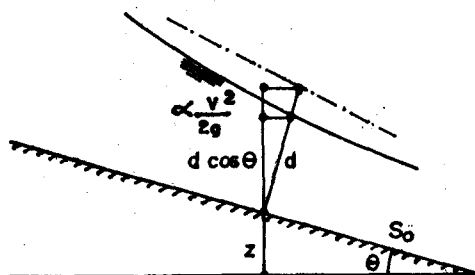


## CAPITULO 3 - ENERGIA ESPECIFICA

La figura muestra un canal prismático de fuerte pendiente con flujo permanente gradualmente variado.



Para una sección genérica la energía total por unidad de peso con respecto a un cierto plano de referencia es el Bernoulli:

$$B = z + d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

### 3.1 Concepto de energía específica

Para un canal de pequeña pendiente el Bernoulli es:

$$B = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Se llama energía específica, y se designa con  $E$  al Bernoulli tomado con respecto al fondo del canal:

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Si  $\alpha = 1$ .

$$E = y + \frac{V^2}{2g}$$

Para un canal rectangular, si  $q$  es el caudal por unidad de ancho:

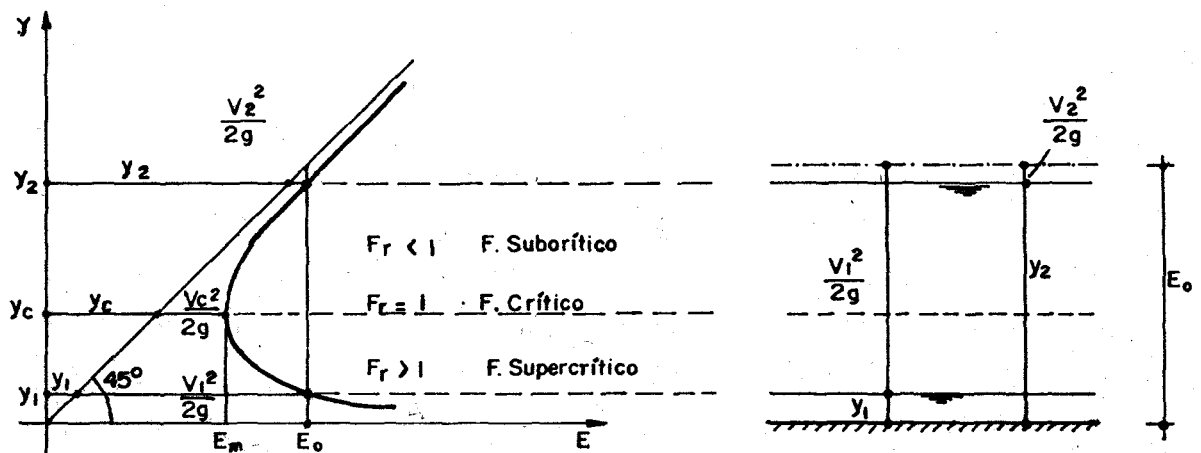
$$E = y + \frac{q^2}{2g y^2} \quad (3.1)$$

ecuación que se puede estudiar de dos maneras:

- a) para  $q$  constante
- b) para  $E$  constante

### 3.2 Curva de energía específica a caudal constante

De los tres valores de  $y$  que satisfacen la ecuación 3,1 para  $q$  constante, uno es negativo y por lo tanto sin significado práctico. La gráfica  $y$  versus  $E$  resulta de la forma que indica la figura,



es decir una curva asintótica a la recta de 45°. Se observa que hay dos valores de  $y$  para un valor dado  $E_o$ . Se dice que  $y_1$  es la profundidad alterna de  $y_2$  y viceversa, también que  $y_1$  e  $y_2$  son las profundidades alternas para  $E_o$ .

Se observa que hay un valor de energía específica mínima ( $E_m$ ). Designemos el tirante que le corresponde como tirante crítico ( $y_c$ ) y encontremos una expresión para él igualando a cero la primera derivada de  $E$ :

$$E = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{q^2}{y^3}$$

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{q^2}{y^4} \cdot 2y = 1 - \frac{q^2}{2g y^4} \cdot 2y = 1 - \frac{q^2}{g y^3} = 0$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.2)$$

El valor de  $E_m$  es:

$$E_m = y_c + \frac{q^2}{2g y_c^2} = y_c + \frac{g y_c^3}{2g y_c^2} = y_c + \frac{y_c}{2}$$

es decir,  $E_m = \frac{3}{2} y_c$  (3.3)

$$\frac{y_c}{2} = \frac{V_c^2}{2g} \rightarrow V_c = \sqrt{g y_c} \quad (3.4)$$

Cuando una ola de pequeña altura (llamada onda de gravedad) se desplaza en la superficie del agua en movimiento, lo hace con una velocidad respecto a la velocidad del agua igual a  $\sqrt{g y}$ . A esta velocidad de la onda se llama celeridad; de manera que la velocidad crítica resulta ser igual a la celeridad de la onda de gravedad. Esto tiene una importancia grande como veremos después.

El valor del Froude crítico es:

$$F_c = \frac{V_c}{\sqrt{g y_c}} = \frac{\sqrt{g y_c}}{\sqrt{g y_c}} = 1$$

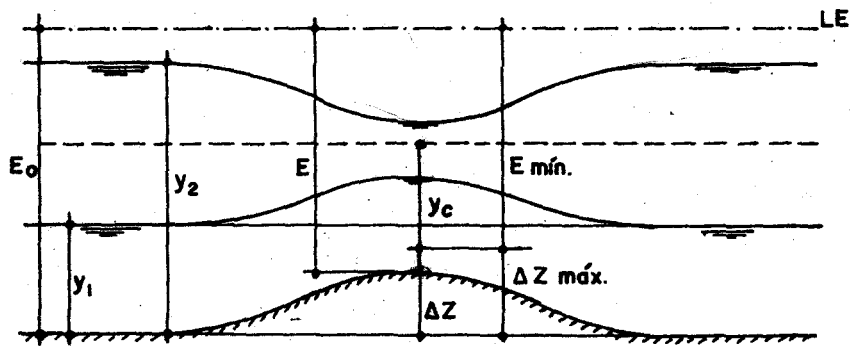
El flujo uniforme que tiene lugar con tirante crítico se llama flujo crítico.

El flujo uniforme que tiene lugar con tirantes mayores que  $y_c$  se llama flujo subcrítico porque su velocidad media es menor que la crítica: el Froude es  $< 1$ .

El flujo uniforme que tiene lugar con tirantes menores que  $y_c$  se llama flujo supercrítico porque su velocidad media es mayor que la crítica: el Froude es  $> 1$ .

### Comentarios

1. Se observa, por la forma de la curva en las inmediaciones de  $E_m$ , que en un flujo uniforme con  $y = y_c$  una ligera variación de  $E$  produce una fuerte variación de  $y$ ; la superficie de agua resulta ondulante. Por eso se recomienda en el diseño de canales con flujo uniforme no proyectar canales con  $y = y_c$ ; cualquier suciedad en el fondo provocaría una superficie ondulante indeseada. Los canales deben diseñarse para flujo francamente subcrítico ( $y \gg y_c$ ).
2. Se observa en el gráfico que si el flujo uniforme tiene lugar con un tirante menor que el crítico una disminución en  $E_0$  implica un aumento en el tirante, y si el flujo uniforme tiene lugar con un tirante mayor que el crítico una disminución en  $E_0$  implica una disminución en el tirante. Las disminuciones de  $E_0$  son motivadas por elevaciones del fondo del canal, de modo que se puede esquematizar:



La mayor elevación del fondo ( $\Delta Z_{\text{máx}}$ ) sin producir remanso es aquélla para la cual la energía específica  $E$  resulta la mínima. El agua pasa con flujo crítico.

Una elevación mayor no permite el paso del caudal constante que corresponde a  $E_0$ . Se produce un remanso o atoro hasta un nuevo valor  $E'_0$  que permita el paso del agua con dicho caudal. Obsérvese cómo  $\Delta Z_{\text{máx}} = E_0 - E_{\text{mín}}$ .

### Sección no rectangular

Nos proponemos averiguar la expresión que rige para el flujo uniforme crítico en un canal prismático de sección no rectangular.

$$dA = T dy$$

$$A = T \cdot D$$

$$D = \text{profundidad hidráulica} = \frac{A}{T}$$

$$E = y + \frac{v^2}{2g}$$

$$E = y + \frac{Q^2}{2g A^2} = y + \frac{Q^2}{2g A^2}$$

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{-\frac{Q^2}{2g} \cdot 2A \frac{dA}{dy}}{A^4} = 1 - \frac{\frac{Q^2}{2g} \cdot 2A T}{A^4}$$

$$= 1 - \frac{Q^2 \cdot 2A T}{2g A^4} = 1 - \frac{Q^2 T}{g A^3} = 0$$

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1$$

(3.5)

expresión que se satisface para el flujo crítico, por lo que se puede usar el subíndice c si uno desea enfatizar. Prosiguiendo:

$$\frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{T}{g A} = 1$$

$$V^2 \cdot \frac{T}{g A} = 1 \rightarrow V = \sqrt{g \frac{A}{T}} = \sqrt{g D} \quad (3.6)$$

El número de Froude se escribe:

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g \frac{A}{T}}} = \frac{V}{\sqrt{g D}} \quad (3.7)$$

En este caso de flujo crítico  $F_r = 1$  y la energía mínima es:

$$E_m = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{D}{2} \quad (3.8)$$

### Comentarios

Si se considera que el coeficiente de Coriolis ( $\alpha$ ) es diferente de la unidad:

$$\alpha \frac{V_c^2}{2g} = \frac{D}{2}$$

y si además el canal es de gran pendiente:

$$\alpha \frac{V_c^2}{2g} = \frac{D \cos \theta}{2}$$

(D ... profundidad hidráulica de la sección normal al fondo del canal)

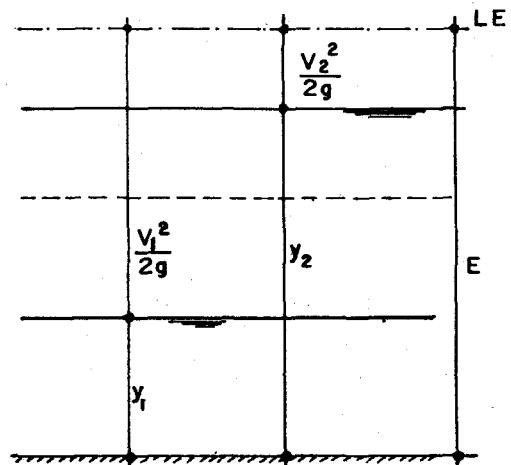
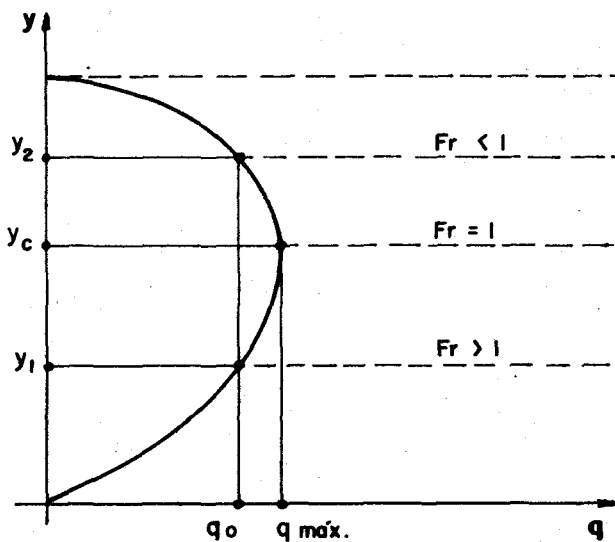
El número de Froude se define en este caso:

$$F_r = \sqrt{\frac{V}{g \frac{D \cos \theta}{\alpha}}} \quad (3.7')$$

porque en el denominador del número de Froude va la celeridad igual a  $V_c$ .

### 3.3 Curva de caudal a energía específica constante

De los tres valores de  $y$  que satisfacen la ecuación (3.1) para  $E$  constante, uno es negativo y por lo tanto sin significado práctico. La gráfica  $y$  versus  $q$  resulta de la forma que indica la figura.



Se observa que hay dos valores de  $y$  para un valor dado  $q_0$ . Se observa también que hay un valor de caudal máximo ( $q_{\text{máx}}$ ). Encontremos la expresión del tirante que corresponde a este  $q_{\text{máx}}$  igualando a cero la primera derivada de  $q$ :

$$E = y + \frac{q^2}{2g y^2}$$

$$q^2 = (E - y) 2g y^2$$

$$q = (E - y)^{1/2} \cdot \sqrt{2g} y$$

$$\frac{dq}{dy} = (E - y)^{1/2} \cdot \sqrt{2g} + \sqrt{2g} y \cdot \frac{1}{2} (E - y)^{-1/2} (-1) = 0$$

$$(E - y)^{1/2} - \frac{y}{2 (E - y)^{1/2}} = 0$$

$$(E - y) = \frac{y}{2}$$

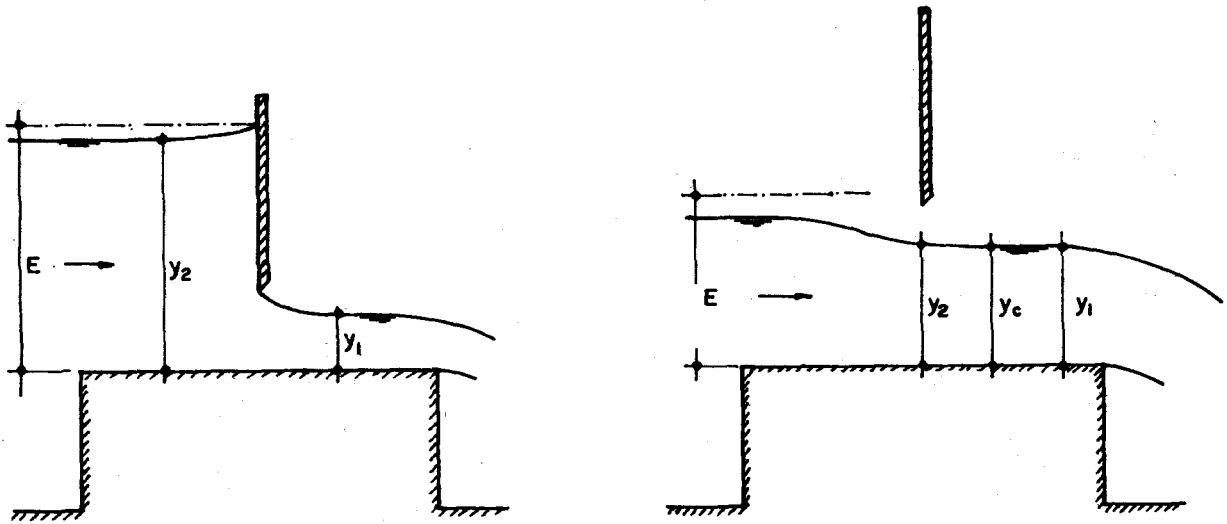
$$E = \frac{3}{2} y$$

$$y = \frac{2}{3} E, \text{ valor idéntico al tirante crítico (3.3),}$$

lo que quiere decir que cuando  $q$  es máximo la energía específica disponible resulta ser la mínima y el tirante el crítico. O sea:

$$q_{\text{máx}} = \sqrt{g y_c^3} \quad (3.9)$$

Esto se puede ver con claridad en el siguiente esquema correspondiente a una compuerta deslizante instalada sobre una elevación del canal.



(a)

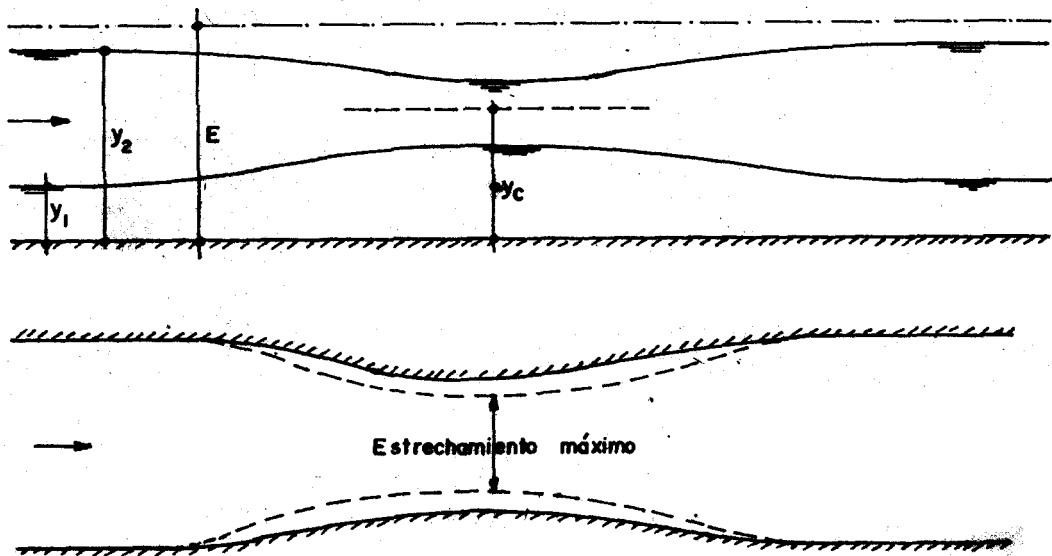
(b)

La figura (a) se refiere a un caudal genérico correspondiente a un valor constante de  $E$ . Levantando la compuerta va aumentando el caudal  $q$ , hasta el momento en que por más que levantemos la compuerta el caudal no puede crecer por encima de un  $q_{m\acute{a}x}$  (fig. b); en ese momento la  $E$  constante resulta la mínima compatible con ese  $q_{m\acute{a}x}$ . Se verifica (en unidades métricas):

$$q_{m\acute{a}x} = 1.704 E^{3/2}$$

### Comentarios

En la curva de caudal a  $E$  constante se observa que si el flujo uniforme tiene lugar con un tirante menor que el crítico un aumento en  $q$  implica un aumento en el tirante y si el flujo uniforme tiene lugar con un tirante mayor que el crítico un aumento en  $q$  implica una disminución del tirante. Los aumentos de  $q$  son motivados por estrechamientos del canal, de modo que se puede esquematizar:



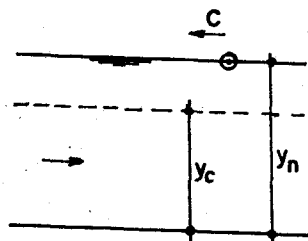
El mayor estrechamiento del ancho sin producir remanso es aquél para el cual el caudal  $q$  resulta el máximo. El agua pasa con flujo crítico.

Un estrechamiento mayor produce remanso o atoro para que aumente el valor de  $E$  con que se acerca el agua y pueda pasar. A cada nuevo valor de  $E$  corresponde un nuevo valor de  $q_{\text{máx}}$ , según:

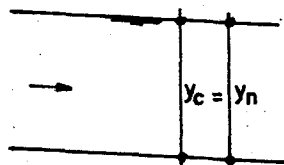
$$q_{\text{máx}} = 1.704 E^{3/2}$$

### 3.4 Flujo subcrítico y flujo supercrítico

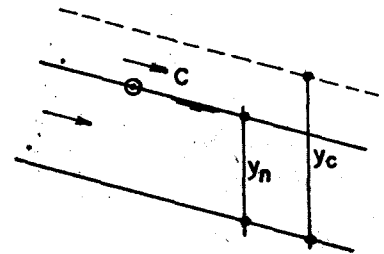
De lo estudiado en este capítulo se desprende que el flujo uniforme en un canal puede ser subcrítico, crítico o supercrítico. Si el flujo es crítico entonces el  $F_r$  es igual a uno y la velocidad media es  $\sqrt{gD}$ , es decir igual a la celeridad ( $c$ ) de la onda de gravedad. Si el flujo es subcrítico la velocidad media es menor que  $c$  y si el flujo es supercrítico la velocidad media es mayor que  $c$ . Toda esta información conduce a conclusiones prácticas muy útiles que son las siguientes:



flujo subcrítico



flujo crítico



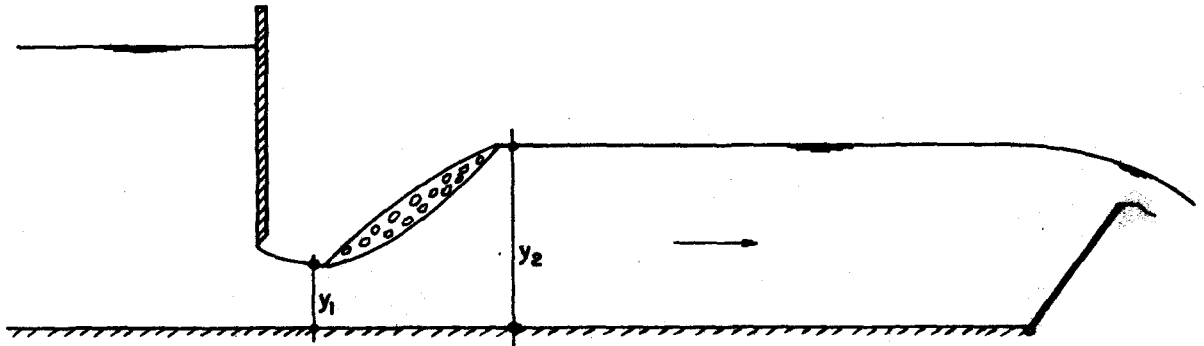
flujo supercrítico

1. En el mismo canal un caudal fijo  $Q$  puede escurrir con flujo uniforme crítico, subcrítico o supercrítico, con tan sólo variar la pendiente del canal. La pendiente recibe el calificativo de crítica, subcrítica y supercrítica, respectivamente. La línea de flujo crítico se indica con línea discontinua y las de flujo actual (subcrítico o supercrítico) con línea llena. Al flujo actual se llama flujo normal por lo que se emplea el subíndice  $n$  en los tirantes.
2. El flujo subcrítico tiene lugar con velocidades medias bajas y se designa también con los nombres de flujo tranquilo o tipo río. El flujo supercrítico tiene lugar con velocidades medias altas y se designa también con los nombres de flujo rápido o tipo torrente.
3. En el flujo tranquilo una perturbación provocada en la superficie del agua remonta la corriente ( $V < c$ ) mientras que en el flujo rápido no ( $V > c$ )

4. En el flujo tranquilo el flujo en una sección viene afectado por lo que ocurre aguas abajo, mientras que en el flujo rápido no. Esto equivale a decir que en el flujo subcrítico el agua se entera de lo que ocurre aguas abajo y en el flujo supercrítico no.
5. También se dice que el flujo tranquilo es controlado por las condiciones de aguas abajo, mientras que el flujo rápido es controlado por las condiciones de aguas arriba. El concepto de control hidráulico es bastante importante y será explicado posteriormente con mayor amplitud.

### 3.5 El resalto hidráulico

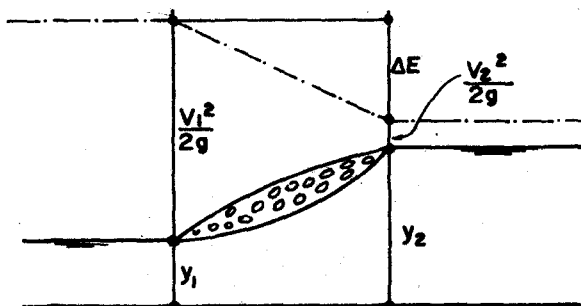
Para introducir el concepto de resalto hidráulico considérese un canal horizontal de sección rectangular y una compuerta vertical deslizante instalada en él. Considérese también que en el extremo del canal se halla instalada una compuerta batiente en posición semilevantada que obliga al agua a adoptar un régimen subcrítico con tirante  $y_2$ .



Es claro que si la abertura de la compuerta vertical es pequeña el agua pase por ella con alta velocidad en régimen supercrítico y tirante  $y_1$ .

El agua en consecuencia se ve forzada a pasar de un régimen supercrítico a otro subcrítico, en un fenómeno que recibe el nombre de salto hidráulico, resalto hidráulico o simplemente resalto.

El resalto tiene lugar en una longitud relativamente corta y se caracteriza por una fuerte turbulencia. A través de esta turbulencia se disipa el exceso de energía cinética que posee el agua en la sección (1).



$$y_1 \ll y_2$$

$$V_1 \gg V_2$$

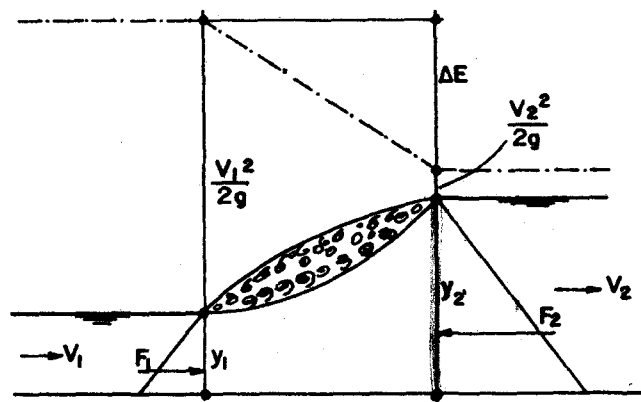
Como se puede apreciar en la figura, la elevada energía cinética de antes del resalto ( $V_1^2/2g$ ) se transforma en parte en energía potencial ( $y_2 > y_1$ ) y en parte se disipa ( $\Delta E$ ) en forma de calor.

La propiedad de mayor utilidad práctica del salto hidráulico es que a través de él se puede disipar con éxito una cantidad importante de energía indeseada ( $\Delta E$ ). Esto es aprovechado en la práctica en el diseño de algunas estructuras hidráulicas.

Otra propiedad importante del resalto es el mezclado que se produce en el líquido por efecto de la turbulencia, lo cual es aprovechado en algunos procesos industriales.

### Tirantes del resalto

Se acostumbra decir que  $y_2$  es la profundidad secante o conjugada de  $y_1$ ; también que  $y_1$  e  $y_2$  son las profundidades conjugadas del resalto hidráulico. Por ser de suma utilidad práctica se van a deducir un par de fórmulas que permiten averiguar uno de los tirantes conociendo el otro.



Se parte de las siguientes hipótesis simplificadoras:

- el canal es rectangular de ancho  $b$ ,
- el fondo es horizontal,
- la fuerza de rozamiento en paredes y fondo es cero,
- la distribución de velocidades es uniforme ( $\alpha = \beta = 1$ ),
- el flujo es paralelo o sea que rige la distribución hidrostática de presiones.

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\rho Q V_1 + \frac{1}{2} \gamma y_1^2 b - \frac{1}{2} \gamma y_2^2 b = \rho Q V_2$$

$$\rho Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \gamma (y_2^2 - y_1^2) b$$

Considerando ancho unitario:

$$\rho q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \gamma (y_2^2 - y_1^2)$$

$$q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} g (y_2^2 - y_1^2)$$

$$\frac{q}{g} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2 (V_1 - V_2)}$$

utilizando la ecuación de continuidad:

$$\frac{q}{g} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2 \left( \frac{q}{y_1} - \frac{q}{y_2} \right)} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2 \left( \frac{q y_2 - q y_1}{y_1 y_2} \right)} = \frac{y_1 y_2 (y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2 q (y_2 - y_1)}$$

$$\frac{q^2}{g} = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2) \quad (3.10)$$

$$2 q^2 = g y_1^2 y_2 + g y_1 y_2^2 \quad (3.11)$$

Resolviendo esta ecuación para  $y_1$ :

$$\frac{2 q^2}{g y_2} = y_1^2 + y_1 y_2$$

$$y_1^2 + y_2 y_1 - \frac{2 q^2}{g y_2} = 0$$

$$y_1 = \frac{-y_2 \pm \sqrt{y_2^2 + 4 \frac{2 q^2}{g y_2}}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-y_2 \pm \sqrt{\frac{4}{4} y_2^2 + 4 \frac{2 q^2}{g y_2}}}{2}$$

$$y_1 = -\frac{y_2}{2} \pm \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + \frac{2 q^2}{g y_2}}$$

el valor negativo de  $y_1$  carece de significado,

$$y_1 = -\frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + \frac{2 q^2}{g y_2}} \quad (3.12)$$

Resolviendo la ecuación 3.11 para  $y_2$  se obtiene:

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + \frac{2q^2}{g y_1}} \quad (3.13)$$

La relación entre los valores  $y_1$ ,  $y_2$  es tal que conforme un tirante aumenta el otro disminuye.

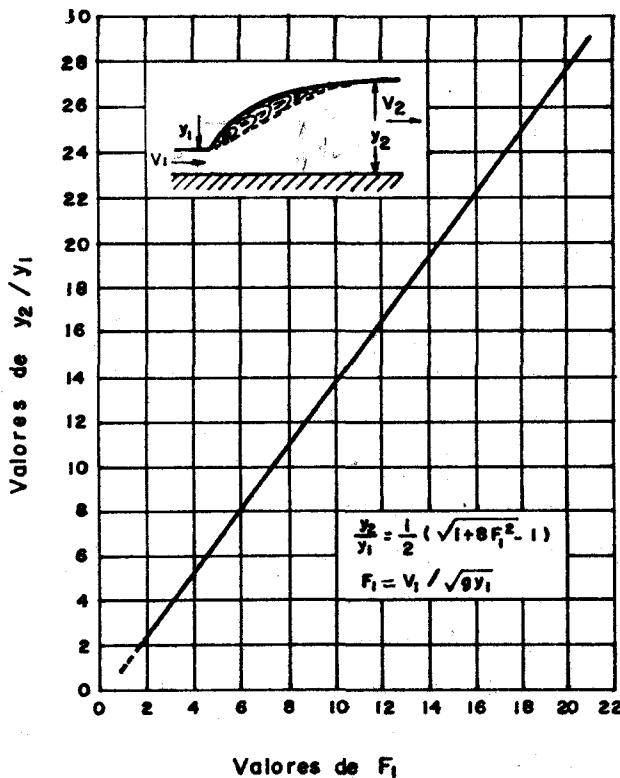
Se llama altura del resalto a la diferencia  $y_2 - y_1$ .

Se demuestra que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1) \quad (3.14)$$

$$(F_1 = \text{número de Froude antes del resalto} = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}}).$$

Para facilitar los cálculos se puede usar la gráfica adjunta.



Relación entre  $F_1$  e  $y_2/y_1$  para un salto hidráulico en un canal rectangular horizontal

### Pérdida de carga

$$\Delta E = E_1 - E_2$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(y_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(y_2 + \frac{v_2^2}{2g}\right) = (y_1 - y_2) + \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) \\ &= (y_1 - y_2) + \frac{q^2}{2g} \left(\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2}\right) = (y_1 - y_2) + \frac{q^2}{2g y_1^2 y_2^2} (y_2^2 - y_1^2)\end{aligned}$$

reemplazando según la 3.10:

$$\frac{q^2}{g} = \frac{y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= (y_1 - y_2) + \frac{y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2}{4 y_1^2 y_2^2} (y_2^2 - y_1^2) \\ &= \frac{4 y_1^3 y_2^2 - 4 y_1^2 y_2^3 + y_1^2 y_2^3 + y_1 y_2^4 - y_1^4 y_2 - y_1^3 y_2^2}{4 y_1^2 y_2^2}\end{aligned}$$

dividiendo entre  $y_1 y_2$ :

$$\Delta E = \frac{4 y_1^2 y_2 - 4 y_1 y_2^2 + y_1 y_2^2 + y_2^3 - y_1^3 - y_1^2 y_2}{4 y_1 y_2}$$

$$= \frac{3 y_1^2 y_2 - 3 y_1 y_2^2 + y_2^3 - y_1^3}{4 y_1 y_2}$$

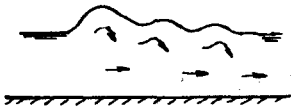
$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \quad (3.15)$$

Se llama eficiencia del resalto a la relación  $\frac{E_2}{E_1}$ .

### Tipos de resalto

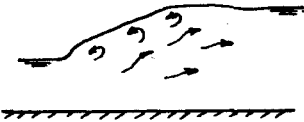
De acuerdo a los estudios del U.S. Bureau of Reclamation los resaltos se pueden clasificar según el número de Froude como sigue:

Para  $F_1 = 1$  a  $1.7$



la superficie del agua muestra ondulaciones y el salto es llamado salto ondular.

Para  $F_1 = 1.7$  a  $2.5$



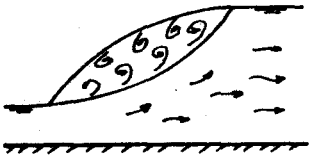
sobre la superficie del salto se desarrollan una serie de rodillos y aguas abajo la superficie del agua permanece lisa. La pérdida de energía es baja. Se llama salto débil.

Para  $F_1 = 2.5$  a  $4.5$



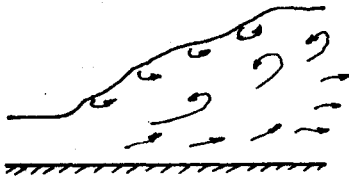
se produce un chorro oscilante entrando al salto, del fondo a la superficie y otra vez atrás, sin periodicidad. Aparece una onda que viaja aguas abajo. Se llama salto oscilante.

Para  $F_1 = 4.5$  a  $9.0$



el salto resulta bien balanceado y de buen rendimiento (la disipación de energía varía desde 45% hasta 70%). Se llama salto permanente.

Para  $F_1 \geq 9.0$

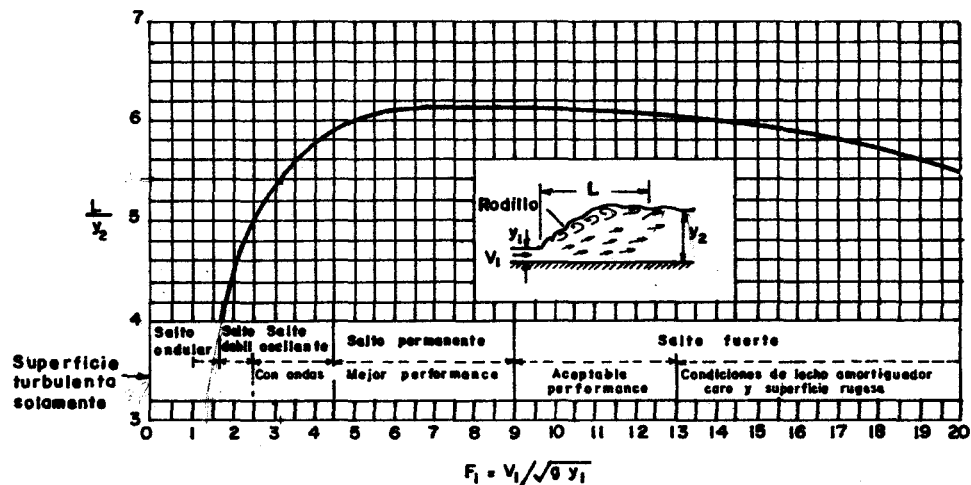


se forma una superficie áspera; aparecen ondas que viajan aguas abajo aunque el salto es de buen rendimiento (la disipación de energía puede alcanzar el 85%). Se llama salto fuerte.

Los rangos dados recién no tienen límites nítidos, sino que se traslapan una cierta extensión dependiendo de las condiciones locales.

### Longitud del resalto

Las experiencias llevadas a cabo por el U.S. Bureau se resumen en la gráfica siguiente.



Se observa que la curva es casi horizontal en el rango de saltos permanentes ( $F_1 = 4.5$  a  $9.0$ ), con un valor

$$\frac{L}{y_2} \approx 6$$

Aun cuando la curva ha sido obtenida para canales rectangulares, ella también puede ser aplicada en forma aproximada a los saltos formados en canales trapezoidales.

### Fuerzas específicas

La ecuación de la cantidad de movimiento en el resalto es:

$$\rho Q V_1 + F_1 - F_2 = \rho Q V_2$$

$$\rho Q V_1 + F_1 = \rho Q V_2 + F_2$$

Las  $F$  son fuerzas hidrostáticas:

$$\rho Q V_1 + \gamma \bar{h}_1 A_1 = \rho Q V_2 + \gamma \bar{h}_2 A_2$$

dividiendo entre  $\gamma$ :

$$\frac{Q V_1}{g} + \bar{h}_1 A_1 = \frac{Q V_2}{g} + \bar{h}_2 A_2$$

reemplazando según la ecuación de continuidad:

$$\frac{Q^2}{g A_1} + \bar{h}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + \bar{h}_2 A_2 \quad (3.16)$$

Se define fuerza específica a la suma:

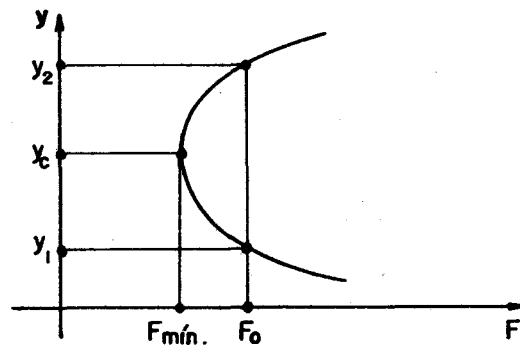
$$F = \frac{Q^2}{gA} + \bar{h} A \quad (3.17)$$

De esta manera el significado de la 3.16 es que la fuerza específica se mantiene constante antes y después del resalto.

La ecuación 3.17 escrita por unidad de ancho en un canal rectangular es:

$$F = \frac{q^2}{gy} + \frac{y^2}{2}$$

ecuación que graficada para un  $q$  constante resulta:



Como puede verse a cada valor  $F_0$  corresponden dos profundidades ( $y_1$ ,  $y_2$ ) que son los tirantes de un resalto hidráulico.

Se puede determinar el valor del tirante que corresponde a  $F$  mínima igualando a cero la primera derivada de  $F$  con respecto a  $y$ :

$$F = \frac{q^2}{gy} + \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{q^2}{y^2} + \frac{2y}{2} = 0$$

$$y = \frac{q^2}{g y^2}$$

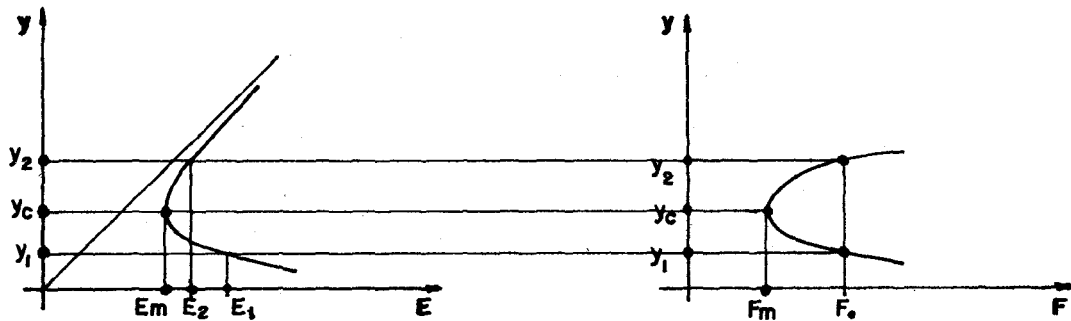
$$y^3 = \frac{q^2}{g}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

que es la expresión del tirante crítico hallada anteriormente (3.2).

Habremos así demostrado que en el flujo uniforme crítico la fuerza específica es un mínimo para el caudal dado.

Resulta sumamente útil dibujar juntas las curvas de energía específica y de fuerza específica:



Se observa que a un valor  $F_0$  corresponden los tirantes del resalto ( $y_1$ ,  $y_2$ ) y que  $E_2 < E_1$  como es natural pues en el resalto se disipa energía.

### 3.6 Asuntos conexos

#### 3.6.1 Pendiente crítica

Como ya se ha indicado anteriormente, un caudal fijo puede escurrir en un mismo canal con flujo uniforme subcrítico, crítico o supercrítico, con tan sólo variar la pendiente del canal.

Pendiente crítica viene a ser la pendiente del canal para la cual el flujo uniforme es crítico.

Se puede deducir la fórmula de la pendiente crítica de dos maneras según se emplee Chezy o Manning para el flujo uniforme.

a) Condición de FU utilizando Chezy:  $Q = AV = AC \sqrt{RS}$

Condición de FC:

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1$$

eliminando Q de ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{A^2 C^2 R S_c \cdot T}{g A^3} = 1$$

$$S_c = \frac{g A^3}{A^2 C^2 R T} = \frac{g A}{C^2 R T} = \frac{g D}{C^2 R} \quad (3.18)$$

para canales anchos:  $R = D$

$$S_c = \frac{g}{C^2} \quad (3.18')$$

b) Condición de FU utilizando Manning:  $Q = AV = A \frac{S^{1/2} R^{2/3}}{n}$

Condición de FC:

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1$$

eliminando Q de ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{A^2 S_c R^{4/3} T}{n^2 g A^3} = 1$$

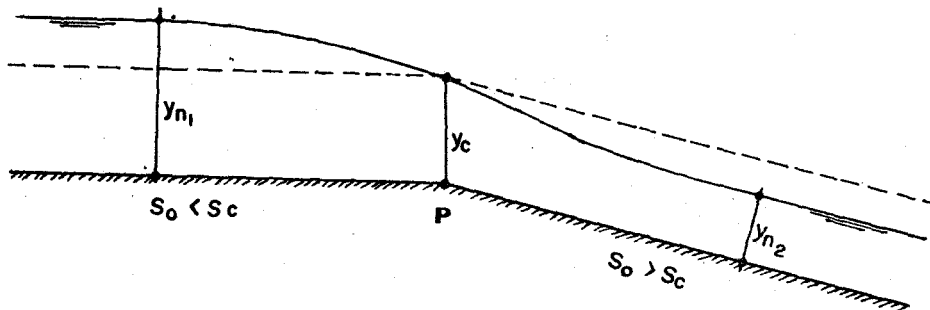
$$S_c = \frac{g A^3 n^2}{A^2 R^{4/3} T} = \frac{g A n^2}{R^{4/3} T} = \frac{g D n^2}{R^{4/3}} \quad (3.19)$$

para canales anchos:  $R \approx D$

$$S_c = \frac{g n^2}{D^{1/3}} \quad (3.19')$$

### Incremento brusco de la pendiente del canal

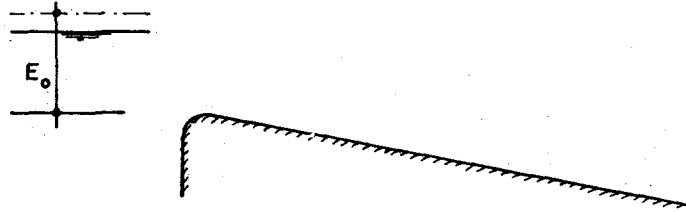
De producirse un incremento brusco de la pendiente del canal, de un valor subcrítico a otro supercrítico, es de esperar que la superficie libre del agua adopte una configuración como la que se muestra en la figura.



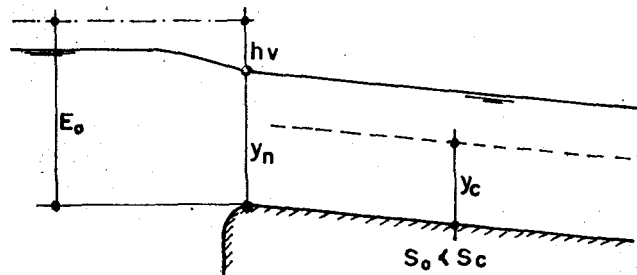
Aun cuando las experiencias indican que el tirante crítico se presenta un poco antes del punto de inflexión P, es costumbre indicar en los esquemas y planos que  $y_c$  se presenta exactamente en el punto P. Esto es importante para el efecto de los cálculos numéricos que son estudiados posteriormente.

### 3.6.2 Entrada libre al canal

Supongamos que el agua de un embalse entra a un canal rectangular, que la energía específica  $E_0$  en el embalse es constante y que el canal tiene una pendiente uniforme  $S_0$ . Se trata de averiguar el gasto en el canal.



- a) Si la pendiente del canal  $S_0$  es pequeña o la rugosidad  $n$  es grande se produce una acción de frenado y el flujo resulta subcrítico. Se dice entonces que se presenta "control de rugosidad".



Las ecuaciones en juego son las de Bernoulli y flujo uniforme

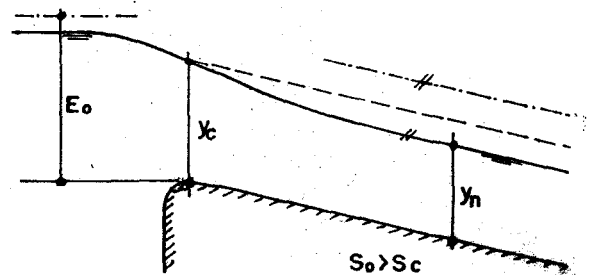
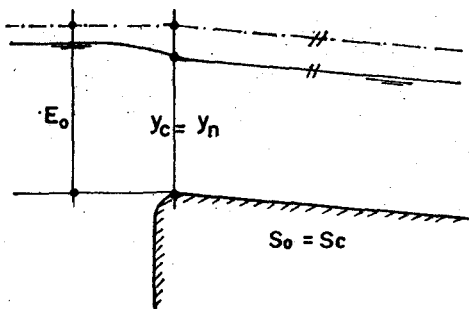
$$\left. \begin{aligned} E_0 &= y_n + \frac{V^2}{2g} = y_n + \frac{q^2}{2g y_n^2} \\ q &= y_n \cdot V = y_n \cdot \frac{S^{1/2} R^{2/3}}{n} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$E_0$  y  $S_0$  son datos de modo que se puede resolver el sistema de ecuaciones para  $q$ ,  $y_n$ .

Se puede también considerar en el Bernoulli una pequeña pérdida de carga, que para cresta redondeada resulta ser

$$\approx 0.25 \frac{V^2}{2g}$$

- b) Si la pendiente del canal  $S_0$  es grande o la rugosidad  $n$  es pequeña se produce una acción de embalamiento y el flujo resulta supercrítico. Se dice entonces que se presenta control de cresta.



Las ecuaciones en juego son las del tirante crítico y energía mínima:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \\ E_o &= \frac{3}{2} y_c \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

con las cuales se puede determinar el caudal:

$$\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \frac{2}{3} E_o$$

$$q = 1.704 E_o^{3/2} \quad \text{en unidades métricas} \quad (3.22)$$

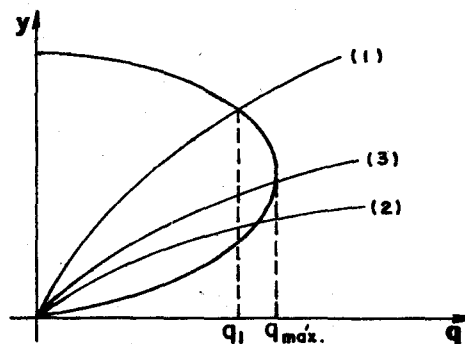
es decir, el flujo se acomoda de tal modo que el caudal  $q$  es máximo y la energía disponible  $E_o$  la mínima compatible.

Las experiencias en torno a este caso arrojan valores del caudal sólo ligeramente menores que los dados por la fórmula 3.22.

### Comentarios

1. Frente a un caso concreto uno no sabe en realidad si la pendiente del canal es subcrítica o supercrítica. Es decir, habría que suponer un tipo de flujo (subcrítico o supercrítico), resolver y después verificar.

Para obviar esto existe otro procedimiento. Consiste en graficar la curva de caudales a energía específica constante  $E_o$  y la curva de descarga del canal de pendiente  $S_o$ .



Para la curva de descarga (1) el caudal es  $q_1$  y la pendiente del canal subcrítica. Para la curva de descarga (2) el caudal es  $q_{máx}$  y la pendiente del canal supercrítica. Para la curva de descarga (3) el caudal es  $q_{máx}$  y la pendiente crítica.

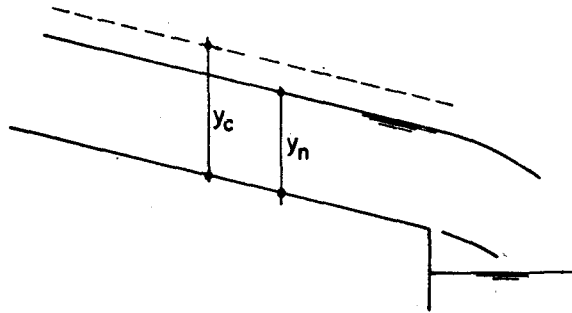
2. Se acostumbra redondear el fondo del canal en la entrada con el fin de disminuir la pérdida de energía.
3. La mayoría de las veces la velocidad con que se acerca el agua a la

entrada es despreciable, de modo que el valor de  $E_0$  se refiere sólo a la profundidad del agua.

4. Realmente el flujo uniforme se establece en el canal sólo después que el agua ha recorrido una cierta distancia, a veces apreciable, a partir de la entrada.

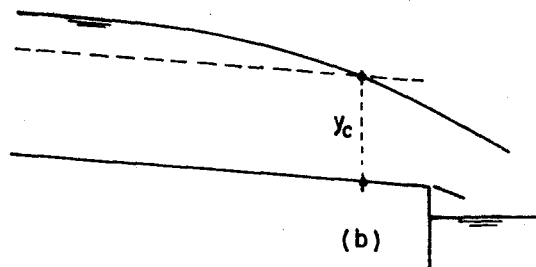
### 3.6.3 Salida libre del canal

Supongamos que el agua del canal descarga a un embalse cuyo nivel es bajo. Si el flujo es supercrítico el agua descarga con un tirante en el borde igual al tirante normal.

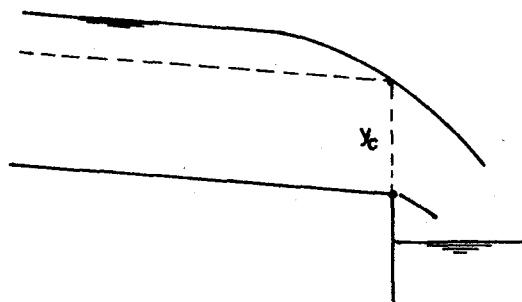


Lo mismo ocurre si el flujo en el canal es crítico.

Si el flujo en el canal es subcrítico las experiencias indican que la superficie del agua atraviesa el tirante crítico en (b), a una cierta distancia del borde.



En la práctica sin embargo se considera en los esquemas y también en los cálculos que el cruce tiene lugar en el borde mismo:

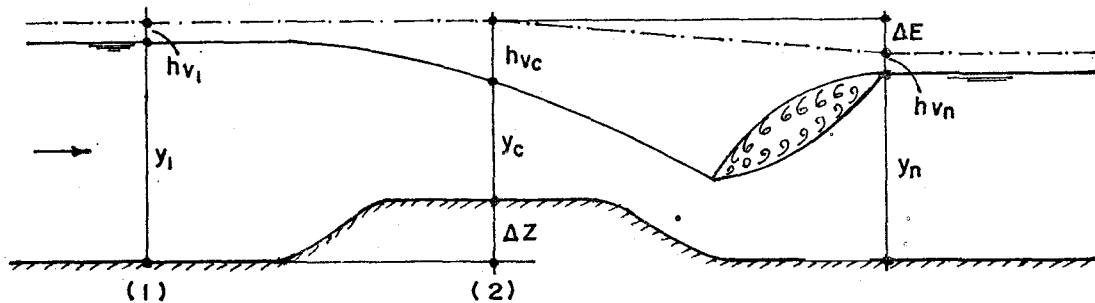


### 3.6.4 Aforadores de escurrimiento crítico

Los aforadores son dispositivos que se instalan en los canales con flujo uniforme subcrítico con el fin de medir caudales. La idea primaria consiste en provocar escurrimiento crítico. Esto se hace elevando el fondo, disminuyendo el ancho o haciendo ambas cosas. En cualquier caso lo importante es acelerar el flujo y provocar el flujo crítico para aislar la sección de aforo de las variaciones de aguas abajo.

Los fundamentos teóricos son los siguientes:

- a) Supongamos un canal de ancho constante cuyo fondo se ha elevado una altura suficiente para que en el rango usual de caudales se presente flujo crítico.



Ecuación de la energía entre las secciones (1) y (2):

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta Z + y_c + \frac{V_c^2}{2g}$$

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta Z + E_m \quad (3.23)$$

Esta ecuación permite averiguar el caudal para un tirante medido  $y_1$  operando por aproximaciones sucesivas. Para un valor medido  $y_1$ , suponiendo en primera aproximación  $V_1 = 0$  se despeja  $E_m$  y con la 3.22 se halla el caudal  $q$ . Para una segunda aproximación se incluye  $V_1 = \frac{q}{y_1}$  en la 3.23 y se repite hasta que  $V_1$  deje de variar ostensiblemente.

Se puede considerar también en la ecuación inicial una pequeña pérdida de carga que en la práctica se evalúa en la forma:

$$h_p = \frac{1}{10} \left( \frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

- b) Supongamos ahora un canal rectangular cuyo ancho se ha angostado hasta un valor  $b_c$  a fin de provocar condiciones críticas de flujo. En estas circunstancias;

$$\begin{aligned} Q &= A_c \cdot V_c = b_c \cdot y_c \cdot V_c = b_c \cdot \frac{2}{3} E \cdot \sqrt{g y_c} \\ &= b_c \cdot \frac{2}{3} E \cdot \sqrt{g \frac{2}{3} E} \end{aligned}$$

$$Q = 0.385 \sqrt{2g} b_c \cdot E^{3/2} \quad (3.24)$$

ecuación que también tiene que resolverse por aproximaciones sucesivas por cuanto E es una función de Q. En efecto, despreciando la pérdida de carga:

$$E = E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_1 + \frac{Q^2}{2g A_1^2}$$

donde el subíndice corresponde al tramo aguas arriba del aforador.

En la práctica, de los canales se utilizan aforadores estandarizados de fácil construcción y uso. De ellos el conducto aforador Parshall es el más conocido y es descrito en el capítulo 7.

### 3.6.5 Partidores de escurrimiento crítico

Los partidores son dispositivos que se instalan en los canales de riego (en los que el flujo uniforme es subcrítico) con el fin de dividir el caudal principal en porcentajes fijos.

La idea primaria consiste en provocar el escurrimiento crítico y esto se hace elevando el fondo, disminuyendo el ancho o ambas cosas. En cualquiera de los tres casos lo importante es acelerar el flujo y provocar el flujo crítico para aislar la sección de partición de variaciones de aguas abajo.

La explicación detallada se hace en el capítulo 7.

### 3.6.6 Flujo crítico en conductos circulares

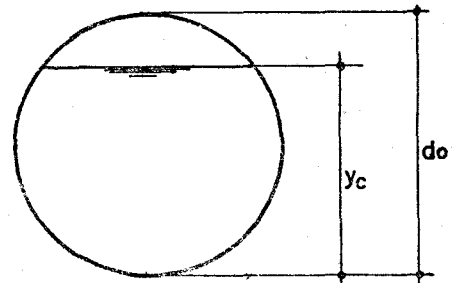
En principio debe cumplirse la ecuación 3.5:

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1$$

de donde:  $Q = \frac{\sqrt{g} A^{3/2}}{T^{1/2}}$

pero  $A = C_A d_o^2$   
 $T = C_T d_o$  } (ver apartado 1.5)

de modo que:  $Q = \frac{\sqrt{g} C_A^{3/2} d_o^3}{C_T^{1/2} d_o^{1/2}} = K_c d_o^{5/2} \quad (3.25)$



Análogamente:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{K_c d_o^{5/2}}{C_A d_o^2} = \frac{K_c}{C_A} d_o^{1/2}$$

$$h_{vC} = \frac{v^2}{2g} = \frac{K_C^2}{2g C_A^2} d_o = K'_C d_o \quad (3.26)$$

Tanto  $K_C$  como  $K'_C$  dependen sólo del valor de la relación  $y_c/d_o$  de modo que se pueden confeccionar las tablas que se acompañan.

$y_c/d_o$	$K_C$	$K'_C$	$y_c/d_o$	$K_C$	$K'_C$
0.02	0.0014	0.0067	0.52	0.8301	0.2065
0.04	0.0054	0.0134	0.54	0.8921	0.2170
0.06	0.0121	0.0203	0.56	0.9562	0.2279
0.08	0.0215	0.0271	0.58	1.0226	0.2393
0.10	0.0334	0.0341	0.60	1.0912	0.2511
0.12	0.0479	0.0411	0.62	1.1621	0.2635
0.14	0.0649	0.0482	0.64	1.2354	0.2765
0.16	0.0844	0.0553	0.66	1.3113	0.2902
0.18	0.1064	0.0626	0.68	1.3897	0.3048
0.20	0.1308	0.0699	0.70	1.4711	0.3204
0.22	0.1577	0.0773	0.72	1.5556	0.3371
0.24	0.1869	0.0848	0.74	1.6437	0.3552
0.26	0.2184	0.0925	0.76	1.7357	0.3749
0.28	0.2523	0.1002	0.78	1.8322	0.3967
0.30	0.2884	0.1081	0.80	1.9343	0.4210
0.32	0.3268	0.1161	0.82	2.0431	0.4485
0.34	0.3674	0.1243	0.84	2.1603	0.4803
0.36	0.4102	0.1326	0.86	2.2884	0.5177
0.38	0.4552	0.1411	0.88	2.4313	0.5632
0.40	0.5024	0.1497	0.90	2.5956	0.6204
0.42	0.5517	0.1586	0.92	2.7927	0.6966
0.44	0.6031	0.1676	0.94	3.0454	0.8065
0.46	0.6567	0.1769	0.96	3.4099	0.9885
0.48	0.7124	0.1865	0.98	4.0874	1.3958
0.50	0.7701	0.1964	0.99	4.8710	1.9700