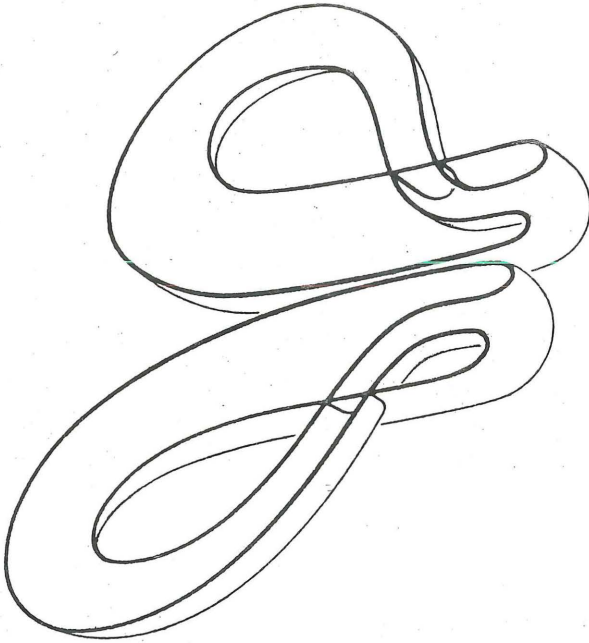


José Tola P.

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1992

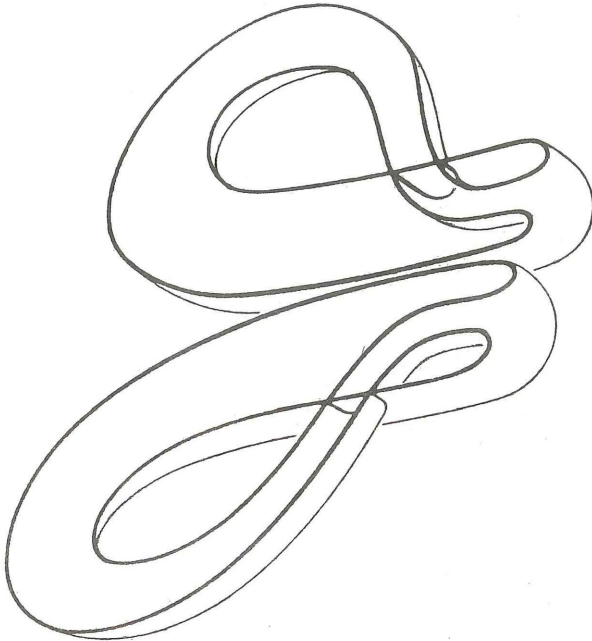
José Tola Pasquel ha tenido importante participación en la modernización de los estudios de matemáticas en nuestro país. Obtuvo el título de ingeniero civil en la Pontificia Universidad Católica del Perú y, simultáneamente, realizó estudios en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, en donde recibió el grado de doctor en Matemáticas. En dichas universidades y en la Universidad Nacional de Ingeniería, ha sido profesor de cursos de Matemáticas y de Ingeniería. Fué rector de la Universidad Católica de 1978 a 1989 y en la actualidad es Director de la Escuela de Graduados de dicha Universidad y Profesor Emérito de la Universidad de San Marcos. Es autor de numerosos trabajos y ha publicado libros dedicados al Análisis, al Álgebra Lineal y Multilineal, al Cálculo Tensorial, a la Teoría de la Elasticidad, al Cálculo de Variaciones, al Control Óptimo, etc.

La Topología constituye una parte fundamental de las Matemáticas, junto con el Análisis y el Álgebra. El presente libro tiene por objeto hacer llegar a un público relativamente extenso sus conceptos básicos, a partir de cuestiones que pudieran ser enunciadas y discutidas en términos sencillos. Son temas que tienen auténtico interés matemático y que, sin embargo, pueden ser desarrollados con conocimientos elementales hasta obtener resultados suficientemente satisfactorios sin necesidad de recurrir a un aparato técnico complicado. Se trata, además, de materias que han tenido importancia en el desarrollo histórico de la Topología, particularmente en sus aspectos algebraicos; pero que permiten introducir conceptos básicos de la Topología General.

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA

José Tola P.

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL

Primera edición, marzo de 1992

Cubierta: Carlos Cabrera Gen
Diagramación: José C. Cabrera Zúñiga
Nora Cabrera Zúñiga

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA

© Copyright 1990 por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria, cuadra 18, San Miguel. Apartado 1761. Lima, Perú. Teléfs. 626390 y 622540, anexo 220.

Derechos reservados

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Impreso en el Perú - Printed in Perú

PRESENTACION

“Pocas ramas de la Geometría se han desarrollado en nuestro tiempo tan rápida y exitosamente como la Topología; y rara vez una parte de una disciplina que en apariencia era de poca importancia, demostró luego ser tan fundamental para otros muchos dominios enteramente diferentes”.

Así se expresaba *D. Hilbert* a comienzos de este siglo, en 1932. Sus palabras se han confirmado día a día hasta el extremo de que no es exagerado decir que es imposible tener un conocimiento de lo que son las matemáticas hoy día sin una idea clara de lo que es la Topología.

Algunas nociones topológicas de interés atrajeron seriamente la atención de grandes matemáticos. Entre ellos destaca la figura del geómetra alemán *A. F. Möbius*; y luego, en otra fase del desarrollo de esa ciencia, la del matemático francés *H. Poincaré*, a quien se debe la creación y parte importante de la llamada *Topología Combinatoria*. Aparte de los dos nombrados podrían ser citados otros muchos;

PRESENTACION

“Pocas ramas de la Geometría se han desarrollado en nuestro tiempo tan rápida y exitosamente como la Topología; y rara vez una parte de una disciplina que en apariencia era de poca importancia, demostró luego ser tan fundamental para otros muchos dominios enteramente diferentes”.

Así se expresaba *D. Hilbert* a comienzos de este siglo, en 1932. Sus palabras se han confirmado día a día hasta el extremo de que no es exagerado decir que es imposible tener un conocimiento de lo que son las matemáticas hoy día sin una idea clara de lo que es la Topología.

Algunas nociones topológicas de interés atrajeron seriamente la atención de grandes matemáticos. Entre ellos destaca la figura del geómetra alemán *A. F. Möbius*; y luego, en otra fase del desarrollo de esa ciencia, la del matemático francés *H. Poincaré*, a quien se debe la creación y parte importante de la llamada *Topología Combinatoria*. Aparte de los dos nombrados podrían ser citados otros muchos;

pero sería intento vano hacer una enumeración medianamente completa.

El propósito de este libro es dar a conocer en nuestro medio, a un público relativamente extenso, la naturaleza de los temas que interesan a la Topología. En ella hay que distinguir dos partes: una de ellas hace uso principalmente de métodos algebraicos y se llama por eso Topología Algebraica o Combinatoria. La otra parte, más abstracta, tiene como objeto el estudio de los espacios topológicos y se llama Topología General.

En este libro se han introducido algunos conceptos topológicos a través de cuestiones que históricamente han tenido un papel importante en los orígenes de nuestra ciencia. Son temas que han encontrado respuesta, particularmente, en la Topología Combinatoria, pero que al mismo tiempo han motivado a la Topología General.

No obstante que, como es sabido, la matemática solo puede ser comprendida y apreciada por quienes están dispuestos a hacer un cierto esfuerzo de atención y de razonamiento, el autor ha intentado reducirlo en cuanto ha sido compatible con la brevedad, mediante explicaciones detalladas, y recurriendo constantemente al auxilio de la intuición y de los ejemplos.

El libro esta dirigido a todos aquellos que deseen tener una noción clara de las ideas que han inspirado a los fundadores de la Topología, y de los medios que pueden emplearse para tratar algunos problemas típicos. En particular puede servir a quienes han adquirido conocimientos de matemáticas durante su formación profesional. De manera particular puede ser de utilidad para maestros de matemática de educación secundaria a quienes corresponde introducir en la escuela los conceptos topológicos más elementales. A ellos está destinado de manera preferente.

INDICE

§1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES 1

LA TOPOLOGIA.	1
LA FORMULA DE EULER PARA LOS POLIEDROS.	4
EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG.	14
LA CONTINUIDAD Y LAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS.	16

§2. ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGI- CAS DEL PLANO Y DE LA ESFERA 23

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DEL PLANO DEDUCI- DAS DE LA METRICA. VECINDADES.	23
CONEXION.	27
EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN	30
DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE JORDAN PARA POLIGONOS.	32
EL PROBLEMA DE LOS DOMINIOS VECINOS.	40
EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES	45
EL TEOREMA DE LOS CINCO COLORES.	48
EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER	65

XII

§3. NOCIONES DE LA TEORIA TOPOLOGICA DE LAS SUPERFICIES 75

CARACTERISTICA DE UNA SUPERFICIE CERRADA. 75

LAS SUPERFICIES UNILATERALES. 77

LA ORIENTACION DE LAS SUPERFICIES. 80

EL HEPTAEDRO DE REINHARDT. 87

POLIGONOS TOPOLOGICOS. 89

CONSTRUCCION DE SUPERFICIES CERRADAS ORIENTABLES A PARTIR DE POLIGONOS, MEDIANTE IDENTIFICACION DE SUS LADOS. 90

CONSTRUCCION DE SUPERFICIES CERRADAS NO ORIENTABLES A PARTIR DE POLIGONOS, POR IDENTIFICACION DE SUS LADOS. 96

§4. CLASIFICACION TOPOLOGICA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS 103

OBJETO DE LA CLASIFICACION TOPOLOGICA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS 103

LA NOCION TOPOLOGICA DE SUPERFICIE CERRADA. 104

ESQUEMA PLANO POLIGONAL Y REPRESENTACION SIMBOLICA DE UN POLIEDRO. 107

REDUCCION A LAS FORMAS NORMALES.	116
CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS ACERCA DE LA REDUCCION DE LOS POLIEDROS A FORMAS NORMALES	133
CARACTERISTICAS Y ORIENTABILIDAD DE POLIEDROS Y SUPERFICIES CERRADAS	139
TEOREMA PRINCIPAL DE LA TOPOLOGIA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS.	143
GENERO Y NUMERO DE CONEXION DE UNA SUPERFICIE CERRADA ORIENTABLE	144

§ 1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

1. LA TOPOLOGIA.

No es difícil observar que existen propiedades de las figuras del espacio ordinario que subsisten cuando son sometidas a una deformación que, sin intentar definir en forma rigurosa, puede describirse de la siguiente manera intuitiva. Dada una figura del espacio, una superficie esférica por ejemplo, podemos imaginárla hecha de un material elástico, jebe por ejemplo, de modo que puede ser sometida a un cambio de forma tal que no sufra rotura, que puntos muy vecinos sigan siéndolo después de la deformación y que cada punto mantenga su individualidad sin confundirse con otro, no obstante que las distancias mutuas entre los puntos de la superficie puedan experimentar cambios sustanciales. Así, la figura 1(a) representa a la esfera en su estado inicial. En ella se ha trazado un círculo máximo. En la figura 1(b) se pre-

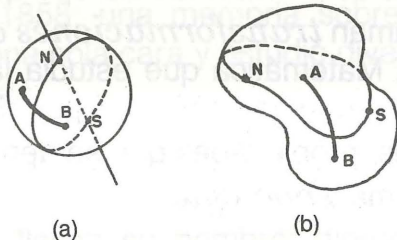


Figura 1

senta la superficie después de la deformación. Es claro que muchas de las propiedades de los puntos de la esfera no se cumplen sobre la superficie en la que ha cambiado. Sin embargo, puede observarse que subsiste la propiedad del círculo máximo, de dividir a la superficie en dos regiones tales que un camino sobre la superficie, que conduzca de un punto de una de las regiones a un punto de la otra, corta necesariamente al círculo en el primer caso, y a la

curva en que se transforma, en el segundo. Podemos observar también que no es posible llevar a cabo una deformación de la esfera, de la naturaleza descrita,

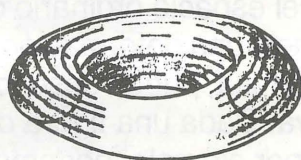


Figura 2

para obtener la superficie de la figura 2, que se conoce con el nombre de *toro*.

Las deformaciones del tipo que hemos considerado se llaman *transformaciones continuas*; y la parte de la Matemática que estudia las propiedades de las figuras, que no se pierden por efecto de tales deformaciones, propiedades que se denominan *topológicas*, se llama *Topología*.

La Topología ha alcanzado un desarrollo extraordinario en el presente siglo. Al lado del Álgebra y el Análisis, con los cuales tiene profundas relaciones, constituye

uno de los pilares fundamentales de la Matemática. En el pasado, fueron conocidas algunas proposiciones topológicas de considerable interés pero que constituyeron tan solo curiosidades que no fueron suficientes para poner en evidencia la importancia que más tarde se descubrió en ellas.

La relación que existe entre el número de vértices y el de caras de un poliedro, a la que después nos referiremos, constituye una importante propiedad topológica descubierta por *Descartes* en 1640 y redescubierta y empleada por *Euler* en 1752. También se debe a *Euler*, la solución de otro problema topológico clásico: el problema de los *Puentes de Königsberg*, que también expondremos más tarde.

Recién a mediados del siglo XIX, independientemente uno del otro, el astrónomo *J.B. Listing* publicó en 1847, por sugerencia de *Gauss*, su pequeño libro *Vorstudien zur Topologie*; y el gran geómetra *A.F. Möbius* comunicó a la Academia de Ciencias de París en 1858, una memoria sobre las superficies que tienen una sola cara y estudió diversas proposiciones topológicas.

Los aportes de *Riemann* a la Teoría de las Funciones de Variable Compleja y, en particular, la invención de las superficies que llevan su nombre, dieron un notable impulso a la Topología.

En los comienzos del presente siglo, el ilustre mate-

mático francés *Henri Poincaré*, puso las bases de la llamada *Topología Combinatoria o Algebraica*. Después de él, quienes también han contribuido a hacer de la Topología uno de los campos más desarrollados de la Matemática, son muchos e importantes. Al respecto puede recurrirse a los libros de Historia de la Matemática.

2. LA FORMULA DE EULER PARA LOS POLIEDROS.

Una figura como la adjunta, formada por dos triángulos del plano que sólo tienen un lado en común, constituye una *red triangular*. Los triángulos se llaman *mallas* o *caras* de la red; y los lados y los vértices, *lados* y *vértices* de la red.

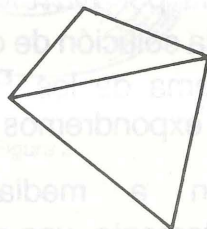


Figura 3

Si designamos por V al número de vértices, por L al número de lados y por M al número de mallas, se observa que se cumple la ecuación

$$V - L + M = 1. \quad (2.1)$$

Si a los triángulos de la figura 3 se les agrega un nuevo triángulo (figura 4) que tiene en común con los dos primeros sólo un lado de alguno de ellos, el número

de vértices de la red aumenta en 1, el de lados en 2 y el de mallas en 1. Por tanto, los números de vértices, lados y mallas de la nueva red son, respectivamente, $V_1 = V + 1$, $L_1 = L + 2$, $M_1 = M + 1$. Se cumple entonces que

$$V_1 - L_1 + M_1 = 1, \quad (2.2)$$

ecuación enteramente análoga a la (2.1).

Por inducción se prueba sin dificultad que (2.1) y (2.2) son casos particulares de una propiedad general, a

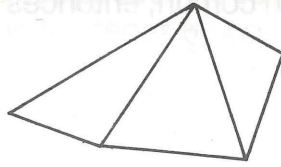
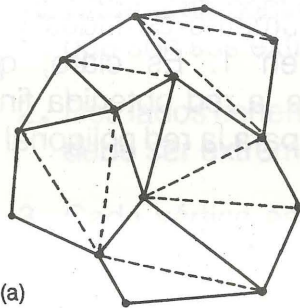
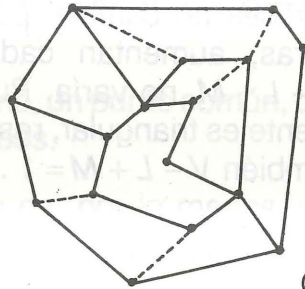


Figura 4



(a)



(b)

Figura 5

saber que si V , L , M , son los números de vértices, lados y mallas de una red triangular cualquiera que goza de la propiedad de que los triángulos que la forman, o no

tienen puntos comunes, o tienen a lo más un vértice o un lado en común, entonces dichos números satisfacen a la ecuación (2.1).

Consideremos ahora una red tal como la representada en líneas llenas en la figura 5(a), que está formada por *polígonos simples convexos*⁽¹⁾ cualesquiera, pero que cumplen condiciones análogas a las que satisfacen los triángulos de la red triangular antes considerada. Esta red de polígonos convexos podemos convertirla en una red triangular añadiendo a los lados que componen la red las diagonales que parten de uno de los vértices de cada una de las mallas que no son triangulares (fig.5(a)).

Designemos por V , L y M , los números de vértices, lados y mallas de la red poligonal considerada y observemos como cambian estos números cada vez que se agrega una diagonal. Se nota que el número de vértices no cambia, pero los números de lados y de caras, aumentan cada cual en 1. Es claro, que $V - L + M$ no varía. Puesto que la red obtenida finalmente es triangular, resulta que para la red poligonal es también $V - L + M = 1$.

(1) Polígono *simple* es aquel que limita a una región (interior) cuya frontera resulta por transformación continua de una circunferencia. *Convexo* es aquel para el que, dados dos puntos cualesquiera de dicha región pueden unirse por un segmento de recta contenido en ella.

Podemos considerar aún una clase de redes más general, en la que los polígonos pueden no ser convexos y en la que dos de ellos pueden tener en común varios lados y varios vértices (figura 5(b)). Una red de esta clase puede transformarse en otra de la clase precedente si, como se ve en la figura, a partir de cada vértice de cada ángulo entrante, de cada cara, se agrega un nuevo lado de la red que sea diagonal de dicha cara. Puede observarse que para cada lado nuevo, la suma $V - L + M$ sigue invariable. Por consiguiente, también se cumple en esta red que

$$V - L + M = 1 .$$

Por tanto, las redes que aquí consideramos son definidas mediante un número finito de puntos o *vértices* y de segmentos de recta o *lados*, dados en el plano, que cumplen las siguientes condiciones:

1. Cada lado contiene exactamente a dos vértices que son sus extremos.
2. Dos lados tienen, a lo sumo, un punto común, que debe ser extremo de ambos.
3. Cada vértice es extremo de, por lo menos, dos lados.
4. Cada dos vértices pueden unirse por una línea poligonal continua, formada por lados de la red.

De lo dicho se deducen consecuencias más interesantes. Consideremos un poliedro cuya superficie es tal,

que puede convertirse por deformación "continua" en la superficie de una esfera. A tales poliedros los llamamos *simples*. Por ejemplo, son simples los poliedros regulares, pero nos pondremos en el caso general de poliedros arbitrarios. Si suponemos que el poliedro es hueco y que su superficie está formada por una delgada mem-

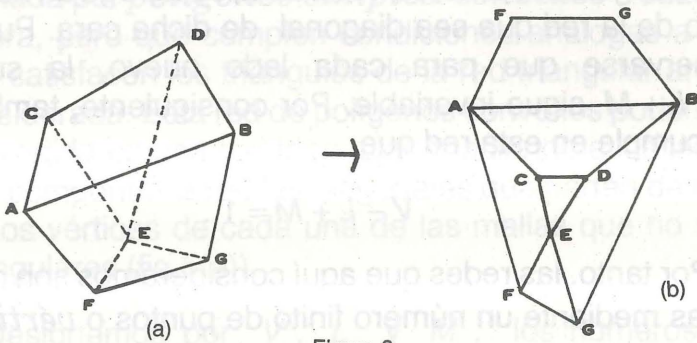


Figura 6

brana elástica, podemos imaginar que cortamos la superficie a lo largo de todos los lados, menos uno, de una de las caras del poliedro, de manera que podemos deformarla continuamente, hasta aplicarla en el plano para formar una red poligonal. En el ejemplo de la figura 6(a) se supone que han sido cortados los lados AF , FG , y GB de la cara $ABFG$ del exaedro $ABCDEFG$. En la figura 6(b), aparecen las caras deformadas y aplicadas en el plano. Es claro que en ese proceso las caras se transforman en las mallas de la red, las aristas en lados de la red, y los vértices, en vértices de la red. Pero en tanto que el número de las mallas es igual al de las caras del poliedro, el número de lados es igual al número de aristas más $n - 1$, donde n es el número de lados

de la cara cuyos lados fueron cortados; y el número de vértices, es el número de vértices del poliedro más $n - 2$. Por tanto, si V es el número de vértices del poliedro, A el número de sus aristas y C el número de sus caras, la red poligonal que resulta tendrá $V + (n - 2)$ vértices, $A + (n + 1)$ lados y C caras. Según lo establecido precedentemente, será

$$V + (n - 2) - (A + (n - 1)) + C = 1,$$

o sea

$$V - A + C = 2 \quad (2.3)$$

Es decir que el número de vértices de un poliedro simple, menos el número de sus aristas, más el número de sus caras, es igual a 2.

La fórmula (2.3) se llama *fórmula de Euler para los poliedros*. Esta relación se cumple aún cuando el poliedro experimente una deformación continua "cualquiera". Se trata pues de una propiedad topológica que ha sido objeto de una amplia generalización, para lo que ha sido necesario precisar rigurosamente los conceptos empleados, abstraer las propiedades que intervienen y profundizar las nociones de continuidad, de transformación continua, y otras más.

Un resultado imprevisto de la fórmula de *Euler*, es la demostración de que existen sólo cinco poliedros regulares; que son los cinco *cuerpos platónicos*, conocidos de los antiguos matemáticos griegos. La prueba es sencilla y podemos presentarla aquí.

Supongamos que el poliedro regular que consideramos tiene C caras, cada una de las cuales es un polígono regular de n lados, y que en cada uno de sus vértices concurren r aristas. Como cada arista está en dos caras, si A es el número de aristas, se cumple que

$$nC = 2A.$$

Además, por tener cada arista dos vértices, si V es el número de vértices, entonces

$$rV = 2A.$$

De la fórmula de *Euler* se deduce entonces que

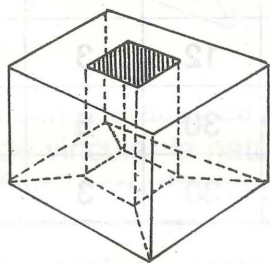
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}. \quad (2.4)$$

Observemos que tanto n como r deben ser mayores que 2 porque un polígono tiene, necesariamente, más de dos lados; y en un vértice de un poliedro concurren, por lo menos, tres aristas. Además, resulta de (2.4) que debe ser $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$; luego n y r no pueden ser ambos mayores que 3. Si no, tendríamos $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, lo que es imposible. Por consiguiente, o bien es $n = 3$ o bien es $r = 3$.

Si $n = 3$, es decir, si las caras son triángulos, la fórmula (2.4) permite escribir

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Puesto que $\frac{1}{A} > 0$, se deduce que debe ser $r < 6$, y por consiguiente r sólo puede tener los valores 3, 4 y 5, a los cuales corresponden para $A = \frac{6r}{6-r}$ los valores 6, 12 y 30, respectivamente; y para $C = \frac{2A}{n}$ los valores 4, 8 y 20. Son, por lo tanto, el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*.



Toro

Figura 7

Si suponemos ahora que $r=3$, se obtiene de manera semejante que n sólo puede tomar los valores 3, 4 y 5, a los que corresponden los valores 6, 12 y 30 de A , y los valores 4, 6 y 12 de $C = \frac{2A}{n}$. Los poliedros que resultan son, por tanto, el *tetraedro*, el *cubo* y el *dodecaedro*.

Queda probado así que *sólo hay cinco poliedros regulares. Son ellos los cinco cuerpos de Platón*, que fueron conocidos de los antiguos matemáticos griegos. En el cuadro siguiente, se resumen los resultados obtenidos.

Poliedros regulares	C	V	A	n	r
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

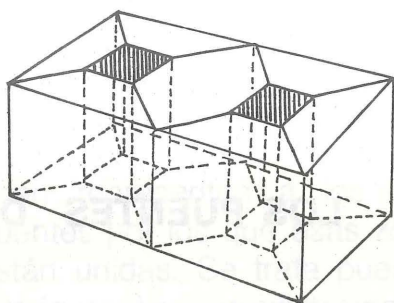
La fórmula de *Euler* se cumple para aquellos poliedros que, como es el caso de los poliedros regulares, pueden deformarse hasta convertirse en una esfera o en otra superficie simple. No se cumple, en cambio, para los poliedros que por deformación continua se transformen en una superficie tal como un *toro*, (figura 7) o un *doble toro* (figura 8).

Para el primero, se tiene $V = 6$, $A = 32$, $C = 16$. Luego

$$V - A + C = 0 \quad (2.5)$$

Para el segundo, es $V = 28$, $A = 58$, $C = 28$, y por tanto

$$V - A + C = -2 \quad (2.6)$$



Doble Toro

Figura 8

Las consideraciones precedentes sugieren la posibilidad de vincular la naturaleza y la clasificación de las superficies cerradas con la relación, análoga a la fórmula de *Euler*, que se cumple entre los números de vértices, aristas y caras de los poliedros que se transforman en ellas por deformación continua. Acerca de este tema, trataremos después.

Conviene que introduzcamos ahora la idea de *redes sobre superficies*, de manera semejante a la de las redes sobre el plano. La diferencia principal es que ahora, los lados de la red serán arcos de curvas continuas y no segmentos de recta. Si un poliedro se transforma en una superficie por deformación continua, sus lados, aristas y caras se transforman en los vértices, lados y caras de una red sobre la superficie, de manera

que la relación que se cumple entre los números de esos elementos para el poliedro, se cumplirá también para la red sobre la superficie. Volveremos a este tema, cuando tratemos acerca de la clasificación de las superficies cerradas.

Problemas como el que hemos considerado y otros semejantes, han dado origen a la parte de la Topología que recibe el nombre de *Topología Combinatoria*.

3. EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG.

Euler prestó atención a un problema aparentemente fútil, pero en el que reconoció el germen de una doctrina geométrica en la que la naturaleza de las cues-

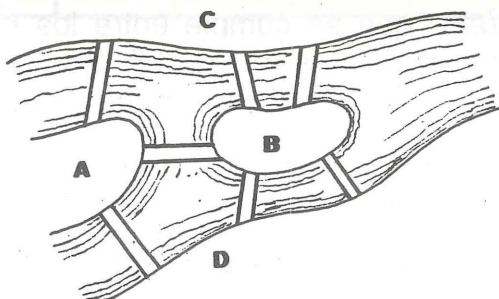


Figura 9

iones difiere de la que es propia de la geometría de los matemáticos griegos.

El problema es el siguiente. La ciudad de Königsberg está situada en la desembocadura del río Pregel. Entre las orillas del río y las islas que forma, hay siete puentes (figura 9). Se plantea entonces el problema de llevar a cabo un recorrido en que, debiéndose pasar por todos los puentes, sólo se pase una vez por cada uno de ellos.

En la figura 10, el problema queda esquematizado: Los puntos A , B , C y D , representan a las zonas de tierra de los mismos nombres en la figura 9, y las curvas y segmentos que los unen representan a los siete puentes por los que esas zonas están unidas. Se trata pues de averiguar si es que existe una manera de hacer un recorrido continuo a lo largo de las líneas de ese diagrama, de manera que todos los tramos sean pasados una sola

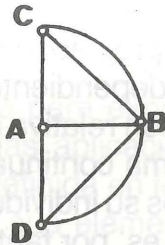


Figura 10

vez. *Euler* probó que dicho recorrido no es posible, es decir que para recorrer todos los puentes es preciso pasar dos veces, por lo menos, alguno de ellos. Su razonamiento fue sencillo. Supongamos que ese recorrido exista. En tal caso comenzará en alguno de los cuatro vértices A , B , C , D y terminará en otro de ellos, que puede coincidir con el primero. En todo caso, habrá necesariamente dos vértices que serán de paso; es decir, a los cuales se llegará y de los cuales habrá que salir, porque aquellos que no cumplen con esa condición sólo pueden ser el de partida y el de llegada. Si consideramos uno cualquiera de los vértices de paso,

por cada llegada a él debe haber una salida de él, y como cada línea sólo puede ser recorrida una sola vez, en tal punto de paso debería concurrir un número par de tramos. Ahora bien, en la figura 10 puede observarse que en cada uno de los vértices concurre un número impar de tramos. Por tanto, ninguno de ellos puede ser de paso en un trayecto en que cada tramo sea recorrido exactamente una vez. El trayecto con las condiciones exigidas es pues imposible.

La propiedad que hemos reconocido en la figura 10, es independiente de la forma de los arcos y de la posición relativa de los vértices; y subsiste cuando se le deforma continuamente, manteniendo cada uno de los puntos su individualidad. La propiedad que se ha encontrado es, por tanto, una propiedad topológica.

4. LA CONTINUIDAD Y LAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS.

En las secciones precedentes hemos recurrido a las nociones de deformación y de continuidad, sin pretender definir las con rigor, contentándonos con ideas intuitivas. Tal cosa no es satisfactoria desde el punto de vista matemático. De esa manera no es posible lograr establecer resultados cuyo alcance esté perfectamente precisado. Con el fin de avanzar algo en la dirección exigida por el rigor lógico, conviene que nos acerquemos a la noción matemática de *continuidad* y de *transformación topológica*.

Previamente, se requiere la noción de *aplicación*

de un conjunto A en un conjunto B .

Existe una aplicación del conjunto A en el conjunto B si a cada elemento p de A , le corresponde un determinado elemento p' de B . Habitualmente, una aplicación recibe un nombre que permite identificarla. Podemos usar, por ejemplo, la letra f para denominarla, y escribimos $f:A \rightarrow B$ para expresar que f es una aplicación de A en B . Al elemento p' que corresponde a p por la aplicación f lo designamos por $f(p)$ y escribimos por esa razón $p' = f(p)$, y también $p \rightarrow p'$.

La noción de continuidad se emplea para expresar una propiedad que puede ocurrir en las aplicaciones entre conjuntos A y B en los que es definida en forma precisa la noción de proximidad entre sus elementos. No necesitamos esforzarnos en inventar tales conjuntos porque los tenemos a mano: son, por ejemplo, los conjuntos de puntos del espacio en los que la proximidad se expresa en términos de distancia. Más conveniente aún es considerar dos conjuntos A y B de puntos del plano.

Debemos tener presente que lo que diremos será aplicable, con pocas modificaciones, si se trata de conjuntos de puntos del espacio.

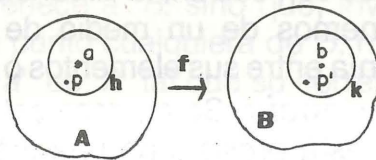


Figura 11

Imaginemos pues en el plano dos conjuntos de pun-

tos A y B y una aplicación $f:A \rightarrow B$. Diremos que f es *continua*, si dado un círculo cualquiera k cuyo centro es el punto $b = f(a)$ de B , existe un círculo h de centro en el punto a de A tal que para todo punto p de A situado en él, su correspondiente $p' = f(p)$ está situado dentro de k .

Por lo tanto, cuanto más cerca esté p de a tanto más cerca de b estará $f(p)$. Esta es la definición clásica de la continuidad en el caso de aplicaciones entre conjuntos del plano. Por sencilla que pueda parecer, fue claramente formulada por el matemático francés *Cauchy* recién en 1821, fecha que determinó por ese motivo y por otros conceptos introducidos por él, un cambio revolucionario en la matemática, que contribuyó al desarrollo del proceso que la ha conducido al estado de desarrollo actual.

La noción de continuidad que hemos enunciado, y con la cual es necesario familiarizarse, la hemos dado para una aplicación entre conjuntos del plano. Aprovechamos con ese fin, la circunstancia de que en el plano disponemos de un medio de estimar la vecindad o cercanía entre sus elementos o puntos, que es la noción de *distancia*. Se expresa este hecho diciendo que el plano está provisto de una métrica, o bien que es un *espacio métrico*. También son espacios métricos, la recta y el espacio ordinario. Podemos adelantar ahora, sin mayores detalles, que hay otras maneras de introducir una noción de cercanía o vecindad en conjuntos de elementos que no son puntos de la recta, del plano

ni del espacio ordinario de tres dimensiones.

La continuidad que hemos definido para una aplicación entre puntos del plano, se extiende sin dificultad a las aplicaciones entre conjuntos de puntos del espacio: basta reemplazar los círculos, por esferas. El lector podrá con poco esfuerzo, formular la nueva definición.

Para llegar a precisar la idea de propiedad topológica, debemos dar un paso más para definir lo que es una *transformación topológica* de un conjunto de puntos A del espacio en un conjunto B del mismo; o como también se dice, un *homeomorfismo* de A y B .

Una aplicación $f:A \rightarrow B$, donde A y B son conjuntos de puntos del espacio, es una *transformación topológica*, si cumple las dos condiciones siguientes:

1. *La correspondencia que se establece entre los conjuntos A y B , es biunívoca.* Significa esto no solamente que a cada punto a que está en A le corresponde un punto bien determinado $b = f(a)$ que pertenece a B , sino que, inversamente si b' es un punto cualquiera de B , hay un punto y sólo uno a' de A tal que su correspondiente $f(a')$ es b' . De esa manera, es definida una nueva aplicación que se llama *inversa* de f y se designa por f^{-1} tal que $f(a) = b$ equivale a $f^{-1}(b) = a$.

2. *Las dos aplicaciones f y f^{-1} son conti-*

nuas. Se expresa esta condición diciendo que f es continua en las dos direcciones, o bien que es *bicontinua*. Por consiguiente, podemos pensar que cuando el punto p de A se acerca hacia a , p' se acerca a b , e inversamente, si p' se mueve hacia b , su correspondiente p se acerca hacia a . Se dice entonces, que A y B son *topológicamente equivalentes u homeomorfos*.

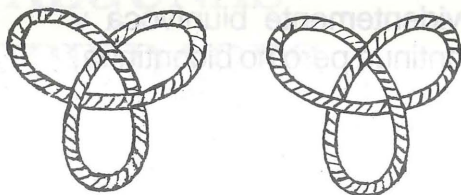
Si un conjunto de puntos, o una figura A del espacio, posee una propiedad que se cumple para cualquier figura B que es correspondiente o *imagen* de A , por una transformación topológica cualquiera, se dice que se trata de una *propiedad topológica*.

Según ya dijimos, la *Topología* es la rama de la matemática, que estudia las propiedades topológicas de las figuras.

Esta definición es aún restringida, porque está referida a figuras del plano o del espacio. La *Topología*, propiamente dicha, estudia las propiedades que no cambian por transformaciones que tienen lugar entre espacios en los que no necesariamente existe una noción de distancia, si bien sí existe una manera de determinar la cercanía o proximidad de los elementos. Tales conjuntos se llaman *espacios topológicos*. De ellos no es posible tratar en esta ocasión.

La transformación topológica de una figura del espacio en otra, no siempre es posible materializarla median-

te una deformación continua como las que antes hemos descrito. Así, por ejemplo, los dos nudos de la figura adjunta, son topológicamente equi-



valentes entre sí, y con un anillo circular. No obstante, no es posible aplicar al uno sobre el otro por una deformación continua, ya que para ese fin es necesario cortar previamente a uno de ellos.

Las propiedades topológicas de las figuras, tales como las expresadas por la fórmula de *Euler* de los poliedros, o la del problema de los puentes de Königsberg, son del mayor interés desde el punto de vista de muchas investigaciones y estudios matemáticos. En cierto modo constituyen las propiedades geométricas más sencillas y fundamentales, porque son aquellas que no desaparecen por drásticos que sean los cambios de forma a los que se sometan las figuras.

Antes de pasar a otro tema, observaremos que una transformación de una figura en otra, puede ser continua y biunívoca sin ser bicontinua; es decir, sin ser topológica, debido a que su inversa no es continua. Un ejemplo muy simple es la transformación del conjunto de puntos del segmento AB sin su extremo B (figura 12), cuando es deformado hasta transformarlo en una circunferencia; juntando sus extremos A y B , en el punto C . Se nota que la aplicación que a cada punto p le asigna el punto

p' en que se transforma, es evidentemente biunívoca y continua pero no bicontinua, porque la transformación inversa no es continua en C ya que al acercarse el punto p' a C , su correspondiente p en el segmento AB no se acerca hacia ningún punto del conjunto considerado pues no le pertenece el punto B .

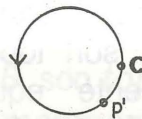
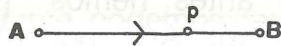


Figura 12

§ 2. ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DEL PLANO Y DE LA ESFERA

5. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DEL PLANO DEDUCIDAS DE LA METRICA. VECINDADES.

El plano puede concebirse como un conjunto de elementos o puntos tales que a cada par de ellos le corresponde un número positivo, si son distintos; y el número cero, si son iguales. Ese número es la *distancia* entre los puntos, y posee dos propiedades que son de la mayor importancia, no obstante su sencillez. La primera es que es el mismo, cualquiera que sea el orden en que dichos puntos sean considerados. Si la distancia de dos puntos A y B la representamos por $d(A, B)$ la mencionada propiedad se puede expresar mediante la ecuación

$$d(A, B) = d(B, A).$$

La segunda propiedad es la expresión del teorema de geometría que establece que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo, es mayor o igual que

la longitud del tercer lado. Si los vértices se designan por A , B y C , la propiedad que acabamos de señalar se expresa mediante la desigualdad

$$d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$$

que se acostumbra llamar *desigualdad triangular*.

Una noción fundamental en el estudio de la topología del plano, es la noción de *vecindad* de un punto.

Sea A un punto cualquiera del plano. A cada número positivo r le corresponde un círculo con centro A y radio r . Llamaremos *vecindad circular* del punto A , a cada uno de los conjuntos formados por todos los puntos del *interior* de cualquiera de esos círculos.

Así por ejemplo (figura 13), el punto P pertenece a la vecindad circular de radio r del punto A , y el punto Q no pertenece a ella. Puede decirse también, que cada vecindad circular de A está formada por los *puntos interiores* de cada círculo de centro A .

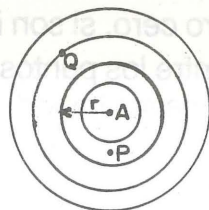


Figura 13

Se observa que todo punto P perteneciente a la vecindad circular de radio r de A , tiene una distancia de A que es menor que r . Por tanto P pertenece a la vecindad circular de A , de radio r ; si y sólo si se cumple

que

$$d(P,A) < r.$$

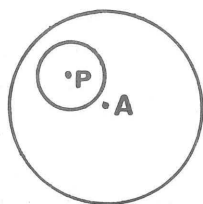


Figura 14

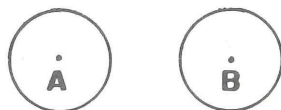


Figura 15

Algunas propiedades sencillas son:

1. Si P pertenece a una vecindad de A , existe una vecindad de P , que está contenida en la vecindad de A (figura 14).
2. Dados dos puntos diferentes A y B , existen vecindades de ellos, sin puntos comunes (figura 15).
3. Si P es un punto que pertenece a la intersección de una vecindad de A con una vecindad de B ; existe una vecindad de P , que está conteni-

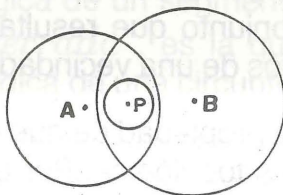


Figura 16

da en dicha intersección (figura 16).

Propiedades como las que hemos señalado son importantes para profundizar en la noción de proximidad y en el estudio de las propiedades topológicas de las figuras del plano. Por un proceso de abstracción que aquí no es posible describir, esas propiedades pueden utilizarse para definir el concepto de *espacio topológico*.

En esta breve reseña nos limitaremos a señalar dos clases de conjuntos del plano que tienen gran importancia en la Topología.

Se dice que un conjunto de puntos del plano es *abierto* si contiene, para cada uno de sus puntos, a una vecindad del mismo. Es fácil reconocer que las vecindades circulares que hemos definido, son ejemplos de conjuntos abiertos.

Decir que un conjunto de puntos del plano es *cerrado*, significa que el conjunto de los puntos del plano que no le pertenecen, es un conjunto abierto. Por ejemplo, el conjunto que resulta al excluir del plano todos los puntos de una vecindad circular cualquiera, es cerrado.

La propiedad de que un conjunto sea abierto o cerrado, es topológica. Por el contrario, la propiedad de ser una vecindad circular, no lo es. Por esta razón, la noción de vecindad circular se amplía conviniendo en que *vecindad* de un punto, es cualquier conjunto que contiene alguna vecindad circular de dicho punto. Lo dicho se

extiende, sin dificultad, al espacio de tres dimensiones de la geometría usual. Para cada uno de sus puntos, las *vecindades esféricas* son las esferas o *bolas abiertas* que lo tienen por centro. Se cumplen entonces propiedades análogas a las que tienen las vecindades circulares de los puntos del plano, y pueden definirse nociones tales como las de conjunto abierto, conjunto cerrado o continuidad de funciones, en alguna región del espacio.

Podemos observar, por último, que las mismas ideas pueden aplicarse al espacio de una dimensión, es decir, a la línea recta. Las vecindades de un punto cualquiera de la recta son los segmentos que lo tienen por centro, excluidos sus extremos.

6. CONEXION.

La definición de una curva plana continua excede los propósitos de esta exposición, razón por la cual, sólo daremos una noción intuitiva al respecto. Podemos admitir que una *curva simple abierta*, es la que resulta por una transformación topológica de un segmento de recta; y una *curva simple cerrada*, es la que se obtiene por deformación topológica de una circunferencia.

Un conjunto de puntos del plano es *conexo*, si dados dos cualesquiera de sus puntos A y B , existe una curva continua contenida en el conjunto dado y que tiene por extremos los puntos A y B . Ejemplos familiares de conjuntos conexos son: un círculo, un triángulo, un

cuadrado, un semiplano, un segmento, una línea recta, etc. La propiedad de ser conexo no se pierde por una transformación topológica; es por tanto una propiedad topológica. Un conjunto que es la unión de dos círculos sin puntos comunes, es ejemplo de un conjunto no conexo. No ser conexo es también, naturalmente, una propiedad topológica.

Vamos a tratar ahora acerca del *orden de conexión* de los conjuntos. Los dos conjuntos que aparecen rayados en la figura 17 no son topológicamente equivalentes, desde que no existe una transformación topológica que aplique uno de ellos sobre el otro. Una diferencia esencial entre

ambos conjuntos es la siguiente: si consideramos una curva simple cerrada contenida en el primero (figura 17(a)), es inmediato reconocer que puede deformarse, contrayéndose continuamente, sin dejar de estar íntegramente en el conjunto, hasta reducirse a un único punto del mismo. Cuando un conjunto del plano satisface esa condición para cada curva cerrada contenida en él, se dice que es *simplemente conexo*. En cambio, el dominio (b) que está comprendido entre dos

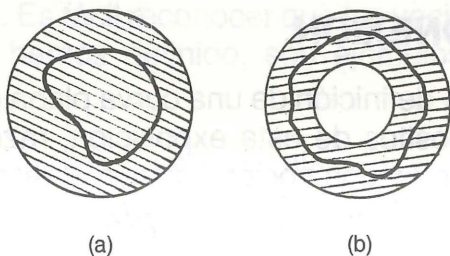


Figura 17

deformarse, contrayéndose continuamente, sin dejar de estar íntegramente en el conjunto, hasta reducirse a un único punto del mismo. Cuando un conjunto del plano satisface esa condición para cada curva cerrada contenida en él, se dice que es *simplemente conexo*. En cambio, el dominio (b) que está comprendido entre dos

círculos concéntricos, no es simplemente conexo, pues la curva que ahí aparece dibujada no puede deformarse hasta reducirse a un punto, sin que alguno de sus puntos tenga necesariamente que salir del dominio: uno de ellos deberá coincidir con el centro de los círculos en el proceso de deformación.

Una notable propiedad de algunos dominios del plano, es la de ser simplemente conexos.

Los dominios que no son simplemente conexos, se llaman *múltiplemente conexos*.

Un dominio como el de la figura 17(b), u otro que le sea topológicamente equivalente, presenta lo que podemos llamar un "agujero". Puede ser convertido en un dominio simplemente conexo, si se le corta en la forma que se aprecia en la figura 18.

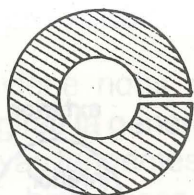


Figura 18

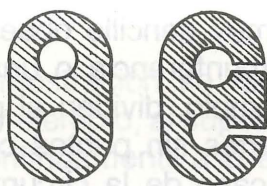


Figura 19

Podemos construir dominios con dos o más agujeros (figura 19), que pueden volverse simplemente conexos, mediante dos o más cortes.

Si un conjunto requiere $n - 1$ cortes, que no se atraviesen y que sean de borde a borde, para convertirse en simplemente conexo, se dice que tiene *conexión de orden n* , o que es *conexo de orden n* .

Puede verse también que el orden de conexión de un conjunto de puntos del plano, depende de una cierta propiedad de su *complemento* (conjunto de puntos del plano, que no están en dicho conjunto). Al efecto, se define una *componente conexa* de un conjunto dado, como toda parte conexa que no está contenida en ninguna otra parte conexa, salvo ella misma. Puede observarse en los conjuntos considerados en esta sección, que *el orden de conexión de un conjunto es igual al número de componentes conexas de su complemento*.

7. EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Es muy sencillo observar que una circunferencia o una elipse, por ejemplo, dividen al plano en dos partes sin puntos comunes. En el caso de la circunferencia, una está formada por los puntos cuya distancia al centro es menor que el radio; y la otra, por aquellos cuya distancia al centro, es mayor. La primera es el dominio interior; la segunda, el dominio exterior.

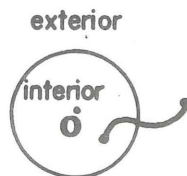


Figura 20

Si definimos una *curva simple cerrada* como la imagen de una circunferencia por una transformación topológica, puede presumirse que divide al plano en dos partes; una interior y otra exterior, sin puntos comunes. Sin embargo, las curvas pueden ser muy complejas por lo que la demostración de la propiedad, se complica. El matemático francés *Camille Jordan* (1838-1922) fué el primero en enunciar el teorema que establece dicha propiedad. La demostración que dió, sumamente larga y compleja, resultó defectuosa. La primera demostración correcta se debió al matemático norteamericano *O. Veblen* en 1905. Otra, fue dada por el matemático holandés *L.E.J. Brouwer* en 1909; y una más por el matemático norteamericano *J.W. Alexander* en 1922.⁽¹⁾ La dificultad de la demostración se debe a la generalidad del concepto de curva simple cerrada, así como a que conceptos tan evidentes para la intuición como los de interior y exterior, requieren ser rigurosamente precisados.

Conviene notar que la demostración se facilita al restringirse la generalidad. Por ejemplo, al suponer curvas cuyas tangentes varían continuamente a lo largo de ellas, o bien líneas poligonales, en vez de las curvas simples cerradas a las que nos hemos referido. Resulta interesante e instructiva, la demostración del teorema

(1) La demostración de Alexander puede verse en el libro de M. H. Newman. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge at the University Press, (1939).

de *Jordan* cuando la curva simple cerrada es "reemplazada" por una línea poligonal cerrada, es decir, un polígono; por lo que la incluimos a continuación, aunque su lectura puede realizarse después. Conviene notar que el teorema en mención, se cumple sobre la esfera pero no sobre el toro.

8. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE JORDAN PARA POLIGONOS.

La curva simple cerrada que vamos a considerar ahora, es una línea poligonal P que configura un polígono. Podemos definirla como compuesta por un número finito de segmentos de rectas tales que cada uno tiene puntos comunes solamente con dos de los demás: con uno de ellos tiene en común uno de sus extremos y con el otro tiene en común su otro extremo.

Debemos demostrar que los puntos del plano que no pertenecen a P forman dos conjuntos a los que llamaremos *interior* y *exterior* del polígono. Dichos conjuntos tienen una frontera común: el polígono P .

Designaremos por A y B al exterior y al interior, respectivamente. Probaremos que esos conjuntos son tales que dos puntos cualesquiera que pertenecen a uno de ellos pueden ser unidos por un "camino" poligonal que no corta a P ; pero que todo camino poligonal que une un punto de A con un punto de B , corta necesariamente a P .

Demostración. Puesto que el polígono P tiene un número finito de lados, podemos elegir una semirrecta

orientada del plano que *no es paralela a ninguno de los lados del polígono*. En la figura 21, es designada por d . En lo que sigue, a las semirrectas paralelas y con la dirección de la semirrecta d las llamaremos simplemente *semirrayos*. El semirrayo que tiene su punto inicial en un punto dado, será llamado semirrayo de dicho punto. Vamos a definir ahora los conjuntos A y B de la manera siguiente:

Un punto p que no pertenece al polígono P , es elemento de A , si el semirrayo de origen p corta a P en un número par de puntos.

Un punto q que no está en P , es elemento de B , si el semirrayo de origen q corta a P en un número impar de puntos.

Una aclaración se requiere para el caso en que un semirrayo pasa por un vértice de P , como ocurre en la figura con los puntos p_1 , p_3 , q_1 y q_3 . A ese respecto adoptaremos las reglas siguientes:

Si un semirrayo pasa por un vértice de manera que los lados del polígono que concurren en él se encuentran al mismo lado del semirrayo, como sucede con los semirrayos de los puntos p_1 y q_1 , entonces no se cuenta esa intersección con P para determinar si el origen del semirrayo está en A o en B . Pero si los lados que concurren en el vértice se encuentran en lados diferentes del semirrayo, como ocurre con los semirrayos de los puntos p_3 y q_3 , entonces sí se cuenta la intersección. En la figura 21, los puntos p_1 , p_2 y p_4

están en A , porque sus respectivos semirrayos tienen 2, 4 y 0 intersecciones con P . Los puntos q_1 , q_2 , q_3 y q_4 pertenecen a B porque sus semirrayos tienen 3, 3, 3 y 1 intersecciones con P ,

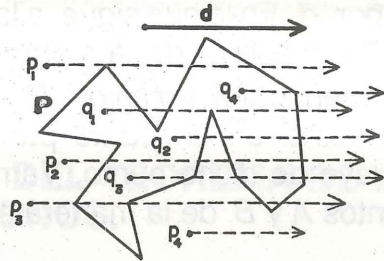


Figura 21

respectivamente. Diremos que dos puntos del plano tienen la misma *paridad*, si pertenecen a la misma parte A o B .

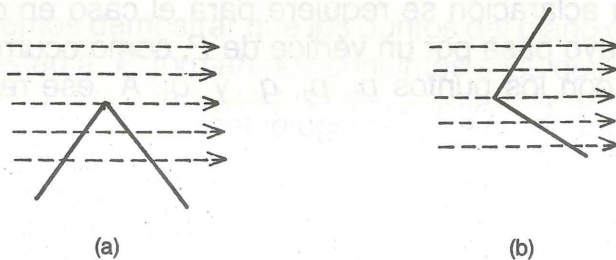


Figura 22

Dividiremos la demostración en dos partes:

1. Se observa que *si consideramos en el plano un segmento cualquiera que no tiene puntos comunes con P , todos sus puntos tienen la mis-*

ma paridad. En efecto, si imaginamos que un punto se desplaza sobre el segmento a partir de uno de sus extremos hasta el otro, la paridad de ese punto no varía pues sólo podría cambiar si su semirrayo pasa por un vértice del polígono; y un atento examen (figura 22) permite comprobar que debido a nuestros convenios, la paridad no cambia en ninguno de los dos casos posibles.

En el caso (a) los puntos de intersección con el polígono, cambian en 2, al pasar el semirrayo por el vértice. Por tanto, la paridad no varía. En el caso (b) el número de puntos de intersección con P , no cambia cuando el semirrayo pasa por el vértice.

Resulta entonces que *si se une un punto p de A con un punto q de B por un camino poligonal, éste debe cortar necesariamente a P* , porque de lo contrario todos los puntos de él y, en particular, p y q , tendrían la misma paridad, contra lo supuesto.

2. Probaremos ahora que *si p y q son puntos que pertenecen a la misma clase, A o B , ellos pueden ser unidos por un camino poligonal, que no corta a P* .

La demostración correspondiente requiere establecer algunos hechos, que luego utilizaremos:

a) *Los conjuntos A y B son abiertos*. En efecto, sea p un punto de uno de ellos. Puesto que no pertenece a P , sus distancias a los lados del polígono son números

positivos, al menor de los cuales designamos por ρ . Una vecindad de P de radio menor que ρ , está formada por puntos que no pertenecen a P ; por lo cual, debido a lo probado en la primera parte, todos ellos tienen la misma paridad que p . Luego, pertenecen a la misma clase, A o B , que dicho punto.

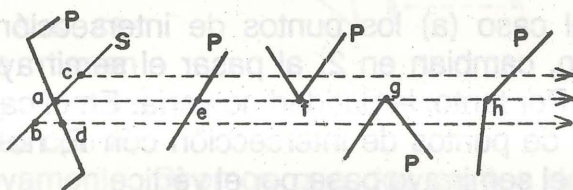


Figura 23

b) Si a es un punto (figura 23) cualquiera de un lado de la poligonal P y s es un segmento de recta que corta a ese lado en el punto a , dos puntos b y c situados en el segmento s , pero en lados diferentes del punto a , tienen diferente paridad si es que están ambos suficientemente cerca de dicho punto. Observaremos primero que si b y c están suficientemente cerca de a , los semirrayos que corresponden a b y c no pueden tener otras intersecciones con P , aparte de la intersección d que tiene el semirrayo de b en la proximidad de a , que las que pueden ocurrir en la vecindad de las intersecciones que puedan haber con P , del semirrayo que parte de a . Ahora bien, estas últimas pueden ser de cuatro tipos,

como en los puntos e, f, g y h de la figura 23, cuyo examen atento muestra que, en todos los casos, el número de intersecciones de los semirrayos que parten de b y c es par o impar para ambos, de manera que no pueden alterar el hecho de que desde el principio la paridad de dichos puntos es diferente debido a la intersección d que presenta el semirrayo de a . De esa manera queda probado que las paridades de b y c son diferentes, por lo que estos puntos pertenecen uno a la clase A , y otro a la clase B .

Vamos a construir ahora un camino poligonal que sin cortar a P , una a dos puntos cualesquiera p y q que tienen la misma paridad. Si el segmento pq no tuviera puntos comunes con el polígono P , él mismo sería la línea poligonal que queríamos construir.

Admitiremos por tanto que el segmento pq tiene puntos situados sobre la poligonal P . Puede suceder que pase por un vértice y que contenga a un lado. Pero esta circunstancia podemos evitarla de la siguiente manera: Según a) existe una vecindad de q cuyos puntos tienen todos la misma paridad. Entre ellos podemos elegir a uno que llamaremos m , tal que el segmento pm no corte a P en ningún vértice (figura 24). Bastará construir un camino poligonal que una p con

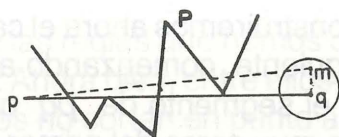


Figura 24

m y que no corte a P , y agregarle el segmento mq , para obtener el camino que buscamos que une p con q . Podemos suponer, por consiguiente, que p es tal que el segmento pq corta a P , pero no pasa por ningún vértice, es decir, que lo corta en puntos que son interiores a lados.

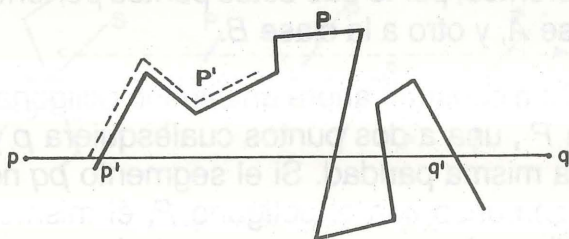


Figura 25

Construiremos ahora el camino poligonal de la manera siguiente, comenzando a partir de p . Su primer lado será el segmento de pq que comienza en p y llega hasta muy cerca del primer punto de intersección p' de pq con P . En ese punto se inicia un nuevo lado paralelo y muy cercano al lado de P vecino (ver en la figura 25, la línea punteada). Se prosigue, como se ve en la figura, construyendo sucesivamente lados paralelos y muy cercanos a la poligonal, pero sin tocarla, hasta llegar a la vecindad del último punto de intersección q' del segmento pq con P , al cual cortará en un punto que llamaremos q'' . El último lado del camino que estamos

construyendo será el segmento $q''q$. Lo que aún no podemos asegurar, razón por la que no aparece en la figura el punto q'' , es si este punto se encuentra entre p y q' o entre q' y q . Designemos por P' al camino que hemos construido hasta ahora. Dada la forma como ha sido construido; todos sus puntos, *inclusive el punto* q'' , tienen la misma paridad que es la de p y la de q . Pero si q'' se encontrara dentro del segmento pq' y no del segmento $q'q$ resultaría, en virtud de lo expresado en b), que habría entre q' y q un punto cuya paridad sería distinta de la de q'' , lo cual no es posible porque el segmento $q'q$, debido a la manera como q' ha sido determinado, no tiene puntos en P . Se deduce de allí que q'' se encuentra entre q' y q y por consiguiente P' es una poligonal que une p con q sin cortar a P , con lo cual queda demostrado el teorema de *Jordan* en el caso de un polígono.

El conjunto A está formado por los puntos a los que corresponden semirrayos que cortan al polígono en un número par de puntos, con las reglas que hemos definido respecto de los vértices. Ahora bien, entre ellos están los puntos cuyos semirrayos no cortan en punto alguno a P , a los cuales consideramos intuitivamente como situados fuera del polígono. Resulta por eso natural que consideremos al conjunto A como *exterior* del polígono; B será su *interior*. Puede notarse que por muy complicado que sea un polígono, es posible reconocer fácilmente, si un punto dado está en su interior o en su exterior, mediante un semirrayo que parte de él: si corta al polígono un número par de veces pertenecerá al

exterior; de lo contrario, estará en el interior.

9. EL PROBLEMA DE LOS DOMINIOS VECINOS.

En una conferencia que ofreció *Möbius* en 1840, dio a conocer como una curiosidad interesante, un problema cuyo interés desde el punto de vista topológico ha planteado una difícil cuestión matemática. *Möbius* lo presentó en forma de una supuesta leyenda: Había una vez un príncipe del lejano oriente que tenía cinco hijos quienes debían heredar sus tierras. Determinó en su testamento que cada una de las cinco partes en que fueran divididas, deberían tener fronteras en común con cada una de las demás.

Dispuso además, que la división debería ser tal que fuera posible unir las residencias de cada dos hermanos por caminos que *no se cortaran ni tuvieran punto de contacto con la parte de un tercer hermano*.

Se trataba pues de cons-

truir diez caminos que no se cruzaran, cada uno de los cuales uniera a las residencias de dos de los hijos. Falleció el príncipe y sus hijos intentaron cumplir su voluntad, pero vieron que si sólo hubieran sido cuatro, lo habrían podido lograr (figura 26), pero al ser cinco no les era posible encontrar una solución. La leyenda cuen-

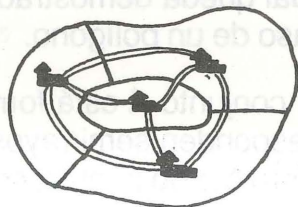


Figura 26

ta cómo se resolvió el problema mediante un artificio al que nos referiremos después. Por ahora mostraremos que, efectivamente, si no se recurre a un cierto artificio, el problema no tiene solución. *Möbius* redujo la demostración de la imposibilidad de encontrar solución a probar que dados en el plano cinco puntos en cualquier posición, no es posible construir diez curvas continuas cada una de las cuales una a dos de los puntos de manera que no haya dos de ellas que se corten.

En primer lugar, consideremos dos de los cinco puntos, A y B , y construyamos una curva cualquiera que los una sin pasar por ninguno de los otros tres puntos. En particular el tercer punto C no se encuentra en ella. Es fácil observar que cualquiera que sean las dos

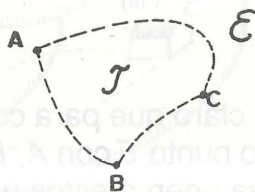


Figura 27

curvas que usemos para unirlos con A y B , respetando las condiciones del problema, se tendrá una curva cerrada simple que divide al plano, como lo expresa el teorema de *Jordan*, en dos partes, una exterior y otra interior. Designemos a la primera por E y a la segunda por T (figura 27).

El cuarto punto D no está sobre ninguna de las tres curvas de la figura 27, luego debe estar o bien en el conjunto E , como se muestra en la figura 28(a), o bien en el conjunto T , como se ve en la figura 28(b). En ambos

casos se han representado las curvas que unen a D con A , B y C , de manera que no corten a las curvas que ya habían sido dibujadas.

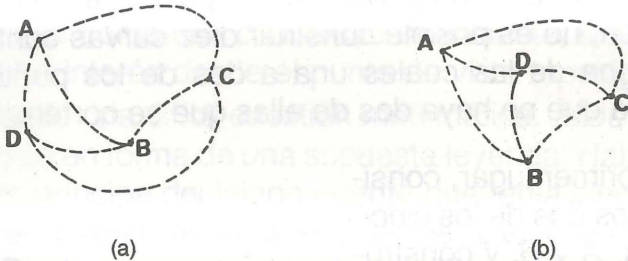


Figura 28

Es claro que para considerar la posibilidad de unir el quinto punto E con A , B , C y D , sin cortar a los caminos que ya unen a estos últimos, podemos valerlos de los esquemas de la figura 28 o de cualquier otro que resulte de ellos por una *deformación continua*. Ahora bien, un breve examen muestra que ambas figuras pueden deformarse hasta formar la figura 29 en que los caminos están simplemente representados por segmentos de recta. En esta última figura ya no aparecen las letras A , B , C y D , porque en la figura 28 (a) el punto B es el punto central y en la figura 28(b) lo es el punto D . Puede verse claramente, que el quinto punto E debe estar situado o bien fuera del triángulo en que se en-

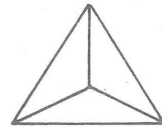


Figura 29

cuentran todos los caminos, en cuyo caso no podrá ser unido al punto central por curva alguna que no corte a

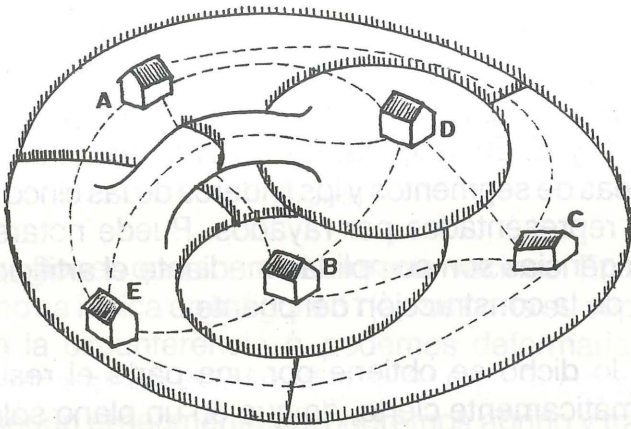


Figura 30

uno de los segmentos, o bien estará dentro de alguno de los triángulos interiores y entonces no podrá ser unido con el punto que está situado fuera de dicho triángulo sin cortar también alguno de los segmentos. Queda así demostrada la imposibilidad de resolver el problema en la forma en que hasta ahora lo hemos considerado, en que, sin haberlo dicho expresamente,

suponíamos implícitamente que los puntos y los caminos que los deben unir se encuentran situados en un plano que es aquél en que se suponen situadas las tierras de la leyenda.

Según *Möbius*, cuando los hijos se desesperaban por no saber cómo cumplir con las disposiciones dejadas por su padre, un derviche les dio la solución que, como se aprecia en la figura 30, consistió en la construcción de un puente para unir las partes que llevan las letras *D* y *E*. En la figura, los caminos están dibujados en líneas de segmentos y los linderos de las cinco partes están representados por rayados. Puede notarse que las exigencias son cumplidas mediante el artificio ingenioso de la construcción del puente.

De lo dicho se obtiene por una parte el resultado, matemáticamente cierto, de que en un plano sólo pueden darse cuatro dominios mutuamente vecinos en el sentido propuesto en la leyenda de *Möbius*.

Por otra parte, la solución del derviche plantea el mismo problema, pero no sobre el plano sino sobre superficies de diferente naturaleza; lo que lleva a profundizar en los géneros de las superficies, tema importante de la llamada Topología Combinatoria, que se originó con los trabajos de *Henri Poincaré*, y acerca del cual trataremos después.

Por ahora, nos limitaremos a señalar que sobre la superficie de la esfera, así como en el plano, pueden darse a lo más, cuatro dominios mutuamente vecinos.

En cambio, sobre el toro puede darse un ejemplo de

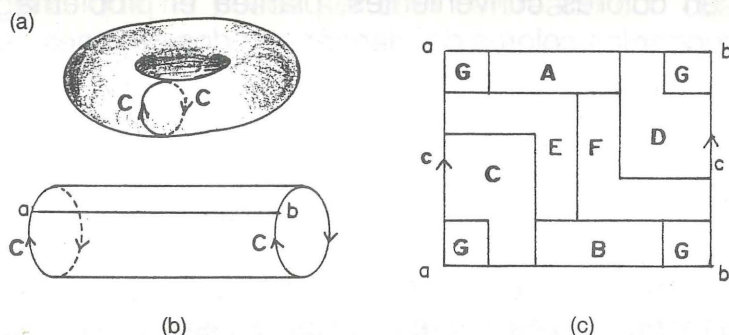


Figura 31

siete regiones que son mutuamente vecinas. En efecto, si como se indica en la figura 31 (a), se corta su superficie según la circunferencia c , podemos deformarla hasta convertirla en un cilindro (figura 31(b)). Si cortamos a éste según el segmento ab , podremos abrirlo y transformarlo en un rectángulo (figura 31(c)). Este rectángulo puede dividirse en las regiones A , B , C , D , E y F , y los cuatro cuadrados G . Si a partir de este rectángulo, así dividido en regiones, recomponemos el toro, podrá verse que los cuatro cuadrados G se unen formando una región sobre él. Esta y las regiones A , B , C , D , E y F , dividen a la superficie del toro en siete regiones mutuamente vecinas.

10. EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES

El mapa de un país en el que se presenta su división política en departamentos, provincias o estados, y el

propósito de distinguirlos claramente pintando cada parte en colores convenientes, plantea el problema de disponer los colores de manera que dos regiones vecinas cualesquiera lleven colores diferentes. Diremos entonces que el mapa está *bien coloreado* cuando se cumple dicha condición. Para este fin llamamos *vecinas*, a dos partes que tienen una frontera común formada por una curva y no únicamente por un punto. Se presenta entonces la pregunta siguiente: ¿Cuál es el menor número de colores que es necesario utilizar para colorear bien un mapa, es decir de modo que regiones que son vecinas lleven diferentes colores?

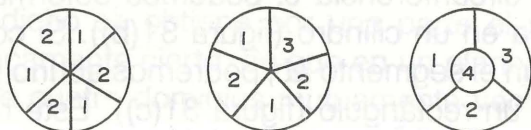


Figura 32

En la figura 32 se presentan tres ejemplos de descomposición en regiones que para ser bien coloreadas requieren, respectivamente, no menos de 2, 3 y 4 colores, porque de lo contrario, resultarían regiones contiguas del mismo color. Podemos establecer, por tanto, que *existen mapas cuyas regiones son tales que requieren no menos de cuatro colores para ser bien coloreadas*.

Los cartógrafos no han encontrado hasta ahora mapa alguno, que no pueda ser bien coloreado con cuatro colores. La propuesta de demostrar el teorema de que todo mapa puede ser bien coloreado con cuatro colores, se debió primero a *Möbius* en 1840, y posteriormente en 1850 fue reiterada por *De Morgan*, y en 1878 por *Cayley*. En 1879 *Kempe* creyó haberlo demostrado, pero en 1890 *Heawood* halló un error; y una modificación del razonamiento le permitió probar que para colorear bien un mapa son suficientes cinco colores. Más tarde fue posible llegar a probar el teorema de los cuatro colores, para todos los mapas con 38 regiones o menos.

Por fin, el teorema fue demostrado en forma general por *Appel y Haken*, mediante un largo análisis con computadora, en que fue necesario considerar un gran número de casos particulares.⁽¹⁾

Es importante observar que el problema de colorear bien un mapa situado en un plano, es equivalente al mismo problema para un mapa situado sobre una superficie esférica. En efecto, un mapa cualquiera sobre una esfera puede trasladarse sobre un plano si en el interior de una de sus regiones, *A*, se perfora un pequeño agujero que permite deformar la superficie hasta aplicarla sobre el plano de modo que el mapa trazado

(1) H. B. Griffiths, *Surfaces*, Cambridge University Press, (1981).

sobre ella, se transforma en un mapa sobre el plano. Es claro entonces que *si se resuelve el problema en el plano entonces será resuelto también en la esfera, y recíprocamente.*

Añadiremos ahora una observación interesante. Si bien el problema de hallar el menor número de colores que se requiere para colorear bien un mapa ubicado en un plano o en la esfera no ha sido resuelto sino muy recientemente, no ha sido así para mapas situados en superficies más complicadas. Así por ejemplo, todo mapa sobre la superficie de un toro puede ser bien coloreado usando siete colores. Existen ejemplos de mapas sobre esta última superficie que no pueden ser coloreados con menos de siete colores, debido a que constan de siete regiones tales que cada una es contigua con las otras seis.

11. EL TEOREMA DE LOS CINCO COLORES.

En la presente sección probaremos la siguiente proposición:

Para colorear bien un mapa, son suficientes cinco colores.

Según hemos señalado, basta demostrar el teorema para los mapas sobre una esfera.

Primero haremos la siguiente observación: En un mapa puede haber, aparte de las *regiones simples* cuyas fronteras se reducen a una curva simple cerrada,

otras en las que la frontera está formada por dos o más curvas simples cerradas, como las que se muestran punteadas en la figura 33, las cuales rodean a una o más regiones y las separan de las demás. Tales regiones se llaman *regiones envolventes*.

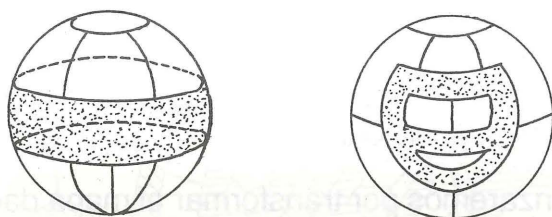


Figura 33

Llamaremos *mapa normal* a un mapa cuyas regiones son todas simples, es decir que no tiene regiones envolventes. El conjunto de regiones, lados y vértices de un mapa normal, constituye una red sobre la esfera, a la que es aplicable la fórmula (2.3) de *Euler*.

En lo que sigue, cuando empleemos la expresión "*bien coloreado*" o "*buena coloración*", debe entenderse que se trata de la coloración con los cinco colores únicos que nos proponemos emplear, los cuales deberán ser aplicados de manera que los que correspondan a dos regiones vecinas, deberán ser diferentes.

Conviene observar que *si un mapa puede ser bien coloreado puede ser cualquiera que sea el*

color que se dé a una de sus regiones arbitrariamente elegida.

La demostración del teorema será dividida en cuatro partes:

I. En esta primera parte probaremos que, *supuesto que todo mapa normal puede ser bien coloreado*, entonces un mapa cualquiera puede ser bien coloreado. Más tarde demostraremos que se cumple la precedente suposición.

Comenzaremos por transformar el mapa dado sobre la esfera, en otro del plano, tal que la buena coloración de uno equivalga a la buena coloración del otro. En todo mapa hay, por lo menos, una región simple. Elijamos una cualquiera de ellas y llamémosla R . Si eliminamos los puntos de la esfera pertenecientes a una pequeña vecindad de un punto interior de la región R , podemos imaginar que la esfera es deformada de manera homeomórfica hasta cubrir todo el plano, por lo que el mapa dado se transforma en un mapa plano que le es equivalente para los fines de la demostración. En esa transformación las regiones simples se transforman en regiones simples; las envolventes, en envolventes; y se conservan las relaciones de vecindad entre las regiones. En particular, la región R se transforma en una región simple que se extiende ilimitadamente.

En la figura 34 se presenta, como ejemplo, un mapa plano que puede considerarse resultante de un proceso como el que acabamos de describir. Las regiones en-

volventes han sido rayadas para destacarlas entre las simples. La región en la que se transforma R está marcada con la misma letra. Recurriremos al ejemplo de la figura 34, para aclarar la demostración que llevaremos a cabo después.

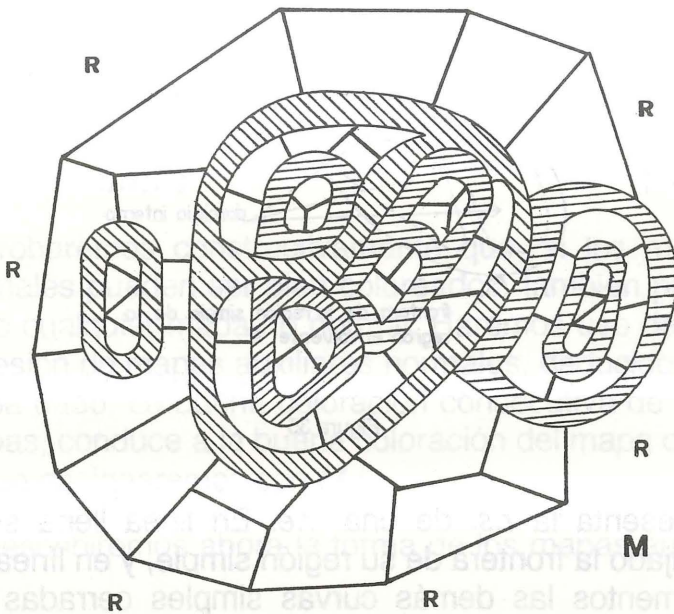


Figura 34

Primeramente expondremos algunas consideraciones previas.

En lugar de las expresiones "región simple" y "región envolvente", emplearemos las abreviaciones $r.s.$ y $r.e.$, respectivamente.

Cada *r.e.*, E , posee una frontera formada por dos o más curvas simples cerradas. Una de ellas divide al plano en dos partes: una, dentro de la cual está contenida E , se llama *región simple de E* ; la otra es su complemento en el plano. En la figura adjunta, se

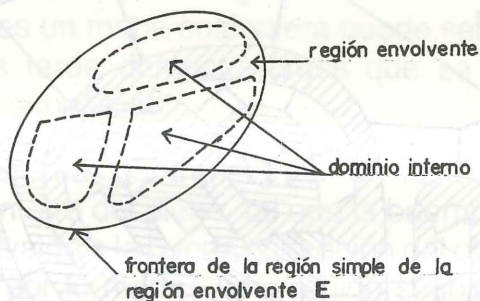


Figura 35

representa la *r.s.* de una *r.e.* En línea llena se ha dibujado la frontera de su región simple, y en líneas de segmentos las demás curvas simples cerradas que constituyen parte de su propia frontera, cada una de las cuales encierra un dominio que se llama *dominio interno* de E .

El conjunto de las *r.e.* de un mapa tal como el mapa plano de la figura 34, admite un ordenamiento determinado por la siguiente relación: dadas dos *r.e.*, E_1 y E_2 , se dice que E_1 es anterior a E_2 si la región simple de E_1 contiene a la región simple de E_2 , lo que se expresa

escribiendo $E_1 \supset E_2$.

Se dice que la *r. e.* E_1 es inmediatamente anterior a la *r. e.* E_2 , si no existe ninguna *r. e.* E_3 que cumpla la condición $E_1 \supset E_3 \supset E_2$. En ese caso se dice también que E_2 sigue inmediatamente a E_1 .

Cada *r.e.* tiene a lo sumo una inmediatamente anterior; pero puede tener más de una, inmediatamente siguiente. Las *r.e.* de un mapa que no tiene *r.e.* anteriores, se llaman *primarias*, y las que no tienen siguientes, *terminales*.

Probaremos constructivamente que, si los mapas normales pueden ser bien coloreados, también puede serlo cualquier mapa no normal. Haremos uso de una sucesión de mapas auxiliares normales, deducidos del mapa dado. La buena coloración consecutiva de esos mapas, conduce a la buena coloración del mapa dado, al que designaremos con M .

Describiremos ahora la forma de los mapas auxiliares.

Se llama *primer mapa auxiliar del mapa M* , al mapa M_1 formado por las *r.s.* de las *r.e.* primarias del mapa M y por todas las *r.s.* de M que no están contenidas en ellas. El mapa M_1 es, evidentemente, normal.

En la figura 36 está representado el primer mapa auxiliar M_1 , del mapa de la figura 34. Las fronteras de las regiones simples que lo componen, están dibujadas con trazos continuos. Tres de esas regiones son las *r.s.*

de las regiones envolventes primarias de M . En líneas de segmentos están dibujadas las otras curvas que forman parte de las fronteras de las $r.e.$ primarias.

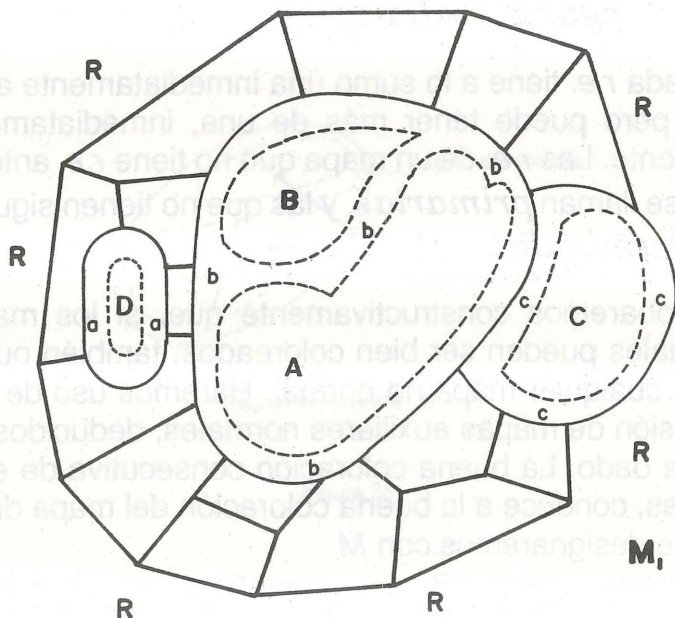


Figura 36

Cada nuevo mapa auxiliar M'' se obtiene de otro, construido previamente, de la manera siguiente:

Sea E una $r.e.$ del mapa dado M , cuya $r.s.$ es una de las $r.s.$ de M' ; y sea X uno de los dominios internos de E . E y X se llaman entonces *r.e. generadora* y *dominio interno generador*, respectivamente, del mapa M'' , el cual estará formado por las

r.s. siguientes:

a) Las *r.s.* de las *r.e.* de M que siguen inmediatamente a la *r.e.* generadora E ;

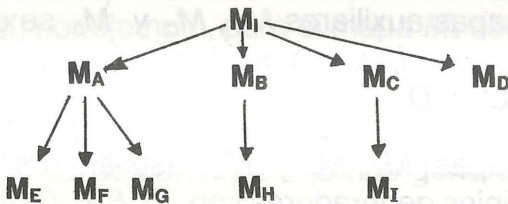
b) Las *r.s.* de M que están contenidas en el dominio generador X pero no dentro de las regiones de la clase a) ;

c) Una *r.s.* que está formada por todos los puntos del plano que no pertenecen a las regiones de las clases a) o b).

Los mapas auxiliares son, por consiguiente, normales y pueden ordenarse según el siguiente criterio:

Cada mapa auxiliar M'' sigue inmediatamente al mapa auxiliar M' del que se obtiene de la manera antes descrita.

En la figura 37, se representan todos los mapas normales auxiliares del mapa M de la figura 34. Su ordenamiento es dado en el siguiente diagrama:



Por ejemplo: El mapa auxiliar M_A sigue inmediatamente al mapa auxiliar M_1 , y tiene a A como dominio interno generador.

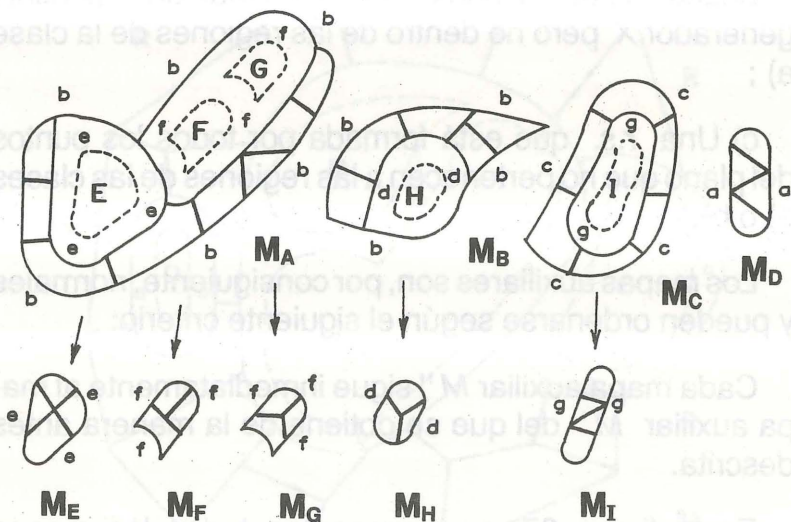


Figura 37

Los mapas auxiliares M_B , M_C y M_D se obtienen del mapa auxiliar M_1 , y sus dominios internos generadores son B , C y D .

Los mapas M_E , M_F y M_G resultan del mapa M_A y sus dominios generadores son E , F y G ; y los mapas M_H y M_I proceden de los mapas M_B y M_C respectivamente, y sus dominios internos generadores son B y C .

A continuación vamos a describir cómo puede ser bien coloreado el mapa dado, mediante la buena colocación de los mapas auxiliares.

En primer lugar, se colorea bien el mapa auxiliar M_1 . Los colores que así resulten se usarán para colorear definitivamente las *r.s.* del mapa M que también son *r.s.* de M_1 , y a las *r.e.* primarias de M . En la figura 36, se ha designado con las letras a , b y c los colores que corresponden a dichas *r.e.* primarias.

En adelante, una vez bien coloreado un mapa auxiliar, podrá ser bien coloreado cada uno de los que le siguen. Sea, por ejemplo, M'' uno de ellos, cuyo dominio interno generador pertenece a la *r.e.* generadora E . La buena coloración de M'' se hará atribuyendo a su región de clase c) el color que fue dado previamente en definitiva a la *r.e.* E de M . Una vez bien coloreado M'' , los colores que así resulten deberán ser atribuidos definitivamente a las *r.s.* de M que también son *r.s.* de M'' , a la *r.e.* de M cuyas *r.s.* son *r.s.* de M'' y a la *r.e.* generadora de M'' .

En los mapas auxiliares de la figura 37 se señalan los colores que corresponden a sus respectivas regiones de clase c). Así, por ejemplo, para el mapa M_A ese color es b , que correspondió a su *r.e.* generadora.

Los últimos mapas auxiliares M_D , M_E , M_F , M_G y M_H son aquellos cuyos dominios internos generadores no contienen sino *r.s.* de M .

Es evidente, que los colores que sucesivamente,

fueron atribuidos en definitiva a las regiones del mapa dado M constituyen una buena coloración de éste. En particular, la forma en que se determina sucesivamente el color de cada $r.e.$ del mapa M cuya $r.s.$ es $r.s.$ de un cierto mapa auxiliar y uno de cuyos dominios internos da origen al siguiente mapa auxiliar, garantiza que se cumplan las condiciones de la buena coloración.

Queda establecida, por tanto, la siguiente proposición:

a) *Si se demuestra que cualquier mapa normal puede ser bien coloreado con cinco colores, quedará demostrado que todo mapa también puede serlo.*

II. A partir de esta sección trataremos acerca del problema de colorear bien un mapa normal. Al resolverlo, quedará demostrado el teorema de los cinco colores.

Se llama mapa especial a un mapa normal en cada uno de cuyos vértices concurren, exactamente, tres lados.

En esta sección vamos a demostrar que, dado un mapa normal, puede deducirse de él un mapa especial tal que, si puede ser bien coloreado, también puede serlo el mapa normal dado.

Ante todo, debe tenerse presente que en cada vértice concurren tres o más lados. Consideremos entonces, un vértice cualquiera en que concurren $p > 3$ lados (figura

38(a)). Reemplacemos ese vértice por un pequeño círculo que lo tiene por centro, al cual incorporaremos una de las p regiones que concurren en el vértice, para construir una nueva región R (figura 38(b)). Se ve entonces, que el vértice es reemplazado por $p - 2$ vértices, en cada uno de los cuales concurren tres lados. Si llevamos a cabo esa operación

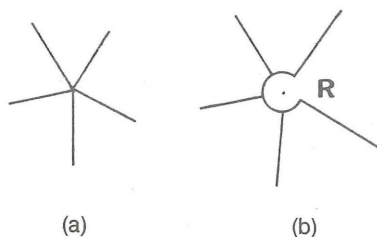


Figura 38

con cada uno de los vértices en que concurren más de tres lados, obtendremos un mapa *especial*. Si éste puede ser bien coloreado, entonces, disminuyendo los radios de los círculos hasta reducirlos a cero, sin cambiar la coloración de las regiones, reconstruiremos el mapa normal dado, que estará ya bien coloreado.

Hemos establecido así, la siguiente proposición:

b) *Si cada mapa especial puede ser bien coloreado, podrán ser bien coloreados todos los mapas normales, y en virtud de lo establecido en la sección I, lo serán todos los mapas sobre la esfera.*

III. Nos valdremos ahora de la fórmula de *Euler* (ver §1.2) para demostrar que en todo mapa especial hay, por lo menos, una región (simple) cuya frontera consta de menos de seis lados.

Designamos por C_n al número de regiones del mapa especial cuyas fronteras se componen de n lados. Si C es el número total de regiones del mapa, se tiene

$$C = C_2 + C_3 + C_4 \dots \quad (11.1)$$

Cada uno de los lados tiene dos extremos que son vértices, y en cada vértice concurren tres lados. Luego, si A es el número total de lados del mapa y V es el número de vértices se cumple la ecuación

$$2A = 3V \quad (11.2)$$

Además, una región limitada por n lados tiene n vértices, y cada vértice pertenece a tres regiones, por tanto,

$$2A = 3V = 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + \dots \quad (11.3)$$

La fórmula de *Euler* permite escribir

$$V - A + C = 2,$$

o sea

$$6V - 6A + 6C = 12$$

De (11.2) se deduce que $6V = 4A$, de manera que es

$$6C - 2A = 12 .$$

Luego, de (11.1) y (11.3) resulta

$$b (C_2 + C_3 + C_4 + \dots) - (2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + \dots) = 12$$

y por consiguiente

$$(6 - 2)C_2 + (6 - 3)C_3 + (6 - 4)C_4 + \dots = 12.$$

Puesto que para que esta ecuación pueda cumplirse es necesario que al menos uno de los cuatro primeros términos sea un número positivo, uno de los números C_2 , C_3 , C_4 ó C_5 tiene que ser positivo. Es decir que *necesariamente, una de las regiones de un mapa especial, tiene menos de seis lados.*

IV. Ya estamos en condiciones de probar que todo mapa especial puede ser bien coloreado con cinco colores y por tanto puede serlo también cualquier mapa sobre la esfera.

Sea M un mapa especial cualquiera. Según lo demostrado en la sección anterior, existe en él alguna región con menos de seis lados. Consideremos los casos siguientes:

Primer Caso.- M contiene una región con 2, 3 ó 4 lados. Podemos modificarlo para obtener un nuevo mapa especial M' con una región menos, de tal manera que si M' puede ser bien coloreado, también puede serlo M . Con ese fin basta eliminar un lado de A que la separa de una de las regiones que le son contiguas, es decir, de aquellas con las que tiene un lado común, para formar una nueva región A' dentro de la cual se encuentra la región A . En las figuras 39(a), (b) y (c) se representa esa operación en los casos en que A tiene 2, 3 y 4 lados, respectivamente.

En el caso en que A tiene cuatro lados puede ocurrir

aún, la situación que aparece en el primero de los dibujos de la figura 39(d) en que dos de los lados de la

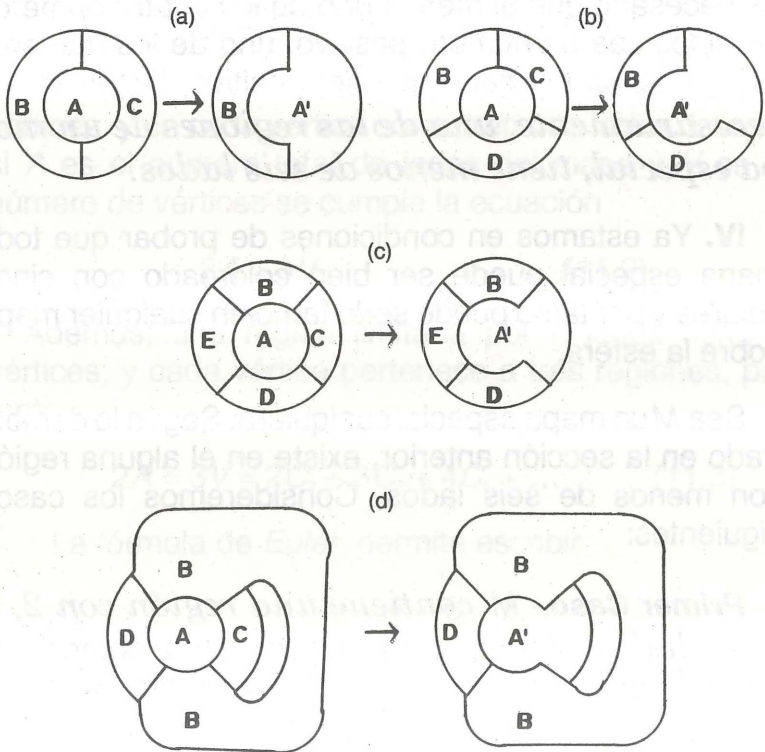


Figura 39

región la separan de una misma región B . Si suprimiéramos uno de los lados que separan A de B , esta última se convertiría en región envolvente y resultaría un mapa que no sería normal. Pero sucede que las otras dos regiones C y D contiguas con A son, necesariamente,

distintas porque están separadas por A y B . Luego, en ese caso, eliminaremos el lado común de una de ellas (C en el segundo dibujo de la figura 39(d)) con A . Debe notarse que en todos los casos resulta un mapa especial, que tiene una región menos que el mapa M . Además, si M' puede ser bien coloreado con cinco colores, también podrá serlo M , porque A posee a lo sumo cuatro regiones que le son contiguas y por tanto puede ser coloreado con un quinto color distinto del que recibieron dichas cuatro regiones como partes del mapa M' .

Segundo Caso.- M contiene una región A con cinco lados.

Sean B, C, D, E y F las cinco regiones contiguas con A . Puede observarse que hay, por lo menos, dos que no son iguales ni están contiguas. En efecto, si dos de ellas, E y F por ejemplo, (figura 40(a)), fueran contiguas impedirían que D fuera contigua con B o con C , pues cualquier curva continua que una un punto en D con un punto de B o C debe pasar necesariamente por una de las regiones A, E o F , en virtud del teorema de la curva de *Jordan* que se cumple tanto en el plano como en la esfera. Un nuevo mapa normal, con dos regiones menos, resulta si, como se ve en la figura 40(b), se suprimen los lados que separan A de C y D para formar una región simple A' del nuevo mapa normal, que también será especial pues de esa manera no puede crearse una región envolvente, porque E y F impiden que A' pueda serlo.

Puede suceder también que E y F sean la misma

región simple, es decir que no exista el lado que separa a E y F en la figura 40. En este caso también vale lo dicho anteriormente. Por tanto, el nuevo mapa especial

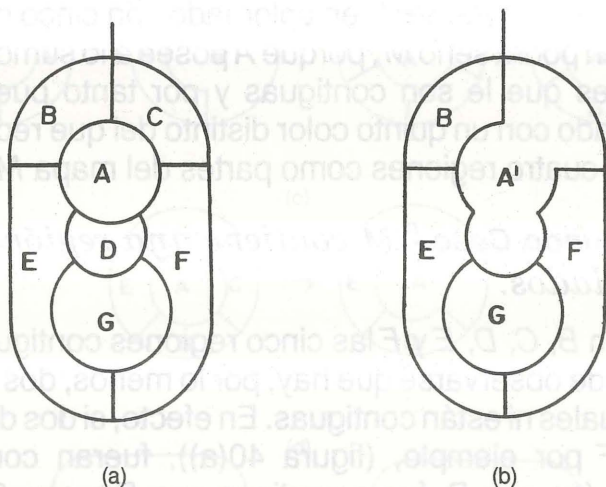


Figura 40

M' tiene dos regiones menos que M , y si puede colorearse bien con cinco colores, también podrá serlo M , pues si se reponen los dos arcos que fueron suprimidos, A estará en contacto con cinco regiones, pero coloreadas con no más de cuatro colores diferentes, y por tanto podrá recibir un color diferente de ellos.

Por consiguiente, si M es un mapa especial con n regiones, podemos deducir de él un nuevo mapa especial con $n-1$ o $n-2$ regiones. El mismo proceso puede ser aplicado a M' para obtener un nuevo mapa

especial M'' , y así sucesivamente. Se obtiene así, una sucesión M, M', M'', \dots de mapas, cada uno de los cuales puede ser bien coloreado con cinco colores, si puede ser bien coloreado el que le sigue. El proceso anterior conduce a un mapa que tiene solamente cuatro o cinco regiones que, obviamente, puede ser bien coloreado con cinco colores. En consecuencia, todo mapa puede ser bien coloreado con cinco colores.

Es interesante observar que la demostración dada es constructiva y proporciona un procedimiento que, aunque laborioso, permite colorear bien un mapa cualquiera en un número finito de pasos, con cinco colores.

12. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Ocurre en ocasiones que dado un conjunto A del plano o del espacio de tres dimensiones y una transformación continua del conjunto en sí mismo -no necesariamente biunívoca- uno de sus puntos se aplica en sí mismo o, como se dice, es un *punto fijo* de la transformación. Un ejemplo sencillo es el de un círculo que se transforma en sí mismo, de manera que cada uno de sus puntos *se transforma o se aplica* sobre el punto que acaba por situarse cuando experimenta una rotación alrededor del centro, en un ángulo dado igual para todos los puntos del círculo. Es evidente, que el centro es el único punto fijo de esa transformación.

Las proposiciones que establecen la existencia de un punto fijo en una transformación, se llaman *teoremas*

de punto fijo. Tales proposiciones son de importancia en diversas ramas de la Matemática para probar los llamados *teoremas de existencia*, que permiten demostrar que, en un conjunto dado, existen elementos que poseen determinadas propiedades.

En esta sección vamos a demostrar un ejemplo típico de teorema de punto fijo, debido a *Brouwer*.

Consideremos el conjunto de los puntos del círculo incluidos los de su circunferencia, y supongamos que experimenta una transformación en sí mismo. Admitiremos que dos o más puntos pueden aplicarse sobre el mismo punto, es decir, que la transformación puede no ser biunívoca. Puede imaginarse, por ejemplo, que la transformación resulta superponiendo al círculo un disco exactamente igual (figura 41), de muy pequeño espesor, hecho de un material



Figura 41

muy elástico, el cual es deformado de manera cualquiera sin ruptura alguna, alargándose en unas partes, acortándose en otras, arrugándose o doblándose sobre sí mismo y aplicándose sobre el círculo de modo que todos sus puntos queden dentro de él. En la figura 41 se representa al disco ya deformado aplicado en el círculo no deformado. En línea más gruesa se representa la forma final que puede tomar su frontera. Las posiciones finales de cada uno de los puntos del disco

son las imágenes, por la transformación, de sus posiciones iniciales en el círculo.

El teorema de *Brouwer* se enuncia de la manera siguiente: *Cada transformación continua del círculo en sí mismo, de la naturaleza descrita, deja fijo a uno de sus puntos, por lo menos.*

La demostración requiere introducir una definición previa: Supongamos que a cada valor de la variable t comprendido entre 0 y L , le corresponde en el plano un vector ⁽¹⁾ $v(t)$ variable de manera continua con t en magnitud y dirección, pero de origen fijo. Supongamos además que

$$v(0) = v(L)$$

y que *en todo momento* $v(t)$ es diferente del vector nulo. Si el ángulo $\alpha(t)$ que hace $v(t)$ con una dirección fija dada en el plano, varía entre $\alpha(0) = \alpha_0$ y $\alpha(L) = \alpha_0 + k \times 360$, se dice que k es el número de "vueltas" que da el vector alrededor del origen fijo y se llama *índice de ese vector variable*. Su valor puede ser cualquier entero positivo, negativo o cero. Las variaciones del ángulo que hace el vector con la dirección fija, puede representarse gráficamente mediante una curva,

(1) Entendemos aquí un vector simplemente como un segmento de dirección, sentido y longitud determinados, que puede representarse por una flecha.

como se ve en la figura 42, en que los valores de la variable t son representados por las abscisas y los correspondientes ángulos que hace el vector, por las ordenadas. La curva comienza en el punto $(0, \alpha_0)$ y termina en el punto $(L, \alpha_0 + k \times 360)$. En la figura se ha supuesto que $k=4$. Por tanto, 4 es el *índice* del vector variable considerado. La correspondencia $t \rightarrow v(t)$ es una *función vectorial* y la curva de la figura 42 es su *curva angular*. Se dice también que el número k es el *índice* de la función vectorial.

La transformación del círculo C de radio R que consideramos, puede representarse mediante un conjunto de vectores, cada uno de los cuales comienza en un punto del círculo y termina en otro que es la imagen del primero por la transformación

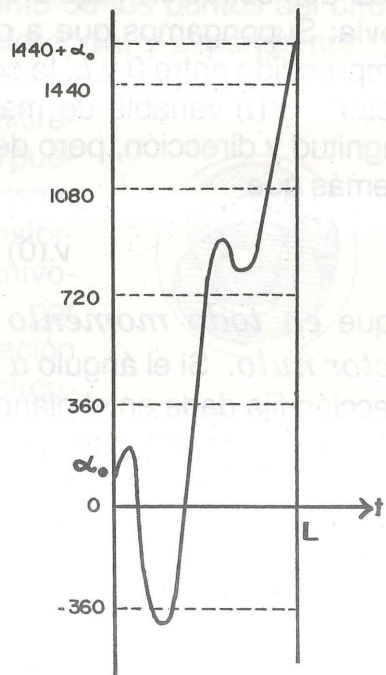


Figura 42

considerada (figura 43) y se llaman *vectores de la transformación*.

Supongamos, contrariamente a lo que deseamos demostrar, que la transformación no tiene puntos fijos. Esto equivale a suponer que todos sus vectores son diferentes de cero. De esta suposición deduciremos una contradicción, demostrando así el teorema.

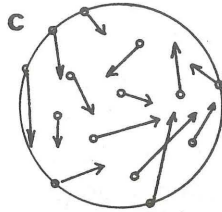


Figura 43

Consideremos los vectores de la transformación que corresponden a los puntos de una circunferencia cualquiera C_1 , concéntrica con el círculo C , y de radio r (figura 44). Si A es un punto cualquiera de C_1 , cada punto P es determinado por el ángulo $t = POA$, que es igual al ángulo que hace la tangente en P con la dirección de la tangente OY en A . Se define así una función vectorial continua que a cada valor de t entre 0 y 360 le hace corresponder el vector de transformación en el

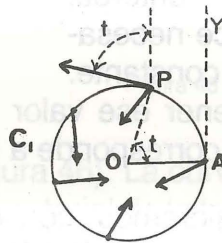


Figura 44

punto P y que para 0 y 360 tiene los mismos valores. Le corresponde, por tanto, un índice $k(r)$. Ahora bien, por cuanto la transformación que consideramos es continua, si hacemos variar a r desde 0 hasta R que es el radio de la circunferencia del círculo C , $k(r)$ varía con continuidad.

Puesto que no toma sino valores enteros, necesariamente $k(r)$ tiene el mismo valor para todo r . Hemos empleado aquí una proposición de uso frecuente, según la cual una cantidad que es función continua de una variable, pero que sólo puede tomar valores enteros, permanece necesariamente constante.

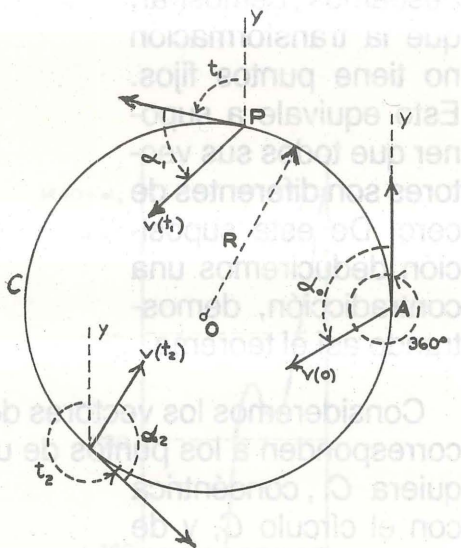


Figura 45

Para obtener ese valor vamos a considerar el índice $k(r)$ que corresponde a la circunferencia del círculo C .

Nos valdremos, con ese fin, de las dos funciones vectoriales siguientes: la primera definida por los vectores unitarios tangentes a la circunferencia de radio R y dirigidos en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj; y la segunda formada por los vectores de la transformación correspondientes a los puntos de la misma circunferencia. Para ambas funciones la va-

riable será el ángulo t ($0 \leq t < 360$), que hace la tangente a C en el punto considerado, con el semieje OY (figura 45). A cada una de dichas funciones le corresponde una "curva angular" y por tanto un índice. El hecho importante es que *el vector de la transformación en cada punto de la circunferencia C se dirige al interior del círculo y, por tanto, en ningún caso puede tener la dirección del vector tangente a la circunferencia*. La curva angular de la función vectorial determinada por los vectores unitarios tangentes es el segmento que va del punto $(0,0)$ al punto $(360,360)$ (figura 46). La curva angular que corresponde a la función vectorial de la transformación de los puntos de C es dada por los puntos $(t, \alpha + t)$ donde α es el ángulo que forma el vector $v(t)$ con la dirección OY . Dicha curva comienza en el punto $(0, \alpha_0)$ y termina en el punto $(360, \alpha_0 + k(R) \times 360)$, es decir en uno de los puntos $M_i(360, 360(i \pm 1) + \alpha_0)$, $i = 1, 2, \dots$. Si terminara en

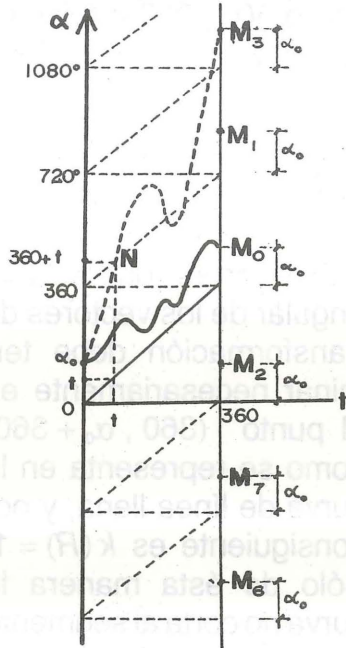


Figura 46

uno de los puntos M_1, M_2, \dots , entonces ocurriría, como muestra la curva de segmentos de la figura 46 que termina en el punto M_3 , que habría en ella un punto tal como $N(t, 360 + t)$, que correspondería a un punto de C para el que es $\alpha = 360$ y por consiguiente $v(t)$ tendría la dirección de la tangente, lo que no es posible.

Resulta así, que la curva angular de los vectores de transformación debe terminar necesariamente en el punto $(360, \alpha_0 + 360)$ como se representa en la curva de línea llena, y por consiguiente es $k(R) = 1$. Sólo de ésta manera la curva no corta al segmento que constituye la curva regular de los vectores tangentes, ni a ninguno de los

segmentos de líneas de puntos. Con eso queda probado que $k(R) = 1$ cualquiera que sea $0 < r \leq R$. Vamos a probar ahora que este resultado conduce a una contradicción, lo cual demostrará la falsedad de la suposición de que la transformación no tiene puntos fijos.

En efecto, si r es suficientemente pequeño, los vectores de transformación de los puntos de la circunferencia c de radio r (fig. 47(a)) diferirán tan poco del que

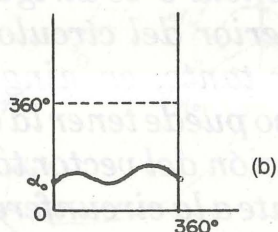
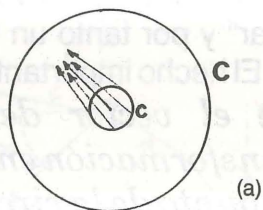


Figura 47

corresponde a su centro (que se supone diferente de 0), que la curva angular que les corresponde debería partir de $(0, \alpha_0)$ (figura 47(b)) para terminar en el punto $(360, \alpha_0)$, lo que implicaría que $k(R) = 0$; y resultaría una contradicción con lo antes demostrado. De esta manera podemos concluir que la suposición de que la transformación que hemos estado considerando no posee punto fijo, no es posible, y por consiguiente queda demostrado el teorema de *Brouwer*.

Si imaginamos un cuerpo sólido cualquiera limitado por un número finito de caras planas poligonales tales que dos de ellas, o bien no tienen puntos comunes o bien, si los tienen, su intersección se reduce a un vértice o a un lado que constituye una arista del poliedro, la superficie que así se obtiene constituye un poliedro. Si se va forma continuamente un poliedro se obtiene una superficie cerrada, que puede ser lisa o tener puntas, o bien ser plana o no. Una esfera es una esfera (o un toro) superficies cerradas. Es fácil imaginar muchas más.

Dada una superficie cerrada, si se da en ella una red, o sea una división en un número finito de polígonos de

en un poliedro cuyas caras provienen de los polígonos curvilíneos trazados sobre la superficie. Si la superficie

§ 3. NOCIONES DE LA TEORIA TOPOLOGICA DE LAS SUPERFICIES

13. CARACTERISTICA DE UNA SUPERFICIE CERRADA.

Si imaginamos un cuerpo sólido cualquiera limitado por un número finito de caras planas poligonales tales que dos de ellas, o bien no tienen puntos comunes o bien, si los tienen, su intersección se reduce a un vértice o a un lado que constituye una arista del poliedro, la superficie del sólido constituye un *poliedro*. Si se deforma continuamente un poliedro se obtiene una *superficie cerrada*, de la que nos basta tener por el momento una idea intuitiva. Una esfera o un toro son superficies cerradas. Es fácil imaginar muchas más.

Dada una superficie cerrada, si se da en ella una red, o sea una división en un número finito de polígonos de lados curvos (*polígonos curvilíneos*), de modo que para todo lado curvo existan sólo dos polígonos curvilíneos que tengan ese lado en común, la superficie puede ser deformada de manera continua para transformarla en un poliedro cuyas caras provienen de los polígonos curvilíneos trazados sobre la superficie. Si la superficie cerrada que se considera es una esfera u otra superficie

que resulta por deformación de una esfera, a la que podemos llamar *superficie simple*, una red trazada sobre ella puede transformarse en un poliedro simple cuyas caras, aristas y vértices, provienen de las mallas, lados y vértices de la red. Por tanto, si designamos por V , A y C , a los números de los vértices, de los lados y de las mallas de la red, se cumple la fórmula (2.3) de *Euler*

$$V - A + C = 2.$$

Esta fórmula se cumple, por tanto, para toda red sobre una superficie que resulta por una transformación topológica de una esfera.

En cambio, si consideramos un toro, esa fórmula no se cumple. En la sección 9 (figura 31) hemos mostrado una descomposición del toro en regiones que constituyen una red. La misma división puede presentarse de manera algo diferente, como se ve en la figura 48, en la que se muestran enteras las diferentes regiones y se indica con las mismas letras a los puntos que coinciden con un mismo vértice cuando el toro es reconstruido. La cuenta realizada, utilizando la figura, muestra que

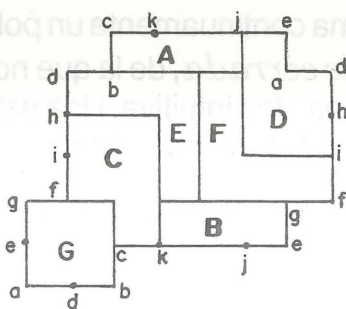


Figura 48

$$V = 17, A = 23 \text{ y } C = 7.$$

Por consiguiente

$$V - A + C = 0 \quad (13.1)$$

Es decir que para el toro y para las superficies que resultan de él, por una transformación topológica, no se cumple la fórmula de *Euler* de los poliedros simples. Se puede demostrar que cualquiera que sea la red mediante la cual se descomponga el toro en regiones, siempre se cumple la fórmula (13.1).

De una manera general, puede establecerse que para cada red sobre una superficie cerrada, y las topológicamente equivalentes, la suma $V - A + C$ es una constante a la que se denomina *característica* de la superficie. Así, la característica de la esfera es 2 y la del toro es 0.

14. LAS SUPERFICIES UNILATERALES.

Un hecho familiar es que un plano situado dentro del espacio presenta dos "caras" o "lados". Esos lados pueden imaginarse de colores diferentes. Si se piensa en una porción del plano, provista de un borde curvo, los dos colores tienen por límite común dicho borde. Si consideramos una esfera, ocurre lo mismo, porque esa superficie tiene dos lados. Si se imagina a un insecto que camina en uno de los lados, no hay manera de que pase al otro lado, sin atravesar la superficie. La esfera y otras muchas superficies imaginables, tienen dos caras.

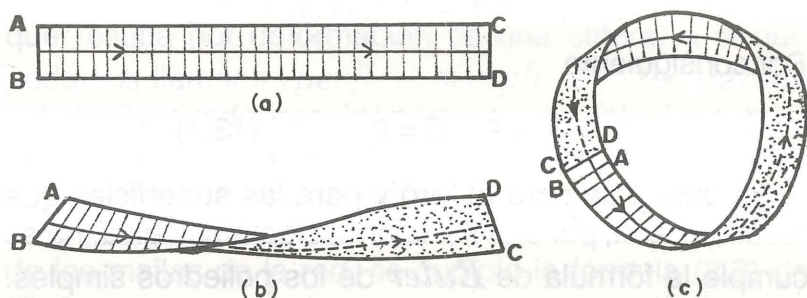


Figura 49

A mediados del siglo pasado, *Möbius* reveló la existencia de superficies que sólo tienen un lado. El ejemplo que dio, conocido con el nombre de *banda de Möbius*, representado en la figura 49, resulta cuando un rectángulo muy alargado, como el rectángulo *ABCD* de la figura 49(a), es torcido como se aprecia en (b) y luego curvado hasta pegar el segmento *AB* sobre el segmento *DC*, de manera que el punto *D* coincida con el punto *A* y el *C* con el *B*, quedando formada de esa manera una superficie que está representada en (c), que es la banda de *Möbius*.

Si un insecto recorre esta superficie siguiendo la curva dibujada en ella, en la dirección de la flecha, vuelve al punto inicial *A*, pero del "otro lado" de la superficie, la cual tiene evidentemente un solo lado, lo que puede visualizarse mejor aún al pintarla. Se verá entonces que basta un solo color porque el término de lo pintado, se encuentra con su comienzo. Otra observación interesante, es que la banda tiene una sola curva

cerrada como borde. Si se hubiera formado un cinturón ordinario uniendo A con C y B con D , habría resultado una superficie con dos lados y con un borde formado por dos curvas cerradas.

Por último, si la banda de *Möbius* se corta a lo largo de la línea central, se verá que seguirá siendo una superficie con un solo lado.

H. Tietze ha demostrado que el menor número de colores con que puede ser bien coloreado un mapa sobre la banda de *Möbius*, es 6. Luego, el máximo número de regiones mutuamente vecinas que puede haber es 6. En la figura 50 se presenta una división de esa naturaleza, dibujada sobre el rectángulo mediante el cual se constituye la banda de *Möbius*. Como se ve, la banda queda dividida en las regiones 1, 2, 3, 4, 5 y 6. (Debe tenerse en cuenta que el color de cada rectángulo es el mismo en sus dos caras).

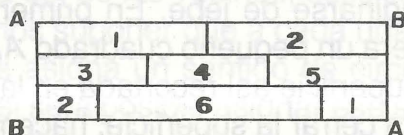


Figura 50

La banda de *Möbius* no es una superficie cerrada como lo son la esfera y el toro. En el espacio de tres dimensiones no es posible la existencia de una superficie cerrada con una sola cara, a menos que se entrecruce con ella misma.

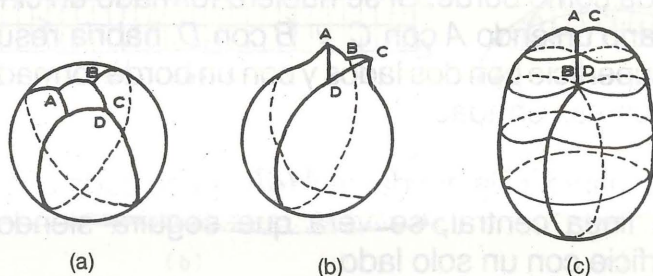


Figura 51

Podemos dar aquí un ejemplo de una superficie cerrada de esa clase. En la figura 51 se muestra cómo puede construirse a partir de una esfera, que puede imaginarse de jebes. En primer lugar, se recorta en la esfera un pequeño cuadrado $ABCD$. Luego se deforma la superficie así recortada en la forma que se ve en (b). Para cerrar la superficie, hacemos coincidir AB con CD y DA con BC . Resulta así la superficie de la figura 51 que se cruza a sí misma según la línea AB , la cual con excepción de A y B debe pensarse formada en cada punto, por dos puntos distintos. Debido a la existencia de esa línea de penetración, resulta que la superficie tiene un solo lado.

15. LA ORIENTACION DE LAS SUPERFICIES.

Las superficies situadas en el espacio de tres dimensiones, pueden clasificarse en *orientables* y *no orientables*. Para introducir esta noción, consideremos una superficie cualquiera e imaginemos que en cada uno de sus puntos existe una pequeña circunfe-

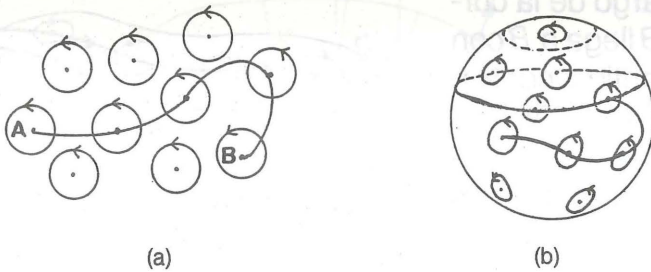


Figura 52

rencia que lo tiene por centro, cuyo radio puede variar continuamente, de modo que el radio de cada una difiere tan poco como se quiera del de las vecinas, suficientemente cercanas. Podemos suponer que a cada una de las circunferencias se le asigna un sentido de circulación. Nos preguntamos si será posible asignar ese sentido de manera que si partimos de un punto cualquiera A de la superficie y recorremos una curva arbitraria en ella, hasta llegar a otro punto cualquiera B , los sentidos de circulación de las circunferencias que corresponden a los puntos de la curva son tales que en todo momento el sentido de la circulación coincide, al trasladarse, con el sentido que tienen las circunferencias de los demás puntos de la curva. En la figura 52(a) hemos supuesto que la superficie es el plano del dibujo. Se reconoce de inmediato que para un plano esa construcción es posible. Lo mismo ocurre con la superficie esférica (figura 52(b)). En cambio, en la banda de *Möbius* (figura 53) puede verse que si A y B son muy cercanos entre sí y sus sentidos de rotación son los mismos, la rotación de

A al ser trasladada a lo largo de la curva AB llega a B con un sentido contrario al de A y, por tanto, contrario al del círculo que corresponde a B .

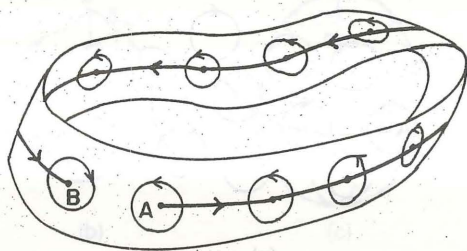


Figura 53

Las superficies para las que, como en el caso del plano y en el de la esfera, es posible que las circunferencias admitan un sentido de circulación que cumpla la condición de coherencia que hemos señalado, se llaman *superficies orientables*. En caso contrario, como sucede con la banda de *Möbius*, se les llama *superficies no orientables*. En general, las superficies con un solo lado, son no orientables. Puede trazarse sobre ellas una curva continua y cerrada, C , tal que partiendo de un punto A (figura 54), termina en él, y tiene la propiedad siguiente: Si en cada uno de sus puntos se construye un vector normal a la superficie, que varíe continuamente a lo largo de la curva, *sin anularse en ningún momento*, el vector V que corresponde al punto de partida A tiene sentido opuesto al vector V' que corresponde al mismo punto, a la llegada.

Una curva cerrada sobre la banda de *Möbius*, tal como la curva C de la figura 54, tiene una propiedad notable: Si un punto se mueve en la superficie, muy cerca de la curva, partiendo de un punto P , vecino de A ,

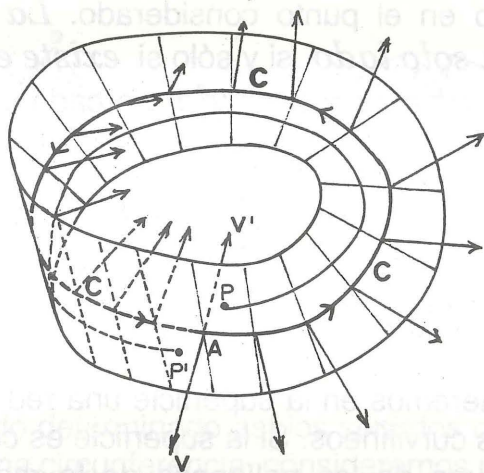


Figura 54

hasta llegar al punto P' , cercano a P , se observa que pasa de un lado de la curva, corriendo vecino de ella, hasta llegar al otro lado, sin necesidad de cortarla. Podemos imaginar la curva como un río, con una sola orilla.

La existencia, en una superficie, de una curva con una sola "orilla" es condición necesaria y suficiente para que la superficie tenga un solo lado. Con esto puede probarse que toda superficie de un solo lado, es orientable.

Conviene observar que en cada punto de cualquier superficie, puede construirse dos vectores unitarios, normales a la superficie y de sentido opuesto, que pueden hacerse corresponder con los dos sentidos de rotación de un pequeño círculo, situado en la superficie,

de centro en el punto considerado. *La superficie tiene un solo lado* si y sólo si *existe en ella una curva continua y cerrada*, en cada uno de cuyos puntos pueda elegirse uno de los dos vectores de longitud unidad normales a la superficie, de manera que, al recorrer enteramente la curva, el vector que fué elegido varíe en forma continua en todos los puntos del recorrido. Existe otra manera, más conveniente para fines teóricos, de definir la orientabilidad de una superficie.

Consideremos en la superficie una red formada por polígonos curvilíneos. Si la superficie es cerrada, cada lado de uno de los polígonos de la red es común, exactamente, a dos polígonos. Pero si no lo es, esa condición no se cumple para los lados que forman parte del borde, los cuales pertenecen a un solo polígono. Podemos valernos entonces de esa red o división poligonal de la superficie para definir de otro modo la orientabilidad.

Como un primer ejemplo consideremos la superficie de un tetraedro $ABCD$ o, lo que es equivalente para nuestros fines, la esfera en que puede deformarse el tetraedro sobre la que se forman cuatro caras triangulares de lados curvilíneos (*división tetraédrica de la esfera*) (figura 55). Puesto que la superficie es, en este caso, bilateral y orientable, a cada uno de sus puntos podemos hacerle corresponder una pequeña circunferencia que lo tiene por centro, cada una de las cuales tiene un sentido de circulación tal que para dos puntos bastante vecinos, los sentidos de orientación sean igua-

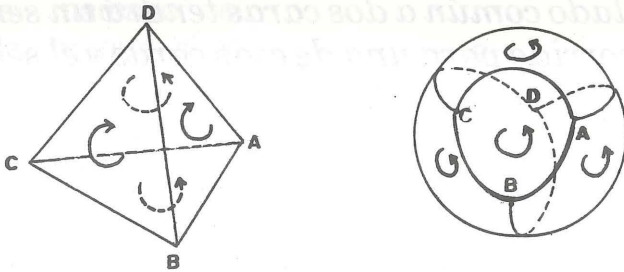


Figura 55

les. Habiendo determinado así los sentidos cíclicos de cada pequeña circunferencia, consideremos una de las caras del tetraedro, por ejemplo la cara BCD . Se ve que para dos puntos cualesquiera de esa cara, las correspondientes circunferencias tienen, necesariamente, el mismo sentido de rotación. En vez de marcar ese sentido de rotación, bastaría representarlo con una sola flecha curva dibujada en ella y dirigida en el sentido de la rotación que corresponde a todos los puntos. Lo mismo puede ser indicado por el orden cíclico de los vértices de la cara; así BCD indica que todas las circunferencias que corresponden a los puntos de esa cara tienen el sentido del recorrido del contorno partiendo de B y volviendo a él, pasando primero por C y luego por D . El mismo procedimiento puede aplicarse a las otras caras del tetraedro. Ahora bien, si se tiene en cuenta la condición de que las pequeñas circunferencias de puntos bastante vecinos tienen el mismo sentido cíclico, se ve que si el sentido de recorrido de la cara de vértices B, C, D , es BCD , entonces las otras tres caras deben

tener los sentidos ABD , BAC y CAD de manera que *cada lado común a dos caras tendrá un sentido de recorrido para una de esas caras y el sentido contrario para la otra*. A este último enunciado se le llama *regla de las aristas de Möbius*, empleando aquí para los lados la denominación de *aristas* por analogía con los poliedros. De esa regla nos podemos valer para definir la orientabilidad.

Dada una superficie cualquiera en la cual existe una división poligonal que cumple la condición de que cada arista es común a una o a dos caras según que ella pertenezca o no al borde, se dice que *es orientable si sobre cada cara puede fijarse un sentido de recorrido del contorno de modo que para todas las aristas se cumpla la regla de Möbius*.

Si bien para definir de esta manera la orientabilidad hemos supuesto dada una cierta división poligonal a la que ha sido referida, en verdad es independiente de ella y puede probarse que constituye una propiedad intrínseca que no cambia por una transformación topológica. La orientabilidad es, por tanto, una propiedad topológica.

Como ejemplo vamos a comprobar que la banda de *Möbius* no es orientable. Consideremos el rectángulo $ABCD$ que da origen a la banda de *Möbius*, que en la figura 56 hemos dividido en cuatro triángulos, a tres de los cuales hemos dado un sentido de recorrido que cumple la regla de las aristas de *Möbius*. En el último

triángulo ABD no hemos marcado el sentido, porque si le diéramos el sentido ABD , el que correspondería al lado AB sería de A hacia B ; pero este es lado, también, del triángulo ABC , en

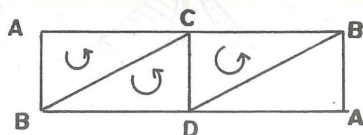


Figura 56

el cual su sentido de recorrido es el de AB , es decir el que vimos antes. Luego, no se cumpliría la regla de *Möbius*. Suponer el sentido ADB daría lugar a que no se cumpliera la regla citada para el lado BD . En consecuencia, la banda de *Möbius* no es orientable.

16. EL HEPTAEDRO DE REINHARDT.

Una superficie interesante, no orientable, es el llamado *heptaedro de Reinhardt*, representado en la figura 57(a).

Como puede apreciarse en la figura, esta superficie resulta de un octaedro regular $ABCEAF$, suprimiéndole cuatro caras triangulares: ACE , EFD , BAF y BCD , y agregándole los tres cuadrados $ACDF$, $ABDE$ y $EFBC$, que no están dibujados pero cuyas mutuas intersecciones AD , CF y BE están representadas. Tales intersecciones *no* deben ser consideradas como aristas.

El poliedro de siete caras que así resulta, se llama heptaedro de *Reinhardt*. Hemos dibujado en la figura 57(b) tres de sus siete caras: AFE , $ACDF$ y $EFBC$. Si

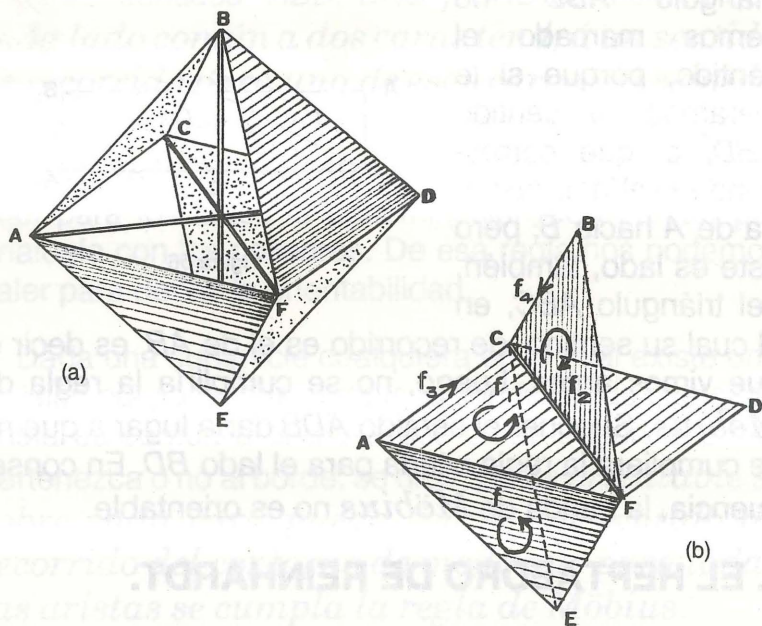


Figura 57

suponemos que a la cara triangular AFE se le asigna el sentido de circulación que indica la flecha curva f , entonces los sentidos de circulación de las caras $ACDF$ y $EFBC$ tienen que ser, necesariamente, los marcados por las flechas curvas f_1 y f_2 respectivamente en razón de los sentidos de recorrido de las aristas FA y EF de la cara AFE . La regla de las aristas de *Möbius* exigiría que el sentido de circulación de la cara triangular ABC fuera tal que los lados AC y BC fueran recorridos en los sentidos de las flechas f_3 y f_4 , ambas dirigidas hacia C , lo cual es imposible. Queda probado entonces, que el heptaedro no es orientable. En particular, resulta que no

puede transformarse topológicamente en la superficie de una esfera. Además, puesto que posee 6 vértices, 12 aristas y 7 caras, se tiene

$$V - A + C = 6 - 12 + 7 = 1.$$

Por consiguiente, su característica es 1; distinta de la de la esfera, que es 2; y de la del toro, que es 0.⁽¹⁾

17. POLIGONOS TOPOLOGICOS.

Temas que luego trataremos, hacen conveniente precisar una noción topológica que deriva del concepto común de polígono y permite formalizar la idea de lado curvilíneo en una superficie, de la que ya tenemos una idea intuitiva.

Se sabe que todo polígono es topológicamente equivalente u homeomorfo con un disco circular; su frontera se aplica sobre la circunferencia y sus puntos interiores se aplican en los puntos interiores del círculo, de manera biunívoca y bicontinua. El disco circular se llama *polígono topológico*, si en su frontera son escogidos r puntos ($r \geq 2$) que lo dividen en r arcos que se llaman *lados*. Los puntos escogidos se llaman *vértices*. Los polígonos topológicos se denominan abreviadamente

(1) Es interesante observar que el heptaedro puede deformarse de manera continua en una superficie cuya ecuación respecto de un sistema de coordenadas rectangulares es

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + xyz = 0$$

que se llama cáliz de Steiner. (D. Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Dover Publications, (1944), pág. 267).

polígonos, si no hay lugar a confusión. En adelante, toda figura homeomorfa con un polígono topológico como el que hemos definido, recibirá este mismo nombre. Cuando $r > 2$, un polígono topológico es siempre homeomorfo a un polígono ordinario, es decir de lados rectilíneos y convexo. Cuando $r = 2$, eso no es cierto pues no existen polígonos rectilíneos con dos lados. Según esto, los polígonos rectilíneos son casos particulares de los polígonos topológicos. En lo que sigue cuando mencionemos la palabra polígono, sin aclarar que es rectilíneo, deberemos entender polígono topológico.

18. CONSTRUCCION DE SUPERFICIES CERRADAS ORIENTABLES A PARTIR DE POLIGONOS, MEDIANTE IDENTIFICACION DE SUS LADOS.

El procedimiento que vamos a emplear en esta sección tiene antecedentes en la sección 9, cuando vimos cómo puede construirse un toro a partir de un rectángulo, pegando, o sea identificando sus lados de determinada manera; asimismo en la sección 14, en que procedimos análogamente al construir la banda de *Möbius*.

En esta sección construiremos diversas superficies por medio de polígonos que son deformados hasta pegar sus lados convenientemente. Desde luego, esas aplicaciones de polígonos sobre las superficies que se construyen con ellos no son homeomorfismos porque, si bien son continuas, no son biunívocas puesto que hay puntos distintos que se transforman en un mismo punto. La construcción que vamos a efectuar permite recono-

cer que existen ciertas superficies simples que pueden descomponerse en uno o varios polígonos, que cumplen ciertas condiciones.

Imaginemos una esfera constituida por una membrana perfectamente elástica. Supongamos que la cortamos a lo largo de un arco PQ , y que apartamos los bordes del corte y luego deformamos la esfera hasta aplicarla en un plano de manera que resulte un polígono curvilíneo, con dos lados que tienen a P y Q como extremos comunes (figura 58).

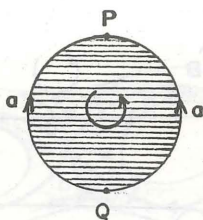


Figura 58

Inversamente, dado el polígono curvilíneo, puede ser recompuesta la esfera pegando los dos lados del polígono. Puede decirse, por consiguiente, que la esfera se obtiene a partir de un polígono de dos lados si se deforma la porción de superficie que encierra, de modo que sus lados se superpongan y queden soldados. En forma breve se dice que los dos lados se identifican de manera que las flechas que se les ha asignado en la figura 58, coincidan. Si al contorno del polígono se le da un sentido de circulación tal como el de la flecha curvilínea dibujada en su interior, entonces puede atribuirse a cada lado un signo $+$ o $-$, según que la flecha que se les haya asignado esté dirigida o no en el sentido de circulación atribuido al polígono. De esa manera, el polígono de dos lados que conforma la esfera puede representarse sim-

bólicamente por

$$a^+ a^- . \quad (18.1)$$

En forma semejante, un toro puede obtenerse a partir de un rectángulo (figura 59) identificando sus lados opuestos, b , de manera que coincidan los sentidos de las flechas, formándose así un cilindro del cual resulta

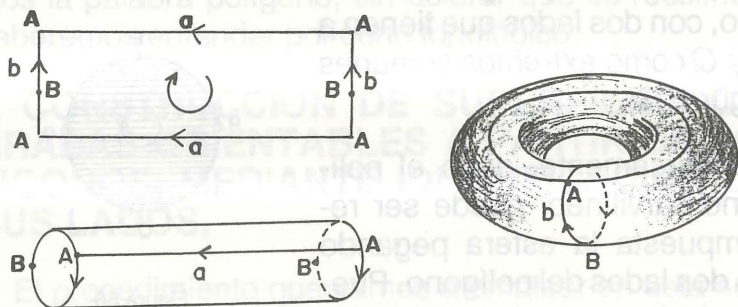


Figura 59

el toro identificando los lados, a , que forman los bordes circulares del cilindro. La flecha circular que aparece dentro del rectángulo, permite atribuir un signo a cada uno de sus lados según que el sentido de la flecha que aparece en cada uno de ellos, coincida o no con la dirección de la circulación prescrita por la correspondiente flecha circular. En consecuencia, obtendremos la siguiente representación simbólica del rectángulo, que pone en evidencia la identificación de sus lados:

$$a^+ b^+ a^- b^- .$$

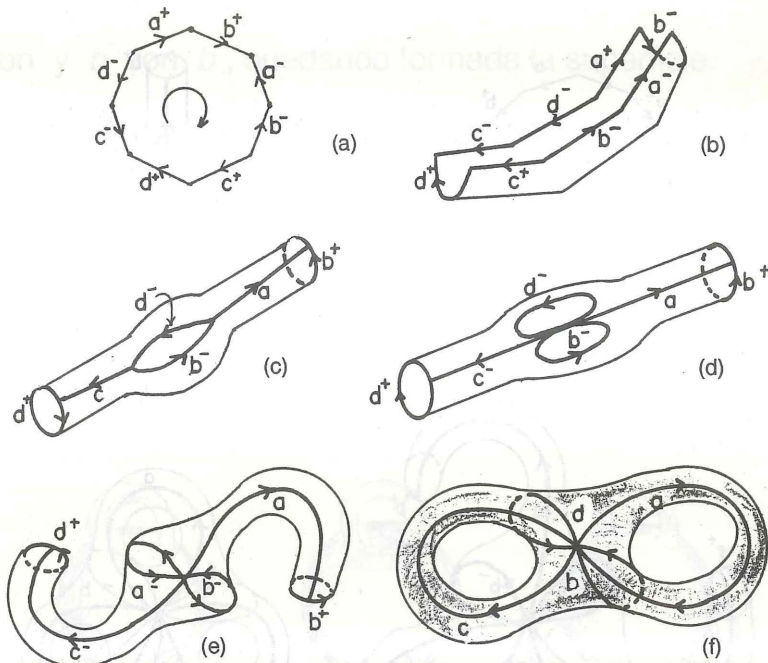


Figura 60

A continuación vamos a describir la construcción de la superficie llamada *toro generalizado de dos agujeros, o doble anillo*, a partir del polígono de ocho lados (figura 60(a)), en el cual se muestra mediante letras y flechas los lados que son identificados, y en qué forma, para luego hacerlos coincidir. Una flecha curvilinea permite atribuir signos a los diferentes lados y representar al polígono mediante la fórmula

$$a^+ b^+ a^- b^- c^+ d^+ c^- d^- .$$

En la figura 60 se muestran las diferentes etapas que permiten construir, mediante deformaciones del polígono

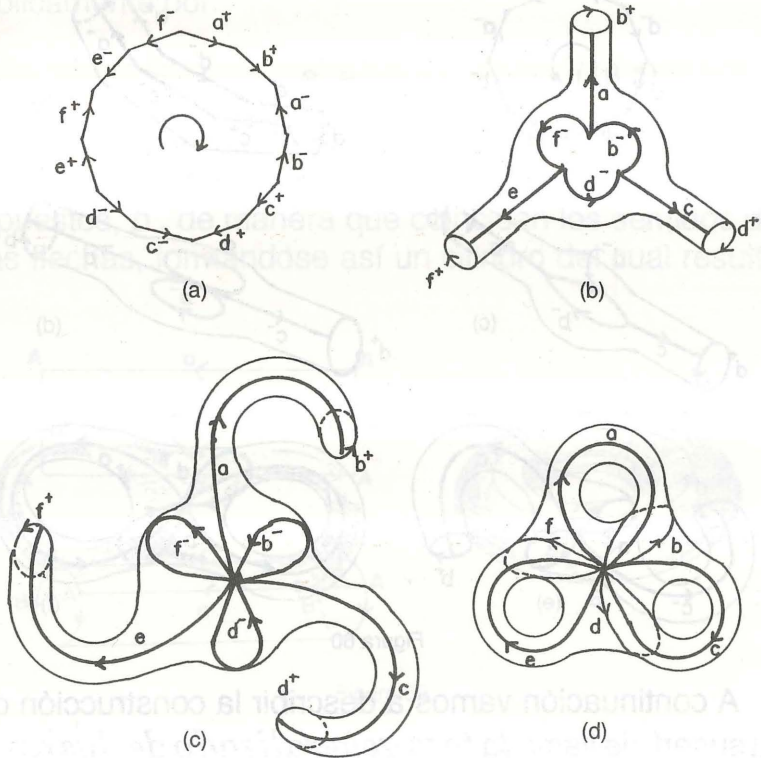


Figura 61

no y sucesivas identificaciones de sus lados, el doble anillo (figura 60(f)). En (b) y (c) se muestra cómo son pegados los lados a y c . En (d) se muestra cómo los lados b^- y d^- son deformados hasta convertirlos en dos curvas simples cerradas, que luego son pegadas con los lados b^+ y d^+ , respectivamente. En (e) se acentúa ese proceso que culmina en (f) al pegarse d^+

con y b^+ con b^- , quedando formada la superficie.

En la figura 61, se presenta la construcción del *toro generalizado de tres agujeros o triple anillo*, a partir de un polígono de 12 lados, representado por

$$a^+ b^+ a^- b^- c^+ d^+ c^- d^- e^+ f^+ e^- f^- .$$

La construcción del triple anillo es, claramente, similar a la del doble anillo.

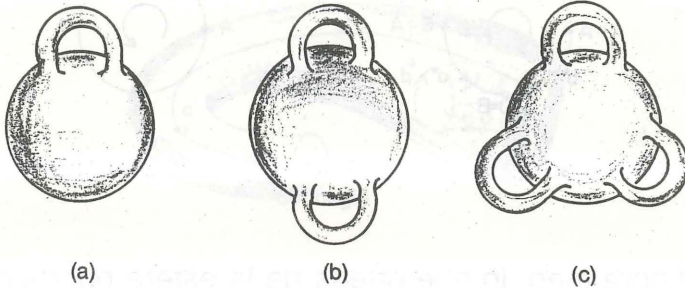


Figura 62

Los ejemplos precedentes son generalizables a toros de un número cualquiera de agujeros, y pueden aplicarse a superficies que se obtienen por deformación continua de otras superficies. Podemos observar que un toro puede transformarse mediante deformación continua en la superficie de la figura 62(a) que se llama *esfera con una asa*. Semejantemente, los toros de dos y tres agujeros pueden transformarse en las esferas de dos y tres asas de las figuras 62(b) y (c).

19. CONSTRUCCION DE SUPERFICIES CERRADAS NO ORIENTABLES A PARTIR DE POLIGONOS, POR IDENTIFICACION DE SUS LADOS.

Se ha visto en la figura 51 que una superficie de un solo lado, no orientable por tanto, se originó en la esfera recortando un cuadrilátero $ABCD$ (fig. 51 (a)).

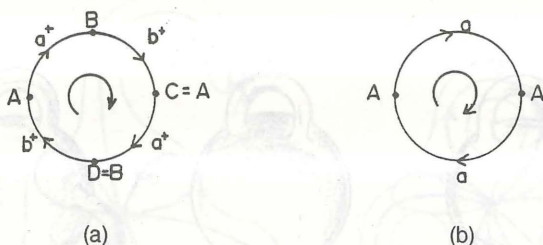


Figura 63

Ahora bien, lo que queda de la esfera puede deformarse y aplicarse sobre un cuadrilátero curvilíneo $ABCD$ que se representa por $a^+ b^+ a^+ b^+$ (figura 63(a)). Es claro que los lados a y b pueden reunirse en uno solo que llamaremos a , de modo que el polígono de cuatro lados cambia en uno de dos: $a^+ a^+$, el cual da origen a la superficie cerrada de la figura 51 (c) al identificarse sus lados de modo que sus flechas resulten coincidentes. Puede observarse en la figura 63(b) que la superficie de la figura 51 (c) se obtiene de un disco circular por deformación e identificación de cada dos puntos, diametralmente opuestos, de su circunferencia.

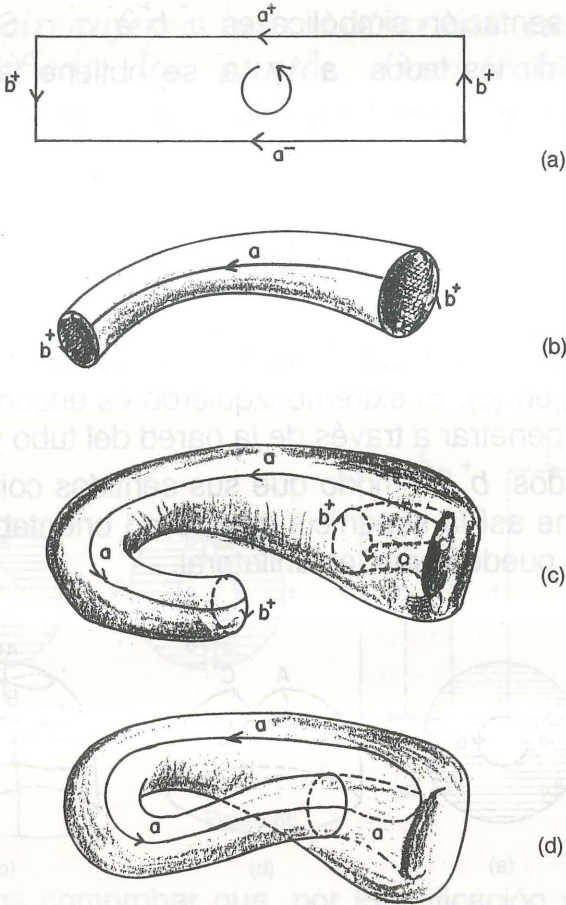


Figura 64

Una notable superficie cerrada no orientable es la llamada *superficie o botella de Klein*, y también, *toro no orientable*. Se construye en la forma que se muestra en la figura 64, a partir del rectángulo (a) cuya

representación simbólica es $a^+ b^+ a^- b^+$. Si se hacen coincidir los lados a^+ y a^- se obtiene la superficie tubular (b) cuyos bordes son los lados b^+ . Luego, los bordes b^+ deben hacerse coincidir de modo que sus flechas tengan la misma dirección. Esto, que a primera vista es imposible, puede lograrse usando el artificio que se representa en (c) y (d). Puede apreciarse que el borde derecho del tubo, que es más ancho que el del lado izquierdo, es doblado hacia el interior en la forma que se ve en (c). El extremo izquierdo es encorvado, se le hace penetrar a través de la pared del tubo y se pegan los lados b^+ de modo que sus sentidos coincidan. Se obtiene así la superficie que es no orientable porque, como puede verse, es unilateral.

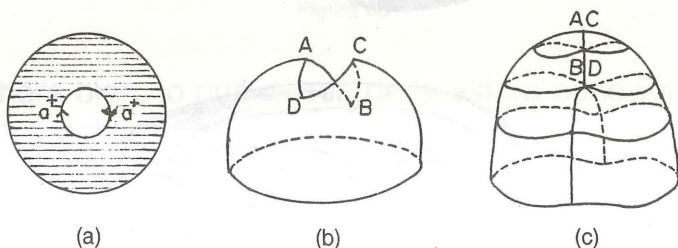


Figura 65

Con el fin de formar superficies cerradas no orientables, conviene emplear la superficie abierta, llamada *casquete cruzado*, que es la mitad superior de la superficie de la figura 51(c). *El casquete cruzado resulta a partir de la región plana comprendi-*

da entre circunferencias concéntricas cuando se identifican los puntos diametralmente opuestos de uno de sus bordes (figura 65(a)).

En la figura se suponen identificados los puntos opuestos del borde interior. Los arcos a^+ de la figura 65(a) se transforman primero en los arcos ADC y CBA de la figura 65(b). Luego, AD se empalma con CB y AB con CD . La figura 65(c) representa al casquete cruzado.

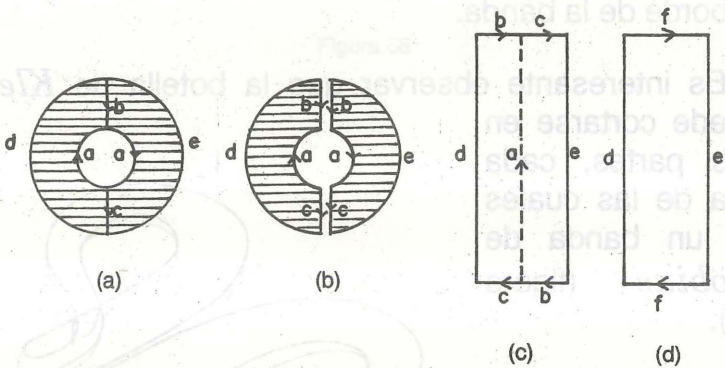


Figura 66

Podemos comprobar que, por identificación de los puntos diametralmente opuestos de una de las dos circunferencias que limitan a una corona circular, tal como la de la figura 66(a), se puede obtener también la banda de *Möbius*. Con ese fin, cortemos la corona circular en dos partes (figura 66(b)). Deformemos luego esas dos partes para formar dos rectángulos, que empalmados a lo largo de sus lados a (figura 66(c)), nos

permite obtener un solo rectángulo (figura 66(d)) en el que los lados f son reuniones de los lados b y c de la figura (c). El rectángulo finalmente obtenido se transforma en una banda de *Möbius*, si lo deformamos hasta superponer los lados f , de manera que sus flechas coincidan en dirección. Puede verse que en tanto la circunferencia externa se transforma en el borde de la banda, la interna se transforma en la línea media. De esta construcción resulta que *entre el casquete cruzado y la banda de Möbius existe un homeomorfismo*. El borde del casquete, tiene como imagen el borde de la banda.

Es interesante observar que la botella de *Klein* puede cortarse en dos partes, cada una de las cuales es un banda de *Möbius* (figura 67).

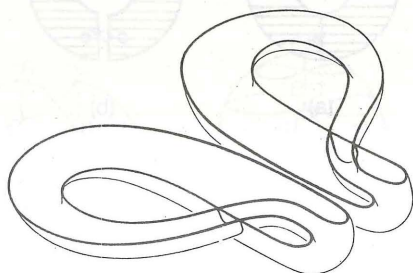


Figura 67

Puede notarse, asimismo, que la superficie de la figura 51(c) es topológicamente equivalente con la superficie cerrada que resulta al recortarle a una esfera un casquete e insertarle, en ese lugar, un casquete cruzado (figura 68). La inserción de asas y casquetes cruzados en una esfera, da origen a nuevas superficies cerradas, orientables o no. Finalmente, con-

viene notar que la inserción de un casquete cruzado en una abertura circular en una esfera, equivale a la identificación de los puntos, diametralmente opuestos, de dicha abertura (figura 68).

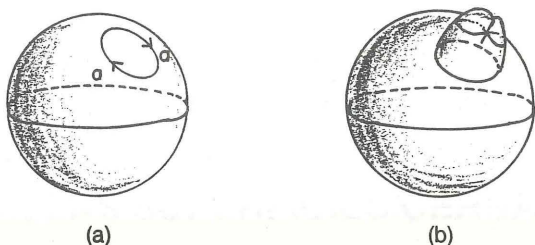


Figura 68

Sabemos que dos superficies son topológicamente equivalentes u homeomorfas si existe una aplicación biunívoca y bicontinua entre ellas. La relación así determinada en el conjunto de las superficies, es de *equivalencia*, es decir, cumple tres condiciones: a) es *reflexiva* (toda superficie es homeomorfa consigo misma); b) es *simétrica* (si una superficie es homeomorfa a otra, entonces la segunda lo es con la primera); y c) es *transitiva* (si una superficie es homeomorfa con otra y ésta lo es con una tercera, entonces la primera es homeomorfa con la tercera). Por consiguiente, el conjunto de todas las superficies cerradas puede dividirse

hay elementos que pertenecen a dos de ellos.

El objeto de la clasificación topológica de las superfi-

§ 4. CLASIFICACION TOPOLOGICA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS

20. OBJETO DE LA CLASIFICACION TOPOLO- GICA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS

Sabemos que dos superficies son topológicamente equivalentes u homeomorfas si existe una aplicación biunívoca y bicontinua entre ellas. La relación así determinada en el conjunto de las superficies, es de *equivalencia*, es decir, cumple tres condiciones: a) es *reflexiva* (toda superficie es homeomorfa consigo misma); b) es *simétrica* (si una superficie es homeomorfa con otra, entonces la segunda lo es con la primera) y c) es *transitiva* (si una superficie es homeomorfa con otra y ésta lo es con una tercera, entonces la primera es homeomorfa con la tercera). Por consiguiente, el conjunto de todas las superficies cerradas puede dividirse en subconjuntos tales que cada uno de ellos contiene a todas las superficies mutuamente homeomorfas. Tales subconjuntos son, por tanto, disjuntos, es decir que no hay elementos que pertenezcan a dos de ellos.

El objeto de la clasificación topológica de las superficies cerradas, es determinar propiedades que caracte-

ricen a cada una de las clases de superficies mutuamente homeomorfas de modo que dada una superficie, esas propiedades sean compartidas por ella y todas las superficies de la misma clase, pero no con superficie alguna de otra clase. Probaremos que la *característica* y la *orientabilidad* o *no orientabilidad* son las propiedades o invariantes topológicos que bastan para distinguir a cada clase de superficies, de todas las demás. En otros términos, dos superficies cerradas son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica y ambas son orientables o no lo son. Habremos probado así, el teorema fundamental de las superficies cerradas.

21. LA NOCION TOPOLOGICA DE SUPERFICIE CERRADA.

Necesitaremos precisar el concepto de superficie cerrada. A ese fin haremos uso de la noción de poliedro topológico. Definiremos, en primer término, al poliedro en el sentido usual.

Definición del poliedro: Un *poliedro* es un conjunto de polígonos simples, en número finito, que se llaman *caras* del poliedro cuyos vértices se llaman *vértices* del poliedro, y cuyos lados se llaman *aristas* del poliedro. Dichos polígonos están situados en el espacio de tal manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Dos polígonos distintos cualesquiera, no tienen ningún punto interior común

2. Para cada lado de un polígono cualquiera, existen dos únicos polígonos, que tienen ese lado en común
3. Dados dos polígonos cualesquiera p y p' , existe una sucesión de polígonos p_1, p_2, \dots, p_n ; tales que el primero es p , el último es p' y cada uno de ellos tiene un lado común con el siguiente
4. Dado un vértice cualquiera del poliedro, los polígonos que concurren en él pueden ordenarse cíclicamente, de modo que dos polígonos consecutivos posean un lado común que llega a ese vértice. Esta condición y la primera, implican que cada vértice es común a tres polígonos, por lo menos. Debe tenerse presente que al referirnos a un poliedro, lo hacemos siempre aludiendo a su superficie.

Un *poliedro topológico* (o simplemente *poliedro*, en lo que sigue), es un conjunto finito de polígonos topológicos (sección 17), que se llaman *caras* y son tales que:

1. Dos caras cualesquiera no tienen ningún punto interior común;
2. Los lados de las caras coinciden de dos en dos por lo tanto su número es par. Cada dos lados coincidentes constituyen una *arista* y sus extremos coinciden de una determinada manera.
3. Dadas dos caras cualesquiera p y p' , existe una

sucesión de caras p_1, p_2, \dots, p_n ; con $p_1 = p$ y $p_n = p'$; tales que cada una de ellas tiene un lado común con la siguiente;

4. Dado un vértice cualquiera de una de las caras, el conjunto de todos los vértices que coinciden con él constituyen un *vértice* del poliedro; y las caras a las que pertenecen dichos vértices pueden ordenarse cíclicamente de manera que los polígonos consecutivos tengan un lado común que "llegue" a ése vértice (esta condición y la primera, implican que cada vértice lo es de tres polígonos, por lo menos).

Observemos que la definición del poliedro topológico difiere de la del poliedro usual en que para este último las caras son polígonos planos en tanto que para el primero son polígonos topológicos, no necesariamente planos. Además, el poliedro topológico puede tener una sola cara y dos lados coincidentes pueden estar en un mismo polígono.

Definición. Se llama *superficie cerrada*, al conjunto de los puntos de un poliedro topológico.

Todo conjunto que es imagen de un polígono topológico, por un homeomorfismo, es también un polígono topológico. En consecuencia, la noción de polígono topológico, es un invariante topológico. Análogamente, las nociones de poliedro topológico y de superficie cerrada son, también, invariantes topológicos.

Una superficie cerrada puede descomponerse, de

diversas maneras, en polígonos topológicos que cumplen las cuatro propiedades mencionadas. Cada una de esas divisiones se denomina *división poligonal* de la superficie, y constituye una red poligonal (sección 15). Por tanto, una superficie cerrada puede dar lugar a diversos poliedros.

Conviene distinguir, claramente, las superficies cerradas (conjuntos de puntos que admiten una división poligonal), de los poliedros topológicos (conjunto de polígonos topológicos que cumplen las propiedades mencionadas). Es fácil concebir un poliedro como una superficie cerrada provista de una división poligonal y en tal sentido podremos referirnos al homeomorfismo de poliedros.

Los poliedros que resultan por división poligonal constituyen un medio para estudiar las superficies cerradas. Este es el método general que se emplea en la parte de la Topología llamada *Topología Combinatoria* o *Algebraica*, en la que se emplea recursos propios del Álgebra.

La parte de la Topología que utiliza como herramienta principal la teoría de conjuntos, se llama *Topología General*, o también, *Topología Conjuntista*; de la que mencionamos algunos conceptos en la sección 5.

22. ESQUEMA PLANO POLIGONAL Y REPRESENTACION SIMBOLICA DE UN POLIEDRO.

En adelante al referirnos a polígonos y poliedros,

debe entenderse que unos y otros son topológicos.

Supongamos dado un poliedro P . A cada una de sus caras le hacemos corresponder un polígono del plano que no requiere cumplir otra condición que la de tener el mismo número de lados que dicha cara. Resulta así un conjunto de polígonos cuyo número es igual al número de caras; cada uno de los cuales es disjunto con los demás. Los lados de dichos polígonos forman pares que contienen a los lados que provienen de una misma arista del poliedro: Diremos entonces que los lados de cada par son *equivalentes* o *identificados*. Análogamente, diremos que dos vértices de los polígonos, son *equivalentes* o *identificados* si provienen de un mismo vértice del poliedro. En tanto que a cada arista del poliedro le corresponde, exactamente, dos lados equivalentes, a cada vértice del poliedro puede corresponderle un número cualquiera de vértices de los polígonos.

Designamos con una misma letra minúscula a los elementos de cada par de lados equivalentes del conjunto de los polígonos planos. Los vértices equivalentes son designados con una misma letra mayúscula. En la figura 69 se muestra un ejemplo en el que aparecen los lados equivalentes señalados con la letra a , cuyos extremos

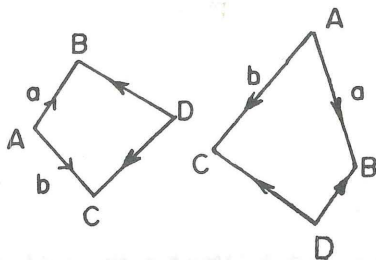


Figura 69

son los puntos A y B . Se observa que para determinar la equivalencia de dichos extremos es suficiente asignar a cada lado una flecha que parte (para los dos lados equivalentes), de vértices equivalentes y se dirige a vértices, también, equivalentes. Así, en el caso de los lados a , las flechas se dirigen de A hacia B . El conjunto de los polígonos deducidos de un poliedro en el que los lados equivalentes son designados por una misma letra, se llama *esquema plano poligonal* del poliedro. Cuando, como veremos luego, se desee dar una *representación simbólica* a los polígonos del esquema, sus lados estarán provistos de flechas que correspondan a sus sentidos de recorrido, según lo explicado.

Debe observarse que dado el esquema plano poligonal de un poliedro, es posible invertir el sentido de la flecha asignada a un lado cualquiera, siempre que también se invierta el sentido de la flecha del lado equivalente.

Es importante señalar, que para que dos vértices del esquema plano poligonal sean equivalentes (es decir, para que correspondan a un vértice del poliedro), es necesario y suficiente que, en relación con el sentido de recorrido indicado por las flechas sobre los lados equivalentes concurrentes en ellos, ambos puntos sean o bien iniciales o bien terminales de dichos lados. Se cumple, por tanto, la siguiente *regla de los vértices equivalentes*: *la equivalencia de dos vértices cualesquiera del esquema plano poligonal queda bien determinada, cuando ambos son o bien*

puntos iniciales o bien puntos finales de lados equivalentes.

Vamos a describir ahora la representación simbólica de un poliedro. Con ese fin nos valdremos de flechas curvas para dar a cada polígono un sentido de recorrido cíclico de sus lados. Puede agregarse entonces, a la letra que representa a cada lado el signo + o el signo -, según que su flecha tenga o no un sentido idéntico al del recorrido que le corresponde en virtud de la flecha curva del polígono al que pertenece. La *representación simbólica* del poliedro se obtiene entonces escribiendo, para cada polígono del esquema, las letras que corresponden a sus lados, en su orden cíclico, afectada cada una del signo + o del signo - que le corresponda según lo convenido.

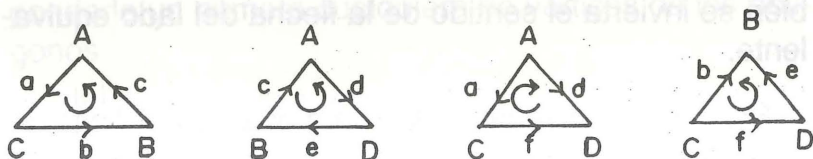


Figura 70

Ejemplo. La división tetraédrica de la esfera representada en la figura 55 determina un poliedro cuyo esquema plano poligonal está representado en la figura 70.

La representación simbólica es:

triángulo ABC : $a^+ b^+ c^+$

triángulo ABD : $c^- e^- d^-$

triángulo ACD : $a^- d^+ f^-$

triángulo BCD : $f^+ e^+ b^-$

Una representación simbólica como la precedente permite reconstruir el esquema plano poligonal y, por tanto, el poliedro que le ha dado origen. Es fácil reconocer entonces que dos poliedros que dan lugar a la misma representación simbólica son homeomorfos. En efecto, si los poliedros P_1 y P_2 tienen la misma representación simbólica, entonces ambos constan del mismo número de caras que se corresponden biunívocamente. Dos caras que se corresponden tienen el mismo número de lados y la misma representación simbólica. De lo que resulta que a cada cara puede asignársele un sentido de circulación y por tanto, a cada arista, un punto inicial y uno final. Entre las aristas también existe una correspondencia biunívoca por la que se corresponden aristas que son lados de caras correspondientes. Puede definirse entonces entre dos aristas correspondientes una aplicación topológica por la que se aplican, uno sobre otro, los puntos iniciales y los finales. En consecuencia, entre los contornos de dos caras que se corresponden queda determinada una aplicación topológica que puede extenderse a una aplicación topológica entre esas

caras,⁽¹⁾ y por consiguiente, entre los poliedros.

Resulta, por tanto, que dos poliedros que tienen el mismo esquema plano poligonal, así como las superficies cerradas a que dan origen, son homeomorfos por cuanto sus representaciones simbólicas son iguales.

Un mismo poliedro puede dar origen a diferentes representaciones simbólicas. Así, por ejemplo, pueden ser cambiadas las letras que designan a sus lados o pueden cambiarse los dos signos que llevan las letras que designan a dos lados equivalentes, lo que equivale simplemente a cambiar el sentido de las flechas de dichos lados. También puede cambiarse el sentido cíclico de los lados de un polígono, en cuyo caso los signos de las letras que designan a sus lados deben ser cambiados.

23. OPERACIONES ELEMENTALES.

Hemos visto que dado el esquema plano poligonal de un poliedro, éste queda determinado, y también la clase de las superficies cerradas mutuamente homeomorfas, que dicho poliedro origina. Resulta de aquí que la bús-

(1) Se hace aquí uso de la siguiente proposición: si el contorno de un disco circular de radio r se aplica topológicamente sobre el contorno de otro disco de radio r' , esa aplicación puede extenderse topológicamente a una aplicación del primer disco en el segundo. En efecto: En coordenadas polares, **la imagen del punto** $P(\rho, \epsilon)$ es el punto $P'(\rho r'/r, \theta)$ donde $A'(r', \theta')$ es la imagen del punto $A(r, \theta)$ del primer disco.

queda de las diversas clases de superficies, en cada una de las cuales están las que son mutuamente homeomorfas, puede reducirse a la clasificación de los diferentes esquemas planos poligonales.

Diremos que dos esquemas planos poligonales son *equivalentes topológicamente*, si corresponden a poliedros que dan lugar a superficies homeomorfas.

Las operaciones que vamos a definir a continuación transforman unos esquemas planos poligonales en otros que les son topológicamente equivalentes. Se les llama *operaciones elementales* y son las siguientes:

1. Subdivisión de una dimensión. Consiste en convertir un par de lados equivalentes del esquema (tales como los lados AB de la figura 71) en dos pares equivalentes (el par AC y el par BC) mediante un punto C . De esa manera, tanto el número de caras como el de vértices aumenta en dos elementos. Luego se asignan flechas adecuadas a los nuevos lados resultantes.

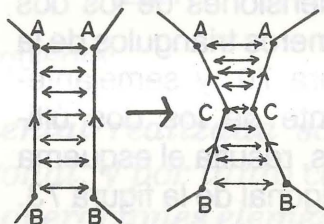


Figura 71

2. Reunión de una dimensión. Es la operación inversa de la anterior, mediante la cual los lados concurrentes de un polígono se reducen a sólo uno.

3. **Reunión de dos dimensiones.** Esta operación consiste en reunir dos polígonos en uno solo, haciendo coincidir dos lados equivalentes (figura 72).

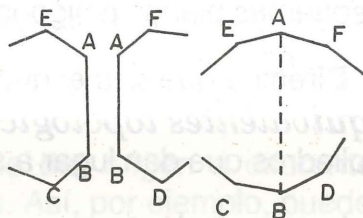


Figura 72

4. **Subdivisión de una dimensión.** Se realiza mediante una diagonal y es la operación inversa de la anterior. Se originan dos nuevos lados a los que se les debe asignar flechas convenientemente.

Ejemplo: Por medio de una reunión de dos dimensiones de los dos primeros triángulos de la figura 70, y semejantemente de los dos últimos, resulta el esquema poligonal de la figura 73.

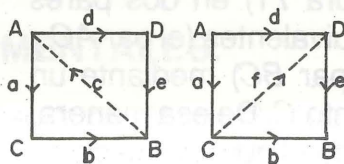


Figura 73

En la figura 74 llevamos a cabo las siguientes operaciones elementales, a partir del esquema poligonal de la figura 73.

En la figura 74(a) el esquema se ha reducido a un único polígono de seis lados, haciendo coincidir los lados d mediante una reunión de dos dimensiones. Luego veremos cómo el esquema 74(a) puede reducir-

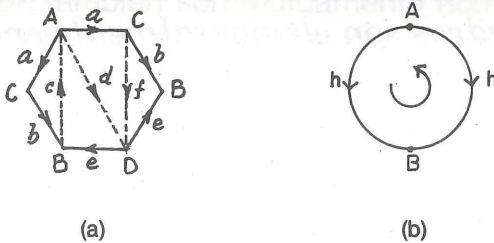


Figura 74

se, mediante operaciones elementales, a un nuevo esquema 74(b) formado por un único polígono de dos lados que corresponde, desde luego, al esquema plano de un poliedro de dos caras que es homeomorfo con la esfera. La representación simbólica se reduce a

$$h^+ h^- . \quad (23.1)$$

Es de gran importancia, lo siguiente:

Cada operación elemental realizada sobre un esquema plano poligonal, y por tanto cada sucesión consecutiva de operaciones elementales, da lugar a un esquema que corresponde a un poliedro homeomorfo con el del esquema original. Resulta así que para que dos esquemas planos poligonales correspondan a superficies cerradas topológicamente equivalentes, es suficiente que uno de ellos pueda transformarse en el otro mediante operaciones elemen-

tales, en cuyo caso se dice que son "emparentados elementalmente". También diremos que dos poliedros son elementalmente emparentados, si lo son sus correspondientes esquemas poligonales.

La demostración del hecho fundamental que hemos mencionado excede los propósitos de la presente exposición. Daremos solo una justificación de carácter intuitivo.

Sean P_1 y P_2 dos poliedros tales que el esquema plano poligonal de P_2 resulta del de P_1 por una operación elemental; por ejemplo, una subdivisión de dos dimensiones. Es decir que dividiendo una cara de P_1 en dos caras mediante una diagonal, se obtiene un poliedro P_3 cuyo esquema es igual al de P_2 . Puesto que P_3 y P_2 , así como P_1 y P_3 , determinan superficies cerradas homeomorfas, lo mismo ocurrirá con P_1 y P_2 . Puede observarse que sucedería lo mismo si el esquema plano de P_2 resultara del de P_1 por un número finito, mayor que 1, de operaciones elementales.

24. REDUCCION A LAS FORMAS NORMALES.

Es posible dividir el conjunto de los poliedros en clases disjuntas, en cada una de las cuales se encuentren aquellos cuyos esquemas planos poligonales se deducen uno de otro por operaciones elementales, y por tanto son emparentados elementalmente. Luego cada clase es definida por cualquiera de los poliedros que le pertenecen. Según sabemos, todos los poliedros de una

misma clase son homeomorfos entre sí y generan superficies que también son mutuamente homeomorfas. Posteriormente comprobaremos que, recíprocamente, si dos superficies son homeomorfas, los poliedros que les corresponden están emparentados elementalmente. Por ahora vamos a establecer que entre todos los poliedros de una clase puede elegirse uno, el más simple posible, que se llama *forma normal* de esa clase. En términos generales, la forma normal es aquella para la cual los números de caras, aristas y vértices son los menores posibles.

A las formas normales de los poliedros les corresponden las formas normales de sus esquemas poligonales. Indicaremos en lo que sigue el procedimiento mediante el cual un esquema plano poligonal es transformado en la forma normal mediante una sucesión finita de operaciones elementales.

La reducción a la forma normal de un esquema plano poligonal puede llevarse a cabo en seis pasos, en cada uno de los cuales se utiliza un número finito de operaciones elementales. El objeto de los tres primeros pasos es reducir el número de polígonos, el de lados y el de vértices no equivalentes. A partir del cuarto paso, esos números ya no cambian. El propósito de los tres últimos pasos es obtener del esquema que resulta del tercer paso otro que sea el más regular posible. La representación simbólica facilita esa reducción.

Primer paso. En este primer paso se disminuye el número de polígonos, hasta reducirlo a uno solo. Supon-

gamos, pues, que el número de polígonos es mayor que 1. La reducción de su número se lleva a cabo por sucesivas reuniones de dos dimensiones. El primer paso se ilustra en las figuras 73 y 74(a) en que los polígonos del esquema plano poligonal de la figura 70 se reducen, mediante operaciones elementales, al único polígono de la figura 71(b). Al final se obtiene un único polígono con un número par de lados que son equivalentes dos a dos. La representación simbólica consta pues de una sola línea en la que cada letra aparece dos veces con signos que pueden ser contrarios o no. En el caso de que este último polígono tenga sólo dos lados, su representación simbólica es necesariamente:

$$a^+ a^- \quad (24.1)$$

o bien $a^+ a^+ . \quad (24.2)$

Estas son ya formas muy simples, que vamos a considerar como *normales*. (Ver el cuadro de reducción a las formas normales que está al final del libro).

Supondremos en adelante, que el esquema está formado por un solo polígono de cuatro lados por lo menos.

Segundo paso. Se trata ahora de eliminar todos los pares de lados adyacentes equivalentes, de dirección contraria; es decir, todos los grupos $a^+ a^-$ de la representación simbólica del único polígono que constituye el esquema. Si hay dos lados adyacentes que son orientados en sentidos opuestos, la representación simbólica

puede ser de la forma

$$\sim a^+ a^- \sim \quad (24.3)$$

donde las líneas ondulantes designan a los otros lados del polígono (figura 75(a)). Puesto que el polígono tiene al menos cuatro

lados, puede suponerse, efectuando si es preciso una permutación cíclica de los lados, que en la representación simbólica (24.3) hay, por lo menos, un lado

antes de $a^+ a^-$ y, por lo menos, un lado

después de $a^+ a^-$. Mediante una subdivisión de dos dimensiones, el esquema (24.3) se cambia en el esquema de dos polígonos

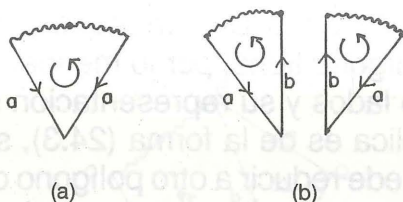
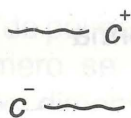


Figura 75

$$\sim a^+ b^+ \\ b^- a^- \sim$$

en donde b es el nuevo lado. El nuevo esquema está representado en la figura 75(b), en donde se han marcado las nuevas flechas rectilíneas y curvilíneas. Luego, por una reunión de una dimensión, se forma con los dos lados a y b un solo lado c , y los dos polígonos se reducen a



como se ve en la figura 76(a). Por último se deducirá de estos dos polígonos uno solo mediante una reunión de dos dimensiones en que se empalman los lados c (figura 76(b)). De esa manera, si el polígono tiene, por lo menos, cuatro lados y su representación simbólica es de la forma (24.3), se le puede reducir a otro polígono cuya representación simbólica se obtiene, a partir de (24.3), suprimiendo simplemente al par $a^+ a^-$.

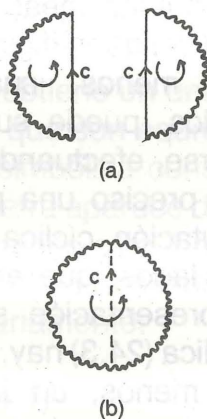


Figura 76

Al reiterar el procedimiento anterior un número finito suficiente de veces, se llegará finalmente a uno de los dos casos siguientes:

α) se obtiene un polígono de dos lados

β) se obtiene un polígono con cuatro lados o más, en el que no hay dos lados adyacentes de la forma $a^+ a^-$.

En el caso α se ha llegado ya a una de las formas normales (24.1) o (24.2).

Proseguimos ahora la reducción en el caso (β). Supondremos pues en adelante que el esquema conside-

rado está formado por un solo polígono con cuatro lados al menos y que no tiene dos lados adyacentes de la forma $a^+ a^-$.

Tercer paso. El polígono al que hemos llegado tiene $n (\geq 4)$ lados y por lo tanto n vértices; y los vértices equivalentes son designados por la misma letra. Si todos los vértices ya son equivalentes, se ha logrado el objetivo y se siguen los demás pasos. En caso contrario, se procede como sigue:

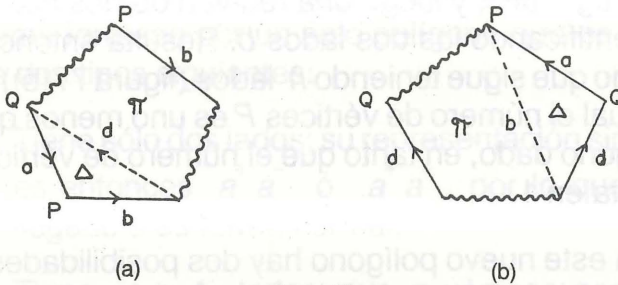


Figura 77

Consideremos un vértice P . A los vértices equivalentes a P también los designamos con P . En virtud de la hipótesis existe un vértice, por lo menos, que no es equivalente a P . Por tanto, en el contorno del polígono hay por lo menos un vértice Q que no es equivalente a P y que está en un extremo de un lado cuyo otro extremo es P (figura 77(a)). Sea a este lado y b el lado adyacente que parte de P . El otro extremo del lado b puede ser un vértice P , un vértice Q , o un vértice no equivalente ni a P ni a Q . Unamos ese vértice con Q mediante la diagonal d . El polígono dado resulta dividido en un triángulo Δ y un polígono Π de $n-1$ lados (figura

77(a)). Comprobaremos que los lados adyacentes a y b del triángulo Δ , no son equivalentes. En efecto, en caso contrario sería o bien $b^+ = a^+$ o bien $b^+ = a^-$; ahora bien, si $b^+ = a^+$, los vértices P y Q serían equivalentes, lo que sería una contradicción; si $b^+ = a^-$, el polígono dado tendría dos lados adyacentes de la forma $a^+ a^-$, contra la hipótesis. Luego, el lado equivalente al lado b está, sin duda, en el contorno del polígono Π (figura 77(a)). Apliquemos ahora una subdivisión de dos dimensiones en la diagonal d , y luego una reunión de dos dimensiones identificando los dos lados b . Resulta entonces un polígono que sigue teniendo n lados (figura 77(b)), pero en el cual el número de vértices P es uno menos que en el polígono dado, en tanto que el número de vértices Q , aumenta en 1.

Para este nuevo polígono hay dos posibilidades:

α) Hay lados adyacentes equivalentes y orientados en sentido opuesto

β) No tiene lugar la situación anterior.

En el caso β el tercer paso debe repetirse para seguir reduciendo el número de vértices P . Al cabo de un número finito de veces se llegará a un polígono de n lados con dos lados adyacentes de la forma $a^+ a^-$. Esto ocurrirá, a lo sumo, cuando el polígono reducido tenga sólo uno de los vértices P , pues entonces, los dos lados que tienen a P como vértice común serán necesariamente equivalentes y orientados en sentido opuesto.

En cuanto se presentan lados adyacentes orientados en sentido opuesto, se deberá proceder como en el segundo paso. Mediante ese procedimiento se obtendrá un nuevo polígono que: o bien tiene sólo dos lados (y se encuentra ya en su forma normal) o bien tiene cuatro lados por lo menos, y no todos sus vértices son equivalentes; entonces se aplica nuevamente el tercer paso.

Mediante los tres primeros pasos descritos, todo esquema plano poligonal puede ser reducido, mediante un número finito de operaciones elementales, a un nuevo esquema formado por un solo polígono que es de uno de los dos tipos siguientes:

1. Tiene sólo dos lados; su representación simbólica es entonces $a^+ a^-$ ó $a^+ a^+$, por lo que se ha llegado a su forma normal;
2. Tiene $n \geq 4$ lados, sus n vértices son todos equivalentes, y no hay grupos $a^+ a^-$. En lo que sigue nos ocuparemos de polígonos del segundo tipo exclusivamente.

Cuarto paso. Consideremos pues un polígono del segundo tipo. El propósito de este paso es transformarlo mediante operaciones elementales en otro polígono de la misma clase, que tenga al menos un par de lados equivalentes de signos contrarios; y que cualesquiera que sean dos lados equivalentes del mismo signo, ellos sean adyacentes.

Puesto que en el polígono considerado los lados son

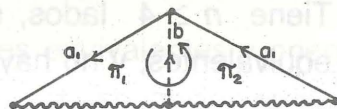
equivalentes dos a dos, cada letra que representa un lado aparece dos veces en su representación simbólica, con signos contrarios o no. Si para cada par de lados equivalentes los dos signos son contrarios, se habrá alcanzado el propósito de este cuarto paso y se pasará directamente al quinto. Si hay dos lados equivalentes afectados de un mismo signo y que no son adyacentes, procederemos como sigue para reemplazarlos por dos lados equivalentes adyacentes y afectados por el mismo signo.

Sean dos lados equivalentes b , no adyacentes y afectados de signos iguales. La representación simbólica es por tanto de la forma

$$\sim b^+ \sim b^+$$



(a)



(b)

Figura 78

Unamos ahora, mediante la diagonal a_1 (figura 78(a)) los dos vértices hacia los que están orientadas las flechas que llevan los lados b . Apliquemos luego, sucesivamente, una subdivisión de dos dimensiones a lo largo de a_1 y una reunión de dos dimensiones a lo largo de b (figura 78(b)). La representación simbólica del nuevo polígono así obtenido es

$$\underbrace{a_1^+ a_1^+}$$

De esta manera se ha reemplazado los dos lados equivalentes b , que no eran adyacentes y que tenían el mismo signo, por dos lados equivalentes a_1 que son adyacentes y que también tienen el mismo signo. En esas operaciones los lados representados por las líneas onduladas han sido globalmente transportados, sin perder su continuidad, hasta formar parte del nuevo polígono.

Si en el nuevo polígono hay aún dos lados equivalentes afectados de un mismo signo y que no son adyacentes, se les puede convertir en dos lados adyacentes $a_2^+ a_2^+$ sin que desaparezca el par $a_1^+ a_1^+$ que ya fue obtenido. Continuando de esa manera, el procedimiento se detendrá sólo cuando todos los pares de lados equivalentes afectados del mismo signo queden reemplazados por pares de lados equivalentes adyacentes y afectados de un mismo signo.

Si de la manera descrita resultan agotados todos los lados del polígono, habremos obtenido un polígono cuya representación simbólica será de la forma

$$a_1^+ a_1^+ a_2^+ a_2^+ \dots a_q^+ a_q^+ \quad (24.4)$$

que es suficientemente simple como para considerarla una *forma normal*. De lo contrario, se aplica el quinto paso.

Quinto paso. Partiremos ahora de un esquema que

se reduce a un solo polígono con $n \geq 4$ lados y en el que sus vértices son todos equivalentes. Además, cumple las condiciones siguientes: por lo menos hay un par de lados equivalentes con signos contrarios; y si hay algún par de lados equivalentes afectados del mismo signo, esos lados son adyacentes.

En este paso, el polígono dado será transformado, mediante operaciones elementales, en otro cuya representación simbólica estará formada por sucesiones de lados adyacentes de la forma $a_1^+ a_1^+$ o de la forma $a^+ b^+ a^- b^-$ exclusivamente.

Sea $c^+ c^+$ un par de lados equivalentes y de signos contrarios, que existen por hipótesis. Decimos que hay, por lo menos, otro par de lados equivalentes y orientados en sentidos opuestos $d^+ d^-$ tal que los dos pares $c^+ c^-$ y $d^+ d^-$ se "intercalan" en el contorno, con lo cual queremos decir que la representación simbólica del polígono es de la forma

$$\sim c^+ \sim d^+ \sim c^- \sim d^- \sim \quad (1)$$

En efecto, si el par $c^+ c^-$ no estuviera intercalado con

(1) Esta representación simbólica puede tomar otras formas como

$$\begin{array}{l} \text{o} \quad \sim c^- \sim d^+ \sim c^+ \sim d^- \sim \\ \quad \sim d^- \sim c^+ \sim d^+ \sim c^- \sim \end{array}$$

etc.; pero todas ellas pueden ser reducidas a la forma dada en el texto si se cambia convenientemente el sentido de las flechas y se efectúa una permutación cíclica de los lados.

otro par de lados equivalentes, con signos contrarios, los lados de la sucesión

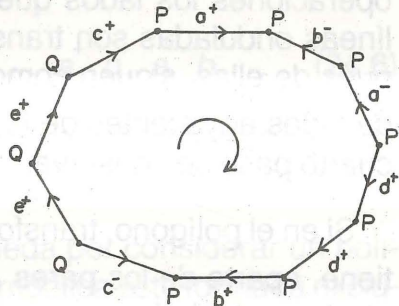
$$c^+ \text{ --- } c^- \quad (24.5)$$

serían equivalentes entre ellos dos a dos, pues si entre ellos hubiera un lado a^+ que forma parte de un par de lados equivalentes del mismo signo, el equivalente sería a^+ y estaría vecino al primero, por tanto pertenecería también a la sucesión; y si en (24.5) hubiera un lado b^+ que forma parte de un par de lados equivalentes de signos contrarios, el equivalente sería b^- y estaría también en la sucesión (24.5) porque de no ser así, el par c^+, c^- estaría intercalado con el par b^+, b^- . Resultaría entonces imposible comprobar mediante el esquema poligonal que los vértices iniciales de c^+ y c^- son equivalentes con sus vértices finales, en contradicción con el hecho de que todos los vértices son equivalentes.⁽¹⁾

(1) Para aclarar lo dicho, consideremos el polígono de la figura adjunta en que el par c^+, c^- no está intercalado con otro par análogo. En este caso, la representación simbólica es dada por

$$c^+ a^+ b^- a^- d^+ d^+ b^+ c^- e^+ e^+.$$

Del examen de la equivalencia de los lados se deduce que el vértice final P de lado c^+ es equivalente a los vértices designados por P , pero no equivalente con los vértices Q . Por tanto, este polígono no es aún de vértices equivalentes.



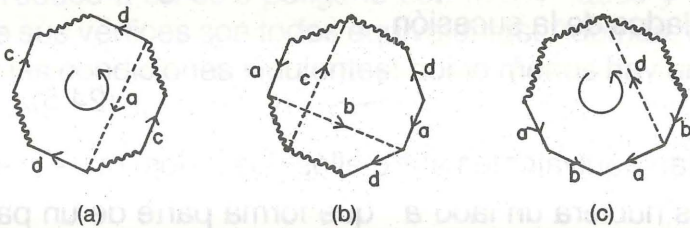


Figura 79

Los dos pares de vértices equivalentes que se intercalan, $c^+ c^-$ y $d^+ d^-$, los cuales existen por lo que acabamos de probar, pueden convertirse en dos nuevos pares que forman una sucesión de lados adyacentes $a^+ b^+ a^- b^-$, mediante un número finito de operaciones elementales. Las figuras 79(a), (b) y (c) muestran cómo esas operaciones que consisten de una subdivisión de dos dimensiones según la diagonal a seguida de una reunión de dos dimensiones a lo largo de los lados c y luego, de una subdivisión de dos dimensiones según la diagonal c seguida de una reunión de dos dimensiones a lo largo de los lados d . Como se ve, durante esas operaciones los lados que son representados por las líneas onduladas son transportados en bloque y, después de ellas, siguen como antes. Por tanto, los pares de lados adyacentes de la forma $a_i^+ a_i^+$ obtenidos en el cuarto paso se conservan durante este quinto paso.

Si en el polígono, transformado como se ha dicho, se tiene, aparte de los pares $a^+ a^-$ y $b^+ b^-$ ya obtenidos, otro par de lados equivalentes afectados de signos

contrarios, llamémoslos $e^+ e^-$, este par no puede intercalarse con el par $a^+ a^-$ ni con el par $b^+ b^-$. Existe, por tanto, otro par $f^+ f^-$ tal que los pares $e^+ e^-$ y $f^+ f^-$ se intercalan. Con estos podemos proceder de manera semejante a como lo hicimos antes con los pares $c^+ c^-$ y $d^+ d^-$, y quedarán reemplazados por una sucesión de lados adyacentes de la misma forma que $a^+ b^+ a^- b^-$. En el curso de esta nueva reducción, las sucesiones de lados adyacentes de las formas $a_1^+ a_1^+$ y $a^+ b^+ a^- b^-$, que ya fueron obtenidas, permanecen intactas.

Continuando de la misma manera se llegará, finalmente, a un polígono cuya representación simbólica tiene, únicamente, sucesiones de lados adyacentes de las formas $a_1^+ a_1^+$ o $a^+ b^+ a^- b^-$.

Si, en particular, la representación simbólica tiene solamente sucesiones de lados adyacentes de la forma $a^+ b^+ a^- b^-$, es decir, si la representación simbólica del polígono se reduce a

$$a_1^+ b_1^+ a_1^- b_1^- a_2^+ b_2^+ a_2^- b_2^- \dots a_p^+ b_p^+ a_p^- b_p^- , \quad (24.6)$$

se logra ya una forma simple que consideraremos *normal*.

Sexto paso. Sólo nos queda por considerar un polígono cuya representación simbólica esté formada exclusivamente por sucesiones de lados adyacentes de la

forma $a_1^+ a_1^+$ ó de la forma $a^+ b^+ a^- b^-$, y en que cada una de esas formas se presenta efectivamente. En este paso se trata de reducir el polígono a la forma (24.4), mediante un número finito de operaciones elementales.

Veremos, en efecto, que cada sucesión $a^+ b^+ a^- b^-$ puede ser reemplazada por dos de la forma $a_1^+ a_1^+$. Con tal fin, consideremos una sucesión $a^+ b^+ a^- b^-$ y una sucesión $c^+ c^+$. En primer término, podemos convertir $a^+ b^+ a^- b^-$ y $c^+ c^+$ en tres pares de lados equivalentes tales que los signos atribuidos a los lados de cada par sean los mismos (figuras 80(a) y (b)). Las operaciones son: subdivisión de dos dimensiones según la diagonal d y reunión a lo largo de c .

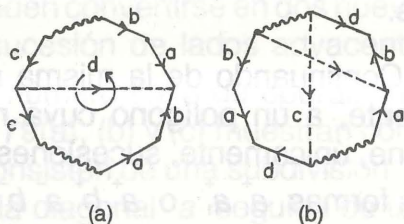


Figura 80

Los pares resultantes están formados por los dos lados a , los dos lados b y los dos lados d .

Ahora aplicando por tres veces consecutivas el procedimiento del cuarto paso, los tres pares obtenidos pueden reemplazarse por tres nuevos pares, cada uno de los cuales está formado por lados equivalentes, afectados de un mismo signo y adyacentes, como se aprecia en las figuras 80(b) y 81(a), (b), (c).

Se llega así, finalmente, a un polígono cuya representación simbólica tiene la forma (24.4).

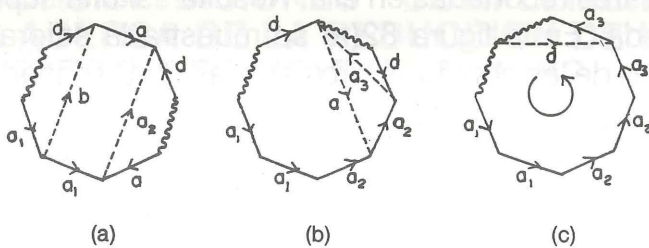


Figura 81

Al final del libro se ha incluido un cuadro, titulado *Reducción de un poliedro a la forma normal*, en que se da el diagrama de flujo del procedimiento descrito hasta aquí.

En resumen:

Todo poliedro esta emparentado elementalmente con un poliedro de una sola cara, cuyo esquema plano poligonal se reduce a un polígono cuya representación simbólica tiene una de las tres formas normales siguientes:

$$\text{FN1: } a^+ a^-, \quad (24.1)$$

$$\text{FN2: } a_1^+ b_1^+ a_1^- b_1^- a_2^+ b_2^+ a_2^- b_2^- \dots a_p^+ b_p^+ a_p^- b_p^-, \quad (24.6)$$

$$(p = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{FN3: } a_1^+ a_1^+ a_2^+ a_2^+ \dots a_q^+ a_q^+, \quad (24.4)$$

$$(q = 1, 2, 3, \dots).$$

Ejemplo. Consideremos una esfera en la cual se ha insertado tres casquetes cruzados, en tres aberturas

circulares recortadas en ella. Resulta así una superficie cerrada. En la figura 82(a) se muestra la esfera y los bordes de las aberturas circulares en que se insertan los

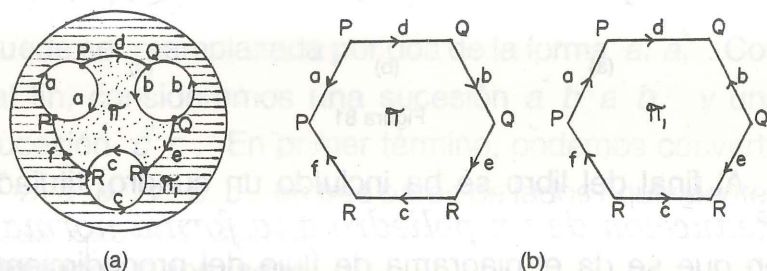


Figura 82

tres casquetes cruzados. Cada uno de ellos puede ser generado por la identificación de los puntos diametralmente opuestos de dichos bordes. La esfera puede entonces ser dividida para formar un poliedro de caras Π y Π_1 , la segunda de las cuales está formada por la parte rayada de la esfera, y toda la parte no visible de ella. Π está formada por la parte punteada. En el dibujo se señalan las diferentes aristas del poliedro y sus sentidos dados por flechas. La figura 82(b) presenta el esquema poligonal, formado por dos polígonos de seis lados. El procedimiento de reducción a la forma normal conduce, en este caso, a un polígono cuya representación simbólica es del tipo (24.4) con $q = 3$. Puede probarse, en general, que la forma normal de todo poliedro proveniente de una esfera en que se insertan q casquetes cruzados, es (24.4).

25. CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS ACERCA DE LA REDUCCION DE LOS POLIEDROS A FORMAS NORMALES

Las consideraciones siguientes tienen por objeto dar una interpretación geométrica de los tres últimos pasos del procedimiento de normalización que hemos tratado de manera combinatoria y que, como veremos, corresponden a determinadas construcciones geométricas. Con tal fin, vamos a describir las superficies que corresponden a las formas $FN1$, $FN2$ y $FN3$.

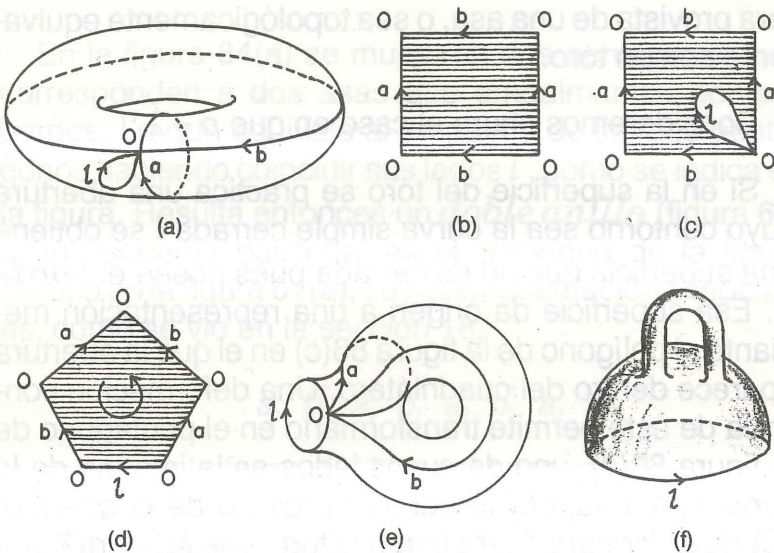


Figura 83

La forma normal $FN1$ es dada por (24.1) y corresponde a las superficies cerradas homeomorfas con la *esfe-*

ra , las cuales pueden considerarse como las más simples de todas las superficies cerradas.

Consideremos ahora la forma normal $FN2$. Recordemos con ese fin que el toro (fig. 83(a)) admite como esquema poligonal al cuadrilátero de la figura 83(b), cuya representación simbólica es

$$a^+ b^+ a^- b^- ,$$

que corresponde a la forma $FN2$ en el caso en que $p = 1$. Podemos establecer por tanto, que dicha forma corresponde a una superficie homeomorfa con una esfera provista de una asa, o sea topológicamente equivalente con un toro.

Consideremos ahora el caso en que $p = 2$:

Si en la superficie del toro se practica una abertura cuyo contorno sea la curva simple cerrada l se obtiene una superficie que no es cerrada pues posee el *borde* l . Esa superficie da origen a una representación mediante el polígono de la figura 83(c) en el que la abertura aparece dentro del cuadrilátero. Una deformación continua de éste permite transformarlo en el pentágono de la figura 83(d), uno de cuyos lados es la imagen de la curva l . La superficie del toro provisto de la abertura puede deformarse para tomar la forma de la figura 83(e) y también 83(f), en las cuales aparecen los bordes l . La última justifica el nombre de asa que se da a la superficie abierta cuyo diagrama poligonal es dado en la figura 83(d), cuya representación simbólica es

$$a^+ b^+ a^- b^- l^-$$

que ya hemos tratado en la sección 18.

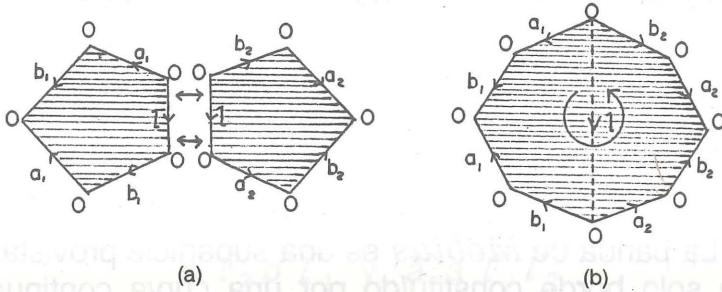


Figura 84

En la figura 84(a) se muestran dos pentágonos que corresponden a dos asas que empalmamos por sus bordes. Lo que equivale al empalme de los dos pentágonos haciendo coincidir sus lados l , como se indica en la figura. Resulta entonces un *doble anillo* (figura 60) cuyo esquema poligonal es el octógono de la figura 84(b) o en la figura 61 (a), cuya representación simbólica es, como se vio en la sección 18,

$$a_1^+ b_1^+ a_1^- b_1^- a_2^+ b_2^+ a_2^- b_2^-$$

la que es de la forma $FN2$, en el caso $p = 2$.

De manera análoga puede obtenerse la forma normal $FN2$, en el caso $p = 3$:

En una abertura circular hecha en la superficie de un doble anillo puede insertarse una asa de manera que coincidan los bordes de ambas superficies. Resulta así

una superficie cerrada que es el triple anillo cuyo esquema poligonal se reduce a un polígono de doce lados y que es homeomorfa con una esfera en la que están insertadas dos asas. Su representación simbólica es de la forma normal $FN2$ en el caso $p = 3$. El procedimiento puede generalizarse para obtener superficies homeomorfas con una esfera provista de un número cualquiera p de asas, cuyas representaciones normales son de la clase $FN2$. Nos referimos, por último, a la forma normal $FN3$.

La banda de *Möbius* es una superficie provista de un solo borde constituido por una curva continua y cerrada del espacio. De la misma manera que un toro resulta al insertar una asa en una abertura hecha en una esfera, puede insertarse una banda de *Möbius* haciendo corresponder su borde con el de la abertura de la esfera. Es claro, sin embargo, que esta operación es imposible en un espacio de tres dimensiones sin que la banda se cruce consigo misma durante el proceso. Es posible demostrar, sin embargo, que en un espacio de cuatro dimensiones puede llevarse a cabo dicha operación sin que la banda tenga que atravesarse a sí misma.

En la sección 19 vimos que la banda de *Möbius* es homeomorfa con el casquete cruzado. La inserción de una banda de *Möbius* en una abertura hecha en una esfera puede entonces llevarse a cabo en el espacio de tres dimensiones, insertando un casquete cruzado y empalmando los bordes de ambas superficies. Se obtiene así la superficie de la figura 51(c) ó la de la figura 68(b), cuya representación simbólica se reduce a la

forma normal FN3 :

$$a^+ a^+ \quad (25.1)$$

correspondiente a $q = 1$, la cual puede deducirse, sea de lo expresado al comienzo de la sección 19 respecto de la figura 67, sea observando que el esquema poligonal que representa a la superficie en referencia, está formado por los dos polígonos de la figura 85, cuyas representaciones simbólicas son

$$b^+ l_2^+ b^+ l_1^- \quad \text{y} \quad a^+ a^- l_1^+ l_2^+$$

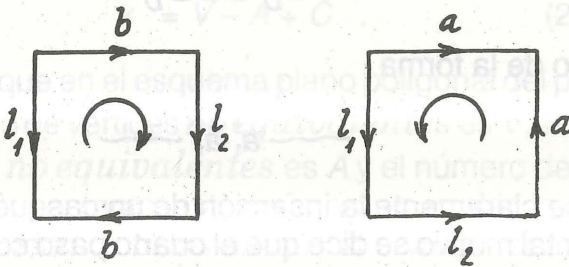


Figura 85

En efecto: el primer rectángulo representa a la banda de *Möbius* cuyo borde libre está representado por los lados l_1 y l_2 ; y el segundo representa a la esfera provista de una abertura cuyo borde está representado por los lados l_1 y l_2 . Este esquema puede reducirse a la forma normal (25.1) mediante el procedimiento general de la sección 24, como puede comprobarse.

De lo expresado en esta sección se deduce que la presencia, en el polígono que representa a una superficie cerrada, de un grupo de la forma $a^+ b^+ a^- b^-$ demuestra la existencia en esa superficie de un asa insertada en otra superficie provista de una abertura. Semejantemente, la presencia de un par de la forma $a^+ a^+$ demuestra que la superficie resulta de la inserción de un casquete cruzado.

En el procedimiento de normalización de la sección 24, el cuarto paso mediante el cual se cambia un polígono cuya representación simbólica es de la forma

$$\sim b^+ \sim b^+$$

por otro de la forma

$$\sim a_1^+ a_1^+ \sim$$

aparece claramente la inserción de un casquete cruzado. Por tal motivo se dice que el cuarto paso consiste en la *normalización de casquetes cruzados*.

Semejantemente, el quinto paso da lugar a la formación de grupos $a^+ b^+ a^- b^-$, razón por la que se dice que consiste en la *normalización de asas*.

El sexto paso se llama *conversión de asas en casquetes cruzados*. Tiene lugar cuando la representación simbólica se reduce a asas y casquetes cruzados, en cuyo caso puede reducirse a casquetes cruzados, exclusivamente.

26. CARACTERÍSTICAS Y ORIENTABILIDAD DE POLIEDROS Y SUPERFICIES CERRADAS

En las secciones 13 y 15 nos referimos, de manera preliminar, a las nociones de característica y orientabilidad. Trataremos ahora acerca de la característica y orientabilidad de un poliedro para luego definir las de una superficie cerrada.

Consideremos un poliedro. Sea V el número de sus vértices, A el de sus aristas y C el de sus caras. Se llama *característica* del poliedro al número

$$k = V - A + C \quad . \quad (26.1)$$

Es claro que en el esquema plano poligonal del poliedro, el número de vértices *no equivalentes* es V , el número de lados *no equivalentes* es A y el número de polígonos es C ; por tanto, estos números cumplen la relación (26.1). Podemos observar que al someter el esquema plano poligonal a operaciones elementales, los números V , A y C pueden cambiar, pero el valor de la suma $V - A + C = k$ no varía. En efecto, una subdivisión de una dimensión deja invariante C , mientras que tanto A como V , aumentan en 1. Una subdivisión de dos dimensiones aumenta en 1 a C y A , dejando V invariable. En consecuencia, $V - A + C$ no cambia de valor. Es claro también que en las reuniones de una y dos dimensiones tampoco varía esa suma. Podemos establecer, entonces, que *dos poliedros emparentados elementalmente tienen la misma característica*.

Se dice que un poliedro es *orientable* si el sentido de recorrido de cada uno de los polígonos de su esquema plano poligonal puede determinarse de manera que, en su representación simbólica, toda letra que representa a dos lados equivalentes, y que por ello aparece dos veces, lo haga con signos contrarios. En caso contrario, se dice que el poliedro es *no orientable*.

No ofrece mayor dificultad comprobar que la propiedad de un esquema plano poligonal de ser o no orientable permanece invariante al realizarse una operación elemental. Por consiguiente, *dos poliedros emparentados elementalmente son ambos orientables o ambos no orientables*.

Las características que corresponden a las tres formas normales $FN1$, $FN2$ y $FN3$ dadas en (24.1), (24.6) y (24.4) son

$$FN1: \quad k = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$FN2: \quad k = 1 - 2p + 1 = 2(1 - p)$$

$$FN3: \quad k = 1 - q + 1 = 2 - q .$$

Los poliedros $FN1^{(1)}$ y $FN2$ son *orientables* pero los $FN3$ son *no orientables*; por ello, ningún poliedro $FN3$ puede emparentarse elementalmente con poliedro

(1) Llamamos poliedros $FN1$, $FN2$, $FN3$ a aquellos cuyas formas normales pertenecen a esas clases respectivamente.

alguno de la clase $FN1$, ni de la clase $FN2$. Tampoco puede ser emparentado elementalmente un poliedro $FN1$ con otro $FN2$ porque en ningún caso sus características son iguales. Finalmente, los poliedros $FN2$ correspondientes a valores diferentes de p , así como los $FN3$ que corresponden a distintos valores de q no pueden ser emparentados elementalmente puesto que sus características son distintas.

Por consiguiente, las clases de poliedros emparentados elementalmente, pueden designarse por $FN1$, $FN2-p$ y $FN3-q$, donde p y q pueden tomar los valores 1, 2, 3, Se tiene entonces que: *Para que dos poliedros sean emparentados elementalmente es necesario, y suficiente, que tengan la misma forma normal.*

Si un poliedro es *orientable*, su forma normal es $FN1$ o $FN2$ y por tanto su característica es un número par. Si es 2, su forma normal es $FN1$; y si es menor que 2, su forma normal es $FN2$. En el último caso el número p es igual a $\frac{2-k}{2}$.

Si un poliedro es *no orientable*, su forma normal es $FN3$. Su característica, k , permite obtener $q = 2 - k$.

Por consiguiente, se cumple el siguiente *teorema de Dehn y Heegard* :

Para que dos poliedros sean emparentados elementalmente es necesario y suficiente que

tengan la misma característica y que ambos sean orientables o no orientables.

Según se ha explicado una superficie cerrada puede originar un poliedro de muchas maneras mediante diversas divisiones poligonales. Se cumple la siguiente importante proposición:

Dos poliedros cualesquiera, deducidos de una misma superficie cerrada mediante diferentes divisiones poligonales, tienen siempre la misma característica y ambos son orientables o no orientables.

La demostración correspondiente excede los propósitos de esta exposición, por lo que la omitimos.⁽¹⁾

La proposición precedente, justifica las siguientes definiciones:

Se llama *característica de una superficie cerrada*, a la característica de cualquiera de los poliedros originados por ella.

Se dice que una *superficie cerrada es orientable*, si lo es cualquiera de los poliedros originados por ella.

(1) A este respecto: B. V. Kerékjártó, *Vorlesungen Über Topologie*, Springer (1923), pág. 133 a 145.

27. TEOREMA PRINCIPAL DE LA TOPOLOGIA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS.

Sean dos superficies cerradas homeomorfas. El homeomorfismo existente permite que cualquier división poligonal de una pueda trasladarse a la otra, de manera que ambas divisiones constituyan poliedros con un mismo esquema plano poligonal y, por tanto, con la misma representación simbólica. Los dos poliedros tendrán la misma característica y ambos serán orientables o no orientables.

Por consiguiente, dos superficies homeomorfas tienen la misma característica. Además, si una es orientable, la otra también lo es. Resulta entonces que *la característica y la orientabilidad de una superficie cerrada son independientes de la división poligonal que se considere, y son propiedades que no varían por homeomorfismos. Por tanto, son invariantes topológicos.*

En la sección 23 establecimos que para que dos superficies cerradas determinadas por poliedros sean homeomorfas es suficiente que esos poliedros sean elementalmente emparentados. Probaremos que la condición también es necesaria.

Consideremos dos poliedros que determinan dos superficies cerradas homeomorfas. Por ser la característica y la orientabilidad invariantes topológicos, ambos poliedros tienen la misma característica y son simultáneamente orientables o no. Luego, en virtud del teorema

de Dehn y Heegaard, los dos poliedros son elementalmente emparentados.

En consecuencia:

Para que dos superficies cerradas sean homeomorfas, es necesario y suficiente que los poliedros que las determinan sean elementalmente emparentados.

Por lo expuesto resulta que el conjunto de las superficies cerradas se divide en clases disjuntas. En cada clase puede señalarse la presencia de una superficie particular (típica), con la que todas las demás son homeomorfas. En el caso de las superficies orientables, son típicas la esfera y las esferas provistas de 1, 2, 3, ... asas ; y en el de las no orientables, son típicas las esferas provistas de 1, 2, 3, ... casquetes cruzados.

El teorema de *Dehn-Heegaard* permite establecer el llamado **teorema principal de las superficies cerradas** : *Dos superficies cerradas son homeomorfas si, y sólo si, tienen la misma característica y ambas son orientables o no orientables.*

28. GENERO Y NUMERO DE CONEXION DE UNA SUPERFICIE CERRADA ORIENTABLE

Por lo expuesto hasta ahora, dos superficies cerradas *orientables* son homeomorfas si, y sólo si, tienen la misma característica. Ahora bien, la característica no

tiene una significación suficientemente intuitiva. El *género* y el *número de conexión* son, como veremos, invariantes topológicos de fácil interpretación intuitiva y que pueden reemplazar a la característica.

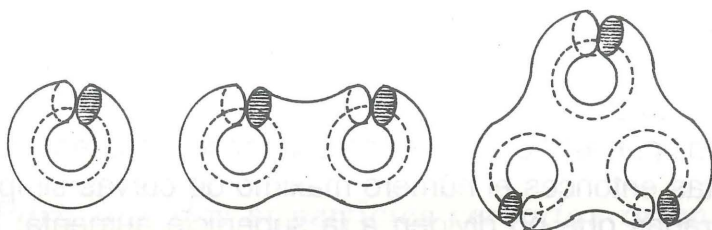


Figura 86

En tanto que una esfera cortada a lo largo de una curva cerrada y simple trazada sobre ella, queda separada en dos partes; los toros o anillos múltiples tienen la propiedad de que sobre ellos pueden trazarse curvas simples cerradas y disjuntas, en número igual al de su característica, sin que al cortarlos según esas curvas, las superficies queden separadas en dos partes (figura 86)

Llamaremos *género* de una superficie cerrada *orientable*, al número máximo de curvas simples cerradas, disjuntas entre sí, que pueden trazarse sobre ella sin descomponerla en partes. Así, el género de la esfera es 0; y el género de un anillo p veces múltiple, es igual a p .

Sean S y S' dos superficies homeomorfas, cerradas y orientables. Si en una de ellas, S por ejemplo, existen n curvas simples, cerradas y disjuntas que no la dividen en partes, sus n imágenes por el homeomorfismo serán n curvas de S' con las mismas propiedades. Por tanto, dos superficies homeomorfas cerradas y orientables, tienen el mismo género. Por consiguiente, *el género es un invariante topológico*.

Si las curvas cerradas a las que nos hemos referido en los párrafos anteriores no son, necesariamente, disjuntas entonces el número máximo de curvas simples cerradas que no dividen a la superficie aumenta. Tal cosa se muestra en la figura 86 en la que puede verse que, si a las curvas cerradas que dan origen a los cortes, se les agrega las curvas punteadas, que no son disjuntas con las primeras, la superficie no se divide.

Se llama *número de conexión* de una superficie cerrada orientable, al número máximo de curvas simples cerradas, disjuntas o no, que pueden trazarse sobre ella sin dividirla en partes.

Si el género de la superficie es p , su número de conexión es $2p$. Si designamos por γ el género y por κ el número de conexión de una superficie cerrada orientable, las relaciones de esos números con la característica k , resultan de las ecuaciones (24.1) y (24.6), y son:

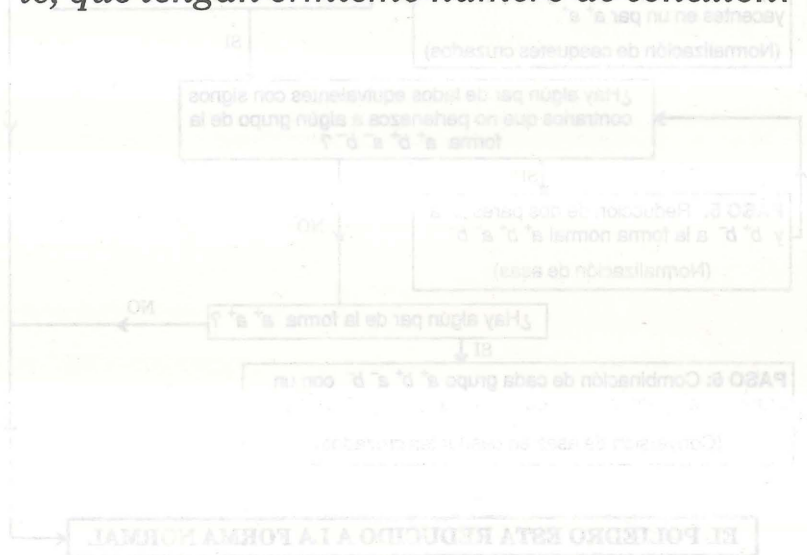
$$\gamma = \frac{2 - k}{2}$$

$$\kappa = 2 - k$$

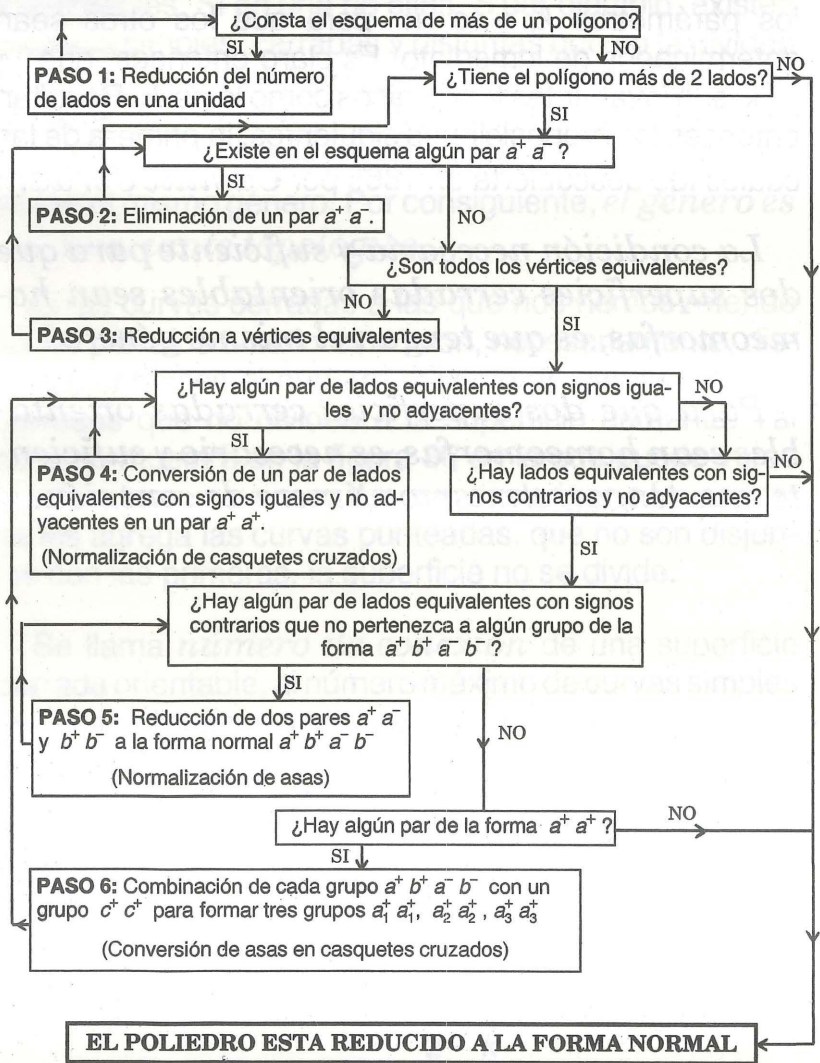
Se nota de esta manera que basta conocer uno de los parámetros k , γ o κ para que los otros sean determinados de inmediato. Es claro entonces que γ y κ son invariantes topológicos como lo es k . Resultan entonces las proposiciones siguientes, la primera de las cuales fue descubierta en 1866 por *Camille Jordan*:

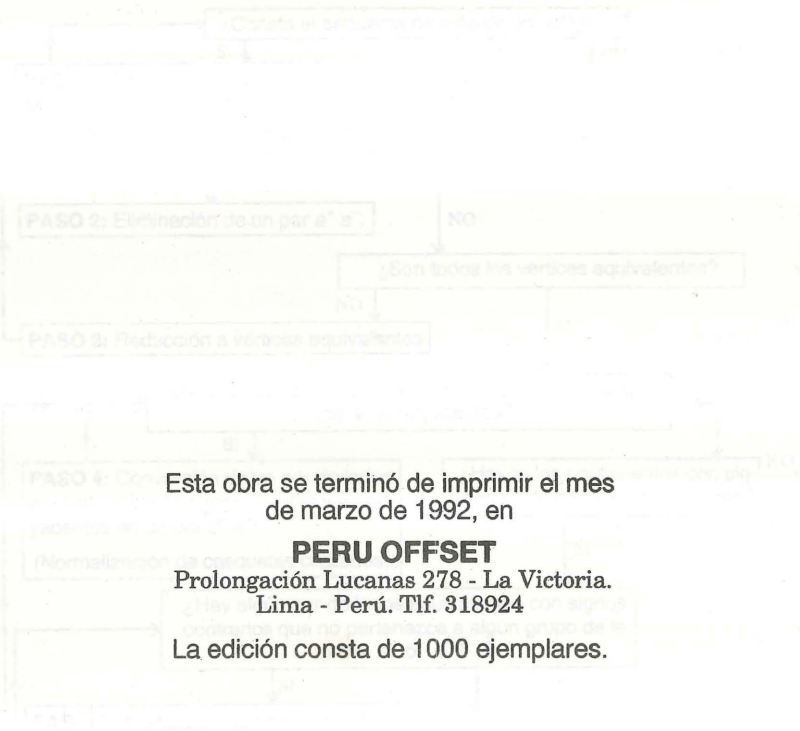
La condición necesaria y suficiente para que dos superficies cerradas orientables sean homeomorfas, es que tengan el mismo género.

Para que dos superficies cerradas orientables sean homeomorfas, es necesario y suficiente, que tengan el mismo número de conexión.



REDUCCION DE UN POLIEDRO A LA FORMA NORMAL





Esta obra se terminó de imprimir el mes
de marzo de 1992, en

PERU OFFSET

Prolongación Lucanas 278 - La Victoria.
Lima - Perú. Tlf. 318924

La edición consta de 1000 ejemplares.

EL FOLIO DE ESTA REDUCCIÓN A LA FORMA NORMAL

DE PROXIMA APARICION

PEDRO CIEZA DE LEON
Crónica del Perú. Cuarta Parte.
Las Guerras Civiles:
- Vol. II Guerra de Chupas
- Vol. III Guerra de Quito

CARLOS BLANCAS
CESAR LANDA
MARCIAL RUBIO
Derecho Constitucional
General. 3ra. edición
(corregida y aumentada)

JOSE ANTONIO DEL BUSTO
San Martín de Porras

JORGE ARMANDO GUEVARA GIL
Propiedad Agraria y Derecho
Colonial

LUCILA CASTRO DE TRELLES
Relación de los Agustinos

MANUEL MARIA MARZAL
La Utopía Posible

HUGO SARABIA SWETT
CARLOS VELIZ CAPUÑAY
Introducción al Análisis (3ra.
ed. aumentada y corregida)

LUIS EDUARDO BACIGALUPO
Intención y Conciencia en la
Ética de Abelardo

FONDO EDITORIAL

Av. Universitaria cuadra 18.
San Miguel. Apartado 1761.
Lima - Perú. Teléfonos: 622540
anexo 220 y 626390.

