Capítulo 3

- Relaciones binarias
- Grafos dirigidos

Relaciones binarias

Sean A y B dos conjuntos.
Una relación de A en B es un subconjunto del producto cartesiano de A y B.
Es decir, R es una relación de A en B si y sólo si

$$R \subset A \times B.$$

Decimos que R es una relación en A si R es una relación de A en A.
Si $(a,b) \in R$ decimos que "a está relacionado con b por la relación R" y escribimos: aRb.

Dominio y Rango

Sea R es una relación de A en B.

El dominio de R (Dom(R)), es el subconjunto de A de todos los primeros elementos de los pares que forman R.

El rango de R (Ran(R)), es el subconjunto de B de todos los segundos elementos de los pares que forman R.

Es decir:

$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A / \exists\, y \in B : x\,R\,y\}$

$\mathrm{Ran}(R) = \{y \in B / \exists\, x \in A : x\,R\,y\}$

Ejemplo

Si A es el conjunto de los alumnos de la facultad y B es el conjunto de los cursos que se dictan en la facultad.

La relación: M = " . . . está matriculado en . . . " es una relación de A en B definida por:

xMy si y sólo si "x está matriculado en y".

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4\}$.
Son relaciones de A en B:

$R1 = \{(x,y) \in A \times B / x < y\}$
$= \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

$\mathrm{Dom}(R1) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{Ran}(R1) = \{2,4\}$.

$R2 = \{(x,y) \in A \times B / x = y\}$
$= \{(2,2)\}$

$\mathrm{Dom}(R2) = \{2\}$, $\mathrm{Ran}(R2) = \{2\}$.

$R3 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x + y = 5\}$
$= \{(1,4), (3,2)\}$
Dom (R3) = {1,3} , Ran (R3) = {2,4}.

$R4 = \phi$
Dom (R4) = ϕ , Ran (R4) = ϕ.
R5 = A x B
Dom (R5) = A , Ran (R5) = B.

Relación Inversa

Sea R una relación de A en B, la relación inversa de R es una relación de B en A que se representa por R^{-1} y se define por:

$xR^{-1}y$ si y sólo si yRx.

Ejemplo

Sea R = {(1,1),(1,2),(2,3)} una relación en A = {1,2,3}, entonces :
$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}$.

Operaciones Booleanas

Se definen las operaciones booleanas $\vee$ y $\wedge$ en el conjunto B = {0,1}, con las siguientes tablas:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Matrices Booleanas

Una matriz booleana es una matriz cuyas componentes son ceros o unos.

Operaciones con matrices booleanas

1) Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices booleanas de dimensión mxn, se definen:

$A \vee B = [c_{ij}]_{m \times n}$, donde $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.

$A \wedge B = [d_{ij}]_{m \times n}$, donde $d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$.

2) Sean $A = [a_{ij}]_{mxp}$ y $B = [b_{ij}]_{pxn}$ matrices booleanas, se define:

$A \bullet B = [e_{ij}]_{mxn}$, donde

$e_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})$

Ejemplo

Si $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ entonces:

$A\vee B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $A\wedge B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ $A\bullet B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

Matriz de una Relación

Si $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y R es una relación de A en B, entonces la matriz de R, que se representa por M(R), se define por:

$M(R) = [m_{ij}]_{mxn}$ donde:

$m_{ij} = 1 \leftrightarrow (a_i,b_j) \in R$ y

$m_{ij} = 0 \leftrightarrow (a_i,b_j) \notin R$.

Ejemplo

Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$ y $R = \{(1,2),(2,2),(2,4),(3,4)\}$, entonces:

$M(R) = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$

Teorema

Si R y S son relaciones en un conjunto finito no vacío A, entonces:

1) $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$
2) $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$
3) $M(R^{-1}) = M(R)^T$

Grafo de una Relación

Si A es un conjunto finito y R es una relación en A, se dibuja un círculo, llamado vértice, para cada elemento de A

Se traza una línea dirigida, llamada arista, del vértice a al vértice b si y sólo si aRb.

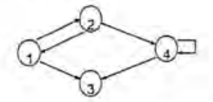
Ejemplo

Sea R = {(1,2),(1,3),(2,1)(2,4),(4,3),(4,4)} una relación en A = {1,2,3,4}.

Luego:

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y el grafo de R:



Trayectorias

Sea R una relación en A.

Una Trayectoria de longitud n de x a y en R es una sucesión finita $T = x, x_1, \dots, x_{n-1}, y$ que se inicia con x y termina con y tal que:

$$xRx_1,\ x_1Rx_2,\ \dots,\ x_{n-1}Ry.$$

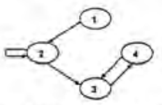
Un ciclo es una trayectoria que se inicia y termina en el mismo vértice.

Un lazo es un ciclo de longitud uno.

Ejemplo

Sea R = {(1,2),(2,2)(2,3),(3,4),(4,3)},una relación en A = { 1,2,3,4}

El grafo de R:



T1 = 1,2,3,4 es una trayectoria de longitud 3.

T2 = 3,4,3 es un ciclo de longitud 2.

T3 = 2,2 es un Lazo.

Potencia de una Relación

Se define la relación R^n en A por:

xR^ny si y sólo si existe una trayectoria de longitud n de x a y en R.

$$(R^1 = R)$$

La relación de conectividad

La relación de conectividad de R se representa por R^∞ y se define por:

$xR^\infty y$ si y sólo si existe una trayectoria de x a y en R.

Luego : $R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

La relación de accesibilidad

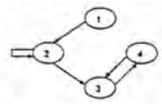
La relación de accesibilidad de R se representa por R^* y se define por: xR^*y si y sólo si $xR^\infty y \vee x = y$.

La relación de igualdad en A se representa por Δ_A y se define por: $\Delta_A = \{ (x,y) \in A \times A \ / \ x = y \}$.

Luego: $R^* = R^\infty \cup \Delta_A$

Ejemplo

Si el grafo de R es:



Entonces:

$R^1 = \{(1,2),(2,2)(2,3),(3,4),(4,3)\}$.

$R^2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

$R^3 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3)\}$.

$R^\infty = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

Potencia de una matriz

Si M(R) es la matriz de R,
se define recursivamente $M(R)^n$ por:

$M(R)^1 = M(R)$

$M(R)^n = M(R) \bullet M(R)^{n-1}$, $n > 1$.

Teorema

Sea R una relación en A y $n \geq 1$, entonces:

$M(R^n) = M(R)^n$

Composición de Relaciones

Sean A, B y C conjuntos.
Si R es una relación de A en B
y S es una relación de B en C,
la compuesta de R y S que se representa
por (R o S) es una relación de A en C
que se define por:

a(R o S)c si y sólo si existe un $b \in B$ tal que:

aRb y bSc.

Ejemplo

Sean $R = \{ (1,1),(2,3)\}$
y $S = \{(1,2),(1,3),(3,2),(3,1)\}$
relaciones en el conjunto $A = \{1,2,3\}$,
entonces:

R o S = {(1,2), (1,3) , (2,2), (2,1)}

y S o R = {(1,3), (3,3) , (3,1)}.

Teorema

Sean A, B y C conjuntos finitos no vacíos.
Si R es una relación de A en B
y S es una relación de B en C , entonces:

M(R o S) = M(R) • M(S)

Teorema

$R^2 = R \circ R$

$(M(R \circ R) = M(R) \bullet M(R) = M(R)^2 = M(R^2))$

Teorema

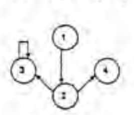
Si R es una relación en A y $n > 1$, entonces:

$R^n = R \circ R^{n-1}$.

Ejemplo

Dada la relación $R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,3)\}$.

Su grafo es:



$R^2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,3)\} = R \circ R$

Relaciones Reflexivas

Una relación R en el conjunto A es reflexiva, si

$xRx \quad \forall x \in A$

La matriz de una relación reflexiva tiene toda su diagonal principal formada por unos.

El digrafo de una relación reflexiva tiene un lazo en cada vértice.

Luego: R es una relación reflexiva en A sí y sólo si

$\Delta_A \subset R$.

Relaciones Simétricas

Una relación R en el conjunto A es simétrica si cuando xRy entonces yRx.

La matriz de una relación simétrica es una matriz simétrica.

Si en el digrafo de una relación simétrica existe una arista del vértice a al vértice b, entonces existe una arista del vértice b al vértice a.

Luego: R es una relación simétrica en A sí y sólo si

$R = R^{-1}$.

Relaciones Antisimétricas

Una relación R en el conjunto A es antisimétrica si cuando xRy y yRx entonces x=y.

La matriz $M(R) = [m_{ij}]$ de una relación antisimétrica es tal que si $i \neq j$, entonces $(m_{ij}) \wedge (m_{ji}) = 0$.

En el digrafo de una relación antisimétrica para vértices a y b distintos no puede haber una arista del vértice a al vértice b y una arista del vértice b al vértice a.

Luego: R es una relación antisimétrica en A sí y sólo si $(R \cap R^{-1}) \subset \Delta_A$.

Relaciones Transitivas

Una relación R en el conjunto A es transitiva si cuando xRy y yRz entonces xRz.
La matriz $M(R) = [m_{ij}]$ de una relación transitiva es tal que si $m_{ik} = 1$ y $m_{kj} = 1$ entonces $m_{ij} = 1$.
Si en el digrafo de una relación transitiva existe una trayectoria del vértice a al vértice b, entonces existe una trayectoria de longitud uno del vértice a al vértice b.
Luego: R es una relación transitiva en A si y sólo si $R^n \subseteq R,\ \forall n \geq 1$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \Delta_A = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x = y\}$.

R es reflexiva, pues $x = x \quad \forall x \in A$.
R es simétrica, pues si $x = y$, entonces $y = x$.
R es antisimétrica, pues si $x = y$ y $y = x$, entonces $x = y$.
R es transitiva, pues si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x.y = 0\}$.

R no es reflexiva, ya que por ejemplo: $(1)(1) \neq 0$.
R es simétrica, pues si $x.y = 0$, entonces $y.x = 0$.
R no es antsimétrica, ya que por ejemplo:
$(2)(0) = 0$ y $(0)(2) = 0$, pero $2 \neq 0$.
R no es transitiva, ya que por ejemplo:
$(2)(0) = 0$ y $(0)(1) = 0$, pero $(2)(1) \neq 0$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x \leq y\}$.

R es reflexiva, pues $x \leq x \quad \forall x \in A$.
R no es simétrica, ya que por ejemplo:
$1 \leq 2$, pero $2 \nleq 1$.
R es antsimétrica, pues si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.
R es transitiva, pues si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Relaciones de Equivalencia

Una relación R es de equivalencia, si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Clases de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en A.

Si $a \in A$, entonces $[a] = \{x \in A \,/\, xRa\}$ es la clase de equivalencia de a.

Conjunto cociente

Sea R una relación de equivalencia en A.

El conjunto cociente es el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de A, y se lo representa por A/R.

Luego: $A/R = \{ [a] / a \in A\}$.

Ejemplo

Sea $R = \{ (x,y) \in A \times A$ / 3 es divisor de $(x-y) \}$ una relación en $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Entonces R es una relación de equivalencia

$[0] = \{0,3,6\} = [3] = [6]$

$[1] = \{1,4\} = [4]$

$[2] = \{2,5\} = [5]$

Luego $A/R = \{ [0], [1], [2] \}$.

Teorema

Sea R una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$, entonces:

1) $[a] = [b] \leftrightarrow aRb$.

2) $[a] \neq [b] \leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

Particiones

Una partición de un conjunto no vacío A es una colección $P = \{A_1, ..., A_n\}$ de subconjuntos no vacíos de A tales que:

I) $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

II) $A_1 \cup ... \cup A_n = A$.

Los subconjuntos $A_i \in P$, son llamados celdas de la partición.

Teorema

1) Dada una relación de equivalencia R en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición de A

(Las celdas de la partición son las clases de equivalencia).

2) Dada una partición P de A, entonces la relación R definida por:

$xRy \leftrightarrow \exists A_i \in P: x \in A_i$ y $y \in A_i$,

es una relación de equivalencia.

(Las clases de equivalencia son las celdas de la partición).

Relaciones de Orden

Una relación R es de orden parcial, si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto A con la relación de orden parcial R es llamado un conjunto parcialmente ordenado, y se escribe: (A,R), o $(A,\leq)$, o sencillamente A.

Si a y b son elementos de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, se dice que:

$a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.

Orden dual

Si R es un orden parcial en el conjunto A, entonces R^{-1} es también un orden parcial en A llamado el dual del orden parcial R.

El conjunto parcialmente ordenado (A, R^{-1}) es llamado el dual del conjunto parcialmente ordenado (A,R).

Elementos comparables

Sea $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Los elementos a y b son comparables, si $a \leq b$ o $b \leq a$.

Orden total

Si cada par de elementos de un conjunto parcialmente ordenado A es comparable, se dice que A es un conjunto totalmente ordenado y al orden parcial se le llama orden total.

Ejemplo

Sea A la colección de todos los subconjuntos de un conjunto $S \neq \varnothing$.
La relación de inclusión $\subset$ es una relación de orden parcial en A.
Luego $(A, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado, pero no es un conjunto totalmente ordenado.

Ejemplo

Sea IR el conjunto de los números reales.

La relación $\leq$ donde $a \leq b \leftrightarrow (b-a) \in IR_0^+$, es un orden total en IR, como también lo es su dual $\geq$ donde $a \geq b \leftrightarrow (a-b) \in IR_0^+$.

Ejemplo

La relación de divisibilidad R definida por $aRb \leftrightarrow a \mid b$, donde $a \mid b \leftrightarrow$ a es divisor de b, es un orden parcial en Z^+, pero no es un orden total.
El dual de la relación "es divisor de" es "es múltiplo de" .

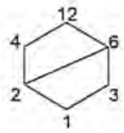
Diagramas de Hasse

Los diagramas de Hasse son diagramas para las relaciones de orden parcial, más sencillos que los grafos dirigidos correspondientes.

Para simplificar, se borrarán todos los lazos, al sobrentenderse que la relación es reflexiva.
Asimismo, eliminamos las aristas que están implicadas por la propiedad transitiva.
Como la relación es antisimétrica, también convenimos en dibujar todas las aristas apuntando hacia arriba, pudiendo entonces omitirse las flechas en las aristas.
Finalmente, los círculos para representar los vértices se reemplazan por puntos.

Ejemplo

Sea D_{12} el conjunto de los divisores positivos de 12.
Si R es la relación de divisibilidad en D_{12},
el diagrama de Hasse de esta relación de orden parcial es:

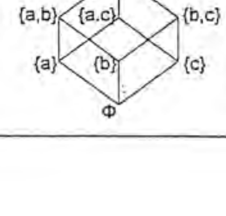


Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3,4\}$, si definimos la relación R en A por $aRb \leftrightarrow a \leq b$, donde $a \leq b \leftrightarrow (b-a) \in IR_0^+$, el diagrama de Hasse del orden total R es:

Ejemplo

Sea $U = \{a,b,c\}$ y sea $A = P(U)$, la colección de todos los subconjuntos de U. El diagrama de Hasse de la relación de inclusión $\subset$ en A es:

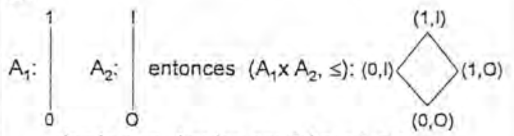


Orden Parcial Producto

Sean $(A_1, \leq_1)$ y $(A_2, \leq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados.
El conjunto $(A_1 \times A_2, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, si $\leq$ es el orden parcial producto que se define por:
$(a_1,a_2) \leq (b_1,b_2)$ si y sólo si $a_1 \leq_1 b_1$ y $a_2 \leq_2 b_2$.

Ejemplo

Sean $A_1 = \{0,1\}$ y $A_2 = \{O,I\}$
dos conjuntos parcialmente ordenados.
Si:



donde $\leq$ es el orden parcial producto.

Maximales y Minimales

Sea $(A, \leq)$ un cojunto parcialmente ordenado.

Un elemento $a \in A$ es un elemento maximal de A, si no existe un elemento $c \in A$ tal que $a < c$.

Un elemento $a \in A$ es un elemento minimal de A, si no existe un elemento $c \in A$ tal que $c < a$.

Teorema

Un conjunto parcialmente ordenado
no vacío y finito, tiene:
al menos un elemento maximal
y al menos un elemento minimal.

Máximos y Mínimos

Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.
Un elemento $a \in A$ es el elemento máximo de A, si $a \geq x,\ \forall x \in A$.
Un elemento $a \in A$ es un elemento mínimo de A, si $a \leq x,\ \forall x \in A$.

Teorema

Un conjunto parcialmente ordenado, tiene:
a lo más un elemento máximo
y a lo más un elemento mínimo.

Cotas superiores y cotas inferiores

Sean $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y B un subconjunto de A.

Un elemento $a \in A$ es una cota superior de B, si $a \geq x,\ \forall x \in B$.

Un elemento $a \in A$ es una cota inferior de B, si $a \leq x,\ \forall x \in B$.

Supremos e Ínfimos

Sean (A, ≤) un conjunto parcialmente ordenado y B un subconjunto de A.

Un elemento $a \in A$ es el supremo (mínima cota superior) de B, si a es una cota superior de B y si c es también una cota superior de B entonces $a \leq c$.

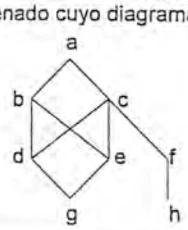
Un elemento $a \in A$ es el ínfimo (máxima cota inferior) de B, si a es cota inferior de B y si c es también una cota inferior de B entonces $a \geq c$.

Teorema

Sean A un conjunto parcialmente ordenado y B un subconjunto de A, entonces B tiene: a lo más un supremo y a lo más un ínfimo.

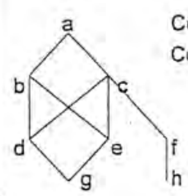
Ejemplo

Sea A = {a,b,c,d,e,f,g,h} un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es:



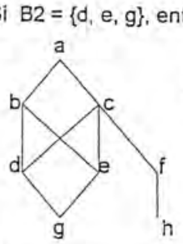
maximales de A: a.
minimales de A : g, h.
máximo de A: a
mínimo de A: no existe.

Si B1 = {e, f, g, h}, entonces :



Cotas Superiores de B1: a, c.
Cotas inferiores de B1: no existen.
Supremo de B1: c.
Ínfimo de B1: no existe.

Si B2 = {d, e, g}, entonces:



Cotas Superiores de B2: a, b, c.
Cotas inferiores de B2: g.
Supremo de B2: no existe.
Ínfimo de B2: g.