Capítulo 5

- Máquinas de estado finito.

Máquinas

Una máquina de estado finito M es un quíntuple M = (A, S, Z, F, G), donde:

- A es un conjunto finito de símbolos de entrada llamado alfabeto de entrada.
- S es un conjunto finito de estados llamado conjunto de estados.
- Z es un conjunto finito de símbolos de salida llamado alfabeto de salida.
- $F : S \times A \to S$ es la función de estados.
- $G : S \times A \to Z$ es la función de salida.

Ejemplo

Sea M = (A, S, Z, F, G) una máquina tal que:

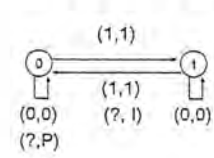
A = {0,1,?}, S = {0,1}, Z = {0,1,I,P },

$F: S \times A \to S$ y	$G: S \times A \to Z$
$(0, 0) \to 0$	$(0, 0) \to 0$
$(0, 1) \to 1$	$(0, 1) \to 1$
$(0, ?) \to 0$	$(0, ?) \to P$
$(1, 0) \to 1$	$(1, 0) \to 0$
$(1, 1) \to 0$	$(1, 1) \to 1$
$(1, ?) \to 0$	$(1, ?) \to I$

La tabla de estados de M es:

M	F			G		
S	0	1	?	0	1	?
0	0	1	0	0	1	P
1	1	0	0	0	1	I

El diagrama de estados de M es:



Funciones de estado y Salida para cadenas

Sea M = (A, S, Z, F, G)

dado un estado inicial: $s_o \in S$

y una cadena de entrada: $\underline{a} = a_1 \ldots a_k \in A^k$.

M determina una cadena de salida: $\underline{z} = z_1 \ldots z_k \in Z^k$

y una cadena de estados: $\underline{s} = s_1 \ldots s_k \in S^k$,

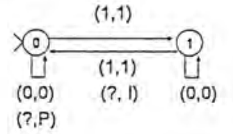
tales que: $F(s_{i-1}, a_i) = s_i$ y $G(s_{i-1}, a_i) = z_i$.

Definimos:

$$F_k: S \times A^k \to S^k \quad \text{y} \quad G_k: S \times A^k \to Z^k$$
$$(s_o, \underline{a}) \to \underline{s} \qquad\qquad (s_o, \underline{a}) \to \underline{z}$$

Ejemplo

Dada la máquina M:



Si la cadena de entrada es $\underline{a} = 0\ 1\ 1\ 0\ ?$,
entonces:

$F_5(0, \underline{a}) = \underline{s} = 0\ 1\ 0\ 0\ 0$,
$G_5(0, \underline{a}) = \underline{z} = 0\ 1\ 1\ 0\ P$.

Si la cadena de entrada es $\underline{a} = 1\ 1\ 1\ 0\ ?$,
entonces:

$F_5(0, \underline{a}) = \underline{s} = 1\ 0\ 1\ 1\ 0$,
$G_5(0, \underline{a}) = \underline{z} = 1\ 1\ 1\ 0\ I$.

Cubrimientos

Sean M = (A, S, Z, F, G) y M' = (A, S', Z, F', G')
dos máquinas con los mismos alfabetos de
entrada y los mismos alfabetos de salida.
M' cubre a M ($M' \geq M$),
si existe una función suryectiva
$\varphi: S \rightarrow S'$ tal que:
$G_k(s_i, \underline{a}) = G'_k(\varphi(s_i), \underline{a})$
$\forall K \in Z^+, \forall \underline{a} \in A^k, \forall s_i \in S$.

Teorema

La relación de cubrimiento de máquinas es
reflexiva y transitiva.

Equivalencia de Máquinas

Dadas dos máquinas M y M'.

M es equivalente a M' ($M \equiv M'$),
Si M' cubre a M y M cubre a M'.

Teorema

La relación de equivalencia de máquinas es una relación de equivalencia.

Morfismos

Sean $M = (A, S, Z, F, G)$ y $M' = (A, S', Z, F', G')$ dos máquinas con los mismos alfabetos de entrada y los mismos alfabetos de salida.
Un morfismo de M a M' es una función
$\theta : S \to S'$ tal que:
$G(s_i, a_j) = G'(\theta(s_i), a_j)$,
$\theta(F(s_i, a_j)) = F'(\theta(s_i), a_j)$,
$\forall a_j \in A, \forall s_i \in S$.

Si θ es un morfismo de M a M:

- θ es un epimorfismo, si θ es suryectiva .
- θ es un monomorfismo, si θ es inyectiva .
- θ es un isomorfismo, si θ es biyectiva .

Isomorfismo de máquinas

M es isomorfa a M' ($M \approx M'$),
si existe un isomorfismo de M a M'.

Teorema

Todo epimorfismo de M a M'
define un cubrimiento de M por M'.

Teorema

Si M es isomorfa a M',
entonces M es equivalente a M'.

Máquina Mínima

Dadas dos máquinas M y M'.

M' es una máquina mínima de M, si:

1) M' cubre a M
2) Si M'' cubre a M, entonces M' cubre a M''.

Estados equivalentes

Sea $M = (A, S, Z, F, G)$.
Un estado s_i es k-equivalente con un estado s_j ($s_i \, E_k \, s_j$),
si $G_k(s_i, \underline{a}) = G_k(s_j, \underline{a}) \;\; \forall \, \underline{a} \in A^k$.
Un estado s_i es equivalente con un estado s_j ($s_i \, E \, s_j$),
si $s_i \, E_k \, s_j \;\; \forall \, k \geq 1$.

Teorema

E_k y E son relaciones de equivalencia en S.

Teorema

$E_k \subset E_{k-1} \;\; \forall \, k > 1$.

Minimización de Máquinas

1. Se halla E_1 y su correspondiente partición π_1.
2. Se halla E_2 y su correspondiente partición π_2.
3. Se sigue el proceso hasta que $E_k = E_{k-1}$ para algún k.
4. La última partición $\pi = \{ C_1, \dots, C_n \}$ es la correspondiente a la relación E.
5. Sea $s'_i \in C_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
   Se define $S' = \{s'_1, \dots, s'_n\}$.
6. Una máquina mínima de M es:
   $M' = (A, S', Z, F', G')$,
   donde F' y G' son respectivamente las restricciones de F y G a S'.

Ejemplo

Minimizar la máquina M definida por:

M	F			G		
S	a	b	c	a	b	c
1	2	4	5	1	0	0
2	1	4	4	0	1	1
3	2	2	5	1	0	0
4	3	2	2	0	1	1
5	6	4	3	1	0	0
6	8	9	6	0	1	1
7	6	2	8	1	0	0
8	4	4	7	1	0	0
9	7	9	7	0	1	1

1. $\pi_1 = \{\{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4, 6, 9\}\}$

2.

	1	3	5	7	8
1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1
5			1	1	1
7				1	1
8					1

	2	4	6	9
2	1	1	1	0
4		1	1	0
6			1	0
9				1

$\pi_2 = \{\{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4\ 6\}, \{9\}\}$

3.

	1	3	5	7	8
1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1
5			1	1	1
7				1	1
8					1

	2	4	6
2	1	1	0
4		1	0
6			1

$\pi_3 = \{\{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4\}, \{6\}, \{9\}\}$

4.

	1	3	5	7	8
1	1	1	0	0	1
3		1	0	0	1
5			1	1	0
7				1	0
8					1

	2	4
2	1	1
4		1

$\pi_4 = \{\{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\}\}$

5.

	1	3	8
1	1	1	1
3		1	1
5			1

	2	4
2	1	1
4		1

	5	7
5	1	1
7		1

$\pi_5 = \{\{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\}\} = \pi_4$

Entonces:

$\pi = \{\{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\}\}$.

Sea $\varphi: S \to S'$ tal que:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(s)$	1	2	1	2	3	4	3	1	5

M' una máquina mínima de M es:

M'	F'			G'		
S'	a	b	c	a	b	c
1	2	2	3	1	0	0
2	1	2	2	0	1	1
3	4	2	1	1	0	0
4	1	5	4	0	1	1
5	3	5	3	0	1	1

Capítulo 6

- Lenguajes Formales.

Alfabetos y Cadenas

- Un alfabeto Σ es un conjunto finito no vacío.
- Una cadena w sobre Σ es una sucesión finita de elementos de Σ:

$$w = a_1 \dots a_n,$$
$$a_i \in \Sigma \quad (i = 1, \dots, n).$$

Igualdad de cadenas

Si $w_1 = a_1 \dots a_n$ y $w_2 = b_1 \dots b_n$
son dos cadenas sobre Σ,

$$w_1 = w_2 \leftrightarrow a_i = b_i \ (i = 1, \dots, n).$$

Longitud de una cadena

Sea $w = a_1 \dots a_n$ una cadena Σ,
la longitud de la cadena w es: $|w| = n$.

Concatenación de cadenas

La concatenación de las cadenas

$$w_1 = a_1 \dots a_n \quad y \quad w_2 = b_1 \dots b_m$$

es la cadena: $w_1w_2 = a_1 \dots a_nb_1 \dots b_m$,
con $|w_1w_2| = |w_1| + |w_2|$.

Definición de Σ^+

Se define Σ^+ por:
$\Sigma^+ = \{ w / w$ es una cadena sobre $\Sigma, |w| \geq 1 \}$.

Cadena nula

La cadena nula es la cadena ε tal que:

$\varepsilon w = w\varepsilon = w \quad \forall\, w \in \Sigma^+$,

con $|\varepsilon| = 0$.

Definición de Σ^*

Se define Σ^* por:

$\Sigma^* = \{ w \,/\, w$ es una cadena sobre Σ, $|w| \geq 0\}$.

$(\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\})$

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces:

$\Sigma^+ = \{a, b, c, aa, cb, \ldots, aac, cbc, \ldots\}$.

Si $w_1 = abbc \in \Sigma^+$, con $|w_1| = 4$,

$w_2 = bacca \in \Sigma^+$, con $|w_2| = 5$, entonces:

$w_1w_2 = abbcbacca \in \Sigma^+$, con $|w_1w_2| = 9$,

$w_2w_1 = baccaabbc \in \Sigma^+$, con $|w_2w_1| = 9$,

pero $w_1w_2 \neq w_2w_1$.

Definición de a^n $(a \in \Sigma$ y $n \in Z^+)$

Si $a \in \Sigma$ y $n \in Z^+$, definimos:

$a^0 = \varepsilon$

$a^n = aa^{n-1}$, $n \geq 1$.

$(\ |a^n| = n\ )$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces:

$w_1 = a^2 = aa$

$w_2 = a^4 = aaaa$

$w_3 = a^2 a^4 = a^6 = aaaaaa$

$w_4 = a^4 a^2 = a^6 = aaaaaa$

$w_5 = ba^3cc = baaacc$

Teorema

Si Σ es un conjunto finito no vacío, entonces Σ^* es un conjunto infinito numerable.

Lenguajes Formales

Sea Σ es un conjunto finito no vacío.

L es un lenguaje formal sobre Σ,
si $L \subset \Sigma^*$.

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces son lenguajes sobre Σ los siguientes conjuntos:

$L_1 = \{ a, aa, ab, ac \}$,
$L_2 = \{ a^n cb^n \ / \ n \geq 0 \}$
$= \{ c, acb, aacbb, aaacbbb, \ldots \}$,
$L_3 = \varnothing$.

Ejemplo

Sea $L = \{ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \}$ un lenguaje sobre el alfabeto $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

$w_1 = 010 \in L$,
$w_2 = 100 \in L$,
pero $w_1 w_2 = 010100 \notin L$.

Operaciones con Lenguajes

Sean L_1 y L_2 dos lenguajes sobre el alfabeto Σ.

1) Intersección: $L_1 \cap L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \}$
2) Unión: $L_1 \cup L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ o } w \in L_2 \}$
3) Diferencia: $L_1 - L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ y } w \notin L_2 \}$
4) Concatenación: $L_1 L_2 = \{ w_1 w_2 \ / \ w_1 \in L_1 \text{ y } w_2 \in L_2 \}$
5) Clausura:

$L^*_1 = \{ w_1 \ldots w_k \ / \ k \geq 1 \text{ y } w_i \in L_1, \ i = 1, \ldots, k \} \cup \{ \varepsilon \}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L_1 = \{ab, ac\}$ y $L_2 = \{ab, b\}$, entonces:

$L_1 \cap L_2 = \{ ab \}$
$L_1 \cup L_2 = \{ ab, ac, b \}$
$L_1 - L_2 = \{ ac \}$
$L_1 L_2 = \{ abab, abb, acab, acb \}$
$L_2 L_1 = \{ abab, abac, bab, bac \}$
$L^*_1 = \{ \varepsilon, ab, ac, abab, abac, acac, acab, ababab, \ldots \}$
$L^*_2 = \{ \varepsilon, ab, b, abab, abb, bb, bab, ababab, \ldots \}$

Expresiones Regulares

El conjunto de expresiones regulares (E.R.) sobre un alfabeto Σ es el conjunto de cadenas sobre el alfabeto: $\Sigma \cup \{ (,), \varnothing, |, ^* \}$

definido recursivamente por:

R1) $\varnothing$ es E.R.
R2) Si $a \in \Sigma$, entonces a es E.R.
R3) Si α y β son E.R., entonces $\alpha\beta$ es E.R.
R4) Si α y β son E.R., entonces $(\alpha \mid \beta)$ es E.R.
R5) Si α es E.R., entonces $(\alpha)^*$ es E.R.

Sea α una expresión regular sobre Σ.

Si $\alpha \in \Sigma$ o $\alpha = (\ldots)$,
entonces $(\alpha)^*$ se representa por: α^*

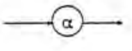
Ejemplo

Si $\Sigma = \{ a, b, c \}$,
entonces son expresiones regulares sobre Σ
las siguientes expresiones:

$\alpha_1 = a$
$\alpha_2 = abaac$
$\alpha_3 = (a \mid b)$
$\alpha_4 = a^*$
$\alpha_5 = (a \mid b)^*$
$\alpha_6 = ab(a \mid b)(ac)^*$

Diagramas sintácticos para expresiones regulares

Si $\alpha \in \Sigma$, el diagrama para α es:

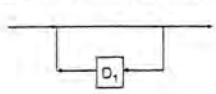


Si D_1 y D_2 son los diagramas
para las expresiones regulares α_1 y α_2, entonces:

El diagrama para $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$ es:

El diagrama para $\alpha_1\alpha_2$ es:

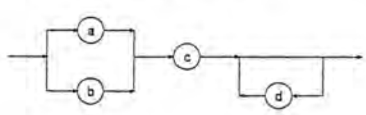
El diagrama para $(\alpha_1)^*$ es:



Ejemplo

El diagrama sintáctico para la expresión regular

α = (a | b)cd * es:



Lenguaje generados por expresiones regulares

Dado el alfabeto Σ, se define recursivamente L(α), el lenguaje generado por la expresión regular α, por:

L1) $L(\emptyset) = \{\varepsilon\}$

L2) Si $a \in \Sigma$, $L(a) = \{a\}$

L3) Si α y β son E.R., $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

L4) Si α y β son E.R., $L((\alpha \mid \beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$

L5) Si α es E.R., $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 00(0 \mid 1)^*11$, el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha)$ = { w $\in \Sigma^*$ / w comienza con dos ceros y w termina con dos unos }

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = (0^* \mid 1^*)$, el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha)$ = { w $\in \Sigma^*$ / w sólo contiene ceros o w sólo contiene unos o w es la cadena nula }

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 0^*10^*10^*$, el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha)$ = { w $\in \Sigma^*$ / w tiene dos unos }

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 0^*(0^*10^*10^*)^*$,
el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* / w$ tiene un número par de unos $\}$

Ejemplo

Dada la expresiones regulares:
$\alpha_1 = (01)^*00$ y $\alpha_2 = 0(10)^*0$,

entonces:

$L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

Autómatas finitos

Un autómata finito A es un quíntuple $A = (\Sigma, S, T, i, M)$.
Donde:

- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada, llamado alfabeto de entrada.
- S es un conjunto finito de estados, llamado conjunto de estados.
- T es un subconjunto de S, llamado conjunto de estados de aceptación.
- i es un elemento de S, llamado estado inicial.
- M es una relación de $S \times \Sigma$ en S, llamada relación de estados.

Autómatas determinísticos y Autómatas no determinísticos

El autómata A es determinístico, si la relación de estados M es una función.

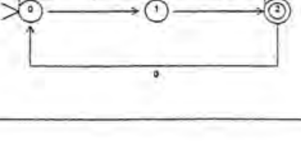
El autómata A es no determinístico, Si la relación de estados M no es una función.

Ejemplo

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito,
con $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, $S = \{ 0, 1, 2 \}$, $T = \{ 2 \}$, $i = 0$
y $M: S \times \Sigma \rightarrow S$ definida por:

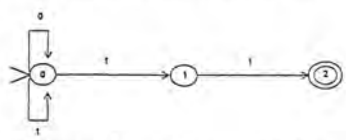
A	M	
S	0	1
0	0	1
1	0	2
2	0	2

A es un autómata determinístico,
y su diagrama es:



Ejemplo

Si el diagrama del autómata A es:



El autómata A es no determinístico.

Configuraciones

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito.

Una configuración es un par $(s_j, w) \in S \times \Sigma^*$

Paso de una configuración a otra

De la configuración (s, w) se pasa, en un paso, a la configuración (s', w') y se representa:

$$(s, w) \longrightarrow (s', w')$$

si y sólo si $w = aw'$ y $M(s,a) = s'$

De la configuración (s, w) se pasa, en cero o más pasos, a la configuración (s', w') y se representa:

$$(s, w) \xrightarrow{*} (s', w')$$

si y sólo si

$\xrightarrow{*}$ es la relación de accesibilidad, de la relación entre configuraciónes: $\longrightarrow$

Cadenas aceptadas por Autómatas

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito.

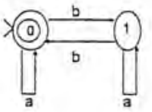
Una cadena $w \in \Sigma^*$ es aceptada por A, si existe $j \in T$ tal que: $(i, w) \xrightarrow{*} (j, \varepsilon)$

Lenguajes generados por autómatas

El lenguaje generado por el autómata A, es $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \,/\, w \text{ es aceptada por } A \}$

Ejemplo

Dado el autómata A:



Si w = aabba $\in \Sigma^*$:

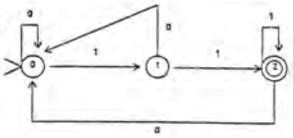
(0,aabba) → (0,abba) → (0,bba) → (1,ba) → (0,a) → (0,ε)

como 0 $\in$ T, entonces w $\in$ L(A).

L(A) = {w $\in$ {a,b}* / w tiene un número par de letras b}

Ejemplo

Dado el autómata A:



L(A) = { w $\in$ {0,1}* / w termina con dos unos }

Algoritmo de Thompson

Dada una expresión regular α,
el algoritmo de Thompson permite encontrar
un autómata finito determinístico A,
tal que L(A) = L (α).

I) Dada la expresión regular α,
se encuentra
un autómata finito no determinístico AN,
tal que L(AN) = L(α).

---

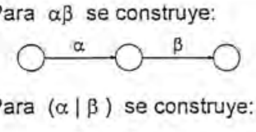
1) Para la cadena nula ε se construye:

2) Para a $\in \Sigma$ se construye:

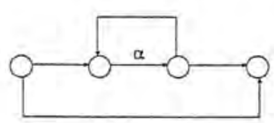
---

3) Para $\alpha\beta$ se construye:

4) Para (α | β) se construye:



5) Para α^* se construye:



II) Dado un autómata finito no determinístico AN, se encuentra un autómata finito determinístico A, tal que L(A) = L(AN).

Dado un autómata finito no determinístico
$AN = (\Sigma, S, T, i, M)$.
Para $R \subset S$ y $a \in \Sigma$ definimos:

$cl(R) = \{ t \in S \;/\; \exists\, p \in R: \; p \xrightarrow{*} t \}$

$Mov(R, a) = \{ t \in S \;/\; \exists\, p \in R: \; p \xrightarrow{a} t \}$.

1) Se hace $DS = \{ s_o \}$, donde $s_o = cl(\{ i \})$.
2) Mientras hayan estados no "marcados" en DS hacer:
   a) Tomar un $s_i \in DS$ no "marcado" y "marcarlo".
   b) Para todo $a \in \Sigma$ hacer:
      i) $DM(s_i, a) = cl(Mov(s_i, a))$.
      ii) Si $DM(s_i, a) \notin DS$, entonces
         Incluir $s_{i+1} = DM(s_i, a)$ en DS.

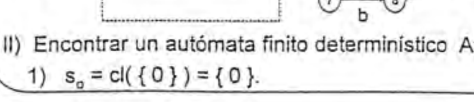
3) Se hace $DT = \{ s_i \;/\; s_i \cap T \neq \varnothing \}$.

4) Se hace $A = (\Sigma, DS, DT, s_o, DM)$.

Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = ba^*(a \mid b)$.

I) Encontrar un autómata finito no determinístico AN:



II) Encontrar un autómata finito determinístico A:
1) $s_o = cl(\{ 0 \}) = \{ 0 \}$.

2) $DM(s_0,a) = cl(\varnothing) = \varnothing = s_1$
$DM(s_0,b) = cl(\{1\}) = \{1, 2, 4, 5, 7\} = s_2$
$DM(s_1,a) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_1,b) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_2,a) = cl(\{3, 6\}) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} = s_3$
$DM(s_2,b) = cl(\{8\}) = \{8, 9\} = s_4$
$DM(s_3,a) = cl(\{3, 6\}) = s_3$
$DM(s_3,b) = cl(\{8\}) = s_4$
$DM(s_4,a) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_4,b) = cl(\varnothing) = s_1$

3) $DT = \{s_3, s_4\}$

4) $A = (\Sigma, DS, DT, s_0, DM)$
donde:
$\Sigma = \{a,b\}$
$DS = \{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4\}$
$DT = \{s_3,s_4\}$
El estado inicial es s_0

DM está definida por

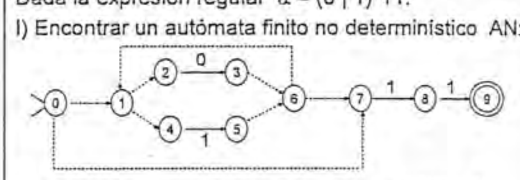
A	DM	
DS	a	b
s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_1
s_2	s_3	s_4
s_3	s_3	s_4
s_4	s_1	s_1

El diagrama del autómata A es:

Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = (0 \mid 1)^*11$.

I) Encontrar un autómata finito no determinístico AN:



II) Encontrar un autómata finito determinístico A:

1) $s_0 = cl(\{0\}) = \{0, 1, 2, 4, 7\}$.

2) $DM(s_0, 0) = cl(\{3\}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} = s_1$
$DM(s_0, 1) = cl(\{5, 8\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} = s_2$
$DM(s_1, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_1, 1) = cl(\{5, 8\}) = s_2$
$DM(s_2, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_2, 1) = cl(\{5, 8, 9\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = s_3$
$DM(s_3, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_3, 1) = cl(\{5, 8, 9\}) = s_3$

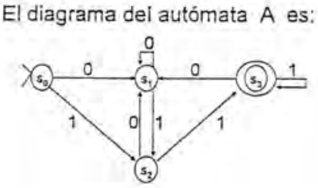
3) $DT = \{s_3\}$

4) $A = (\Sigma, DS, DT, s_0, DM)$
donde:
$\Sigma = \{0, 1\}$
$DS = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$
$DT = \{s_3\}$
El estado inicial es s_0

DM está definida por

A	DM	
DS	0	1
s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_1
s_2	s_1	s_3
s_3	s_1	s_3

El diagrama del autómata A es:



Gramáticas de Estructura de Frase

Una gramática de estructura de frase G
es un cuádruple G = (ST, SN, n_0, R).
Donde:
ST es un conjunto finito de símbolos terminales,
llamado conjunto de símbolos terminales.
SN es un conjunto de símbolos no terminales,
llamado conjunto de símbolos no terminales.
($ST \cap SN = \varnothing$ y $SI = ST \cup SN$)
n_0 es un elemento de SN, llamado símbolo inicial.

R es una relación en SI^*,
llamada relación de producción.

Si $w, w' \in SI^*$, entonces w R w' se representa por:
$w \rightarrow w'$
($R \equiv \rightarrow$).
Si $w \rightarrow w'$, entonces $r: w \rightarrow w'$ es una producción.
($R = \{ r \ / \ r$ es una producción $\}$).

Relación de sustitución

La relación de sustitución $\Rightarrow$ es una relación en SI^*,
definida por:
$x \Rightarrow y$ si y sólo si $\exists\, r_i: w \rightarrow w'$ tal que:
$x = l_1 w l_2$, $y = l_1 w' l_2$

Relación de derivación

La relación de derivación $\Rightarrow^*$ es una relación en SI^*,
definida por:
$x \Rightarrow^* y$ si y sólo si $\Rightarrow^*$ es la relación de accesibilidad de $\Rightarrow$.

Oraciones adecuadamente construidas

Dada una gramática G = (ST, SN, n_o, R).
Una cadena $w \in ST^*$ es una oración
adecuadamente construida,
si $n_o \Rightarrow^* w$.

Lenguajes generados por gramáticas

El lenguaje generado por la gramática G,
es L(G) = { w $\in$ ST* / w es una oración adecuadamente construida }

Ejemplo

Sea G = (ST, SN, n_0, R) una gramática,
donde:

ST = { Iván, Ana, corre, juega, rápidamente, frecuentemente } ,

SN = { Oración, sujeto, predicado, verbo, adverbio } ,

n_0 = Oración

y las producciones de R son:

r_1 : Oración $\rightarrow$ sujeto predicado .
r_2 : predicado $\rightarrow$ verbo adverbio .
r_3 : sujeto $\rightarrow$ Iván .
r_4 : sujeto $\rightarrow$ Ana .
r_5 : verbo $\rightarrow$ corre .
r_6 : verbo $\rightarrow$ juega .
r_7 : adverbio $\rightarrow$ frecuentemente .
r_8 : adverbio $\rightarrow$ rápidamente.

Como:
Oración $\Rightarrow$ sujeto predicado
$\Rightarrow$ Ana predicado
$\Rightarrow$ Ana verbo adverbio
$\Rightarrow$ Ana juega adverbio
$\Rightarrow$ Ana juega frecuentemente
entonces:
$n_0 \Rightarrow^*$ Ana juega frecuentemente
Luego: Ana juega frecuentemente $\in$ L(G)

Gramáticas de Contexto libre

Una gramática es de contexto libre,
si sus producciones r_i son de la forma

$$r_i\colon\ n_j \rightarrow x_1 \dots x_p\ ,$$

donde $n_j \in$ SN y $x_k \in$ SI (k = 1, ... , p).

Ejemplo

La gramática del ejemplo anterior,
es una gramática de contexto libre.

Gramáticas Regulares

Sea G una gramática de contexto libre, con producciones de la forma

r_i: $n_j \rightarrow x_1 \dots x_p$,

donde $n_j \in SN$ y $x_k \in SI$ (k = 1, ... , p).

G es una gramática regular,

si $x_k \in ST$ (k = 1, ... , p - 1).

Ejemplo

La gramática del ejemplo anterior, es una gramática de contexto libre, pero no es una gramática regular.

Teorema

L = L(G), con G una gramática regular $\leftrightarrow$

L = L(α), con α una expresión regular $\leftrightarrow$

L = L(A), con A un autómata determinístico

Formas de Backus - Naur

Las formas de Backus - Naur son notaciones para las produciones de las gramáticas de contexto libre.

Si $n_j \in SN$ y $w, w_1, w_2 \in SI^*$, entonces:

$n_j \rightarrow w$ se representa por

$< n_j > ::= w$

$n_j \rightarrow w_1$ y $n_j \rightarrow w_2$ se representan por

$< n_j > ::= w_1 \mid w_2$

Si $w \in SN$ se representa por $< w >$.

Ejemplo

Sea G = (ST, SN, n_o, R) una gramática donde:

ST = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, . } ,

SN = { real, fracción, entero, dígito, signo } ,

n_o = real

---

y las producciones de R son:

r_1: < real > ::= < entero > < fracción > | < entero >
| < fracción > | < signo > < real >

r_2: < fracción > ::= . < entero > | .

r_3: < entero > ::= < dígito > | < dígito > < entero >

r_4: < dígito > ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

r_5: < signo > ::= + | -

como: real ⇒ entero fracción
⇒ dígito entero fracción
⇒ dígito dígito fracción
⇒ dígito dígito . entero
⇒ dígito dígito . dígito entero
⇒ dígito dígito . dígito dígito
⇒ 5 dígito . dígito dígito
⇒ 5 3 . dígito dígito
⇒ 5 3 . 0 dígito
⇒ 5 3 . 0 4

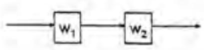
entonces: $n_o \Rightarrow^* 5\,3\,.\,0\,4$

luego: $5\,3\,.\,0\,4 \in L(G)$

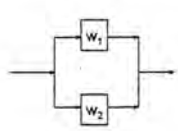
Diagramas sintácticos para las producciones en Formas de Backus - Naur

Si $w, w_1, w_2 \in SI$:

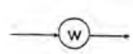
El diagrama para la producción:
$< w > ::= < w_1 > < w_2 >$ es:



El diagrama para la producción:
$< w > ::= < w_1 > | < w_2 >$ es:

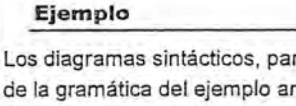


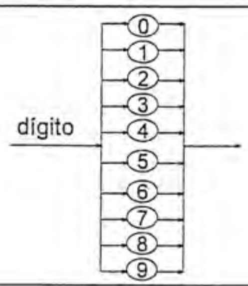
Si $w \in ST$, el diagrama para w es:

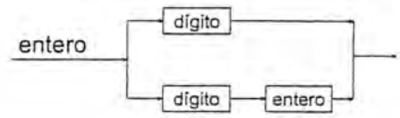


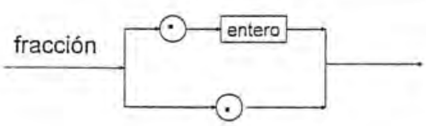
Ejemplo

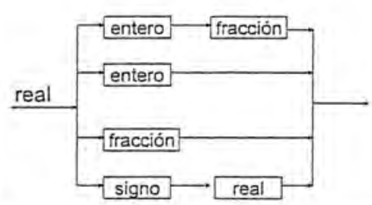
Los diagramas sintácticos, para las producciones de la gramática del ejemplo anterior, son:











Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = (0 \mid 1)^*11$

Si $G = (ST, SN, n_o, R)$ es una gramática, donde:

$ST = \{ 0, 1 \}$, $SN = \{ V \}$, $n_o = V$

y las producciones de R son :

r_1: $V \rightarrow 0V$

r_2: $V \rightarrow 1V$

r_3: $V \rightarrow 11$

Entonces: $L(G) = L(\alpha)$.

Gramática regular generada por un autómata

El autómata $A = (\Sigma, S, T, i, M)$

genera la gramática $G = (ST, SN, n_o, R)$,

donde:

$ST = \Sigma$, $SN = S$, $n_o = i$

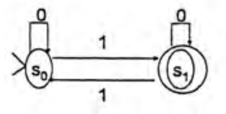
y las producciones de R son:

$s_i \rightarrow as_j$, si $M(s_i, a) = s_j$

$s_i \rightarrow a$, si $M(s_i, a) \in T$

Ejemplo

Dado el autómata A cuyo diagrama es:



El automáta A genera la gramática G = (ST, SN, n_o, R) donde: ST = { 0, 1 }, SN = { s_0, s_1 }, $n_o = s_0$

y las producciones de R son:

$s_0 \to 0\, s_0$

$s_0 \to 1\, s_1$

$s_1 \to 0\, s_1$

$s_1 \to 1\, s_0$

$s_0 \to 1$

$s_1 \to 0$