CONSTRUCCION DE ELIPSOIDES MEDIANTE SECCIONES CIRCULARES

Así como las secciones circulares que se obtienen al cortar un elipsoide por planos paralelos a una dirección determinada, permitirían recontruirlo colocándolas nuevamente unas al lado de las otras en sus respectivas posiciones, es también posible, como es sabido, llegar en la práctica al mismo resultado utilizando sólo algunas de dichas secciones y articulándolas convenientemente en el lugar que les corresponde. Con arreglo a este concepto me propuse construir, empleando discos recortados en cartulina, elipsoides cuya estructura permitiera modificar a voluntad las dimensiones de dos de sus ejes, y he armado uno que puede ser convertido en esfera al igualarse sus ejes.

Para proceder con la necesaria exactitud me he guiado por algunos sencillos cálculo que expongo a continuación.

La dirección de los planos que determinan secciones circulares sobre el elipsoide viene dada por la conocida ecuación

$$tang\,\beta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$$

El signo $\pm$ indica que hay dos series de planos que con el plano XOY de coordenadas forman los angulos β y $(180^\circ-\beta)$ y por tanto, como son planos que se cortan, forman entre sí el angulo $2\beta = \alpha$

Construyendo el elipsoide de tal manera que los planos articulados de las secciones circulares sean relativamente móviles, el angulo α puede variar y con él varían tambien los semiejes a y c en funcion de β en la forma que paso a determinar.

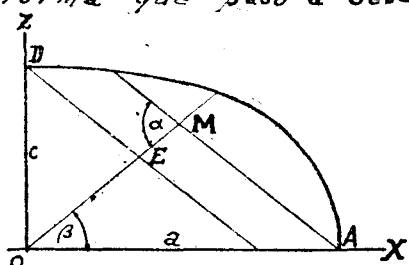

fig. 1

En el triangulo isósceles OMA formado por las trazas OM y AM de los planos que pasen por el origen y por el extremo del eje mayor y que están articulados en M (veose la fig. 1) tenemos

$$\cos.\,\beta = \frac{a}{2\,OM}$$

En el movimiento de charnela de los planos OM y OA, la longitud $OM = R$ se conserva constante. Despejando a tendremos:

$$a = 2R\cos\beta \qquad (1)$$

Analogamente en el triángulo isósceles

ODE

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{2\,OE}$$

Haciendo OE, que tambien es constante, igual a J y despejando c, se tiene:

$$c = 2J \operatorname{sen} \beta \qquad (2)$$

Estas dos ecuaciones (1) y (2) dan los valores de los semiejes variables a y c en función del parametro β y de las magnitudes R y J que son constantes para cada modelo construido.

El semieje b se mantiene constante siempre. El semieje a varía de cero cuando $\beta = 90°$ a 2R cuando $\beta = 0°$. El semieje c varía de cero para $\beta = 0°$ a 2J cuando $\beta = 90°$ lo que se deduce de las fórmulas (1), y (2) respectivamente, es decir que mientras a disminuye, c aumenta; luego hay un instante en que a = c lo que corresponde a un elipsoide de revolución, es decir que se tiene:

$$2J \operatorname{sen} \beta = 2R \cos \beta$$

o sea cuando

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{R}{J} \qquad (3)$$

en ese momento

$$a = 2R \cos\left(\operatorname{arco} \operatorname{tang} \frac{R}{J}\right)$$

pero

$$\cos\left(\operatorname{arco} \operatorname{tang} \frac{R}{J}\right) = \frac{J}{\sqrt{J^2 + R^2}}$$

o sea que se tiene

$$a - c = \frac{2RJ}{\sqrt{J^2 + R^2}} \qquad (4)$$

Si b tiene este mismo valor, el elipsoide al pasar por la forma de revolución adopta forma esférica.

En una de las fotografías está representado el modelo construido en forma de elipsoide de tres ejes; y en la otra el mismo modelo convertido en esfera mediante el acercamiento de los polos hasta igualarse los ejes.

Para construir un elipsoide dado que pueda convertirse en una esfera de radio A y cuyo semieje a pueda tomar un valor máximo B, basta observar que, cuando a tenga valor máximo, $\beta = 0°$ y entonces según la ecuación (1)

$$a = B = 2R$$

$$\therefore R = \tfrac{1}{2} B$$

de la ecuación (4)

$$J = \frac{Rb}{\sqrt{4R^2 - b^2}}$$

reemplazando en esta ecuación el valor de b, A y R

$$J = \frac{AB}{2\sqrt{B^2 - A^2}}$$

de donde, reemplazando este valor en (3),

$$\text{tang } \beta = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A}$$

Queda de esta manera fijada la posición del punto M por su distancia al origen, $R = \frac{1}{2} B$ y por el angulo β.

Miraflores, Noviembre 1934

Felipe Rey Bull.