento de inercia polar y también con respecto a un diámetro, estos son:

$$dI_p = \frac{1}{2} dm \; R^2$$

$$dI_d = \frac{1}{4} dm \; R^2$$

Aplicando el teorema de Steiner tendremos el momento de inercia de este disco con respecto a un eje paralelo a una distancia x del CM del disco:

$$d\,I_e = I_d + dm\, x^2$$

$$d\,I_e = dm\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right) = \rho\pi R^2 dx\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)$$

$$d\,I_e = \frac{M}{L}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)dx$$

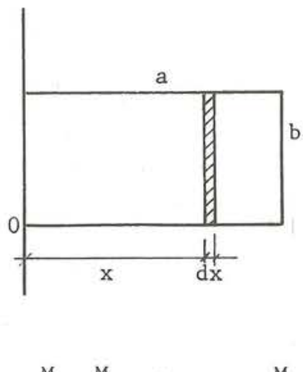
integrando entre 0 y $\frac{L}{2}$ y duplicando, se tiene:

$$I = \frac{M}{L}\left[2\int_0^L \left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)dx\right] = \frac{M}{L}\quad 2\left|\frac{1}{4}R^2x + \frac{x^3}{3}\right|_0^{L/2}$$

$$I = \frac{M}{L}\left(\frac{1}{4}R^2L + \frac{1}{12}L^3\right)$$

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

5. Determinar el momento de inercia I de una placa rectangular uniforme, de masa M y lados a y b, con respecto a uno de sus lados. Luego determinar I con respecto a un eje perpendicular a la placa que pasa por un vértice, también con respecto a un eje paralelo al anterior pero que pasa por el centro del rectángulo.



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{eab} \Longrightarrow \rho eb = \frac{M}{a}$$

$$dm = \rho ebdx = \frac{M}{a}dx$$

Para el elemento diferencial equidistante del eje, se tiene:

$$d\,I_b = (dm)x^2 = \left(\frac{M}{a}dx\right)x^2$$

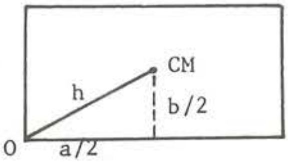
integrando, obtenemos:

$$I_b = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{M}{a}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^a$$

$$I_b = \frac{M}{a}\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}M\,a^2$$

similarmente, con respecto al lado a:

$$I_a = \frac{1}{3}M\,b^2$$



$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

aplicando el teorema del eje polar:

$$I_o = I_b + I_a = \frac{1}{3} M\,(a^2 + b^2)$$

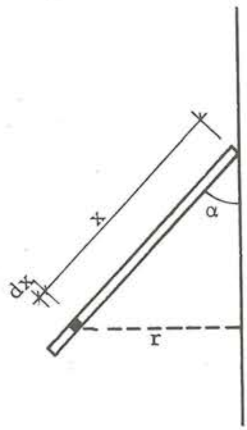
aplicando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{CM} = I_o - Mh^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2) - \frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

6. Determinar el momento de inercia de una barra delgada de masa M y longitud L, con respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos formando un ángulo α con la barra.



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{AL} \Longrightarrow \rho A = \frac{M}{L}$$

$$r = x \text{ sen } \alpha$$

$$dm = \rho\, A dx = \frac{M}{L}\, dx$$

El momento de inercia del elemento diferencial mostrado es:

$$dI = (dm)r^2 = \left(\frac{M}{L}\, dx\right)(x \text{ sen } \alpha)^2$$

$$dI = \left(\frac{M}{L} \text{ sen}^2 \alpha\right)(x^2 dx)$$

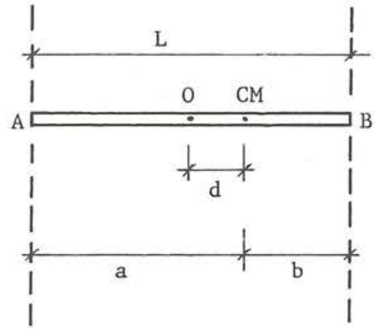
integrando,

$$I = \frac{M}{L} \text{ sen}^2 \alpha \int_o^L x^2 dx = \frac{M}{L} \text{ sen}^2 \alpha \left| \frac{x^3}{3} \right|_o^L$$

$$I = \left(\frac{M}{L} \text{ sen}^2 \alpha\right)\left(\frac{L^3}{3}\right)$$

$$I = \frac{1}{3} ML^2 \text{ sen}^2 \alpha$$

7. Se tiene una barra delgada de masa M y longitud L. Se conocen los momentos de inercia I_A e I_B de la barra con respecto a los ejes normales a ella y que pasan respectivamente por sus extremos A y B. Encontrar la distancia del centro de gravedad al punto medio de la barra.



Si $I_A \neq I_B$, la barra no es homogénea, y su centro de masa o centro de gravedad no coincide con su punto medio.

Relación geométrica entre las distancias d, a, b mostradas en la figura y que ubican los puntos A, O, CM, B, sobre la barra:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= L \\ a &= d + \frac{L}{2} \end{aligned}\right\} \quad a = d + \frac{a+b}{2} \Longrightarrow d = \frac{a-b}{2}$$

aplicando el teorema de Steiner:

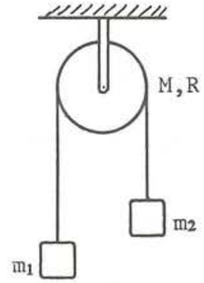
$$\left.\begin{aligned} I_A &= I_{CM} + Ma^2 \\ I_B &= I_{CM} + Mb^2 \end{aligned}\right\} \text{restando}, I_A - I_B = M(a^2 - b^2) = M(a+b)(a-b) = ML(a-b)$$

$$\text{luego:} \quad a - b = \frac{I_A - I_B}{ML} \Longrightarrow \frac{a-b}{2} = \frac{I_A - I_B}{2ML}$$

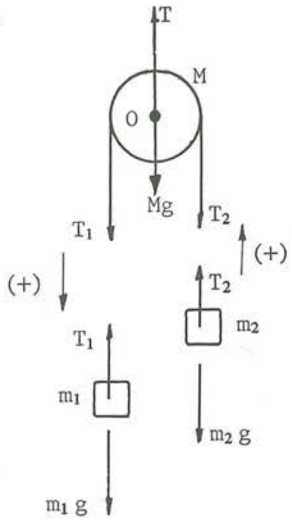
$$\text{finalmente:} \ d = \frac{I_A - I_B}{2ML}$$

Por supuesto, si la barra es uniforme: $I_A = I_B$ y $d = 0$. El CM coincide con O.

8. En el sistema mostrado en la figura, determinar: la aceleración lineal de las masas, las tensiones en la cuerda y la aceleración angular de la polea.



D.C.L.



- Movimiento de rotación.

Al considerar que la polea tiene masa (inercia), para que se mueva con una aceleración angular se requiere que la tensión en la cuerda sea diferente a ambos lados de la polea, $T_o \neq 0$. La ecuación de movimiento será:

$$T_o = I\alpha \Longrightarrow T_1 R - T_2 R = I\,\alpha$$

con: $I = \frac{1}{2} MR^2$

$$(T_1 - T_2)\,R = \frac{1}{2} MR^2\alpha$$

la relación entre la aceleración angular y la aceleración tangencial en el borde de la polea (cuerda) es:

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

luego, queda:

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} Ma$$

- Movimiento de translación.

En el capítulo 3 este problema se planteó, considerando una polea ideal sin masa, con una tensión T en la cuerda. Teniendo ahora en cuenta que las tensiones a ambos lados de la polea son diferentes, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \end{aligned}\right\} \text{ sumando: } T_2 - T_1 - m_2 g + m_1 g = (m_1 + m_2)a$$

teniéndose:

$$(T_1 - T_2) = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

resolviendo con la expresión anteriormente encontrada queda:

$$\frac{1}{2} Ma = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M)a = (m_1 - m_2)g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$

conociendo la aceleración lineal, de las expresiones arriba planteadas, las tensiones serán:

$$T_1 = m_1 (g - a)$$

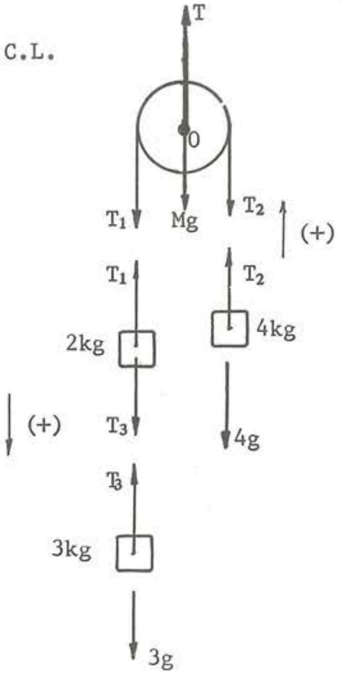
$$T_2 = m_2 (g + a)$$

y la aceleración angular de la polea:

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

9. Con los resultados obtenidos en el problema anterior resolver el problema Nº 18, pág. 193 del Capítulo 3, teniendo en cuenta la inercia rotacional de la polea, de masa M = 2kg y radio R = 10 cm. Comparar valores numéricos.

D.C.L.



Con relación al problema anterior, podemos considerar, equivalentemente, que: $m_1 = 2 + 3 = 5$kg.

Luego,

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{(5-4)g}{5+4+\frac{1}{2}2} = \frac{g}{10} = 0.98 \text{m/s}^2$$

$$T_1 = m_1(g-a) = 5(9.81-0.98) = 5 \times 8.83 = 44.15\text{N}$$

$$T_2 = m_2(g+a) = 4(9.81+0.98) = 4 \times 10.79 = 43.16\text{N}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0.98}{0.1} = 9.81 \quad \text{rad/s}^2$$

el valor de T_3 será:

$$m_3 g - T_3 = m_3 a$$

$$T_3 = m_3(g-a) = 3(9.81-0.98) = 3 \times 8.83 = 26.49\text{N}$$

Comparación de valores numéricos.

- aceleración lineal : $0.98 < 1.09$ m/s^2
- aceleración angular: $9.81 < 10.9$ rad/s^2

La fuerza externa gravitacional también tiene que acelerar a la polea que presenta inercia. Por lo tanto, ahora, se obtienen aceleraciones menores

- Tensiones: $T_2 < T < T_1 \Longrightarrow 43.16 < 43.60 < 44.15$ N

$$T' < T_3 \qquad \Longrightarrow 26.16 < 26.49\text{N}$$

La tensión única T se desbalancea, en un lado aumenta y en el otro disminuye.

Al disminuir la aceleración, la tensión en la cuerda que actúa sobre la masa m_3 tiene que aumentar como puede verse en el D.C.L. correspondiente.

$$\text{Si } M = 0 \Longrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g$$

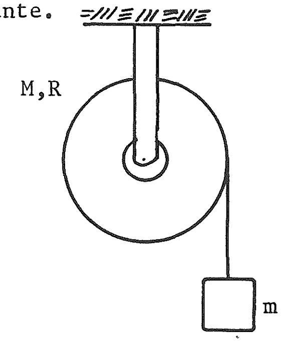
y reemplazando, podemos comprobar que $T_1 = T_2 = T$

$$T_1 = m_1(g-a) = m_1 g - m_1 \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{40}{9} g = 43.60 \text{ N}$$

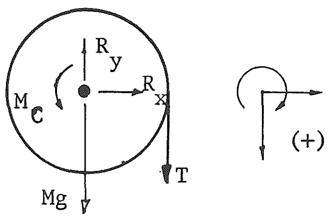
$$T_2 = m_2(g+a) = m_2 g + m \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{40}{9} g = 43.60 \text{ N}$$

10. Una polea de masa $M = 5$kg y radio $R = 0.2$m, tiene arrollada a su alrededor una cuerda de masa despreciable. Al extremo libre de la cuerda se sujeta un bloque de masa $m = 10$kg, y soltándolo del reposo cae 3 metros en 6 segundos.

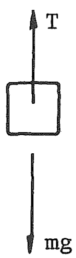
Calcular el momento producido por el rozamiento en el cojinete, asumiendo que es constante.



D.C.L



$I_o = \frac{1}{2} MR^2$



Por causa del rozamiento en el cojinete se genera un torque o momento M_c que se opone al giro de la polea.

Ecuaciones de movimiento:

- Rotación de la polea: $TR - M_c = I_o\alpha$
- Translación del bloque: $mg - T = ma$

  con la relación: $a = \alpha R$

  resolviendo para M_c, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} M_c &= TR - I_o \frac{a}{R} \\ T &= m(g-a) \end{aligned}\right\} M_c = m(g-a)R - I_o \frac{a}{R} = mgR - (mR + \frac{I_o}{R})a$$

con: $I_o = \frac{1}{2} MR^2$, se tiene:

$$M_c = mgR - (m + \frac{1}{2} M)Ra$$

Por otro lado, la aceleración del bloque es:

$$y = \frac{1}{2} at^2 \Longrightarrow a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2 \times 3}{(6)^2} = \frac{1}{6} \quad m/s^2$$

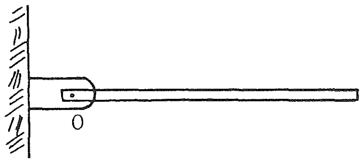
Luego, finalmente queda:

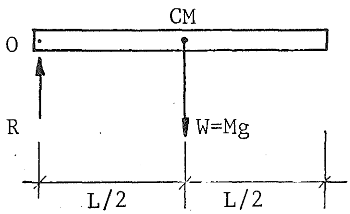
$$M_c = 10 \times 9.81 \times 0.2 - (10 + \frac{1}{2}\,5)0.2\,\frac{1}{6} = 19.62 - \frac{5}{12} = 19.62 - 0.42$$

$$M_c = 19.2 \text{ N - m}$$

Por supuesto $TR > M_c$, compruebe.

11. Una barra homogénea de masa M = 1kg y longitud L = 3m, se encuentra articulada en uno de sus extremos como se muestra en la figura. Sabiendo que la barra puede girar libremente sin fricción alrededor de este punto, calcular la aceleración angular inicial de la barra cuando se le suelta del reposo en la posición horizontal y también, la aceleración lineal inicial del CM de la barra.





$$I_o = \frac{1}{3} ML^2$$

Se tiene una rotación pura en torno a O, ecuación de movimiento:

$$T_o = I_o\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{T_o}{I_o}$$

en el instante inicial, se tiene:

$$\alpha = \frac{Mg\,\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}\,ML^2} = \frac{3g}{2L} = \frac{3 \times 9.81}{2 \times 3} = \frac{9.81}{2} = 4.9\text{m/s}^2$$

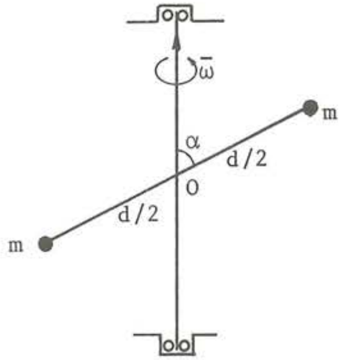
note que α es independiente de M.

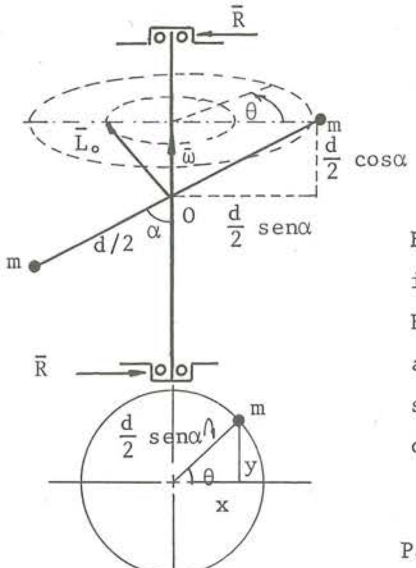
Y la aceleración del CM en ese mismo instante, será:

$$a_{cm} = \alpha\,\frac{L}{2} = \frac{3}{4}\,g = \frac{3}{4} \times 9.81 = 7.36 \text{ m/s}^2$$

note que a_{cm} es independiente de M y L.

12. Dos masas iguales están separadas una distancia d unidas mediante una barra rígida de masa despreciable. Este sistema rota con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical con un ángulo α como se muestra en la figura. Encontrar la magnitud del momentum angular $|\bar{L}_o|$ y la magnitud del torque $|\bar{T}_o|$ correspondiente.





Este dispositivo ha sido analizado en el item 7.4.

El momentum angular $\bar{L}_o$ es perpendicular a la barra y gira con ella manteniendo su magnitud constante. Este valor es el que nos piden calcular; veamos:

Para una de las masas se tiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\theta \\ y &= \frac{d}{2}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ z &= \frac{d}{2}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \underset{\text{con:}\dot{\theta}=\omega}{\overset{\text{derivando}}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{d}{2}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ \dot{y} &= \frac{d}{2}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\theta \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}\right.$$

luego:

$$\bar{\ell}_o = m\,\bar{r} \times \bar{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m[-z\dot{y}\hat{i} + z\dot{x}\hat{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{k}]$$

efectuando:

$$\bar{\ell}_o = m[\,(-\frac{d^2}{4}\omega\ \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)\hat{i} + (-\frac{d^2}{4}\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)\hat{j} + (\frac{d^2}{4}\omega\operatorname{sen}^2\alpha)\hat{k}\ ]$$

$$\bar{\ell}_o = m\,\frac{d^2}{4}\,\omega[\,-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)\hat{i} + (-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)\hat{j} + (\operatorname{sen}^2\alpha)\hat{k}\ ]$$

Para la otra partícula se obtiene el mismo valor, luego:

$\bar{L}_o = 2m\,\bar{r} \times \bar{v} = 2\bar{\ell}_o$

y su módulo pedido será:

$$|\bar{L}_o| = \frac{1}{2}\,m\,d^2\omega\,\sqrt{\cos^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha\ \cos^2\theta + \cos^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\alpha}$$

$$|\bar{L}_o| = \frac{1}{2}\,md^2\omega\ \operatorname{sen}\alpha\ \sqrt{\cos^2\alpha(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$|\bar{L}_o| = \frac{1}{2}\,md^2\omega\operatorname{sen}\alpha$$

y el torque será:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

derivando $\bar{L}_o$:

$$\bar{T}_o = \frac{1}{2}\,md^2\omega\ [\,(\omega\ \cos\ \alpha\ \operatorname{sen}\ \alpha\ \operatorname{sen}\ \theta)\hat{i} + (-\omega\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\ \theta)\hat{j} + (0)\hat{k}\ ]$$

$$\bar{T}_o = \frac{1}{2}\,md^2\omega^2[\,(\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\theta)\hat{i} + (-\ \cos\alpha\ \operatorname{sen}\ \alpha\ \cos\ \theta)\hat{j}]$$

y el módulo pedido será:

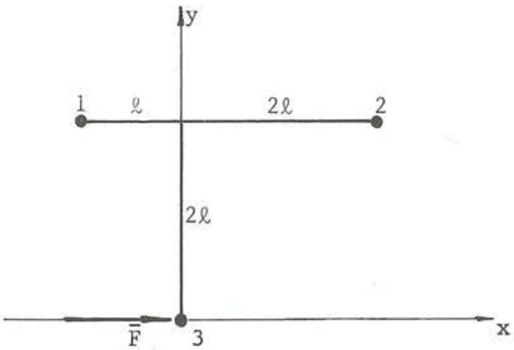
$$|\bar{T}_o| = \frac{1}{2}\,md^2\omega^2\sqrt{\cos^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha\ \cos^2\theta}$$

$$|\bar{T}_o| = \frac{1}{2}\,md^2\omega^2\sqrt{\cos^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha\ (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}$$

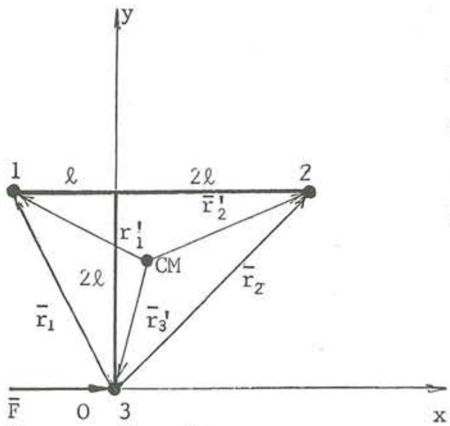
$$|\bar{T}_o| = \frac{1}{4}\,md^2\omega^2\operatorname{sen}2\alpha$$

Este torque es producido por las fuerzas de reacción en los cojinetes del eje y es siempre perpendicular a $\bar{L}_o$. No tiene componente en el eje z, por lo tanto $\bar{\omega}$ se mantiene constante.

13. Un cuerpo rígido está conformado por tres partículas iguales de masa m cada una y ligadas mediante barras de masa despreciable dispuestas como se indica en la figura. Estando inicialmente en reposo en un plano horizontal (x, y), sin fricción, se le aplica una fuerza $\bar{F} = F\hat{i}$ directamente sobre la partícula 3. Encontrar la aceleración angular del cuerpo rígido y la aceleración de translación de su CM. Posteriormente, como ejercicio, determinar estas mismas cantidades mediante las ecuaciones fundamentales efectuando los cálculos en un sistema de coordenadas rectangular (x,y,z). ¿Cuál será la aceleración lineal que tiene la partícula 2?



D.C.L.



$\bar{r}_1 = \ell(-\hat{i} + 2\hat{j})$

$\bar{r}_2 = 2\ell(\hat{i} + \hat{j})$

$\bar{r}_3 = 0$

Primero encontremos la posición del CM.

$$r_{cm} = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{M} = \frac{m\ell(i + 4\hat{j})}{3m} = \frac{\ell}{3}(\hat{i} + 4\hat{j})$$

El momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano pasando por el origen O, será:

$$I_o = \Sigma\, m_i r_i^2 = m(r_1^2 + r_2^2)$$

$$\text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \ell\sqrt{5} \\ \\ r_2 = 2\ell\sqrt{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow I_o = 13m\ell^2$$

aplicando el teorema de Steiner, se tiene:

$$I_{CM} = I_\circ - Mh^2$$

con : $\quad h = r_{cm} = \dfrac{\ell}{3}\sqrt{17}$

$$I_{CM} = 13m\ell^2 - 3m\ \frac{17}{9}\ \ell^2 = m\ell^2\left(13 - \frac{17}{3}\right)$$

$$I_{CM} = \frac{22}{3}m\ell^2$$

Ecuaciones de movimiento:

- Rotación en torno a un eje perpendicular al plano y que pasa por el CM.

$$T = I\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{T}{I} = \frac{F\left(\frac{4}{3}\ell\right)}{\frac{22}{3}m\ell^2} = \frac{2\ F}{11\ m\ \ell}$$

- translación del CM en la dirección x.

$$F = Ma_{cm} \Longrightarrow a_{cm} = \frac{F}{M} = \frac{F}{3m}$$

Ahora, calculemos explícitamente el momentum angular con respecto al CM:

$$\bar{L}' = \Sigma\, \bar{r}_i' \times m_i \dot{\bar{r}}_i' = \Sigma\, m_i\, [\, \bar{r}_i' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i')]$$

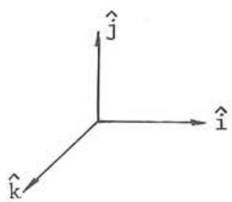
con: $\bar{r}_i' = \bar{r}_i - \bar{r}_{cm}$, y considerando que: $\hat{i}=\hat{i}'$, $\hat{j}=\hat{j}'$, $\hat{k}=\hat{k}'$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{r}_1' &= \ell(-\hat{i}+2\hat{j}) - \frac{1}{3}\ell(\hat{i}+4\hat{j}) = \frac{2}{3}\ell(-2\hat{i}+\hat{j})\\
\bar{r}_2' &= 2\ell(i+\hat{j}) - \frac{1}{3}\ell(\hat{i}+4\hat{j}) = \frac{1}{3}\ell(5\hat{i}+2\hat{j})\\
\bar{r}_3' &= 0 - \frac{1}{3}\ell(\hat{i}+4\hat{j}) = -\frac{1}{3}\ell(\hat{i}+4\hat{j})
\end{aligned}\right\}$$

Nota: Por simplicidad de escritura no primamos los vectores unitarios al ser iguales en este caso.

con : $\bar{\omega} = \omega\,\hat{k}$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\omega} \times \bar{r}_1' &= \frac{2}{3}\ell\omega\ (-2\hat{j} - \hat{i})\\
\bar{\omega} \times r_2' &= \frac{1}{3}\ell\omega\ (5\hat{j} - 2\hat{i})\\
\bar{\omega} \times r_3' &= -\frac{1}{3}\ell\omega\ (\hat{j} - 4\hat{i})
\end{aligned}\right\}$$



luego:

$$\bar{r}_1' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1') = \frac{4}{9}\,\ell^2\,\omega \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{9}\,\ell^2\omega(5\hat{k}) = \frac{20}{9}\,\ell^2\ \omega\,\hat{k}$$

$$\bar{r}_2' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_2') = \frac{1}{9}\,\ell^2\,\omega \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\,\ell^2\ \omega\ (29\hat{k}) = \frac{29}{9}\,\ell^2\omega\,\hat{k}$$

$$\bar{r}_3' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_3') = \frac{1}{9}\,\ell^2\,\omega \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\,\ell^2\omega\ (17\hat{k}) = \frac{17}{9}\,\ell^2\omega\,\hat{k}$$

teniéndose:

$$\bar{L}' = \frac{1}{9}\,\ell^2\omega m\ (20 + 29 + 17)\hat{k} = \frac{66}{9}\,\ell^2\omega\, m\hat{k} = \frac{22}{3}\,\ell^2\ \omega\ m\ \hat{k}$$

derivando:

$$\frac{d\bar{L}'}{dt} = \frac{22}{3}\,\ell^2\ m\ \alpha\ \hat{k}$$

como el torque es:

$$\bar{T}' = \bar{r}_3' \times \bar{F} = -\frac{1}{3}\,\ell\ (\hat{i} + 4\hat{j}) \times F\hat{i} = \frac{4}{3}\,\ell\ F\ \hat{k}$$

finalmente, aplicando la ecuación fundamental : $\bar{T}' = \dfrac{d\bar{L}'}{dt}$,

igualando se tiene:

$$\frac{22}{3}\,\ell^2 m\alpha = \frac{4}{3}\,\ell F \Longrightarrow \bar{\alpha} = \frac{2F}{11m\ell}\ \hat{k}$$

y para el movimiento de translación del CM:

$$\bar{a}_{cm} = \frac{\bar{F}}{M} = \frac{F}{3m}\ \hat{i}$$

La aceleración de la partícula 2, en el instante inicial (ω=0), será:

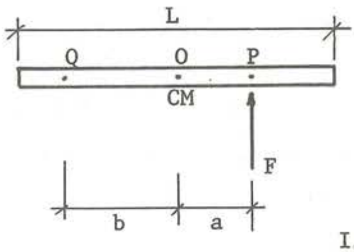
$$\bar{a}_2 = \bar{a}_{cm} + \bar{a}_{2t} = \bar{a}_{cm} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_2'$$

$$\bar{a}_2 = \frac{F}{3m}\ \hat{i} + \frac{2F}{11m\ell}\ \hat{k} \times \frac{1}{3}\,\ell\ (5\hat{i} + 2\hat{j}) = \frac{F}{3m}\ \hat{i} + \frac{2F}{33m}\ \hat{k} \times (5\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$a_2 = \frac{F}{3m}\ \hat{i} + \frac{2F}{33m}\ (5\hat{j} - 2\hat{i}) = \frac{F}{33m}\ (11\hat{i} + 10\hat{j} - 4\hat{i})$$

$$\bar{a}_2 = \frac{F}{33m}\ (7\hat{i} + 10\hat{j})$$

14. Una varilla de masa M y longitud L reposa sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. Una fuerza horizontal constante F actúa perpendicularmente sobre la varilla a una distancia a del C.M. durante un intervalo de tiempo Δt muy corto. Encontrar: El impulso que produce la fuerza y la velocidad lineal del CM., la aceleración angular de la varilla mientras actúa la fuerza, la velocidad angular que ha adquirido la varilla asumiendo que α es constante teniendo en cuenta que Δt es muy corto y finalmente, la posición de un punto sobre la varilla que tenga velocidad lineal cero cuando deja de actuar la fuerza.



- Impulso: $\bar{J} = \bar{F}\Delta t$
- velocidad lineal del CM:

$$\bar{J} = \Delta\bar{P} = M\bar{v}_{cm} \Rightarrow \bar{v}_{cm} = \frac{\bar{J}}{M} = \frac{\bar{F}\Delta t}{M}$$

$$I_o = \frac{1}{12} ML^2$$

- aceleración angular de la varilla:

$$\bar{T}_o = I_o\bar{\alpha} \Longrightarrow \bar{\alpha} = \frac{\bar{T}_o}{I_o} = \frac{aF}{I_o}\hat{k} = \frac{12aF}{ML^2}\hat{k}$$

- velocidad angular de la varilla:

si α es constante, $\bar{\omega} = \bar{\alpha}\ \Delta t$:

$$\bar{\omega} = \frac{12aF\Delta t}{ML^2}\hat{k} = \frac{aJ}{I_o}\hat{k}$$

observe que también podemos encontrar $\bar{\omega}$ determinando primero $\bar{L}_o$. Veamos:

$$\bar{L}_o = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{r} \times \bar{J} = a\,J\,\hat{k} = a\,F\Delta t\,\hat{k}$$

Como: $\bar{L}_o = I_o\,\bar{\omega} \Longrightarrow \bar{\omega} = \dfrac{\bar{L}_o}{I_o} = \dfrac{aJ}{I_o}\hat{k} = \dfrac{12a\,F\Delta t}{ML^2}\hat{k}$

- Posición del punto Q:

Si $\bar{V}_Q = 0$, Q es un punto fijo a un S.I. y podemos escribir que:

$$v_{cm} = \omega b$$

igualando con el valor encontrado anteriormente:

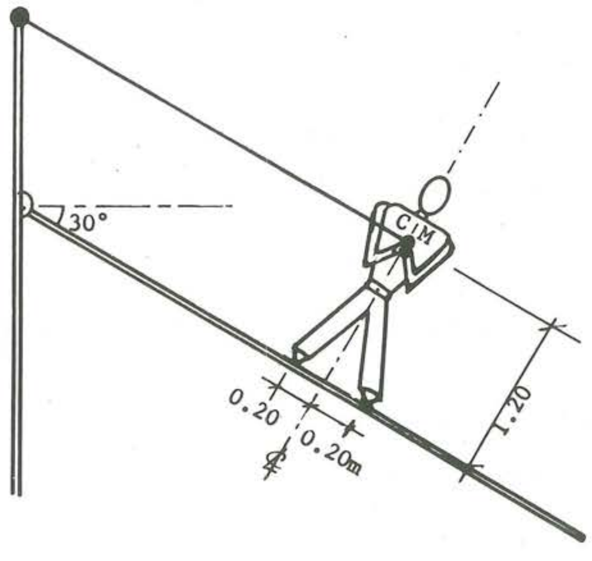
$$\omega b = \frac{J}{M}$$

$$b = \frac{J}{M\omega} = \frac{J}{M\frac{aJ}{I_\circ}} = \frac{I_\circ}{Ma} = \frac{L^2}{12a}$$

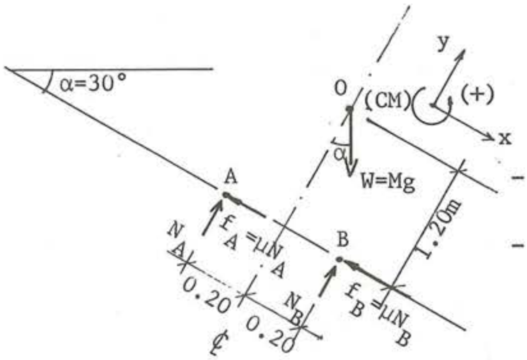
El punto Q es conocido como el centro instantáneo de rotación.

15. Una persona de 80 kg está parada rígida y perpendicularmente a una superficie plana que se encuentra inclinada 30° hacia abajo de la horizontal. La persona se mantiene en equilibrio sujetándose con una cuerda como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción dinámico entre los zapatos de la persona y el piso inclinado es 0.1, determinar las reacciones en los pies de la persona después que suelta la cuerda que lo sostenía y también encontrar a_{cm}.

¿Cómo cambian las reacciones si la persona estuviera colgada con ambas manos de una barra inclinada?



D.C.L.



Las ecuaciones de movimiento son:

- En x, $\Sigma F_x = Ma_{cm}$:

$$Mg\ sen\alpha - \mu(N_A + N_B) = M\ a_{cm}$$

- En y, $\Sigma\ F_y = 0$:

$$N_A + N_B - Mg\ \cos\ \alpha = 0$$

$$N_A + N_B = Mg\ \cos\ \alpha$$

- En z, $\Sigma\ T_o = 0$:

$$-\ \mu(N_A + N_B)x1.20 - N_A\ x\ 0.2 + N_B x 0.2 = 0$$

$$N_A - N_B = -\ \mu(N_A + N_B)\ x\ 6$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene:

- Reacciones normales N_A y N_B.

$$\left.\begin{array}{l} N_A + N_B = Mg\cos\alpha \\ \\ N_A - N_B = -6\mu Mg\cos\alpha \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} N_A = \frac{1}{2}(1-6\mu)Mg\cos\alpha = \frac{1}{2}(1-0.6)80g\frac{\sqrt{3}}{2} = 8g\sqrt{3} = 135.93N \\ \\ N_B = \frac{1}{2}(1+6\mu)Mg\cos\alpha = \frac{1}{2}(1+0.6)80g\frac{\sqrt{3}}{2} = 32g\sqrt{3} = 543.73N \end{array}\right\} N_A < N_B$$

Comprobación: $N_A + N_B = Mg\cos\alpha = 40g\sqrt{3} = 679.66N$

- Reacciones tangenciales f_A y f_B.

$$\left.\begin{array}{l} f_A = \mu\ N_A = 13.59\ N \\ \\ f_B = \mu\ N_B = 54.37\ N \end{array}\right\}\ f_A < f_B$$

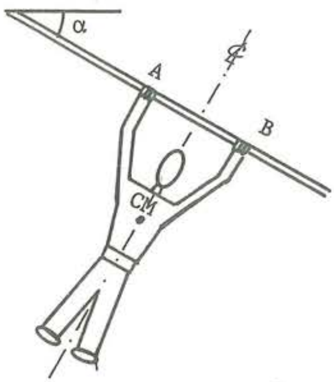
- aceleración a_{cm} :

$$a_{cm} = \frac{Mg\ sen\ \alpha - \mu(N_A + N_B)}{M} = \frac{Mgsen\alpha - \mu Mg\cos\alpha}{M} = g(sen\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a_{cm} = 9.81\left(\frac{1}{2} - 0.1\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9.81}{2}\ (1 - 0.17) = 4.06\ m/s^2$$

Si la persona está colgada de una barra inclinada, los valores encontrados de las reacciones en el apoyo A y B se intercambian.

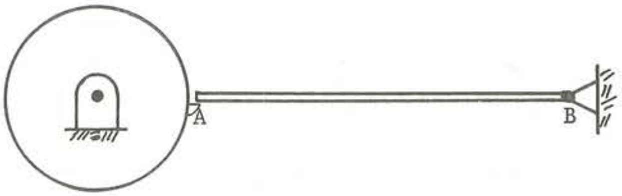
Teniéndose ahora:



$$N_A > N_B \text{ y } f_a > f_B$$

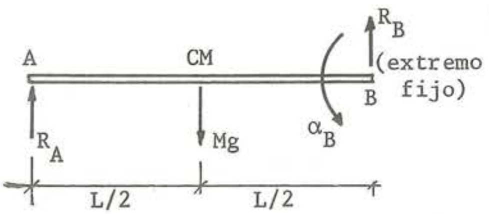
Esto se debe a que en la ecuación de momentos, los producidos por f_A y f_B cambian de signo. Sus sentidos se invierten al encontrarse el CM debajo de la barra.

16. Se tiene una barra homogénea de masa M y longitud L y una volante (disco) de masa m y radio r. Encontrar las reacciones en los apoyos de los extremos A y B de la barra en el instante inicial mostrado en la figura.



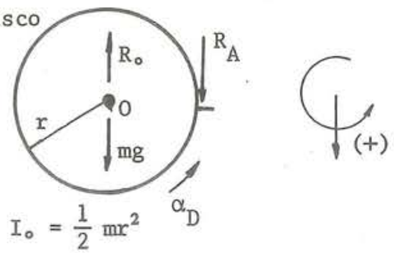
D.C.L.

-Barra.



$I_B = \frac{1}{3} ML^2$

-Disco



$I_o = \frac{1}{2} mr^2$

Ecuaciones de movimiento:

- Barra.
  - Translación: $Mg - R_A - R_B = M\, a_{cm}$
  - Rotación: $Mg\, \frac{L}{2} - R_A\, L = I_B \alpha_B$

    con: $a_{cm} = \alpha_B \frac{L}{2}$ y $I_B = \frac{1}{3} ML^2$, queda:

    $$Mg - R_A - R_B = M\, \alpha_B \frac{L}{2}$$

    $$Mg\, \frac{1}{2} - R_A = \frac{1}{3} ML\, \alpha_B$$
- Disco.
  - Translación: $mg + R_A - R_o = 0$
  - Rotación: $-R_A r = I_o\, \alpha_D$

    con: $I_o = \frac{1}{2} mr^2$, queda:

$$mg + R_A - R_o = 0$$

$$- R_A = \frac{1}{2} mr\, \alpha_D$$

Por otro lado, se tiene la relación entre las aceleraciones angulares de la barra y el disco mediante la aceleración lineal del punto A de la barra, esto es:

$$\left.\begin{aligned} a_A &= \alpha_B L \\ a_A &= - \alpha_D r \end{aligned}\right\} \quad \alpha_B L = - \alpha_D r$$

Resolviendo estas 5 ecuaciones se obtendrán las 5 incógnitas R_A, R_B, α_B, α_D y R_o, nosotros estamos interesados en encontrar R_A y R_B; veamos:

$$- R_A = \frac{1}{2} m\, r\, \alpha_D = \frac{1}{2} mr\left(- \frac{L}{r} \alpha_B\right) \Longrightarrow R_A = \frac{1}{2} m\, \alpha_B L$$

$$\frac{1}{2} Mg - R_A = \frac{1}{3} ML\, \alpha_B = \frac{1}{3} ML \left(\frac{2R_A}{m\,L} \right) = \frac{2}{3} \frac{M}{m} R_A$$

$$R_A\left(1 + \frac{2M}{3m}\right) = \frac{1}{2} Mg \Longrightarrow R_A = \frac{Mg}{2\left(1+ \frac{2M}{3m}\right)} = \frac{m\, Mg}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$

$$Mg - R_A - R_B = M\, \alpha_B \frac{L}{2} = M \left(\frac{2R_A}{m\,L} \right) \frac{L}{2} = \frac{M}{m} R_A$$

$$R_B = Mg - R_A\left(1 + \frac{M}{m}\right) = Mg - \frac{m\, Mg}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)} \left(1 + \frac{M}{m}\right) = Mg - \frac{M(m + M)g}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$

$$R_B = \frac{Mg\left(m + \frac{1}{3} M\right)}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$

También podemos encontrar α_B, α_D y R_o :

$$\alpha_B = \frac{2R_A}{m\,L} = \frac{2}{m\,L} \; \frac{m\, Mg}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)} = \frac{Mg}{L\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$

$$\alpha_D = - \frac{L}{r} \alpha_B = - \frac{L}{r} \; \frac{Mg}{L\left(m + \frac{2}{3} M\right)} = \frac{- Mg}{r\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$ (observe: sentido opuesto al asignado)

$$R_o = mg + R_A = mg + \frac{m\, Mg}{2\left(m + \frac{2}{3} M\right)} = \frac{mg\left(m + \frac{7}{6} M\right)}{\left(m + \frac{2}{3} M\right)}$$

17. Un palitroque del juego de bolos, o clava de malabarista, es lanzado al aire. Describir su movimiento. Idealizar un cuerpo rígido constituído por dos esferas de masas puntuales m_1 y m_2 unidas mediante una barra de longitud ℓ y masa despreciable.

El movimiento de dos partículas, unidas o separadas, ha sido analizado con extensión en la exposición teórica de este capítulo y del anterior.

- Movimiento de translación:

$$-Mg\,\hat{k} = M\bar{a}_{cm} \Longrightarrow \bar{a}_{cm} = -g\hat{k}$$

El centro de masa describe un movimiento parabólico en un plano, dependiendo por supuesto de las condiciones iniciales.

- Movimiento de rotación:

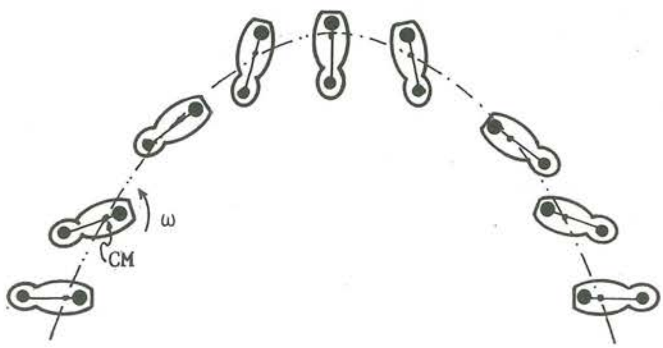
La única fuerza que actúa es la gravitacional, con respecto al CM el torque que produce es nulo, $\bar{T}_o = 0$, de la ecuación fundamental se tiene:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow \bar{L}_o = \text{constante.}$$

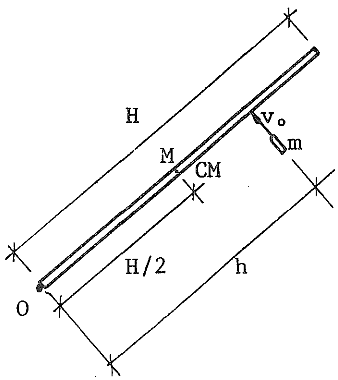
teniéndose un movimiento de rotación en un plano con respecto al CM, luego:

$$\bar{L}_o = I_o\,\omega \Longrightarrow \bar{\omega} = \text{constante}$$

El cuerpo rota respecto al CM manteniendo constante la velocidad angular de lanzamiento ($\bar{\omega} = \bar{\omega}_o$).



18. Una varilla de masa M y longitud H reposa sobre un plano horizontal liso. Uno de sus extremos se encuentra fijo en un punto O teniendo la barra libertad de rotar alrededor del eje z perpendicular al plano en ese punto. A una distancia h del extremo O incide perpendicularmente a la barra con velocidad v_o una bala de masa m, golpeando a la barra y quedando adherida a ella. Calcular la velocidad angular ω de la varilla inmediatamente después del choque. ¿Qué valor debe tener h, en relación a H, para que la cantidad de movimiento lineal se conserve en el choque?



$$I_{o\,barra} = \frac{1}{3}MH^2$$

$$I_{o\,bala} = mh^2$$

En el choque $T_{o_z}^{ext} = 0$, luego se conserva el momentum angular:

$$L_{o_z} = I\,\omega = \text{constante.}$$

esto es:

$$mv_o h = \left(\frac{1}{3}MH^2 + m\,h^2\right)\omega$$

luego:

$$\omega = \frac{m\,v_o\,h}{\frac{1}{3}M\,H^2 + m\,h^2} = \frac{v_o}{\left(\frac{1}{3}\frac{MH^2}{m\,h^2} + 1\right)h}$$

La cantidad de movimiento lineal no se conserva, la reacción en la articulación O es una fuerza externa impulsiva desconocida, teniendose en general que $F^{ext} \neq 0$. Sin embargo, podemos calcular la cantidad de movimiento lineal antes y después del choque e igualando ambas expresiones buscar la condición, distancia h, para que se cumpla la igualdad. Veamos:

$$p_i = mv_i = mv_o$$

$$p_f = mv_f + Mv_{cm\ f} = m(\omega h) + M\left(\omega\frac{H}{2}\right) = \left(m\,h + \frac{1}{2}MH\right)\omega$$

$$p_f = \left(mh + \frac{1}{2}MH\right)\frac{v_o}{\left(\frac{1}{3}\frac{M\,H^2}{m\,h^2} + 1\right)h} = mv_o\,\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{MH}{mh} + 1\right)}{\left(\frac{1}{3}\frac{MH^2}{mh^2} + 1\right)}$$

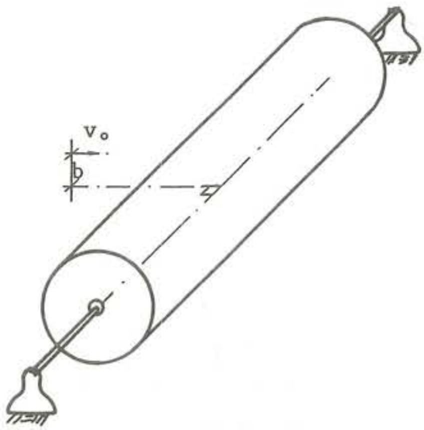
igualando, $p_i = p_f$, se tiene:

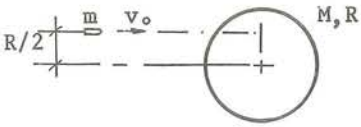
$$\frac{1}{2}\frac{M\ H}{m\ h} + 1 = \frac{1}{3}\frac{M\ H^2}{mh^2} + 1 \implies \frac{1}{2}\ \frac{M\ H}{m\ h} = \frac{1}{3}\ \frac{M\ H^2}{m\ h^2} \implies \frac{H}{h} = \frac{3}{2}$$

Luego, el valor de h pedido, para que se cumpla esta condición, es:

$$h = \frac{2}{3}\ H.$$

19. Se dispara una bala de masa m y con velocidad v_o hacia un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro está inicialmente en reposo y se encuentra montado en una barra horizontal fija que atravezando el cilindro coincide con su eje. La bala incide perpendicular al eje con un parámetro de impacto $b = \frac{R}{2}$. Calcular la velocidad angular del sistema después que la bala se incrusta en el cilindro. Considere que la bala se incrusta a $\frac{R}{2}$ e idealice que el impacto se efectúa a esta distancia.





Teniéndose un choque, se conserva la cantidad de movimiento angular.

$$\bar{L}_o = \text{constante}$$

Idealizando el instante del impacto a $\frac{R}{2}$, para este choque plástico se tiene:

$$mv_o\ \frac{R}{2} = \left(\frac{1}{2}\ MR^2 + m\ \frac{R^2}{4}\right)\ \omega$$

luego:

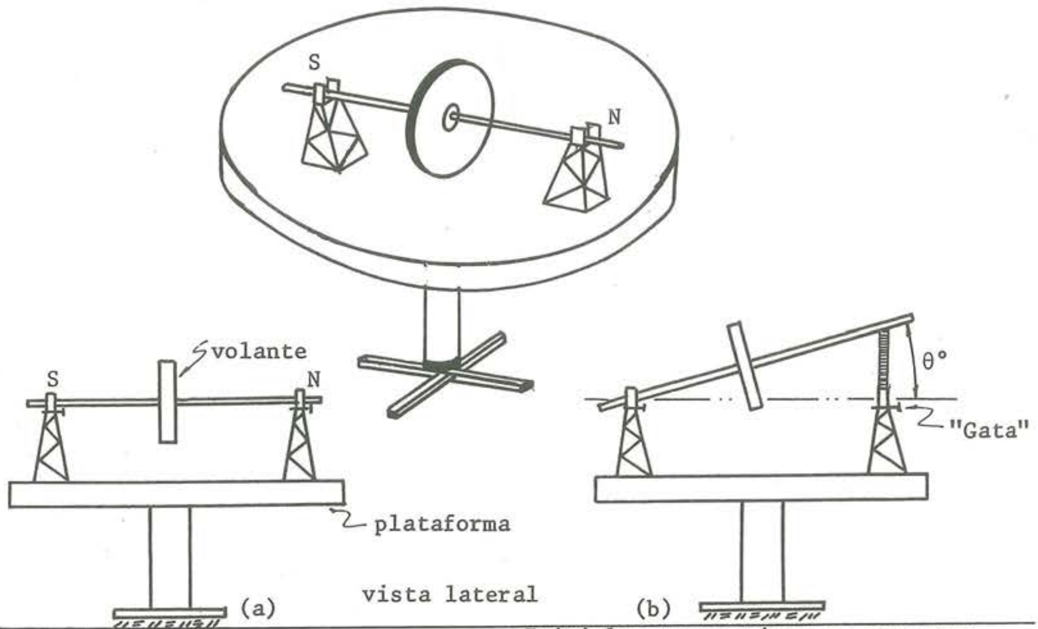
$$\omega = \frac{2\ m\ v_o}{(2M + m)R}$$

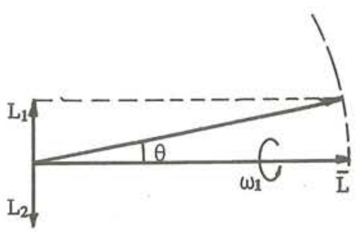
20. Una volante con su eje horizontal se encuentra apoyada sobre una plataforma que puede girar libremente alrededor de la vertical.

La volante gira con velocidad angular constante ω_1 y tiene un momento de inercia I_1 con respecto a su eje, que horizontalmente apunta de S a N. Posteriormente, por medio de una "gata" se levanta el extremo N, inclinando el eje $\theta°$ con respecto a la horizontal durante un tiempo Δt, luego lo regresa a su posición inicial horizontal.

Determinar el ángulo que girará la plataforma, indicando la dirección del giro.

Se conoce el momento de inercia I_2 del sistema, volante y plataforma, con respecto al eje vertical.





Inicialmente se tiene un momentum angular horizontal:

$$L = I_1\ \omega_1 \quad y \quad L_z = 0$$

como no hay torque externo,

$$T_z^{ext} = 0 \Longrightarrow \bar{L}_z = \text{constante} = 0$$

Al inclinarlo un ángulo θ aparece una componente vertical, llamémosla L_1:

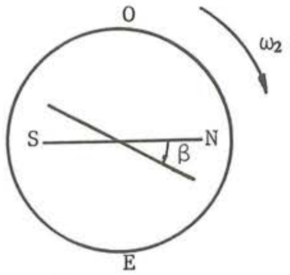
$$L_1 = L \text{ sen } \theta = I_1 \omega_1 \text{ sen } \theta$$

debe aparecer un momentum angular L_2 opuesto a L_1 , para que $L_1 + L_2 = 0$, esto es:

$$L_2 = - L \text{ sen } \theta = - I_1 \omega_1 \text{ sen } \theta$$

Como se conoce I_2, también:

$$L_2 = I_2 \omega_2$$



vista superior

igualando, se obtiene la velocidad angular ω_2 del sistema:

$$\omega_2 = - \frac{I_1 \omega_1}{I_2} \text{ sen } \theta$$

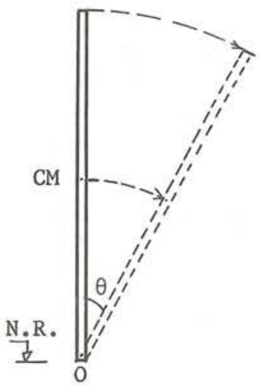
en un tiempo Δt, habrá girado un ángulo β:

$$\beta = \omega_2 \Delta t$$

$$\beta = \frac{I_1 \omega_1}{I_2} \text{ sen } \theta \Delta t$$

Con una dirección de giro de N a E.

21. Una barra uniforme de longitud ℓ y masa m puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Si la barra se suelta dejándola caer desde una posición vertical, determinar su velocidad y aceleración angular cuando la barra forma un ángulo θ con la vertical.



Por conservación de energía entre la posición vertical y cuando forma un ángulo θ con la vertical, tomando como nivel de referencia la horizontal que pasa por el punto O, se tiene:

$$U_o = U_\theta + K_{\theta \text{ rot}}$$

$$mg \frac{\ell}{2} = mg \frac{\ell}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

con: $I_o = \frac{1}{3} m\ell^2$, queda:

$$mg\ell = mg\ell \cos \theta + \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$g(1 - \cos\theta) = \frac{1}{3}\,\ell\,\dot{\theta}^2$$

Luego, la velocidad angular es:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1 - \cos\theta)}$$

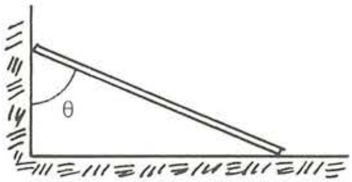
y la aceleración angular, derivando se obtiene:

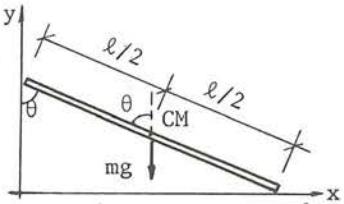
$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{3g}{\ell}\right)^{1/2}(1-\cos\theta)^{-1/2}\operatorname{sen}\theta\;\dot{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3g}{\ell}\right)^{1/2}(1-\cos\theta)^{-1/2}\operatorname{sen}\theta\left[\left(\frac{3g}{\ell}\right)^{1/2}(1-\cos\theta)^{1/2}\right]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$$

22. Los extremos de una barra uniforme, de longitud ℓ y masa m, se apoyan sobre dos superficies lisas, vertical y horizontal, como se muestra en la figura. Si la barra se suelta dejándola caer desde una posición vertical, determinar su velocidad y aceleración angular cuando la barra forma un ángulo θ con la vertical.





$$x_{cm} = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{x}_{cm} = \frac{\ell}{2}\cos\theta\;\dot{\theta}$$

$$y_{cm} = \frac{\ell}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{y}_{cm} = -\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\;\dot{\theta}$$

$$v^2_{cm} = \dot{x}^2_{cm} + \dot{y}_{cm} = \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12}m\ell^2$$

Por conservación de energía entre la posición vertical y cuando forma un ángulo θ con la vertical, tomando como referencia el plano horizontal de apoyo, se tiene:

$$U_{\circ cm} = U_{\theta cm} + K_{\theta cm} + K_{\theta rot.CM}$$

$$mg\,\frac{\ell}{2} = mg\,y_{cm} + \frac{1}{2}m\,v^2_{cm} + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2$$

con los valores obtenidos con la figura, queda:

$$mg\,\frac{\ell}{2} = mg\,\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\,m\ell^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}\,m\ell^2\,\dot{\theta}^2$$

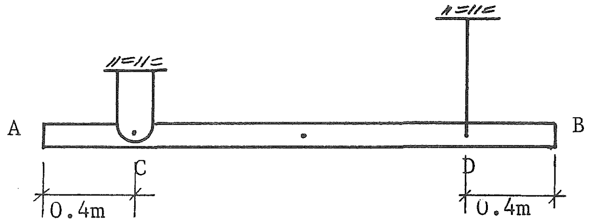
$$mg\ell = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{3}\,m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$g(1 - \cos\theta) = \frac{1}{3}\,\ell\,\dot{\theta}^2$$

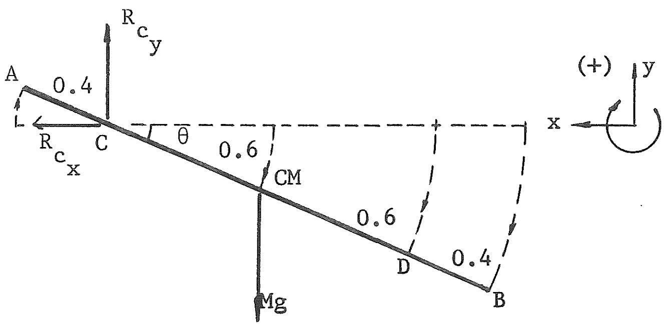
Observe que es la misma ecuación obtenida en el problema anterior, de aquí se obtienen la velocidad y aceleración angular de la barra, que rota en torno a un eje perpendicular al plano pasando por el CM.

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1 - \cos\theta)} \quad y \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell}\ \text{sen}\ \theta$$

23. Una barra AB de masa M = 10kg y longitud L = 2m, está articulada en el punto C y sostenida por una cuerda en el punto D, tal como se muestra en la figura. Si se corta la cuerda, calcular la aceleración lineal del extremo B y la reacción en la articulación C, cuando la barra ha girado un ángulo θ = 30°.



D.C.L.



$$I_{CM} = \frac{1}{12}\,M\,L^2 = \frac{1}{12}\,M(2)^2 = \frac{M}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{kg-m}^2$$

$$I_C = I_{CM} + Mh^2 = M(\frac{1}{3} + 0.6^2) = 0.693M = 6.93\text{kg-m}^2$$

- Aceleración angular α de la barra.

Ecuación de movimiento Rotacional: $T_c = I_c\alpha$

Para $\theta = 30°$, se tiene:

$$\alpha = \frac{T_c}{I_c} = \frac{Mg(0.6\cos 30°)}{0.693\ M} = \frac{9.81 \times 0.3\sqrt{3}}{0.693} = 7.35\ \text{rad/s}^2$$

- Velocidad angular ω de la barra.

Como la aceleración angular α no es constante, depende del ángulo θ, recurriremos a la conservación de energía para determinar la velocidad angular ω para el ángulo $\theta = 30°$. Tomando como nivel de referencia la posición inicial horizontal, se tiene:

$$\Delta E = 0 \Longrightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Longrightarrow K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

como: $K_1 = 0$ y $U_1 = 0 \Rightarrow K_2 + U_2 = 0$

$$\text{con:}\ K_2 = \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{cm} = 0.6\omega \\ I_{CM} = \frac{M}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2} M\omega^2 (0.6^2 + \frac{1}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2} M\omega^2 \times 0.693$$

y,

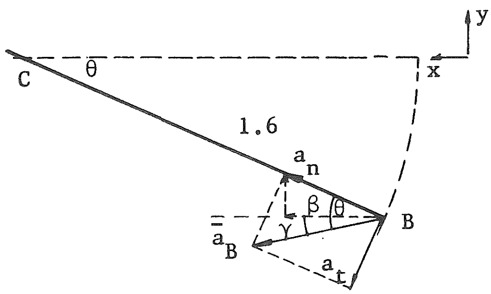
$$U_2 = -Mg(0.6\ \text{sen}\ 30°) = -\frac{1}{2} Mg \times 0.6$$

queda:

$$\frac{1}{2} M\omega^2 \times 0.693 - \frac{1}{2} Mg \times 0.6 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{9.81 \times 0.6}{0.693} = 8.49 \Rightarrow \omega = 2.91\text{rad/s}$$

- Aceleración lineal $\bar{a}_B$ del extremo B.

Como este punto describe una circunferencia, y ya conocemos α y ω, podemos encontrar las componentes normal y tangencial de la aceleración. Los módulos de estas componentes, serán:



$$a_n = \omega^2 \times 1.6 = 13.59\ \text{m/s}^2$$

$$a_t = \alpha \times 1.6 = 11.76\ \text{m/s}^2$$

Luego:

$$a_B = \sqrt{13.59^2 + 11.76^2} = 17.97\ \text{m/s}^2$$

$$\text{tg}\beta = \frac{11.76}{13.59} = 0.865 \Rightarrow \beta = 40.87^{\circ}$$

vectorialmente, se tendrá:

$$a_{nx} = \omega^2 \times 1.6 \cos 30° = \omega^2 \times 0.8\sqrt{3}$$

$$a_{ny} = \omega^2 \times 1.6 \times \text{sen } 30° = \omega^2 \times 0.8$$

$$a_{tx} = \alpha \times 1.6 \times \text{sen } 30° = \alpha \times 0.8$$

$$a_{ty} = -\alpha \times 1.6 \times \cos 30° = -\alpha \times 0.8\sqrt{3}$$

luego:

$$\bar{a}_B = 0.8(\omega^2\sqrt{3} + \alpha)\hat{i} + 0.8(\omega^2 - \alpha\sqrt{3})\hat{j}$$

$$\bar{a}_B = 0.8(22.06)\hat{i} + 0.8(-4.24)\hat{j}$$

$$\bar{a}_B = 17.64\hat{i} - 3.39\hat{j}$$

con módulo: $a_B = \sqrt{17.64^2 + 3.39^2} = 17.96 \text{ m/s}^2$

y ángulo γ : $\text{tg}\gamma = \dfrac{3.39}{17.64} = 0.1922 \Longrightarrow \gamma = 10.88°$

Por supuesto, el mismo valor de a_B y con $\beta = \gamma + \theta$

- Reacción R_c en la articulación C.

  Para determinar la reacción en la articulación, necesitamos conocer la aceleración lineal del CM.
  Pero este punto describe una circunferencia conjuntamente con el punto B, del cual ya conocemos su aceleración, solo se diferencian en el radio. Ahora tenemos un radio de 0.6 en vez de 1.6, luego,tenemos:

$$\bar{a}_{cm} = 0.3(\omega^2\sqrt{3} + \alpha)\hat{i} + 0.3(\omega^2 - \alpha\sqrt{3})$$

$$\bar{a}_{cm} = 0.3(22.06)\hat{i} + 0.3(-4.24)\hat{j}$$

$$\bar{a}_{cm} = 6.618\hat{i} - 1.272\hat{j}$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento de translación para el CM, se tiene:

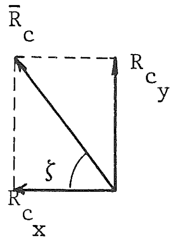
eje x, $\Longrightarrow R_{c_x} = M\, a_{cm_x} = 10(6.618) = 66.18 \text{ N}$

eje y, $\Longrightarrow$ $R_{cy} - Mg = M\,a_{cm\,y}$

$$R_{cy} = M(g + a_{cm\,y}) = 10(9.81 - 1.272) = 85.38N$$

Esto es:

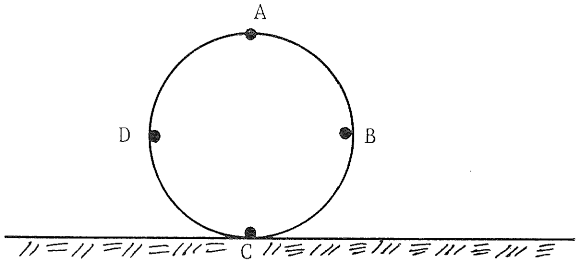
$\bar{R}_c = 66.18\hat{i} + 85.38\hat{j}$

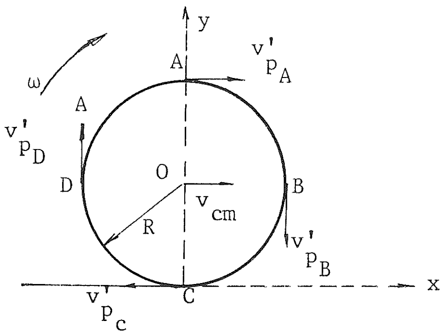


$R_c = \sqrt{66.18^2 + 85.38^2} = 108.03N$

$tg\zeta = \dfrac{85.38}{66.18} = 1.290 \Longrightarrow \zeta = 52.22°$

24. Se incrusta una piedra en la cubierta periférica de una rueda de 60cm de diámetro en un carro que viaja con una velocidad de 90Km/h. Calcular la velocidad de la piedra, respecto a tierra, cuando ocupa las posiciones indicadas con las letras A, B, C y D en la figura mostrada.





La rapidez de translación, respecto a tierra, es:

$$v_{cm} = 90Km/h = \frac{90}{3.6} = 25\ m/s$$

La rapidez tangencial respecto al CM, por la relación de rodadura , para la piedra, se tiene:

$$v'_P = \omega R = v_{cm} = 25\ m/s$$

Luego, vectorialmente se tiene:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{cm} + \bar{v}'_P$$

Para cada punto, en m/s, se obtiene:

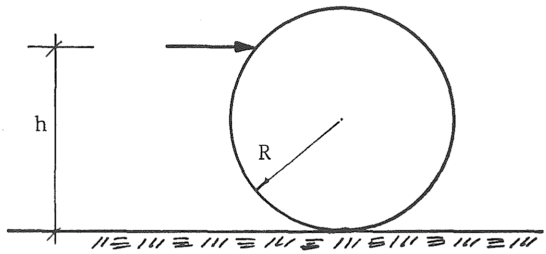
$\bar{v}_A = 25\hat{i} + 25\hat{j} = 50\hat{i}$

$\bar{v}_B = 25\hat{i} - 25\hat{j} = 25(\hat{i}-\hat{j})$

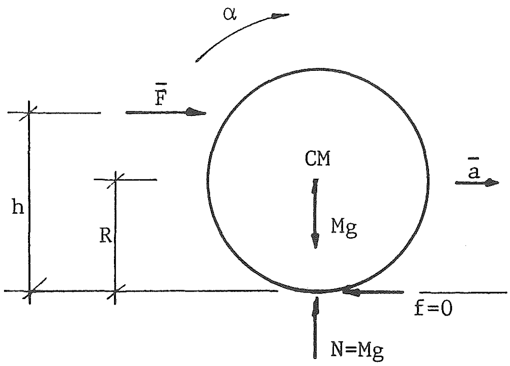
$\bar{v}_C = 25\hat{i} - 25\hat{i} = 0$

$\bar{v}_D = 25\hat{i} + 25\hat{j} = 25(\hat{i} + \hat{j})$

25. ¿A qué altura sobre la mesa debe golpearse horizontalmente una bola de billar con un taco para que la bola inicie su movimiento sin rozamiento entre ella y la mesa?



Aplicando las Leyes de Newton se tiene:



$I = \frac{2}{5} MR^2$

- Para el movimiento de translación: $F = Ma$
- Para el movimiento de rotación, respecto al CM: $T_o = I\alpha$

$F(h-R) = (\frac{2}{5} MR^2)\alpha$

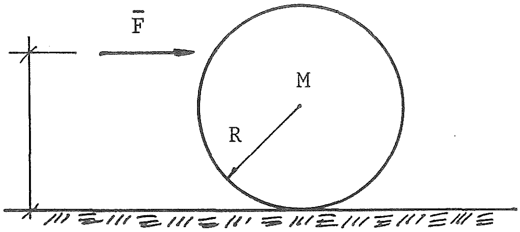
Resolviendo ambas expresiones, e introduciendo la relación cinemática de rodadura: $a = \alpha R$, se tiene:

$M\alpha\ R(h - R) = \frac{2}{5} MR^2 \alpha$

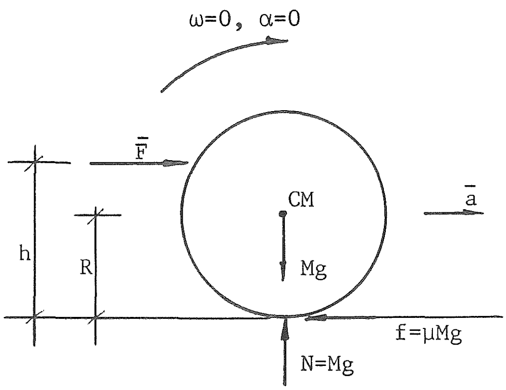
$h - R = \frac{2}{5}\ R$

$h = R(1 + \frac{2}{5}) = \frac{7}{5} R$

26. Una fuerza horizontal $\bar{F}$ actúa sobre una esfera homogénea de masa M y radio R. Como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento cinético entre el plano horizontal y la esfera es μ. Determinar la altura h de aplicación de la fuerza $\bar{F}$ para que la esfera deslice sin rodar. ¿Cuál es su aceleración?



Aplicando las leyes de Newton se tiene:



- Para el movimiento de traslación:

  $F - f = Ma$

  $$a = \frac{F - f}{M} = \frac{F - \mu Mg}{M} = \frac{F}{M} - \mu g$$

  observe que para $a > 0$ es necesario que $F > f$.

- Para el movimiento de rotación, respecto al CM : $T_o = I\alpha$

  Como se requiere deslizamiento sin rodadura, $\omega = 0$ y $\alpha = 0$.

  Luego: $T_o = 0$

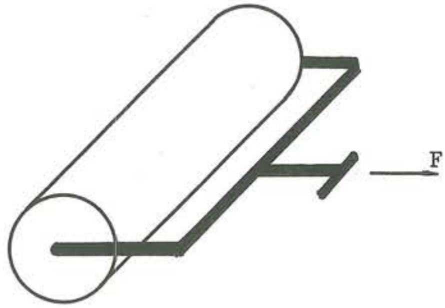
  $F(h - R) + fR = 0$

  $$h = \frac{FR - fR}{F} = R(1 - \frac{f}{F})$$

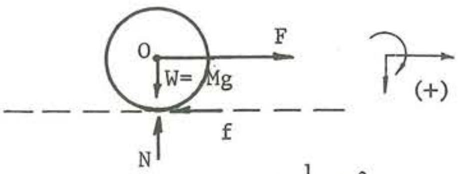
  $$h = R(1 - \frac{\mu Mg}{F})$$

Observe que como $F > f$ se tiene que $h < R$. Condición esperada para que exista compensación de momentos y poder tener $T_o = 0$.

27. Un rodillo aplanador cilíndrico de masa M = 100Kg y radio R = 0.5m, se jala horizontalmente con una fuerza constante F = 200N. Si el rodillo rueda sin resbalar sobre una superficie rugosa perfectamente horizontal, encontrar las aceleraciones angular y lineal de translación del CM del rodillo. ¿Cuál será el coeficiente de fricción mínimo necesario compatible con este movimiento?



D.C.L.



$I = \frac{1}{2} MR^2$

Ecuaciones de movimiento:

- Translación : $F - f = M\, a_{cm}$
- Rotación : $f\, R = I_o\, \alpha$
- Equilibrio : $W - N = 0$
- Relación cinemática de rodadura: $a_{cm} = \alpha R$

Resolviendo estas ecuaciones, se tiene:

$$N = W = Mg = 100 \times 9.81 = 981 \text{ N}$$

$$f = \frac{I_o \alpha}{R} = \frac{\frac{1}{2} MR^2 \alpha}{R} = \frac{1}{2} MR\alpha$$

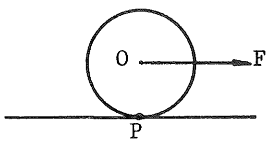
$$F - \frac{1}{2} MR\alpha = M\alpha R \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{3} \frac{F}{MR} = \frac{2}{3} \frac{200}{100 \text{x} 0.5} = \frac{8}{3} = 2.67 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{cm} = R\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ m/s}^2$$

$$f = \frac{1}{2} MR\alpha = \frac{1}{2} Ma_{cm} = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{4}{3} = \frac{200}{3} = 66.67 \text{ N}$$

$$\mu_{min} = \frac{f}{N} = \frac{200/3}{100 \times 9.81} = \frac{2}{3 \times 9.81} = 0.068$$

Adicionalmente, observe que si se pide solamente encontrar las aceleraciones α y a_{cm}, también podemos resolver el problema planteándolo como una rotación pura respecto al punto de contacto, veamos:



Rotación pura respecto al punto de contacto P : $FR = I_P\alpha$

luego:

$$\alpha = \frac{FR}{I_P} = \frac{FR}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}\,\frac{F}{MR}$$

y,

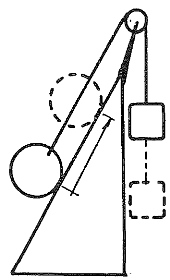
$$a_{cm} = R\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{F}{M}$$

$$I_P = I_o + MR^2$$

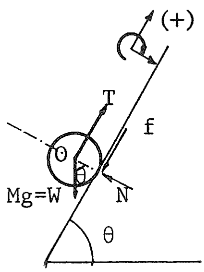
$$I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Por supuesto iguales expresiones a las anteriormente encontradas.

28. Un cilindro que sube por un plano inclinado 60° con la horizontal está conectado a un cuerpo de 75kg mediante elementos (cuerda y polea) ideales tal como se muestra en la figura. El cilindro de 50kg tiene un radio de 60cm y recorre 5m sobre el plano inclinado partiendo del reposo. Encontrar la velocidad que tiene en ese instante.

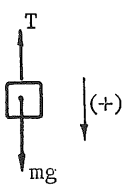


D.C.L.



Cilindro

$$I_o = \frac{1}{2}MR^2$$



Bloque

Ecuaciones de movimiento:

- Bloque.

  Translación: $mg - T = m\,a$

- Disco.

  Translación: $T - f - W\,sen\theta = M\,a_{cm}$

  Rotación: $fR = I\alpha$

  equilibrio: $W\cos\theta - N = 0$

Relaciones cinemáticas:

- condición de rodadura: $a_{cm} = \alpha R$

- ligadura: $a = a_{cm} = \alpha R$

Resolviendo con estas relaciones para la velocidad angular α, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} T &= m(g - \alpha R) \\ T - f &= M(\alpha R + g\ \text{sen}\theta) \\ f &= \frac{1}{2} MR\alpha \end{aligned}\right\} \quad m(g - \alpha R) = M\left(\frac{3}{2}\alpha R + g\text{sen}\theta\right)$$

Despejando αR:

$$\alpha R = \frac{g(m - M\text{sen}\theta)}{(m + \frac{3}{2}M)} = \frac{9.81(75 - 50 \times 0.866)}{(75 + \frac{3}{2}50)} = \frac{9.81 \times 31.70}{150} = 2.073$$

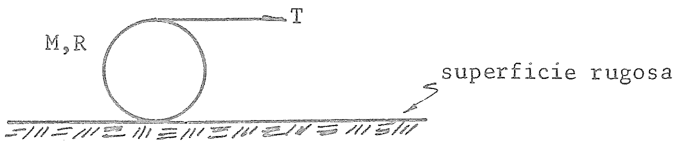
luego:

$$a = \alpha R = 2.073\ m/s^2$$

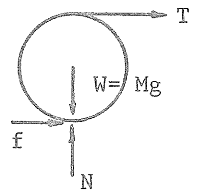
y la velocidad pedida, cuando recorre $s = 5m$, será:

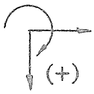
$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{20.73} = 4.55\ m/s$$

29. Un cuerpo rígido de forma cilíndrica tiene arrollada a su alrededor una cuerda con un extremo fijo al cuerpo y el otro libre. El cilindro de masa $M = 15Kg$ y radio $R = 0.5m$ se encuentra sobre una superficie horizontal rugosa. Si se tira del extremo libre de la cuerda con una fuerza horizontal constante $T = 18N$, como se muestra en la figura y considerando que el cilindro rueda sin deslizar, encontrar: la aceleración angular y la aceleración lineal de translación del cilindro, la fuerza de fricción entre el disco y la superficie de rodadura y la fuerza normal a esta superficie. ¿Cuál será la velocidad de translación del CM del cilindro después de 5 segundos que se inicia el movimiento?



D.C.L.





$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

- movimiento de translación horizontal:

$$T + f = M\, a_{cm}$$

- movimiento de rotación alrededor del CM:

$$TR - f\, R = I_o \alpha$$

- Equilibrio vertical:

$$W - N = 0$$

- Condición de rodadura:

$$a_{cm} = \alpha R$$

Resolviendo estas ecuaciones, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} T + f = M\alpha R \\ T - f = \frac{1}{2} MR\alpha \end{array}\right\} T = \frac{3}{4} M\alpha R \Longrightarrow \alpha = \frac{4T}{3MR} = \frac{4 \times 18}{3 \times 15 \times 0.5} = 3.2 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{cm} = \alpha R = \frac{4T}{3M} = 1.6 \text{ m/s}^2$$

$$f = M\alpha R - T = \frac{4T}{3} - T = \frac{1}{3} T = 6N$$

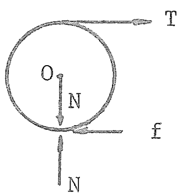
Como a_{cm} es constante y parte del reposo, la velocidad v_{cm} al cabo de 5 segundos, será:

$$v_{cm} = a_{cm} t = 1.6 \times 5 = 8 \text{ m/s}$$

Adicionalmente es importante hacer notar que al haber obtenido la fuerza de fricción f positiva, nos indica que el sentido considerado para ella en el D.C.L. es el correcto.

¿Cómo afectaría considerar el sentido inverso? Veamos:

D.C.L.



(Incorrecto)

$$T - f = M\, a_{cm} \Longrightarrow T - f = M\alpha R$$

$$TR + fR = I_o\alpha \Longrightarrow T + f = \frac{1}{2} MR\alpha$$

Resolviendo:

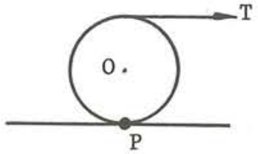
$$T = \frac{3}{4} M\alpha R \Longrightarrow \alpha = \frac{4T}{3MR}$$

$$a_{cm} = \alpha R = \frac{4T}{3M}$$

$$f = T - M\alpha R = T - \frac{4}{3} T = - \frac{1}{3} T$$

El valor de f en la solución matemática debe ser positivo (módulo o valor absoluto). Luego, el signo negativo nos indica que el sentido asumido es contrario.

Observe que en este caso no afecta para determinar las aceleraciones α y a_{cm} Esto se debe que en rodadura, como hemos visto, con respecto al punto de contacto se tiene una rotación pura y no interviene la fricción en el torque. Esto es:



Rotación pura respecto al punto de contacto P.

$T(2R) = I_P\alpha$

luego,

$$\alpha = \frac{2TR}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{4}{3}\ \frac{T}{MR}$$

$$I_P = I_o + MR^2$$

$$I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

y,

$$a_{cm} = \alpha R = \frac{4}{3}\ \frac{T}{M}$$

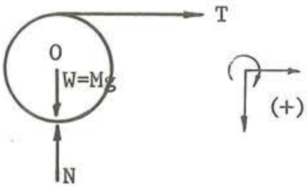
obteniéndose los mismos valores arriba encontrados.

30. Un cuerpo rígido uniforme cilíndrico, de masa M y radio R, tiene arrollada a su alrededor una cuerda de masa despreciable, con un extremo fijo al cuerpo y el otro libre. Encontrándose el cilindro inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal perfectamente lisa, se tira del extremo libre de la cuerda con una fuerza horizontal constante T como se muestra en la figura.

Determinar la aceleración angular y la aceleración lineal de traslación del cilindro. ¿Qué relación hay entre ellos? Compare resultados con el problema anterior.

Además, encontrar la energía cinética total al cabo de un tiempo t. ¿Qué relación tiene el desplazamiento lineal x del CM y la rotación angular θ respecto a él?. Compare con el caso de rodadura sin deslizamiento.

D.C.L.



$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

- Movimiento de translación horizontal:

$$T = M\, a_{cm} \Longrightarrow a_{cm} = \frac{T}{M}$$

- Movimiento de rotación alrededor del CM:

$$TR = I_o\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{TR}{I_o} = \frac{TR}{\frac{1}{2} MR^2} = \frac{2T}{MR}$$

- Equilibrio vertical:

$$W - N = 0 \Longrightarrow N = W = Mg$$

- Relación entre a_{cm} y α, de las ecuaciones de movimiento planteadas, igualando el valor de T, se tiene:

$$Ma_{cm} = \frac{I_o\alpha}{R} \Longrightarrow a_{cm} = \frac{I_o\alpha}{MR} = \frac{\frac{1}{2} MR^2\alpha}{MR} = \frac{1}{2} R\alpha$$

Comparando con los resultados obtenidos en el problema anterior, caso de rodadura sin deslizamiento, se obtuvo:

- aceleración lineal: $a_{cm} = \frac{4}{3}\ \frac{T}{M} > \frac{T}{M}$
- aceleración angular: $\alpha = \frac{4}{3}\ \frac{T}{MR} < 2\ \frac{T}{MR}$
- Relación entre a_{cm} y α: $a_{cm} = R\alpha > \frac{1}{2} R\alpha$

(Observe que: aquí no se cumple la condición de rodadura)

Como las aceleraciones a_{cm} y α son constantes, partiendo del reposo, las velocidades serán:

- velocidad lineal: $v_{cm} = a_{cm} t = \frac{T}{M} t$
- velocidad angular: $\omega = \alpha t = \frac{2T}{MR} t$

y la energía cinética total del cuerpo después de un cierto tiempo t, serán:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M \frac{T^2}{M^2} t^2 + \frac{1}{2} MR^2 \frac{4T^2}{M^2 R^2} t^2\right) = \frac{1}{2} \frac{T^2}{M} t^2 + \frac{T^2}{M} t^2$$

$$K = \frac{3}{2} \frac{T^2}{M} t^2$$

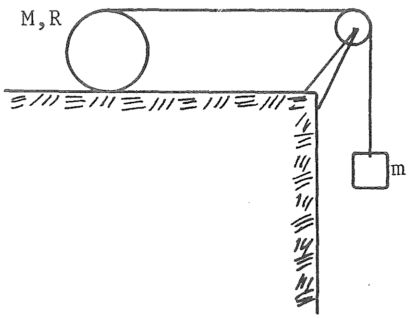
Relación de desplazamientos:

- lineal: $x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} \frac{T}{M} t^2$
- angular: $\theta = \frac{1}{2} \alpha\ t^2 = \frac{1}{2} \frac{2T}{MR} t^2 = \frac{T}{MR} t^2$

$\Longrightarrow x_{cm} = \frac{1}{2} R\theta$

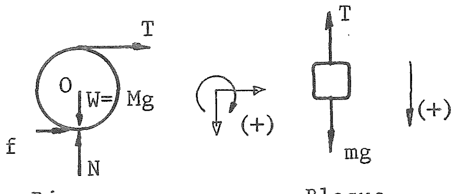
Comparando, para el caso de rodadura sin deslizamiento se tiene la relación: $x_{cm} = R\theta$

31. En el sistema mostrado en la figura, el bloque tiene una masa m=1Kg y el disco una masa M = 0.5Kg y radio R = 0.2m. Considerando una polea ideal y que el disco rueda sin deslizar, encontrar: la aceleración angular y la aceleración de CM del disco, la aceleración lineal del bloque, la tensión en la cuerda, la fuerza de fricción entre el disco y la superficie horizontal de apoyo y la fuerza normal a la misma.



Considerando la polea ideal, la tensión en la cuerda es única (igual a ambos lados de la cuerda).

D.C.L.



Disco

$I_o = \frac{1}{2} MR^2$

Bloque

Ecuaciones de movimiento:

- Bloque.

  Traslación: $mg - T = ma$

- Disco.

  traslación horizontal:

  $$T + f = M\ a_{cm}$$

  rotación: $TR - fR = \frac{1}{2} MR^2\alpha$

  equilibrio vertical: $W - N = 0$

Además tenemos las siguientes relaciones:

- condición de rodadura : $a_{cm} = \alpha R$

- la aceleración a del bloque es igual a la aceleración de la cuerda ideal, en particular, del punto de contacto donde se encuentran la cuerda horizontal con el disco. La aceleración de este punto es igual a la aceleración tangencial por el movimiento de rotación del disco, $a_t = \alpha R$, más la aceleración de translación del disco, $a_{cm} = \alpha R$, esto es:

$$a = a_t + a_{cm} = \alpha R + \alpha R = 2\alpha R$$

Resolviendo las ecuaciones de movimiento con estas relaciones, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} T + f &= M\alpha R \\ T - f &= \frac{1}{2} MR\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow T = \frac{3}{4} M\alpha R$$

$$mg - \frac{3}{4} M\alpha R = m2\alpha R \Longrightarrow \alpha = \frac{mg}{(2m + \frac{3}{4} M)R} = \frac{4g}{(8 + \frac{3M}{m})R} = \frac{4 \times 9.81}{(8+3\frac{0.5}{1})0.2} = 20.65 \ \frac{rad}{s^2}$$

$$a_{cm} = \alpha R = 20.65 \times 0.2 = 4.13 \ m/s^2$$

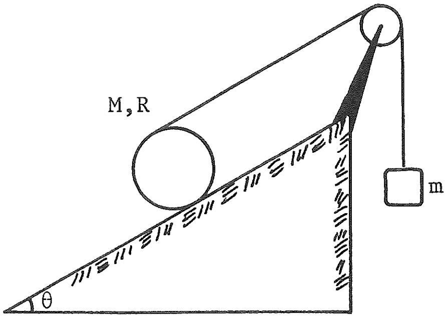
$$a = 2\alpha R = 2a_{cm} = 2 \times 4.13 = 8.26 \ m/s^2$$

$$T = \frac{3}{4} MR\alpha = \frac{3}{4} 0.5 \times 0.2 \times 20.65 = 1.55 \ N$$

$$f = M\alpha R - T = M\alpha R - \frac{3}{4} M\alpha R = \frac{1}{4} M\alpha R = \frac{1}{4}\frac{4}{3} T = \frac{1}{3} T = 0.52$$ (se tiene: $f < T$)

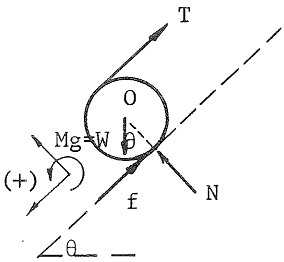
$$N = W = Mg = 0.5 \times 9.81 = 4.91 \ N$$

32. Un cilindro de masa M y radio R enrollado con una cuerda ideal, inextensible y de masa despreciable, se encuentra sobre un plano inclinado a un ángulo θ con la horizontal; del otro extremo de la cuerda, pasando a través de una polea también ideal, cuelga verticalmente un bloque de masa m. ¿Cuál es el valor máximo de m para que el cilindro baje rodando sin deslizar por el plano inclinado? Ver figura.



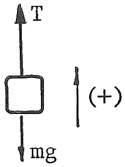
Se recomienda resolver primero el problema anterior.

D.C.L.



Disco

$I_o = \frac{1}{2} MR^2$



Bloque

Ecuaciones de movimiento:

- Bloque.

  translación: $T - mg = ma$

- Disco

  translación: $W \operatorname{sen}\theta - T - f = Ma_{cm}$

  rotación: $fR - TR = I_o\alpha$

  equilibrio: $N - W \cos\theta = 0$

Relaciones cinemáticas:

- condición de rodadura: $a_{cm} = \alpha R$

- aceleración de la cuerda:

  $a = a_t + a_{cm} = \alpha R + \alpha R = 2\alpha R$

Resolviendo, con estas relaciones, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} T + f = W \operatorname{sen}\theta - M\alpha R \\ \\ T - f = -\frac{1}{2} MR\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow T = \frac{1}{2} Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{3}{4} M\alpha R$$

$$\frac{1}{2} Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{3}{4} M\alpha R - mg = m2\alpha R \Longrightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2} Mg \operatorname{sen}\theta - mg}{(2m + \frac{3}{4} M) R}$$

Para que baje por el plano inclinado, partiendo del reposo, se requiere que:

$$\alpha > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} Mg \operatorname{sen}\theta > mg \Longrightarrow m < \frac{1}{2} M \operatorname{sen}\theta$$

Si m es mayor que $\frac{1}{2} M \operatorname{sen}\theta$, se tendrá que $\alpha < 0$ y el disco subirá por el plano inclinado.

Para que exista rodadura sin deslizamiento, el coeficiente de fric - ción mínimo requerido será:

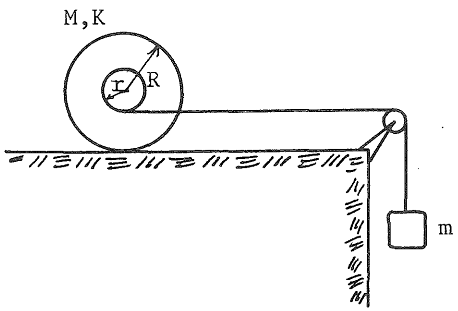
$$\mu_{min} = \frac{f}{N}$$

con: $N = Mg \cos \theta$

$$f = \frac{1}{2} Mg \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} MR\alpha$$

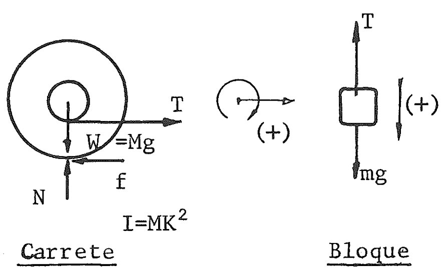
$$f = \frac{1}{2} Mg \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} M \frac{\frac{1}{2} Mg \operatorname{sen} \theta - mg}{2m + \frac{3}{4} M}$$

33. En el sistema mostrado en la figura, el bloque tiene una masa m=2kg y el carrete una masa M = 1kg, radios r = 0.1m y R = 0.3m y radio de giro con respecto a su eje K = 0.15m. Considerando la polea ideal y que el carrete rueda sin deslizar, hallar: la aceleración angular α y la aceleración lineal a_{cm} del carrete, la aceleración lineal a del bloque, la tensión en la cuerda y la fuerza normal y de rozamiento entre el carrete y la superficie horizontal de apoyo.



Considerando la polea ideal, la tensión en la cuerda es única T (igual a ambos lados de la cuerda).

D.C.L.



Ecuaciones de movimiento:

- Bloque.

  translación: $mg - T = ma$

- Carrete.

  translación horizontal: $T - f = Ma_{cm}$

  Rotación: $fR - Tr = MK^2 \alpha$

  equilibrio vertical: $W - N = 0$

Además se tienen las siguientes relaciones:

- condición de rodadura: $a_{cm} = \alpha R$
- la aceleración a del bloque es igual a la aceleración de la cuerda ideal, en particular, del punto de contacto donde se encuentran la cuerda horizontal con el carrete. La aceleración de este punto es igual a la aceleración tangencial por el movimiento de rotación del carrete, teniendo en cuenta el sentido de enrrollamiento, el sentido de esta aceleración es negativo mientras que el sentido de giro es positivo, $a_t = -\alpha r$, mas la aceleración de translación del carrete, $a_{cm} = \alpha R$, esto es:

$$a = a_t + a_{cm} = -\alpha r + \alpha R = \alpha(R - r)$$

Resolviendo las ecuaciones de movimiento con esta relación, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} T-f=m\alpha R \Rightarrow fR=TR-M\alpha R^2 \\ fR - Tr = MK^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow T(R-r)=M\alpha(K^2+R^2) \\ mg - T = m\alpha(R - r) \Longrightarrow T = mg - m\alpha(R - r) \end{array}\right\} \Rightarrow mg(R-r)=m\alpha(R-r)^2+M\alpha(K^2+R^2)$$

luego:

$$\alpha = \frac{mg(R - r)}{m(R - r)^2 + M(K^2 + R^2)} = \frac{g}{(R - r) + \frac{M}{m}\left(\frac{K^2 + R^2}{R - r}\right)}$$

$$\alpha = \frac{9.81}{0.2 + \frac{1}{2}\left(\frac{0.1125}{0.2}\right)} = \frac{9.81}{0.4813} = 20.38 \text{ rad/s.}$$

$a_{cm} = \alpha R = 20.38 \times 0.3 = 6.12 \text{ m/s}^2$

$a = \alpha(R - r) = 20.38 \times 0.2 = 4.08 \text{ m/s}^2$

$T = m(g - a) = 2(9.81 - 4.08) = 2 \times 5.73 = 11.46$ N

$f = R - M a_{cm} = 11.46 - 1 \times 6.12 = 5.34$ N

$N = W = Mg = 1 \times 9.81 = 9.81$ N

En este caso, se tiene:

$T > f \Longrightarrow a_{cm}$ (positivo)

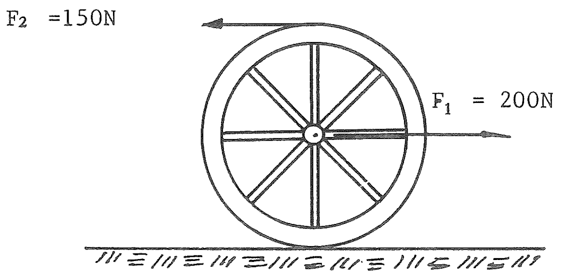
$fR = 1.60 > Tr = 1.15 \Rightarrow \alpha$(positivo)

El carrete gira y avanza hacia adelante enrrollando la cuerda, pero el bloque desciende dado que $a = \alpha(R - r)$.

34. Una rueda de 50kg y 1m de diámetro tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de K = 0.4m. La rueda se apoya sobre una superficie horizontal y se le aplican las fuerzas mostradas en la figura. Calcular la aceleración de translación del CM y la aceleración angular de la rueda. Considerar los siguientes casos:

a) El piso es perfectamente liso.

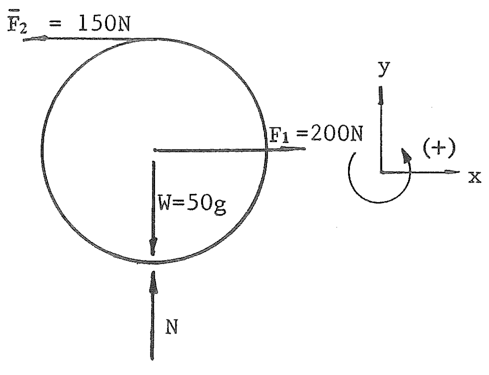
b) El piso es rugoso, teniéndose un movimiento de rodadura sin deslizamiento. En este caso calcular, además, el coeficiente de rozamiento mínimo necesario.



Primero calculemos el momento de inercia de la rueda respecto a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por su centro (CM):

$$I = MK^2 = 50(0.4)^2 = 8\text{Kg-m}^2$$

a) D.C.L.



Las ecuaciones del movimiento serán:

-En y, $N-W=0 \Rightarrow N=W=50 \times 9.81=490.5N$

-En x, $F_1-F_2=Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \dfrac{F_1 - F_2}{M} =$

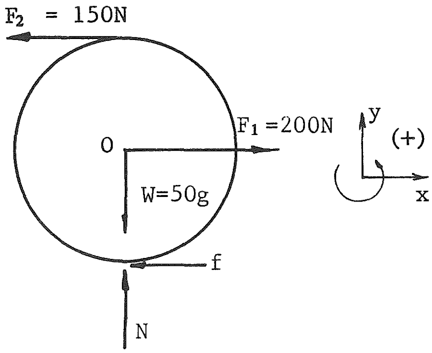
$$= \frac{200 - 150}{50} = \frac{50}{50} = 1 \text{ m/s}^2$$

-En z, $T_{o_z}=I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{T_{o_z}}{I} =$

$$= \frac{150 \times 0.5}{8} = 9.375 \text{ rad/s}^2$$

La rueda se desplaza en la dirección x positiva con aceleración $a_{cm} = 1 m/s^2$, aumentando su velocidad v_{cm} y al mismo tiempo gira con respecto al CM con aceleración $\alpha = 9.375\ rad/s^2$, aumentando su velocidad angular ω en el sentido positivo, antihorario.

b) D.C.L.



Las ecuaciones de movimiento serán:

-En y, $N - W = 0 \Rightarrow N = W = 50 \times 9.81 =$
$= 490.5N$

-En x, $F_1 - F_2 - f = Ma_{cm} \Longrightarrow$

$$a_{cm} = \frac{F_1 - F_2 - f}{M} = \frac{200-150-f}{50} = \frac{50-f}{50} = 1 - \frac{f}{50}$$

-En z, $T_{o2} - T_{of} = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{T_{o2} - T_{of}}{I}$

$$\alpha = \frac{150 \times 0.5 - f \times 0.5}{8} = \frac{150 - f}{16}$$

- Además, la relación que establece la condición de rodadura, considerando los sentidos asumidos como positivos, es:

$$-a_{cm} = R\alpha = 0.5\alpha$$

Resolviendo estas tres últimas expresiones, encontraremos α, a_{cm} y f, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} 50\ a_{cm} = 50-f \Rightarrow 50(-0.5\alpha) = 50-f \Rightarrow 25\alpha = f-50 \\ 8\alpha = 0.5(150-f) \Rightarrow 16\alpha = 150-f \Rightarrow 16\alpha = 150-f \end{array}\right\} \alpha = \frac{100}{41} = 2.44\ rad/s^2$$

$$a_{cm} = -0.5\alpha = -0.5 \times \frac{100}{41} = -1.22\ m/s^2$$

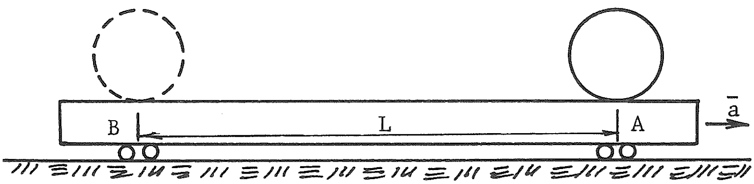
$$f = 150 - 16\alpha = 150 - 16\frac{100}{41} = 150 - 39 = 111\ N$$

La rueda gira con respecto al CM con aceleración $\alpha = 2.44\ rad/s^2$, aumentando su velocidad angular ω en el sentido positivo antihorario y se desplaza en la dirección x negativa con aceleración $a_{cm} = -1.22 m/s^2$, alejándose del punto de partida con mayor rapidez conforme transcurre el tiempo. Finalmente, el valor mínimo de μ será:

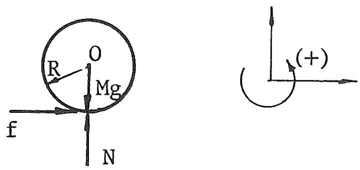
$$\mu_{min} = \frac{f}{N} = \frac{111}{490.5} = 0.2263$$

35. Un cilindro homogéneo de masa M y radio R se encuentra sobre la plataforma de un vagón de masa m, y que inicialmente se encuentra en reposo. En un instante t = 0 el carro comienza a moverse con una aceleración a constante. Como resultado el cilindro rueda sin deslizar desde un extremo A al otro B, separados una distancia L, tal como se observa en la figura.

Determinar la aceleración angular del cilindro, la aceleración y velocidad lineal que tendrá el CM del cilindro cuando llegue al punto B.



D.C.L.



$I_o = \frac{1}{2} MR^2$

Ecuaciones de movimiento.

- Translación: $f = M\,a_{cm}$

- Rotación: $fR = I_o\alpha \Rightarrow$

$$f = \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R}\,\alpha = \frac{1}{2}MR\alpha$$

Igualando ambos valores de f, se tiene:

$$M\,a_{cm} = \frac{1}{2}MR\alpha \Rightarrow a_{cm} = \frac{1}{2}R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2a_{cm}}{R}$$

Encontremos, ahora, la relación de aceleraciones:

$$\bar{a}_{cm} = \bar{a}_c + \bar{a}_r$$

donde:

a_c es la aceleración del carro respecto a tierra, horizontal en sentido positivo.

a_r es la aceleración relativa del CM del cilindro respecto al vagón, horizontal en sentido negativo, como rueda sin deslizar, se tiene:

$$a_r = -\alpha R$$

Luego, la aceleración del CM del cilindro respecto a tierra, será:

$$a_{cm} = a - \alpha R$$

Reemplazando en la expresión del movimiento, anteriormente encontrada, se obtiene:

$$a - \alpha R = \frac{1}{2} R\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} \frac{a}{R}$$

$$a_{cm} = \frac{1}{2} R\alpha = \frac{1}{2} R \frac{2}{3} \frac{a}{R} = \frac{a}{3}$$

$$a_r = - \alpha R = - \frac{2}{3} \frac{a}{R} R = - \frac{2}{3} a$$

Como la aceleración a_r es constante, el tiempo que demora en alcanzar el punto B sobre la plataforma, partiendo del reposo, será:

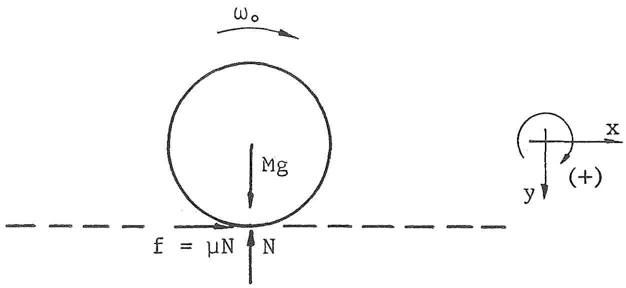
$$S = \frac{1}{2} a_r t^2 \quad \Longrightarrow - L = \frac{1}{2} (- \frac{2}{3} a) t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{3L}{a}}$$

y la velocidad, como a_{cm} es constante, será:

$$v_{cm} = a_{cm} t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3L}{a}} = \sqrt{\frac{La}{3}}$$

36. Sobre una superficie horizontal se coloca un disco de masa M y radio R, teniendo una velocidad angular ω_o en el sentido horario. Si el coeficiente de fricción cinético entre el disco y el piso es μ, hallar al cabo de cuanto tiempo el disco deja de resbalar e inicia un movimiento de rodadura sin deslizamiento. Luego, determinar la velocidad angular ω y la velocidad de translación v_{cm} que tiene el disco en ese instante.

D.C.L.



Aplicando las leyes de Newton del movimiento se tendrá:

- movimiento de translación en el plano (x, y).

En y : $Mg - N = 0 \implies N = Mg$

En x : $f = M\,a_{cm} \implies a_{cm} = \frac{f}{M} = \frac{\mu N}{M} = \frac{\mu Mg}{M} = \mu g$

teniéndose una aceleración a_{cm} constante en el eje x positiva, la velocidad v_{cm} al cabo de un cierto tiempo t, será:

$$v_{cm} = v_{\circ cm} + a_{cm}t = 0 + \mu gt = \mu gt$$

- movimiento de rotación en torno al eje z, perpendicular al plano (x, y), que pasa por el CM.

  Considerando los signos positivos indicados en el D.C.L., se tiene:

  $$T_{\circ z} = I\alpha \implies \alpha = \frac{T_{\circ z}}{I} = -\frac{fR}{I} = \frac{-\mu NR}{I} = \frac{-\mu MgR}{\frac{1}{2}MR^2} = -\frac{2\mu g}{R}$$

  Teniéndose una aceleración angular α constante negativa, su sentido es antihorario, opuesto al de $\omega_\circ$, por lo tanto esta velocidad angular decrecerá. Al cabo de un cierto tiempo t, el mismo considerado anteriormente, la velocidad angular ω será:

  $$\omega = \omega_\circ + \alpha t = \omega_\circ - \frac{2\mu g}{R}t$$

  Si en este instante t aparece solo rodadura pura, se establece la relación (condición de rodadura):

  $$v_{cm} = \omega R$$

  reemplazando los valores encontrados, se tiene:

  $$\mu gt = (\omega_\circ - \frac{2\mu g}{R}t)R$$

  despejando t:

  $$t = \frac{\omega_\circ R}{3\mu g}$$

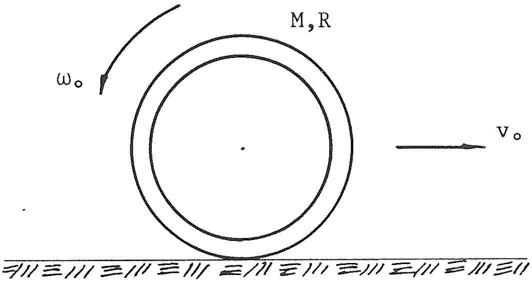
  y con este valor de t, las velocidades pedidas en ese instante serán:

  $$\omega = \omega_\circ - (\frac{2\mu g}{R})(\frac{\omega_\circ R}{3\mu g}) = \omega_\circ - \frac{2}{3}\omega_\circ = \frac{1}{3}\omega_\circ,$$ observe que: $\omega < \omega_\circ$

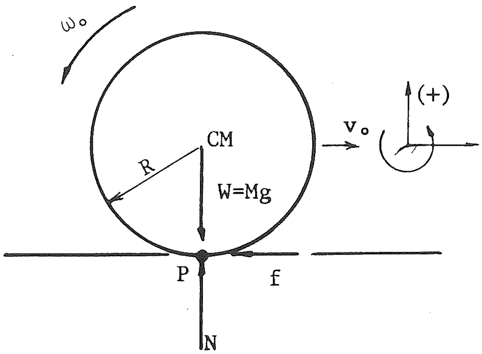
  $$v_{cm} = \mu g(\frac{\omega_\circ R}{3\mu g}) = \frac{1}{3}\omega_\circ R,$$ por supuesto se debe cumplir: $v_{cm} = \omega R$.

37. Un aro de masa M y radio R, que se encuentra sobre un plano horizontal, se lanza hacia adelante con velocidad inicial de translación v_o y al mismo tiempo se le comunica un movimiento de rotación hacia atrás con velocidad angular inicial ω_o. El coeficiente de fricción entre el aro y la superficie es μ.

Analizar el movimiento del aro posterior al lanzamiento: Encontrar la velocidad lineal v_{cm}, la velocidad angular ω y la velocidad lineal del punto de contacto v_p. En particular, indicar al cabo de cuánto tiempo empezará solo a rodar. Graficar estas cantidades en función del tiempo.



D.C.L.



Aro

$I_{CM} = MR^2$

- Equilibrio vertical:

  $N - W = 0 \Longrightarrow N = W = Mg$

  luego, en deslizamiento:

  $f = \mu N = \mu Mg$

- Movimiento de translación horizontal deslizándose:

  $-f = Ma_{cm} \Longrightarrow a_{cm} = -\frac{f}{M} = -\frac{\mu Mg}{M} = -\mu g$

  luego, como la a_{cm} es constante, la velocidad del CM será:

  $$v_{cm} = v_o - \mu gt$$

Para dibujar los gráficos pedidos, es conveniente determinar el tiempo t_d en el cual el CM llegaría al reposo si el aro solamente desliza:

si, $v_{cm} = 0 \Rightarrow v_o = \mu g t_d \Rightarrow t_d = \frac{v_o}{\mu g}$

- Movimiento de rotación en torno al eje que pasa por su CM mientras desliza:

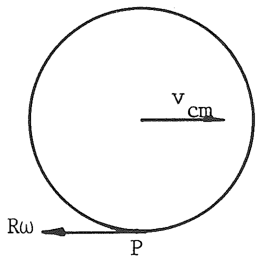
$$T_{CM} = I_{CM}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{T_{CM}}{I_{CM}} = \frac{-fR}{MR^2} = \frac{-\mu Mg}{MR} = -\frac{\mu g}{R}$$

luego, como α es constante, la velocidad angular ω, será:

$$\omega = \omega_o - \frac{\mu g}{R}\,t$$

- Velocidad del punto P de contacto mientras desliza:

$$v_p = v_{cm} + R\omega = v_o - \mu gt + R\omega_o - \frac{R\mu gt}{R} = v_o + R\omega_o - 2\mu gt$$



El aro comenzará el movimiento de rodadura, cuando la velocidad de este punto de contacto P sea cero, es decir cuando $v_{cm} = -R\omega$. El tiempo transcurrido t_r, será:

$$\text{si, } v_p = 0 \Longrightarrow t_r = \frac{v_o + R\omega_o}{2\mu g}$$

Las velocidades, lineal y angular, que tiene el aro en ese instante, serán:

$$v_{cm_r} = v_o - \mu g t_r = v_o - \mu g\left(\frac{v_o + R\omega_o}{2\mu g}\right) = \frac{1}{2}(v_o - R\omega_o)$$

$$\omega_r = \omega_o - \frac{\mu g}{R}\,t_r = \omega_o - \frac{\mu g}{R}\left(\frac{v_o + R\omega_o}{2\mu g}\right) = \frac{1}{2R}(R\omega_o - v_o)$$

$$v_{p_r} = 0\ .$$

Iniciada la rodadura, el aro continuará su movimiento con estas velocidades que cumplen la condición de rodadura, relación que en la convención de signos adoptada es:

$$v_{cm} = (-\omega)R = \frac{1}{2}(v_o - R\,\omega_o)$$

Posteriormente discutiremos nuevamente esta condición, ampliando nuestro análisis.

Primero grafiquemos en función del tiempo, desde el inicio del movimiento ($t = 0$), las cantidades: v_{cm}, $R\omega$ y v_P.

Estos gráficos, o sea, el comportamiento del aro, dependerá de la relación que tengan las condiciones iniciales de lanzamiento, presentándose tres posibles casos, estos son:

$$\text{si,} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} v_\circ > R\omega_\circ \ldots\ldots (I) \\ v_\circ < R\omega_\circ \ldots\ldots (II) \\ v_\circ = R\omega_\circ \ldots\ldots (III) \end{cases}$$

-(I) $v_\circ > R\omega_\circ$

Establezacamos primero si la rodadura empieza antes o después de t_d:

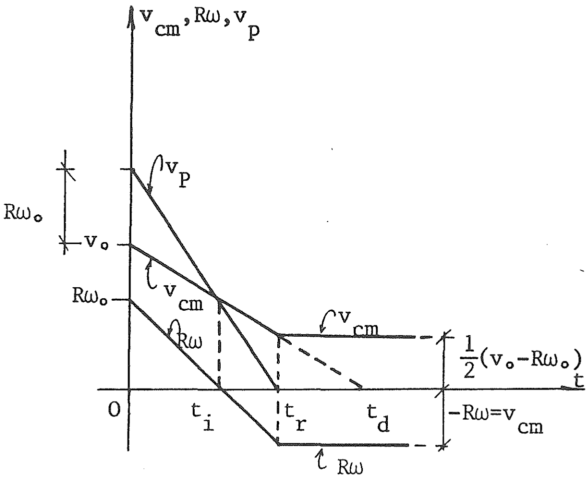
$$t_r = \frac{v_\circ + R\omega_\circ}{2\mu g} = \frac{v_\circ + R\omega_\circ}{2\ v_\circ / t_d} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R\omega_\circ}{v_\circ}\right) t_d$$

como $v_\circ > R\omega_\circ \Rightarrow \frac{R\omega_\circ}{v_\circ} < 1 \Longrightarrow t_r < t_d$

Iniciado el movimiento, el aro disminuye su velocidad lineal y angular. Cuando $\omega = 0$, esto es también cuando $v_p = v_{cm}$, en el tiempo:

$$0 = \omega_\circ - \frac{\mu g}{R} t_i \Longrightarrow t_i = \frac{R\omega_\circ}{\mu g}$$

el aro invierte su sentido de giro hacia adelante (negativo en la convención adoptada), pero sigue deslizando hasta llegar a t_r.

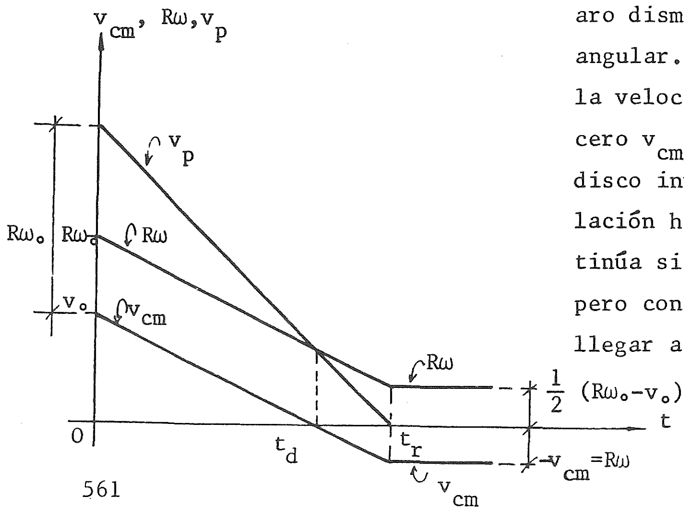


En ese instante, $v_p = 0$ y se establece rodadura pura y contínua hacia adelante con $v_{cm} = \frac{1}{2}(v_\circ - R\omega_\circ) = (-\omega)R$ y rodando con velocidad angular ω también hacia adelante (negativa).

-(II) $v_\circ < R\omega_\circ$

Cuando: $v_\circ < R\omega_\circ \Rightarrow \frac{R}{v_\circ} > 1 \Rightarrow t_r > t_d$

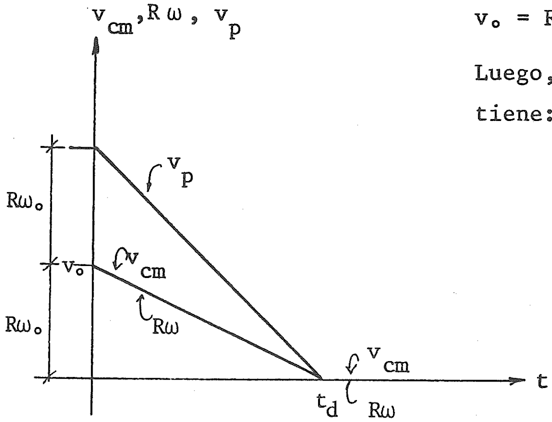
En este caso la rodadura empieza después de t_d. Iniciado el movimiento, el aro disminuye su velocidad lineal y angular. Cuando alcanza el tiempo t_d, la velocidad de translación se hace cero $v_{cm} = 0$ y $v_p = R\omega$. Luego, el disco invierte su movimiento de translación hacia atrás (negativo) y ω continúa siendo hacia atrás (positivo) pero continúa el deslizamiento hasta llegar a t_r.



561

En ese instante, $v_p = 0$ y se establece rodadura pura retrocediendo hacia el punto de partida con $v_{cm} = \frac{1}{2}(v_o - R\omega_o) = (-\omega)R$ (negativo) y con velocidad angular ω también hacia atrás (positivo).

-(III) $v_o = R\omega_o$



En este caso límite, entre los dos anteriores, cuando:

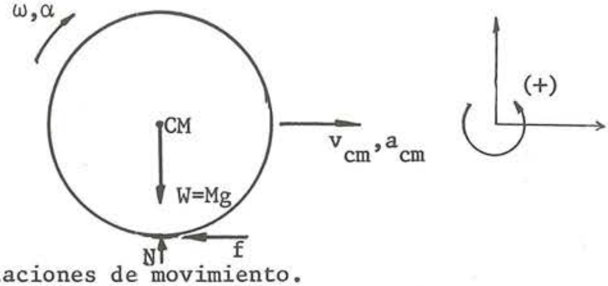
$$v_o = R\omega_o \Rightarrow \frac{R\omega_o}{v_o} = 1 \Longrightarrow t_r = t_d$$

Luego, en este mismo instante, se tiene:

$$v_{cm} = R\omega = v_p = 0$$

Consideremos nuevamente la situación cuando se ha iniciado el movimiento de rodadura sin deslizamiento, para mostrar que las velocidades alcanzadas en ese instante v_{cm} y ω se mantienen constantes, cumpliéndose la relación de rodadura.

Supongamos que actúa una fuerza de fricción f, ahora, estática (observe que al no haber deslizamiento $f \neq \mu N$).



Planteemos las ecuaciones de movimiento.

- Translación: $- f = M\, a_{cm} \Longrightarrow a_{cm} = -\frac{f}{M}$
- Rotación : $- fR = I_{CM}\alpha \Longrightarrow \alpha = -\frac{fR}{MR^2} = -\frac{f}{MR}$

A primera vista se presenta una contradicción, mientras a_{cm} nos indica una disminución de v_{cm}, α nos indica un aumento de ω. Debiéndose mantener la condición de rodadura $v_{cm} = (-\omega)R$.

Resolvamos estas ecuaciones, con la condición de rodadura $a_{cm} = (-\alpha)R$.
Reemplazando en la ecuación de translación se tiene:

$$- \alpha R = -\frac{f}{M} \Longrightarrow \alpha = \frac{f}{MR}$$

Comparando con la ecuación de rotación:

$$\alpha = -\frac{f}{MR}$$

Esto será posible solo si $f = 0$ y se tendrá: $\alpha = 0$ y $a_{cm} = 0$. Por lo tanto, ω y v_{cm} permanecen constante.

Recuerde que la fuerza de fricción estática actúa con un valor tal, que corresponde siempre al requerimiento de la acción solicitada.

Adicionalmente, recurramos al concepto de energía: $W = \Delta K$, teniéndose en este caso $W = 0$, luego queda:

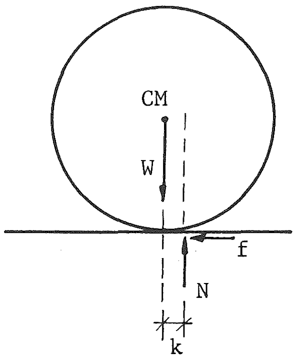
$$\Delta K = 0$$

como: $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

y siendo ambos términos siempre positivos, para que $\Delta K = 0$, tanto v_{cm} como ω, deben permanecer constantes.

Esto es, finalmente, el aro tiene una energía cinética de translación y una energía cinética de rotación, tales que se cumple la condición de rodadura. No requiriéndose ninguna fuerza. Conservándose la energía cinética total.

Pero nuestra experiencia nos dice que si lanzamos un aro, observamos que ambos valores disminuyen y el aro se detiene. Esto es por otra causa, se debe a que cuando se tiene un aro real sobre una superficie, por las deformaciones producidas, el contacto entre ellos no es realmente un punto.

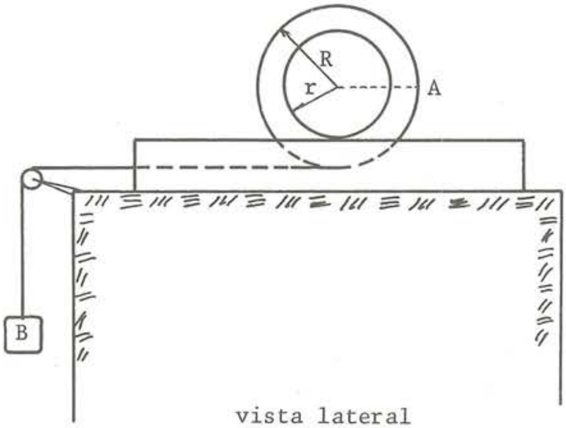


La normal es la resultante de pequeñas fuerzas distribuídas en el contacto real producido. Como resultado se tiene un desplazamiento k de N respecto a la vertical que pasa por el CM.

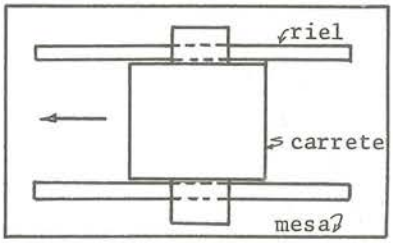
Luego, por este hecho, aparece un contra torque: $k\vec{N}$, responsable de que ω disminuya y consecuentemente también v_{cm}. Deteniéndose finalmente el aro.

Este análisis nos conduce al coeficiente de fricción a la rodadura. Análisis que se ampliará con mayor detalle en los cursos de aplicación mecánica.

38. Un carrete de radios r = 4cm y R = 6cm está suspendido apoyado sobre rieles horizontales como se muestra en la figura. El carrete está conectado al bloque B mediante una cuerda inextensible y rueda sin deslizar. En la posición indicada, la velocidad y aceleración del C.M. apuntan hacia la izquierda y sus magnitudes son 8 cm/s y 20 cm/s^2, respectivamente. Calcular la aceleración de B relativa al punto A del carrete.

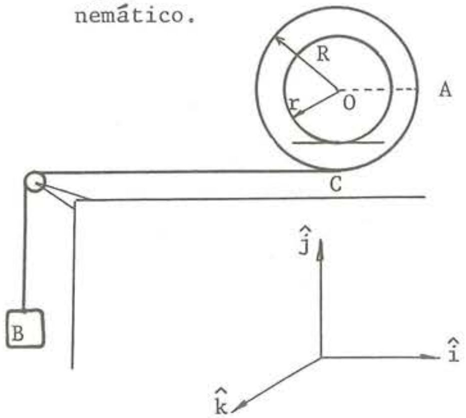


vista lateral



vista superior

El movimiento del carrete está dado: $\bar{a}_{cm}$, $\bar{v}_{cm}$ y rodadura sin deslizamiento. Pidiéndose, calcular la aceleración de B relativa a A, $\bar{v}_{B/A}$. Por lo tanto, estamos frente a un problema exclusivamente cinemático.



- Aceleraciones lineal del CM y angular del carrete:

$$\bar{a}_o = -20i \quad cm/s^2$$

$$\bar{\alpha} = \frac{a_o}{r}\hat{k} = \frac{20}{4}\hat{k} = 5\hat{k} \ rad/s^2$$

- velocidades lineal del CM y angular del carrete:

$$\bar{v}_o = -8\hat{i} \quad cm/s$$

$$\bar{\omega} = \frac{v_o}{r}\hat{k} = \frac{8}{4}\hat{k} = 2\hat{k} \quad rad/s$$

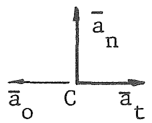
La aceleración de B en el eje y es igual a la aceleración del punto C en el eje x, la pequeña polea solo cambia la dirección.

Para determinar la aceleración del punto C, encontremos primero las aceleraciones relativas normal y tangencial para cualquier punto de la periferia, de radio R, del carrete:

$$a_n = \omega^2 R = (2)^2 (6) = 24 \text{ cm/s}^2$$

$$a_t = \alpha R = (5)(6) = 30 \text{ cm/s}^2$$

Luego, la aceleración del punto C, será:

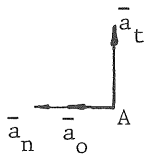


$$\bar{a}_c = \bar{a}_0 + \bar{a}_n + \bar{a}_t = -20\hat{\imath} + 24\hat{\jmath} + 30\hat{\imath} = 10\hat{\imath} + 24\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, la aceleración de B es:

$$\bar{a}_B = 10\hat{\jmath} \quad \text{cm/s}^2$$

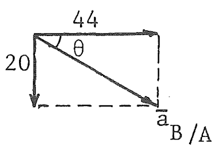
La aceleración del punto A, será:



$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{a}_n + \bar{a}_t = -20\hat{\imath} - 24\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} = -44\hat{\imath} + 30\hat{\jmath}$$

Finalmente, la aceleración de B relativa a A, será:

$$\bar{a}_{B/A} = \bar{a}_B - \bar{a}_A = 10\hat{\jmath} + 44\hat{\imath} - 30\hat{\jmath} = 44\hat{\imath} - 20\hat{\jmath}$$

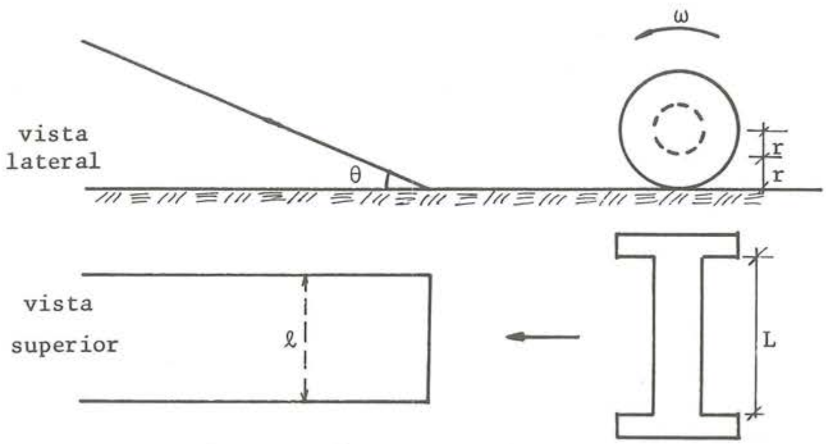


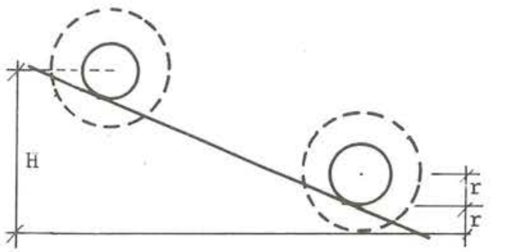
$$a = \sqrt{(44)^2 + (20)^2} = 4\sqrt{(11)^2 + (5)^2} = 48.33 \text{cm/s}^2$$

$$\text{tg}\theta = \frac{20}{44} = \frac{5}{11} = 24.44°$$

39. Un carrete, como se muestra en la figura, rueda sobre una superficie horizomtal con velocidad angular ω constante. En su camino se encuentra con una rampa inclinada un ángulo θ y cuyo ancho ℓ es menor que la longitud L del eje del carrete. Encontrar la altura H sobre el nivel del piso hasta la cual puede llegar el centro de masa del carrete.

Considerar el momento de inercia del carrete como: $I = \frac{1}{2} Mr^2$.





Como nos piden el cambio de altura del CM en un potencial gravitatorio, por conservación de energía: $\Delta E = 0$. Considerando que al alcanzar la máxima altura, el carrete solo tendrá energía potencial, pues $\omega_f=0$, se tiene:

$$Mg(H - 2r) = \frac{1}{2} M(v_{cm}^2 - 0) + \frac{1}{2} I(\omega^2 - 0)$$

Por condición de rodadura: $v_{cm} = 2r\omega$, luego:

$$MgH = \frac{1}{2} M\, 4r^2\omega^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + Mg2r$$

$$H = \frac{1}{2g} \left(4r^2 + \frac{I}{M}\right)\omega^2 + 2r$$

y con: $I = \frac{1}{2} Mr^2$, queda:

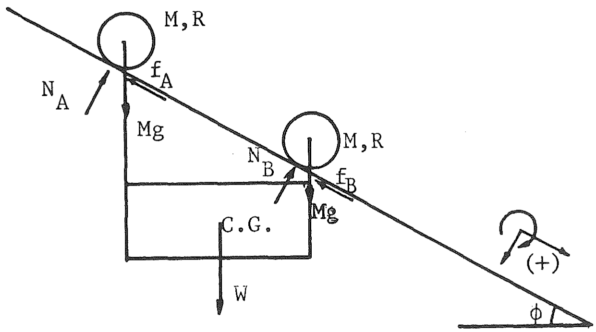
$$H = \frac{1}{2g} \left(4 + \frac{1}{2}\right) r^2\omega^2 + 2r$$

$$H = \frac{9}{4g} r^2\omega^2 + 2r$$

Nota: Si ha considerado que el carrete se encuentra con una transición suave al alcanzar la rampa, de modo tal, que en el impacto no se produce pérdida de energía.

40. La cabina de un funicular de peso W, cuelga mediante dos poleas, de masa M y radio R cada una, de un cable rígido que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Encontrar su aceleración si se suelta el freno y baja por la acción de su propio peso. Asumir rodadura sin deslizamiento.

D.C.L.



Al ser dos poleas iguales las fuerzas de fricción son iguales ($f_A=f_B=f$). Pero, observe que f depende de la masa y no del radio, si las masas de las poleas fueran diferentes las fuerzas de fricción serían diferentes.

- Movimiento de translación sobre la pendiente.

$$(2Mg + W)\text{sen } \phi - 2f = (2M + \frac{W}{g})a$$

- Movimiento de rotación, rodadura sin deslizamiento, de las poleas:

$$fR = I_o\alpha = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} \Longrightarrow f = \frac{1}{2} Ma$$

Reemplazando f en la eucación del movimiento de translación, se tiene:

$$(2Mg + W) \text{ sen } \phi - 2 \frac{1}{2} Ma = (2M + \frac{W}{g})a$$

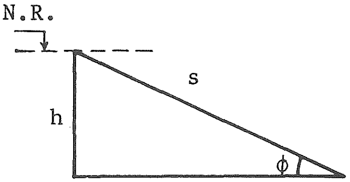
despejando la aceleración,

$$(2Mg + W)\text{sen } \phi = (3M + \frac{W}{g})a$$

$$a = \left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}} \right) \text{sen}\phi$$

Como ejercicio encontremos esta cantidad utilizando el concepto de conservación de energía. Primero determinaremos la velocidad v y luego, derivando, se obtiene a. Veamos:

$$\Delta_E = \Delta(K + U) = \Delta K + \Delta U = 0 \Longrightarrow -\Delta U = \Delta K$$



Al descender una altura h cualquiera, recorre sobre la pendiente una distancia s y adquiere una velocidad $v = \frac{ds}{dt}$.

$$-[-(2Mg + W)h) - 0] = \frac{1}{2}(2M + \frac{W}{g})v^2 + 2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{v}{R})^2 - 0$$

$$(2Mg + W)h = \frac{1}{2}(2M + \frac{W}{g})v^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(3M + \frac{W}{g})v^2$$

$$v^2 = 2\left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}}\right)h = 2\left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}}\right)s\ \mathrm{sen}\phi$$

derivando:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}}\right)\frac{ds}{dt}\ \mathrm{sen}\ \alpha$$

$$2va = 2\left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}}\right)v\ \mathrm{sen}\ \alpha$$

$$a = \left(\frac{2Mg + W}{3M + \frac{W}{g}}\right)\mathrm{sen}\ \alpha$$

el mismo valor anterior, por supuesto.

Para determinar las normales, perpendicularmente a la pendiente se tiene:

$$-N_A - N_B + (2Mg + W)\cos\phi = 0$$

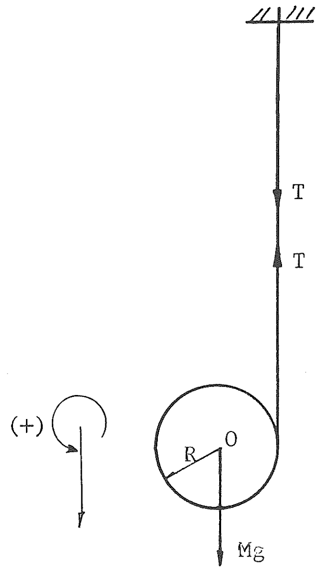
$$N_A + N_B = (2Mg + W)\cos\phi = 0$$

luego, necesitamos otra ecuación, debemos tomar momentos con respecto a un punto, $T_{o_z} = 0$, pero como no han precisado la posición del

C.G. no se puede plantear esta ecuación. Observe que en general, $N_A \neq N_B$. Pero en este caso $f_A = f_B = f$, valor requerido para que giren con α las poleas, que son iguales.

41. Encontrar la aceleración lineal con la cual se mueve un cuerpo rígido de forma cilíndrica (disco) que tiene una cuerda arrollada a su alrededor con uno de sus extremos fijos al cuerpo y el otro al techo.

D.C.L.



- movimiento de translación: $(F=Ma_{cm})$

$$Mg - T = Ma_{cm} \Longrightarrow T = M(g - a_{cm})$$

- movimiento de rotación: $(T_o = I\alpha)$

$$TR = I_o\alpha \Longrightarrow T = \frac{I_o\alpha}{R}$$

con la relación de rodadura: $a_{cm}=\alpha R$
(aceleración lineal del CM del disco al desenrrollarse de la cuerda fija al techo)
y con el momento de inercia respecto al CM: $I_o= \frac{1}{2} MR^2$
se tiene:

$$T = \frac{\frac{1}{2} MR^2 \frac{a_{cm}}{R}}{R} = \frac{1}{2} M a_{cm}$$

igualando ambas expresiones de T, queda:

$$\frac{1}{2} M a_{cm} = M(g - a_{cm})$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3} g$$

Note que a_{cm} es independiente de M y R.

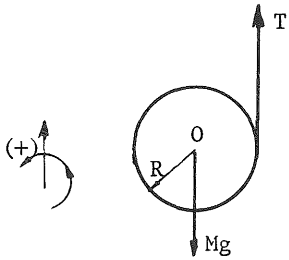
42. Se enrolla una cuerda de masa despreciable alrededor de un disco cilíndrico homogéneo de masa M = 15Kg y radio R = 0.5m. La cuerda tiene un extremo fijo al cuerpo y el otro extremo libre se tira hacia arriba con una fuerza T = 180N. Determinar:

a) La aceleración lineal del CM del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La aceleración lineal de la cuerda.

D.C.L.



-Movimiento de translación.

$$T - Mg = M\, a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{T}{M} - g = \frac{180}{15} - 9.81 = 2.19 m/s^2$$

- Movimiento de rotación:

$$TR = I_o \alpha$$

$$\alpha = \frac{TR}{\frac{1}{2}\ MR^2} = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \times 180}{15 \times 0.5} = 48 rad/s^2$$

Observe que en este caso no se dá la relación de rodadura como en el problema anterior, aquí, $a_{cm} \neq \alpha R$.

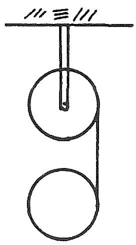
La aceleración tangencial, con respecto al CM del disco, del punto de contacto de la cuerda con el disco conforme se desenrrolla es:

$$a_t = \alpha R = 48 \times 0.5 = 24 \ m/s^2$$

Luego, la aceleración de este punto la cuerda, y de cualquier otro de ella, con respecto a tierra, será:

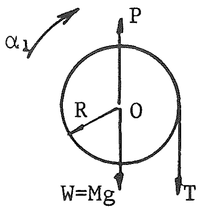
$$a_c = a_t + a_{cm} = 24 + 2.19 = 26.19 \ m/s^2$$

43. Se tienen dos discos iguales de radio R y masa M cada uno, y una cuerda ideal con sus extremos arrollados alrededor de ellos como se muestra en la figura. El disco superior puede girar libremente alrededor de su eje horizontal como una polea colgada del techo y el disco inferior se suelta dejándolo caer.
Encontrar la aceleración angular de los discos, la aceleración lineal de translación del CM del disco que cae y la tensión en la cuerda.



D.C.L.

- Disco Polea

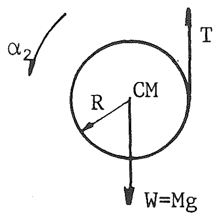


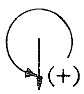
$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

- Movimiento de rotación:

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_1 \Longrightarrow T = \frac{1}{2} MR\alpha_1$$

- Disco Móvil





- Movimiento de translación:

$$Mg - T = M\, a_{cm}$$

- movimiento de rotación:

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2} MR\alpha_2$$

La tensión en la cuerda es común para ambos discos y sus aceleraciones angulares son iguales, pero de sentidos opuestos ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$). Como los dos discos giran se tiene que: la aceleración lineal de la cuerda al desenrrollarse del disco polea será: $a_c = \alpha R$ y la aceleración lineal del CM del disco móvil con respecto a la cuerda al desenrrollarse será: $a'_{cm} = \alpha R$. Luego, la aceleración del CM del disco móvil con respecto a tierra será:

$$a_{cm} = a'_{cm} + a_c = \alpha R + \alpha R = 2\alpha R.$$

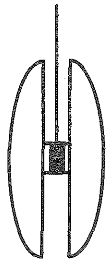
Reemplazando y resolviendo se obtiene:

$$Mg - \frac{1}{2} MR\alpha = 2\alpha RM \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{5}\,\frac{g}{R}$$

$$a_{cm} = 2\alpha R = 2\,\frac{2}{5}\,\frac{g}{R}\,R = \frac{4}{5}\,g$$

$$T = \frac{1}{2}\,MR\alpha = \frac{1}{2}\,MR\,\frac{2}{5}\,\frac{g}{R} = \frac{1}{5}\,Mg$$

44. Se tiene un juguete comercialmente conocido como Yo-Yo con las siguientes características:



M = Masa

R = Radio exterior

r = Radio del eje

I = Momento de inercia = $\frac{2}{5}\,MR^2$
(valor determinado experimentalmente)

L = Longitud de la cuerda.

Si se suelta el Yo-Yo del reposo dejando desenrrollar toda la cuerda, determinar la velocidad con la que llega al extremo.
¿Cuál será esta velocidad, si simultáneamente se levanta la mano con una velocidad constante v_M y cuál si se levanta la mano con una aceleración constante a_M?

- Como nos piden encontrar solo la velocidad v_{cm} al llegar al extremo y como la fuerza externa gravitatoria es conservativa, el camino más directo para encontrarla es por conservación de energía.

$$\Delta E = 0 \Longrightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

tomando como nivel de referencia al punto más bajo, cuando la cuerda está totalmente desenrrollada, se tiene:

$$0 + MgL = \left(\frac{1}{2}\,M\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2\right) + 0$$

con la relación de rodadura, que en este caso se dá, $v_{cm} = \omega r$, queda:

$$Mg\,L = \frac{1}{2}\,M\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}\,MR^2\,\frac{v_{cm}^2}{r^2}$$

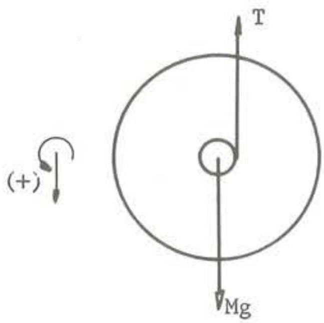
$$gL = \frac{1}{2}\,v_{cm}^2 + \frac{1}{5}\,\frac{R^2}{r^2}\,v_{cm}^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\,\frac{R^2}{r^2}\right)v_{cm}^2$$

despejando v_{cm}:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}$$

- Como ejercicio, encontremos este mismo valor, determinando primero la a_{cm}, aplicando las ecuaciones de movimiento, esto es:

D.C.L.



$$Mg - T = M\, a_{cm} \Longrightarrow T = M(g - a_{cm})$$

$$Tr = I_o\alpha \Longrightarrow T = \frac{I_o\alpha}{r}$$

$$\text{como: } a_{cm} = \alpha r \Longrightarrow T = \frac{I_o\, a_{cm}}{r^2}$$

$$\text{con: } I_o = \frac{2}{5} MR^2 \Longrightarrow T = \frac{2}{5} M \frac{R^2}{r^2} a_{cm}$$

igualando con la primera expresión de T, queda:

$$\frac{2}{5} M \frac{R^2}{r^2} a_{cm} = M(g - a_{cm})$$

$$a_{cm} = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}$$

Como esta aceleración es constante y parte del reposo, v_{cm}, será :

$$v_{cm} = \sqrt{2\, a_{cm} L} = \sqrt{\frac{2\, gL}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}$$

igual valor al anterior como debe ser, ¿verdad?,si.

- Consideremos, ahora, que la mano se levanta con una velocidad v_M constante.

  Al no estar acelerada, las expresiones del movimiento que acabamos de establecer serán las mismas y luego, la aceleración a_{cm} con respecto a la mano será la misma expresión encontrada y también lo será v_{cm}.

  Con respecto a tierra se tendrá:

$$\bar{v}_{cm/t} = \bar{v}_{cm/M} + \bar{v}_{M/t}$$

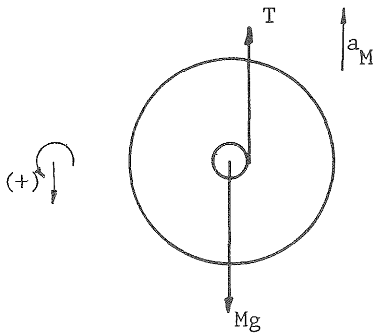
esto es:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}} - v_M$$

- Si la mano se levanta con una aceleración constante a_M las expresiones del movimiento anteriormente planteadas no serán las mismas, por lo tanto, ni la aceleración a_{cm} ni la velocidad v_{cm}, con respecto a la mano tendrán las expresiones encontradas.

  Luego, encontremos a_{cm} y v_{cm} para este caso, aplicando las ecuaciones de movimiento correspondientes se tendrá:

D.C.L.



$$Mg - T = M(a'_{cm} - a_M) \Longrightarrow T = M(g - a'_{cm} + a_M)$$

$$Tr = I_o\alpha \Longrightarrow T = \frac{I_o\alpha}{r}$$

$$\text{con: } a'_{cm} = \alpha r \Longrightarrow T = \frac{I_o a'_{cm}}{r^2}$$

$$\text{con: } I_o = \frac{2}{5}MR^2 \Longrightarrow T = \frac{2}{5}M\frac{R^2}{r^2}a'_{cm}$$

igualando con la primera expresión de T, queda:

$$\frac{2}{5}M\frac{R^2}{r^2}a'_{cm} = M(g - a'_{cm} + a_M)$$

$$a'_{cm} = \frac{g + a_M}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}$$

y la velocidad, al quedar desenrrollada toda la cuerda, será :

$$v'_{cm} = \sqrt{2a'_{cm}L} = \sqrt{\frac{2L(g + a_M)}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}$$

El tiempo que demora en alcanzar esta velocidad es:

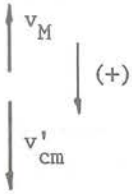
$$t = \frac{v'_{cm}}{a'_{cm}} = \frac{\sqrt{2a'_{cm}L}}{a'_{cm}} = \sqrt{\frac{2L}{a'_{cm}}} = \sqrt{\frac{2L\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}\right)}{g + a_M}}$$

en este mismo intervalo de tiempo la mano al estar acelerada con a_M, partiendo también del reposo, alcanzará una velocidad v_M igual a:

$$v_M = a_M t = a_M\sqrt{\frac{2L}{a'_{cm}}} = a_M\sqrt{\frac{2L\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}\right)}{g + a_M}}$$

y, finalmente, con respecto a tierra se tendrá:

$$\bar{v}_{cm/t} = \bar{v}_{cm/M} + \bar{v}_{M/t}$$



esto es:

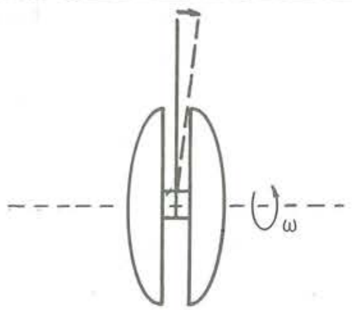
$$v_{cm} = v'_{cm} - v_M = \sqrt{2a'_{cm}L} - a_M\sqrt{\frac{2L}{a'_{cm}}}$$

$$v_{cm} = \sqrt{2a'_{cm}L}\,\left(1 - \frac{a_M}{a'_{cm}}\right)$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2L(g + a_M)}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}\,\left(1 - \frac{a_M}{\frac{g + a_M}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}\right) = \sqrt{\frac{2L(g + a_M)}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}\,\left(1 - \frac{a_M(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2})}{g + a_M}\right)$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2L(g + a_M)}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}\,\left(1 - \frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}{1 + \frac{g}{a_M}}\right)$$

45. Un Yo-Yo, como el considerado en el problema anterior, se encuentra en el extremo de la cuerda rotando libremente, sin subir, con una velocidad angular ω constante. Si se le aplica un torque, producido por la cuerda al moverla lateralmente en un plano vertical que contiene al eje del Yo-Yo y a la cuerda, ¿cómo tiende a moverse el Yo-Yo?



Inicialmente el yo-yo tiene un momentum angular:

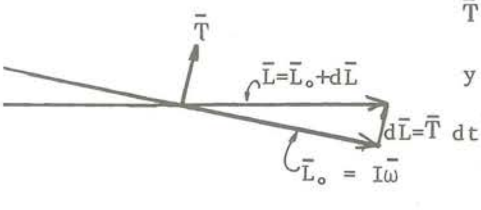
$$\bar{L}_\circ = I\bar{\omega}$$

Al aplicarle un torque $\bar{T}$, que es perpendicular a $\bar{L}_\circ$, en el plano horizontal que contiene al eje, se tiene:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{L}}{dt} \Longrightarrow d\bar{L} = \bar{T}\,dt$$

y después de un intervalo dt,

$$\bar{L} = \bar{L}_\circ + d\bar{L}$$

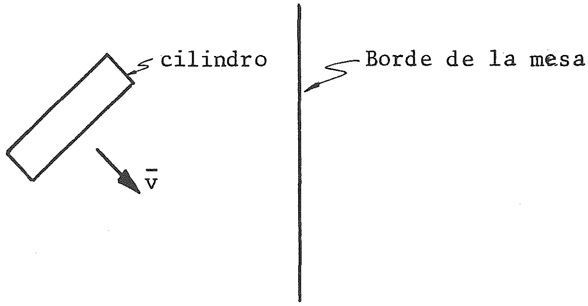


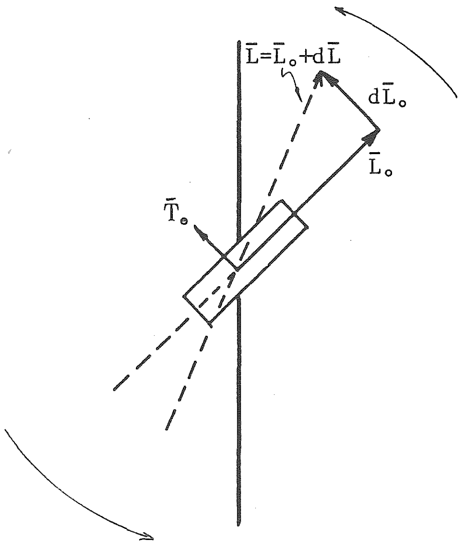
Como puede verse en la figura, el momentum angular girará en el plano horizontal.

Por lo tanto, el Yo-Yo tenderá a girar alrededor de un eje vertical.

Consiga un Yo-Yo y compruebe.

46. Un cilindro rueda sobre una mesa avanzando hacia el borde de la mesa con una velocidad $\bar{v}$ como se muestra en la figura. Indicar cual será la dirección del movimiento del cilindro cuando alcanza el borde de la misma.





El cilindro al rodar sobre la mesa tiene una velocidad angular $\omega = \frac{v}{r}$ y un momentum angular $L_o = I\omega$ a lo largo de su eje en el sentido mostrado en la figura.

Cuando el cilindro llega al borde, la gravedad actúa en el extremo libre produciendo un torque $\bar{T}_o$ como se muestra en la figura y de acuerdo a la ecuación fundamental:

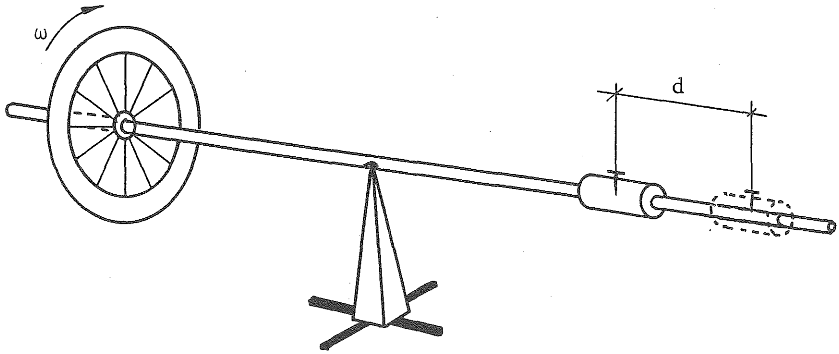
$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow d\bar{L}_o = \bar{T}_o\, dt$$

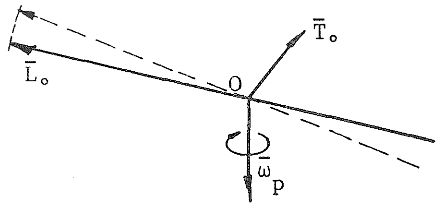
Por lo tanto, luego de un dt, se tendrá:

$$\bar{L} = \bar{L}_o + d\bar{L}_o$$

produciéndose un giro hacia adentro del borde de la mesa como puede apreciarse en la figura.

47. Una rueda y un contrapeso están unidos por un eje, el cual, se coloca horizontalmente en equilibrio sobre un pivot como se muestra en la figura. La rueda, de momento de inercia $I = 0.27$ Kg-m^2, gira con una velocidad angular $\omega = 10.6$ rad/s en el sentido indicado también en la figura. Si el contrapeso, de masa $m = 2.02$ Kg, se desplaza en el eje una distancia $d = 10$ cm hacia afuera, encontrar la velocidad angular de precesión.





En el item 7.8 hemos analizado este movimiento, habiendo encontrado:

$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_p \times \bar{L}_o$$

en el diagrama se muestran sus direcciones, teniéndose:

$$\bar{T}_o \perp \bar{L}_o \perp \bar{\omega}_p$$

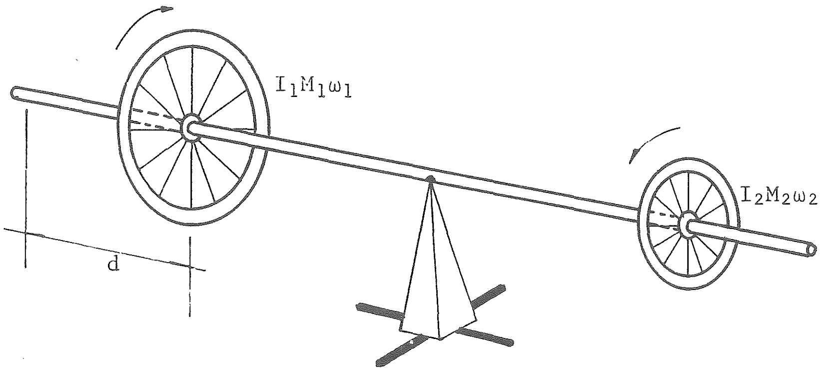
y:

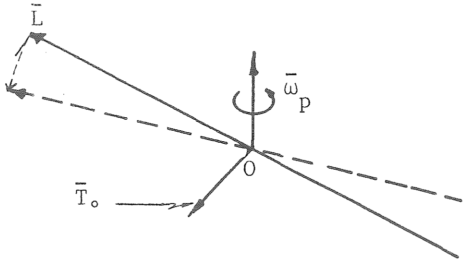
$$\omega_p = \frac{T_o}{L_o} = \frac{mgd}{I\omega} = \frac{2.02 \times 9.81 \times 0.1}{0.27 \times 10.6}$$

$$\omega_p = 0.69 \text{ rad/s}$$

48. Sobre un pivot vertical se coloca horizontalmente en equilibrio un eje con dos volantes como se muestra en la figura. Las volantes giran con velocidades angulares de sentidos opuestos. Si la volante (1) se desplaza en el eje una distancia d hacia afuera, encontrar la velocidad angular de precesión.

Considerar que $I_1\omega_1 > I_2\omega_2$





Tratándose de un movimiento de precesión, que ya hemos analizado, se tiene que:

$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_p \times \bar{L}_o$$

mostrándose en el diagrama las direcciones de los tres vectores, donde:

$$\bar{T}_o \perp \bar{L}_o \perp \bar{\omega}_p$$

luego:

$$\omega_p = \frac{T_o}{L_o} = \frac{M_1 gd}{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}$$

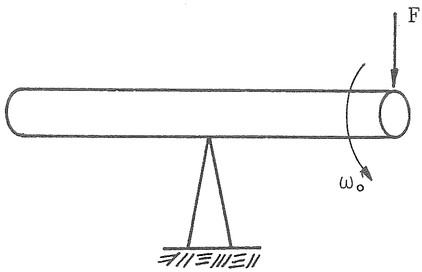
49. Un cilindro está en equilibrio apoyado como se muestra en la figura. Se pide determinar su movimiento en cada uno de los siguientes casos:

a) El cilindro está girando con una velocidad angular $\bar{\omega}_o$ alrededor de su eje longitudinal en el sentido indicado y luego se le aplica en uno de sus extremos una fuerza de magnitud F constante, perpendicular al eje del cilindro, y dirigida hacia abajo.

b) El cilindro no está girando y se le aplica la misma fuerza indicada en a).

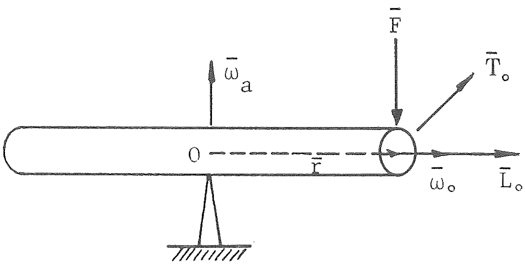
c) El cilindro está girando como en a), pero la fuerza que se aplica en este caso es horizontal.

d) El cilindro no está girando y se le aplica la fuerza la misma fuerza indicada en c).



Caso (a)

- Caso(a).



El torque es: $\bar{T}_o = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow \bar{T}_o \perp \bar{L}_o$

Aplicando la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$$

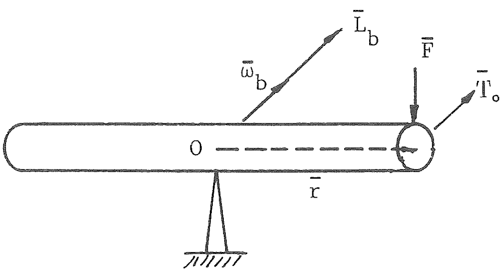
Se presenta un movimiento de precesión con velocidad angular $\bar{\omega}_a$:

$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_a \times \bar{L}_o, \text{ teniéndose } \begin{cases} \bar{\omega}_a \perp \bar{T}_o \\ \bar{\omega}_a \perp \bar{L}_o \end{cases}$$

El cilindro gira en el plano horizontal.

Nota: Por claridad el vector torque, $\bar{T}_o$, se ha dibujado desplazado al extremo del cilindro, teniendo en cuenta que: $d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$.

-Caso (b)



El torque es: $\bar{T}_o = \bar{r} \times \bar{F}$

En este caso se tiene que: $\bar{\omega}_o = 0$ y $\bar{L}_o = 0$. Aplicando la ecuación fundamental:

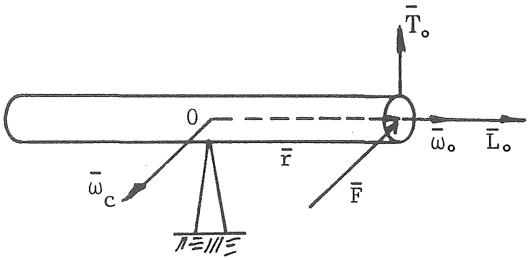
$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$$

se tendrá un movimiento de rotación con velocidad angular $\bar{\omega}_b$:

$$\bar{\omega}_b // \bar{T}_o \text{ y } \bar{L}_b // \bar{T}_o$$

El cilindro girará en el plano vertical (El extremo de aplicación de la fuerza "desciende").

-Caso(c)



El torque es: $\bar{T}_o = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow \bar{T}_o \perp \bar{L}_o$

Aplicando la ecuación fundamental

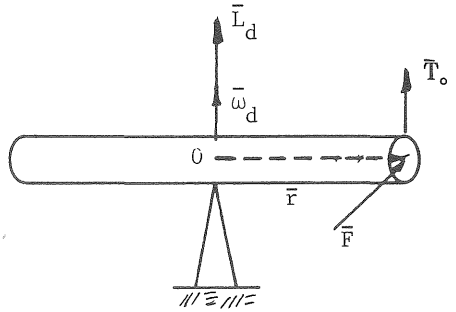
$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$$

se presenta un movimiento de precesión con velocidad angular $\bar{\omega}_c$:

$\bar{T}_o = \bar{\omega}_c \times \bar{L}_o$, teniéndose: $\begin{cases} \bar{\omega}_c \perp \bar{T}_o \\ \bar{\omega}_c \perp \bar{L}_o \end{cases}$

El cilindro gira en el plano vertical. (El extremo de aplicación de la fuerza se "levanta")

-Caso(d).



El torque es: $\bar{T}_o = \bar{r} \times \bar{F}$

En este caso se tiene que:

$\bar{\omega}_o = 0$ y $\bar{L}_o = 0$.

Aplicando la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow d\bar{L}_o = \bar{T}_o\, dt$$

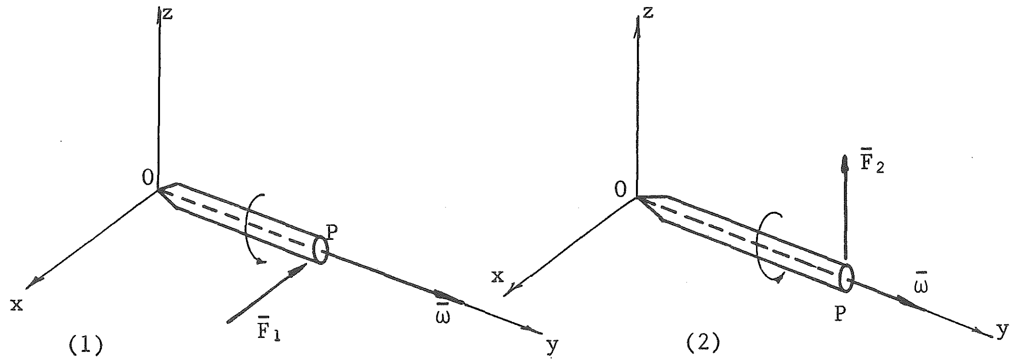
se tendrá un movimiento de rotación con velocidad angular $\bar{\omega}_d$:

$$\bar{\omega}_d \parallel \bar{T}_o \text{ y } \bar{L}_d \parallel \bar{T}_o$$

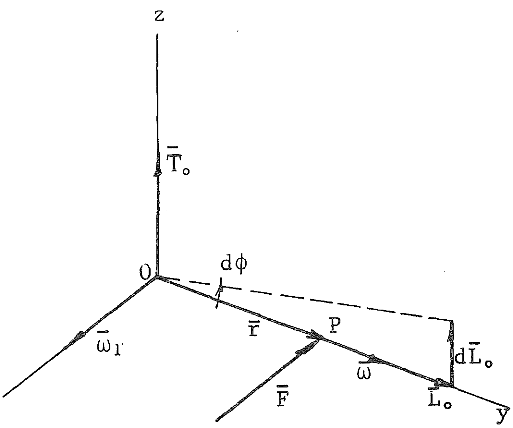
El cilindro girará en el plano horizontal.

50. Una pieza cilíndrica de masa m, diámetro d y longitud a, descansa sobre un plano horizontal con uno de sus extremos unido, mediante una rótula, a un punto fijo O. El cilindro gira en torno a su eje longitudinal con una velocidad angular ω y en el extremo libre P se le aplica una fuerza $\bar{F}$ perpendicular a su eje en todo instante, con direcciones y sentidos indicados en la figura.

Determinar, en los casos mostrados (1) y (2), el movimiento que ejecutará la pieza. Calcular la velocidad angular correspondiente que lo describe y graficar los vectores que intervienen, para un instante dt. Considere la acción gravitacional despreciable en todo momento. ¿Cómo se compondrá el movimiento si actúan simultáneamente ambas fuerzas (1) y (2)?



-Caso (1)



$$I_o = \frac{1}{2} m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m\, d^2$$

El momentum angular inicial es:

$$\bar{L}_o = I\,\bar{\omega} = \frac{1}{8} md^2\ \omega\ \hat{j}$$

El torque es:

$$\bar{T}_o = \bar{r} \times \bar{F} = a\,F\,\hat{k}$$

Aplicando la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \implies d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$$

Se presenta un movimiento de precesión con velocidad angular $\bar{\omega}_1$:

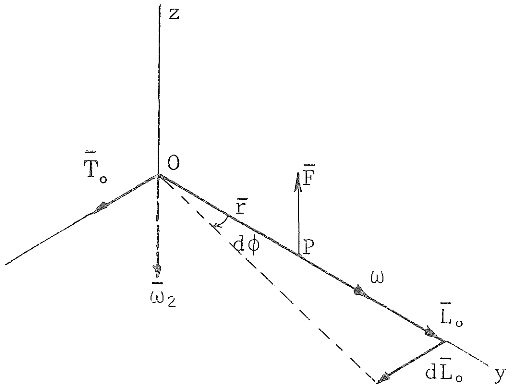
$$\bar{T}_o = \bar{\omega}_1 \times \bar{L}_o \text{ ,teniéndose : } \begin{cases} \bar{\omega}_1 \perp \bar{T}_o \\ \bar{\omega}_1 \perp \bar{L}_o \end{cases}$$

luego:

$$\omega_1 = \frac{T_o}{L_o}\,\hat{i} = \frac{a\,F}{\frac{1}{8} md^2\omega}\ i = \frac{8a\,F}{m\,d^2\omega}\ \hat{i}$$

La pieza gira en el plano vertical y-z, alrededor del eje x (el extremo P se "levanta").

-caso (2)



Como en el caso anterior se tiene un movimiento de precesión.

Con:

$\bar{L}_o = \frac{1}{8} md^2\omega\hat{j}$

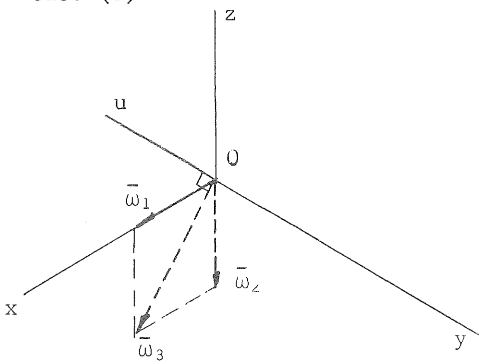
$\bar{T}_o = aF\hat{i}$

$d\bar{L}_o = \bar{T}_o dt$

$\bar{\omega}_2 = \frac{8aF}{md^2\omega}(-\hat{k})$

La pieza gira en el plano horizontal x-y, alrededor del eje z (el extremo P "retrocede").

-Caso (3)

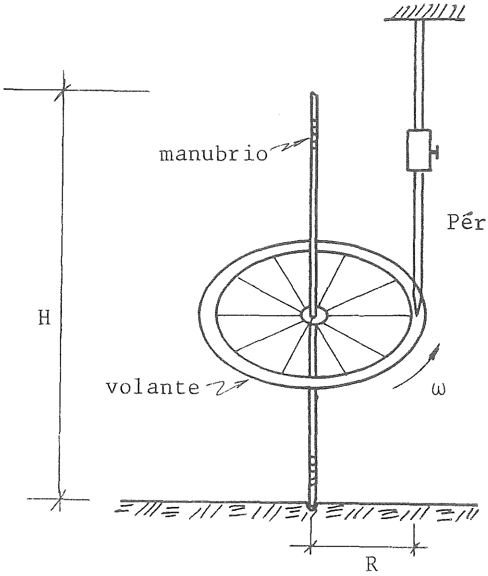


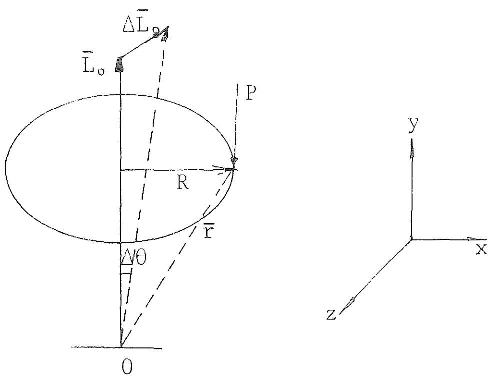
Cuando se aplican las dos fuerzas $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$ simultáneamente, ambas rotaciones se combinan, teniéndose:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$$

La pieza gira en un plano y-u, perpendicular a $\bar{\omega}_3$, alrededor de la dirección de $\bar{\omega}_3$ (el extremo P se "levanta" y "retrocede" combinadamente).

51. Una volante de radio R y masa M distribuída perimetralmente en la circunferencia, gira en un plano horizontal con una velocidad angular ω alrededor de su manubrio vertical, de longitud H, el cual apoya uno de sus extremos sobre el piso tal como se muestra en la figura. Posteriormente, con una pértiga empotrada en el techo y de longitud variable, se le aplica a la volante una fuerza puntual P, constante durante un tiempo Δt, perpendicularmente sobre la circunferencia, teniéndose un contacto perfectamente liso sin fricción. ¿Cuál es el movimiento de la volante en el tiempo Δt y cuál será su movimiento posterior, sin la acción de la pértiga? Encontrar la fuerza $\bar{F}$, que debería aplicarse simultáneamente con la acción de la pértiga, perpendicularmente sobre al manubrio en su extremo libre no apoyado, para anular el movimiento que se produciría por la acción de la pértiga descrito anteriormente. ¿Cuál sería el efecto de considerar rozamiento entre el extremo de la pértiga y la circunferencia de la volante?





Torque aplicado por la pértiga:

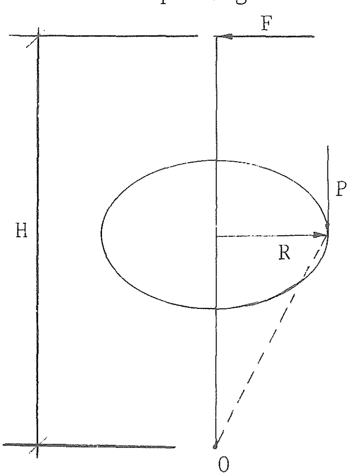
$$\bar{T}_o = RP(-\hat{k})$$

Aplicando la ecuación fundamental:

$$\bar{T}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow \Delta\bar{L}_o = \bar{T}_o\Delta t$$

Luego, el momentum angular $\bar{L}_o$ tiende a girar hacia atrás un ángulo $\Delta\theta$ en el tiempo Δt.

Retirada la pértiga, se tiene un trompo a un ángulo $\Delta\theta$ con la vertical, y el movimiento que sigue será un movimiento de precesión.



Para anular la acción de la pértiga, la fuerza $\bar{F}$ deberá ser tal que produzca un torque igual y contrario para anular el producido por la pértiga, esto es:

$$HF = RP \rightarrow \bar{F} = \left(\frac{R}{H}\right)P\ (-\hat{i})$$

Si se considera el rozamiento, la fuerza de fricción es:

$$\bar{f} = f\ \hat{k} = \mu P\ \hat{k}$$

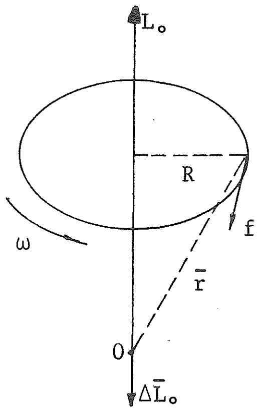
y el torque producido por ella es:

$$\bar{T}_{o_f} = f\ R(-\hat{j}) = \mu P(-\hat{j})$$

Aplicando la ecuación fundamental

$$\bar{T}_{o_f} = \frac{d\bar{L}_o}{dt} \Longrightarrow \Delta\bar{L}_o = \bar{T}_{o_f}\ \Delta t$$

Luego, el momentum angular $\bar{L}_o$ no cambia su dirección, **sólo disminuye** su magnitud y consecuentemente la velocidad angular ω .



52. Determinar el centro de fuerzas o punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas coplanares cualquiera que actúan sobre un cuerpo rígido.

Consideremos una fuerza coplanar genérica:

$$\bar{F}_i = F_{x_i}\ \hat{i} + F_{y_i}\ \hat{j}$$

aplicada en el punto:

$$\bar{r}_i = x_i\ \hat{i} + y_i\ \hat{j}$$

La resultante de n fuerzas será:

$$\bar{F} = (\sum_{i=1}^{n} F_{x_i})\hat{j} + (\sum_{i=1}^{n} F_{y_i})\hat{j}$$

con módulo:

$$F = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} F_{x_i})^2 + (\sum_{i=1}^{n} F_{y_i})^2}$$

y dirección:

$$\operatorname{tg}\theta_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}}$$

Observe que la fuerza resultante $\bar{F}$ es también coplanar con las fuerzas $\bar{F}_i$, como era de esperarse.

Para encontrar la posición $\bar{r}_{cf}$ del centro de fuerzas se requiere que se satisfaga la igualdad:

$$\bar{r}_{cf} \times \bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

Tomemos como centro de momentos el punto O, el cual es arbitrario, en el mismo plano solo por simplicidad operativa. Luego se tendrá:

$$[x_{cf}(\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}) - y_{cf}(\sum_{i=1}^{n} F_{x_i})]\hat{k} = [\sum_{i=1}^{n}(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i})]\hat{k}$$

encontrándose que el torque de la resultante y el torque total son perpendiculares al plano, requiriéndose para su igualdad que:

$$x_{cf}(\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}) - y_{cf}(\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i})$$

las cantidades de las sumas en i, tanto del primer miembro como del segundo son conocidas, se calculan con los datos. Por lo tanto, se tiene la ecuación de una recta de la forma:

$$ax - by = c$$

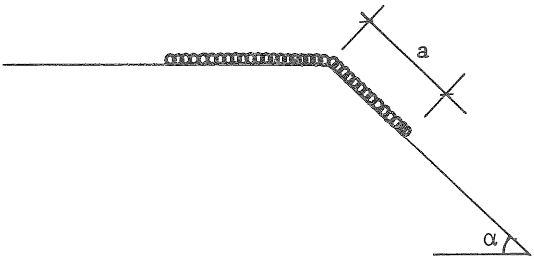
Todos los puntos de esta recta satisfacen el requerimiento. En consecuencia, no sólo hay un punto, sino, un conjunto de puntos sobre los cuales se puede aplicar la fuerza resultante para producir los mismos efectos sobre el cuerpo.

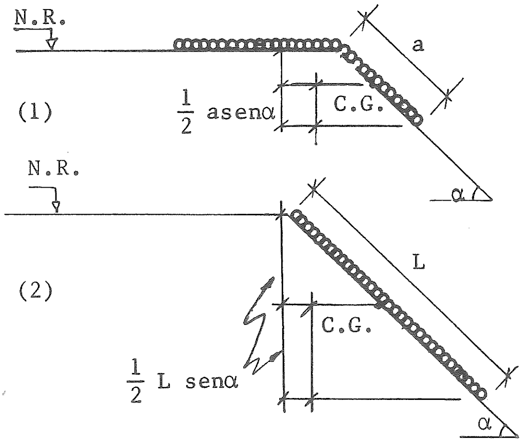
La pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{a}{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}} = \operatorname{tg}\theta_x$$

Observe que esta recta tiene igual dirección que la fuerza resultante.

53. Una cadena flexible homogénea de longitud L y peso W sobre una superficie perfectamente lisa se suelta del reposo en la posición mostrada en la figura. Calcular su velocidad cuando abandona la posición horizontal.





La cadena desciende por la fuerza de atracción gravitacional que es conservativa y como se pide encontrar la velocidad, aplicaremos conservación de energía para el centro de gravedad entre las dos posiciones mostradas (1) y (2).

Esto es: $\Delta E = 0 \Longrightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

tomando como nivel de referencia la superficie horizontal, se tiene:

$$0 + \left(\frac{W}{L}\,a\right)\left(-\frac{1}{2}\,a\ \text{sen}\ \alpha\right) = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,v^2 + \left(\frac{W}{L}\,L\right)\left(-\frac{1}{2}\,L\ \text{sen}\ \alpha\right)$$

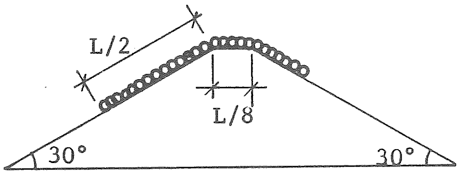
$$-\frac{1}{2}\,\frac{W}{L}\,a^2\ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,v^2 - \frac{1}{2}\,WL\ \text{sen}\ \alpha$$

$$-\frac{a^2}{L}\ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{g}\,v^2 - L\ \text{sen}\ \alpha$$

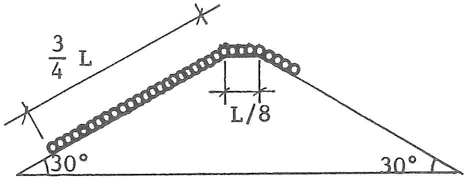
despejando v: $v^2 = g\left(L - \frac{a^2}{L}\right)\text{sen}\alpha \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{g}{L}\,(L^2 - a^2)\,\text{sen}\alpha}$

Observe que este valor de la rapidez es independiente del peso W de la cadena.

54. Una cadena flexible de longitud L y peso W se encuentra inicialmente en reposo sobre la superficie mostrada en la figura en la posición (1), luego desliza sin fricción hasta llegar a la posición (2). Determinar la velocidad del CM de la cuerda en ambas posiciones.



(1)



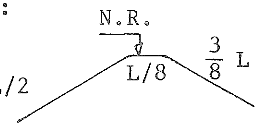
(2)

- En la posición inicial la cadena está en reposo, luego, su velocidad y la de su CM es cero.
- Cálculo de la rapidez v de la cadena en la posición (2).

  Aplicando la conservación de energía, considerando el C.G. de cada una de sus partes, se tiene:

. Posición (1)

$K_1 = 0$



$\frac{L}{2} + \frac{L}{8} + \frac{3}{8} L = L$

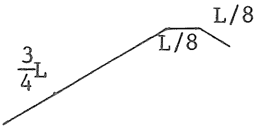
$U_1 = - \frac{W}{L} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{8} - \frac{W}{L} \times \frac{3}{8} L \times \frac{3}{32} L$

C.G $\quad \frac{1}{2}(\frac{L}{2})\text{sen}30° = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{L}{8}$

$U_1 = - WL(\frac{1}{16} + \frac{9}{250}) = -WL\frac{25}{256}$

$\frac{1}{2}(\frac{3}{8} L)\text{sen}30° = \frac{1}{2}(\frac{3}{8} L)\frac{1}{2} = \frac{3L}{32}$

. Posición (2)



$K_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g} v^2$

$\frac{3}{4} L + \frac{L}{8} + \frac{L}{8} = L$

$U_2 = - \frac{W}{L} \times \frac{3}{4}L \times \frac{3}{16} L - \frac{W}{L} \times \frac{L}{8} \times \frac{L}{32}$

C.G. $\quad \frac{1}{2}(\frac{3}{4} L)\frac{1}{2} = \frac{3}{16} L$

$U_2 = - WL(\frac{9}{64} + \frac{1}{256}) = - WL\frac{37}{256}$

C.G. $\quad \frac{1}{2}(\frac{L}{8})\frac{1}{2} = \frac{L}{32}$

Luego:

$$\Delta E = 0 \Longrightarrow U_1 = K_2 + U_2 \Longrightarrow K_2 = U_1 - U_2$$

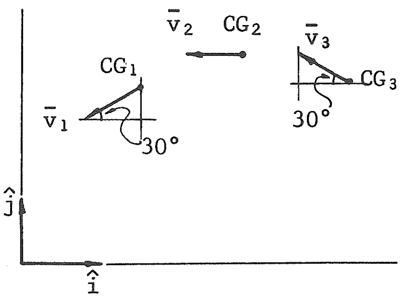
reemplazando:

$$\frac{1}{2}\ \frac{W}{g}\ v^2 = WL\ \left(\frac{37}{256} - \frac{25}{256}\right) = WL \times \frac{12}{256} = \frac{3}{64}\ WL$$

$$v^2 = \frac{3}{32}\ gL \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{3}{32}\ gL} = \frac{1}{8}\ \sqrt{6\ gL}$$

- Determinación de la velocidad $\bar{v}_{cm}$ en la posición (2).

  Las velocidades del C.G. de cada una de las partes en coordenadas cartesianas son:



$$\bar{v}_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ v\hat{i} - \frac{1}{2}\ v\hat{j} = -\ v\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right)$$

$$\bar{v}_2 = -\ v\ \hat{i}$$

$$\bar{v}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ v\hat{i} + \frac{1}{2}\ v\hat{i} = -v\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \hat{i} - \frac{1}{2}\ \hat{j}\right)$$

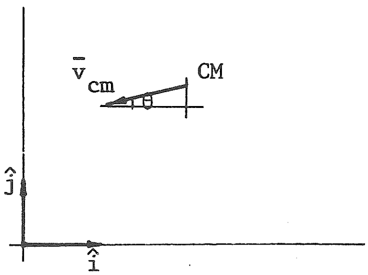
luego, la velocidad $\bar{v}_{cm}$ será:

$$\bar{v}_{cm} = \frac{1}{M}\ (m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3) = \frac{1}{W}\ \left(\frac{3}{4}\ L\ \frac{W}{L}\ \bar{v}_1 + \frac{L}{8}\frac{W}{L}\ \bar{v}_2 + \frac{L}{8}\frac{W}{L}\ \bar{v}_3\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\ \bar{v}_1 + \frac{1}{8}\ \bar{v}_2 + \frac{1}{8}\ \bar{v}_3$$

$$\bar{v}_{cm} = -\frac{3}{4}\ v\left(\frac{3}{2}\ \hat{i} + \frac{1}{2}\ \hat{j}\right) - \frac{1}{8}\ v\ \hat{i} - \frac{1}{8}\ v\left(\frac{3}{2}\ \hat{i} - \frac{1}{2}\ \hat{j}\right)$$

$$\bar{v}_{cm} = -\frac{\frac{1}{8}\ \sqrt{6gL}}{16}\ \left[\ (2 + 7\sqrt{3}\ )\hat{i} + 5\hat{j}\ \right]$$



$$\bar{v}_{cm} = -\frac{1}{128}\ \sqrt{6gL}\ (14.12\hat{i} + 5\hat{j})$$

$$tg\theta = \frac{5}{14.12} = 0.3541 \Rightarrow \theta = 19.5°$$

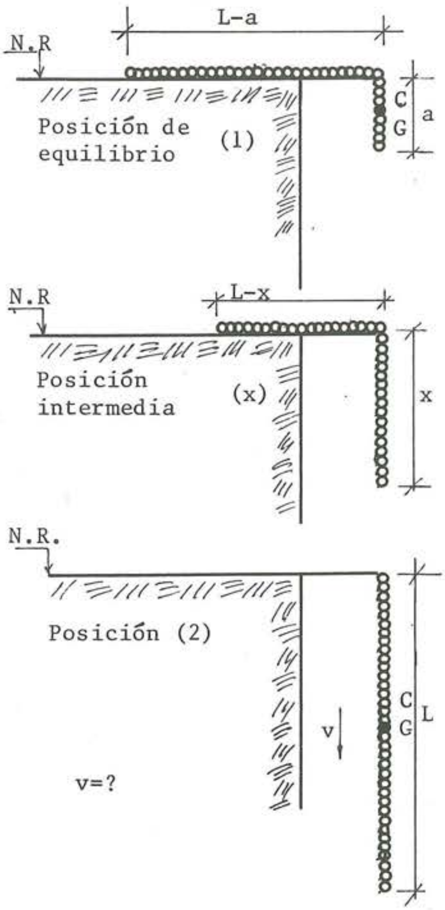
$$v_{cm} = \frac{1}{128}\ \sqrt{6gL}\ \sqrt{(14.12)^2 + (5)^2} =$$

$$v_{cm} = \frac{14.98}{128}\sqrt{6gL} = 0.117 \times 7.672\sqrt{L} = 0.9\sqrt{L} \quad m/s$$

o bien:

$$v_{cm} = \frac{14.98}{16} v = 0.94v$$

55. Una cadena flexible homogénea de longitud L y peso W se apoya, en parte, sobre una superficie horizontal rugosa de coeficiente de fricción μ, y en parte cuelga libremente desde el borde de dicha superficie. Encontrar la longitud máxima a de cadena que cuelga en la posición de equilibrio. Luego se saca a la cadena ligeramente de esta posición y se suelta del reposo dejándola caer. Calcular su velocidad cuando abandona la posición horizontal. Considere $\mu_k \approx \mu_s = \mu$.



Primero encontremos la longitud a en la posición en la cual se equilibran el peso que cuelga y el rozamiento en la superficie horizontal:

$$W\frac{a}{L} = \mu W \frac{L - a}{L} \Rightarrow a(1 + \mu) = \mu L$$

$$a = \frac{\mu L}{1 + \mu}$$

Luego, como se pide solamente encontrar la velocidad en la posición (2) mostrada, aplicaremos el concepto de trabajo y energía.

El trabajo de la fuerza no conservativa de la fricción es igual al cambio de la energía mecánica.

$$W_f = \Delta E = \Delta\,(K + U) = \Delta K + \Delta U$$

Para determinar el cambio de energía potencial gravitatoria del cuerpo, calcularemos el cambio de energía potencial del C.G. entre las posiciones (1) y (2) mostradas, tomando como nivel de referencia cero la superficie horizontal, esto es:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \left(-W\frac{L}{L}\frac{L}{2}\right) - \left(-W\frac{a}{L}\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{W}{L}(L^2 - a^2)$$

El cambio de energía cinética es:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 - 0 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2$$

Para calcular el trabajo hecho por la fricción entre estas dos posiciones, consideremos una posición intermedia genérica como la mostrada en la figura. Tomando un desplazamiento dx, se tiene:

$$W_f = -\int_a^L \mu W\frac{L-x}{L}\,dx = -\frac{\mu W}{L}\int_a^L (L-x)dx = -\mu W(L-a) + \frac{\mu W}{2L}(L^2 - a^2)$$

Igualando y despejando v:

$$-\mu W(L - a) + \frac{\mu W}{2L}(L^2 - a^2) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 - \frac{W}{2L}(L^2 - a^2)$$

$$\frac{v^2}{g} = -2\mu(L - a) + \frac{1}{L}(1 + \mu)(L^2 - a^2)$$

con el valor encontrado de a, queda:

$$\frac{v^2}{g} = -2\mu\left(L - \frac{\mu L}{1+\mu}\right) + \frac{1}{L}(1 + \mu)\left(L^2 - \frac{\mu^2 L^2}{(1+\mu)^2}\right)$$

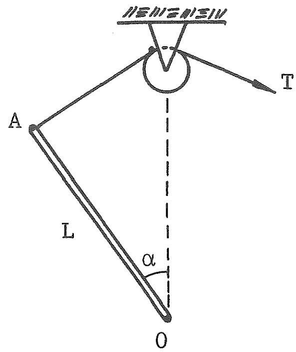
$$\frac{v^2}{g} = -\frac{2\mu L}{1+\mu} + (1+\mu)L\frac{(1+2\mu)}{(1+\mu)^2} = \frac{-2\mu L + L(1+2\mu)}{1+\mu} = \frac{L}{1+\mu}$$

$$v^2 = \frac{gL}{1+\mu}$$

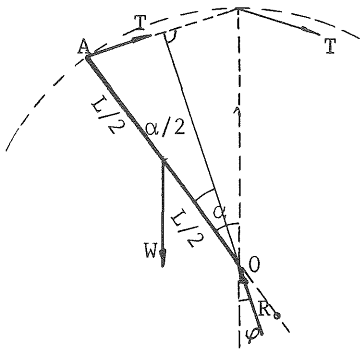
$$v = \sqrt{\frac{gL}{1+\mu}} \quad \text{, o bien,} \quad v = \sqrt{\frac{g\,a}{\mu}}$$

56. Una barra uniforme de longitud L y peso W está articulada en su extremo O, su otro extremo A se sujeta con una ligera cuerda flexible a través de una polea liviana como se muestra en la figura. La barra desciende hasta formar un ángulo α con su posición inicial vertical,

quedando en equilibrio. Encontrar la tensión T aplicada a la cuerda y la reacción R_o de la articulación.



D.C.L.



Se tienen 3 incógnitas: T, R_o, φ y 3 ecuaciones de equilibrio:

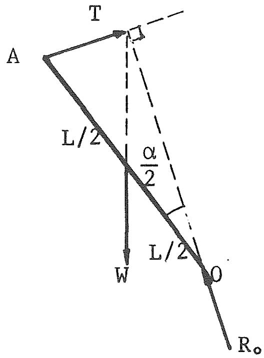
$$\Sigma T_o = W\left(\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\alpha\right) - T\left(L\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

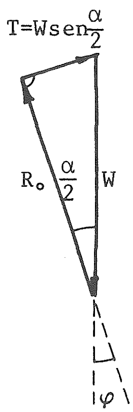
de aquí obtenemos directamente T:

$$T = \frac{1}{2}\,W\,\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\,W\,\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$T = W\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

Para determinar R_o y φ, aplicaremos la condición de equilibrio $\Sigma\bar{F} = 0$. Podemos proceder algebraicamente planteando las 2 ecuaciones correspondientes en el plano y resolver. Pero tratándose de 3 fuerzas en equilibrio, estas deben pasar por un mismo punto y forman un triángulo, conociendo T y W se tiene:

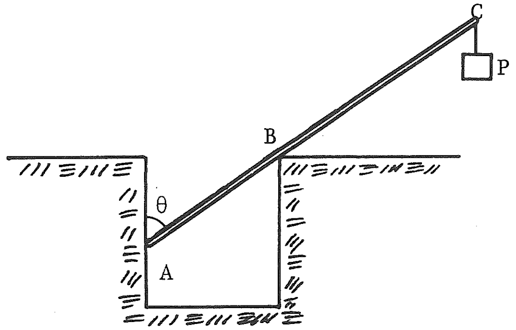




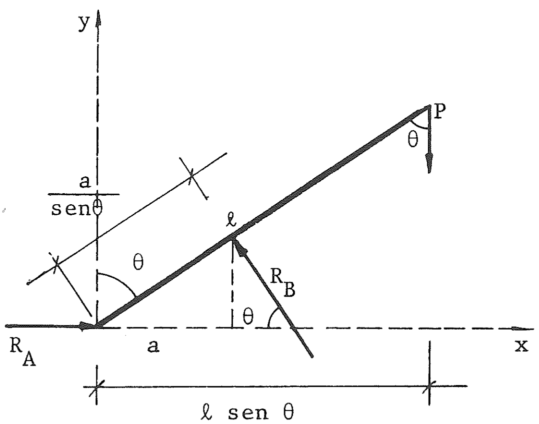
$$R_o = W\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

57. Una varilla de longitud ℓ descansa en una zanja, de ancho $a < L$, apoyada en los puntos A y B como se muestra en la figura y en su extremo libre C cuelga un peso P. Considerando los apoyos perfectamente lisos determinar las reacciones en los apoyos y el ángulo θ de equilibrio. El peso propio de la varilla es despreciable comparado con el peso aplicado en el extremo.



D.C.L.



Dibujamos el D.C.L. teniendo en cuenta que al no haber fricción en los apoyos, no hay reacción tangencial a la superficie.

Por lo tanto, las reacciones son solo normales a las superficies de contacto.

Aplicando las condiciones de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma F_x = R_A - R_B \cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = -P + R_B \operatorname{sen}\theta = 0$$

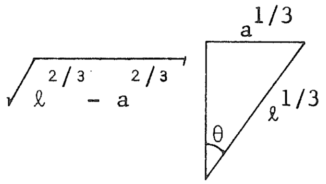
$$\Sigma T_A = -P(\ell \operatorname{sen}\theta) + R_B\left(\frac{a}{\operatorname{sen}\theta}\right) = 0$$

teniéndose 3 ec. y 3 incog. resolviendo:

$$R_A = R_B \cos\theta \qquad\qquad R_A = P \operatorname{cotg}\theta \qquad\qquad R_A = P\sqrt{\left(\frac{\ell}{a}\right)^{2/3} - 1}$$

$$R_B = \frac{P}{\operatorname{sen}\theta} \qquad\qquad R_B = \frac{P}{\operatorname{sen}\theta} \qquad\qquad R_B = P\left(\frac{\ell}{a}\right)^{1/3}$$

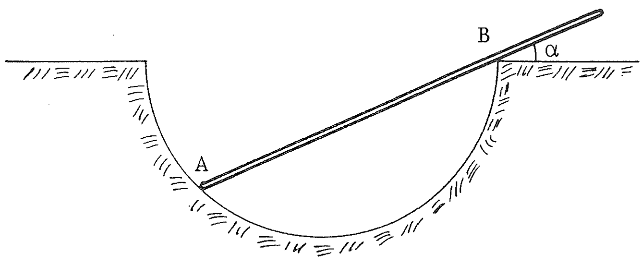
$$R_B = \frac{P\ell}{a}\operatorname{sen}^2\theta \qquad\qquad \operatorname{sen}^3\theta = \frac{a}{\ell} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = \left(\frac{a}{\ell}\right)^{1/3}$$

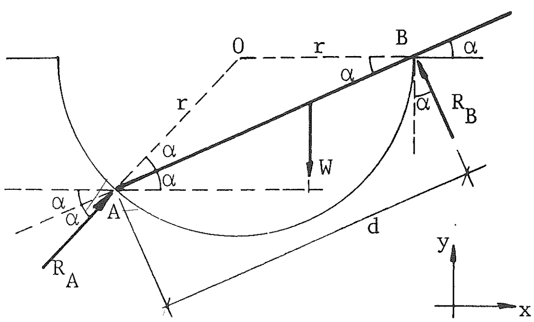


$$\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{a}{\ell}\right)^{1/3}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{\ell^{2/3} - a^{2/3}}}{a^{1/3}} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{a}\right)^{2/3} - 1}$$

58. Una varilla de longitud 2ℓ y peso W se apoya en una canaleta semicir cular de radio $r < 2\ell$ como se muestra en la figura. Considerando superficies perfectamente lisas, encontrar las reacciones R_A y R_B en los puntos de apoyo y el ángulo α de equilibrio.





Dibujamos el D.C.L. considerando que al no haber fricción en los apoyos no hay reacciones tangenciales a las superficies de contacto. Por lo tanto, solo habrá reacciones normales a las superficies como puede verse en el diagrama.

$$d = AB = 2r\cos\alpha$$

Aplicando las condiciones de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma F_x = R_A \cos 2\alpha - R_B \operatorname{sen}\alpha = 0 \Longrightarrow R_A(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = R_B \operatorname{sen}\alpha$$

$$R_A = R_B \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad \ldots (1)$$

$$\Sigma F_y = R_A \operatorname{sen}2\alpha + R_B \cos\alpha - W = 0 \Longrightarrow R_A\, 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + R_B \cos\alpha = W$$

$$\cos\alpha = \frac{W}{R_B + 2R_A \operatorname{sen}\alpha} \qquad \ldots (2)$$

$$\Sigma T_A = R_B(2r\cos\alpha) - W(\ell\cos\alpha) = 0 \Longrightarrow 2r\, R_B = W\ell$$

$$R_B = \frac{W\ell}{2r} \qquad \ldots (3)$$

teniéndose 3 ec. y 3 incg., resolviendo:

de (3) : $R_B = W\dfrac{\ell}{2r}$

de (1) : $R_A = W\dfrac{\ell}{2r}\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$

de (2) : $\cos\alpha = \dfrac{W}{W\dfrac{\ell}{2r} + 2W\dfrac{\ell}{2r}\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}}$

desarrollando esta última expresión:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\dfrac{\ell}{2r}\left(1 + 2\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\right)} = \frac{2r}{\ell}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \frac{2r}{\ell}(2\cos^2\alpha - 1)$$

$$\cos^2\alpha - \frac{\ell}{4r}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{\ell}{8r} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{8r}\right)^2 + \frac{1}{2}}\,, \quad \text{como: } \sqrt{\left(\frac{\ell}{8r}\right)^2 + \frac{1}{2}} > \frac{\ell}{8r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\ell}{8r} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{8r}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + 32r^2}}{8r}$$

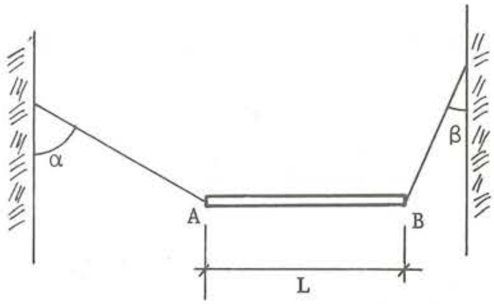
Para encontrar R_A, de la expresión: $\cos\alpha = \frac{2r}{\ell}(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)$

se tiene: $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{\ell}{2r}\cos\alpha$

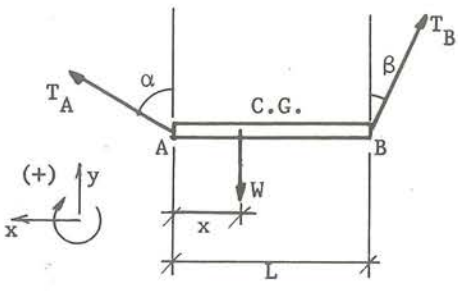
reemplazando:

$$R_A = W\frac{\ell}{2r} \quad \frac{\text{sen}\,\alpha}{\frac{\ell}{2r}\cos\alpha} = W\,\text{tg}\,\alpha$$

59. Una barra no uniforme AB, de peso W, está suspendida horizontalmente en reposo mediante dos cables livianos fijos a paredes verticales como se muestra en la figura. Calcular la distancia del centro de gravedad de la barra al extremo izquierdo A.
Si la barra es homogénea que condición deben tener los ángulos α y β, para que la barra esté en equilibrio horizontalmente.



D.C.L.



Condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_y = T_A\cos\alpha + T_B\cos\alpha - W = 0$$

$$T_A\cos\alpha + T_B\cos\beta = W$$

$$\Sigma F_x = T_A\,\text{sen}\alpha - T_B\,\text{sen}\beta = 0$$

$$T_A = T_B\,\frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Sigma T_A = W(x) - T_B\cos\beta(L) = 0$$

$$x = \frac{T_B L\cos\beta}{W}$$

Resolviendo para encontrar x, se tiene:

$$T_B \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha} \cos\alpha + T_B \cos\beta = W$$

$$T_B (\text{sen}\beta \ \cos\alpha \ + \cos\beta \ \text{sen}\alpha\ ) = W \ \text{sen}\alpha$$

$$T_B = \frac{W \ \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$$

$$x = \frac{W\ L\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \beta}{W\ \text{sen}\ (\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\ \alpha\ \cos\ \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} L$$

o bien:

$$x = \frac{L}{\dfrac{(\text{sen}\ \beta\ \cos\ \alpha + \cos\ \beta\ \text{sen}\alpha)}{\text{sen}\ \alpha\ \ \cos\ \beta}} = \frac{L}{1 + \text{tg}\beta\ \text{cotg}\alpha} = \frac{\text{tg}\ \alpha}{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta} L$$

si la barra es homogénea, $x = \frac{1}{2} L$, luego, se tendrá que: $\dfrac{\text{tg}\ \alpha}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta} = \dfrac{1}{2}$

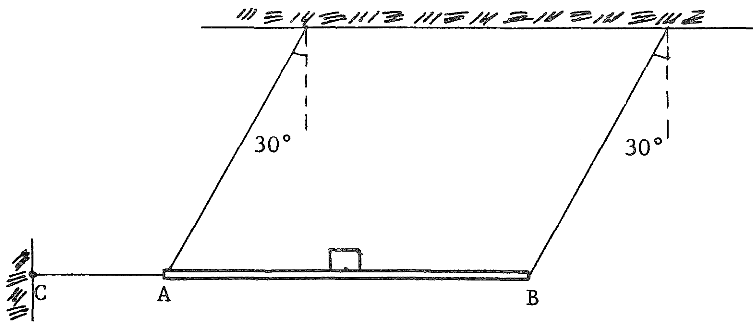
y la relación de ángulos será:

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta \implies \alpha = \beta$$

60. Una barra de masa M = 5kg y longitud L = 2m está sujeta por 3 cables tal como se muestra en la figura. Sobre la barra y en su punto medio se coloca un bloque de masa m = 2kg y dimensiones despreciables.

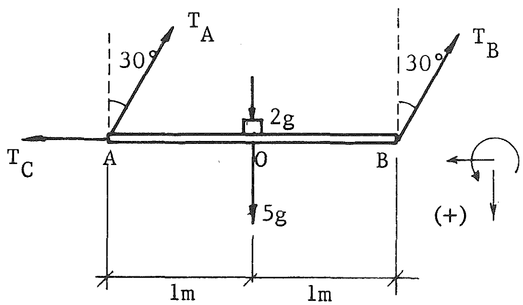
a) Calcular la tensión en los cables en la posición de equilibrio mostrada.

b) Si las superficies en contacto entre el bloque y la barra son rugosas, calcular el mínimo coeficiente de fricción estático necesario para que el bloque no se mueva respecto a la barra, en el instante en que la cuerda horizontal se rompe.



a) En equilibrio.

D.C.L. (M + m)



Como hemos mencionado en el item 7.10, para simplificar los cálculos, apliquemos la condición de equilibrio rotacional a más de un punto, digamos dos, A y O.

$$\Sigma\bar{T}_A = 0 \Rightarrow (T_B\cos 30°)(2) - (2+5)g(1) = 0$$

se obtiene inmediatamente T_B:

$$T_B = \frac{7g}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7 \times 9.81}{\sqrt{3}} = 39.65\text{N}$$

$$\Sigma\bar{T}_O = 0 \Rightarrow (T_B\cos 30°)(1) - (T_A\cos 30°)(1) = 0$$

se obtiene inmediatamente T_A:

$$T_A = T_B = 39.65\text{N}$$

como ya hemos planteado dos ecuaciones de equilibrio, solo nos queda una. Podemos plantear momentos con respecto a un tercer punto, pero en este caso no hay otro punto notable para hacerlo. Luego, plantearemos una ecuación de equilibrio traslacional para encontrar la tensión que falta determinar, esto es:

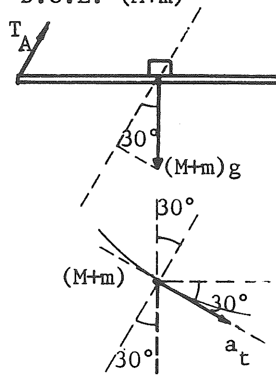
$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow T_C - T_A \text{ sen } 30° - T_B \text{ sen } 30° = 0$$

se obtiene inmediatamente T_C:

$$T_C = 2T_A \text{sen } 30° = T_A = 39.65\text{N}$$

b) Cuando se rompe la cuerda AC.

D.C.L. (M+m)



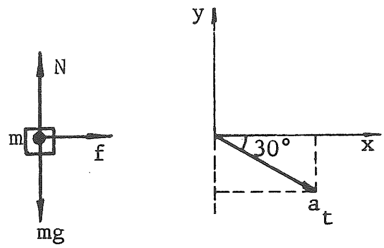
En el instante inicial tenemos un movimiento circular con v=0, luego:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0$$

y en la dirección tangencial:

$$(M+m)a_t = (M+m)g \text{ sen}30° \Rightarrow a_t = \frac{1}{2}\,g$$

D.C.L. (m)



De las ecuaciones de movimiento para el bloque, obtendremos f y N, esto es:

-En x $\Rightarrow$ $f = ma_t \cos 30°$

$$f = 2 \times \frac{g}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,g$$

-En y $\Rightarrow$ $N - mg = m(-a_t \text{sen } 30°)$

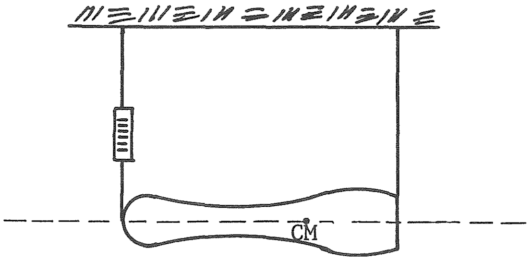
$$N = 2g - 2\,\frac{g}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,g$$

El coeficiente de fricción míni mo, será:

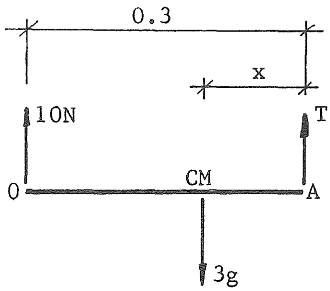
$$\mu_{s_m} = \frac{f}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,g}{\frac{3}{2}\,g} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

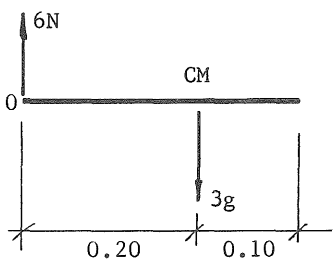
61. Una clava o mazo de 30 cm y 3 kg, se suspende horizontalmente colgándola del techo mediante cuerdas fijas en sus extremos. En una de las cuerdas se ha intercalado un dinamómetro que marca 10N. Luego se corta la cuerda del otro extremo y en ese instante el dinamómetro marca 6N.

Determinar: la posición del CM, el momento de inercia I_{CM} y el momento de inercia I_o. Comprobar que se cumple el teorema de Steiner.



D.C.L.





En equilibrio:

$\Sigma F_y = 3g-10-T=0 \Rightarrow T=3g-10=19.43N$

$\Sigma T_A=10 \times 0.3-3g\ x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{g} \approx 0.10m$

Luego, el CM está en (0.3 - 0.1)= = 0.20m del punto O.

Cuando se corta la cuerda en A, se tiene:

- translación: $3g - 6 = 3\ a_{cm}$

  como: $a_{cm} = \alpha \times 0.20$, la aceleración angular α en ese instante es:

$$\alpha = \frac{3g - 6}{3 \times 0.2} = 5g - 10 = 39 \text{ rad/s}^2$$

- Rotación:

. con respecto al CM: $6 \times 0.20=I_{CM}\alpha$

. con respecto al punto O:

$$3g \times 0.20 = I_o\alpha$$

Los momentos de inercia pedidos serán:

$$I_{CM} = \frac{1.2}{39} = 0.03 \text{ kg-m}^2$$

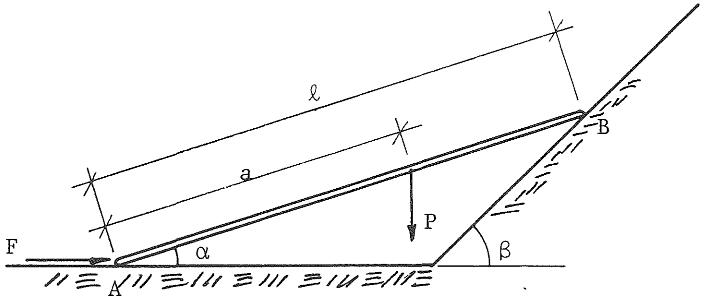
$$I_{\circ} = \frac{0.6g}{39} = 0.15 \text{ kg-m}^2$$

Comprobación teorema de Steiner.

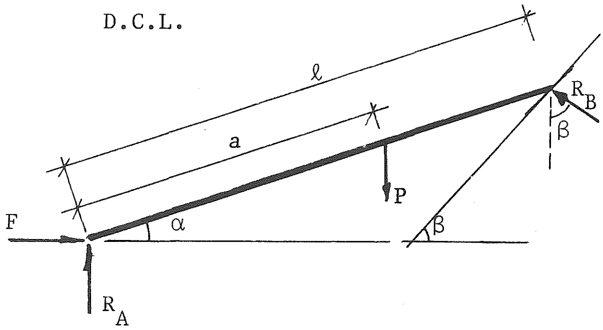
$$I_{\circ} = I_{CM} + M\,h^2$$

$$0.15 = 0.03 + 3(0.20)^2 = 0.03 + 0.12 = 0.15$$

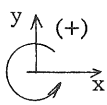
62. Una barra AB se apoya sobre dos superficies sin fricción como se muestra en la figura. La barra tiene una longitud ℓ y peso propio despreciable comparado con el peso P que soporta a una distancia a del extremo A. Hallar la fuerza F que debe aplicarse horizontalmente en el extremo A para que la barra se mantenga en equilibrio con un ángulo α, encontrar también las reacciones en los apoyos A y B.



D.C.L.



Como no hay fricción, las reacciones son perpendiculares a las superficies de contacto en los apoyos.



Aplicando las condiciones de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma F_x = F - R_B \text{ sen } \beta = 0 \implies F = R_B \text{ sen } \beta$$

$$\Sigma F_y = R_A - P + R_B \cos\beta = 0 \implies R_A = P - R_B \cos\beta$$

$$\Sigma T_A = (R_B \text{ sen } \beta)(\ell \text{ sen } \alpha) + (R_B \cos\beta)(\ell \cos\alpha) - P(a \cos\alpha) = 0$$

$$= R_B\, \ell(\text{sen}\beta \text{ sen}\alpha + \cos\beta \cos\alpha) - Pa \cos\alpha = 0$$

$$= R_B \ell \cos(\beta - \alpha) - Pa \cos\alpha = 0$$

de esta última expresión se obtiene inmediatamente R_B,

$$R_B = \frac{Pa \cos\alpha}{\ell \cos(\beta - \alpha)}$$

reemplazando en la primera expresión se obtiene F,

$$F = \frac{P\, a \cos\alpha \text{ sen } \beta}{\ell \cos(\beta - \alpha)}$$

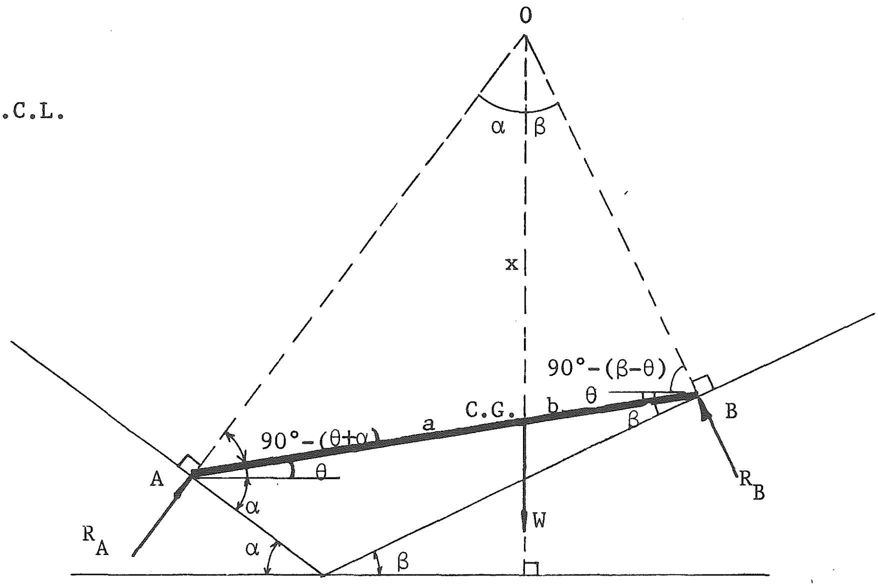
finalmente, reemplazando también R_B en la segunda expresión,

$$R_A = P - \frac{P\, a \cos\alpha \cos\beta}{\ell \cos(\beta - \alpha)} = P\left[1 - \frac{a \cos\alpha \cos\beta}{\ell \cos(\beta - \alpha)}\right]$$

63. Una barra de peso W tiene su C.G. ubicado a distancias a y b de sus extremos A y B, estos apoyan en planos inclinados a ángulos α y β con la horizontal, respectivamente.

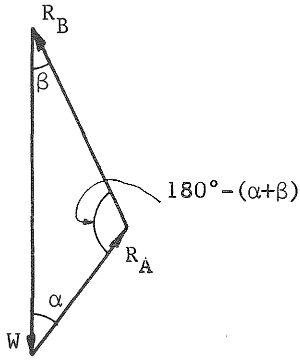
Cuando la barra se encuentra en equilibrio, encontrar el ángulo θ de inclinación que forma con la horizontal y las reacciones en los apoyos.

D.C.L.



- Equilibrio de translación: $\Sigma \bar{F} = 0$.

Teniendose tres fuerzas, estas forman un triángulo. Luego, Aplicando la ley de senos, se encuentran las reacciones:



$$\frac{R_A}{\text{sen } \beta} = \frac{W}{\text{sen}[180° - (\alpha+\beta)]}$$

$$R_A = \frac{W\text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{R_B}{\text{sen } \alpha} = \frac{W}{\text{sen}[180° - (\alpha+\beta)]}$$

$$R_B = \frac{W \text{ sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha+\beta)}$$

- Equilibrio de Rotación: $\Sigma\ T_o = 0$.

Como la suma de torques debe anularse con respecto a cualquier punto que escojamos del plano, las direcciones de las tres fuerzas actuantes sobre la barra deben concurrir en un punto, que llamaremos O, como puede verse en la figura.

En los triángulos formados con la barra, AOC y BOC, aplicando la ley de senos, se determinará en ángulo θ de inclinación de la barra, esto es:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{x}{\operatorname{sen}[90-(\theta+\alpha)]} = \frac{x}{\cos(\theta+\alpha)} \\[2ex] \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{x}{\operatorname{sen}[90-(\beta-\theta)]} = \frac{x}{\cos(\beta-\theta)} \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{(eliminando x)}]{} \left\{ \frac{a \cos(\theta+\alpha)}{\operatorname{sen}\ \alpha} = \frac{b \cos(\beta-\theta)}{\operatorname{sen}\ \beta} \right.$$

Desarrollando el coseno suma y diferencia de ángulos, quedará:

$$\frac{a \cos\theta \cos\alpha - a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b \cos\beta \cos\theta + b \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$a \cos\theta \operatorname{cotg}\alpha - a \operatorname{sen}\theta = b \operatorname{cotg}\beta \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta$$

$$(a + b)\operatorname{sen}\theta = \cos\theta(a \operatorname{cotg}\alpha - b \operatorname{cotg}\beta)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a \operatorname{cotg}\alpha - b \operatorname{cotg}\beta}{(a + b)} = \frac{1}{L}(a \operatorname{cotg}\alpha - b \operatorname{cotg}\beta)$$

siendo, L = a + b, la longitud de la barra.

CAPITULO VIII

GRAVITACION

- INTRODUCCION.
- LA LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL.
- EFECTO GRAVITACIONAL DE UNA DISTRIBUCION ESFERICA DE MASA.
- VARIACIONES DE LA ACELERACION g DE LA GRAVEDAD
- EL CONCEPTO DE CAMPO GRAVITACIONAL VECTORIAL Y ESCALAR.
- ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

8.1 INTRODUCCION.-

Al proponer Newton la Ley de Gravitación Universal unificó en una sola teoría los hasta entonces, desde la época de los griegos, conceptos separados: el movimiento de los cuerpos celestes y el movimiento de los cuerpos terrestres.

En el Apéndice I: Cosmología y Gravitación, se presenta una reseña histórica desde Aristóteles hasta Newton.

8.2 LA LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL.-

La Ley de gravitación universal fue propuesta por Newton en 1686. Esta Ley de fuerza puede enunciarse: "Todas las partículas en el universo se atraen entre sí con una fuerza que actúa a lo largo de la línea que las une y cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa". Luego:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en donde G es una constante que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas en cualquier lugar del universo. Constante denominada: "constante de gravitacional universal" y cuyo valor medido en el S.I., es:

$$G = (6.6720 \pm 0.0006) \times 10^{11} \ N - m^2/kg$$

Expresemos esta ley vectorialmente:

$$\bar{F}_{12} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \bar{r}_{12}$$

en donde, como puede verse en la fig. 8.1, $\bar{r}_{12}$ es el vector posición de la partícula de masa m_2 respecto a la partícula de masa m_1 y $\bar{F}_{12}$ es la fuerza gravitacional ejercida por m_1 sobre m_2. El signo menos nos indica que es una fuerza de atracción, $\bar{F}_{12}$ es de sentido opuesto a $\bar{r}_{12}$.

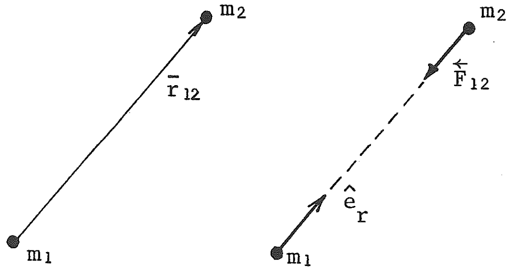


Fig. 8.1 -Fuerza gravitacional.

$\bar{r}_{12}$, vector posición de m_2 respecto a m_1

$\bar{F}_{12}$, fuerza gravitacional ejercida por m_1 sobre m_2.

$\hat{e}_r$, vector unitario de m_1 a m_2.

Observe que la ley es de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia que separa a las partículas, en función del vector unitario $\hat{e}_r$ de m_1 a m_2, se tiene:

$$\bar{F}_{21} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12} \hat{e}_r = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{e}_r$$

Las fuerzas gravitacionales que actúan entre dos partículas forman un par de acción y reacción, luego, la fuerza ejercida por m_2 sobre m_1 es:

$$\bar{F}_{21} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \bar{r}_{21}$$

como : $\bar{r}_{21} = - \bar{r}_{12}$, se tiene que: $\bar{F}_{21} = - \bar{F}_{12}$.

En la ley de gravitación universal la fuerza entre dos partículas es independiente de la presencia de otras partículas y también de las propiedades que pudiera tener el espacio intermedio que las separa. La fuerza gravitacional total que actúa sobre una determinada partícula depende de la masa de la partícula y de las masas y posiciones (distancias) de las demás partículas del ambiente que la rodea. Como hemos mencionado anteriormente esta es una ley de fuerza que relaciona de una manera sencilla la fuerza que actúa sobre una partícula con las propiedades de la partícula y de su medio ambiente.

Calculada esta fuerza la introducimos en la ley del movimiento de Newton para determinar la aceleración que le imprime a la partícula.

La ley de gravitación de Newton se refiere a la fuerza entre dos partículas. Si queremos determinar la fuerza gravitacional entre cuerpos extensos debemos considerar a cada cuerpo formado por partículas y calcular la interacción entre todas las partículas mediante el cálculo integral. En particular,como demostraremos en el siguiente item 8.3, la fuerza de atracción gravitacional ejercida por o sobre una esfera homogénea es la misma como si toda su masa estuviera concentrada en el centro geométrico. Para probar esto matemáticamente Newton inventó el cálculo, tal motivo,lo obligó a retrasar la publicación de su ley por más de diez años, hasta estar convencido de su validez. Es importante aclarar que en general es erróneo considerar, en lo que a gravitación se refiere, que toda la masa de un cuerpo esté concentrada en su centro de masa. Este punto particular del cuerpo no tiene esta propiedad gravitacional, salvo para el caso mencionado de esfera homogénea.

La constante de gravitación universal G puede calcularse experimentalmente midiendo la fuerza de atracción entre dos cuerpos esféricos de masas conocidas separadas a una distancia determinada.

$$G = F \frac{r^2}{m_1 \, m_2}$$

Las fuerzas de atracción gravitacional entre cuerpos de la superficie terrestre son muy pequeñas, puesto que en nuestra vida diaria no las percibimos. Siendo extremadamente pequeña, será difícil de medir.En efecto,transcurrieron más de cien años de la publicación de la ley de Newton para ser medida. Correspondió al inglés Lord Cavendish en 1798 encontrar por primera vez el valor de G con precisión, mejorada en el siglo XIX por Poynting y Boys, y en 1930 por Heyl.

La constante G puede determinarse por el método de máxima deflexión en una balanza de torsión. En la fig. 8.2 se muestra un esquema de la balanza de Cavendish. El éxito depende del hecho de que una fuer za muy pequeña baste para torcer una fibra extremadamente fina alrededor de su eje longitudinal y del hecho de que la magnitud de la torsión es una medida de la fuerza. Cuando las pequeñas masas m_1 se mueven ligeramente al acercarse las esferas grandes m_2 la fibra vertical se tuerce levemente hasta que la fuerza de torsión iguala a la gravitacional (torques). El desplazamiento angular se mide observando la desviación de un rayo de luz reflejado en un espejo fijo a la fibra. Este procedimiento del experimento de Cavendish es adecuado pero muy delicado.

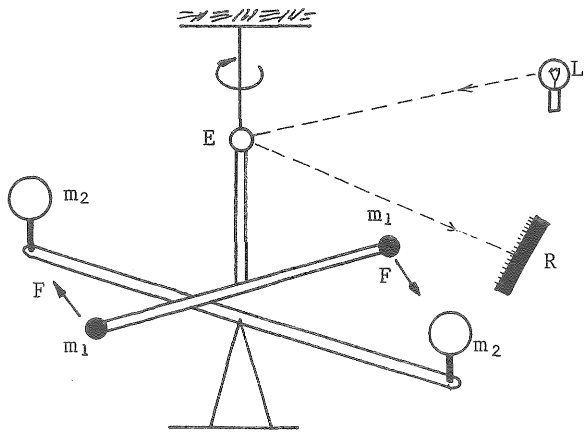


Fig. 8.2-Esquema de la balanza de Cavendish.

m_1 y m_2, masas interactuantes.

F, fuerza de atracción gravitacional.

E, espejo

L, fuente luminosa

R, escala graduada.

La apreciable fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre todos los cuerpos cercanos a su superficie, se debe a la gran masa de la tierra. Habiendo determinado G para un par de cuerpos dados, podemos usar su valor para determinar las fuerzas gravitacionales entre cualquier otra pareja de cuerpos. En particular para un cuerpo de masa m y la tierra de masa M y radio R, esto es:

$$F = G \frac{m\,M}{R^2}$$

Combinando con la ecuación de movimiento:

$$F = mg$$

Se tiene, luego de cancelar la masa m,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

y despejando M:

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

Todas las cantidades del miembro de la derecha son conocidas, luego la masa de la tierra puede ser calculada. Antes del experimento de Cavendish no había esperanza de pensar en obtener un valor numérico de la masa de la tierra, por eso se dice que Cavendish fue el primero que "pesó" la tierra. Reemplazando los valores previamente encontrados, se obtiene:

$$M = \frac{9.81\ (6.37 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

con un volumen: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1.08 \times 10^{21}\ m^3$, la densidad media que se obtiene para la tierra, es:

$$\rho = \frac{M}{V} = 5.5 \times 10^{-3}\ kg/m^3 = 5.5\ g/cm^3$$

Teniendo en cuenta que la densidad del agua es $1g/cm^3$ y que la densidad media de superficie rocosa de la tierra es alrededor de $3g/cm^3$, el valor obtenido de $5.5\ g/cm^3$ es considerablemente mayor. Por lo tanto, el interior de la tierra debe contener material de densidad superior. Las capas exteriores de la corteza terrestre son atraídas hacia adentro sobre las capas centrales, comprimiéndolas y aumentando su densidad. Además, las exploraciones del interior indican que el centro de la tierra se encuentra en estado líquido, tal vez los materiales más densos han gravitado hacia el centro. Finalmente, podemos decir que a partir del experimento de Cavendish se obtiene también información sobre el interior de la tierra.

8.3 EFECTO GRAVITACIONAL DE UNA DISTRIBUCION ESFERICA DE MASA.-

Consideremos una cáscara esférica homogénea, de masa M y radio R, y una partícula de masa m situada a una distancia $r > R$ del centro de la esfera. Tomemos como elemento diferencial un aro de ancho $Rd\theta$, espesor e y radio $R\,\text{sen}\theta$ como se muestra en la fig. 8.3.

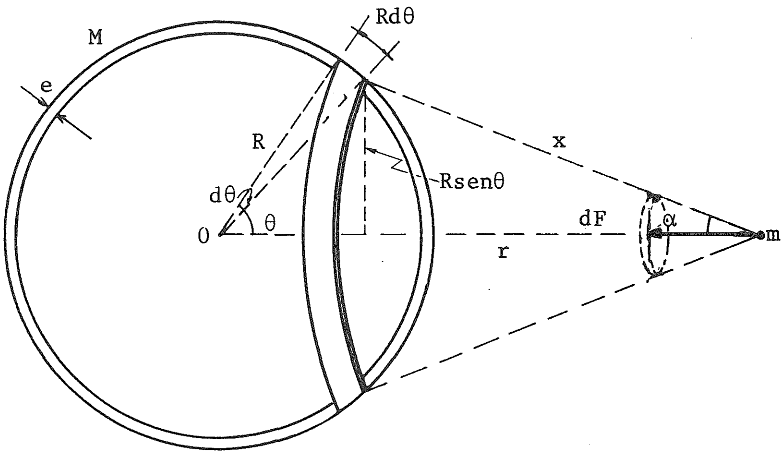


Fig. 8.3-Atracción gravitacional de un cascarón esférico sobre una partícula externa. El elemento diferencial es un aro.

El volumen del elemento diferencial es:

$$dV = (2\pi R\,\text{sen}\theta)(Rd\theta)(e) = 2\pi e\,R^2\text{sen}\theta d\theta$$

y su masa:

$$dM = \rho dV = 2\pi\rho e\,R^2\text{sen}\theta d\theta$$

como la densidad es uniforme, se tiene:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^2 e} \quad \Longrightarrow \quad 2\pi\rho e R^2 = \frac{M}{2}$$

luego, queda:

$$dM = \frac{1}{2}\,M\,\text{sen}\theta d\theta$$

Cambiemos de la variable θ a la variable x, estas estan relacionadas geométricamente por la ley de cosenos en el triángulo formado por x, r y R, esto es: $x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$

diferenciando, se obtiene:

$$2xdx = 2rRsen\theta d\theta \implies sen\theta d\theta = \frac{xdx}{rR}$$

reemplazando en dM, queda:

$$dM = \frac{1}{2} M \frac{xdx}{rR}$$

La fuerza dF que ejerce dM sobre m, por simetría, es sólo horizon - tal. La componente transversal se anula. Y, como todo el elemento diferencial considerado se encuentra a igual distancia x de la partícula m, aplicando la ley de gravitación, se tiene:

$$dF = G \frac{mdM}{x^2} \cos \alpha$$

Cambiando la variable α a x, relacionadas geométricamente en el triángulo rectángulo formado por x, R senθ y r - Rcosθ, esto es:

$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos\theta}{x}$$

y, como de la ley de cosenos se tiene que:

$$R \cos \theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}$$

queda: $$\cos \alpha = \frac{r - \dfrac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}}{x} = \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}$$

reemplazando esta expresión y la de dM, arriba encontrada, en dF, obtenemos:

$$dF = G \frac{m \frac{1}{2} M \frac{x\, dx}{rR}}{x^2} \cdot \frac{r^2 - R^2 + x^2}{x}$$

$$dF = G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{1}{4R} \cdot \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx$$

Integrando, para x entre (r - R) y (r + R), obtendremos la fuerza total F, esto es:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{1}{4R}\cdot\left[(r^2 - R^2)\int_{(r-R)}^{(r+R)}\frac{dx}{x^2} + \int_{(r-R)}^{(r+R)} dx\right]$$

efectuando:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{1}{4R}\cdot(2R + 2R)$$

Finalmente, queda:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}$$

Esta expresión es exactamente igual para la fuerza de atracción entre dos partículas de masas m y M separadas una distancia r. Por lo tanto, podemos considerar que un cascarón esférico homogéneo atrae a una partícula externa como si toda su masa estuviera concentrada puntualmente en su centro.

Pasemos ahora al caso de una esfera sólida. Esta, puede considerarse como compuesta de una sucesión de cascarones esféricos concéntricos. Si cada cascarón tiene densidad uniforme, aun cuando diferentes capas esféricas pudiesen tener diferente densidad, se obtendría el mismo resultado para la esfera sólida así compuesta. Por lo tanto, para efectos gravitacionales, esta esfera puede considerarse puntualmente como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.

Retornemos al caso del cascarón. Pero, para una partícula en su interior, esto es, para $r < R$. La fuerza gravitacional, integrando entre $(R - r)$ y $(r + R)$, será:

$$F = G\,\frac{mM}{r}\cdot\frac{1}{4R}\cdot\left[(r^2 - R^2)\int_{(R-r)}^{(r+R)}\frac{dx}{x^2} + \int_{(R-r)}^{(r+R)} dx\right]$$

efectuando:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{1}{4R}\cdot(-\,2r + 2r)$$

Luego, se tiene que:

$$F = 0$$

Esto es, para una partícula situada en cualquier punto interior del cascarón, se presenta una cancelación total de la atracción gravitacional. Este hecho puede visualizarse considerando ángulos sólidos opuestos iguales, fig. 8.4 .

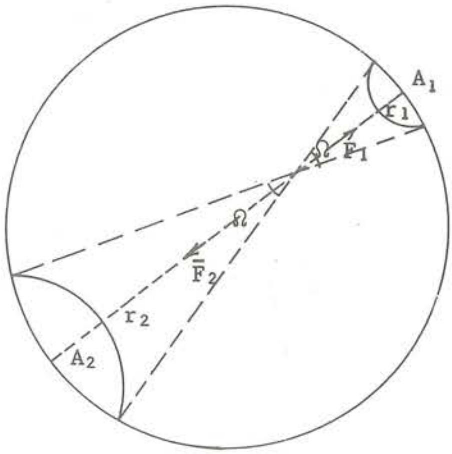


Fig. 8.4-Angulos sólidos opuestos iguales:

$$\Omega = \frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$$

Las fuerzas gravitacionales que ejercen las masas intersectadas sobre la partícula en el punto P se anulan.

Como la masa subtendida por el ángulo sólido Ω es proporcional al cuadrado de la distancia: $M = \rho e A = \rho e \Omega r^2$, y dado que la fuerza gravitacional sobre la partícula m es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, esta se cancela, quedando: $F = \rho e \Omega m$. Al ser los ángulos sólidos opuestos iguales, las fuerzas serán iguales y opuestas anulándose: $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$. Teniéndose para la esfera total: $F = 0$.

En gravitación generalmente tratamos con esferas sólidas. El caso de esferas huecas es particularmente importante, como veremos posteriormente, en electricidad. Para partículas cargadas se obtiene similar resultado, cancelación total de la fuerza eléctrica, dado que, de acuerdo a la ley de Coulomb también depende inversamente del cuadrado de la distancia que las separa.

8.4 VARIACIONES DE LA ACELERACION g DE LA GRAVEDAD.-

- Variación con altitud:

La aceleración g de la gravedad no es un valor constante. Con las leyes de Newton se obtiene:

$$F = mg = G\frac{mM}{r^2} \implies g = G\frac{M}{r^2}$$

Esto es, g varía con la distancia al centro de la tierra. Sobre la superficie de la tierra se tiene:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Calculemos la variación de g debido a un alejamiento respecto al centro de la tierra. Partiendo de la expresión encontrada, derivando g respecto a r, se obtiene un diferencial:

$$dg = -2GM\frac{dr}{r^3} = -2\left(G\frac{M}{r^2}\right)\frac{dr}{r} = -2g\frac{dr}{r}$$

Luego,

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r}$$

Por lo tanto, el cambio fraccional de g es el doble que el de r. El signo negativo indica que g disminuye conforme aumenta la distancia r de separación.

Considerando que este cambio es fraccional y que el radio de la tierra es de 6,371 km, el valor de g es aproximadamente constante en las vecindades de la superficie de la tierra. Por ejemplo, el valor de g en una estación estandard de latitud 45° a nivel del mar es 9.80665 m/s^2, valor que generalmente tomamos como 9.81m/s^2.

Si la elevación es de 1km este valor es aproximadamente $9.80 m/s^2$ y para 100km es $9.60\ m/s^2$. Recien cuando la altura aumenta en forma considerable el valor de g disminuye en forma apreciable, p.e., para 1,000 km es $7.41\ m/s^2$.

- Variación con la latitud.

El valor medido de g varía con la latitud. Por ejemplo, a nivel del mar, conforme pasa del Ecuador, a latitud 0° es $9.78 m/s^2$ a 45° es $9.81\ m/s^2$ y hacia los polos, a latitud 90° es $9.83\ m/s^2$ aproximadamente.

Parte de esta variación se debe al hecho de que el Ecuador está más alejado del centro de la tierra que lo que están los polos. El radio ecuatorial es 21 km mayor que el radio polar. Esta variación de g con la separación se ha analizado en el párrafo anterior.

La otra parte de la variación se explica teniendo en cuenta la rotación de la tierra,tal como analizaremos en el párrafo siguiente.

- Variación por efecto de la rotación de la tierra:

Considerando la rotación de la tierra,en la fig. 8.5 se muestra una persona en tres posiciones diferentes sosteniendo con una cuerda y dinamómetro (balanza) una masa m.

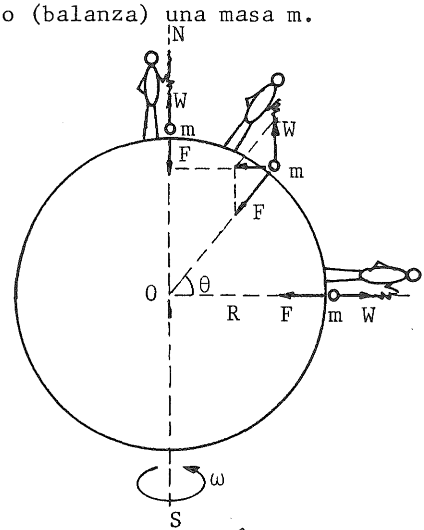


Fig. 8.5-Efecto de la rotación de la tierra en el valor de la aceleración g de la gravedad. Sobre el cuerpo m actúan dos fuerzas, $\bar{F}$ y $\bar{W}$. Se muestran tres posiciones: en el polo, en el ecuador y en una latitud intermedia a θ°.

Sobre el cuerpo de masa m actúan: la fuerza de atracción gravitacional terrestre $F = GmM/R^2$, que es su peso verdadero W_o, y la tensión de la cuerda o del resorte de la balanza que nos indica su peso aparente $W = mg$.

Considerando la rotación de la tierra, el cuerpo tiene una aceleración centrípeta con centro sobre el eje de rotación de la tierra, a_r.

Luego, aplicando la segunda ley de Newton del movimiento, vectorialmente se tiene:

$$\bar{F} + \bar{W} = m\,\bar{a}_r$$

. En los polos, donde $a_r = 0$, $\bar{W}$ es igual y apuesta a $\bar{F}$, es decir W es igual a su peso verdadero W_o. El valor de g será:

$$\frac{GmM}{R^2} - mg = 0 \Longrightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

. En el Ecuador, la aceleración radial es hacia el centro de la tierra, esto es $a_r = a_R$. Las fuerzas $\bar{F}$ y $\bar{W}$ teniendo la misma dirección son opuestas pero W es menor que F, es decir el peso aparente W es menor que el peso verdadero W_o. El valor observado de g será:

$$\frac{GmM}{R^2} - mg = m\,a_R \Longrightarrow g = \frac{GM}{R^2} - a_R$$

. En una latitud θ, $\bar{F}$ y $\bar{W}$ no tienen la misma dirección como se muestra en la fig. 8.5. Su resultante debe ser tal que vectorialmente se iguale a $m\,\bar{a}_r$.

Vemos que, excepto en los polos y ecuador, una plomada no apunta hacia el centro de la tierra. El peso aparente $\bar{W}$ difiere tanto en magnitud como en dirección del peso verdadero W_o.

Considerando que el caso extremo ocurre en el ecuador, calculemos allí la magnitud de la aceleración radial a_R:

$$a_R = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 6.37 \times 10^6}{(24 \times 3{,}600)^2} = 0.034\ m/s^2$$

Este valor decrece a cero hacia el polo. Vemos pues, que, este efecto explica en buena parte la variación de g con la latitud, entre el ecuador y los polos.

8.5 EL CONCEPTO DE CAMPO GRAVITACIONAL VECTORIAL Y ESCALAR.-

La fuerza de atracción gravitacional puede interpretarse, tal como lo hemos hecho, como una interacción directa entre dos partículas. No se requiere la presencia de ninguna conexión material entre ellos, ni que estén en contacto. Nadie sabe por qué esto es posible, simplemente, aceptaremos que este comportamiento que presentan los cuerpos masivos es un hecho experimental. A esta interpretación, o punto de vista, se le denomina de "acción a distancia".

Otra forma de interpretarlo es mediante el concepto de "campo". Concepto desarrollado en el electromagnetismo, donde es muy útil e indispensable cuando se tiene cargas eléctricas en movimiento. Sin embargo, es importante introducirlo aquí en gravitación.

En este punto de vista se considera que una partícula masiva modifica el estado en que se encuentra el espacio que la rodea, creando un campo gravitacional, de modo tal, que cualquier otra partícula que se sitúa en él, este actúa sobre ella ejerciendo la fuerza de atracción gravitacional.

Consideremos que un cuerpo aislado de masa M crea un campo gravitacional en el espacio que la rodea, en particular en un punto P como se muestra en la fig. 8.6.

Si se coloca en el punto P una partícula de masa m_o, se considera que el campo es el que ahora ejerce una fuerza F_o sobre ella, ya no es ejercida directamente por el cuerpo M.

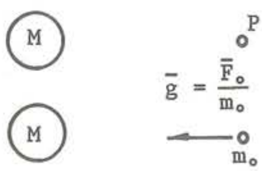


Fig. 8.6-El espacio que rodea el cuerpo M es un campo gravitacional.

Como la fuerza será experimentada por m_o en todos los puntos que rodean a M, todo el espacio que la rodea será un campo gravitacional. En general, el campo puede ser creado por una distribución cualquiera de partículas y no solo por un cuerpo (M). En este caso se puede determinar su existencia procediendo experimentalmente colocando en el espacio que las rodea una masa cualquiera, denominada de prueba(m_o).

Como la fuerza es una cantidad vectorial, el campo gravitacional es un campo vectorial. Cada punto del campo tiene asociado un vector, las propiedades del campo estarán determinadas cuando se especifiquen la magnitud, dirección y sentido de esta fuerza.

Consecuentemente, por lo expresado, en este punto de vista primero hay que determinar el campo creado y luego proceder a calcular la fuerza que este campo ejerce sobre otra partícula situada en él. Por lo tanto, vemos que el problema está separado en dos partes.

El campo se especifica definiendo su intensidad $\bar{g}$, en un punto, esto es, la fuerza gravitacional por unidad de masa en dicho punto. Experimentalmente, si $\bar{F}_o$ es la fuerza que actúa sobre una masa de prueba m_o, dividiendo, se obtiene:

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_o}{m_o}$$

Luego, conocido el campo, podemos calcular la fuerza $\bar{F}$ que actúa sobre una partícula m colocada en ese punto, esto es:

$$\bar{F} = m\bar{g}$$

También es posible asociar un campo escalar con la gravitación. Para ello recurrimos a la energía potencial, definiendo el potencial gravitacional V como la energía potencial gravitacional U por unidad de masa m de una partícula situada en el campo, esto es:

$$V = \frac{U}{m}$$

Consideremos nuevamente que un cuerpo de masa M produce un campo gravitacional y que una partícula de masa m se sitúa en él, en un punto P, a una distancia r de él.

Anteriormente, en el capítulo 5, hemos encontrado que la energía potencial gravitacional del sistema (M + m), tomando como referencia una separación infinita, es:

$$U_{(r)} = - \frac{GMm}{r}$$

Luego, en esta interpretación, hablamos de la energía potencial de la partícula m en el campo gravitacional producido por el cuerpo M. Entonces, el potencial gravitacional será:

$$V_{(r)} = \frac{U_{(r)}}{m} = - \frac{GM}{r}$$

Por consiguiente, se tiene un número, V, asociado con cada punto del espacio que rodea al cuerpo M que produce el campo. En este caso, un campo gravitacional escalar.

Si queremos determinar la fuerza que actúa sobre una partícula m colocada en un punto del campo, recordando que: $F = - dU/dr$, se tiene:

$$F = - m \frac{dV}{dr}$$

Esta es su magnitud, su dirección es radial apuntando hacia M. El método escalar de la energía ofrece apreciables ventajas, e incluso es indispensable en algunos casos. Es más sencillo operar con cantidades escalares que operar con cantidades vectoriales.

8.6 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.-

Como acabamos de mencionar en el item anterior, ya conocemos la energía potencial gravitacional para un sistema de dos partículas. Consideremos ahora cuando se tienen más de dos partículas, digamos tres, en una configuración dada como se muestra en la fig. 8.7. Su energía potencial total será:

$$U = - G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1\, m_3}{r_{13}} + \frac{m_2\, m_3}{r_{23}} \right)$$

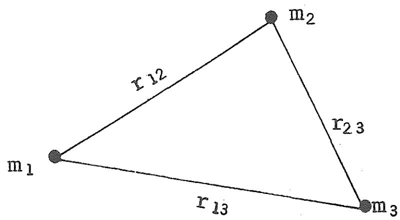


Fig. 8.7-Configuración de un sistema de tres partículas. Energía potencial gravitacional total.

Esta energía es igual al trabajo realizado por un agente externo contra las fuerzas gravitacionales, existentes entre las partículas del sistema; para poder constituir la configuración dada a partir de la configuración de referencia, de separación inicial infinita. Esto , independiente de las trayectorias que se sigan.

Si se quiere separar nuevamente el sistema dado, se tendría que suministrar esta misma cantidad de energía positiva. A la energía que mantiene a un sistema de partículas en una configuración se le denomina energía de liga o de amarre.

$$U = G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1\, m_3}{r_{13}} + \frac{m_2\, m_3}{r_{23}} + \ldots\ldots \right)$$

APENDICE I

COSMOLOGIA Y GRAVITACION

RESEÑA HISTORICA: DE ARISTOTELES A NEWTON.-

- Aristóteles (384-322 a.de J.C.)

El filósofo Griego sostenía que la tierra es redonda y no plana, que la tierra es el centro del Universo permaneciendo estacionaria y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se mueven alrededor de la tierra en órbitas circulares.

Los Griegos consideraban la tierra redonda por observación en navegación del horizonte, de la estrella polar norte y por la sombra producida en un eclipse lunar. Estos argumentos planteó Aristóteles en su libro "Sobre los Cielos".

Por razones exclusivamente místicas consideraban a la tierra como el centro del Universo. También consideraban que el movimiento circular era el más perfecto, por lo tanto, los demás cuerpos del Universo, no podían moverse de otra forma que no fuera la circular alrededor de la tierra; ya Platón (427-347 a. de J.C.), aunque éste no tenía un profundo interés por la ciencia física, al movimiento circular alrededor de la tierra lo llamó "movimiento circular inteligente".

- Tolomeo (Claudio Ptolomeo, S.II d. de J.C.)

En base a las ideas planteadas por Aristóteles y atendiendo principalmente a los trabajos hechos por Hipartaco (S.II a. de J.C.), Tolomeo elaboró un modelo cosmológico completo que proporciona un sistema razonablemente preciso para predecir correctamente la posición de los cuerpos en el cielo.

En este modelo o sistema, denominado geocéntrico, la tierra permanece al centro del universo rodeada por ocho esferas, para: la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las llamadas estrellas fijas. Los planetas además de su movimiento circular alrededor de la tierra sobre estas esferas, tienen otro pequeño movimiento circular con centro sobre su esfera. Este sistema tiene que hacer ciertas suposiciones sobre la Luna y Tolomeo reconoce este defecto, también reconoce que suponer que la tierra gira sobre un eje puede simplificar mucho el asunto. A pesar de esto, su modelo fue generalmente aceptado. Este modelo del Universo fue adoptado por la Iglesia Cristiana por adecuarse a las Sagradas Escrituras, tenía la ventaja de dejar mucho sitio para el cielo mas allá de la última esfera. La creencia religiosa reinante colocaba al Infierno dentro de la tierra.

Para explicar el movimiento Tolomeo tuvo que recurrir a diferentes sistemas. Por ejemplo, al movimiento excéntrico para explicar las diferencias de brillo de un planeta y el Sol, con esto explicaba bien cualitativamente, pero para concordar con la observación, tenía que modificarse y le fue necesario introducir otro punto llamado ecuante, que mantenía, como requería la mentalidad griega, un movimiento uniforme respecto a un punto, ver fig. 8.8. Para entender el movimiento retrógrado de los planetas como son vistos desde la tierra, se valió del epiciclo y la deferente, siempre en movimientos circulares uniformes, ver fig. 8.9.

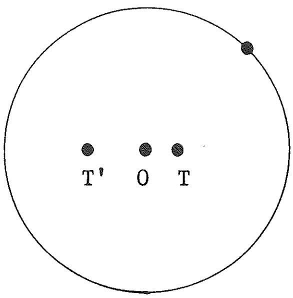


Fig. 8.8 -Movimiento excéntrico. T es la tierra y O el centro del círculo y T' el ecuante.

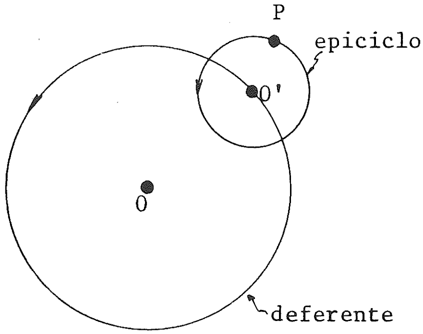


Fig.8.9 -Movimiento epicíclico. O centro de la deferente, O' centro del epiciclo y P el planeta.

Como mencionamos al comienzo, Tolomeo se basó en la obra del astrónomo Hipartaco, quién observó el Universo y dió principio al sistema de Tolomeo, por esto es llamado "el más grande astrónomo de la antiguedad". A su vez, a Hipartaco precedieron Eudoxio (408-355 a. de J.C.) y su discípulo Calipo, de los cuales se dice que "iniciaron la astronomía científica".

Tolomeo, quién enseñó en el Museo de Alejandría (127-151 d. de J.C.) , escribió un amplio tratado de astronomía, la enciclopedia Megale Syntaxis, a la cual los árabes llamaron posteriormente por su nombre griego adulterado Almagesto, nombre con el cual llegó a Europa Occidental y es generalmente conocido. Es el más grande resumen astronómico de su tiempo y se mantuvo en vigencia durante toda la Edad Media.

Los Romanos, conquistadores del mundo helénico, no fueron protectores de la ciencia. Roma fue más un centro de historia, leyes y literatura que de saber científico. Algo, pero no mucho de la ciencia griega se tradujo al Latín y el saber científico no pasó directamente al Occidente, entorpeciéndose más aún al caer el Imperio Romano (410 d. de J.C.) dándose un largo período de estancamiento intelectual en Europa, sin interes científico durante la Edad Media. En el año 389 se quemó la gran biblioteca de Alejandría perdiéndose numerosos escritos Griegos, obras de Aristóteles y Arquímedes.

En Bizancio - Constantinopla se conservaron muchos manuscritos griegos, en el Siglo IX los países árabes muestran intereses por la ciencia y se traducen a la lengua arábiga algunos trabajos de Aristóteles, Arquímedes, Euclides y Tolomeo.

Con el tiempo, en el Siglo XII, algo del saber arábigo acumulado empezó a infiltrarse en Europa Occidental del medioevo, principalmente por el contacto de España. De los Moros se consiguió el Almagesto de Tolomeo y se redescubrieron las obras de Aristóteles.

El establecimiento de las Universidades comenzó en los Siglos XI y XII y se estudiaron profundamente las obras de Aristóteles, pero no se produjeron conocimientos nuevos hasta la aparición de Copérnico, destinado a realizar, en el siglo XVI, el más grande avance en la astronomía desde el tiempo de Tolomeo.

- Nicolás Copérnico (1473-1543)

El Sacerdote Polaco Copérnico propuso, después de trece siglos, una visión nueva y espectacular acerca del arreglo del universo, un modelo más simple que el de Tolomeo. En su modelo, denominado heliocéntrico, el Sol permanece estacionario en el centro del universo, la tierra y demás planetas se mueven en órbitas circulares alrededor del Sol. Copérnico circuló este modelo primero en forma anónima seguramente por temor a ser declarado hereje por su Iglesia. En realidad, pasó cerca de un siglo para que su idea se tomara en cuenta, a pesar de que las órbitas que predice no concuerdan exactamente con las observadas.

El modelo de Copérnico se desprende de las esferas celestiales de Tolomeo, y con ello, de la idea que el universo está limitado por la esfera de las llamadas estrellas fijas; tornándose natural suponer que estas estrellas son como el Sol pero mucho más lejanas.
Copérnico no fue el primero en considerar este modelo, le procedió Aristarco (S. III a. de J.C.), Copérnico había leído que Aristarco creía en el sistema heliocéntrico. En realidad, el primero en lanzar esta especulación diferente a la de Eudoxio y Aristóteles fue Heráclito (S. IV a. de J.C.), sugirió la posibilidad de pensar que Venus y Mercurio se mueven alrededor del Sol y que la tierra gira sobre un eje.

Aristarco apoyó esta especulación, el creía que la tierra era redonda y posteriormente adoptó la hipótesis de que la tierra se mueve alrededor del Sol, el cual, se mantiene fijo. Explicaba la aparente falta de movimiento de las estrellas aduciendo, correctamente, su extrema lejanía a la Tierra y el Sol. Por todo esto, muchas veces es llamado "el Copérnico de la antigüedad". Sus creencias no tuvieron vigencia pues no se ajustaban al "sentido común" de la época, puesto que el Sol "obviamente" da vueltas alrededor de la Tierra, indudablemente que se adelantó de época. En contraste, el sistema geocéntrico planteado por Hipartaco, que era "natural, satisfactorio y simple" para explicar los movimientos observados, fue realmente aceptado y ampliado por Tolomeo, perduró por siglos hasta que Copérnico reintrodujo el sistema heliocéntrico.

Copérnico, después de haber trabajado 30 años en su sistema, a instancias de sus amigos se decidió a publicar su libro, el tratado "De las Revoluciones", que marcó toda una época en la historia de la astronomía. Copérnico confió su manuscrito, el cual existe, a un profesor alemán (Rheticus) y este, a su vez, a un teólogo luterano (Osiander) para la supervisión editorial. El libro salió a luz en 1543, año en que Copérnico muere y no pudo ver la publicación.

Tanto Copérnico como su editor preveían las objeciones que el libro podía levantar por lo novedosa y discordante que sonaba su teoría. Copérnico fue un clérigo devoto y distinguido que de ninguna manera pensó transtocar la ortodoxia de su tiempo, sentía que la llamada de atención a la simplicidad y al órden era en realidad un tributo a la sabiduría de Dios.

Pronto, los Protestantes y Judíos tildaron de falsa la teoría de Copérnico y prohibieron que se enseñara el sistema que tiene el Sol como centro. La Iglesia Católica, si bien primero había aprobado el trabajo de Copérnico, posteriormente puso a las Revoluciones en su lista de libros prohibidos.

Después de haber estudiado en Italia, Copérnico regresó a su país natal disconforme con la situación en que se encontraba la astronomía y se abocó de inmediato al desarrollo de su teoría. Si bien Copérnico estaba convencido de la creencia, corriente en su época, del movimiento uniforme alrededor de un centro, dio un paso importante hacia adelante, señaló que el movimiento de los cuerpos celestes podía representarse por movimientos uniformes circulares alrededor del centro de revolución de la tierra, centro que estaba cerca al Sol.

Copérnico consideraba también que la tierra es esférica y además que la tierra gira en torno a su eje. Los planetas giran en torno al Sol, al cual supone quieto, en planos casi coincidentes y en trayectorias que son combinaciones de deferentes y epiciclos.

La teoría de Copérnico en algunos aspectos no era más precisa que la de Tolomeo y en otras tan complicada como ella. Sin embargo, a pesar de sus inexactitudes, este trabajo fue una osada divergencia con una teoría profundamente arraigada por muchos siglos.

El sistema de Copérnico no fue aceptado, ni reemplazó, de inmediato, al de Tolomeo. Tuvieron que pasar muchos años desarrollándose los trabajos de Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei e Isaac Newton.

- Tycho Brahe. (1546 - 1601)

Astrónomo danés, diseñó instrumentos e ideó técnicas para las mediciones astronómicas, fue un infatigable observador por más de treinta años acumulando extensa cantidad de datos sobre los movimientos de los planetas.

Heredero de una cuantiosa fortuna pudo dedicarse de lleno a su interés, la observación astronómica. Primero hizo construir en Alemania un gigantesco cuadrante para la cuidadosa observación de la posición de los cuerpos celestes. Luego, invitado por el rey de Dinamarca construyó un observatorio en ese país. Posteriormente, levantó el observatorio mejor logrado hasta entonces (el Uraniborg), allí, observó por más de veinte años recopilando los datos más precisos que ningún astrónomo pudo obtener antes que él. P.e. mientras Tolomeo determinó la posición de una estrella con una aproximación de 30' de arco, Tycho pudo hacerlo con una de casi 5' de arco.

Tycho Brahe no formuló ninguna nueva teoría, pero sus precisos datos contribuyeron, posteriormente, a echar por tierra el sistema de Tolomeo. Al final de su vida Tycho se trasladó a Praga, contratado por los germanos. Allí, continuó sus observaciones y tomó como ayudante al que, a su muerte, fuera su sucesor y heredero de todos los datos acumulados, el alemán Johannes Kepler.

- Johannes Kepler (1571-1630)

El astrónomo alemán, con los datos de las precisas observaciones de Tycho, se dedicó principalmente a discurrir en el campo de las matemáticas y la especulación, para encontrar como se mueven los planetas. Tenía especial interés en el movimiento de Marte, el cual, no podía predecirse ni utilizando el sistema copernicano.

Después de plantear muchas hipótesis al fin tuvo éxito y planteó sus tres famosas e importantes leyes:

1º Las órbitas planetarias son elipses en las que el sol ocupa uno de sus focos.

2º El radio vector (la línea que une a un planeta con el Sol) barre áreas iguales, durante intervalos de tiempo iguales.

3º Los cuadrados de los tiempos de las revoluciones planetarias son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas elípticas.

La 1º Ley representa simpelemente una enmienda a la teoría de Copérnico. Las dos primeras leyes las publicó el año 1609 en su libro "Astronomía Nueva", éstas, describen el movimiento de los planetas pero no ligan el movimiento de uno con el otro. Recién en 1618 expresó matemáticamente esta relación en su 3º Ley.

Kepler no dió explicaciones de por qué los planetas presentaban este tipo. Solo sugirió, incorrectamente, como la causa una fuerza magnética emanada por el Sol.

- Galileo Galilei (1564-1642)

La caída de la teoría de Aristóteles-Tolomeo comienza en 1609, justamente cuando Kepler modifica la teoría de Copérnico sugiriendo movimientos elípticos de los planetas para concordar con los observador por tycho Brahe,Galileo construye el primer telescopio astronómico en Padua y comienza a observar el Universo.

En 1610 publica su libro "Siderus Nuncius" describiendo sus descubrimientos con el telescopio y apoyando, con evidencias, la teoría de Copérnico. Su incredulidad hacia el esquema Aristóteles-Tolomeo era abiertamente conocida desde sú estancia en Pisa.
Esta defensa le trajo muchos problemas con sus colegas y con la Iglesia.
En 1632 publicó su "Diálogo sobre los grandes sistemas del mundo", que levantó mayores protestas y llevó a Galileo a la Inquisición, teniendo que abjurar públicamente de sus creencias sobre el sistema copernicano.

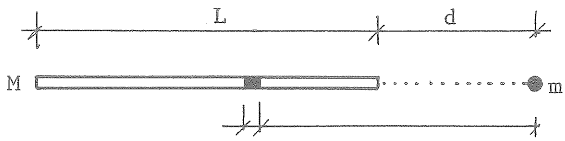
Ver también sobre Galileo en la pág. 165 del Volumen I, Capítulo III, Apéndice I.

- Isaac Newton (1642-1727)

Al llegar al punto final de nuestra descripción histórica del sistema planetario nos enocntramos con Isaac Newton.
Disponiendo Newton de todos los datos, sugerencias y principios que sus predecesores habían proporcionado, llegó al punto culminante en 1687 al publicarse su libro Filosofía Natural Principios Matemáticos". En el, Newton desarrolla su teoría del movimiento de los cuerpos y postula su descubrimiento del principio de la gravitación universal. Al extenderlo al movimiento de la Luna y los planetas, Newton lleva a la mecánica terrestre y a la celeste a una unificación, a lo que se llama síntesis newtoniana.

Con este trabajo se abrió un amplio campo de investigación científica y tecnológica, teniéndose como principal preocupación por más de una centuria.
Ver también sobre Newton en la pág. 168 del Volumen I, Capítulo III, apéndice II.

1. Se tiene una varilla delgada homogénea, de masa M y longitud L. En la prolongación de su eje longitudinal, a una distancia d, se encuentra una partícula de masa m. Determinar la atracción gravitacional total que la varilla ejerce sobre la partícula.
Adicionalmente, encontrar en que punto se debe ubicar a una partícula de masa M para que reemplace gravitacionalmente a la barra.



$$dM = \frac{M}{L}dx$$

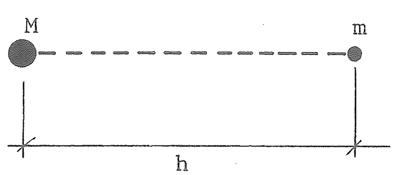
La fuerza de atracción gravitacional dF entre el elemento de masa dM y la masa puntual m, es:

$$dF = G\frac{mdM}{x^2} = G\frac{m\frac{M}{L}dx}{x^2} = \frac{GmM}{L}\frac{dx}{x^2}$$

integrando,

$$F = \frac{GmM}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{GmM}{L}\left| -\frac{1}{x}\right|_d^{d+L} = \frac{GmM}{L}\left(-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d}\right)$$

$$F = \frac{GmM}{L}\frac{L}{d(d+L)} = \frac{GmM}{d(d+L)}$$



Adicionalmente se pide encontrar la distancia h. La fuerza de atracción gravitacional entre las dos partículas es:

$$F = G\frac{mM}{h^2}$$

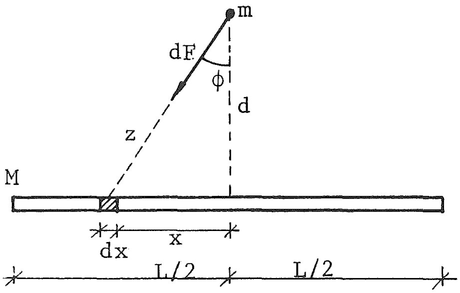
De acuerdo al requerimiento, igualando ambos valores de F, se tiene:

$$\frac{GmM}{h^2} = \frac{GmM}{d(d+L)} \Longrightarrow h^2 = d(d+L) \Longrightarrow h = \sqrt{d(d+L)}$$

Observe que: $h \neq d + \frac{L}{2}$, siendo, $(d + \frac{L}{2})$ la ubicación del centro de masa de la barra. Teniéndose: $h < d + \frac{L}{2}$.

2. Se tiene una varilla delgada homogénea de masa M y longitud L. Una partícula de masa m se encuentra situada simétricamente respecto a la longitud de la varilla a una distancia d perpendicular a ella. Calcular la fuerza de atracción gravitacional Newtoniana que la varilla ejerce sobre la partícula.

Adicionalmente, encontrar en que punto se debe ubicar a una partícula de masa M para que reemplace gravitacionalmente a la barra.



$$dM = \frac{M}{L}\,dx$$

$$\cos\varphi = \frac{d}{z} \qquad z^2 = d^2 + x^2$$

La fuerza de atracción gravitacional dF entre el elemento diferencial de masa dM y la masa puntual m, es:

$$dF = G\,\frac{mdM}{z^2} = \frac{GmM}{L}\,\frac{dx}{z^2}$$

Como hay simetría, la componente horizontal se cancela y solo queda la componente vertical para efectuar la integración, esto es:

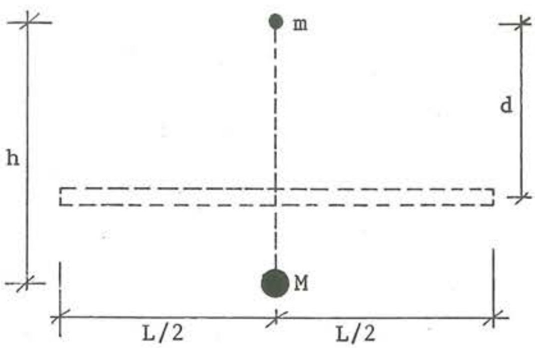
$$F = \frac{GmM}{L}\int \frac{dx}{z^2}\cos\varphi = \frac{GmM}{L}\int \frac{dx}{z^2}\,\frac{d}{z} = \frac{GmMd}{L}\int \frac{dx}{z^3}$$

$$F = \frac{GmMd}{L}\int \frac{dx}{(d^2+x^2)^{3/2}}$$

Tomando como límites de integración entre 0 y L/2, y duplicando, se tiene:

$$F = \frac{2GmMd}{L}\int_0^{L/2} \frac{dx}{(d^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2GmMd}{L}\;\frac{x}{d^2(d^2+x^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{L/2}$$

$$F = \frac{2GmMd}{L}\;\frac{L/2}{d^2[\,d^2+(\frac{L}{2})^2\,]^{1/2}} = \frac{GmM}{d(d^2+L^2/4)^{1/2}}$$



Adicionalmente se pide encontrar la distancia h. La fuerza de atracción gravitacional entre las dos partículas es:

$$F = G\,\frac{mM}{h^2}$$

De acuerdo al requerimiento, igualando ambos valores de F, se tiene:

$$\frac{GmM}{h^2} = \frac{GmM}{d\left(d^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} \Longrightarrow h^2 = d\left(d^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2} \Longrightarrow h = \sqrt{d\left(d^2+L^2/4\right)^{1/2}}$$

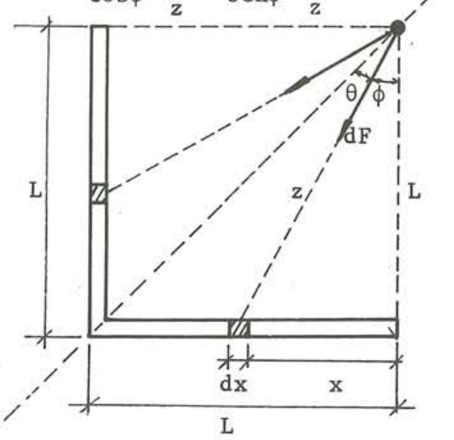
Observe que: $h > d$.

3. Se tiene una varilla delgada homogénea de masa 2M y longitud 2L, doblada en su punto medio a un ángulo de 90°, como se muestra en la figura. Una partícula de masa m se ubica simétricamente con respecto al ángulo a una distancia L de los extremos de los lados del mismo. Encontrar la fuerza de atracción gravitacional total que ejerce dicha varilla sobre la partícula.

$$dM = \frac{M}{L}\,dx \qquad z^2 = L^2 + x^2$$

$$\cos\theta = \cos(45° - \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\phi + \operatorname{sen}\phi)$$

$$\cos\phi = \frac{L}{z} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{x}{z}$$



$$\cos\theta = \frac{1}{z\sqrt{2}}\,(L + x)$$

La fuerza de atracción gravitacional dF entre el elemento diferencial de masa dM y la masa puntual m, es:

$$dF = G\,\frac{m\,dM}{z^2} = \frac{GmM}{L}\,\frac{dx}{z^2}$$

Como en el problema se tiene simetría con respecto a la diagonal, que pasa por el vértice del ángulo recto y la partícula, podemos tomar la componente de dF sobre ella y duplicar para efectuar la integración, esto es:

$$F = \frac{GmM}{L} 2 \int \frac{dx}{z^2} \cos\theta = \frac{GmM}{L} 2 \int \frac{dx}{z^2} \frac{1}{z\sqrt{2}} (L + x) = \frac{GmM}{L} \sqrt{2} \int \frac{(L + x)}{z^3} dx$$

$$F = \frac{GmM}{L} \sqrt{2} \int_o^L \frac{(L + x)}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{GmM}{L} \sqrt{2}\, L \int_o^L \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{GmM}{L} \sqrt{2} \int_o^L \frac{x\, dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}}$$

Evaluaremos estas dos integrales:

$$\int_o^L \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{L^2 (L^2 + x^2)^{1/2}} \Bigg|_o^L = \frac{L}{L^2 (L^2 + L^2)^{1/2}} = \frac{1}{L^2 \sqrt{2}}$$

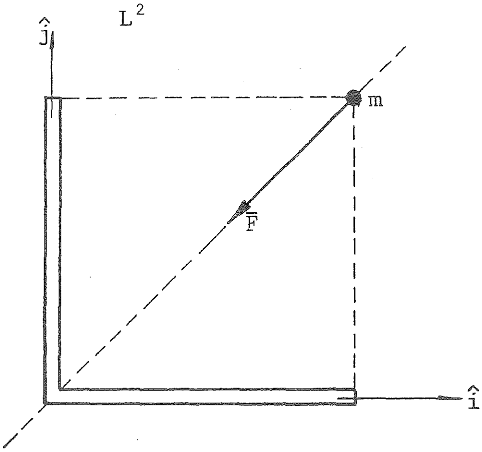
$$\int_o^L \frac{x\, dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = - \frac{L}{(L^2 + x^2)^{1/2}} \Bigg|_o^L = - \frac{1}{L\sqrt{2}} + \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{2} - 1}{L^2 \sqrt{2}}$$

reemplazando:

$$F = \frac{GmM}{L} \sqrt{2}\, L \left(\frac{1}{L^2 \sqrt{2}} \right) + \frac{GmM}{L} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{L \sqrt{2}} \right)$$

$$F = \frac{GmM}{L^2} + \frac{GmM}{L^2} (\sqrt{2} - 1)$$

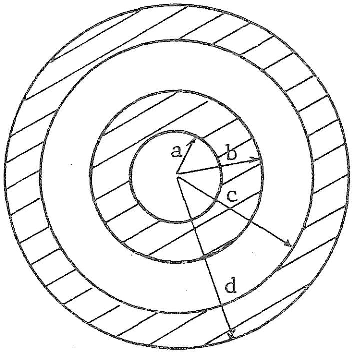
$$F = \frac{GmM}{L^2} \sqrt{2}$$



Este valor es su módulo, su dirección y sentido es apuntando hacia el vértice del ángulo recto de la varilla. Con respecto a un eje de coordenadas cartesiano rectangular, como el mostrado en la figura, vectorialmente la fuerza es:

$$\bar{F} = - \frac{GmM}{L^2} (\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

4. Se tienen dos cascarones esféricos concéntricos uniformes de densidad constante "ρ". Calcular la fuerza ejercida sobre una pequeña masa "m" en cada punto a lo largo de un radio, desde el centro "O" hasta el infinito. Grafique F en función de r, indicando los valores particulares de F en los puntos r = 0, a, b, c y d.



En general, la fuerza resultante total de atracción sobre una masa puntual en la posición interior de una masa esférica es nula.

Luego:

- Entre, $0 < r < a$:

$$F=0 \;,\; 0< r< a, \text{ para } \begin{cases} r=0 \Longrightarrow F_o = 0 \\ r=a \Longrightarrow F_o = 0 \end{cases}$$

- Entre, $a< r< b$:

La masa M que actúa atrayendo a la masa m en la posición r, es:

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - a^3)$$

y la fuerza será:

$$F = Gm\,\frac{\frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - a^3)}{r^2} \quad , \; a< r< b,$$

$$\text{Para: } \begin{cases} r = 0 \Longrightarrow F_a = 0 \text{ (como ya se ha obtenido)} \\ r = b \Rightarrow F_b = Gm\,\dfrac{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)}{b^2} \end{cases}$$

- Entre, $b< r< c$:

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)$$

$$F = Gm \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)}{r^2}, \quad b < r < c ,$$

$$\text{Para:} \begin{cases} r = b \Longrightarrow F_b = Gm \dfrac{\frac{4}{3}(b^3 - a^3)}{b^2} & \text{(como ya se ha obtenido)} \\ r = c \Longrightarrow F_c = Gm \dfrac{\frac{4}{3}(b^3 - a^3)}{c^2} \end{cases}$$

- Entre, $c < r < d$:

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho[(b^3 - a^3) + (r^3 - c^3)] = \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + r^3 - c^3)$$

$$F = Gm \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + r^3 - c^3)}{r^2}, \quad c < r < d,$$

$$\text{Para:} \begin{cases} r = c \Longrightarrow F_c = Gm \dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)}{c^2} & \text{(como ya se ha obtenido)} \\ r = d \Longrightarrow F_d = Gm \dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + d^3 - c^3)}{d^2} \end{cases}$$

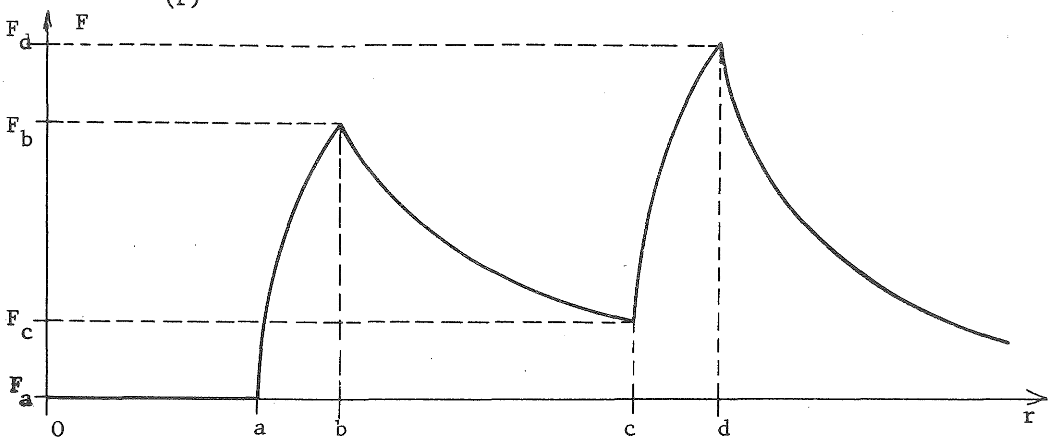
- Entre, $d < r < \infty$

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + d^3 - c^3)$$

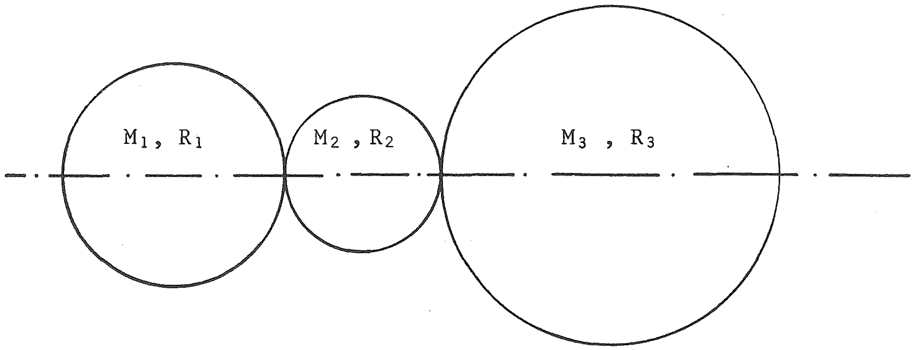
$$F = Gm \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + d^3 - c^3)}{r^2}, \quad d < r < \infty ,$$

$$\text{Para:} \begin{cases} r = d \Longrightarrow F_d = Gm \dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3 + d^3 - c^3)}{d^2} & \text{(como ya se ha obtenido)} \\ r \to \infty \Longrightarrow F_\infty \to 0 \end{cases}$$

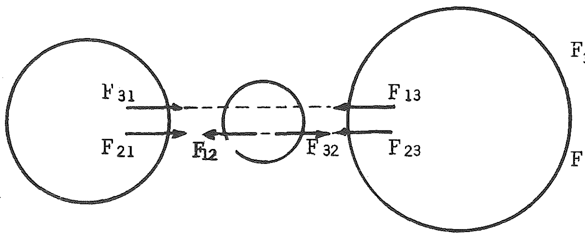
Gráfica: $F_{(r)}$:



5. Determinar las fuerzas de contacto entre las esferas homogéneas dispuestas como muestra en la figura.



Las fuerzas de atracción gravitacional entre las esferas de acuerdo a la ley de Newton, son:



$$F_{21} = F_{12} = \frac{GM_1M_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$F_{32} = F_{23} = \frac{GM_2M_3}{(R_2 + R_3)^2}$$

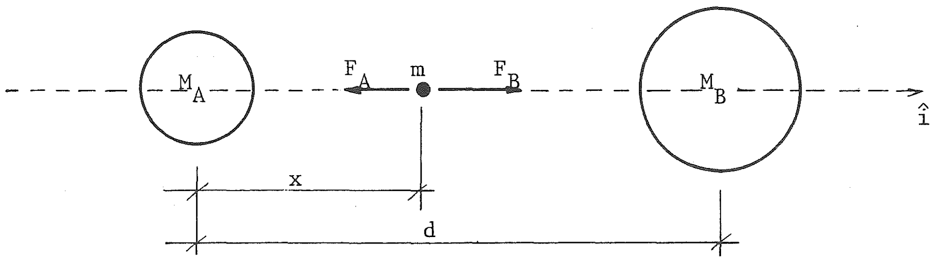
$$F_{31} = F_{13} = \frac{GM_1M_3}{(R_1 + 2R_2 + R_3)^2}$$

y las fuerzas de contacto serán:

-Entre 1 y 2: $F_{21} + F_{31} = GM_1 \left[\dfrac{M_3}{(R_1 + R_2)^2} + \dfrac{M_3}{(R_1 + 2R_2 + R_3)^2} \right]$

-Entre 3 y 2: $F_{23} + F_{13} = GM_3 \left[\dfrac{M_2}{(R_2 + R_3)^2} + \dfrac{M_1}{(R_1 + 2R_2 + R_3)^2} \right]$

6. Dos cuerpos esféricos de masa M_A y M_B están separados una distancia d. Determinar la distancia x, con respecto al cuerpo A, para que una partícula de masa m esté en equilibrio entre los dos cuerpos.



Para que la masa m esté en equilibrio es preciso que la suma de fuerzas sobre ella sea cero.

Acción de la masa M_A:

$$F_A = - G \frac{M_A m}{x^2} \hat{i}$$

Acción de la masa M_B:

$$F_B = G \frac{M_B m}{(d - x)^2} \hat{i}$$

sumando:

$$- G \frac{M_A m}{x^2} \hat{i} + G \frac{M_B m}{(d-x)^2} \hat{i} = 0$$

$$\frac{M_B}{M_A} x^2 - (d - x)^2 = 0$$

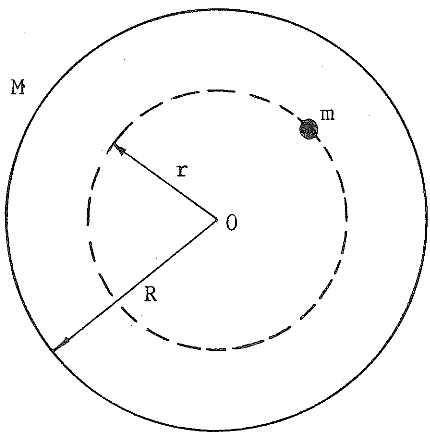
$$x^2 - \frac{2d}{1 - \frac{M_B}{M_A}} x + \frac{d^2}{1 - \frac{M_B}{M_A}} = 0$$

resolviendo:

$$x = \frac{\left(1 \pm \sqrt{\frac{M_B}{M_A}}\right)}{\left(1 - \frac{M_B}{M_A}\right)} d \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{d}{1 - \sqrt{\frac{M_B}{M_A}}} \\ x_2 = \dfrac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_B}{M_A}}} \end{cases}$$

Siendo x_2 la solución en la cual m está entre m_A y M_B, es la distancia pedida. En la solución x_1, m está fuera de ellas.

7. Determinar la fuerza de atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre una partícula de masa m, situada en su interior a una distancia $r (\leqslant R)$ de su centro.
Suponga la tierra esférica de densidad uniforme.



Las capas de tierra externas a la posición de la partícula no ejercen fuerza alguna sobre ella. Solo actúan las capas internas, esto es:

$$F = -G \frac{M'm}{r^2}$$

donde M', considerando densidad uniforme, es:

$$M' = M \frac{V'}{V} = M \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Luego,

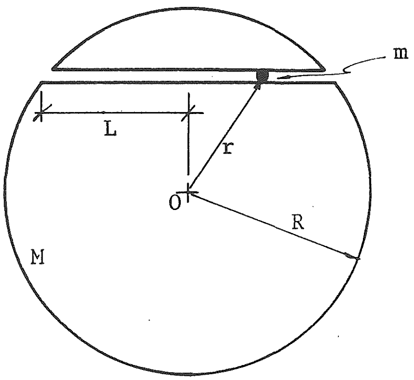
$$F = -G\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3 m}{r^2} = -\frac{GMm}{R^3}\,r$$

o bien,

$$F = -\frac{mg}{R}\,r, \text{ en donde: } g = \frac{GM}{R^2}$$

Por consiguiente, vemos que la fuerza de atracción dirigida hacia el centro de la tierra es directamente proporcional a r.

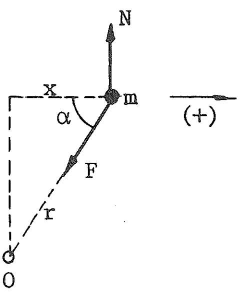
8. Considere un largo túnel de longitud 2L ($< 2R$) a través de la tierra como se muestra en la figura.



Una partícula de masa m se coloca, en reposo, en uno de los extremos del túnel. Luego la partícula se desliza, sin fricción, a través del túnel hacia el otro extremo por la acción gravitacional.

Encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, $x_{(t)}$.

D.C.L.



$x = r\cos\alpha$

La fuerza gravitacional F que actúa sobre la partícula la hemos encontrado en el problema anterior, teniendo una magnitud:

$$F = \left(\frac{GMm}{R^3}\right)r = \left(\frac{mg}{R}\right)r = kr$$

donde, $k = \left(\frac{GMm}{R^3}\right) = \left(\frac{mg}{R}\right)$, es una constante de proporcionalidad.

Aplicando la ley de Newton del movimiento, en la dirección x la fuerza F_x será,

$$F_x = - F \cos \alpha = - k\, r \cos \alpha = - kx$$

luego:

$$ma_x = F_x = - kx \Longrightarrow a_x = - \frac{k}{m} x$$

Resolviendo,

como: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{dv_x}{dx} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv_x}{dx} v_x$

queda: $v_x dv_x = - \dfrac{k}{m} x\, dx$

integrando:

$$\int_o^{v_x} v_x\, dv_x = - \frac{k}{m} \int_L^x x\, dx$$

se tiene: $\dfrac{1}{2} v_x^2 = - \dfrac{k}{m} (x^2 - L^2) \Longrightarrow v_x^2 = \dfrac{k}{m} (L^2 - x^2)$

luego, la velocidad v_x en función de x es: $v_x = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \sqrt{L^2 - x^2}$

como: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$

queda: $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, dt = \dfrac{dx}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

integrando: $\sqrt{\dfrac{k}{m}} \displaystyle\int_o^t dt = \int_L^x \frac{dx}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

se tiene: $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t = \text{arc sen } \dfrac{x}{L} \Bigg|_L^x = \text{arc sen } \dfrac{x}{L} - \dfrac{\pi}{2}$

queda: $\text{arc sen } \dfrac{x}{L} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t + \dfrac{\pi}{2}$

esto es: $\dfrac{x}{L} = \text{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t + \dfrac{\pi}{2} \right) = \cos \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t$

finalmente: $x = L \cos \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t = L \cos \sqrt{\dfrac{g}{R}}\, t$

Este es un movimiento armónico simple que estudiaremos con detalle en el capítulo de Oscilaciones. Observe que este resultado no se altera si L = R, solo varía la amplitud del movimiento.

9. Se tiene un campo de fuerza centrales cuya variación está expresada por: $F = k \frac{m}{r^n}$, donde k es una constante.

En esta expresión el exponente n es desconocido. Para determinarlo se observa el comportamiento de dos partículas sometidas a la acción de este campo de fuerzas. Las dos partículas m_α y m_β se sueltan del reposo a t = 0 en las posiciones $r_{\alpha_o} = \infty$ y $r_{\beta_o} = a$ del foco de atracción. Después de transcurrido un tiempo la partícula α llega al punto a y la partícula β llega a un punto a/4 y en ese instante se observa que ambas tienen la misma velocidad. ¿Cuánto vale n?

Aplicando radialmente la ley de Newton del movimiento para una partícula de masa m:

$$m \ddot{r} = - k \frac{m}{r^n} \implies \ddot{r} = - k \frac{1}{r^n}$$

multiplicando ambos miemtros por $\dot{r}$, se tiene:

$$\dot{r} \ddot{r} = - k \dot{r} \frac{1}{r^n} \implies \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dt} = - k \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^n} \implies \dot{r} d\dot{r} = - k \frac{dr}{r^n}$$

integrando,

$$\int_0^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = - k \int_{r_o}^{r} r^{-n} dr \implies \frac{\dot{r}^2}{2} \Bigg|_0^{\dot{r}} = - k \frac{r^{-(n-1)}}{-(n-1)} \Bigg|_{r_o}^{r}$$

queda:

$$\dot{r}^2 = \frac{2k}{(n-1)} \left(\frac{1}{r^{(n-1)}} - \frac{1}{r_o^{(n-1)}} \right)$$

. para la partícula α entre $r_o = \infty$ y $r = a$

$$\dot{r}_\alpha^2 = \frac{2k}{(n-1)} \frac{1}{a^{(n-1)}}$$

. para la partícula β entre $r_o = a$ y $r = \frac{a}{4}$

$$\dot{r}_\beta^2 = \frac{2k}{(n-1)} \left[\frac{1}{(a/4)^{(n-1)}} - \frac{1}{a^{(n-1)}} \right]$$

Como nos dicen que estas velocidades son iguales, $\dot{r}_\alpha^2 = \dot{r}_\beta^2$, se tiene que:

$$\frac{1}{a^{(n-1)}} = \frac{1}{(a/4)^{(n-1)}} - \frac{1}{a^{(n-1)}}$$

esto es:

$$\frac{2}{a^{(n-1)}} = \frac{4^{(n-1)}}{a^{(n-1)}} \Longrightarrow 2 = 4^{(n-1)} \Longrightarrow n = \frac{3}{2}$$

Observe que en realidad hemos efectuado explícitamente la integración de energía. Por lo tanto, podríamos haber planteado alternativamente conservación de energía. Veamos, considerando que $F = -\frac{dU}{dt}$, se tiene:

$$\Delta U = -\int_{r_o}^{r} F\, dr = km \int_{r_o}^{r} r^{-n} = -\frac{km}{(n-1)} \left.\frac{1}{r^{(n-1)}}\right|_{r_o}^{r} = -\frac{km}{(n-1)} \left(\frac{1}{r^{(n-1)}} - \frac{1}{r_o^{(n-1)}}\right)$$

Para la energía cinética, partiendo del reposo, se tiene:

$$\Delta K = \frac{1}{2} mv^2$$

Por conservación de energía: $\Delta K + \Delta U = 0$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{km}{(n-1)} \left(\frac{1}{r^{(n-1)}} - \frac{1}{r_o^{(n-1)}} \right) = 0$$

quedando:

$$v^2 = \frac{2k}{n-1} \left(\frac{1}{r^{(n-1)}} - \frac{1}{r_o^{(n-1)}} \right)$$

Expresión que es la misma arriba encontrada, como debe ser.
Luego, $n = \frac{3}{2}$.

10. Determinar la velocidad inicial que debe tener un proyectil lanzado verticalmente desde la superficie de la tierra para que escape de la atracción terrestre y no regrese a tierra. Despreciar la resistencia que ofrece la atmósfera e ignore cualquier otra fuerza ejercida sobre el proyectil por otro cuerpo.

La energía potencial gravitatoria del proyectil (m) sobre la superficie de la tierra (M,R), antes del lanzamiento, es:

$$U_{(R)} = -\frac{GMm}{R}$$

Para que el proyectil escape de esta atracción, debe lanzarse con una energía mayor. Por lo tanto, la velocidad inicial crítica llamada Velocidad de Escape v_e se obtendrá cuando:

$$K = U \Longrightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GMm}{R} \Longrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

o bien:

$$v_e = \sqrt{2gR}\ , \text{ donde: } g = \frac{GM}{R^2}$$

reemplazando valores se obtiene: $v_e = 11.2\text{km/s}$.

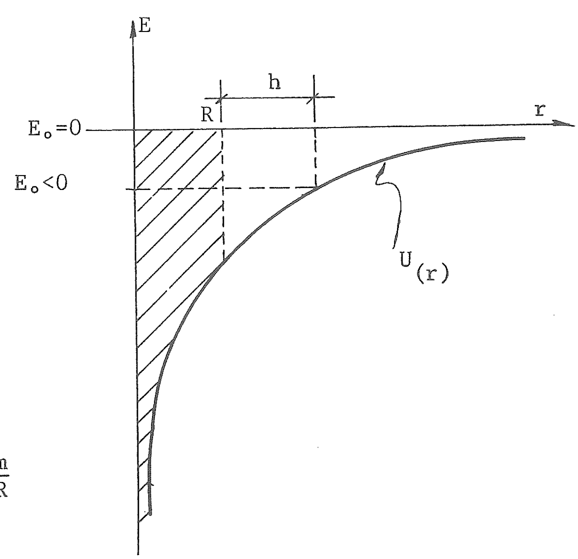
Si la velocidad inicial del proyectil es mayor que este valor escapará y si es menor regresará a la tierra.

Equivalentemente, lo mismo, podemos decirlo de otra forma.

La energía total mecánica del proyectil a una distancia r del centro de la tierra es:

$$E = K+U = \frac{1}{2} mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Del gráfico de energía podemos ver que para que el proyectil escape del potencial gravitatorio de la tierra, el proyectil tiene que tener una energía total sobre la tierra $E_o = 0$.



Luego: $$0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{Mm}{R}$$

esto es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si $v_e < 11.2\text{km/s}$, se tendrá que $E_o < 0$ y el proyectil solo alcanzará una altura h sobre la superficie de la tierra y retornará.

11. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Urano?. Se sabe que su masa y su radio son 14.7 y 4 veces, respectivamente, mayores que las de la tierra.

La gravedad en la superficie de un planeta es:

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \Longrightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

En Urano será: $g_U = \dfrac{GM_U}{R_U^2}$

Como: $M_U = 14.7M_T$ y $R_U = r\ R_T$

Se tiene: $g_U = \dfrac{G\ 14.7M_T}{16R_T^2} = \dfrac{14.7}{16}\ \dfrac{GM_T}{R_T^2}$

luego: $g_U = \dfrac{14.7}{16}\, g_T \Longrightarrow g_U = 0.919g_T$

12. Dos satélites iguales y situados diametralmente opuestos, se dejan caer sobre la tierra, partiendo del reposo desde una altura h. Los radios y masas de los satélites son cuatro veces menores que la tierra. Determinar la velocidad con la cual llegan a la superficie de la tierra.

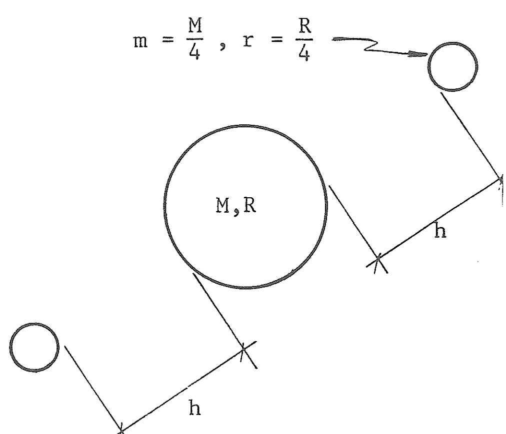
Inicialmente la energía del sistema es solamente potencial gravitatoria puesto que no hay energía cinética.

Esto es:

$$U_o = -2\frac{GMm}{h+R+r} - \frac{Gmm}{2(h+R+r)}$$

$$U_o = -2\frac{GM\frac{M}{4}}{h+R+\frac{R}{4}} - \frac{G\frac{M}{4}\frac{M}{4}}{2(h+R+\frac{R}{4})}$$

$$U_o = -\frac{GM^2}{2(h+\frac{5}{4}R)} - \frac{GM^2}{32(h+\frac{5}{4}R)}$$



$$U_o = - \frac{17\ GM^2}{32(h + \frac{5}{4} R)}$$

Cuando los satélites llegan a la tierra, la energía potencial gravitatoria del sistema es:

$$U = -2 \frac{GMm}{R + r} - \frac{Gmm}{2(R + r)}$$

$$U = -2 \frac{GM \frac{M}{4}}{R + \frac{R}{4}} - \frac{G \frac{M}{4} \frac{M}{4}}{2(R + \frac{R}{4})}$$

$$U = - \frac{GM^2}{2(\frac{5}{4} R)} - \frac{GM^2}{32(\frac{5}{4} R)}$$

$$U = - \frac{17\ GM^2}{32\ (\frac{5}{4} R)}$$

y la energía cinética con que llegan es:

$$K = 2 \frac{1}{2} mv^2$$

$$K = 2 \frac{1}{2} \frac{M}{4} v^2$$

$$K = \frac{M\ v^2}{4}$$

Igualando energías por conservación:

$$U_o = U + K$$

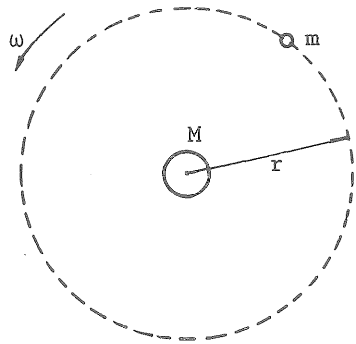
$$- \frac{17GM^2}{32(h + \frac{5}{4} R)} = - \frac{17GM^2}{32(\frac{5}{4} R)} + \frac{Mv^2}{4}$$

despejando v,

$$v^2 = \frac{17\ GMh}{8(\frac{5}{4} R)(h + \frac{5}{4} R)} = \frac{17\ GMh}{10R(h + \frac{5}{4} R)}$$

$$v = \sqrt{\frac{34\ GMh}{5R(4h + 5R)}}$$

13. Determinar la energía mecánica total de un satélite de masa m en movimiento circular de radio r alrededor de un planeta de masa M.



El satélite se mueve con velocidad angular ω, por lo tanto, la fuerza gravitatoria proporciona la aceleración centrípeta necesaria. Luego se tiene:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\,\omega^2\, r \Longrightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

Por otro lado, la energía cinética es: $K = \frac{1}{2}\, m\,\omega^2\, r^2$

De ambas expresiones, eliminando ω^2, se obtiene:

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{GMm}{r}$$

Como la energía potencial es:

$$U_{(r)} = -\frac{GMm}{r}$$

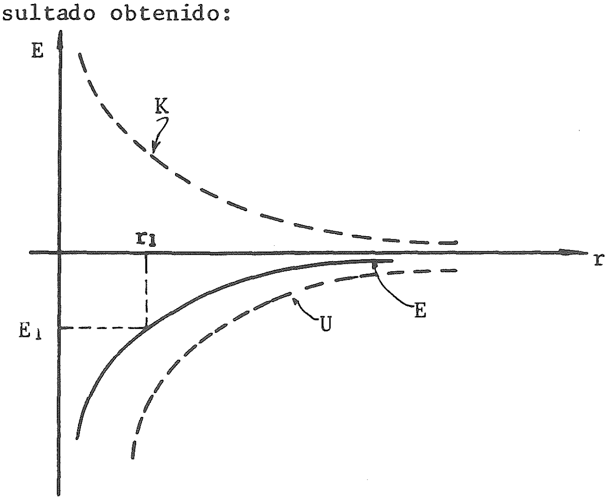
La energía mecánica total será:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{G\,Mm}{r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{1}{2}\,G\,\frac{Mm}{r}$$

Gráfica del resultado obtenido:



Observe que un satélite con una energía $E_1 < 0$ permanecerá en una órbita de radio r_1. Como hemos obtenido, y en el gráfico puede apreciarse, la energía mecánica total en este sistema es siempre negativa, $E < 0$. Por lo tanto, el satélite nunca podrá escapar de la atracción del planeta.

También note que a mayor radio r, la velocidad orbital del satélite es menor, pues se tiene:

$$K = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

14. Dos satélites de igual masa m se mueven alrededor de una planeta M, en la misma órbita circular, de radio r, pero en sentidos opuestos de rotación.

a) Encontrar la energía mecánica total del sistema. Considérese que la energía potencial entre los dos satélites es relativamente despreciable.

b) Si al encontrarse los satélites chocan inelásticamente, encontrar la energía mecánica total después del choque. ¿Qué movimiento posterior tendrán los satélites después del choque?

---

a) En el problema anterior hemos encontrado la energía mecánica total para un sistema (M + m) de un satélite:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Como son dos satélites y considerando que la energía potencial entre los dos satélites es despreciable, se tiene:

$$E_T = 2E$$

$$E_T = -\frac{GMn}{r}$$

b) Como el choque es inelástico y ambos satélites se encuentran con la misma velocidad de sentidos opuestos, la velocidad final después del choque de la masa 2m resultante, será cero $v_f=0$.
Luego, la energía cinética es también cero y la energía mecánica total será la energía potencial entre M y 2m.

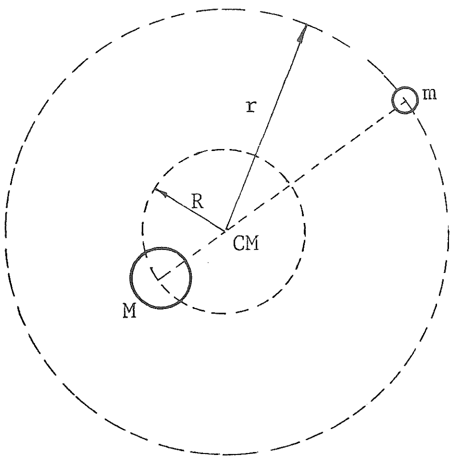
Esto es,

$$E_T = U = -\frac{GM2m}{r}$$

$$E_T = -\frac{2GMm}{r}$$

Por lo tanto, luego del choque solo se tiene la atracción del planeta a la masa 2m de ambos satélites, que serán atraídos (caerán) hacia el planeta.

15. Considere dos cuerpos esféricos homogéneos de masas m y M que se mueven en órbitas circulares de radios r y R respectivamente, debido, exclusivamente, a la interacción mutua de atracción gravitacional. Asumiendo que $M \gg m$, encontrar el período de revolución.



Sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa, solamente se tiene la fuerza interna de atracción gravitacional.
Con respecto al CM del sistema se tiene que:

$$mr = MR$$

La fuerza interna es un par de acción y reacción que actúan sobre cada cuerpo proporcionando la fuerza centrípeta que produce la aceleración radial para el movimiento circular. Siendo estas iguales, se tiene:

$$F = m\,\omega^2\,r = M\,\omega^2\,R$$

Con: mr = MR, ambos cuerpos tienen la misma velocidad angular.
La fuerza de atracción gravitacional es:

$$F = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

Con: $mr = MR$ y con: $M \gg m$, se tiene que: $R \ll r$.

Luego: $F = \dfrac{GMm}{r^2}$

La ecuación de movimiento para el cuerpo m es:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

teniéndose:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

Expresión obtenida en el problema Nº 13 para el movimiento de un satélite alrededor de un planeta fijo. Note que es independiente de la masa m.

El período de revolución será,

con: $$\frac{2\pi r}{T} = \omega r \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T},$$

se obtiene:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

Esta es la tercera ley de Kepler del movimiento planetario para órbitas circulares, donde M es la masa del Sol. (ver apéndice 1-J.Kepler).

En realidad el movimiento de los planetas alrededor del Sol son en trayectorias elípticas, pero cercanas al círculo.

Para movimientos elípticos se obtiene una expresión similar con relación al semieje mayor de la elipse como radio.

Observe que, siendo M la masa del Sol, se tiene la misma constante para todos los planetas:

$$K = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Luego:

$$T^2 = K\, r^3$$

MIGUEL PIAGGIO HENDERSON

Ingeniero Civil, Universidad Católica del Perú.
Master of Science, University of Notre Dame, Indiana, U.S.A.
Profesor de Física en la Pontificia Universidad Católica.

OTRAS OBRAS DEL AUTOR

- Física Básica (1973 y 1977).
  Fundamentos de la Mecánica de Partículas.
  L. Montestruque y M. Piaggio.

- Medidas y Errores (1974).
  Cálculo de Errores.
  Miguel Piaggio Henderson.

- Razonamiento Matemático (1979 y 1980).
  H. Medina y M. Piaggio.

- Física General II (1979).
  Teoría.
  H. Medina y M. Piaggio.

- Física General II (1979).
  Problemas.
  H. Medina y M. Piaggio.

- Física General I (1981)
  Problemas resueltos.
  H. Medina y M. Piaggio.

- Física con ejercicios (1991).
  Volumen 1
  Miguel Piaggio Henderson.

FÍSICA
con Ejercicios
se terminó de imprimir en el mes
de enero del 2001 en los talleres
gráficos de Editorial e Imprenta
DESA S.A. (Reg. Ind. 16521),
General Varela 1577,
Lima, 5, Perú.

FÍSICA con ejercicios

ÍNDICE DE MATERIAS