Hugo Palacios Gomero

Fundamentos técnicos de la matemática financiera

Pontificia Universidad Católica del Perú
FONDO EDITORIAL 2006

Hugo Palacios Gomero realizó sus estudios superiores en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en la que obtuvo los grados académicos de doctor en Ciencias Económicas y bachiller en Ciencias Administrativas, y el título profesional de contador público.

Además, realizó estudios de posgrado de Seguros en Madrid por un programa del Comité Europeo de Aseguradores (CEA) y de la Federación Interamericana de Empresas de Seguros (FIDES). Es catedrático de Matemática Financiera y Cálculo Actuarial en las Facultades de Ciencias Administrativas y de Economía de la Universidad de Lima y de la Universidad Nacional de Ingeniería (Lima), así como profesor principal del Departamento Académico de Ciencias Administrativas de la PUCP.

Ha publicado *Compendio de Matemática Financiera* e *Introducción al Cálculo Actuarial*. Ostenta la condecoración de las Palmas Magisteriales del Perú por su reconocida y larga trayectoria en la docencia universitaria.

Fundamentos técnicos
de la matemática financiera

Hugo Palacios Gomero

Fundamentos técnicos de la matemática financiera

Pontificia Universidad Católica del Perú
FONDO EDITORIAL 2006

Fundamentos técnicos de la matemática financiera

Primera edición: marzo de 2006

Plaza Francia 1164, Lima 1, Perú
Teléfonos: (51 1) 330-7410, 330-7411
Telefax: (51 1) 330-7405
Correo electrónico: feditor@pucp.edu.pe
Dirección URL: www.pucp.edu.pe/publicaciones/fondo_ed/

Diseño de carátula: Iván Larco
Diagramación: Ediciones Nova Print S.A.C.

ISBN 9972-42-756-0
Hecho el depósito legal 2006-0973 en la Biblioteca Nacional del Perú

Impreso en el Perú – Printed in Peru

Contenido

Presentación

Mis expresiones iniciales son para agradecer la gentileza que ha tenido el doctor Hugo Ernesto Palacios Gomero al invitarme a escribir unas líneas de presentación para sus *Fundamentos técnicos de la matemática financiera*.

Conozco al doctor Palacios desde hace décadas y sé, por ello, de su permanente afán de dar a conocer y trasmitir, de modo adecuado y en forma didáctica y amena, los conocimientos y fórmulas de esta ciencia especializada o aplicada que bien podríamos denominar «matemática del dinero» y que hoy tiene el nombre de matemática financiera. Se trata de una parte de las ciencias económicas que se ocupa de las actividades vinculadas a las operaciones de la banca, la bolsa, los seguros y reaseguros, el comercio, las inversiones y las compras y ventas de bienes a plazos, entre otras. Por ello, el objetivo de esta obra es divulgar la forma en que se manejan estas operaciones, el modo en que pueden disfrutarse y la manera en que solucionan sus problemas; así como estudiar sus características y métodos; y, en general, hacernos conocer los alcances y fundamentos técnicos de la matemática financiera.

El doctor Palacios se educó en nuestra querida universidad, en la antigua Facultad de Ciencias Económicas. Ahí recibe e inicia sus conocimientos sobre las materias financieras, en los que más adelante desarrolla su vocación de maestro, enseñando a muchas generaciones en las aulas de nuestra recordada Facultad, en la casona de Riva-Agüero; luego en la esquina de la avenida Abancay y el jirón Miroquesada; y, finalmente, en nuestro actual local dentro del campus universitario, en el fundo Pando.

En este último, nos reencontramos en 1988 y compartimos la responsabilidad de educar a los alumnos de la actual Facultad de Administración y Contabilidad. También fuimos miembros de la Comisión de Gobierno de la Facultad de Ciencias Administrativas y, luego, integrantes del Consejo de Facultad. Después, el doctor Palacios fue jefe del Departamento de Ciencias Administrativas (1996-1998) y director del Programa Académico de Ciencias Administrativas (1976-1977).

Asimismo, desde 1922 hasta 1996, compartimos responsabilidades en la Superintendencia de Banca y Seguros, él como superintendente adjunto de seguros y el suscrito como superintendente adjunto de administración. Ahí pude observar su permanente responsabilidad y compromiso por la investigación e innovación en el campo de seguros y los cálculos actuariales y financieros.

Por lo dicho, considero que esta nueva obra del doctor Palacios, fruto de su permanente investigación y deseo de compartir sus conocimientos, será de gran utilidad y guía para nuestros alumnos y los estudiosos de estas materias. Por ello, no dudo en anticipar que su estudio o lectura serán muy provechosos. Expreso, finalmente, mi más cordial felicitación al doctor Hugo E. Palacios Gomero y le deseo muchos éxitos y triunfos permanentes.

CLAUDIO E. SARMIENTO MOLINA
Profesor asociado de la Pontificia Universidad Católica del Perú y director de su Asociación de Egresados y Graduados

Prólogo

Según la Real Academia Española, el prólogo es un escrito antepuesto al cuerpo de un libro y, también, es aquello que sirve de exordio o principio para ejecutar una obra. Y qué mejor preámbulo para iniciar este libro que definir el adjetivo «financiero», que, cuando califica a la matemática, se refiere a la ciencia de las «finanzas» (con perdón de la redundancia), y se entiende como vocablo que designa la actividad relacionada con la moneda, los bienes, los negocios y todo cuanto esté vinculado con el patrimonio, el interés, la riqueza y las ganancias, representados por el dinero, es decir, por el buen dinero. De esto se ocupa la matemática financiera, cuyos fundamentos técnicos para su mejor comprensión, para su correcto uso, para su adecuada administración y, especialmente, para el desarrollo y solución de sus problemas, este libro contiene, con características especiales de simplicidad, orientación concreta y directa, fórmulas de fácil aplicación y, sobre todo, una infinidad de problemas resueltos y propuestos con respuestas anticipadas, precisamente para verificar resultados.

Es necesario advertir que el lector o estudiante de ciencias empresariales debe conocer únicamente el álgebra elemental y contar con herramientas básicas como un ordenador o, simplemente, una calculadora científica de bolsillo que le ayudarán a resolver los valores numéricos de los llamados «factores financieros» de las fórmulas. No será necesario usar las tablas financieras que contienen la mayoría de los textos de esta materia, muchos y de diversos autores, todos ellos muy respetables.

El contenido de este texto se organiza en tres partes. La primera, comprendida en el primer capítulo, presenta temas de apoyo referidos a conceptos elementales de matemática básica y cálculo mercantil, así como un glosario de conceptos de la ciencia de las finanzas. Todo ello servirá de ayuda para el desarrollo de la segunda parte, que comprende más de una docena de capítulos pertenecientes a los aspectos centrales de la obra. Finalmente, la tercera parte, contenida en el último capítulo, ofrece una frondosa recopilación de problemas financieros de toda índole y sus respuestas expresas, con el objeto de que el estudiante de escuelas o institutos técnirespuestas expresas, con el objeto de que el estudiante de escuelas o institutos técnicos de comercio y facultades universitarias de ciencias de la empresa verifiquen sus desarrollos con dichas respuestas. Si algunas de estas estuvieran equivocadas, agradeceré hacérmelas conocer vía correo electrónico, con su respectivo desarrollo y respuesta correcta.

Agradezco a la Pontifica Universidad Católica del Perú, en cuya Facultad de Contabilidad y Ciencias Administrativas llevo alrededor de cuarenta años como profesor del curso, por el apoyo recibido y el disfrute de mi experiencia profesional docente, así como a mis innumerables alumnos y a todas las personas y estudiantes interesados en conocer la matemática financiera a través de este libro, que espero sea útil en su quehacer profesional especializado.

EL AUTOR

CAPÍTULO I

Bases técnicas de apoyo conceptual

Varias o todas las materias de este capítulo se suponen conocidas por el lector o estudiante; sin embargo, no está de más recordarlas y tenerlas presente, porque servirán de ayuda para el desarrollo o exposición de algunos temas del cuerpo principal de la obra.

1. Terminología y conceptos básicos de finanzas

a) Terminología

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes en circulación constituyen la forma final adoptada por las economías como dinero. Hay también el llamado «dinero plástico», representado por tarjetas (de crédito, de débito, prepago, etcétera) que se utilizan como medida de pago y sustituyen al dinero.

Divisa. Moneda de curso legal de países extranjeros. Son medios de pago denominados en moneda extranjera, ingresados por transacciones con el exterior. Los bancos, especialmente el Central de Reserva, la utilizan —entre otros fines— para el pago de las importaciones. Son también divisas los *travelers checks* o documentos de valor que emiten los bancos para que los viajeros los utilicen en el exterior como dinero en efectivo.

Capital. Llamado también principal, es una suma de dinero que se invierte, presta, etcétera.

Interés. Llamado también rédito, beneficio, utilidad, es «la ganancia del dinero». Se mide por un elemento llamado «tipo de interés» o «tasa de interés», una proporción del dinero o capital colocado en determinado plazo o tiempo.

Rentabilidad. Capacidad para producir beneficios o rentas periódicas temporales o indefinidas, fijas o variables.

Superávit. Situación producida cuando los ingresos son superiores a los gastos.

Déficit. Situación opuesta al superávit; ocurre cuando los pagos superan los ingresos.

Ahorros. Resultado de la actividad de guardar o reservar una parte del consumo para una posterior utilización o para la formación de un capital futuro. Los ahorros depositados en una entidad financiera ganan intereses, de modo que el capital futuro será siempre superior a la suma de los depósitos.

Compra al contado o a plazos. Es la adquisición de un bien a cambio del dinero que representa un precio o valor actual. Puede ser al contado cuando el precio equivale al total de su valor, mediante una entrega única de dinero. La compra a plazos se realiza cuando una parte o todo el valor actual se paga generalmente mediante cuotas fijas o constantes, o entregas variables durante un tiempo convenido. En las cuotas, se reconocen intereses, de modo que el total de las entregas es superior al precio total al contado.

Capitalización. Proceso que consiste en agregar intereses generados por un capital para formar un nuevo capital en un momento futuro. Consiste en «llevar» o «trasladar» en el tiempo un capital presente, llamado valor actual, hasta un momento futuro, agregando intereses en dicho traslado.

Actualización. Es un proceso inverso u opuesto al anterior. Consiste en quitar intereses a un capital futuro para convertirlo en valor actual o presente, neto de intereses, es decir, trasladar el dinero del futuro al presente.

Amortización. Es generalmente una operación de pago de una deuda a plazos mediante cuotas periódicas que incluyen intereses convenidos.

Financiación. Cantidad de dinero necesaria para la realización de una actividad o proyecto de una persona, empresa o ente público. Puede hallarse en forma de recursos propios o de recursos ajenos.

Endeudamiento. Es la captación de recursos ajenos por parte de personas o empresas, es decir, de fuentes de financiación externas para poder desarrollar sus actividades.

b) Definición de finanzas

Como ciencia, es el área de la economía que estudia el funcionamiento de los mercados de dinero y capitales, las instituciones que operan en ellos, las políticas de captación de recursos, el valor del dinero en el tiempo y el costo del capital.

Como disponibilidad, es el conjunto de bienes o recursos económicos y dinero necesarios para la realización de cualquier actividad.

En sentido estricto, se identifica con Hacienda Pública, Tesoro Público, Erario.

c) Ámbito de las finanzas

Son sus diversos campos de acción.

Ámbito empresarial. Llamado también autofinanciación, es la acumulación de fondos o recursos financieros gerenciales en el interior de la propia empresa (generalmente beneficios no distribuidos) no provenientes de aportaciones exteriores y utilizados para financiar las operaciones e inversiones de la sociedad, con lo que se evita el recurso al endeudamiento con terceros.

Ámbito personal. Recursos propios de la persona y destinados a los gastos familiares o personales. Estos recursos provienen de ingresos propios, tales como sueldos, honorarios o beneficios de actividades del trabajo personal.

Ámbito nacional o presupuestario. Recursos generados por un Estado o nación, provenientes de impuestos y tributos, o de beneficios de la actividad empresarial del Estado y de la deuda pública externa e interna nacional. Son administrados y regulados por una ley de presupuesto nacional, y están administrados por órganos competentes del Estado.

Ámbito municipal. Recursos económicos y financieros destinados a la gestión de los gobiernos locales. Provienen de asignaciones presupuestarias del Gobierno central y de sus recursos propios, como tasas, impuestos y otros ingresos de las municipalidades.

Ámbito externo. Son aquellos fondos que provienen de operaciones de endeudamiento con entidades o gobiernos extranjeros para poder desarrollar actividades o programas de inversión. Estos recursos generalmente son captados para ser reembolsados a largo plazo y con intereses.

d) Entidades financieras

Son aquellas que realizan actividades de captación de recursos, otorgamiento de préstamos, depósitos de ahorro, administración de fondos, intercambio de operaciones financieras y todo cuanto se refiere al manejo de los fondos privados y públicos. Son entidades financieras cuyas actividades están supervigiladas por un organismo especializado del gobierno las siguientes:

Bancos. Son sociedades anónimas que reciben depósitos de ahorro del público, otorgan préstamos con intereses y reciben valores mobiliarios y otros activos financieros en custodia. Estas entidades de intermediación financiera pueden ser banca comercial, banca industrial y banca personal.

Banco Central de Reserva. Es el encargado de administrar el funcionamiento del sistema financiero de un país. Se encarga de la emisión de moneda y de la supervisión de la circulación de monedas y billetes de curso legal. Controla el movimiento de capitales con el exterior y mantiene las reservas metálicas y de divisas.

Bolsa de valores. Es un mercado en el que se negocia únicamente la compra y la venta de títulos y valores, como acciones y bonos. Son supervigiladas por una entidad del Estado.

Cajas de ahorro y crédito. Similares a los bancos, no tienen capital propio y sus actividades son dirigidas preferentemente a sus asociados o ahorristas. Reciben ahorros y otorgan préstamos generalmente a plazos mediano y corto.

Financieras. Son sociedades anónimas que otorgan créditos para el financiamiento de programas de inversión empresarial o personal, con el aval o garantía de un activo fijo.

e) Sistema financiero

Conjunto de entidades que realiza operaciones en las que existen movimientos de capitales o circulación dineraria en las que hay una rentabilidad y un plazo de vencimiento. Todo sistema financiero está sujeto a la supervisión estatal por un organismo competente.

f) Operaciones financieras

Son las que realizan las entidades del sistema financiero. Entre ellas se encuentran:

- depósitos de ahorro del público con tasa de interés (los bancos los llaman operaciones pasivas);
- préstamos o colocaciones sujetas a contratos que estipulan condiciones como el cobro de intereses en plazos fijos o indefinidos (los bancos las llaman operaciones activas);
- compra y venta de valores en las bolsas;
- compra y venta de moneda extranjera o divisas;
- amortización de prestamos o pago mediante cuotas periódicas con intereses; y
- constitución de capitales futuros para fines específicos

g) Función financiera

Acción y efecto de financiar un proyecto o actividad económica, entendiendo la acción de financiar como el acto de proporcionar los fondos necesarios para la puesta en marcha, desarrollo y gestión de cualquier proyecto o actividad económica. Los recursos económicos obtenidos deben ser retornados durante el plazo convenido y retribuidos a un tipo de interés fijo o variable previamente preestablecido. Los fondos propios de la empresa constituyen otra forma de financiación.

h) Decisiones de financiamiento

Una persona, un ente público o una empresa puede necesitar una cantidad de dinero para la realización de una actividad o proyecto. Para cubrir tal necesidad, cualquiera de ellos tomará la decisión que más le convenga mediante diversas formas de financiamiento:

- autofinanciamiento (el que utiliza recursos propios);
- financiamiento con tipo de interés fijo (el obtenido y retribuido a tipos de interés que no fluctúan durante el período de amortización);
- préstamos con tipo de interés variable (se da cuando el interés fluctúa en función de un determinado índice que se toma como referencia);
- emisión de bonos (consiste en obtener recursos mediante la venta de valores llamados bonos, que ofrecen una tasa de interés y plazos para su redención o canje por dinero a su vencimiento); y
- financiamiento del déficit con recursos obtenidos por medio de préstamos, créditos o disminución del ahorro para compensar una insuficiencia de los ingresos en comparación con los gastos (la circunstancia más conocida es la

financiación de déficit público, para la cual existen diferentes alternativas, como la emisión de bonos de la deuda pública, la privatización de bienes patrimoniales del Estado, la concesión de préstamos del Banco Central o el recurso a los mercados de crédito internacionales).

2. Progresiones, clases, elementos y fórmulas

Progresión es una sucesión o serie de números convenientemente ordenados según un sentido o regla de formación como el siguiente:

2 5 8 11 14 17 20 etc.

2 4 8 16 32 64 etc.

En ambos ejemplos hay varios números o términos ordenados. En el primer ejemplo, los términos varían sucesivamente por una diferencia constante de 3 entre un término y el siguiente, mientras que los términos del segundo ejemplo varían multiplicando cada término por un número también constante (en este caso por 2).

Clases de progresiones

Los ejemplos anteriores nos sugieren que hay dos clases de progresiones:

Progresión aritmética, cuyos términos varían por una suma algebraica de una cantidad constante, que llamaremos «diferencia» (d), como:

5, 8, 11, 14, 17, 20 .... (d = 3)

15, 11, 7, 3, -1, -5, ... (d = -4)

La diferencia entre los términos sucesivos (d) se llama también «razón» de la progresión aritmética.

Progresión geométrica, en la que sus términos varían de modo que el cociente entre cada término y el anterior es constante; también se forma multiplicando cualquier término por dicha constante, llamada «razón de la progresión geométrica». Su símbolo será «q».

2, 8, 16, 32, 64 .... (q = 2)

48, 24, 12, 6, 3 .... (q = $^1/_2$)

a) Progresión aritmética

Presenta el siguiente esquema genérico:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°
a	a + d	a + 2d	a + 3d	a + 4d	a + 5d
4	9	14	19	24	29

ELEMENTOS:

Término. Cada número o notación de la sucesión, serie o progresión.

Número de términos. Cantidad total de notaciones de la serie (n = 6).

Primer término. El designado por la primera notación (a = 4).

Diferencia o razón de la progresión aritmética. Cualquier término menos el anterior (d = 19 - 14 = 5).

Ultimo término. El de orden «enésimo», es decir, el primero más el penúltimo término multiplicado por la diferencia [29 = 4 + (5) (4)].

$$\boxed{u = a + (n - 1)\,d}$$

Cualquier término. El de orden «k-ésimo». Se basa en el último término que puede ser de orden k, es decir, el 3.^{er} término (14 = 4 + (3-1) (5) = 4 + (2) (5) = 14), por ejemplo.

$$\boxed{a_k = a + (k - 1)\,d}$$

Suma de términos. El total de valores numéricos de la progresión, representado por S_a.

S_a = 4 + 9 + 14 + 19 + 24 + 29 = 99

(Sin necesidad de demostraciones, se puede señalar que la suma de una progresión aritmética es el primer término más el último, multiplicado por la mitad del número de términos).

$S_a = n/2\ (a + u)$. Reemplazando «u» por su valor: $u = a + (n - 1)\ d$, resulta:

$S_a = n/2\ [a + (a + (n - 1)\ d)]$

$$\boxed{S_a = n/2\ [\ 2\ a + (n - 1)\ d\ ]}$$

Comprobación: $6/2\ (2 \times 4 + 5 \times 5) = 3(8 + 25) = 3(33) = 99$

Ejemplos de aplicación de la fórmula:

- Hallar la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15.... (d = 5).
  Suma = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 180
  $S_a = 8/2\ (2 \times 5 + 7 \times 5) = 4(10 + 35) = 4(45) = 180$

- ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética: 20, 18, 16 .... (d = -2)?
  Suma = 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 110
  $S_a = 10/2\ [2(20) + 9(-2)\ ] = 5(40 - 18) = 5(22) = 110$

b) Progresión geométrica

Presenta el siguiente esquema genérico:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	
a	aq	aq^2	aq^3	aq^4	aq^5	
2	6	18	4	162	486	(q=3)

ELEMENTOS:

Número de términos. Cantidad total de notaciones de la progresión (n = 6).

Primer término. El primero de la serie (a = 2).

Razón de la progresión geométrica. Cociente entre cualquier término y el anterior.

$6/2 = 3$ .... $aq\ /a = q$ .... $aq^3\ /\ aq^2 = q$

Ultimo término. El de orden enésimo.

$a_5 = 2(3^4)$......... $a_5 = 2(81) = 162$.................. $\boxed{a_n = a\,q^{\,n-1}}$

Cualquier término. El de orden «k-ésimo».............. $\boxed{a_k = a\,q^{\,k-1}}$

Suma de términos. El total de valores numéricos de la progresión reprsentado por S_g.

$S_g = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 728$

Ejemplos:

1) Hallar la suma de los 4 primeros términos de la progresión geométrica

   2, 4, 8 .... (q = 2). Suma = 2 + 4 + 8 + 16 = 30

2) Hallar la suma de los 5 primeros términos de la progresión geométrica

   1, 5, 25 .... (q = 5). Suma = 1 + 5 + 25 + 125 + 625 = 781

3) Hallar la suma de los 5 primeros términos de la progresión geométrica

   2, 6, 18 .... (q = 3). Suma = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242

Si en los tres ejemplos anteriores llamamos «a» al primer término, «n» al número de términos y «q» a la razón, se cumple la siguiente fórmula de la suma de la progresión geométrica:

$$\boxed{S_g = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}}$$

1) $S_g = [2\,(2^4 - 1)]\,/\,(2 - 1) = 2(16 - 1) = 2(15) = 30$

2) $S_g = [1(15^5 - 1)]\,/\,(5 - 1) = (3125 - 1)\,/\,4 = 3124\,/\,4 = 781$

3) $S_g = [2\,(3^5 - 1)]\,/\,(3 - 1) = [2(243 - 1)]\,/\,2 = 2(242)\,/\,2 = 242$

Obsérvese que la fórmula es de progresión creciente cuando la razón «q» es un número entero y positivo. Si la progresión geométrica fuera decreciente, la razón «q» tendría que haber sido fraccionaria. En ese caso, la fórmula anterior deberá multiplicarse por (-1):

$$\boxed{S_g = \frac{a\,(1 - q^n)}{1 - q}}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la suma de los 3 primeros términos 45, 15, 5 .... (q = 1/3)?
Suma: 45 + 15 + 5 = 65

$$S_g = 45[1 - (1/3)^3] \,/\, [1- (1/3)] = 45[1 - (1/27)] \,/\, (2/3) =$$

$$[45\,(26/27) \,/\, (2/3)] = 43{,}3333.... / \,0{,}6666.... = 65$$

NOTA ANTICIPADA: estas fórmulas de la suma de la progresión geométrica serán usadas en la «Teoría de rentas financieras» (capítulos V y siguientes de este libro).

3. TEORÍA DE PORCENTAJES

a) Definición y notación

Se llama porcentaje a una fracción o parte de un todo llamado 100. Por ejemplo, 5 por ciento (su notación es 5%) indica que de cada 100 se toma 5 y se expresa como fracción, es decir, 5/100 = 0,05. Esta forma de notación decimal se usará más adelante en matemática financiera y será llamada, generalmente, «tanto por uno».

Véase la siguiente comparación entre notaciones de porcentajes:

Por ciento	Fracción	Decimal
50%	50/100	0,50
5%	5/100	0,05
$3\,^1/_2\%$	3,5/100	0,035
$7\,^3/_4\%$	7,75/100	0,0775
145%	145/100	1,45

Se observa que un número porcentual (primera columna) se expresa en números decimales (tercera columna), de modo que el entero del porcentaje ocupa el orden de los centésimos en el número decimal. Para expresar el resultado decimal en términos de porcentaje, bastará multiplicarlo por 100, es decir, si el resultado de una operación de porcentajes fuera 0,0438, esto indicaría que se trata de 0,0438 (100) = 4,38%.

b) Casos importantes de la teoría de porcentajes

1) **Tanto por ciento de una cantidad dada.** Ejemplo:

¿Cuál es el 35,5% de 8.000? Regla: la preposición «de» se convierte en signo «por» (x); es decir, es una operación de multiplicación de ambos datos.

35,5/100 x 8.000 = 2.840

2) **Comparación de dos cantidades en términos de porcentajes.** Ejemplo:

De 5.500 trabajadores, 380 tienen educación superior. ¿Qué porcentaje del total estudiaron en universidades? Recordando la definición de porcentajes como fracción, se divide el número parcial entre la cantidad total.

380/5.500 = 0,06909 = 6,91%

3) **Tanto por ciento de más.** Ejemplo:

Un comerciante compra un objeto por $ 2400 y desea ganar el 20% en la venta. ¿Cuál es el nuevo precio?

Una forma indirecta de resolver el caso sería mediante dos operaciones. La primera consiste en hallar el porcentaje de ganancia (2.400 x 0,20 = 480); y la segunda, en agregar este resultado al precio original (2.400 + 480 = 2.880).

Una forma directa consiste en una sola operación de multiplicar la cantidad dada por un factor o «índice de variación», que se obtiene agregando a la unidad la expresión o notación decimal del aumento porcentual.

2.400 (1,20) = 2.880

4) **Tanto por ciento de menos.** Ejemplo:

En una tienda están rebajados todos los artículos en 15%. Calcular el precio de un vestido que cuesta $ 6.000.

También hay dos formas de solución. La primera consiste en hallar el 15% de 6.200 (930) y, luego, en descontar este del precio inicial (6.200 - 930 = 5.270).

Otra forma directa es multiplicar la cantidad dada por un factor o índice de disminución porcentual, representado por la unidad menos el tanto por ciento decimal de disminución.

6.200 (0,85) = 5.270

5) **Porcentajes sucesivos.** Pueden ser de tres casos:

Siempre crecientes. Ejemplo:

- Los precios del metro cuadrado de los terrenos han sufrido aumentos sucesivos en un 10%, un 5% y un 7,5%. Si inicialmente cada metro costaba $ 150, ¿cuál es el precio reciente o último? Se multiplica la cantidad inicial por sus sucesivos índices de aumento porcentual.

150 (1,10) (1,05) (1,075) = $ 186,24

Siempre decrecientes. Ejemplo:

- Había en una región 20.000 desocupados. Durante los tres últimos años se han producido disminuciones sucesivas del 8%, 6% y 5%. ¿Cuántos desocupados hay actualmente? Se multiplica la cantidad inicial por sus respectivos índices sucesivos de disminución.

20.000 (0,92) (0,94) (0,95) = 16.431

Aumentos y disminuciones variables. Ejemplo:

- El precio de un objeto era $ 8.500 y ha cambiado dos veces los últimos meses: primero, por una rebaja, disminuyó 15%; y, luego, subió 30%. ¿Cuánto cuesta actualmente?

8.500 (0,85) (1,30) = 9.392,50

6) **Porcentaje de porcentajes.** Ejemplo:

El 87% de los trabajadores son asalariados por cuenta ajena y el 60% de estos son mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de mujeres asalariadas por cuenta ajena del total de trabajadores? (Se trata de multiplicaciones sucesivas del total 100).

(0,87) (0,60) (100) = 52,2%

7) **Deshacer variaciones porcentuales.**

Ejemplo 1:

El precio rebajado en 15% de un objeto es $ 55.250. ¿Cuál era el precio original?

Ejemplo 2:

La población de una ciudad ha aumentado en un año en 2% y ha alcanzado los 291.210 habitantes. ¿Cuántos habitantes tenía la ciudad el año anterior?

Regla general:
Para deshacer una variación porcentual, se divide la cantidad final entre el índice de variación correspondiente.

55.250 / (0,85) = $ 65.000
291.210 / (1,02) = 285.500 habitantes

NOTA: cualquier problema de porcentajes puede resolverse mediante el uso de una regla de tres simple. Ejemplos:

- Un objeto cuyo costo era $ 363,80 se vendió por $ 428. ¿Qué tanto por ciento se hubiera tenido que descontar al comprador para no ganar nada en la venta?

428 ————> 100% X = 36.380 / 428 = 85%

363,80 ————> X Rebaja = 100 - 85 = 15%

- Un comerciante compra lápices automáticos por $ 30,40 cada uno. Suponiendo que a cada comprador le hará un descuento del 5% sobre el precio marcado para la venta y que el comerciante debe ganar 25% neto sobre su costo, ¿a qué precio deberá marcar la venta de cada lapicero?

30,40 (1,25) ————> 95% X = (3.800) / 95 = $ 40

X ————> 100%

c) Problemas de porcentajes

1. Vendiendo un objeto por $ 152,50, se gana el 22%. ¿Qué tanto por ciento se ganará vendiéndolo $ 10 más caro? (30%)

2. Determinar el peso neto de una partida de lana en bruto que pesa 2.400 kg, deduciendo el 3% de embalaje y considerando un 5% por escorias. (2.211,6 kg)

3. Determinar el porcentaje sobre el valor de venta para ganar el 25% sobre el costo. (20%)

4. He vendido un objeto ganando el 25% y, con el dinero obtenido, compro otro y lo vendo por $ 166,50, perdiendo el 10%. ¿Cuánto me costó cada objeto? ($ 148; $ 185)

5. Si se vende un objeto por $ 308, se pierde el 12% sobre el costo del mismo. ¿Por cuánto se habría tenido que vender para ganar el 20%? ($ 420)

6. ¿Qué pesa más? ¿El 15% de un queso de 2,5 kilos, la tercera parte de un queso de 2,1 kilos o las 4/5 partes de un queso de 750 gramos? (1/3 de 2,1 kg)

7. Un producto costaba $ 140 y pasa a valer $ 161. Calcular el porcentaje de aumento del precio. (15%)

8. Si una persona tiene el 25% de su capital colocado al 11% de interés anual, el 35% al 2,5% y el resto al 15%, ¿cuál es la tasa de interés que recibe por la totalidad de su capital? (13,125%)

9. Por la venta de un libro a $ 5 el ejemplar, el librero cobra el 30% de comisión. ¿Cuánto recibe el autor por cada libro? ($ 3,54)

10. Se vende el 20% de una finca de 40 ha, se alquila el 50% del resto y se cultiva el 25% del nuevo resto. Hallar la porción cultivada. (4 ha)

4. INTERÉS SIMPLE

a) Definición, elementos y fórmula

El interés —llamado también rédito, ganancia o utilidad— es el beneficio que se obtiene por una cantidad de dinero colocado por un determinado tiempo.

En un problema de interés simple intervienen los siguientes elementos:

C = Capital (dinero colocado)
I = Interés (rédito o beneficio que se obtiene)
i = Tasa de interés (porcentaje sobre el capital en una unidad de tiempo)
t = Tiempo (número de unidades de tiempo)

El interés periódico será el producto C (i) y el interés en «t» unidades de tiempo (años, semestres, trimestres, meses, etc.) será C (i) (t), de donde la fórmula general del interés simple es:

$$\boxed{I = C\,i\,t}$$

Ejemplos:

1. Hallar el interés de $ 4.000 colocados durante 6 años al 5% de interés simple anual.

   NOTA: es recomendable que se mencione «interés simple» para distinguirlo de otra clase de interés compuesto que se verá más adelante en el capítulo II, en el que no es necesario mencionar que se trata de interés compuesto, porque así se sobreentiende.

   $$I = C\,i\,t = 4.000 \times 0{,}05 \times 6 = 1.200$$

2. ¿Cuál es el interés de 3.000 al 6,5% simple anual en 8 meses?

   $$I = C\,i\,t = 3.000 \times 0{,}065 \times 8/12 = 130$$

3. ¿Cuánto habrá ganado $ 10.000 en un año, dos meses y 15 días, al 4% anual simple?

   $$I = C\,i\,t = 10.000 \times 0{,}04 \times 435/360 = \$\ 483{,}33$$

4. Hallar el capital que colocado al 4 $^1/_2$ % anual ha ganado $ 315 de interés simple después de 3 $^1/_2$ años.

   $$C = \frac{I}{it} = \frac{315}{0{,}045 \times 3{,}5} = \frac{315}{0{,}1575}$$

5. ¿Cuál es la tasa de interés simple que se ha aplicado para que un capital de $ 8.000 colocado en 2 años y 6 meses haya ganado $ 600?

   $$i = \frac{I}{Ct} = \frac{600}{8.000 \times 30/12} = \frac{600 \times 12}{8.000 \times 30} = \frac{3}{100} = 0.03 = 3\%$$

6. Un capital de $ 5.000 se ha incrementado en un 15% por razón de interés simple al 6% anual. Hallar el tiempo de la operación.

   $$t = \frac{I}{Ci} = \frac{750}{5.000 \times 0{,}06} = 2,\ 5 \text{ años} = 2\ ^1/_2 \text{ años}$$

NOTA: si el elemento «t» estuviera expresado en fracciones, por ejemplo, 0,32 años, esta se multiplicaría por 360 días para hallar el número de días que se agregará al número entero de años. Así:

t = 4,32 años = 4 + 0,32 x 360 = 4 + 115 días = 4 años, 3 meses, 25 días.

b) Monto en problemas de interés simple

Se llama monto a la suma del capital colocado más el interés ganado, o sea:

$$M = C + I$$

Reemplazando I por su valor Cit, se tiene:

$M = C + Cit$ $\boxed{M = C\,(1 + i\,t)}$ Fórmula del monto por el régimen de interés simple

La expresión (1 + it) se llama «factor de capitalización simple».

c) Problemas de interés simple

1. Un señor debía \$ 1.440 y propone retrasar dicho pago 9 meses, conviniendo en pagar lo correspondiente al interés del 5% simple anual. ¿Qué cantidad deberá satisfacer transcurrido el plazo indicado? (\$ 1.494)

2. Un señor prestó a su amigo los \$ 3.672 que precisaba para completar un negocio. A los 5 meses, le devolvió \$ 3.916,80 diciéndole que participaba en el beneficio obtenido. ¿Qué tanto por ciento anual de interés simple supone ese beneficio? (16%)

3. Una persona tenía colocado su capital al 3 y $^{1}/_{4}$% de interés simple anual. Lo retiró para colocarlo al 5 y $^{3}/_{4}$%, con lo cual cada trimestre percibe \$ 468,25 más que anteriormente. ¿Cuál era el capital de dicha persona y qué interés trimestral le producía antes y ahora? (\$ 75.000; \$ 609,38; \$ 1.078,13)

4. Un joven recibió \$ 20.000 de dote; parte de dicha cantidad la impuso al 6% de interés simple anual y el resto, al 4 $^{1}/_{2}$%. Esta última parte le produce \$ 112,50 más que la primera. ¿Qué cantidad tenía impuesta a cada tanto por ciento? (\$ 7.500 y \$ 12.500)

5. Un capital fue prestado a un tanto por ciento tal que, después de 9 meses, el capital y los intereses simples sumaban \$ 3.657,50. Si en vez de 9 meses hubiera

permanecido 4 años al mismo tanto por ciento de interés, la suma de capital y de los intereses habría sido de $ 4.340. ¿Cuál era el capital y cuál el tanto por ciento de interés al que se prestó? ($ 3.500; 6%)

6. Al retirarse de sus negocios, un señor invierte la octava parte de su fortuna en la compra de una casa. Con los 2/7 del resto compra un bosque contiguo, y de lo que le queda hace dos partes que están entre sí como 2 es a 3. La primera de estas partes fue impuesta al 4 $^{1}/_{2}$% anual de interés simple y la segunda parte, al 5 $^{1}/_{2}$% anual, con lo cual podía disfrutar de $ 2.000 mensuales de renta. ¿Cuál era la fortuna de dicho señor? ¿Cuánto le costó la casa y el bosque? ¿Qué cantidad impuso a cada uno de los intereses mencionados? ($ 800.000; $ 100.000; $ 200.000; $ 200.000; $ 300.000)

7. ¿A qué porcentaje de interés simple anual hay que imponer un capital de $ 4.500 para obtener 1.260 de intereses en 4 años? (7%)

8. ¿En cuánto se convertirán $ 30.000 al 5% anual simple durante 10 meses? ($ 31.250)

9. Hallar el interés de $ 400 al 9% anual simple del 1 de febrero al 30 de julio del mismo año (bisiesto). ($ 18)

10. ¿Qué tiempo han estado colocados $ 960 que, al 5% anual simple, han producido $ 48? (1 año)

5. DESCUENTO COMERCIAL O BANCARIO

a) Definición, elementos y fórmula

Es una operación que consiste en obtener el pago anticipado de un documento de crédito, llamado letra de cambio o pagaré, mediante la cesión o endoso del derecho de cobro a otra persona que, generalmente, es un banco, que paga el importe del documento deduciendo los intereses simples anticipados (descuento) por el tiempo que falta para el vencimiento.

La operación de descuento comercial o bancario es similar a la del cálculo del interés simple, de allí que la fórmula general y los elementos son de características similares:

$$\boxed{D = N\,i\,t}$$

D = Descuento o importe deducido

N = Valor nominal del documento
i = Tasa de interés o de descuento (% anual)
t = Tiempo que falta para el vencimiento del documento, expresado en fracción de año (por ejemplo, 45 días = 45/360)

b) Valor actual

Es el importe neto que se recibe al efectuar la operación de descuento, es decir:

A = N - D, de donde se puede establecer la fórmula en función del valor nominal

A = N - N i t:

$$\boxed{A = N\,(1 - i\,t)}$$

El coeficiente (1 - i t) se conoce con el nombre de «factor de descuento», cuya misión es actualizar el valor nominal.

c) Descuento racional

El descuento comercial o bancario, visto en los apartados precedentes, es el más usado en la práctica, porque el tiempo «t» del descuento de documentos es corto, generalmente expresado en días. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, es injusto y arbitrario, hasta absurdo, cuando «t» se expresa en un tiempo largo (años). Por ejemplo, si calculamos el descuento comercial de una letra de cambio de valor nominal \$ 10.000 con vencimiento a 12 años, al 8% de interés anual:

$$D = 10.000\,(0,08)\,(12) = \$\,9.600$$

Se recibirían apenas N - D = \$ 400. Si la tasa o el tiempo fueran mayores, el descuento sería mayor que el valor nominal del documento, consecuencia totalmente absurda.

Por las consideraciones expuestas, se ha ideado otro concepto del descuento racional (d), mediante el cual el descontante del documento expresa que el interés o descuento debería ser sobre la cantidad realmente recibida, es decir, sobre el valor actual, de allí que la relación de definición es:

$$\boxed{d = A\,i\,t} \qquad d = (N - d)\,i\,t$$

$$d = N\,i\,t - d\,i\,t$$

$$d + d\,i\,t = N\,i\,t$$
$$d\,(1 + i\,t) = N\,i\,t$$

$$\boxed{d = \frac{N\,i\,t}{1 + i\,t}}$$

Aplicando esta fórmula al ejemplo anterior, el descuento racional sería:

$$d = \frac{9.600}{1 + 0{,}08 \times 12} = \frac{9.600}{1{,}96} = 4.898$$

Entonces, se recibiría A = N - d = 10.000 – 4.898 = 5.102 (más justo)

d) Problemas de descuento comercial o bancario

1. Una letra de $ 8.000 se descuenta al 9% anual cuando faltan 45 días para su vencimiento. Hallar el descuento y el importe neto por recibir. (90; 7.910)

2. ¿Qué tiempo falta para el vencimiento de una letra de $ 30.000 si se ha recibido $ 29.500 después de haberla descontado al 8% anual? (76 días)

3. Una letra descontada al 7,5% sufrió un descuento de $ 60 faltando 40 días para su vencimiento. ¿Cuál era el valor nominal del documento? ($ 7.200)

4. Una letra presentada al descuento sufrió una disminución del 3% de su valor nominal faltando 90 días para su vencimiento. ¿Cuál fue la tasa aplicada? (12%)

5. Hallar el valor actual de una letra de $ 10.000 descontada al 10% y al que le faltan 72 días para su vencimiento. ($ 9.800)

6. Hallar el descuento racional y el valor actual racional de una letra de cambio de $ 3.360, descontada al 6% anual a 2 años. ($ 360 y $ 3.000)

7. Hallar el valor nominal de una letra de cambio que, descontada racionalmente al 9% anual, 6 meses antes de su vencimiento, se ha rebajado $ 27. ($ 627)

8. ¿A qué porcentaje se ha negociado un pagaré de $ 620 que se ha rebajado en $ 20 (descuento racional) cuando faltan 48 días para su vencimiento? (25%)

9. Un pagaré de $ 24.000, que vencía el 29 de octubre, se negoció el 23 de septiembre del mismo año y se recibió por él un total de $ 23.712. ¿A qué tanto por ciento se descontó? (12%)

10. Se negocia una letra de cambio de $ 30.000 al 9% anual y se disminuye en $ 540. ¿Cuánto tiempo faltaba para su vencimiento? (72 días)

CAPÍTULO II

Interés compuesto

1. Definición y ejemplo

El interés compuesto es el resultado de una operación de capitalización; es decir, el interés que un capital gana en un período se agrega sucesivamente a dicho capital, de modo que, al final de un plazo determinado, se obtendrá un monto superior que por el régimen de interés simple. Por ejemplo:

Hoy se coloca un capital de $ 10.000 al 10% de interés anual y se desea saber con cuánto se puede contar al cabo de 4 años.

Por el régimen de interés simple, se habrá ganado el 10% del capital colocado al final de un año, es decir, $ 1.000, y, en 4 años, se habrá ganado $ 4.000 que, agregados al capital inicial, nos dará un monto de $ 14.000. En cambio, por el régimen de interés compuesto, se producen operaciones sucesivas como las siguientes:

Año	Capital	Interés	Monto
1	10.000	10.000 (0,1) = 1.000	10.000 + 1.000 = 11.000
2	11.000	11.000 (0,1) = 1.100	11.000 + 1.100 = 12.100
3	12.100	12.100 (0,1) = 1.210	12.100 + 1.210 = 13.310
4	13.310	13.310 (0,1) = 1.331	13.310 + 1.331 = 14.641

2. Determinación de la fórmula general del monto

Si el cuadro anterior lo desarrollamos con los símbolos conocidos, resulta:

Período	Capital	Interés	Monto
1	C	C i	C + C i = C (1+i)
2	C (1+i)	C (1+i) i	C (1+i) + C (1+i) i = C (1+i) (1+i) = C $(1+i)^2$
3	C $(1+i)^2$	C $(1+i)^2$ i	.... = C $(1+i)^3$
4	C $(1+i)^3$	C $(1+i)^3$ i	.... = C $(1+i)^4$

Obsérvese que el exponente del factor $(1+i)^n$ es el mismo que el número de períodos o capitalizaciones, de lo que resulta la fórmula general del monto por el régimen de interés compuesto para cualquier tasa y para cualquier tiempo:

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^n}$$

Esta fórmula se puede también representar, de manera simplificada, por:

$$\boxed{M = C\,r^n}$$

Comprobemos el resultado final del desarrollo del cuadro numérico anterior con sus respectivos datos: si se coloca un capital de $ 10.000 para ganar el 10% de interés anual, ¿cuánto podemos retirar al cabo de 4 años?

Datos:	**Aplicación:**
C = 10.000	M = 10.000 $(1+0,010)^4$ (*)
i = 0,10 anual	M = 10.000 $(1,10)^4$
n = 4 años	M = 14.641
M = ?	

(*) Se recomienda no usar el símbolo (+) que aparece dentro del paréntesis, sino expresar la unidad ya sumada a la tasa de interés para facilitar la digitación en la calculadora, tal como aparece en la siguiente línea. Ejemplo:

¿Cuánto se puede formar en 5 años si se coloca hoy $ 15.000 al interés del 3,5% trimestral?

C = 15.000	M = 15.000 $(1,035)^{20}$
i = 0,035 trim	
n = 5 x 4 = 20 trim	M = 29.486,813
M = ?	

3. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

La fórmula general del monto por el régimen de interés compuesto tiene los siguientes elementos:

M = Monto = Capital colocado + intereses ganados al final de una operación. Se llama también valor final.

C = Capital inicial colocado, denominado también valor actual o valor presente.

i = Tasa de interés por período. Puede ser de diferente frecuencia: anual, semestral, trimestral, bimestral, mensual, etc. Es la medida de la ganancia periódica.

n = Número de capitalizaciones o tiempo de la operación, expresado en unidades de tiempo de la misma frecuencia de la tasa «i» con expresión preferente de esta; es decir, si la tasa es trimestral, «n» debe ser número de «trimestres»; si «i» es mensual, «n» tiene que ser «meses».

I = Interés ganado. Resulta de deducir del monto el capital colocado, o sea:

$$I = M - C$$

Ejemplos:

- Un capital de \$ 13.850 ganó el 2,05% bimestral. Calcular el capital constituido al cabo de $3^1/_2$ años.

C = 13.850	$M = 13.850\ (1{,}0205)^{21}$
i = 0,0205 bimestral	
n = 3,5 x 6 = 21 bimestres	M = \$ 21.209,14

(El redondeo de los céntimos o centavos de \$ debe ser de 0,5 o más. Va contra la buena presentación expresar el dinero con más de 2 decimales).

- Una persona recibe un préstamo de \$ 18.000 y promete devolverlo con sus intereses ganados después de $5^1/_2$ años a la tasa del 4,35% semestral. ¿Cuánto de intereses habrá reconocido?

$M = 18.000\ (1{,}0435)^{11} = \$\ 28.735{,}42$
$I = 28.735{,}42 - 18.000 = \$\ 10.735{,}42$

4. FÓRMULA DEL CAPITAL INICIAL O VALOR ACTUAL

Si despejamos «C» de la fórmula general del monto, resultan hasta 4 formas de expresar el capital inicial.

$M = C\ (1 + i)^n$ (fórmula general)

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M \frac{1}{(1+i)^n} = M\ (1+i)^{-n} = M\ v^n$$

Por ahora, adoptemos la tercera por contener todos los elementos, mientras que la última constituye un factor también importante que será utilizado más adelante.

$$\boxed{C = M\ (1+i)^{-n}}$$

Ejemplos:

- Calcular el préstamo que hoy recibe una persona, quien se compromete a devolverlo después de 6 años, juntamente con sus intereses devengados a la tasa del 2,5% trimestral. Si se sabe que desembolsará $ 150.000, ¿cuál es el capital recibido?

C = ?	
M = 150.000	$C = 150.000\ (1,025)^{-24}$
i = 0,025 trim	
n = 6 x 4 = 24 trim	C = $ 82.931,30

- ¿Qué proporción de intereses sobre el capital se ha ganado si se sabe que la tasa del 5% semestral ha permitido, en 7,5 años, incrementar dicho capital hasta $ 25.000?

M = 25.000	
C = ?	$C = 25.000\ (1,05)^{-15}$
i = 0,05 sem	C = 12.025,43
n = 7,5 x 2 = 15 sem	I = M - C = 12.974,57
I = M - C	I/C (100) = 12.974,57 (100)/12.025,43
I/C (100) = ?	Resp. = 107,9%

5. FACTORES DE CAPITALIZACIÓN Y ACTUALIZACIÓN

a) Capitalización

«Capitalizar» significa 'agregar intereses ganados a un capital inicial que fue colocado a una determinada tasa de interés (i) por un tiempo también determinado (n)'. En la fórmula del monto ($M = C (1+i)^n = C\ r^n$), el factor que acompaña al capital C se llama «factor de capitalización compuesta», cuyo valor es siempre mayor que la unidad. Cumple la función de «llevar» o «trasladar», por multiplicación, una cantidad cualquiera de dinero desde un momento presente hasta otro momento futuro y, en ese traslado, le agrega intereses. Por ejemplo:

Un capital presente de 20.000, ¿cuánto representa después de 2 años al interés del 1% mensual?

C — 24 meses — M

20.000 — $20.000\ (1{,}01)^{24} = 25.394{,}69$

También pueden considerarse capitalizaciones sucesivas si se sigue la misma mecánica de aplicar el factor de capitalización $(1+i)^n = r^n$, con sus exponentes numéricos respectivos. Ejemplo:

Un ahorrista contrata una operación de formación de un capital futuro con un banco que le ofrece acumular aumentos sucesivos de intereses mensuales. Si deposita hoy \$ 10.000 y las tasas mensuales de interés son crecientes cada año en $^1/_4$%, comenzando por 1%, ¿cuánto podrá ganar en total al cabo de 3 años?

$$M = 10.000(1{,}01)^{12}\ (1{,}0125)^{12}\ (1{,}015)^{12} = 23.489{,}21$$

$$I = M - C = 13.489{,}21$$

b) Actualización

Se denomina «actualizar» a la operación de convertir un capital futuro en otro capital presente, es decir, a «quitar» intereses al primero y convertirlo en valor actual neto.

Como es una operación inversa a la de capitalización, en la fórmula general del monto se trata de recordar las diferentes formas de expresar o despejar el valor del capital C:

$$C = M\ [\ 1\ /\ (1 + i)^n\ ] = M\ (1 + i)^{-n} = M\ v^n$$

Cualquiera de los factores que acompaña al monto «M» se llama «factor de actualización» o de descuento compuesto, cuyo valor es siempre menor que la unidad. Cumple la función de quitar intereses al monto «M» o tiene la misión de «llevar» un capital desde un momento futuro hasta otro momento presente y, en ese traslado, le quita intereses.

Ejemplo 1:

Una persona tiene que pagar \$ 60.000 al cabo de $4^1/_2$ años, incluidos en dicha cantidad intereses al 2,8% trimestral. Si decide pagar su deuda faltando 2 años para su vencimiento, ¿cuánto era el importe inicial de la obligación sin intereses y cuánto tiene que desembolsar?

Primera respuesta: $C = 60.000\ (1{,}028)^{-8} = 48.106{,}78$
Segunda respuesta: $C = 60.000\ (1{,}028)^{-18} = 36.498{,}51$

Se comprueba por capitalización del préstamo:

Recibió \$ 36.498,51; han transcurrido $2^1/_2$ años (10 trim); ahora tiene que pagar \$ 36.498,51 $(1{,}028)^{10}$ = \$ 48.106,78.

Ejemplo 2:

En un lapso de 12 años, un deudor debe satisfacer \$ 100.000 con sus intereses incluidos del 4% semestral durante los 4 primeros años, del 8,5% anual en el trienio subsiguiente y del 2,5% trimestral en el plazo restante. Si actualiza su deuda a la fecha, ¿a cuánto asciende el valor presente total?

4a = 8s (4% s)	3 a; 8,5% a	5a= 20 t (2,5% t)

X ⟵ * ⟵ * ⟵ 10^5

$$X = 100.000\ (1{,}025)^{-20}\ (1{,}085)^{-3}\ (1{,}04)^{-8} = \$\ 34.911{,}36$$

6. CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS Y DEL TIEMPO DE LA OPERACIÓN

a) Cálculo de la tasa «i»

De la fórmula general del monto: $C\ (1+i)^n = M$, despejando «i» resulta:

$$(1 + i)^n = M / C$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{M / C} - 1} \qquad ó \qquad \boxed{i = (M / C)^{1/n} - 1}$$

Ejemplo 1:

¿A qué tasa de interés trimestral debe colocarse un capital para que se incremente en un 58% por razón de intereses ganados en 2 años?

$$i = (158 / 100)^{1/8} - 1 = 0{,}0588 = 5{,}88\% \text{ trim}$$

Ejemplo 2:

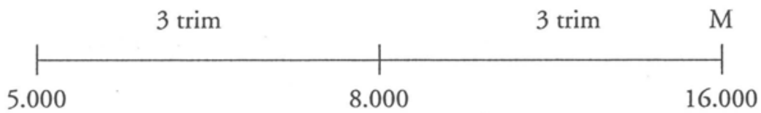
Se coloca hoy \$ 15.000 y se desea duplicar en 4 años. Si se gana el 3,5% trimestral durante los 2 primeros años, ¿qué tasa de interés mensual debe aplicarse en el plazo restante?

$$15.000\ (1{,}035^{8})\ (1+i)^{24} = 30.000$$

$$i = [(30.000) / 15.000\ (1{,}035)^{8}]^{1/24} - 1 = 1{,}76\% \text{ mensual}$$

Ejemplo 3:

Dos depósitos de \$ 5.000 y \$ 8.000, con intervalo de 9 meses, ganarán en total \$ 3,000 en un plazo total de año y medio. ¿Cuál fue la tasa de interés trimestral aplicada?



Se capitaliza cada depósito y resulta una ecuación de segundo grado. Así:

$$5.000\ (1 + i)^6 + 8.000\ (1 + i)^3 = 16.000$$

Dividiendo por 1.000 y haciendo $(1 + i)^3 = x$,

$$5x^2 + 8x - 16 = 0$$

Aplicando la fórmula conocida solo con el signo positivo antes de la raíz cuadrada:

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = (1+i)^3 = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4\,(5)\,(-16)}}{2\,(5)} = 1{,}16, \text{ de donde:}$$

$i = 1{,}16^{\,1/3} - 1 = 5{,}06\%$ trimestral

b) Cálculo del plazo «n»

Despejando $(1+i)^n$ de la fórmula general del monto, resulta: $(1 + i)^n = M / C$. Aplicando logaritmos, continúa: $n \log (1+i) = \log (M / C)$, de donde:

$$n = \frac{\log (M / C)}{\log (1 + i)}$$

Ejemplo 1:

¿En cuánto tiempo un capital colocado al 8,5% anual se habrá incrementado en un 252% por razón de intereses ganados?

$C = 100$

$$n = \frac{\log(352 / 100)}{\log(1{,}085)} = 15{,}43 \text{ años}$$

$I = 252$

$M = 352$

$i = 0{,}085a$ $\qquad n = 15a + 0{,}43(365d) = 15a + 155d$

$n = ?\ a$ $\qquad n = 15a + 5m + 5d$

Ejemplo 2:

¿En qué tiempo un capital colocado al 3% de interés semestral produce intereses equivalentes al 75% de su monto?

$M - C = I$ $\qquad 25\,(1{,}03)^n = 100$

$100 - 25 = 75$ $\qquad n = [\log(100/25)] / \log(1{,}03) = 46{,}9$ semestres

$n = 23a + 0{,}9(6m) = 23a + 5{,}4m = 23a + 5m + 12d$

7. CÁLCULO DEL MONTO EN TIEMPO ENTERO MÁS PLAZO FRACCIONARIO

Ejemplo:

Si se coloca \$ 15.000 al 6,5% anual, ¿cuánto podrá ganarse en 3 años y 3 meses?

Pueden aplicarse dos procedimientos. El primero consiste en capitalizar el interés compuesto por el tiempo completo (entero más fraccionario); y el segundo, en capitalizar el interés compuesto solo por el tiempo entero y luego capitalizar el resultado por el plazo fraccionario al interés simple. Así:

1) $M = 15.000\ (1{,}065)^{3{,}25} = 18.406{,}77$
2) $M = 15.000\ (1{,}065)^{3}\ [1 + 0{,}065\ (0{,}25)] = 18.413{,}68$

Respuestas:

En el primer caso, se ganará \$ 3.406,77; y, en el segundo, \$ 3.413,68 (\$ 6,91 de más).

NOTA: el primer método es el más usado. No es recomendable usar el segundo procedimiento, aunque parece más ventajoso, porque 3 meses como fracción de año no necesariamente es 1/4 de año (90 días); puede ser también 365 / 4 (91 días), en cuyo caso el resultado del primer método puede ser mejorado.

8. PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Problemas resueltos de interés compuesto

1. Un capital de \$ 10.000 fue colocado bajo el régimen de interés compuesto anual de la siguiente manera: los 3/5 al 8% y el resto al 7%. ¿Cuánto se acumuló al cabo de 10 años?

$$M = 3/5(10.000)\ (1{,}08)^{10} + 2/5(10.000)\ (1{,}07)^{10} = 20.822{,}15$$

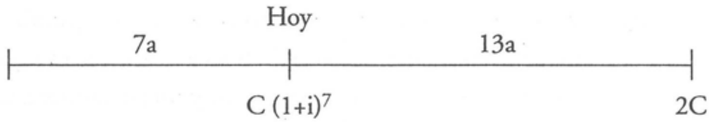
2. Después de 12 años, un señor recogió \$ 40.000 de un banco que le pagó el 3% de interés compuesto semestral. ¿Cuál fue el capital inicial colocado?

$$C = 40.000(1{,}03)^{-24} = 19.677{,}35$$

3. Un capital colocado al 4,5% de interés anual se ha incrementado en un 80%. ¿Cuál fue el tiempo de la operación?

$$n = \log(1{,}8)\ /\ \log(1{,}045) = 13 \text{ años, 4 meses y 9 días}$$

4. Colocando los 4/5 de lo que recibí hoy, obtendré, después de 13 años, el doble del capital que coloqué hace 7 años. Determinar la tasa de interés anual.



$$4/5\ C\ (1+i)^7 \longrightarrow 0{,}8\ C\ (1+i)^7\ (1+i)^{13} = 2\ C$$

$$0{,}8\ \cancel{C}\ (1+i)^{20} = 2\ \cancel{C} \quad \Rightarrow \quad i = (2\ /\ 0{,}8)^{1/20} - 1 = 4{,}69\%\ \text{anual}$$

5. Al final de dos plazos sucesivos iguales, se debe pagar \$ 15.000 y \$ 25.000, respectivamente, reconociendo en dichos pagos el interés del 5% semestral por un préstamo recibido de \$ 30.000. Calcular los mencionados plazos.

$$30.000 = 15.000\ (1{,}05)^{-n} + 25.000\ (1{,}05)^{-2n}$$

Dividiendo por 5.000 y ordenando, resulta una ecuación de segundo grado con $x = 1{,}05^{-n} = v^n$.

$$5x^2 + 3x - 6 = 0$$

$x = 1{,}05^{-n} = [-3 + \sqrt{9 - 4(5)\ (-6)}]\ /\ 10 = 0{,}8358$
$1\ /\ (1{,}5)^n = (1{,}05)^n = 1\ /\ 0{,}8358 = 1{,}1965$
$n = \log(1{,}965)\ /\ \log(1{,}05) = 3{,}67$ semestres
$n = 3{,}67(2) = 7{,}35$ años $= 7a + (0{,}35)\ 365 = 7a + 129d$
$n = 7a + 4m + 9d \ \Rightarrow\ 2n = 14a + 8m + 18d$

6. ¿Cuál es el monto que produce \$ 18.000 al 8% anual en un plazo de 2 años, que después continúa al 10% anual durante 9 meses y, finalmente, al 12% en 20 días?

$$M = 18.000(1{,}08)^2\ (1{,}10)^{9/12}\ (1{,}12)^{20/365} = 22.691{,}41$$

Problemas propuestos de interés compuesto

1. Dos capitales de \$ 10.000 y \$ 5.000 fueron colocados a la tasa común del 3% anual y la suma de los dos valores adquiridos es \$ 22.469,72. Si el segundo capital se mantuvo el doble tiempo que el primero, hallar dicho plazo. (10 y 20 años)

2. ¿Qué tasa de interés trimestral debe reconocerse para que los intereses ganados sean equivalentes a las $^3/_4$ partes del capital colocado más la mitad de dicho interés ganado al cabo de 5 años, si se sabe que la relación capital/interés es como la de 2 a 3. (4,69%)

3. Tres personas colocan, al mismo tiempo y a la misma tasa anual de interés, \$ 10.000 cada una y retiran, respectivamente, al término de tres plazos consecutivos anuales, con lo cual la segunda cobra \$ 243,80 más que la primera y la tercera \$ 248,67 más que la segunda. Hallar la tasa común y los plazos respectivos. (2%; 10, 11 y 12 años)

4. Una persona vende una propiedad avualada en \$ 120.000 y, por ella, le ofrecen \$ 70.000 al contado. ¿Por cuánto debe aceptar un pagaré por el saldo a 2 años plazo si el tipo de interés es 2,25% trimestral? (\$ 59.742)

5. Hoy se coloca un capital al 3% de interés trimestral. Después de un año, se retira la mitad de los intereses ganados hasta entonces. Dos años más tarde, el banco reajusta la tasa elevándola al 7% semestral, y eso anima a colocar otro capital, uno doble que el anterior. En estas condiciones, al final de un plazo total de 6 años, se retira un total de \$ 38.000. Calcular el total de intereses ganados. (\$ 15.774,03)

6. Al nacer un hijo, su padre deposita \$ 1.000 en un banco que paga el 5% efectivo anual. Diez años después, hace un nuevo depósito en un banco diferente, un depósito de \$ 2.000 al 6% anual. Saca \$ 2.000 de cada una de las cuentas a los 5 años y, cuando su hijo cumple 21 años, le entrega el importe de ambas cuentas. ¿Cuál es la cantidad que recibe? (\$ 1.065,33)

7. Una colocación a intereses compuestos de \$ 20.000 es completada un año después por un nuevo depósito de \$ 20.000. Un año después de esta última colocación se dispone de \$ 44.050,64. Calcular la tasa semestral de la colocación. (3,25%)

8. Un capital fue colocado a una tasa anual durante 8 años. La relación entre el total de los intereses producidos en el curso de los tres primeros años de la colocación y el total de los intereses producidos en el curso de los tres últimos años es 0,802451. Determinar la tasa de la colocación. (4,5%)

9. Una persona deja al fallecer \$ 500.000, que ganan el 5% de interés anual, para que se entreguen a sus tres hijos sumas iguales cuando ellos cumplan 21 años, respectivamente. Las edades de los hijos son hoy 10, 12 y 15 años. ¿Cómo se distribuye el capital inicial y cuánto recibirá cada hijo al cumplir los 21 años? (\$ 188.871,60; \$ 163.147,30; \$ 147.981,10; \$ 253.092)

10. Dos préstamos de \$ 4.000 y \$ 8.000 son pagaderos al cabo de 3 y 5 años, respectivamente, incluidos los intereses del 2,5% semestral. Si se decide pagarlos con dos cuotas iguales a los 2 y 4 años, respectivamente, ¿cuál será el importe de estos pagos? (\$ 5.617,28)

CAPÍTULO III
Teoría del interés

1. La tasa de interés

Siendo el interés la ganancia de dinero o la remuneración que corresponde por el «trabajo de un capital», el derecho moderno aceptó la noción del interés y lo definió como «un tributo por el uso del dinero ajeno». Esta justa compensación es a favor del acreedor que presta el capital a otro, llamado deudor. Este está obligado a reconocerle un interés a aquel por un tiempo convenido.

El interés se mide por un elemento importante que toma el nombre de «tasa de interés» o «tipo de interés», que no es otra cosa que la ganancia o beneficio que obtiene un capital o principal de magnitud 100 en una unidad de tiempo. Por ello, se denomina «por ciento» (%), representado generalmente por el símbolo «i». Por ejemplo, 6% anual significa un índice de la ganancia de $ 100 en un año, es decir:

$i = 6/100 = 0{,}06$ anual

Las tasas de interés pueden ser de diferente magnitud y frecuencia, como:

- 4,5% semestral = 4,5 / 100 = 0,045 semestral
- $1\,^1/_4$% bimestral = 1,25 / 100 = 0,0125 bimestral
- 16,385% anual = 16,385 / 100 = 0,16385 anual
- 2, 85% trimestral = 2,85 / 100 = 0,0285 trimestral

2. Clases de tasas de interés

a) Tasa efectiva

Es aquella que realmente reemplaza al símbolo «i» en el factor $(1+i)^n$. Ejemplos:

- Si se aplica la tasa trimestral de 3,8% sobre un capital de $ 1.000, ¿cuánto se podrá retirar a los $4\,^1/_2$ años y qué proporción del capital se habrá ganado en total?

$M = 1.000\ (1{,}038)^{18} = 1.958{,}83$
(0,038 = 3,8% es la tasa efectiva trimestral)
$I\ /\ C = 958{,}38\ /\ 1000 = 95{,}838\%$ de interés ganado

- Si un capital gana el 4% de interés trimestral en un año, ¿qué tasa de interés mensual deberá ganar en los siguientes cuatro años para que se duplique en el plazo total?

  $\not{C}\ (1{,}04)^4\ (1+i)^{48} = 2\ \not{C}$
  $i = [2\ /\ (1{,}04)^4]^{1/48} - 1 = 1{,}12\%$ mensual

En los dos ejemplos anteriores, las tasas de interés efectivas son 3,8% trimestral, 4% trimestral y 1,12% mensual.

La tasa de interés efectiva puede ser de diferente frecuencia según el enunciado del problema: anual, semestral, cuatrimestral, trimestral, mensual, etc.

b) Tasa adelantada

Es otra forma de expresar la tasa efectiva (que no se usa sino en raras situaciones de procesos altamente inflacionarios con el objeto de aumentar la tasa efectiva normal a niveles aparentemente acordes con la inflación). Esta tasa adelantada, como hemos visto en el tema del descuento racional del primer capítulo, resulta de la siguiente relación:

$$\boxed{i_1 = \frac{i}{1+i}}$$

i_1 = Tasa efectiva adelantada
i = Tasa efectiva normal

Ejemplo:

Si se coloca $ 10.000 a la tasa de 2 $^1/_4$% trimestral, ¿cuánto podrá retirarse al final de 3 años? (Resolver el ejemplo también a la tasa adelantada respectiva.)

$M = 10.000\ (1{,}025)^{12} = 13.448{,}89$
Si $i_1 = (0{,}025)\ /\ (1 - 0{,}025) = 0{,}025641$
$M = 10.000\ (1{,}025641)^{12} = 13.550$

NOTA: como la tasa adelantada es algo mayor que la tasa efectiva normal, el monto de esta resulta también mayor

c) Tasa de interés nominal

Esta tasa, que puede representarse por «j», se refiere generalmente a una tasa anual, pero con una característica especial: es susceptible de fraccionamiento entre un número de capitalizaciones al año. Por esta razón, cuando en el enunciado de un problema se dice que «la tasa nominal (o anual) es capitalizable en fracciones de año», hay que dividir dicha tasa nominal entre 2; si se dice capitalizable semestralmente, entre 4; si se dice capitalizable, o convertible, o acumulable trimestralmente, entre 12, por ser mensual, etc.

Con las explicaciones y condiciones expuestas anteriormente, y manteniendo los símbolos («j» = tasa nominal, «n» = número de años, «m» = número de capitalizaciones al año), puede modificarse obviamente la fórmula del monto por el régimen del interés compuesto. Así:

$$\boxed{M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}}$$

Ejemplo:

Si se coloca $ 28.000 al interés del 9% nominal (anual) capitalizable mensualmente, ¿cuánto se puede retirar después de 4 años?

$C = 28.000$	
$j = 0{,}09$	$M = 28.000\ (1 + 0{,}09\ /\ 12)^{4\ (12)}$
$m = 12$	$M = 28.000\ (1{,}0075)^{48}$
$n = 4$	$M = 40.079{,}35$
$M = ?$	

NOTA: puede, eventualmente, considerarse tasa nominal a aquella que, sin ser necesariamente «anual», puede ser susceptible de fraccionamiento (por ejemplo, 8% semestral capitalizable trimestralmente). En este caso, no es necesario mencionar que el 8% es nominal, pero sí es necesario atender el número del fraccionamiento. Por ello, la tasa resultante será 8% / 2 (4% trimestral), que se aplicará al problema.

d) Tasa de interés proporcional

Es el resultado del fraccionamiento de la tasa nominal o, dicho de otro modo, dos tasas son proporcionales cuando se refieren a diferentes frecuencias del año, pero una de las tasas es múltiplo de la otra, porque se derivan de simples comparaciones aritméticas. Ejemplos:

1) 12% anual es proporcional al 3% trimestral.
2) 1% mensual es proporcional al 6% semestral.
3) 2,5% trimestral es proporcional al 10% anual.
4) 15% anual es proporcional al $1^1/_4$% mensual.
5) 9% semestral es proporcional al $1^1/_2$% bimestral.
6) 3,2% cuatrimestral es proporcional al 0,8% mensual.

NOTA 1: cuando una tasa nominal se fracciona «m» veces al año (j/m), este resultado, aparte de ser proporcional de la tasa nominal, se convierte en tasa efectiva, porque es la que reemplazará al símbolo «i» del factor (1+i). Ejemplo:

¿Cuánto es el monto de $ 100 al año si se aplica el 18% nominal convertible trimestralmente?

$$M = 100\ (1 + 0{,}18/4)^4 = 100\ (1{,}045)^4 = 119{,}25$$

NOTA 2: cuando la misma tasa nominal se capitaliza, por ejemplo, semestralmente (m = 2) o mensualmente (m = 12), la tasa efectiva resultante del mayor número de capitalizaciones al año producirá un monto mayor porque gana intereses con mayor frecuencia. Por ejemplo, si en el ejemplo anterior la tasa nominal se convirtiera mensualmente, el monto al año sería:

$$M = 100\ (1 + 0{,}18/12)^{12} = 100\ (1{,}015)^{12} = 119{,}56$$

NOTA 3: si m = 1, entonces la tasa nominal se convierte en tasa efectiva anual. Con el mismo ejemplo anterior, el monto sería:

$$M = 100\ (1{,}18) = 118$$

3. TASA DE INTERÉS EQUIVALENTE

a) Definición

Una tasa es equivalente a otra cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1) Ambas son efectivas.
2) Ambas son de diferente frecuencia al año.
3) Ambas aplicadas en un mismo tiempo y sobre un mismo capital dan montos iguales.

Ejemplo 1:

En las dos primeras notas del apartado anterior, observamos un mismo capital ($ 100), un mismo tiempo (1 año) y se ha aplicado sus respectivas tasas efectivas. Si de sus resultados o montos se resta el capital colocado, se obtiene las tasas efectivas anuales. Así:

1) Al 4,5% trimestral: 119,25 - 100 = 19,25% anual
2) Al 1,5% mensual: 119,56 - 100 = 19,56% anual

Eso significa que:

1) 4,5% trimestral es equivalente al 19,25% anual.
2) 19,56% anual es equivalente al 1,5% mensual.

Ejemplo 2:

Si se coloca $ 100.000 al 5% de interés semestral, ¿cuánto puede formarse en 6,5 años y qué tasa equivalente mensual deberá aplicarse para obtener el mismo monto?

$M = 100.000\,(1,05)^{13} = \$\ 188.564,91$
$M = 100.000\,(1 + i)^{78} = \$\ 188.564,91$

$i = (188.564,91\ /\ 100.000)^{1/78} - 1 = 0,81648\%$ mensual

Prueba: $100.000\,(1,0081648)^{78} = 188.564,24$ (*)

(*) La tasa equivalente mensual debió tener más decimales.

Ejemplo 3:

Si la tasa nominal fuera, por ejemplo, 30%, resultan las siguientes tasas efectivas anuales según las frecuencias de las capitalizaciones:

Semestral: $(1 + 0,30/2)^2 - 1 = 32,25\%$

Trimestral : $(1 + 0,30/4)^4 - 1 = 33,55\%$

Mensual : $(1 + 0,30/12)^{12} - 1 = 34,49\%$

Diaria : $(1 + 0,30/360)^{360} - 1 = 34,97\%$

Horaria : $[1 + 0,30\ /\ 360(24)]^{360(24)} - 1 = 34,98\%$

(*) Instantánea: $e^{0,30} - 1 = 2,718282^{0,30} - 1 = 34,986\%$

(*) $(i = e^{j} - 1)$ $\Rightarrow$ (por la base del log neperiano llevada al límite)

b) Ecuación de equivalencia

Tomando como base la definición de tasas equivalentes y los elementos de la fórmula general del monto, se establece la ecuación de equivalencia con los siguientes datos para dos montos iguales ($M_1 = M$):

$i =$ Tasa efectiva de cualquier frecuencia en la primera fórmula del monto
$i_1 =$ Tasa efectiva de frecuencia diferente aplicada en la segunda fórmula del mismo monto
$n =$ Tiempo igual para ambas fórmulas, aunque el número total de capitalizaciones sean diferentes (por ejemplo: 4 años = 48 meses)
$C =$ Capital inicial igual para ambas fórmulas
$M =$ Monto igual, resultante de ambas fórmulas
$i \rightarrow i_1 =$ Tasas equivalentes

Ecuación de equivalencia: $\boxed{C\,(1 + i\,)^n = C\,(1 + i_1)^n}$

c) Conversión de tasas equivalentes

El objeto es conocer la forma de obtener valores para «i» e «i_1», para lo cual se aplican las siguientes reglas prácticas:

- Primera: conociendo una tasa de frecuencia menor, para hallar su equivalente de frecuencia mayor, se capitaliza la primera hasta el límite de tiempo de la segunda. Es decir, de menor a mayor, se capitaliza.

Ejemplo:

Si conocemos que 1% es la tasa efectiva **mensual**, ¿cuál es la tasa equivalente **semestral**? (frecuencia mensual es menor que frecuencia semestral).

$(1,01)^6 = (1 + i_1)^6$ Ecuación de equivalencia

$i_1 = (1,01)^6 - 1 = 6,152\%$ semestral

Respuesta:

1% mensual es equivalente a 6,152% semestral.

- Segunda: si se conoce la tasa de frecuencia mayor y se desea hallar su equivalente de frecuencia menor, se **extrae la raíz.**

Ejemplo:

Si la tasa anual es 8%, ¿cuál es su equivalente tasa trimestral? (Esta será algo menor que su proporcional 2%.)

$(1 + i)^4 = (1{,}08)^1$ Ecuación de equivalencia

$i = (1{,}08)^{1/4} - 1 = 1{,}9426\%$ trimestral

Respuesta:

8% anual es equivalente a 1,9426% trimestral

NOTA: en resumen, da lo mismo colocar un capital a cualquiera de sus tasas equivalentes, porque se obtendrá el mismo monto en el mismo tiempo de colocación. Ejemplo:

Si colocamos $ 10.000 al 1% mensual o a su equivalente trimestral 3,0301%, se retirará igual monto al final de 4 años.

$10.000\ (1{,}01)^{48} = 16.122{,}26$

$10.000\ (1{,}030301)^{16} = 16.122{,}26$

4. PROBLEMAS

1. Dos capitales colocados al 1,2% mensual y 4% trimestral, respectivamente, se convirtieron en un total de $ 40.000 al cabo de 5 años. Calcular los intereses ganados por cada capital si el segundo fue 35% mayor que el primero. ($ 8.359,05 y $ 12.854,71)

2. ¿A qué tasas de interés trimestral y semestral, respectivamente, hay que colocar dos capitales iguales durante 3 años para ganar un total equivalente a un capital si la primera tasa es de 3,5% trimestral? (i_2 = 6,86% semestral)

3. Un ahorrista desea triplicar su capital colocándolo al 1,5% de interés mensual en el plazo que sea necesario. Calcular este plazo y la tasa de interés semestral para obtener el mismo resultado. (9,34% y 6a + 54d)

4. Al 5% de interés adelantado semestral, una persona recibe un préstamo de \$ 20.000 para devolverlo con sus intereses después de $3^1/_2$ años. Calcular el total de intereses que reconocerá, así como la diferencia de intereses si no se hubiera pactado por la modalidad de interés adelantado. (\$ 8.633,44; \$ 491,43 de más)

5. Dos capitales de \$ 6.000 y \$ 9.000 son colocados con intervalo de 2 años. Calcular la tasa de interés nominal capitalizable trimestralmente aplicada si, al cabo de 4 años a partir del primer depósito, se ganó un total de \$ 6.000. (11,95%)

CAPÍTULO IV

Casos especiales en problemas de interés compuesto

1. Vencimiento común de capitales

Consiste en efectuar un pago único, en vez de hacer varios pagos que tienen diversos documentos, a diferentes vencimientos y tasas de interés cada uno, a condición de que el pago único sea a una misma tasa. Ejemplo:

Existen por pagar los siguientes 4 documentos que deben ser reemplazados por una sola obligación con vencimiento único a 2 años, calculada al 12% de interés anual:

a) Un documento por $ 30.500 pactado al 7,5% semestral a los 4,5 años.
b) Un documento por $ 65.830 pagadero al 11% anual en 3 años.
c) Otro documento por $ 80.000 pactado al 14% nominal convertible trimestralmente en 2 $^{1}/_{2}$ años.
d) Un cuarto documento por $ 55.800 incluido el 10% anual en 5 años.

Solución:

Los importes de todos los documentos se actualizan a sus respectivas tasas y la suma de ellos se capitaliza al vencimiento común propuesto:

$$
\begin{array}{lcr}
C_1 = 30.500\ (1{,}075)^{-9} & = & 15.980 \\
C_2 = 65.830\ (1{,}11)^{-3} & = & 48.134 \\
C_3 = 80.000\ (1{,}035)^{-10} & = & 56.714 \\
C_4 = 55.800\ (1{,}10)^{-5} & = & \underline{34.647} \\
 & & 155.403
\end{array}
$$

Documento único a los 2 años = $155.403\ (1{,}12)^{2} = 194.938$

2. VENCIMIENTO MEDIO

Consiste en determinar un plazo único para efectuar el pago de varios documentos con diferentes valores y plazos. Hay dos casos principales:

a) Pago único a una sola tasa

Ejemplo:

Tres pagarés de \$ 8.000, \$ 15.000 y \$ 10.000 deben ser cancelados, respectivamente, a los 3, 5 y 8 años con intereses incluidos del 6% anual. Se propone pagar la suma de los documentos en un plazo único.

Solución:

La suma de los valores actuales se capitaliza a la tasa única común y se halla el plazo del vencimiento medio

$$C_1 = 8.000\,(1{,}06)^{-3} \quad = \quad 6.716{,}95$$
$$C_2 = 15.000\,(1{,}06)^{-5} \quad = \quad 11.208{,}87$$
$$C_3 = 10.000\,(1{,}06)^{-8} \quad = \quad \underline{6.274{,}12} \quad = 2\ 4.199{,}94$$

Suma de documentos = 33.000

Ecuación : $24.199{,}94\,(1{,}06)^n = 33.000$

$$n = \log\left[(33.000 / 24.199{,}95)\right] / \log(1{,}06) = 5{,}323 \text{ años}$$

Vencimiento medio $\cong$ 5 años y 4 meses

b) Un solo capital disponible para pagar varios documentos futuros

Ejemplo:

Un deudor tiene tres documentos de \$ 10.000, \$ 15.000 y \$ 20.000 pagaderos, respectivamente, a 9 meses, 15 meses y 24 meses, incluidos intereses del 9% nominal convertible mensualmente, y tiene presupuesto de \$ 42.000 para pagar todas las obligaciones en un solo plazo. Calcular este vencimiento medio.

Solución:

Se actualiza cada documento. Su suma se capitaliza para que sea igual al capital presupuestado, cuyo plazo representará el vencimiento medio.

$C = 10.000\ (1{,}0075)^{-9} + 15.000\ (1{,}0075)^{-15} + 20.000\ (1{,}0075)^{-24} = 39.475{,}85$

Ecuación : $39.475{,}85\ (1{,}0075)^{n} = 42.000$

$n = \log\left[(42.000 / 39.475{,}85)\right] / \log(1{,}0075) = 8{,}295$ meses

Vencimiento medio = 8 meses y 9 días

3. EL INTERÉS EN FUNCIÓN DEL MONTO

De la fórmula general del monto y de la definición del interés o ganancia resultan:

$$M = C\ (1 + i)^{n} \qquad (1)$$

$$C = M\ v^{\,n} = M\ (1+i)^{-n} \rightarrow C = (M) / (1+i)^{n} \qquad (2)$$

$$I = M - C = C\ [(1+i)^{n} - 1] \qquad (3)$$

Reemplazando (2) en (3) :

$$I = M - [(M) / (1+i)^{n}] = M\ [1 - 1 / (1+i)^{n}]$$

$$\boxed{I = M\ (1 - v^{n})}$$

Ejemplo:

Se retira \$ 40.000 al cabo de 4 años y 9 meses habiendo ganado el 3,2% de interés trimestral. Calcular en forma directa la ganancia obtenida y probar por acumulación del capital.

$$I = 40.000\ [\ 1 - (1{,}032)^{-15}\ ] = 15.061{,}83$$

Prueba: $C = 40.000 - 15.061{,}83 = 24.938{,}17$

Monto: $M = 24.938{,}17\ (1{,}032)^{15} = 40.000$

4. EL MONTO EN FUNCIÓN DEL INTERÉS

Partimos de la fórmula del interés en función del monto, demostrado en el apartado anterior:

$$\boxed{I = M\ (1 - v)^{n}}$$

Multiplicamos ambos miembros por $(1 + i)^n$:

$$I (1+i)^n = M (1+ i)^n [1 - (1+i)^{-n}]$$

Desarrollamos el segundo término y despejamos «M»:

$M [(1+i)^n - 1] = I (1+i)^n$, de donde:

$$M = \frac{I (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \qquad ó \qquad M = \frac{I \,.\, r^n}{r^n - 1}$$

5. COMBINACIÓN DE FÓRMULAS

De la fórmula general del monto y de sus componentes «C» e «I», se puede deducir, como en los apartados anteriores, otras fórmulas como las siguientes:

a) Interés en forma directa: $I = C [(1 + i)^n - 1]$

b) Capital en función del interés: $C = I / (r^n - 1)$

NOTA: en la práctica, no siempre se aplica una fórmula de manera directa, sino por deducción de valores que resultan del uso y de las formas básicas con el factor de capitalización «$r^n = (1 + i)^n$» y de actualización «$(1 + i)^{-n} = v^n$» .

Ejemplo 1:

Una persona efectúa 3 depósitos iguales con intervalo de 3 años. Tres años más tarde del último depósito habrá formado un capital de \$ 400.000. Las tasas de interés de cada etapa, sucesiva y respectivamente, fueron el 3% trimestral, el 0,9% mensual y el 12% nominal capitalizable 6 veces al año. Calcular cada capital colocado y el total de intereses ganados.

$$\{[C(1,03)^{12} + C] (1,009)^{36} + C\} (1,02)^{18} = 400.000 \Rightarrow C = 64.395,58;\ I = 206.813,26$$

Ejemplo 2 :

Si a un capital de \$ 250.000 se quita intereses por un total de 5 años, al 5% semestral durante los últimos 3 años y al 1% mensual durante los 2 primeros años, calcular el total de intereses descontados.

$$C = 250.000\ (1,05)^{-6}\ (1,01)^{-24} = \$\ 146.923,49$$

$$I = 250.000 - 146.923,49 = \$\ 103.076,51$$

CAPÍTULO V

Teoría de rentas o anualidades

1. Definición, operaciones y símbolos usados en rentas

a) Definición

Un sistema de rentas es una sucesión de pagos o cobros periódicos de importe generalmente constante que pueden ser efectuados al comienzo o al final de cada período. Esta toma, en cada caso —respectivamente—, el nombre de renta prepagada (de pago anticipado) y pospagada (de pago vencido). Cuando el sistema de pago es anual, toma la denominación específica de «anualidad».

b) Operaciones de rentas

Hay dos clases de operaciones financieras de rentas:

1) **Monto de la renta.** Es un capital futuro proveniente de depósitos de ahorros sistemáticos, periódicos, que pueden ser de frecuencia mensual, trimestral, semestral, anual, etc. Estos ganan intereses de modo que la suma de los depósitos es menor que el capital formado llamado «monto» (S). Por ejemplo, si un trabajador retrae de su sueldo mensual y ahorra \$ 500 durante tres años, al final de este plazo tendrá un monto mayor que \$ 18.000 (36 x 500), porque cada cuota habrá ganado intereses compuestos por el tiempo que se mantuvo colocado.

2) **Valor actual de la renta.** Llamada también valor presente, es una cantidad tal como un préstamo recibido o una deuda por pagar, que se conviene devolver o cancelar mediante cuotas periódicas reconociendo, en ellas, intereses a una tasa periódica, durante un tiempo también convenido. Por ejemplo, una persona compra un objeto que al contado cuesta \$ 10.000. Entrega, como cuota inicial, solo el 20% y se compromete a pagar, por el saldo, cuotas mensuales constantes con

intereses a una tasa también mensual durante dos años; entonces, el valor actual será la deuda inicial por pagar ($ 8.000), que deberá cancelar en 24 cuotas pactadas, más el interés convenido a una tasa mensual. En este caso, como las cuotas llevan intereses incluidos, tendrá que desembolsar, en dos años, una cantidad total mayor que $ 8.000 (es decir, 24 x 500 = 12.000).

c) Símbolos usados en rentas

Son aquellos que han de ser reemplazados por valores numéricos en las respectivas fórmulas con los siguientes símbolos:

S = **Monto** o valor final acumulado en un momento futuro de la operación de ahorros
A = **Valor actual** de una operación de pago de deuda mediante cuotas periódicas con intereses
R = **Cuota periódica** constante
i = **Tasa de interés** por período
n = **Número de cuotas** o tiempo de la operación

NOTA IMPORTANTE: en toda operación de rentas, los datos «R», «n» e «i» deben tener igual denominación a la frecuencia de la cuota «R»; es decir, si «R» es semestral, «i» debe ser semestral y «n» tiene que ser semestres.

2. CLASIFICACIÓN DE RENTAS

Las rentas se clasifican según el esquema de la siguiente página, siendo R el importe constante de cada pago, llamado también término de la renta (PV significa pago vencido; PA significa pago anticipado).

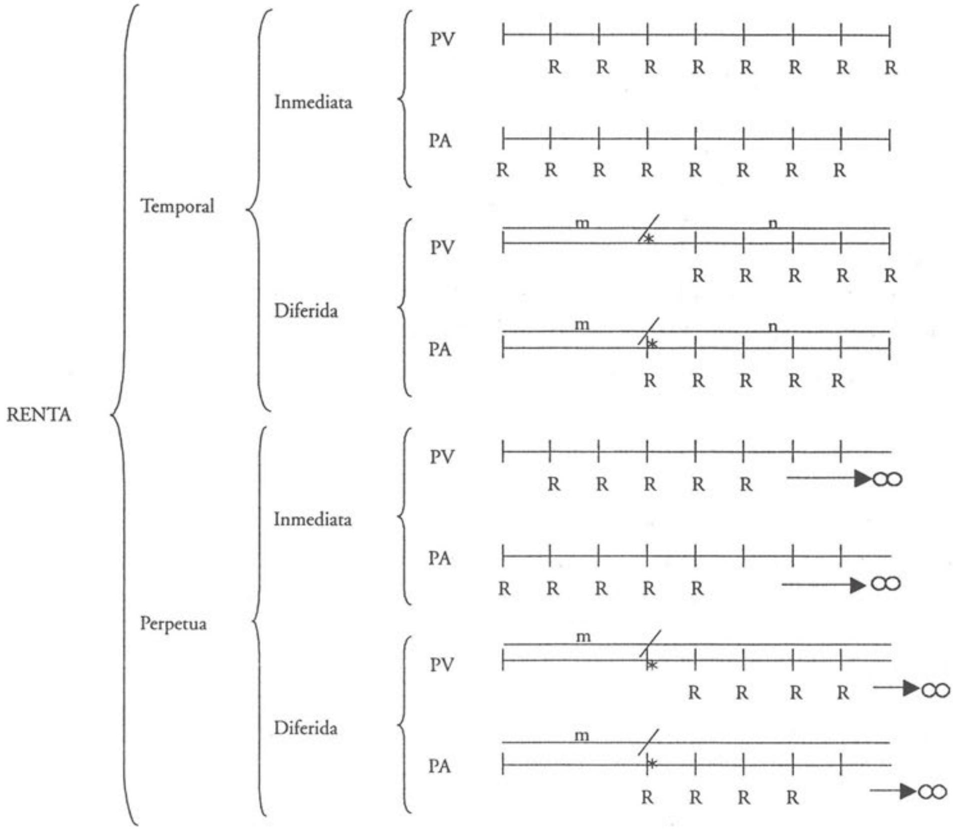
Obsérvese que, en el caso de rentas diferidas, existen dos etapas: la primera «m», llamada plazo del diferido; y la subsiguiente «n», denominada etapa de pagos.

Las llamadas rentas perpetuas, más propiamente, deberían denominarse permanentes o indefinidas, porque no tienen plazo de término.

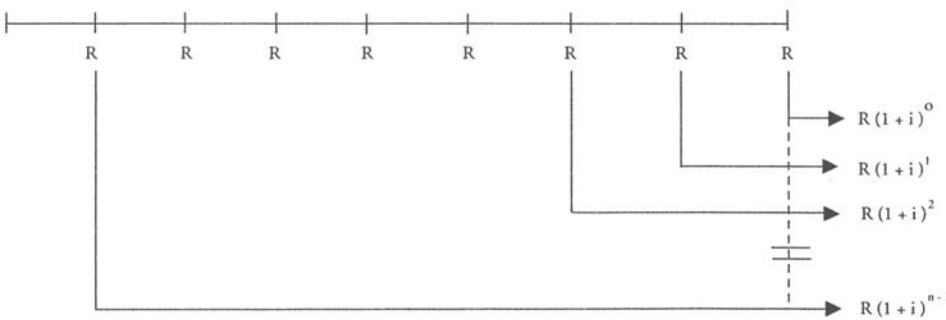
3. FÓRMULA DEL MONTO DE RENTAS TEMPORALES INMEDIATAS Y DIFERIDAS

a) Monto de la renta temporal inmediata de pago vencido

Para determinar su fórmula, cada cuota de ahorro se capitalizará hasta el final de la operación, utilizando el factor $(1 + i)^k$ por el tiempo «k» que permanece ganando



intereses; de esta forma, se obtiene «m» montos parciales, cuya suma será el monto de la renta, representado por «S».



$S = R + R\,(1+i)^2 + ... + R\,(1+i)^{n-1}$

Reemplazando «(1+ i)» por «r»:

$S = R(1 + r^2 + r^3 + ...r^{n-1})$

Esta es la suma de una progresión geométrica de «n» términos y de razón r, es decir, (1 + i).

$$S = R \frac{r^n - 1}{r - 1} = R \frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

$$\boxed{S = R \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)}$$ Fórmula buscada

El factor que acompaña a «R» puede ser representado por el símbolo simplificado «$S_{\overline{n}|i}$» (ese sub ene i), con lo que la fórmula del monto de renta temporal inmediata de pago vencido o pospagada es:

$$\boxed{S = R\, S_{\overline{n}|i}}$$

Este factor tiene la misión de «llevar» hacia el futuro todas las cuotas «R» hasta donde se encuentra la última «R» y, en ese traslado, les agrega intereses y las convierte en monto «S»; por eso, se llama «factor de capitalización de renta».

Ejemplo:

Un ahorrista deposita $ 500 cada fin de mes y gana el 1% de interés mensual. ¿Cuánto podrá formar en 3 años?

NOTA: se reitera tener en cuenta la «nota importante» que aparece al final del apartado «1. c) Símbolos usados en rentas» sobre la uniformidad de denominación de los datos.

$$S = 500 \left(\frac{(1,01)^{36} - 1}{0,01} \right) = 21.538,44$$

R = 500 mensuales
i = 0,01 mensual
n = 3 x 12 = 36 meses
S = ?

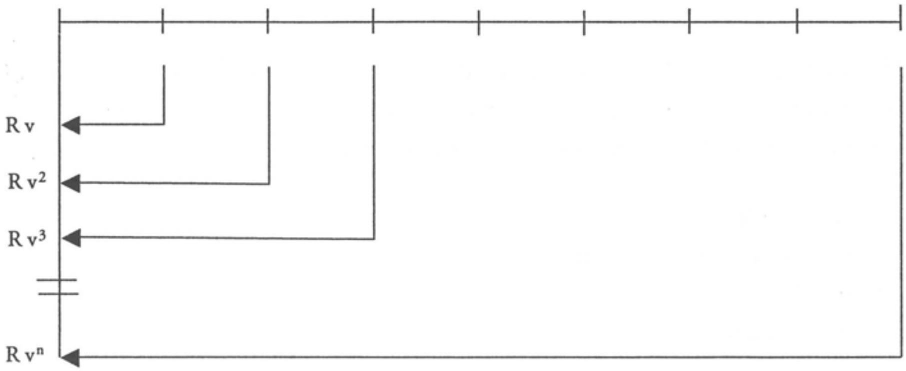
b) Monto de la renta temporal diferida de pago vencido

En los gráficos de la clasificación, obsérvese que el plazo del diferido «m» no interviene, por lo que el monto respectivo será igual a la fórmula antes demostrada. Esto mismo ocurre en la renta diferida de pago anticipado.

4. VALOR ACTUAL DE RENTAS TEMPORALES

a) Valor actual de renta temporal inmediata de pago vencido

En el siguiente gráfico de desarrollo, se observa que cada cuota se actualiza por 1, 2, 3, ... n períodos, cuya suma es el valor actual o valor presente de la renta sin intereses (A).



$$A = R\,v + R\,v^2 + R\,v^3 + \ldots.. + R\,v^n$$

$$A = R\,(v + v^2 + v^3 + v^n)$$

El paréntesis encierra a la suma de una progresión geométrica decreciente de «n» términos y de razón «v», es decir, «$(1 + i)^{-n} < 1$».

$$A = R\,\frac{v\,(1 - v^n)}{1 - v}$$

El denominador es igual a: $1 - v = 1 - [1 / (1+ i)] = (1 + i - 1) / (1+i) =$
$i\,[1 / (1+i)] = i\,v$

$$A = [R\,v\,(1 - v^n)] / i\,v$$

$$\boxed{A = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$ Fórmula buscada

El factor que acompaña a «R» se representa por el símbolo «$a_{\overline{n}|i}$» (a sub ene i), con lo que se obtiene la fórmula de valor actual de la renta temporal inmediata pospagada o de pago vencido.

$$\boxed{A = R\, a_{\overline{n}|i}}$$

El símbolo «$a_{\overline{n}|i}$», que toma el nombre de «factor de actualización de renta», cumple la misión de retrotraer, en el tiempo, el valor nominal de todas y cada una de las cuotas constantes «R» hasta un período antes de la primera cuota, y sin intereses incluidos.

Ejemplo:

Una deuda de \$ 8.000 se cancela mediante cuotas mensuales durante 2 años y se reconoce un interés del 14,4% nominal capitalizable mensualmente. Se pide calcular la cuota mensual y el total e intereses pagados en la operación.

$A = 8.000$
$i = 0{,}144 / 12 = 0{,}012$ m
$n = 2 \times 12 = 24$ meses
$R = ?$ mensual

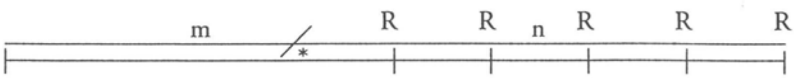
Fórmula: $$A = R\left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right)$$

$$8.000 = R\left(\frac{1 - (1{,}012)^{-24}}{0{,}012}\right)$$

$$R = 8.000 / 20{,}746 = 8.000\,(0{,}048202) = \$\ 385{,}62$$

Interés pagado: $I = n\,R - A = 385{,}62\,(24) - 8.000 = \$\ 1.254{,}88$

b) Valor actual de renta temporal diferida de pago vencido

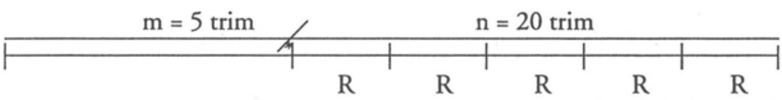


En este gráfico, si actualizamos todas las cuotas «R» hasta un período antes de la primera, tenemos la fórmula «$A = R\, a_{\overline{n}|i}$». Este resultado se sigue actualizando por «m» períodos con el factor «v^m» y tenemos la fórmula buscada.

$$\boxed{{}_mA = R\, v^m\, a_{\overline{n}|i}}$$

Ejemplo:

Se recibe un préstamo con el compromiso de devolverlo mediante 20 cuotas trimestrales de $ 7.500 cada una, reconociendo en ellas el 3,5% de interés trimestral. ¿Cuál es el préstamo recibido si se conviene que la primera cuota se pagará después de año y medio de recibido el préstamo?



Diferido por 5 trimestres + 20 trimestres vencidos

Fórmula: $_{m}A = R\, v^{m}\, a_{\overline{n}|i}$

$_{m}A = 7.500\ (1{,}035)^{-5}\ [\ 1 - (1{,}035)^{-20}\ ]\ /\ 0{,}035 = 89.748{,}47$

5. VALOR PRESENTE DE RENTAS PERPETUAS, INMEDIATAS Y DIFERIDAS

Una renta es perpetua porque tiene plazo indefinido. Su valor actual resulta de la primera fórmula:

$$A = R\, a_{\overline{n}|i} \quad = \quad R\left(\frac{1 - v^{n}}{i}\right)$$

Hacemos «n = ∞» ; entonces, por cálculo infinitesimal, una cantidad menor que la unidad como «v» elevada a una potencia muy grande, tiende a cero (para nosotros, en matemática financiera, es cero). Entonces resulta:

$$A\infty = R\left(\frac{1 - v\infty}{i}\right) \quad = R\left(\frac{1 - 0}{i}\right) \quad \boxed{A\infty = \frac{R}{i}} \text{ Fórmula}$$

Ejemplo:

Una mina produce indefinida o permanentemente un ingreso semestral de $ 600.000. ¿En cuánto podría venderse si el dinero se avalúa al interés nominal del 10%?

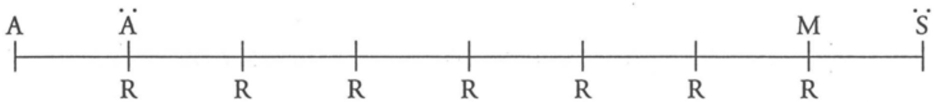
R = 600.000 sem.
i = 0,10 / 2 = 0,05 sem. $\qquad$ A∞ = 600.000 / 0,05 = $ 12'000.000
n = ∞
A∞ = ?

NOTA: cuando la renta perpetua es diferida, bastará multiplicar por «v^m». Así:

$$\boxed{{}_{m}A_{\infty} = \frac{R\,v^m}{i}}$$

6. MONTO Y VALOR ACTUAL DE RENTAS DE PAGO ANTICIPADO

En el cuadro de clasificación de rentas (capítulo V, apartado 1), observamos solo el primer grupo de rentas temporales, que tienen una fórmula para «monto» y otra para «valor actual» cuando las cuotas son de pago vencido; en cambio, para rentas de pago anticipado, hay una regla práctica que consiste en multiplicar cada fórmula por (1 + i), sea «monto» o «valor actual». Veamos:



- El **monto** en el momento «M» es «$R\,S_{n\rceil i}$», porque tiene «n» términos; y el factor «$S_{n\rceil i}$» lleva las cuotas hasta donde está la última «R»; pero, como queremos que el monto esté en el momento «$\ddot{S}$», tenemos:

$$\ddot{S} = R\,S_{n\rceil i}\,(1 + i)$$

- El **valor actual** en el momento «A» (con su renta de pago vencido de «n» términos) es «$R\,a_{n\rceil i}$» porque este factor retrocede a todas las cuotas «R» hasta un período antes de la primera «R»; pero, como queremos que el valor actual esté en el momento «A», tenemos:

$$\ddot{A} = R\,a_{n\rceil i}\,(1 + i)$$

Ejemplo:

Se vende a plazos un terreno de 400 m^2 a \$ 200 cada m^2 mediante 60 cuotas mensuales adelantadas al interés del 1% mensual. Calcular el importe de la cuota mensual.

Fórmula: $\ddot{A} = R\,a_{n\rceil i}\,(1 + i)$

$A = 400\ (200) = \$\ 80.000$
$R = ?$ mensual
$i = 0{,}01$ mensual
$n = 60$ meses

$$80.000 = R\left(\frac{1 - (1{,}01)^{-60}}{0{,}01}\right)(1{,}01)$$

$$R = \$\ 1.761{,}94\ \text{m.}$$

7. RESUMEN DE FÓRMULAS DE RENTAS

Teniendo como fuente las demostraciones hechas anteriormente, el siguiente cuadro resume las fórmulas tanto del monto como del valor actual de las diferentes clases de rentas:

	Renta		Monto	Valor actual
Temporal	Inmediata	P.V.	$S = R\, s_{\overline{n}\rceil i}$ *	$A = R\, a_{\overline{n}\rceil i}$
		P.A.	$\ddot{S} = R\, s_{\overline{n}\rceil i}(1+i)$ **	$\ddot{A} = R\, a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)$
	Diferida	P.V.	Igual que *	${}_mA = R\, v^m a_{\overline{n}\rceil i}$
		P.A.	Igual que **	${}_m\ddot{A} = R\, v^m a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)$
Perpetua	Inmediata	P.V.		$A\infty = \frac{R}{i}$
		P.A.		$\ddot{A}\infty = R\left(1+\frac{1}{i}\right)$
	Diferida	P.V.		${}_mA\infty = \frac{R\, v^m}{i}$
		P.A.		${}_m\ddot{A}\infty = Rv^m\left(1+\frac{1}{i}\right)$

8. Problemas resueltos y propuestos

Problemas resueltos de rentas

1. Una deuda de $ 100.000 se paga con 10 cuotas anuales incluidas del 5% de interés anual. Las primeras 5 cuotas son iguales a $ 10.000 cada una. Calcular el importe de cada cuota correspondiente al período restante.

$$100.000 = 10.000\ a_{5\rceil 0,05} + R\ a_{5\rceil 0,05}\ (1,05)^{-5}$$
$$R = (100.000 - 10.000\ a_{5\rceil 0,05}) \,/\, a_{5\rceil 0,05}\ (1,05)^{-5}$$
$$R = 16.716$$

2. Hallar el precio al contado de un objeto por el que hemos suscrito los siguientes compromisos sucesivos: el primero consiste en pagar $ 2.500 cada fin de mes durante 3 años con intereses del 1% mensual; y el segundo comprende 10 pagos semestrales adelantados (el primer pago simultáneamente con el último del anterior compromiso) con el 8% de interés capitalizable semestralmente, a razón de $ 5.000 cada cuota.

$$A = 2.500\ a_{36\rceil 0,01} + 5.000\ a_{10\rceil 0,04}\ (1,04)\ (1,04)^{-6}$$
$$A = 108.602$$

3. Por un bien que, al contado, cuesta $ 500.000 se paga el 20% al contado y el resto en cuotas mensuales durante 10 años, con un interés anual del 12% capitalizable mensualmente. Después del sexto año, se conviene pagar el saldo pendiente al contado. ¿Cuál es este saldo?

$$500.000\ (0,8) = R\ a_{120\rceil 0,01} \Rightarrow R = 5.738,84 \text{ m}$$
Saldo: valor actual de 120 - 72 = 48 meses
$$A' = 5.738,84\ a_{48\rceil 0,01} = 217.926,40$$

4. ¿Cuál será la cantidad que dispondrá un hijo al cumplir 21 años de edad si su padre ha depositado, desde medio año antes que aquel cumpliera 5 años, la suma de $ 200 cada fin de mes, monto que gana 1% mensual?

$$n = (21 - 5)\ (12) + 7 = 199 \text{ meses vencidos}$$
$$M = 21\ (12) - 5 = 247 \text{ m. vencidos}$$
$$S = 200\ S_{199\rceil 0,01} = 124.871,64$$

5. Al cabo de 10 años se necesitarán $ 100.000, para lo cual se depositan hoy $ 20.000 y luego deberá ahorrarse semestralmente una cantidad X. Si se prevé

una ganancia del 8% nominal, capitalizable semestralmente, hallar el importe de cada depósito.

$$100.000 = 20.000\ (1{,}04)^{20} + X\ S_{\overline{20}|0{,}04}$$
$$X = 1.886{,}54$$

6. Un ahorrista desea formar \$ 100.000 en 5 años, para lo cual abre una cuenta de ahorros con \$ 8,000 al 8% anual de intereses convertible semestralmente. Luego depositará una cuota mensual solamente los 3 primeros años. Calcular el depósito mensual y el total de los intereses ganados en los 5 años.

NOTA: para la solución de este problema, se determina primero la tasa equivalente mensual al 8/2% semestral = 0,00656. Se capitaliza luego la cuota inicial por cualquiera de las tasas equivalentes por 5 años. Se halla el monto de la renta solo por 3 años a la tasa mensual. Finalmente, se suma para igualar a los \$ 100.000 propuestos, en el que «R» es la primera respuesta.

$$100.000 = 8.000\ (1{,}04)^{10} + R\ S_{\overline{36}|0.00656}\ (1{,}04)^{4} \Rightarrow R = 1.862{,}65$$

El interés ganado es igual a I = 100.000 - 8.000 - 36 (1862,65) = 24.944,60

Problemas propuestos de rentas

1. Los valores actuales de 2 rentas son equivalentes si se someten a las siguientes condiciones: la primera al 6% anual en 5 años y a pago vencido; la segunda a término anticipado, pagaderas semestralmente la mitad de la primera renta durante 12 años a la tasa nominal del 10% y cuando el valor actual de la segunda excede al de la primera en \$ 10.000. ¿Cuál es el importe de cada renta? (\$ 3.298,26; \$ 1.649,13)

2. El monto de una renta semestral vencida de \$ 1.000 cada una durante 10 años, dividida entre el monto de otra renta también semestral vencida de \$ 500 cada una, durante 5 años, es igual a 4,96. Calcular la tasa de interés de ambas rentas. (4% semestral)

3. Hallar el valor de un terreno si se ha pagado la tercera parte en efectivo y el resto con entregas anuales de \$ 6.000 durante 30 años, habiendo comenzado a pagar dichas entregas 5 años después de recibir el predio, siendo la tasa 4,5% anual. (\$ 122.938)

4. Un objeto cuesta \$ 75.000 al contado. Se paga el 10% de cuota inicial y el saldo en 20 cuotas mensuales con un interés del 1,5% mensual. Después del octavo pago, conviene en pagar el saldo al contado. Calcular este importe. (\$ 42.850)

5. Hallar el valor actual total de dos rentas: la primera de $ 5.000 semestrales durante 6 años a la tasa del 4 $^{1}/_{2}$% semestral a término anticipado; y la otra, después de 4 años de la anterior, a la tasa del 6% anual, pagadera $ 10.000 a plazo vencido durante 5 años. (71.166,54)

6. Se desea formar $ 100.000 en 3 años, para lo cual se abre una cuenta de ahorros con un depósito inicial de $ 2.000 en un banco que paga el 12% nominal capitalizable mensualmente; luego, se depositan cuotas mensuales constantes durante 2 $^{1}/_{2}$ años. Calcular el total de intereses que se habrá ganado en los 3 años y también lo ganado solo en el año intermedio. ($ 19.078,82; 6.312,18)

7. ¿Cuál es el valor actual de una renta de 20 términos trimestrales vencidos en que los 10 primeros son iguales a $ 5.000 cada uno; los 6 siguientes, a $ 6.000 cada uno; y los 4 últimos a $ 6.500 cada uno. La tasa de interés es el 4% trimestral. ($ 74.399,95)

8. Los valores actuales de dos rentas inmediatas de pago vencido, la primera de 10 términos anuales a la tasa del 4%, la segunda de 15 términos a la tasa del 4,5%, suman $ 24.220,22. Los montos de ambas rentas suman $ 43.182,28. Determinar los términos de ambas rentas. ($ 1.000; $ 1.500)

9. Una persona posee una renta perpetua de $ 10.000 cada fin de mes, a la tasa del 5%, y desea convertirla en una renta temporal de 10 términos. Se desea saber el valor de cada término de la renta temporal. ($ 25.901)

10. En 3 años se forma un capital de $ 45.000 con depósitos constantes cada fin de mes ganando el interés del 15% nominal acumulable mensualmente. Calcular el interés ganado solo en el año intermedio. ($ 2.920,23)

CAPÍTULO VI

Elementos de las fórmulas de rentas

1. Elementos básicos y variantes de fórmulas

En el capítulo anterior se han demostrado y conocido las diferentes fórmulas tanto para hallar el monto (S) como para el valor actual (A) con sus cuatro principales elementos:

En monto	**En valor actual**
S = Valor final acumulado	A = Valor presente sin intereses
R = Cuota periódica de ahorro incluidos	R = Cuota con intereses
i = Tasa que ganan las cuotas	i = Tasa incluida en las cuotas
n = n.° de cuotas	n = n.° de cuotas

a) Rentas de pago anticipado

Se ha visto que, tratándose de rentas de pago anticipado, bastará multiplicar la fórmula del pago vencido por (1 + i), tanto para monto como para valor actual. Sin embargo, hay otras formas de expresar las mismas fórmulas de rentas anticipadas:

- Monto. Se convierte el monto anticipado en monto vencido agregando una cuota «R» al final y, luego, retirándolo en el desarrollo.

$$\ddot{S} = R\, S_{\overline{n+1}|i} - R \text{ , de donde}$$

$$\boxed{\ddot{S} = R\, (S_{\overline{n+1}|i} - 1)}$$

- Valor actual. Se convierte en valor actual anticipado retirando la primera «R», con lo cual hay «n - 1» términos vencidos, y, luego, se agrega la «R» que se retiró.

$\ddot{A} = R\, a_{\overline{n-1}\rceil i} + R$, de donde

$$\boxed{\ddot{A} = R\,(a_{\overline{n-1}\rceil i} + 1)}$$

b) Renta perpetua

Existe otra explicación conceptual en la fórmula del valor actual de renta perpetua de pago vencido:

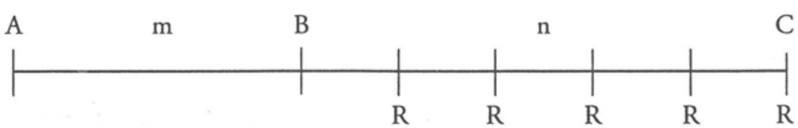
$$A\infty = R \,/\, i$$

En esta fórmula, cada «R» no es otra cosa que el interés permanente de un capital colocado a la tasa «i», es decir, «I = C i». Si consideramos «C» al valor actual, en este caso la inversión o precio al contado, despejamos «C» y tenemos:

$$C = \frac{I}{i} \quad \longrightarrow \quad \boxed{A\infty = \frac{R}{i}}$$

c) Renta temporal diferida

Hay otra forma de expresar el valor actual de una renta temporal diferida de pago vencido.



Se ha demostrado que el valor actual en el punto B se actualiza por «m» períodos:

$$A = R\, a_{\overline{n}\rceil i}\, (1+i)^{-m}$$

Si trasladamos el factor «$(1+i)^{-m}$», es decir, «v^n» al primer miembro, resulta:

$$\boxed{A\,(1+i)^{m} = R\, a_{\overline{n}\rceil i}}$$

Lo anterior significa que el préstamo (A) recibido sigue ganando intereses por un tiempo «m»; así se convierte en un valor actual de renta temporal inmediata de pago vencido.

2. RESUMEN DE FACTORES FINANCIEROS Y SUS FUNCIONES

Hay cuatro factores principales que comúnmente se usan en operaciones financieras, dos de capitalización y dos de actualización:

a) Factores financieros de capitalización

1) De interés compuesto: $(1 + i)^n = r^n$

La función de este factor queda explicado en el capítulo II, apartado 5.

Ejemplo:

¿Cuánto representa al final de 5 años un capital presente de \$ 20.000 que gana el 9,5% anual?

$$M = 20.000\ (1{,}095)^5 = \$\ 31.484{,}77$$

2) De renta: $S_{\overline{n}|i} = [(1+i)^n - 1] / i$

Tiene la misión de trasladar varios capitales iguales hacia el futuro, hasta el momento en el que se encuentra el último capital (o cuota constante «R»), agregando sus intereses a todos sus capitales, menos al último.

Ejemplo:

Si se depositan \$ 1.000 cada fin de mes, ganando intereses del $^1/_2$% mensual, ¿con qué capital podemos contar a los 5 años?

$$S = 1.000\ [\ (1{,}005)^{60} - 1]\ /\ (0{,}005) = \$\ 69.770$$

b) Factores financieros de actualización

1) De interés compuesto o de descuento: $(1+i)^{-n} = v^n$

La función de este factor está también explicado en el capítulo II, apartado 5.

2) De renta: $a_{\overline{n}|i} = [1 - (1+i)^{-n}] / i$

Cumple la función de retroceder en el tiempo «n» cuotas periódicas constantes hacia un momento presente situado un período antes de la primera cuota, quitándoles sus intereses a todas las cuotas.

Ejemplo:

Por un préstamo recibido, un señor tiene que pagar 30 cuotas semestrales de \$ 15.000 cada una, incluido el interés del 5% semestral. Calcular el préstamo recibido o valor actual de la renta.

$$A = 15.000\ [1 - (1{,}05)^{-30}]\ /\ 0{,}05 = \$\ 230.587$$

NOTA: en las fórmulas de rentas hay algunos casos interesantes como los siguientes:

1. El factor del valor actual capitalizado da el factor del monto:

$$a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n = S_{\overline{n}|i}$$

2. El factor del monto actualizado da el factor del valor actual:

$$S_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{-n} = a_{\overline{n}|i}$$

3. Los factores inversos o recíprocos se pueden escribir:

$$\boxed{\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}} \qquad \left(a_{\overline{n}|i}^{-1} = S_{\overline{n}|i}^{-1} + i \right)$$

3. DETERMINACIÓN DE LA CUOTA CONSTANTE DE LA RENTA

Resulta de despejar el elemento R de las fórmulas de rentas:

a) En monto:

$$S = R\, S_{\overline{n}|i}$$

$$R = S\ /\ S_{\overline{n}|i} = S\ [1\ /\ S_{\overline{n}|i}]\ (*)$$

(*) El factor que acompaña a «S» es el importe del pago periódico de una renta vencida cuyo monto es 1.

b) En valor actual:

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

$$R = A / a_{\overline{n}|i} = A\,[1 / a_{\overline{n}|i}] = A\,[S_{\overline{n}|i}{}^{-1} + i]\ (*)$$

(*) El factor que acompaña a «R» es el pago periódico (o amortización o cuota con intereses) de una renta cuyo valor actual (o préstamo) es 1.

Ejemplo 1:

Hallar la cuota de ahorro que debe depositarse cada fin de mes para formar un monto de $ 30.000 en 2 años si se quiere ganar el 9% de interés nominal capitalizable mensualmente.

$$R = 30.000\ \left([\ (1{,}0075)^{24} - 1\ ] / 0{,}0075\right)^{-1} = \$\ 1145{,}54$$

Ejemplo 2:

Se recibe un préstamo de $ 200.000 al interés del 3,5% trimestral. Calcular la cuota trimestral de amortización pagadera durante 5 años.

$$R = 200.000\ [\ a_{\overline{20}|0,035}\ ]^{-1} = \$\ 14.072{,}22$$

NOTA: en las diferentes fórmulas vistas en el capítulo anterior y según los enunciados en los problemas, pueden presentarse diversos casos en que el objeto sea encontrar el valor de la cuota periódica R, y eso dependerá de cada caso específico. También puede haber problemas con combinaciones de cuotas por etapas. Todo depende de asegurarse de hacer un planteamiento correcto, de ser posible con apoyo de un gráfico.

Ejemplo:

En un plazo de 4 años se desea contar con un capital de $ 100.000, para lo cual se ha previsto efectuar los siguientes depósitos de ahorro en un banco que paga el 8% de interés nominal capitalizable semestralmente:

a) hoy, $ 5.000
b) durante los 2 primeros años, cuotas mensuales constantes; y
c) durante los 2 últimos años, cuotas trimestrales equivalentes cada una a 4 mensualidades de la etapa anterior.

Calcular el importe de las cuotas y el total de intereses ganados en los 4 años.

$i = (1{,}04)^{1/6} - 1 = 0{,}006558\text{m}$ $\qquad$ $i = (1{,}04)^{1/2} - 1 = 0{,}0198\ \text{T}$

m = 24m $\qquad$ n = 8 trim

5.000 $\qquad$ R = ?m $\qquad$ R = 4R trim $\qquad$ 10^5

$$100.000 = 5.000\ (1{,}04)^{16} + R\ S_{24\rceil 0{,}006558}\ (1{,}04)^{8} + 4R\ S_{8\rceil 0{,}0198}$$

$$R = 1.299{,}36 \ ; \ 4R = 5.197{,}44$$

$$I = 100.000 - 5.000 - 24\ R - 8\ (4R) = 22.235{,}84$$

4. CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS EN RENTAS

En los factores de capitalización y de actualización de rentas, la incógnita «i» se encuentra en el numerador y en el denominador, por lo cual será necesario conocer los métodos o procedimientos de cálculo, que pueden ser los siguientes:

a) Cálculo directo usando una calculadora financiera

Se ingresa cada uno de los datos o elementos que intervienen en la fórmula general respectiva y, luego, se obtiene el resultado o tasa de interés que se busca, presionando la tecla de cálculo «COMP i %».

- Monto o valor actual «FV» o «PV», respectivamente
- Cuota periódica «PMT»
- Tiempo «n» (número de cuotas)
- Tasa de interés «COMP i %»

b) Interpolación de valores usando tablas financieras

Ejemplo:

¿Cuál es la tasa de interés mensual que permite acumular $ 32.000 si se depositan cada fin de mes $ 2.000 durante 1 año y 2 meses?

$$2.000\ S_{14\rceil i} = 32.000$$

El valor numérico de $S_{14\rceil i} = 32.000 / 2.000 = 16$ se busca en la línea «n = 14» de la tabla respectiva y se observa que está entre dos valores de tasas:

$$\begin{array}{rlll} & 0{,}02 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & 15{,}973 & \\ x \longleftarrow & 0{,}02 + x \ \ldots\ldots\ldots\ldots & 16{,}000 \longrightarrow & 0{,}027 \\ 0{,}005 \longleftarrow & 0{,}025 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & 16{,}518 \longrightarrow & 0{,}545 \end{array}$$

0,545 = diferencia de valores de tablas, correspondiente a una diferencia de tasas de 0,005

0,027 = diferencia entre el menor valor de tablas y el que nosotros queremos calcular, correspondiente a una diferencia de tasa = x

Luego: 0,545 0,005
0,027 x

x = (0,027) (0,005) / 0,545 = 0,00024

Por tanto, la tasa de interés buscada es:

i = 0,02 + 0,00024 = 0,02024 = 2,024% mensual

c) Cálculo por fórmula de interpolación lineal

Se basa en el mismo razonamiento del método anterior. Por regla de tres simple se aplica una fórmula de interpolación lineal, pero debe hacerse previamente un esquema de datos.

Ejemplo 1:

Si se desea constituir un capital de $ 85.000 depositando 8 mensualidades adelantadas de $ 10.000 cada una, ¿cuál es la tasa de interés mensual que deberá aplicarse?

Se usará la fórmula del monto con cuotas adelantadas, vista en el apartado «1.b» de este capítulo:

$$S = R\,(S_{n+1}\rceil_i - 1)$$

$$85.000 = 10.000\,(S_9\rceil_i - 1)$$

$$S_9\rceil_i = (85.000 / 10.000) + 1 = 8,5 + 1 = 9,5$$

Calculamos por tanteo o aproximación el factor 9,5 con tasas como:

Para i = 1% => Factor $S_9\rceil_i$ = 9,368`

Para i = 1,5% => Factor $S_9\rceil_i$ = 9,559

Esquema: i_1 = 1%..................=> 9,368 = A
i = ?.....................=> 9,500 = B
i_2 = 1,5%................=> 9,559 = C

i_1 = tasa menor; i_2 = tasa mayor; A, B, C = factores

Fórmula de interpolación lineal:

$$\boxed{i = i_1 + (i_2 - i_1)\left(\frac{B - A}{C - A}\right)}$$

$$i = 1\% + (1{,}5\% - 1\%)\ \frac{9{,}500 - 9{,}368}{9{,}559 - 9{,}368} = (1 + 0{,}3479)\% = 1{,}3479\%$$

Ejemplo 2:

Se recibe un préstamo de \$ 30.000 para amortizarlo en 3 años con cuotas trimestrales de \$ 2.900 cada una. Calcular la tasa de interés trimestral incluida en las cuotas.

$30.000 = 2.900\ a_{\overline{12}|i}$ ....=> $a_{\overline{12}|i} = 30.000\ /\ 2.900 = 10{,}345$ (factor)

Cálculos de aproximación:

Para i = 1% =>	Factor $a_{\overline{12}|i} = 11{,}255$	(A mayor tasa,
Para i = 2% =>	Factor $a_{\overline{12}|i} = 10{,}575$	menor factor. Está
Para i = 3% =>	Factor $a_{\overline{12}|i} = 9{,}954$	entre 2% y 3%)

Esquema:

i_1 = 2%..................=> 10,575 = A
i = ?.......................=> 10,345 = B
i_2 = 3%..................=> 9,954 = C

$$i = 0{,}02 + (0{,}03 - 0{,}01)\left(\frac{10{,}345 - 10{,}575}{9{,}954 - 10{,}575}\right)$$

$$i = 0{,}02 + 0{,}01\ (-\ 0{,}023\ /\ -\ 0{,}621) = 0{,}0237 = 2{,}37\%$$

5. NÚMERO DE CUOTAS EN PROBLEMAS DE RENTAS

a) Caso de «n» con fracciones

En todos los ejemplos y problemas de rentas vistos hasta ahora, el elemento «n» representa un número entero de cuotas que puede expresarse en años enteros, semestres también enteros o en meses enteros. No se concibe que un ahorrista, por ejemplo, desee formar un capital M en 18,38 meses, como tampoco es correcto decir que un préstamo se ha amortizado en 28,82 trimestres, aunque sea esta forma el resultado que arroja la aplicación de la fórmula.

Ejemplo:

Un señor desea formar \$ 60.000, para lo cual depositará cuotas de \$ 2.000 cada fin de trimestre, ganando el 2,5% de interés trimestral. ¿Cuántas cuotas o qué tiempo es necesario para constituir dicho monto?

$S = 60.000$
$R = 2.000$ trim
$i = 0,025$ trim
$n = ?$ trim

$$2.000\ S_{\overline{n}|0,025} = 60.000$$

$$\frac{(1,025)^n - 1}{0,025} = \frac{60.000}{2.000} = 30$$

$$(1,025)^n = 30\ (0,025) + 1 = 1,75$$

$$n = \frac{n \log (1,75)}{\log (1,025)} = 22,663 \text{ trimestres}$$

Respuesta:

Son 22 trimestres y fracción el tiempo necesario para formar el monto propuesto. Este resultado no significa lo más adecuado, pues deberá buscarse la fórma de corregir la operación para que el número de cuotas sea entero.

b) Opciones de decisión

Tomando el resultado del ejemplo anterior, hay dos principales formas de corregir o eliminar la parte fraccionaria de «n»:

1) Cambiar el valor de cada cuota con el fin de que todas ellas sean iguales. Para este caso, puede tomarse el valor entero menor o mayor del resultado de «n» por corregir.

   - Con $n = 22 \longrightarrow 60.000 = R\ S_{\overline{22}|0,025} \Rightarrow R = 2.078,80$
   - Con $n = 23 \longrightarrow 60.000 = R\ S_{\overline{23}|0,025} \Rightarrow R = 1.961,78$

En el primer caso, resulta una cuota mayor que el propuesto, porque dispone de menor tiempo, mientras que, en el segundo caso, la cuota resulta menor que $ 2.000, porque dispone de mayor tiempo.

2) Tomar el número menor de cuotas y capitalizar el resultado por el tiempo fraccionario para buscar la cuota adicional.

   - $S = 2.000\ S_{22\rceil 0,025} = 57.725,71$
   - Capitalizar este resultado por 0,663 trimestres para obtener un nuevo monto: $M = 57.725,71\ (1,025)^{0,663} = 58.678,53$
   - Este es el monto en el momento 23; luego, la diferencia 60.000 - 58.678,53 = 1.321,47 es la verdadera cuota n.° 23

Respuesta:

El ahorrista deberá depositar 22 cuotas de $ 2.000 más 1 cuota de $ 1.321,47 en el trimestre subsiguiente (o último).

6. SALDO DE UNA DEUDA PAGADERA A PLAZOS

Por definición, la deuda completa por pagar (A) es el valor actual del total de cuotas pactadas. En igual forma, habiendo ya pagado un número «k < n» en cualquier momento intermedio, el saldo de la deuda será «el valor actual de las (n - k) cuotas pendientes de pago».

Ejemplo:

Un préstamo de $ 180.000 se conviene pagar mediante cuotas bimestrales constantes reconociendo, en ellas, el 10,8% de interés nominal convertible cada 2 meses durante 8 años. Si se decide pagar el saldo al final de 6 años, ¿cuánto se debe desembolsar?

Solución:

Previamente deberá calcularse el valor de la cuota R y luego actualizar las cuotas pendientes de pago.

$A = 180.000$
$i = 0,108 / 6 = 0,018$ bim $\qquad 180.000 = R\ a_{48\rceil 0,018}$
$n = 8\ (6) = 48$ bim $\qquad R = 5.632,08$ bim
$R = ?$ bim

Cuotas pagas = 6 (6) = 36 bim = k
Cuotas por pagar = 48 - 36 = 12 (2 años)

Saldo: $D = R\, a_{\overline{n-k}|i}$

$$D = 5.632{,}08\; a_{\overline{12}|0{,}018} = 60.299{,}36$$

Nota: si deseáramos averiguar cuánto de intereses ha ahorrado el deudor por pronto pago, ello sería la suma de cuotas por pagar menos el saldo pagado al contado:

$$\boxed{I = (n - k)\, R - D} \qquad I = 12\,(5.632{,}08) - 60.299{,}36 = \$\, 7.285{,}60$$

7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Mediante cuotas constantes mensuales vencidas, un ahorrista forma un capital de \$ 45.000 en 2 años, ganando el 0,8% de interés mensual. Calcular el total de intereses ganados en la operación.

$$45.000 = R\, S_{\overline{24}|0.008} \Rightarrow R = 1.708{,}22$$

$$I = S - n\,R \Rightarrow 45.000 - 24\,(1.708{,}22) = 4.002{,}62$$

2. Una deuda será cancelada de la siguiente manera: con \$ 5.000 después de 3 años y, luego, con 24 pagos trimestrales de \$ 1.000 cada uno a partir de 4 años más tarde. Si estos pagos incluyen el 6% nominal de interés capitalizable trimestralmente, ¿cuál es el importe de la deuda?

$$A = 5.000\,(1{,}015)^{-12} + 1.000\; a_{\overline{24}|0{,}015}\,(1{,}015)^{-27} = 217.926{,}40$$

3. ¿Cuánto debe invertirse hoy para disfrutar de \$ 5.000 mensuales durante 15 años si la primera mensualidad por ese monto se obtiene a los 6 años y si el dinero gana el 6% anual capitalizable mensualmente?

$$A = 5.000\; a_{\overline{180}|0{,}005}\,(1{,}005)^{-71} = \$\, 415.825$$

4. Se prestan \$ 1.000 para ser devueltos en 12 pagos mensuales de \$ 100 cada uno. Hallar la tasa efectiva y nominal de intereses cargados en las cuotas.

$$1.000 = 100\; a_{\overline{12}|i} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow i = 2{,}92\%\ m\ ;\ 12\,i = 35{,}04\%$$

5. El valor actual de una renta de \$ 20.000 anuales durante 10 años representa, al final del mismo lapso, \$ 250.000. Calcular la tasa de interés anual.

$250.000 = 20.000\ S_{\overline{10|}i}$ .... => $i = 4{,}86\%$ anual

6. Un señor deposita \$ 15.000 cada fin de trimestre durante 6 años y gana el 7,8% de interés nominal capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el capital disponible al final de la operación y cuánto de intereses habrá ganado solamente en el bienio intermedio?

a) $S = 15.000\ S_{\overline{24|}0{,}0195}$

b) $I = R\ S_{\overline{16|}0{,}0195} - R\ S_{\overline{8|}0{,}0195} - 8\ R$

o también: $I = I_{16} - I_8 = (R\ S_{\overline{16|}i} - 16\ R) - (R\ S_{\overline{8|}i} - 8\ R)$

7. Se compra un terreno a plazos cuyo precio al contado es \$ 120.000. Se entregó el 25% como cuota inicial y, por el saldo, se convino en pagar 20 cuotas trimestrales incluidas del 8% de interés nominal capitalizable trimestralmente. Al cabo de 3 años, se dispone de dinero en efectivo y se desea cancelar toda la deuda pendiente.

$0{,}75\ (120.000) = R\ a_{\overline{20|}0{,}02}$

$D = R\ a_{\overline{20-12|}0{,}02}$

8. Al interés del 9% nominal capitalizable mensualmente, se contrae un préstamo de \$ 100.000 pagadero con cuotas trimestrales constantes durante 6 años. Calcular la cuota trimestral y el total de intereses pagados en la operación.

$100.000 = R\ a_{\overline{24|}0{,}02267}$

$I = 24\ R - 100.000$

9. Al final de 3 años, se desea contar con un capital de \$ 120.000, para lo cual hoy se deposita \$ 10.000 al interés del 7,5% nominal capitalizable mensualmente. Luego, durante los 2 primeros años, se depositarán cuotas mensuales constantes con el mismo propósito. Calcular los intereses ganados solamente en el tercer año.

$$10.000\,[1 + (0{,}075 / 12)]^{36} + R\, S_{\overline{24}|i}\,(1 + i)^{12} = 120.000$$

$$I = 120.000 - 10.000\,(1 + i)^{24} - R\, S_{\overline{24}|i}$$

10. Se depositan cuotas trimestrales adelantadas de \$ 700 cada una durante 6 años. Ganando el 3% de interés trimestral, ¿cuánto tiempo más habrá que esperar para retirar \$ 35.000?

$$700\, S_{\overline{24}|0{,}03}\,(1{,}03)\,(1{,}03)^{n} = 35.000$$

Respuesta: $n = 11{,}625$ trimestres = 33 trim. + 56 d.

CAPÍTULO VII
Rentas de términos variables

Este es un tema de evidente claridad, consistente en que se trata de formar un capital futuro o pagar una deuda mediante —en ambos casos— cuotas periódicas variables, contrariamente a lo que se ha visto en los dos capítulos anteriores, de rentas periódicas de cuotas constantes o uniformes.

Por ejemplo, si se deposita desde hoy 4 cuotas trimestrales de $ 4.000, $ 2.000, $ 8.000 y $ 5.000, respectivamente, en un banco que paga el 2% de interés trimestral, ¿cuánto podemos retirar al cabo de 2 años?

Para solucionar este problema, solo cabe capitalizar cada depósito por el tiempo que se mantiene colocado; de esta forma, se obtienen 4 montos individuales, cuya suma será la respuesta buscada. Así:

$$4.000\ (1{,}02)^{8} + 2.000\ (1{,}02)^{7} + 8.000\ (1{,}02)^{6} + 5.000\ (1{,}02)^{5} = \$\ 21.513{,}71$$

En igual forma, si conocemos las cuotas periódicas variables para pagar con intereses un objeto cuyo precio al contado se desea saber, habrá que actualizar cada cuota a la tasa de interés pactada y sumar los valores actuales individuales. Por ejemplo, por la compra de un objeto, se sabe que deberán entregarse cuotas semestrales tales como $ 15.000, $ 8,000 y $ 10.000, con intereses incluidos del 1,5% mensual. El precio neto al contado será:

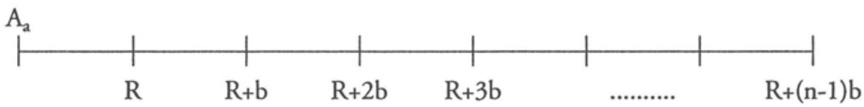
$$X = 15.000\ (1{,}015)^{-6} + 8.000\ (1{,}015)^{-12} + 10.000\ (1{,}015)^{-18} = \$\ 28.058{,}35$$

Pero ese no es el objeto del contenido de este capítulo, sino aquellas rentas cuyas cuotas varían según series de formación, como las progresiones vistas en el capítulo I, apartado 2.

1. MONTO Y VALOR ACTUAL DE RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

a) Valor actual

Para determinar la fórmula del valor actual de una renta temporal inmediata de pago vencido, se presenta el siguiente gráfico:



R = La primera cuota

b = Razón de la progresión aritmética o la diferencia entre un término cualquiera y el anterior

n = Número de cuotas, expresadas en unidades de tiempo

Se actualiza cada cuota hasta el origen del gráfico, cuya suma será el valor actual de la renta.

$$A_a = R\,v + (R + b)\,v^2 + (R + 2b)\,v^3 + (R + 3b)\,v^4 + \ldots\ldots + [\,R + (n-1)\,b\,]\,v^n$$

Resolviendo y simplificando la igualdad, se obtiene la fórmula:

$$\boxed{A_a = a_{\overline{n}|i}\left(R + \frac{b}{i} + nb\right) - \frac{nb}{i}}$$

NOTA: no olvidar que todos los elementos o datos deben estar uniformizados en su denominación igual a la frecuencia de las cuotas.

Ejemplo:

Se obtiene un préstamo para devolverlo en 2 años, al interés del 1% mensual, mediante cuotas mensuales crecientes en un 8% de la primera. Si esta primera mensualidad es \$ 200, determinar el préstamo recibido, el importe de la décima cuota y el total de intereses pagados en la operación.

R = 200m

b = 0,08 (200) = 16 m $\qquad A_a = a_{\overline{24}|0,01}\,[200 + 16/0{,}01 + 24(16)] - 24(16)\,/\,0{,}01$

$n = 24$ m	$A_a = \$\ 7.995,56$
$i = 0,01$ m	
$A_a = ?$	$R_{10} + (10\text{-}1)\ b = 200 + 9(16) = 344$
$R_{10} = ?$	$I = n / 2\ [\ 2R + (n - 1)\ b\ ] - A_a$
$I = ?$	$I = 12\ [\ 2\ (200) + 23\ (16)\ ] - 7.995,56 = 1.220,44$

b) Monto

Para hallar la fórmula del monto, se aplicará el principio de «valor actual capitalizado igual a monto», es decir, multiplicando por $(1+i)^n$.

$$\boxed{S_a = S_{\overline{n}|i}\,(R + \frac{b}{i} + nb) - \frac{nb}{i}\,(1 + i)^n}$$

Ejemplo:

¿Qué cantidad de dinero se puede formar en 3 años si se deposita cada fin de bimestre cuotas tales como \$ 500, \$ 600, \$ 700 .... etc., ganado el 9% nominal capitalizable 6 veces al año.

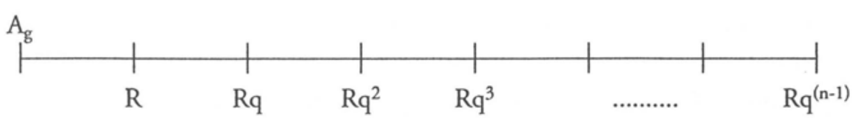
$S_a = ?$	
$R = 500$ bim; $b=100$	$S_a = S_{\overline{18}|0,015}\ [500 + 100/0,015 + 100(18)] -$
$n = 3\ (6) = 18$ bim	$[100\ (18) / 0,015]\ (1,015)^{18}$
$i = 0,09 / 6 = 0,015$ bim	$S_a = \$\ 26.840,53$

Nota: si se trata de rentas (monto o valor actual) con cuotas anticipadas, tal como se explicó en el caso de cuotas constantes vencidas, bastará multiplicar el segundo miembro de la fórmula por $(1+i)$.

2. MONTO Y VALOR ACTUAL DE RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

a) Valor actual

Con los símbolos conocidos y descritos en el capítulo I, apartado 2, se presenta el siguiente gráfico:



Se actualiza cada cuota variable por el tiempo «k» que dista desde el origen, cuya suma será el valor actual de la renta.

$$A_g = R\,v + Rq\,v^2 + Rq^2\,v^3 + Rq^3\,v^4 + \dots\dots\dots + Rq^{\,n-1}\,v^n$$

Desarrollando, resulta la fórmula del valor actual de la renta temporal inmediata de pagos vencidos que varían en progresión geométrica de razón «q».

$$\boxed{A_g = R\,v^n \left(\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right)} \qquad ====> \qquad q = R_2 / R$$

Ejemplo:

¿Cuál es el precio al contado de un objeto que se compra a plazos, mediante cuotas mensuales que crecen cada vez en un 5% de la inmediata anterior, siendo la primera \$ 500, durante $3^1/_2$ años, si se reconoce un interés mensual del 1,2%?

$A_g = ?$
$R = 500$ m
$R_2 = 525$
$q = 525 / 500 = 1{,}05$
$n = 3{,}5\ (12) = 42$ m
$i = 0{,}012$ m

$$A_g = 500\ (1{,}012)^{-42} \left(\frac{(1{,}05)^{42} - (1{,}012)^{42}}{1{,}05 - 1{,}012} \right)$$

$$A_g = \$\ 48.722{,}84$$

b) Monto

Se obtiene mediante capitalización de la fórmula del valor actual multiplicándola por $(1+i)^{\,n}$.

$$\boxed{S_g = R\ \frac{q^n - (1 + i)^n}{q - (1 + i)}}$$

Ejemplo:

Un ahorrista deposita cuotas mensuales vencidas, comenzando por \$ 1.000, crecientes en un 10% de la inmediata anterior. ¿Cuánto podrá retirar al final de año y medio, ganando el 6% de interés nominal capitalizable mensualmente?

$R = 1.000$ m
$q = 1.100 / 1.000 = 1,10$
$n = 18$ m
$i = 0,06 / 12 = 0,005$ m

$$S_g = 1.000 \left(\frac{(1,10)^{18} - (1,005)^{18}}{1,10 - 1,005} \right)$$

$$S_g = \$\ 47.010,40$$

NOTA: tratándose de cuotas adelantadas, como queda ya explicado anteriormente, se multiplica cualquiera de las fórmulas de cuotas vencidas por (1+i).

3. CÁLCULO DE CUALQUIER CUOTA DE RENTAS VARIABLES

De un total de «n» cuotas, para calcular cualquiera de orden «k < n», se aplicarán las fórmulas conocidas:

a) En progresión aritmética: $R_k = R + (k - 1)\, b$
b) En progresión geométrica: $R_k = Rq^{k-1}$

Ejemplo 1:

En la amortización de un préstamo se entregan cuotas trimestrales, tales como \$ 1.000, \$ 1.050, \$ 1.100, etc., durante 4 años, al interés del 2 $^1/_2$% trimestral. Calcular el préstamo recibido y las cuotas de orden 8 y 9.

$$A_a = a_{\overline{16}|0,025}\,(1.000 + 50 / 0,025 + 16x50) - 16x50 / 0,025 = \$\ 17.609$$

$$R_8 = 1.000 + (8-1)\,(50) = 1.350$$
$$R_9 = 1.000 + (9-1)\,(50) = 1.400$$

Ejemplo 2:

Si en el ejemplo anterior las cuotas trimestrales fueran crecientes en un 5% de la inmediata anterior, ¿cuál es el préstamo recibido y cuáles serían las cuotas de orden 8 y 9? (En primer lugar, se reconoce que las cuotas son en progresión geométrica)

$$A_a = 1.000\,(1,03)^{-16} \left(\frac{(1,05)^{16} - (1,03)^{16}}{1,05 - 1,03} \right) = \$\ 18.014,76$$

$$R_8 = Rq^7 = 1.000\,(1,05)^7 = 1.407,10$$
$$R_9 = Rq^8 = 1.000\,(1,05)^8 = 1.477,45$$

4. SALDO DE UN PRÉSTAMO QUE SE AMORTIZA CON CUOTAS VARIABLES

a) Definición

Se denomina «saldo» o «deuda residual» a una porción del préstamo pendiente de pago en un momento intermedio «k» del total de cuotas (n pactadas) para la cancelación de dicho préstamo.

En el apartado 6 del capítulo anterior se ha visto que el saldo de una deuda, en las condiciones del párrafo anterior, no es más que el valor actual de las (n – k) cuotas por pagar. De igual forma, tratándose de préstamos pagaderos con cuotas variables, sean en progresión aritmética o geométrica, la definición es válida.

b) Saldo de cuotas en progresión aritmética

Por ejemplo, si existe un préstamo que se paga en 24 cuotas mensuales crecientes cada vez en \$ 100, comenzando por \$ 500, al interés del 1% mensual, se desea saber cuál es el préstamo recibido y cuál es el saldo después de un año y seis meses transcurridos.

En año y medio hemos pagado 18 cuotas mensuales (k = 18) y falta pagar 6 mensualidades (n - k = 6). Entonces, el saldo en este momento será el valor actual de las 6 cuotas pendientes si comenzamos por la cuota de orden «k + 1 = 19». Se halla previamente la cuota de orden «k+1» aplicando la fórmula correspondiente.

$$R_k = R + (k-1)\, b$$

$$R_{19} = R + (19 - 1)\, 100 = 500 + 18\, (100)$$

En general: «$R_{k+1} = R + k\, b$» es la primera cuota pendiente de pago.

Entonces, en el momento k, el número de cuotas por pagar es (n - k) y, siendo (R + kb) la primera por pagar, la fórmula del saldo será:

$$\boxed{D_k = a_{\overline{n-k}|i} \left[R + k\, b + b / i + (n - k)\, b\right] - (n - k)\, b / i}$$

A_a = (Préstamo)

$R = 500$ $\qquad A_a = a_{\overline{24}|0,01}\, (500 + 100/0,01 + 100x24) - 100x24 / 0,01$

$b = 100$

$i = 0,01$ $\qquad A_a = \$\, 34.039,70$ (préstamo recibido)

$n = 24$

k = 18 $\qquad D_{18} = a_{\overline{6}|0,01}\,(500 + 18 \times 100 + 100 / 0,01 + 6 \times 100) - 6 \times 100 / 0,01$

n - k = 6

D_{18} = (Saldo) $\quad D_{18} = 14.761,65$

c) Saldo de cuotas en progresión geométrica:

De «n» cuotas totales, en el momento «k», faltan (n - k) cuotas por pagar. Según lo visto en el caso anterior, la primera cuota por pagar será R_{k+1} (R_{19}) si se toma el ejemplo numérico del mismo capítulo anterior. Si aplicamos la fórmula de cualquier cuota en una progresión geométrica «$R_m = R\, q^{m-1}$», entonces: «$R_{19} = R\, q^{18}$» . En general, «$R_{k+1} = Rq^k$» es la primera cuota pendiente de pago. En estas condiciones, la fórmula del saldo en el momento «k < n» será:

$$\boxed{D_k = (R\, q^k)\, v^{n-k} \left(\frac{q^{n-k} - (1+i)^{n-k}}{q - (1+i)} \right)}$$

Ejemplo:

Se recibe un préstamo de \$ 30.000, que se amortiza con cuotas trimestrales que, comenzando por \$ 1.000, serán crecientes en un 8% de la inmediata anterior, durante 4 años al interés del 2,5% trimestral. Calcular el préstamo recibido y la proporción del saldo por pagar al final de 3 años.

A_g = préstamo $\qquad A_g = 1.000\,(1,025)^{-16} \left(\dfrac{(1,08)^{16} - (1,025)^{16}}{1,08 - 1,025} \right) = 23.778,19$

R = 1.000

n = 16 trim

i = 0,025 trim $\qquad D_{12} = 1.000\,(1,08)^{12}\,(1,025)^{-4} \left(\dfrac{(1,08)^4 - (1,025)^4}{1,08 - 1,025} \right)$

k = 12 trim

q = 1,08 $\qquad D_{12} = 4.566,16$

D_{12} = saldo

n - k = 4 trim $\qquad \Rightarrow \dfrac{4.566,16}{23.778,19}\,(100) = 19,2\%$ por pagar

$(D_{12} / A_g)\,100 = ?$

5. VARIACIÓN PORCENTUAL EN PROGRESIONES

En el enunciado de algunos problemas aparecen casos cuya fraseología indica la variabilidad de las cuotas periódicas, por lo que es necesario distinguir si se trata de progresiones aritméticas o geométricas.

a) Primer caso

Ejemplo:

Cuando se dice que «las cuotas crecen en un 10% **de la primera**», se entenderá que son de progresión aritmética. Por ejemplo:

> Hallar el monto de n cuotas trimestrales vencidas que «crecen en un 5% de la primera». Se trata de que la razón es constante, es decir, la serie de cuotas es 100, 105, 110, 115, etc. (la razón es b = 0,05 R). Si en este mismo caso, se dice que las cuotas son decrecientes en un 10% de **la primera**, la serie será R; 0,9R; 0,8R; 0,7R; etc; y la razón b= - 0,10R.

b) Segundo caso

Ejemplo:

Cuando el enunciado expresa que las cuotas «crecen en un 10% de la **inmediata anterior**», la serie será 100; 110; 121; etc., es decir, la razón será q = 110 / 100 = 1,1 (en este caso la progresión es geométrica).

También puede presentarse el caso de que «las cuotas decrecen en un 8% de la **inmediata anterior**». La serie será 100; 92; 84,64; etc., en la que q = 92 / 100 = 0,92; q = 84,64 / 92 = 0,92.

Problema 1:

Un préstamo de $ 100.000 se amortiza en 4 años con cuotas mensuales al 1% de interés mensual, siendo las cuotas de los 2 primeros años constantes, mientras que las del plazo restante serán crecientes en un 5% de la inmediata anterior. Hallar las cuotas de orden 1, 24, 25 y 38.

Al hacer el listado de datos se comprobarán varios aspectos:

- las cuotas 1 y 24 son constantes (R);
- la segunda etapa es una progresión geométrica, porque las cuotas son crecientes en un 5% de la inmediata anterior, es decir, q = 105 / 100 = 1,05;
- la cuota n.° 25 (primera de la segunda etapa) ya estará crecida con respecto a la inmediata anterior, es decir, $R_{25} = R\,(1{,}05)$; y
- el valor actual de la segunda etapa será diferida del valor actual de la primera.

$$10^5 = R\, a_{\overline{24|}0{,}01} + 1{,}05\, R\,(1{,}01)^{-24}\left[\frac{(1{,}05)^{24} - (1{,}01)^{24}}{1{,}05 - 1{,}01}\right](1{,}01)^{-24}$$

$R = 1.883,24$ = cuotas de orden 1 y 24

$R_{25} = 1,05R = 1.978,13$ = cuota de orden 25

Para la tercera pregunta R_{38}, la fórmula es: «$R_k = R\, q^{k-1}$», en la que «$k = 40 - 24 = 14 \Rightarrow R_{38} = Rqq^{14-1} = Rq^{14}$».

$R_{38} = R_{25}\,(1,05)^{14} = 1.978,13\,(1,05)^{14} = 3.916,57$

Problema 2:

Hallar el precio al contado de un objeto que se compra a plazos con cuotas trimestrales que crecen cada vez en un 10% de la primera, reconociendo un interés del 1% mensual efectivo durante 3 años y siendo la primera cuota 600. Calcular luego el total de intereses pagados en la operación.

$A_a = ?$
$R = 600$ trim — $I = \sum$ de cuotas $- A_a$
$b = 60$ trim
$n = 12$ trim — $I = n / 2\,[\,2R + (n-1)\,b\,] - A_a$
$i = (1,01)^3 - 1 = 0,030301$ trim

$A_a = a_{\overline{12}|0,030301}\,(600 + 60/0,030301 + 12x60) - 12x60 / 0,030301 = 9.029$

$I = 12 / 2\,[2(600) + 11(60)] - 9.029 = \$\,2.131$

6. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el monto que se puede constituir en 5 años si se depositan cuotas cada fin de trimestre crecientes en un 6% de la inmediata anterior, si se comienza por $ 300 durante 3 años solamente, ganando el 8% de interés nominal capitalizable cada 3 meses. ($ 6.537,46)

2. Se compra un objeto que al contado cuesta $ 36.500 mediante 18 cuotas mensuales adelantadas comenzando a los 6 meses de la compra. Si se reconoce un interés del 1,5% mensual y si las mensualidades son crecientes en un 10% de la primera, hallar el importe de la primera y última cuota. ($ 1.386,15; $ 3.742,61)

3. Un préstamo de $ 60.000 se paga en 2 años al interés de 5% trimestral. En el primer año, las cuotas serán mensuales crecientes en un 8% de la primera, mientras que, en el segundo año, las cuotas trimestrales también serán crecientes pero en 2% de la inmediata anterior. Calcular:

a) La primera y última cuota del primer año ($ 2.835,46 y $ 5.330,66)
b) La primera cuota del segundo año ($ 5.437,27)
c) El total de intereses pagados en los 2 años ($ 70.419,78)
d) El saldo de la deuda medio año antes del término del plazo de amortización. ($ 11.823,62)

4. Un ahorrista desea formar un capital de un millón en 4 años, para lo cual deposita hoy $ 50.000 en un banco que paga el 1,5% de interés mensual y luego cuotas mensuales crecientes cada vez en un 8% de la inmediata anterior durante los dos primeros años, mientras que, en el plazo restante, serán constantes e iguales cada una a 3 veces la primera de la etapa anterior. Calcular las cuotas de orden 1, 20 y 36; y el total de intereses ganados en la operación. (R = 4.629,88; R_{20} = 19.981,18; R_{36} = 13.889,64; I = 307.535,68)

5. Calcular el importe neto de una deuda que es pagadera durante 5 años de la siguiente manera: durante los 3 primeros años, se amortiza con entregas trimestrales que, comenzando de $ 1.000, crece en progresión aritmética de razón 500. En el plazo restante, se paga $ 4.000 mensuales. Tasa: 2% capitalizable trimestralmente. ($ 295.247,84)

6. Se compra una casa a plazos, cuyo precio al contado es $ 800.000, entregando el 25% de su valor como cuota inicial. El saldo será cancelado con cuotas mensuales, incluyendo el 12,6825% efectivo anual de interés durante 15 años. Hallar el importe de la cuota mensual constante. ($ 7201)

7. Una deuda de $ 200.000 se amortizará con cuotas anuales crecientes en $ 1.000 cada año, comenzando de $ 5.000 durante 10 años, con un interés del 4% anual. Como estos pagos son insuficientes, calcular la cuota constante semestral que se necesita para cancelar la deuda en los siguientes 5 años, al interés del 2,5% semestral. ($ 23.508,91)

8. Durante $10^{1}/_{2}$ años se han depositado $ 400 mensuales vencidos y al 5% convertible trimestralmente. ¿Qué monto se dispondrá después de 4 años y 6 meses más tarde del último depósito? ($ 82.575,65)

9. Un préstamo de $ 400.000 más sus intereses del 5% anual se pagará al cabo de 15 años. Para cumplir con esta obligación, se efectuarán depósitos semestrales que ganarán el 6% efectivo anual. Hallar el importe de cada depósito. ($ 17.603,10)

10. Para acumular $ 100.000 a la tasa del 6% nominal capitalizable cada 4 meses, ¿cuántos depósitos mensuales de $ 500 cada fin de mes se tendrá que efectuar? (139)

CAPÍTULO VIII

Casos especiales en la teoría de rentas

1. RENTAS FRACCIONADAS

Se llaman así a las rentas periódicas o cuotas constantes cuya periodicidad difiere de la periodicidad de la tasa de interés y del tiempo en la serie de pagos o cobros.

Hemos establecido claramente, tanto en el capítulo V, apartado «1.c», como en otros ejemplos, que, en problemas de rentas de cualquier clase, los datos «R» (cuota), «i» (tasa de interés) y «n» (número de cuotas o tiempo) tienen que estar uniformados en su denominación a la de la frecuencia de la cuota «R»; es decir, si «R» es mensual, «i» será mensual y «n» será número entero de meses.

Cuando en determinado problema los 3 datos indicados tienen diferente frecuencia, se dice que son «rentas fraccionadas». Se soluciona expresando los elementos tasa (i) y tiempo (n) en la misma frecuencia de la cuota «R». Para ello, se busca la tasa equivalente y el elemento tiempo (n) se convierte por simple multiplicación.

Ejemplo 1:

En un banco que paga el 4,5% de interés **semestral**, se depositan cuotas de ahorro cada fin de **mes** de \$ 300 y se desea saber cuánto se podrá retirar al cabo de 4 **años**.

$R = 300$ mensuales

$n = 4 \times 12 = 48$ meses

$i = (1{,}045)^{1/6} - 1 = 0{,}007363$ mensual

$$S = R\, S_{\overline{n}|i} = 300 \left(\frac{(1{,}007363)^{48} - 1}{0{,}007363} \right)$$

$$S = \$\ 17.197{,}89$$

Ejemplo 2:

Un inmueble cuesta al contado \$ 400.000. Comprándolo a plazos, se entrega el 15% al contado y por el saldo se conviene pagar cuotas trimestrales, incluido el 9% efectivo anual durante 10 años. Calcular la cuota trimestral y el total de intereses por pagar.

R = ? trimestral
n = 10 x 4 = 40 trimestres
i = $(1{,}09)^{1/4} - 1 = 2{,}1778\%$ trimestral
A = 0,85 (400.000) = \$ 340.000

$$340.000 = R\, a_{\overline{40}|0,021778}$$

$$= R\left(\frac{1 - (1{,}021778)^{-40}}{0{,}021778}\right)$$

$$R = \$\ 12.819{,}81 \Rightarrow I = 40\,R - 340.000 = \$\ 172.792{,}25$$

2. Fórmulas notables de equivalencia

1) $a_{\overline{n}|i}\ (1 + i)^{n} = S_{\overline{n}|i}$

2) $S_{\overline{n}|i}\ v^{n} = a_{\overline{n}|i}$

3) $a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\ (1 + i)$

4) $a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$

5) $S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n}|i}\ (1 + i)$

6) $S_{\overline{n}|i} = S_{=\overline{n+1}|i} - 1$

7) $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \dfrac{1}{S_{\overline{n}|i}}$

8) $a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+1}|i} - 1$

9) $S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n-1}|i} + 1$

3. Constitución de capitales

Constituir un capital significa la formación de una cantidad monetaria determinada mediante depósitos periódicos. Siendo ese el objetivo, la operación se asimila a la teoría de las rentas con la aplicación de las diferentes fórmulas del monto. Este monto es de magnitud predeterminada y se identifica con la cantidad de capital que se desea formar. Por otro lado, deberá establecerse el número de cuotas, o plazo de la operación, y la tasa de interés por recibir.

En estas condiciones, en toda operación de esta índole y con los datos conocidos, se tratará de hallar el importe de la cuota periódica, llamado «término de constitución del capital», que designaremos por «T». Siendo «K» el capital por formarse para «n» cuotas vencidas, la fórmula general es igual a la del monto de una renta temporal:

$$\boxed{K = T\, S_{\overline{n}|i}}$$

De donde, despejando el término de constitución, tenemos:

$$T = K \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} \qquad \text{(para cuotas vencidas)}$$

Si los depósitos se efectúan al comienzo de cada período, las fórmulas son:

$$K = T\, S_{\overline{n}|i}\ (1+i) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ T = K\, v \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$$

Ejemplo:

Si una persona desea formar un capital de \$ 100.000 al cabo de 5 años, ¿cuánto podrá depositar cada fin de trimestre ganando 1,5% trimestral?

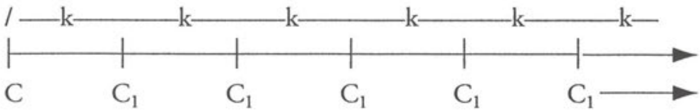
$$T = K \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = 100.000 \frac{1}{S_{\overline{40}|0{,}015}} = 4.324{,}57$$

4. COSTO CAPITALIZADO

La operación denominada «costo capitalizado» es la constitución de capitales cuyo monto se requiere periódicamente con fines de renovación de determinados bienes como, por ejemplo, puentes, muelles, pavimento, etc., en vista de que es necesario efectuar dichos desembolsos de magnitud generalmente apreciables cada cierto tiempo, de acuerdo con las exigencias que supone tal renovación.

Supongamos que un determinado bien, como los descritos anteriormente, tenga que ser construido a un costo inicial «C» y que, para mantener en forma indefinida dicho bien, debemos renovarlo cada k años a un costo «C_1».

El esquema del caso propuesto sería:



Con el objeto de evitar desembolsos fuertes y extraordinarios, debe disponerse en el momento inicial de la operación de un capital de tal magnitud que permita, primero, realizar el desembolso «C» para constituir el bien y, luego, constituir sucesivos capitales «C_1», que son necesarios cada k años. Esto quiere decir que un gobierno central, o un gobierno municipal, o cualquier corporación que desee construir una obra y mantenerla permanentemente en óptimas condiciones, debe contar hoy con un presupuesto «C» y, luego, —anualmente— con una cantidad también presupuestada equivalente a «T».

Para determinar la fórmula general del costo capitalizado, aplicaremos la fórmula del término de constitución anual para formar el capital «C_1» necesario para la renovación al final del año «k».

$$\boxed{C_1 = T\, S_{\overline{k}|i}} \qquad T = C_1 \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} \quad \text{Presupuesto anual}$$

Como este término de constitución **anual** debe desembolsarse por tiempo indefinido y necesitamos saber cuánto representa hoy dicha operación, aplicaremos la fórmula del valor actual de una renta inmediata perpetua:

$$A\infty = \frac{T}{i} = C_1 \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} \times \frac{1}{i}$$

Con las relaciones indicadas, el costo capitalizado —según la definición dada— es la suma del desembolso inicial necesaria para la construcción más el valor actual de los desembolsos permanentes:

$$y \qquad \boxed{A = C + C_1 \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} \times \frac{1}{i}}$$

En el que «C» es el costo inicial y «C_1» es el costo de renovación

Esta fórmula también puede escribirse:

$$A = C + C_1 \frac{i}{(1+i)^k - 1} \times \frac{1}{i} \qquad => \qquad \boxed{A = C + \frac{C_1}{(1+i)^k - 1}}$$

Ejemplo:

La construcción de un camino costará \$ 1.000.000 y debe renovarse cada 5 años en forma indefinida a un costo de \$ 400.000. Determinar el costo capitalizado a la tasa del 5% anual.

$$A = 10^6 + 400.000 \frac{1}{S_{\overline{5}|0,05}} \times \frac{1}{i} = 10^6 + 400.000 \times 0,180975 \times 20 = 2.477.800$$

Con la nueva fórmula: $$A = 10^6 + \frac{400.000}{(1,05)^5 - 1} = 2.477.800$$

5. ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN Y MÉTODOS

Un inversionista necesita conocer las ventajas económicas que le ofrecería una determinada operación que se le presentare, para lo cual, antes de efectuar el desembolso más adecuado posible, debe estudiar las alternativas de dicha inversión.

Dado que, por lo general, una inversión se realiza con fines lucrativos, es decir, se desembolsa un capital para obtener ingresos, estos no solo deben representar el reintegro de la inversión, sino que también deben incluir los intereses a una tasa que no podrá ser inferior al tipo que crea conveniente el inversionista. Por ello, es necesario, hacer un estudio de las alternativas que ofrezca la operación según algunos de los métodos que se señalan a continuación.

Aunque este tema de por sí representa una amplia gama de sistemas o criterios por emplearse, podemos sugerir algunos muy simples que no emplean sino las fórmulas de la teoría de rentas vista en este texto. Estos son los siguientes:

a) Método de las anualidades perpetuas

Se trata, por ejemplo, de que un inversionista tenga que decidir cuál de dos o más alternativas de inversión es la más conveniente. Sea la inversión A, que consiste en un desembolso de \$ 500.000 y prevé ingresos anuales permanentes de \$ 30.000, y sea otra alternativa B, que representa un desembolso de \$ 700.000 y que ofrece un ingreso permanente de \$ 48.000 anuales.

Para decidir la inversión más conveniente, la operación consistirá en determinar el «valor capital», que no es otra cosa que la diferencia entre el valor actual de los ingresos previstos a una determinada tasa de interés y el importe de la inversión. Será más conveniente la operación que dé el valor capital más alto.

Si aplicamos el 5% de interés anual en el ejemplo propuesto, tenemos:

$$C_A = \frac{R}{i} - D_A = \frac{30.000}{0,05} - 500.000 = 100.000$$

$$C_B = \frac{R}{i} - D_B = \frac{48.000}{0,05} - 700.000 = 260.000$$

Podrá verse que la inversión B es la más conveniente.

b) Método de la mejor rentabilidad

Es obvio que un inversionista que desembolsa un capital espera que este le reporte la mayor rentabilidad posible expresada en una tasa de interés permanente producto de dicha inversión.

En el método anterior, las dos alternativas de inversión de \$ 500.000 y \$ 700.000 prevén rentas anuales de \$ 30.000 y \$ 48.000, respectivamente. Si aplicamos la fórmula del valor actual de rentas indefinidas o perpetuas, observamos:

$$A\infty = \frac{R}{i} \Rightarrow i = \frac{R}{A\infty}$$

$$i_1 = \frac{30.000}{500.000} = 6\% \; ; \frac{48.000}{700.000} = 6{,}86\%$$

Se confirma que la segunda propuesta es la más ventajosa, porque reporta mejor rentabilidad en términos de tasa de interés.

c) Método de las anualidades temporales

Si la inversión o desembolso inicial supone ingresos por un tiempo determinado «n», se aplicará la fórmula del valor actual de rentas temporales y la operación consistirá en buscar la diferencia entre los ingresos anuales previstos por cada una de las alternativas propuestas y el importe de los ingresos anuales medios calculados a una determinada tasa de interés. Será más provechosa la inversión que dé una mayor diferencia.

Ejemplo:

Se proponen dos alternativas: (A) invertir hoy \$ 50.000 para percibir ingresos anuales de \$ 10.000 durante 8 años; o (B) desembolsar hoy \$ 110.000 para percibir \$ 10.000 anuales durante 20 años. ¿Cuál es la alternativa más ventajosa?

Si fijamos una tasa de interés del 6% anual, calculemos primero el ingreso anual medio equivalente al valor actual respectivo:

$$R_A = 50.000 \frac{1}{a_{\overline{8|}0,06}} = 8.051 \quad ; \quad R_B = 110.000 \frac{1}{a_{\overline{20|}0,06}} = 9.590$$

Los cálculos anteriores representan una operación similar a la amortización de una deuda recibida hoy (importe de la inversión) mediante n servicios de importe «R» a una tasa convenida.

Buscando las diferencias de los ingresos, vemos que la alternativa A es más provechosa:

A .... 10.000 - 8.051 = 1.949
B .... 10.000 - 9.590 = 410

d) Método de las ganancias

Es una variante del método anterior. Consiste en actualizar los ingresos ofrecidos por cada alternativa a una misma tasa de interés y en comparar el valor actual resultante con el importe de la inversión respectiva. La diferencia mayor que se obtenga indicará la decisión más conveniente.

El mismo ejemplo señalado en el método anterior y a la misma tasa de interés da las siguientes diferencias o ganancias (G):

$$\boxed{G = R\, a_{\overline{n|}i} - D} \qquad \text{(D = inversión o desembolso)}$$

$$G_A = 10.000\, a_{\overline{8|}0,06} - 50.000 = 12.098$$

$$G_B = 10.000\, a_{\overline{20|}0,06} - 110.000 = 4.699$$

Con ello, se confirma que la inversión A es más ventajosa.

e) Método del costo capitalizado

Tratándose de una inversión inicial para construir un determinado bien duradero que exige un costo de reposición o renovación cada cierto tiempo —existiendo dos o más alternativas—, el método por aplicarse será, naturalmente, el costo capitalizado. La operación más ventajosa será aquella cuyo costo capitalizado o valor presente del total de inversiones sea menor.

Ejemplo:

La construcción de una obra civil costará $ 500.000 y, cada 3 años, deberá desembolsarse el 15% de dicho costo para el mantenimiento y buena conservación de la obra. Otra alternativa fija para la misma obra: una inversión inicial igual, pero el costo de mantenimiento será el 10% cada 2 años. Calcular la alternativa más ventajosa a la tasa de interés anual del 6%.

$$A_1 = 500.000 + 75.000 \,/\, [\ (1{,}06)^3 - 1\ ] = \$\ 892.637$$

$$A_2 = 500.000 + 50.000 \,/\, [\ (1{,}06)^2 - 1\ ] = \$\ 904.531$$

La primera es la más ventajosa por dar un costo capitalizado menor.

6. Problemas propuestos

1. Indicar cuál de estas operaciones es más ventajosa y por qué. Por un bien adquirido hay dos propuestas de pago: $ 50.000 al contado hoy u $ 80.000 después de 7 años. El dinero se avalúa al 8% nominal capitalizable semestralmente. (La segunda, porque su valor actual es menor que el importe de la primera)

2. Para la adquisición de un inmueble nos proponen las siguientes ofertas:

   a) Pago al contado de $ 515.000
   b) Pago de $ 625.000 al cabo de 5 años
   c) Un servicio anual durante 15 años de $ 45.000 cada uno (el primer servicio se debe pagar al momento de firmar el contrato.)

   Determinar la oferta más conveniente. Tasa anual: 4%. (La segunda)

3.- Una persona que tiene una renta perpetua de $ 1.000 anuales al 5% y otra renta también perpetua de igual importe pero diferido de 10 años a la misma tasa vende la diferencia de los valores actuales de ambas por un suma de dinero que le permitirá percibir $ 1.000 anuales durante 10 años al 5% de interés anual. ¿Gana o pierde en la operación y cuánto? (No gana ni pierde)

4. Determinar el costo capitalizado de un camino que implica un costo de construcción de $ 100.000 y sucesivos costos de renovación de $ 50.000 cada una, cada 5 años en forma indefinida. Tasa de interés anual: 5%. ($ 280.975)

CAPÍTULO IX

Teoría básica de amortizaciones

1. DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS

La operación de amortización consiste en extinguir una deuda o préstamo recibido. Dado que esta operación se efectúa después de un tiempo o durante un lapso predeterminado, debe considerarse un interés a favor del acreedor.

La operación de extinción o cancelación de una deuda puede realizarse de distintas maneras, cada una de las cuales es un método de amortización.

a) Método del fondo de amortización
b) Método americano
c) Método progresivo

2. MÉTODO DEL FONDO DE AMORTIZACIÓN

Consiste en cancelar el importe del préstamo (P) más los intereses devengados cumplido el plazo (n) convenido para su cancelación. En otros términos, el deudor debe desembolsar un monto igual a:

$$\boxed{M = P\,(1+i)^n}$$

Como esta cantidad representará sin duda un desembolso apreciable, pagadero de una sola vez para el deudor, este puede hacer, por su cuenta, una medida de previsión consistente en un plan de ahorros (digamos en un banco que le pague i_1 de interés) mediante entregas constantes y periódicas iguales a R cada una durante «n» períodos, de lo que resulta, entonces, la siguiente ecuación de equivalencia:

$$\boxed{P\,(1+i)^n = R\,S_{\overline{n}|i_1}}$$

Si ambas tasas de interés, tanto la que el deudor reconoce a favor del acreedor (i) como la que recibirá por sus ahorros (i_1), fueran iguales, el importe del préstamo en la anterior igualdad sería nada menos que el valor actual de las «n» cuotas previstas, o sea:

$$P = R\, a_{\overline{n}|i}$$

Ejemplo:

Se recibe un préstamo de $ 100.000 para devolverlo con sus intereses del 6% anual transcurrido 8 años. Se pide:

a) el monto del desembolso;
b) el valor de la cuota anual por depositarse en un banco que paga el 5% de interés;
c) el valor de la cuota anual por depositarse en otro banco (posición alternativa) que paga el 6% de interés; y
d) verificar que el resultado de la pregunta anterior es igual que entregar las cuotas directamente al acreedor:

a) $M = P\,(1+i)^n = 10^5\,(1{,}06)^8 = 159.384{,}81$

b) $P\,(1+i)^n = R\, S_{\overline{n}|i_1}$ de donde:

$R = P\,(1+i)^n\, S^{-1}_{\overline{n}|i_1} = 159.384{,}81\; S^{-1}_{\overline{8}|0{,}05} = 16.691{,}10$

c) $R = 159.384{,}81\; S^{-1}_{\overline{8}|0{,}06} = 16.103{,}60$

d) $P = a_{\overline{n}|i}$ de donde:

$$R = P\, a^{-1}_{\overline{n}|i} = 10^5\, a^{-1}_{\overline{8}|0{,}06} = 16.103{,}59$$

3. MÉTODO AMERICANO O *SINKING FUND*

Es un sistema de amortización que consiste en cancelar la deuda en su totalidad al final de un plazo «n» convenido con la condición de que el deudor solo pague los intereses pactados durante toda la vigencia del préstamo, es decir, que desembolse periódicamente una suma igual a «Pi»; asimismo, el valor del préstamo (P) recibido debe permanecer inalterable hasta su entrega una vez cumplido el plazo «n».

Al igual que en el método anterior, el deudor también puede tomar una medida de previsión o plan de ahorros mediante el depósito de un término de constitución (R) periódico para formar el capital «P» que necesita para devolverlo al acreedor, aparte del interés «Pi» que paga a este. De este modo, consideramos que «i_1» es la tasa de interés que gana por sus depósitos de ahorro y designamos por «R_1» el desembolso total del deudor.

Ejemplo:

Aplicar el método americano con los mismos datos del ejemplo del primer método ($P = 10^5$; $n = 8$; $i = 0,06$; $i_1 = 0,05$; $R = ?$; $R_1 = ?$).

$$R = 10^5 \, S^{-1}_{8\rceil 0,06} = 10.103,59 \Rightarrow R_1 = Pi + R = 5.000 + 10.103,59 = 15.103,59$$

NOTA: el desembolso periódico (R_1) del deudor por este método resulta menor que la cuota de ahorro del primer método, porque este no tiene nada que entregar al acreedor (R_1 del método americano < R de ahorro periódico para formar $P\,(1+i)^n$).

Fórmulas del método:

a) $R_1 = P\,i + R$ (desembolso total periódico del deudor)

b) $P = R\,S_{n\rceil i_1}$ (monto por pagar por el deudor)

c) $R = P \dfrac{1}{S_{n\rceil i_1}}$ (cuota o depósito de ahorro)

d) $R_1 = Pi + PS^{-1}_{n\rceil i_1}$ Desembolso periódico del deudor; también puede escribirse: $R_1 = P\,(i + S^{-1}_{n\rceil i_1})$

Si restamos y sumamos «i_1» a las cantidades dentro del paréntesis en la igualdad anterior, tenemos:

$$R_1 = P\,(i - i_1 + S^{-1}_{n\rceil i_1} + i_1)$$

La parte subrayada es igual a «$a^{-1}_{n\rceil i_1}$».

$$R_1 = P\,(i - i_1) + P\,a^{-1}_{n\rceil i_1}$$

Donde el segundo término es igual a la cuota R que se pagaría directamente al acreedor si la tasa convenida con él fuera i_1.

Entonces se obtiene: $R_1 = P\,(i - i_1) + R$, de donde discutimos:

Si $i = i_1$ entonces $R_1 = R$
Si $i > i_1$ entonces $R_1 > R$
Si $i < i_1$ entonces $R_1 < R$

A manera de ilustración podemos hacer un cuadro de cómo los depósitos o cuotas de ahorro del deudor para constituir un fondo equivalente al préstamo crecen con los intereses (i_1) que gana periódicamente. Por ejemplo, una deuda de $ 10.000 debe devolverse al cabo de 2 años, para lo cual el deudor ahorrará cuotas semestrales vencidas, previendo ganar el 3% semestral. Hallar el importe de cada depósito y el cuadro de crecimiento del fondo de amortización.

De la fórmula «$P = R\, S_{\overline{n}|i}$», la cuota de ahorro semestral será:

$$R = P\, S^{-1}_{\overline{n}|i} = 10^4\, S^{-1}_{\overline{4}|0,03} = 2.390,27$$

Período «n»	(a) Aumento de interés	(b) Depósito	(c) Incremento al fondo	(d) Importe del fondo al final del período
1	0,00	2.390,27	2.390,27	2.390,27
2	71,71	2.390,27	2.461,98	4.852,25
3	145,57	2.390,27	2.535,84	7.388,09
4	221,64	2.390,27	2.611,91	10.000
Total	**438,92**	**9.561,08**	**10.000**	———

Al final del primer período, se deposita la primera cuota de 2.390,27 (b), que constituye tanto el incremento al fondo (c) como el importe del fondo en ese momento (d). Al final del segundo período, el aumento por intereses (a) es el 3% de 2.390,27 = 71,71; el depósito es 2.390,27 (b) y el incremento en el fondo es 71,71 + 2.390,27 = 2.461,98, con lo cual el importe del fondo al final del segundo período llega a 4.852,25. Así, sucesivamente se llega, al final del cuarto período, a constituir el importe deseado de P = 10.000.

4. FÓRMULA DEL DESEMBOLSO PERIÓDICO DEL DEUDOR

Por definición, en el método americano de amortización, el deudor tiene que desembolsar periódicamente dos importes: primero, los intereses convenidos con el acreedor a la tasa «i»; y, segundo, la cuota de ahorro al banco para formar el préstamo recibido a la tasa «i_1», es decir:

$$\boxed{R_1 = P\,i + R}$$

Ejemplo de amortización por el método americano:

Un préstamo de \$ 10.000 debe devolverse íntegramente después de 4 años de recibido; mientras tanto, debe pagarse al acreedor solo los intereses del 2% trimestral. Con el objeto de facilitar el desembolso de la deuda, el deudor contrata un plan de ahorros con cuotas trimestrales en un banco que le paga el 6% nominal de interés capitalizable trimestralmente. Calcular (a) el desembolso trimestral total del deudor por ambos conceptos (R_1) y (b) verificar que ese importe es igual a la fórmula, en el caso de que el banco le pagara igual interés que el convenido con el acreedor.

$$R = P\,a^{-1}{}_{n\rceil i_1}$$

a) Desembolso trimestral: $R_1 = Pi + P\,S^{-1}{}_{n\rceil i_1}$
$R_1 = 10^4\,(0{,}02) + 10^4\,S^{-1}{}_{16\rceil 0{,}015}$
$R_1 = 200 + 557{,}65 = 757{,}65$

b) Desembolso trimestral a la tasa común del 2% trimestral:

$$R_1 = 10^4\,(0{,}02) + 10^4\,S^{-1}{}_{16\rceil 0{,}02} = 200 + 536{,}50 = 736{,}50$$

Por la formula propuesta:

$$R_1 = R = P\,a^{-1}{}_{n\rceil i} = 10^4\,a^{-1}{}_{16\rceil 0{,}02} = 736{,}50$$

5. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Por un préstamo de \$ 17.946,50, el deudor debe pagar, durante 5 años, solo intereses del 5% trimestral; el préstamo queda en devolverse íntegramente al final del plazo citado, durante el cual debe ahorrar una cantidad constante trimestral a una tasa trimestral equivalente al 80% de los intereses periódicos pagaderos al acreedor. Calcular el desembolso total trimestral que debe entregar al acreedor. (\$ 1.500)

2. Un señor recibe un préstamo de \$ 60.000 y acepta devolverlo, juntamente con sus intereses del 1,5% mensual, al cabo de 5 años, para lo cual debe ahorrar

durante 4 años cuotas mensuales constantes que ganan una tasa de interés mensual equivalente a 4/5 de la tasa del préstamo. Calcular la mensualidad de ahorro. ($1.972,65)

3. El señor Pérez recibe dos préstamos con intervalo de un año, siendo el segundo mayor que el primero en un 60%, y se compromete a devolver ambos préstamos más sus intereses del 6% semestral en un plazo de 6 años, contados a partir de la recepción del primer préstamo. Para cumplir con esta obligación, decide ahorrar cada fin de trimestre, durante 5 años, una cantidad constante equivalente al 10% del préstamo, para ganar un 2,8% de interés trimestral, más una entrega adicional de $ 30.000 cuando falte un año para el término del plazo total. Calcular los préstamos recibidos. ($ 17.296,74; 27.674,79)

4. Un préstamo de $ 100.000 se paga por el método americano en 10 años al interés del 8% anual. Los ahorros anuales constantes ganarán también el mismo interés anual. Calcular el desembolso anual y verificar que esta cuota es la misma que por el método del valor actual de la renta. ($ 14.902,95)

5. Al recibir un préstamo, se crea el compromiso de devolverlo con sus intereses incluidos del 1% mensual al cabo de 4 años. Para hacer efectivo este compromiso, se decide ahorrar cuotas mensuales que ganan el 0,8% mensual, a razón de $ 1.500 mensuales durante la primera mitad del plazo convenido y doble mensualidad durante el plazo restante. Calcular el total de intereses pagados y ganados. ($ 32.012,48; $ 14.509,05)

CAPÍTULO X

Método progresivo de amortización

1. Definición, fórmula general y elementos

a) Definición

Llamado también método francés, consiste en que el préstamo «P» se cancela a través de un plazo convenido con el acreedor mediante entregas periódicas, generalmente de importe constante, llamadas «servicios de la deuda» (R), que comprenden tanto la cancelación de la deuda misma como los intereses pactados a una tasa «i». El pago de estos intereses, que se incluyen dentro del valor del servicio, obedece a la regla llamada, comúnmente, «interés al rebatir», porque tales valores de intereses son calculados sobre saldos de la deuda o préstamo, cada vez decrecientes.

Este es el método de amortización más importante y el más propiamente denominado de extinción de una deuda. También es el más usado en la práctica; incluso, está programado en las calculadoras financieras que ayudan a la solución de los problemas directos y de fácil aplicación.

b) Fórmula general

El método de amortización progresiva cae en el régimen de la teoría de rentas o anualidades cuando los pagos de los servicios «R» son constantes, de modo que el importe del préstamo recibido (P) es el valor actual de los «n» servicios de importe «R» cada uno, incluidos los intereses a la tasa periódica «i», o sea:

$$\boxed{P = R\, a_{\overline{n}|i}}$$

c) Elementos

Los elementos que intervienen en el método francés de amortización son los siguientes:

$P =$ Préstamo recibido

$R =$ Servicio de la deuda o cuota periódica constante, que incluye el pago del capital o préstamo recibido más los intereses al rebatir

$n =$ Número de cuotas o servicios por pagarse

$k =$ Cualquier período menor o igual a «n» durante la vigencia de la amortización

$C_k =$ Cuota capital o parte del servicio «R» en cualquier momento «$k \leq n$» destinada a amortizar el préstamo puro o capital recibido

$I_k =$ Cuota interés o parte complementaria del servicio «R» en cualquier momento «$k \leq n$» destinada al pago de los intereses que deben rebatirse por la deuda pendiente en ese momento

$E_k =$ Deuda extinguida o parte del préstamo «P» ya amortizado hasta el momento «$k \leq n$»

$D_k =$ Deuda residual o saldo pendiente de amortización, es decir, la parte del préstamo «P» por amortizar en cualquier momento «$k \leq n$».

Con los elementos indicados podemos establecer las siguientes igualdades o relaciones básicas de definición:

$$R = C_k + I_k$$

$$P = E_k + D_k$$

2. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Representa el proceso de cómo se desarrolla la operación de amortización y contiene todos los elementos vistos precedentemente.

Pongamos un ejemplo y elaboremos un cuadro de amortización con las definiciones hasta ahora descritas:

Un préstamo de \$ 10.000 debe amortizarse con 4 servicios semestrales constantes, incluidos los intereses del 5% semestral. El valor del servicio periódico, según la fórmula básica del valor actual, es:

$$P = R\, a_{\overline{n}|i}, \quad \text{de donde } R = P\, a^{-1}_{\overline{n}|i}$$

$$R = 10^4\, a^{-1}_{\overline{4}|0,05} = 2.820,12$$

El cuadro de amortización presenta el siguiente esquema:

k	Servicio interés «R»	Cuota capital «I_k»	Cuota extinguida «C_k»	Deuda deuda «E_k»	Saldo o residual «D_k»
0	–	–	–	–	10.000,00
1	2.820,12	500,00	2.320,12	2.320,12	7.679,88
2	2.820,12	383,99	2.436,13	4.756,25	5.243,75
3	2.820,12	262,19	2.557,93	7.314,18	2.685,82
4	2.820,12	134,30	2.685,82	10.000,00	–
Totales	**11.280,48**	**1.280,48**	**10.000,00**	–	–

Explicación:

a) En el momento de recibir el préstamo (k = 0), el saldo es 10.000.
b) Transcurrido el primer semestre (k = 1), pagamos el servicio «R» (2.820,12), que incluye el 5% de 10.000 (cuota interés del primer año: I_1 = Pi). El saldo que queda es de 2.320,12 como cuota capital ($C_1 = R - I_1$).
c) En ese mismo momento (k = 1), queda cancelada una parte del préstamo «P» con el importe de la «C_1» = 2.320,12, y eso es la deuda extinguida hasta ese momento, es decir, «E_1», de modo que el saldo o deuda residual será «P - E_1» = 10.000 - 2.320,12 = 7.679,88.
d) Al cumplirse el segundo semestre, pagamos nuevamente el servicio R = 2.820,12, que incluye la cuota interés del período «k = 2», es decir, el 5% del saldo que quedó el semestre anterior, o sea: I_2 = 7.679,88 x 0,05 = 383,99.
Queda así un resto de 2.820,12 - 383,99 = 2.436,13, que viene a ser la cuota capital del segundo semestre (C_2), cuyo importe deberá incrementarse a la parte ya amortizada hasta ese momento (E_1) para formar la deuda extinguida correspondiente, es decir, $E_2 = E_1 + C_2$ = 2.320,12 + 2.436,31 = 4.756,25. El saldo o deuda residual que resulte será el préstamo original menos la deuda extinguida hasta ese momento, o sea, $D_2 = P - E_2$ = 10.000 - 4.756,25 = 5.243,75.
e) Así sucesivamente continuaremos con el registro de las cifras hasta el final del plazo convenido k = n = 4, en que la deuda extinguida será igual al préstamo y no quedará ningún saldo por pagar.

De todo lo anterior, podemos señalar las siguientes relaciones resultantes de la observación del cuadro de amortización:

$I_1 = P\,i$

$I_k = D_{k-1}\,(i)$

$C_k = R - I_k$

$E_1 = C_1$

$E_k = E_{k-1} + C_k$

$D_k = P - E_k$

$E_k = P - D_k$

$D_n = 0$ y $E_n = P$

$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots.. + C_n = P$

$D_k = D_{k-1} - C_k$

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{k=1}^{n} I_k$$

El método se llama «progresivo», porque las cuotas capital (únicas destinadas a amortizar el préstamo P) son cada vez más altas o crecientes. La razón es que las cuotas interés (al rebatir) son cada vez más bajas, porque son las calculadas sobre saldos decrecientes de la deuda.

3. Fórmulas para el cálculo de los elementos del método

Cualquier valor de un cuadro de amortización puede obtenerse mediante fórmulas, cuya demostración y desarrollo se señala a continuación:

a) Cuota capital (C_k)

Dado que el servicio «R» en cualquier momento «$k \leq n$» está formado de dos elementos, la cuota interés (cada vez decreciente) y la cuota capital (creciente o progresiva), podemos establecer la ley de desarrollo de esta última teniendo como base las relaciones señaladas al describir el cuadro de amortización:

1.ª cuota capital:

$$C_1 = R - I_1$$

$$C_1 = R - Pi$$

$$C_1 = R - R\,a_{\overline{n}|i}\,(i)$$

$$C_1 = R\left(1 - \frac{1 - v^n}{i}\,i\right)$$

$$\boxed{C_1 = R\,v^n}$$

2.ª cuota capital:

$$C_2 = R - I_2 \qquad (1)$$

En la relación (1), desarrollaremos la I_2

$$I_2 = (P - C_1)\,i$$

$$I_2 = (R\, a_{\overline{n}|i} - Rv^n)i = R\left(\frac{1 - v^n}{i} - v^n\right) i$$

$$I_2 = R\,(1 - v^n - i\,v^n) = R\,[1 - v^n\,(1 + i)]$$

$$I_2 = R\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\,(1 + i)\right]$$

$$I_2 = R\,(1 - v^{n-1}) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$C_2 = R - R\,(1 - v^{n-1})$$

$$C_2 = R\,(1 - 1 + v^{n-1})$$

$$\boxed{C_2 = R\,v^{n-1}}$$

k-ésima cuota capital: según el desarrollo anterior, obsérvese que la cuota capital para cualquier «k» puede generalizarse así:

$C_k = R\,v^{n-(k-1)}$, o sea: $\boxed{C_k = R\,v^{n-k+1}}$

Ultima cuota capital: también para la última cuota capital:

$C_n = R\,v^{n-(n-1)} = R\,v^{n-n+1}$, o sea: $\boxed{C_n = R\,v}$

Teorema: «Las cuotas capital crecen en progresión geométrica de razón $(1 + i)$».

1. Demostrar que:

$$C_2 = C_1\,(1+i)$$

$$C_2 = R\,v^n\,(1+i)$$

$$C_2 = R\,\frac{1}{(1+i)^n}\,(1+i)$$

$$C_2 = R\,v^{n-1}$$

Lqqd

2. Otra demostración:

$$C_k = C_1\,(1 + i)^{k-1} \qquad (A)$$

$$C_k = R\,v^n\,(1 + i)^{k-1}$$

$$C_k = R\,\frac{(1 + i)^{k-1}}{(1 + i)^n} = R\,v^{n-(k-1)}$$

$$C_k = R\,v^{n-k+1}$$

Lqqd

Con el teorema anteriormente demostrado y sabiendo que la suma de todas las cuotas capital de un cuadro de amortización es igual al préstamo (P), podemos deducir lo siguiente:

$$P = C_1 + C_2 + C_3 + \dots\dots + C_n$$

$$P = C_1 + C_1\, r + C_1\, r^2 + C_1\, r^3 + \dots\dots + C_1\, r^{n-1}$$

$$P = C_1\,(r + r^2 + r^3 + \dots\dots + r^{\,n-1})$$

Los elementos expresados dentro del paréntesis son la suma de una progresión geométrica, cuyo resultado ha sido demostrado en el capítulo V, apartado 3, con el símbolo «$S_{n\rceil i}$», con lo cual resulta la fórmula del préstamo en función de la primera cuota capital:

$$\boxed{P = C_1\, S_{n\rceil i}} \qquad \text{(B)}$$

De la fórmula (A) se tiene que $C_1 = \dfrac{C_k}{(1+i)^{k-1}}$, que, reemplazada en (B), resulta:

$$P = \frac{C_k}{(1+i)^{k-1}}\, S_{n\rceil i} \qquad \text{de donde:} \qquad \boxed{C_k = \frac{P\,(1+i)^{k-1}}{S_{n\rceil i}}}$$

b) Cuota interés (I_k)

De la fórmula general «$I_k = R - C_k$», y sobre la base de las fórmulas halladas para «C_k», podemos deducir diferentes fórmulas para la cuota interés, como las siguientes (el lector podrá verificar los resultados):

$$I_k = R\,(1 - v^{n-k+1}) \qquad\qquad I_k = P\left(\frac{1 - v^{n-k+1}}{a_{n\rceil i}} \right)$$

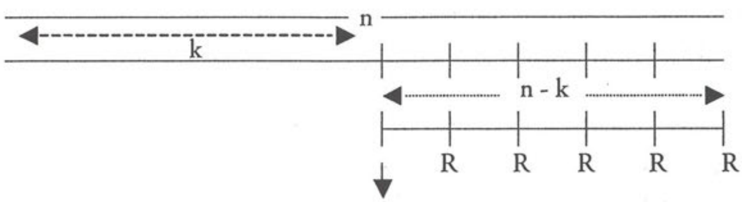
c) Deuda residual o saldo (D_k)

Por definición, sabemos que la deuda residual en cualquier momento «k» es la parte del préstamo pendiente de amortización después de haber satisfecho k servicios, es decir, quedando por entregar n - k pagos. En consecuencia, «D_k» será el valor actual de n – k servicios de importe constante «R»:

$$\boxed{D_k = R\, a_{\overline{n-k}|i}}$$

Explicación gráfica:

Un segmento de línea de longitud «n» se divide en 2 segmentos parciales, el primero de longitud «k» por los servicios ya pagados y otro complementario de longitud «n - k» por los servicios pendientes de pago, de la siguiente manera:



$$\boxed{D_k = R\, a_{\overline{n-k}|i}}$$

d) Deuda extinguida (E_k)

Es la parte del préstamo ya amortizado hasta el momento «k», dado que «$P = D_k + E_k$». De ello se deriva:

$$\boxed{E_k = P - D_k}$$

Por otro lado, sabemos que las cuotas capital son destinadas a extinguir la deuda pura «P»; entonces, podemos establecer:

$$E_k = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_k$$

Por el teorema antes demostrado:

$$E_k = C_1 + C_1\, r + C_1\, r^2 + C_1\, r^3 + \ldots\ldots + C_1\, r^{k-1}$$

$$E_k = C_1\, (r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots + r^{k-1})$$

$$\boxed{E_k = C_1\, S_{\overline{k}|i}}$$

Por el mismo teorema, en el que $P = C_1\, S_{\overline{k}|i}$, y reemplazando el valor de C_1 en la fórmula anterior, se tiene:

$$\boxed{E_k = \frac{P\, S_{\overline{k}|i}}{S_{\overline{n}|i}}}$$

4. Resumen de fórmulas básicas y complementarias

Grupo I: fórmulas básicas

a) Préstamo:	$P = R\, a_{\overline{n}|i}$
b) Servicio:	$R = P\, a^{-1}_{\overline{n}|i}$
c) Cuota capital:	$C_k = R\, v^{n-k+1}$
d) Cuota interés:	$I_k = R\,(1 - v^{n-k+1})$
e) Deuda residual:	$D_k = R\, a_{\overline{n-k}|i}$
f) Deuda extinguida:	$E_k = P - D_k$

Grupo II: fórmulas de definición

a) Componentes del servicio:	$R = C_k + I_k$
b) Componentes del préstamo:	$P = E_k + D_k$

Grupo III: fórmulas complementarias

a) Cuota capital:

$$C_k = P\left(\frac{v^{n-k+1}}{a_{\overline{n}|i}}\right)$$

$$C_1 = R\, v^n$$

$$C_1 = P\, S^{-1}_{\overline{n}|i}$$

$$C_k = P\,(1+i)^{k-1}\, S^{-1}_{\overline{n}|i}$$

b) Cuota interés:

$$I_1 = P\, i$$

$$I_1 = R\,(1 - v^n)$$

$$I_k = P\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{(1+i)^{k-1}}{S^{-1}_{\overline{n}|i}\; i}\right)$$

$$I_k = P\, i\left(\frac{1 - v^{n-k+1}}{1 - v^n}\right)$$

$$I_k = P\, i\left(\frac{a_{\overline{n-k+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\right)$$

$$I_k = R\, i\, a_{\overline{n-k+1}|i}$$

c) Deuda residual:

$$D_k = P \frac{a_{\overline{n-k}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$D_k = P \left(\frac{1 - S_{\overline{k}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \right)$$

d) Deuda extinguida:

$$E_k = R\, a_{\overline{n}|i} \frac{S_{\overline{k}|i}}{S_{\overline{n}|i}}$$

$$E_k = R\, v^n S_{\overline{k}|i}$$

$$E_k = R\, v^{n-k} a_{\overline{k}|i}$$

5. TRANSFERENCIA DE PRÉSTAMOS

Cuando se contrata una operación de préstamo de capital intervienen originalmente dos personas: el acreedor y el deudor. Aquel otorga el préstamo P y este debe devolverle servicios periódicos «R» durante un plazo «n» a la tasa de interés «i». Siguiendo la fórmula general, se tiene:

$$P = R\, a_{\overline{n}|i}$$

Pero en determinado momento «k» durante el plazo «n», el acreedor puede transferir el saldo de la deuda a una tercera persona. Esta operación de transferencia de créditos supone avaluar el saldo de la deuda a la tasa existente en el mercado en el momento «k», que puede ser diferente a la tasa aplicada en el préstamo original y que, por eso, toma el nombre de tasa de valuación (i_1).

La transferencia consiste en actualizar los servicios pendientes de pago aplicando la tasa de valuación para hallar el «valor del préstamo» (V_k). Se entiende que el deudor no interviene en la operación de la transferencia, con la única variación de que sus servicios pendientes serán entregados en adelante a la tercera persona que «compró» el valor del préstamo.

Como existen n-k servicios por cobrar, el «valor del préstamo» es igual a:

$$\boxed{V_k = R\, a_{\overline{n-k}|i_1}}$$ Fórmula en función del servicio

siendo: $R = P \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}} \quad \therefore \quad \boxed{V_k = P \dfrac{a_{\overline{n-k}|i_1}}{a_{\overline{n}|i}}}$ En función del préstamo

Según el método progresivo o francés de amortización, la deuda residual en el momento «k» es igual a:

$$D_k = R\, a_{\overline{n-k}|i} \qquad \text{ó} \qquad D_k = P\,\frac{a_{\overline{n-k}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

de donde: $P = D_k \dfrac{a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n-k}|i}}$ que reemplazando en la última fórmula del valor del préstamo da:

$$\boxed{V_k = D_k\,\frac{a_{\overline{n-k}|i_1}}{a_{\overline{n-k}|i}}}$$

en función de la deuda residual.

6. Problemas propuestos

1. Una deuda de \$ 20.000 contratada al 6% debe cancelarse en 20 años. Después de pagar el noveno servicio, muere el deudor y la familia desea cancelar el resto de la deuda. Determinar el servicio y la deuda residual o saldo. (\$ 1.743,68; \$ 13.752,27)

2. Una deuda de \$ 10.000 se extingue en 20 años al 5%. Determinar el servicio y la cuota capital correspondiente al 12.º servicio. (\$ 802,42; \$ 517,25)

3. Un comerciante contrata un préstamo de \$ 100.000 al 6% y pagadero en 16 años. Determinar la cuota interés y la cuota capital correspondiente al 10.º servicio y la deuda extinguida y la deuda residual al comienzo del 11.º servicio. (\$ 3.314,33; \$ 6.580,88; \$ 51.342,05; \$ 48.657,95)

4. Un préstamo de \$ 200.000 debe extinguirse en 10 años con servicios iguales. Al final del 5.º año, la deuda residual es \$ 112.137,40. Se desea saber la tasa del préstamo. (5%)

5. Un préstamo de \$ 1.000 se paga mediante dos servicios: el primero de \$ 500 después de 2 años y el segundo de \$ 700 después de 4 años. Determinar la tasa del préstamo. (5,98%)

6. Un préstamo se reembolsará mediante 4 servicios. Determinar la tasa y la primera cuota capital si se sabe que la suma de las dos primeras cuotas es igual a \$ 475.624,20 y que la suma de las dos últimas es de \$ 524.375,80. (5%; \$ 232.011,80)

7. Un préstamo se amortiza con 9 servicios. La primera cuota capital es $ 87.022,24 y la quinta es $ 109.863,57. Determinar la tasa, la última cuota capital, el servicio y el préstamo. (6%; $ 138.700,22; $ 147.022,24; $ 1'000.000)

8. La primera cuota capital de un préstamo de $ 100.000 pagadero durante 20 años es igual a $ 4.000. Hallar la tasa de interés y el valor del servicio. (2,27%; $ 6.270)

9. Un préstamo de $ 1'000.000 se amortiza en 10 años al 6%. Se desea saber el valor del préstamo a la tasa de valuación del 5%, a la mitad del plazo de amortización. ($ 588.379)

10. Un préstamo se amortiza en 10 años al 5% anual. El valor del préstamo al final del segundo año es $ 854.197,45 y al final del sexto año es $ 464.601,01. Determinar el préstamo y la tasa de valuación. ($ 1'000.000; 4,5%)

11. Se transfiere un préstamo por el 55% de su valor original después de haber efectuado 10 pagos anuales. Calcular la tasa de transferencia, si se sabe que fue contratado al 2,5% de interés durante 22 años. (4,31%)

12. Un préstamo de $ 120.000, contratado al 3% anual y pagadero en 10 años, es transferido por el 50% de su valor a la mitad del plazo del contrato. Hallar la tasa de interés de la transferencia. (5,5%)

CAPÍTULO XI

Amortización progresiva a cuotas variables

En este capítulo se verán los mismos conceptos contenidos en el capítulo anterior, con la diferencia de que las cuotas de amortización o servicios de la deuda no son constantes sino variables. Para ello, se seguirá el temario del valor actual de rentas de términos variables visto en el capítulo VII.

1. PRÉSTAMO RECIBIDO PARA AMORTIZARSE CON CUOTAS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

a) Con servicios en progresión aritmética

Ejemplo:

Sea un préstamo que se amortiza con cuotas trimestrales, tales como \$ 400, \$ 500, \$ 600, etc., durante 5 años, reconociendo una tasa del 2% de interés trimestral. Calcular el préstamo recibido y el saldo o deuda residual al final de 3 años.

$$\boxed{P = a_{\overline{n}|i}\left(R + \frac{b}{i} + nb\right) - \frac{nb}{i}}$$

$$P = a_{\overline{20}|0,02}\,(\,500 + 100 / 0,02 + 20 \times 100\,) - (\,20 \times 100 / 0,02\,) = \$\ 22.635,75$$
$$D_{12} = a_{\overline{8}|0,02}\,(500 + 12 \times 100 + 100 / 0,02 + 8 \times 100) - (8 \times 100 / 0,02) = \$\ 14.941,11$$

b) Con servicios en progresión geométrica

Ejemplo:

Si un préstamo de \$ 150.000 se amortiza en 8 años al 5% de interés semestral y las cuotas semestrales son crecientes cada vez en un 8% de la inmediata anterior, calcular los tres primeros servicios y el saldo de la mitad del plazo de amortización convenido.

$$\boxed{P = R\, v^n \left(\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right)}$$

$$150.000 = R\,(1{,}05)^{-16} \left(\frac{(1{,}08)^{16} - (1{,}05)^{16}}{1{,}08 - 1{,}05} \right)$$

$$R = 7.902{,}17;\ R_2 = R\,(1{,}08) = 8.534{,}34;\ R_3 = R_2\, q = 9.217{,}09$$

$$D_8 = (R\, q^8)\,(1{,}05)^{-8} \left(\frac{(1{,}08)^{8} - (1{,}05)^{8}}{1{,}08 - 1{,}05} \right) = \$\ 123.242{,}93$$

2. CUADROS DE AMORTIZACIÓN

a) Con cuotas en progresión aritmética

Ejemplo:

Un préstamo se amortiza con 6 mensualidades, tales como \$ 1.000, \$ 1.200, \$ 1.400, etc., al 2% de interés mensual. Calcular la deuda inicial y hacer el cuadro de amortización.

$$P = a_{\overline{6}|0{,}02}\,(\ 1.000 + 200 / 0{,}02 + 6 \times 200\ ) - (6 \times 200 / 0{,}02\ ) = \$\ 8.337{,}46$$

NOTA: el contenido del cuadro y las reglas de desarrollo son los mismos utilizados en el capítulo anterior. Se recomienda colocar, previamente, todas las cuotas variables en su columna respectiva.

k	R_k	I_k	C_k	E_k	D_k
0	–	–	–	–	8.337,46
1	1.000,00	166,75	833,25	833,25	7.504,21
2	1.200,00	150,08	1.049,92	1.883,17	6.454,29
3	1.400,00	129,09	1.270,91	3.154,08	5.183,36
4	1.600,00	103,67	1.496,33	4.650,41	3.687,05
5	1.800,00	73,74	1.726,26	6.376,67	1.960,79
6	2.000,00	39,21	1.960,79	8.337,46	–
Totales	**9.000,00**	**662,54**	**8.337,46**	–	–

Para cálculos horizontales:

$$I_k = D_{k-1}\,(i) \quad \leftrightarrow \quad E_k = E_{k-1} + C_k$$

$$C_k = R_k - I_k \qquad D_k = P - E_k$$

b) Con cuotas en progresión geométrica

Ejemplo:

Un préstamo de $ 20.000 se amortiza mediante 5 servicios semestrales crecientes en un 10% de la inmediata anterior, incluido el interés del 5% semestral. Hallar las cuotas semestrales y hacer el cuadro de amortización.

$$20.000 = R\,(1{,}05)^{-5}\left(\frac{(1{,}10)^5 - (1{,}05)^5}{1{,}10 - 1{,}05}\right) \therefore R = 3.818{,}59 = R_1$$

k	R_k	I_k	C_k	E_k	D_k
0	–	–	–	–	**20.000,00**
1	3.818,59	1.000,00	**2.818,59**	**2.818,59**	17.181,41
2	4.200,45	859,07	3.341,38	6.159,97	13.840,03
3	4.620,49	692,00	3.928,49	10.088,46	9.911,54
4	5.082,54	495,58	4.586,96	14.675,42	**5.324,58**
5	5.590,80	266,22	**5.324,58**	**20.000,00**	–
Totales	**23.312,87**	**3.312,87**	**20.000,00**	–	–

NOTA: al formular cualquier cuadro de amortización por el método progresivo, se recomienda tener cuidado de que aparezcan las igualdades señaladas a continuación. Con ese fin será necesario «ajustar» el valor de la última cuota interés (I_n) agregando o restando una o dos unidades después de calcular «I_n», es decir, «i D_{n-1}».

a) $D_0 = E_n = \sum C_k = P$
b) $\sum R_k - \sum I_k = P$
c) $D_n = 0$
d) $C_1 = E_1$
e) $C_n = D_{n-1}$

3. FÓRMULAS DE LOS ELEMENTOS DEL CUADRO DE AMORTIZACIÓN EN FUNCIÓN DEL SALDO O DEUDA RESIDUAL

Conforme se ha observado en el desarrollo del cuadro de amortización, los distintos elementos o columnas pueden ser calculados —en cualquier problema— sin necesidad de hacer los cuadros y mediante fórmulas que se basan en el saldo o deuda residual en progresión aritmética (PA) o geométrica (PG).

a) Servicio variable

En PA $\rightarrow$ $R_k = R + (k - 1)\, b$

En PG $\rightarrow$ $R_k = R\, q^{k-1}$

b) Cuota interés en PA o PG

$I_k = i\,(D_{k-1})$

c) Cuota capital de orden «k»

$C_k = R_k - i\,(D_{k-1})$

d) Deuda extinguida en cualquier momento «k»

$E_k = P - D_k$

Ejemplo 1:

Un préstamo de $ 150.000 será amortizado en 8 años con cuotas trimestrales crecientes en un 10% de la primera al interés del 2,5% trimestral. Calcular la cuota capital de orden 20.

Cálculos previos:

a) A_a : para calcular «R»

b) R_{20} : para calcular «C_{20}»

c) «D_{19}» con «R_{20}», n =13: para calcular «I_{20}»

d) $I_{20} = i\, D_{19}$

e) $C_{20} = R_{20} - I_{20}$ (resp.)

a) $150.000 = a_{\overline{32}|0,025}\,[R + (0,1\, R / 0,025) + 32\,(0,1\, R)] - [32\,(0,1\, R) / 0,025]$

b) $R = 2.931,79;\; R_{20} = R + (19)\, 0,1\, R = 8.502,19$

c) $D_{19} = a_{\overline{13}|0,025}\,[8.502,19 + (293,18/0,025) + 13\,(293,18)] - 13\,(293,18)\,/\,0,025$

$D_{19} = 111.590,18$

d) $I_{20} = 0,025\,(D_{19}) = 2.789,75$

e) $C_{20} = R_{20} - I_{20} = 8.502,19 - 2.789,75 = 5.712,44$

Ejemplo 2:

Un préstamo de \$ 100.000 se amortiza con cuotas mensuales crecientes en un 4% de la inmediata anterior al interés del 0,8% mensual durante 2 años. Calcular la cuota capital del último mes del primer año.

Cálculos previos: a) A_g : para calcular «R»

b) R_{12} : para calcular «C_{12}»

c) «D_{11}» con «R_{12}», n =13 : para calcular «I_{12}»

d) $I_{12} = i\,D_{11}$

e) $C_{12} = R_{12} - I_{12}$ (resp.)

a) $$100.000 = R\,(1.008)^{-24}\left(\frac{(1,04)^{24} - (1,008)^{24}}{1,04 - 1,008}\right) \Rightarrow R = 2.864,48$$

b) $R_{12} = R\,q^{11} = 2.864,48\,(1,04)^{11} = 4.409,74$

c) $$D_{11} = 4.409,74\,(1,008)^{-13}\left(\frac{(1,04)^{13} - (1,008)^{13}}{1,04 - 1,008}\right) = 69.071,38$$

d) $I_{12} = 0,008\,(69.071,38) = 552,57$

e) $C_{12} = 4.409,74 - 552,57 = 3.857,17$

4. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Verificar en el primer cuadro propuesto (cuotas en progresión aritmética), con aplicación de fórmulas, los valores de «D_4» y «C_5».

2. En el mismo cuadro, verificar por fórmulas los valores de «I_5» y «R_5».

3. En el segundo cuadro propuesto (cuotas en progresión geométrica), verificar los valores de «R_4» y «D_3».

4. En el mismo cuadro, verificar los valores de «E_3» y «C_1».

5. En el primer cuadro, verificar los valores de «$C_6 = D_5$».

CAPÍTULO XII

Depreciaciones

1. Definición, causas, elementos y clasificación de métodos de depreciación

a) Concepto

La depreciación es la pérdida del valor de un activo físico (edificios, maquinarias, muebles, etc.) con motivo de uso. Para prevenir la necesidad de reemplazo de un determinado activo al fin de su vida útil, será necesario traspasar cada año una parte de las utilidades de una empresa a un fondo especial llamado «fondo para depreciación», «reserva de depreciación» o «depreciación acumulada». De este modo, las contrapartidas de la reserva serán gastos o cargos por depreciación.

b) Causas para la depreciación

La disminución del valor de los bienes de capital puede ser motivada por diferentes causas, entre las que podemos señalar las siguientes:

1. **Físicas.** Son las que provienen del funcionamiento propio de los bienes tales como desgaste. También pueden considerarse, en este grupo, las acciones de agentes físicos externos, como la acción del tiempo, clima, corrosión, humedad, lluvia, etc.

2. **Funcionales.** Son aquellas que provienen de la insuficiencia y la obsolescencia de los activos, es decir, cuando la capacidad del bien resulta insuficiente para satisfacer las necesidades del mercado, en cuyo caso será necesario reemplazar los equipos por otros de mayor capacidad de producción. Sucede un caso similar con la obsolescencia o envejecimiento prematuro de un bien a causa de los perfeccionamientos técnicos y de los progresos científicos que traen nuevos equipos con mayor capacidad de trabajo u otros refinamientos que aumentan su productividad.

3. **Accidentales.** Son las causas de carácter aleatorio o aquellas imprevisibles como, por ejemplo, la destrucción de un bien por terremotos, incendios y otros riesgos que influyen en la vida útil de un bien, para lo cual será necesario protegerse, sea por la formación de reserva o mediante un seguro.

c) Elementos para el cálculo de las depreciaciones

Es necesario fijar los conceptos o elementos que intervienen en el cálculo de las depreciaciones y su respectiva técnica de manejo administrativo.

1. **Costo de adquisición (W).** Es el valor instalado o terminado de un activo.
2. **Valor residual o valor de desecho (R).** Llamado también valor de salvamento, es el importe estimado que podrá recuperarse al vender o salvar un activo al final de su vida útil.
3. **Vida útil (n).** Es el tiempo que se estima prestará servicios un activo, expresado generalmente en años. Sobre este particular habrá que adecuar estas estimaciones —en lo posible— a las normas fijadas por las autoridades de tributación, salvo que la empresa pueda justificar las variaciones que fije en comparación con los plazos mínimos legales, sobre bases técnicas suficientemente sustentadas.
4. **Valor en uso original (W - R).** Es la diferencia entre el costo de adquisición y el valor residual estimado. Este valor en uso es lo que hay que depreciar durante la vida útil del activo.
5. **Cuota de depreciación (D o D_k).** Es el importe de los cargos (constantes o variables) por depreciación o castigo que se efectúa periódicamente (generalmente en forma anual).

d) Métodos para el cálculo de las cuotas de depreciación

Existen diferentes métodos para el cálculo de las depreciaciones periódicas. Estos pueden clasificarse en tres grupos.

1. **Plan de cuotas constantes.** Comprende los métodos en los que las cuotas de depreciación son iguales para todos los años. El más usual entre ellos es el método de línea recta, que consiste en distribuir el valor en uso original (W-R) en cuotas constantes para cada uno de los años de la vida útil. Este método es generalizado y es el aceptado, en principio, por las disposiciones tributarias. La

aplicación de cualquier otro método será materia de las justificaciones técnicas y financieras pertinentes.

2. **Plan de cuotas decrecientes.** Comprende los métodos que prevén cuotas cada vez menores en el curso de la vida útil del activo (los primeros años más altos que los últimos). Estos métodos se usan para los casos en que se considere que los gastos de reparación serán más altos en los últimos años, de modo que, en un comienzo, no afecten seriamente el rubro de gastos totales de la empresa. También se aplica en aquellos bienes que tienen gran rendimiento en los primeros años de su vida útil, mientras que los últimos decrecen. Tal es el caso de los edificios e instalaciones destinadas a espectáculos públicos como coliseos, teatros, etc., de ahí que se grave con mayores cargas por depreciación en los años iniciales como una medida de compensación financiera.

3. **Plan de cuotas crecientes.** En este plan, las primeras cuotas son menores que las últimas. Se aplica a bienes sujetos a desgastes menores en los años iniciales de su vida útil; es necesario, por tanto, asignarles una menor depreciación. Igualmente puede ser aplicado por las empresas que se inician, dado que su rendimiento al comienzo es bajo, pero aumenta después conforme se adquiere mayor experiencia y eficiencia técnica. Ello permite gravar más por concepto de depreciación.

e) Clasificación de métodos de depreciación

El siguiente esquema resume las definiciones indicadas y los principales métodos que lo integran.

A. **Plan de cuotas constantes**
   1. Método de la línea recta
   2. Método del fondo amortizante o fondo de reposición
   3. Método de las horas de trabajo, unidades producidas o km recorridos.

B. **Plan de cuotas decrecientes**
   4. Método de la tasa fija sobre base variable
   5. Método de la tasa variable sobre base fija

C. **Plan de cuotas crecientes**
   6. Método de Küntzle
   7. Método de cuotas crecientes en progresión aritmética
   8. Método de cuotas crecientes en progresión geométrica

2. Plan de cuotas constantes

a) Método de la línea recta

Es el más usado en la práctica debido a la facilidad del cálculo. Las fórmulas para la cuota anual de depreciación y para el valor en libros en cualquier año «k» son, respectivamente, las siguientes:

$$\boxed{D = \frac{W - R}{n}} \qquad \boxed{B_k = (W - R)\left(1 - \frac{k}{n}\right) + R}$$

Ejemplo:

Aplicar el método lineal de depreciación a un equipo adquirido en $ 10.000 con una vida útil prevista de 10 años, al final de los cuales se estima que podrá tener un valor de desecho de $ 1.000. Hacer el cuadro de depreciación.

Cuota anual de depreciación: $D = \dfrac{10.000 - 1.000}{10} = 900$

Obsérvese en el cuadro de depreciación que se indica a continuación que las cuotas de depreciación o castigos anuales son constantes. El valor en uso original de $ 9.000 decrece uniformemente en un importe igual a la depreciación anual. La columna del valor residual (R) permanece constante y su valor se agrega al valor en uso de cada año para hallar el valor en libros de cada período (B_n = R).

N	D	W - R	R	B_k
0	–	9.000	1.000	10.000
1	900	8.100	1.000	9.100
2	900	7.200	1.000	8.200
3	900	6.300	1.000	7.300
4	900	5.400	1.000	6.400
5	900	4.500	1.000	5.500
6	900	3.600	1.000	4.600
7	900	2.700	1.000	3.700
8	900	1.800	1.000	2.800
9	900	900	1.000	1.900
10	900	–	1.000	1.000

Verifiquemos el valor en libros al final de 6 años de uso, aplicando la fórmula directa:

$$B = (W - R)(1 - k / n) + R = (9.000)(1 - 6 / 10) + 1.000 = 9.000\ (0,4) + 10^3$$

$$B_6 = 3.600 + 1.000 = 4.600$$

b) Método del fondo amortizante o fondo de reposición

En este método, las cuotas anuales de depreciación deben ser convertidas en efectivo y ser depositadas en un fondo que gane intereses, de modo que, al final de la vida útil del activo, se pueda disponer de la cantidad necesaria para fines de reposición. Según esto, la cuota anual será el término de constitución de un capital futuro, tal como (W-R) en caso de que esta sea la cantidad deseada. Entonces, este método supone la aplicación de la fórmula del monto de rentas. Siendo D la cuota o término de constitución, sea «$W - R = D\ S_{n\rceil i}$» de donde se deduce la fórmula para el cálculo de la cuota anual constante de depreciación:

$$D = (W - R)\left(\frac{1}{S_{n\rceil i}}\right)$$

En cualquier año «k», la fórmula directa para obtener el valor en libros es:

$$B = (W - R)\left(1 - \frac{S_{n\rceil i}}{S_{n\rceil i}}\right) + R$$

Ejemplo:

Con los mismos datos indicados en el método 1 y suponiendo un 6% de interés anual a percibirse en el fondo, calcular la cuota anual y hacer el cuadro de depreciación.

Cuota anual: $D = (9.000) \quad \dfrac{1}{S_{10\rceil 0,06}} = 682,80$

k	D	D $(1+i)^{k-1}$	W - R	R	B_k
0	—	—	9.000,00	1.000	10.000,00
1	682,80	682,80	8.317,20	1.000	9.317,20
2	682,80	723,80	7.593,40	1.000	8.593,40
3	682,80	767,20	6.826,20	1.000	7.826,20
4	682,80	813,20	6.013,00	1.000	7.013,00
5	682,80	862,00	5.151,00	1.000	6.151,00
6	682,80	913,70	4.237,30	1.000	5.237,30
7	682,80	968,50	3.268,80	1.000	4.268,80
8	682,80	1.026,60	2.242,20	1.000	3.242,20
9	682,80	1.088,20	1.154,00	1.000	2.154,00
10	682,80	1.154,00	—	1.000	1.000,00

Si verificamos el valor en libros del activo después de 4 años de uso por la fórmula directa, tenemos:

$$Bk = (W - R)\ [1 - (S_{k\rceil i} / S_{n\rceil i})] + R = 9.000\ [1 - (S_{4\rceil 0,06} / S_{10\rceil 0,06})] + 10^3$$

$$B_4 = 7.012 \text{ (diferencia por redondeo)}$$

c) Método de las horas de trabajo, unidades producidas o km recorridos

Este método utiliza un coeficiente de depreciación constante por cada hora que trabaje un equipo o por cada unidad que produzca; y, tratándose de vehículos, por cada km que recorra.

Tal coeficiente de depreciación unitaria (d) se multiplicará por el número real de horas trabajadas, unidades producidas o km recorridos en un período de depreciación para hallar la cuota periódica de castigo.

c.1) Método de las horas de trabajo. El coeficiente de depreciación horaria será el coeficiente del valor por depreciarse (W-R) y el número total de horas previstas de trabajo en toda la vida útil del activo. Representando con «H» el número estimado de horas de trabajo en un año, el coeficiente de depreciación horaria es:

$$\boxed{d = \frac{W - R}{n\,H}}$$

Este costo horario de depreciación se multiplicará por el número real de horas de trabajo (H_k) que se registre en cualquier año «k» para hallar la cuota de depreciación anual del activo; resulta, entonces, cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\boxed{D_k = d\,H_k} \qquad \boxed{D_k = \frac{W - R}{n\,H}\,H_k}$$

Ejemplo:

Un equipo de fabricación fue adquirido en \$ 100.000 y se prevé que prestará servicios durante 6 años, al final de los cuales podrá tener un valor residual de \$ 10.000. Se estima que podrá trabajar unas 200 horas mensuales durante 10 meses al año. Calcular, primero, el coeficiente o costo de depreciación estimado por cada hora de trabajo y, luego, hacer un cuadro de depreciación con el siguiente esquema de trabajo real registrado durante los 6 años:

1.^{er} año: normal previsto
2.° año: 180 horas mensuales durante 11 meses
3.^{er} año: 150 horas mensuales todo el año
4.° año: normal previsto
5.° año: 220 horas mensuales, tiempo normal
6.° año: 190 horas mensuales, 11 meses

El costo de depreciación estimado por cada hora de trabajo es:

$$d = \frac{W - R}{n\,H} = \frac{10^5 - 10^4}{6 \times 200 \times 10} = \frac{90.000}{12.000} = 7{,}50$$

k	d	Horas reales de trabajo			$D_k = dH_k$	B_k
		al mes	mes	H_k		
0	–	–	–	–	–	100.000
1	7,50	200	10	2.000	15.000	85.000
2	7,50	180	11	1.980	14.850	70.150
3	7,50	150	12	1.800	13.500	56.650
4	7,50	200	10	2.000	15.000	41.650
5	7,50	220	10	2.200	16.500	25.150
6	7,50	190	11	2.090	15.675	9.475
TOTALES:				12.070	90.525	–

Obsérvese que el equipo ha trabajado 70 horas más que lo previsto, por cuya razón se ha depreciado en 525 más que lo estimado, es decir: 70 x 7,50 = 525. De este modo, el valor residual previsto ha quedado también disminuido en la misma cantidad.

c.2) Método de las unidades producidas. También en este método habrá de calcularse, primero, el coeficiente o costo de depreciación por cada unidad que produzca el activo (d) y, luego, multiplicarse por el número real de unidades producidas en cualquier año «k» (U_k) para determinar la depreciación anual. Siendo «U» el número de unidades de producción estimada en un año, valen las siguientes fórmulas:

$$\boxed{d = \frac{W - R}{n\,U}}$$ (coeficiente de depreciación unitaria)

$$\boxed{D_k = d\,U_k} \qquad \boxed{D_k = \frac{W - R}{n\,U} . U_k}$$ (depreciación anual real)

Ejemplo:

Una máquina comprada en $ 240.000 prestará servicios durante 5 años, a cuyo término podrá tener un valor residual de $ 60.000. Se estima que producirá unas 100 unidades diarias durante 20 días al mes trabajando todo el año sin descanso.

El costo de depreciación por cada unidad que produzca será:

$$d = \frac{W - R}{n\,U} = \frac{240.000 - 60.000}{5 \times 100 \times 20 \times 12} = 1,50$$

Con los siguientes datos sobre el movimiento de producción real, se elaborará el cuadro de depreciación respectivo:

1.^{er} año: normal previsto
2.° año: 110 unidades diarias, 25 días al mes, un mes inactivo
3.^{er} año: 80 unidades diarias, resto normal
4.° año: 100 unidades diarias, 25 días al mes, 2 meses inactivo
5.° año: 90 unidades diarias, 25 días al mes, 2 meses inactivo

k	d	Producción real			U_k	$D_k = dU_k$	B_k
		Unidades diarias	Días al mes	Meses al año			
0	–	–	–	–	–	240.000	
1	1,5	100	20	12	24.000	36.000	204.000
2	1,5	110	25	11	30.250	45.375	158.625
3	1,5	80	20	12	19.200	28.800	129.825
4	1,5	100	25	10	25.000	37.500	92.325
5	1,5	90	25	10	22.500	33.750	58.575
TOTALES:					**120.950**	**181.425**	–

Se observa que la máquina ha producido 950 unidades más que lo previsto; se ha depreciado, como consecuencia, 1.425 de más (1,5 x 950). Por esta razón, el valor residual previsto ha quedado reducido en esta misma cantidad en comparación con lo estimado (60.000 - 1.425 = 58.575).

c.3) Método de los kilómetros recorridos. Se usa en la depreciación de vehículos comerciales según el recorrido que efectúan durante su vida útil. Es claro que este sistema de depreciación es únicamente por razón del recorrido del vehículo sin considerar ningún otro cargo por otros conceptos, como reparaciones, seguro, combustibles, lubricantes, repuestos, etc.

Como en los casos anteriores, se calculará un coeficiente o costo estimado de depreciación (d) por cada km que recorra y se multiplicará por el número real de km recorridos en cualquier año «h» para determinar la depreciación anual. Si «K» es el número de km estimados de recorrido anual, se tienen las siguientes fórmulas:

$$\boxed{d = \frac{W - R}{n\,K}}$$

Costo estimado de depreciación por cada km de recorrido

$$\boxed{D_h = d\,K_k} \qquad \boxed{D_h = \frac{W - R}{n\,K} \cdot K_h}$$

Cuota de depreciación para cualquier año «h»

Ejemplo:

Si una camioneta de reparto adquirida en \$ 20.000 podrá prestar servicio durante 5 años con un valor residual de \$ 4.000, el costo de depreciación por cada km que recorra a razón de 50.000 km estimados de recorrido anual es:

$$d = \frac{W - R}{n\,K} = \frac{20.000 - 4.000}{5 \times 50.000} = \frac{16.000}{250.000} = 0{,}064$$

Tratándose de vehículos de servicios particular, el costo de depreciación por km recorrido será generalmente mayor que el de uno de servicio comercial o público, en razón de que su recorrido es menor, aunque se le asignará normalmente una vida útil más larga.

3. Plan de cuotas decrecientes

a) Método de la tasa fija sobre la base variable

Este método, llamado también «método de porcentaje fijo», consiste en aplicar una tasa de depreciación fija (t) sobre el saldo o valor del activo en cada año transcurrido de vida útil. Siendo W el costo original de adquisición, la depreciación para el primer año será «W t», de lo que resulta, entonces, el valor en libros:

1.^{er} año: $B_1 = W - W\,t = W\,(1 - t)$

2.° año: $B_2 = W\,(1 - t) - W\,(1 - t)\,t = W\,(1 - t)\,(1 - t) = W\,(1 - t)^2$

K.° año: $B_k = W\,(1 - t)^k$

Siguiendo el mismo desarrollo, al final de su vida útil, el valor en libros será B_n, es decir, $W\,(1 - t)^n$, cuyo valor representa precisamente el valor residual, o sea:

$$W\,(1 - t)^n = R$$

Como el objeto de esta fórmula es determinar el valor de la tasa t, la despejamos y obtenemos:

$$(1 - t)^n = \frac{R}{W} \qquad\qquad 1 - t = \sqrt[n]{\frac{R}{W}}$$

$$t = 1 - \sqrt[n]{\frac{R}{W}}$$ Fórmula para determinar la tasa fija o porcentaje fijo de depreciación

Como queda anotado, esta tasa fija servirá para hallar las depreciaciones decrecientes anuales al multiplicarla por las bases variables, que representan el valor en libros del año anterior (k - 1), o sea:

$\boxed{D_k = t\, B_{k-1}}$ Siendo $B_k = (1 - t)^k$, también podemos establecer que:

$$\boxed{D_k = W\, t\, (1 - t)^{k-1}}$$

Ejemplo:

Con los mismos datos enunciados en el método 1, podemos hacer un cuadro de depreciación.

El valor de la tasa está dada por:

$$t = 1 - \sqrt[n]{\frac{R}{W}}$$

$$t = 1 - \sqrt[10]{\frac{1.000}{10.000}} = 0,2056718$$

$$t = 20,57\%$$

k	D_k	B_k
0	–	10.000,00
1	2.057,00	7.943,00
2	1.633,80	6.309,20
3	1.297,80	5.011,40
4	1.030,80	3.980,60
5	818,80	3.161,80
6	650,30	2.511,50
7	516,60	1.994,90
8	410,30	1.584,60
9	325,90	1.258,70
10	258,70	1.000,00

b) Método de la tasa variable sobre base fija

La tasa variable, que debe aplicarse en este método, se halla, para cada año, dividiendo el número de años de vida útil que le queda al bien entre la suma de la serie natural de números de 1 a «n». Para hallar la cuota decreciente de depreciación anual, se multiplica la tasa variable (t_k) por el valor en uso original (W - R), que es la base fija para todos los años.

$$1.^{er}\text{ año: } t_1 = \frac{n}{1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots + n}$$

$$2.^{o}\text{ año: } t_2 = \frac{n - 1}{1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots + n}$$

$$k.^{o}\text{ año: } t_k = \frac{n - (k - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots + n}$$

Siendo el denominador la suma de una progresión aritmética de n términos de razón 1, podemos aplicar la fórmula correspondiente:

$$S = \frac{n}{2}(a + u) = \frac{n}{2}(1 + n)$$

Entonces, la tasa variable para cualquier año «k» vale:

$$t_k = \frac{n - k + 1}{n / 2\,(1 + n)}$$

De este modo, la fórmula para hallar la cuota de depreciación decreciente para cualquier año k será:

$$\boxed{D_k = t_k\,(W - R)} \quad \text{o} \quad \boxed{D_k = (W - R)\,\frac{n - k + 1}{n / 2\,(1+n)}}$$

El valor en libros siempre será: $B_k = B_{k-1} - D_k$

La fórmula de valor en libros en el momento «k» se desprende del siguiente desarrollo:

$$B_k = W - (D_1 + D_2 + \ldots\ldots + D_k). \quad (1)$$

Haciendo: $D_1 + D_2 + \ldots\ldots + D_k = S$ y $n / 2\,(1 + n) = A$

$$S = (W - R)\frac{n - 1 + 1}{A} + (W - R)\frac{n - 2 + 1}{A} + (W - R)\frac{n - 3 + 1}{A} + \ldots + (W - R)\frac{n - k + 1}{A}$$

$$S = \frac{W - R}{A}\,[\,(n) + (n - 1) + (n - 2) + \ldots\ldots + (n - k + 1)\,]$$

El corchete encierra a la suma de una progresión aritmética decreciente de razón -1, de k términos:

$$S = \frac{W - R}{A}\left\{\frac{k}{2}\,[\,n + (n - k + 1)\,]\right\} \quad \text{Reemplazando en 1}$$

$$\boxed{B_k = W - \frac{W - R}{n / 2\,(1 + n)}\;[\,\frac{k}{2}\,(2\,n - k + 1)\,]} \quad \text{Fórmula}$$

Ejemplo:
Con los mismos datos ya conocidos, podemos hacer el siguiente cuadro de depreciación:

k	t_k	D_k	B_k
0	–	–	10.000,00
1	10 / 55	1.636,40	8.363,60
2	9 / 55	1.472,70	6.890,90
3	8 / 55	1.309,10	5.581,80
4	7 / 55	1.145,50	4.436,30
5	6 / 55	981,80	3.454,50
6	5 / 55	818,10	2.636,40
7	4 / 55	654,50	1.981,90
8	3 / 55	490,90	1.491,00
9	2 / 55	327,30	1.163,70
10	1 / 55	163,70	1.000,00

4. PLAN DE CUOTAS CRECIENTES

a) Método de Küntzle

Corresponde al plan de cuotas crecientes de depreciación y, según el autor, tiene las siguientes fórmulas generales para la cuota de depreciación y valor en libros en cualquier año «k».

$$D_k = \frac{W - R}{n^2}(2k - 1) \qquad B_k = (W - R)\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) + R$$

Ejemplo:

Con los datos conocidos, tenemos el siguiente cuadro de depreciación:

k	$\frac{W - R}{n^2}$	2k - 1	D_k	B_k
0	–	–	–	10.000
1	90	1	90	9.910
2	90	3	270	9.640
3	90	5	450	9.190
4	90	7	630	8.560
5	90	9	810	7.750
6	90	11	990	6.760
7	90	13	1.170	5.590
8	90	15	1.350	4.240
9	90	17	1.530	2.710
10	90	19	1.710	1.000

b) Método de cuotas crecientes en progresión aritmética

Como se sabe, el valor sujeto a depreciación es «W - R», cuyo importe es la suma de todas las cuotas anuales de depreciación. Así, resulta la siguiente expresión:

$$W - R = D_1 + D_2 + D_3 + ... + D_n$$

Si las cuotas crecen en progresión aritmética, podemos indicar tal crecimiento con la razón positiva «b»; entonces, la anterior serie se puede expresar en función de la depreciación del primer año, de la siguiente manera:

$$W - R = D_1 + (D_1 + b) + (D_1 + 2b) + (D_1 + 3b) + \ldots + D_1 + (n - 1)\, b$$

$$W - R = n\, D_1 + \frac{n - 1}{2} [\, b + (n - 1)\, b \,] = n\, D_1 + \frac{n - 1}{2} \;(n\, b)$$

$$\boxed{D_1 = \frac{W - R - 0{,}5\, n\, b\, (n - 1)2}{n}} \qquad \boxed{D_k = D_1 + (k - 1)\, b}$$

El valor en libros al final de cualquier año «k» está dado por la siguiente expresión:

$$B_k = W - (D_1 + D_2 + D_3 + \ldots + D_k)$$

$$\boxed{B_k = W - k\, [D_1 + 0{,}5\, b\, (k - 1)]}$$

Ejemplo:

Una máquina adquirida en \$ 100.000 se deprecia en 5 años con un valor residual de \$ 10.000 con cuotas que crecen cada año en 10% de la primera. Hacer el cuadro de depreciación y verificar por fórmula el valor en libros a los 3 años de uso.

$$D_1 = \frac{90.000 - 0{,}5 \times 5 \times 0{,}10\, D_1\, (4)}{5}$$

$$D_1 = 15.000$$

k	D_k	B_k
0	–	100.000
1	15.000	85.000
2	16.500	68.500
3	18.000	50.500
4	19.500	31.000
5	21.000	10.000

$$B_3 = 10^5 - 3\,(15.000 + 0{,}5 \times 1.500 \times 2)$$

$$B_3 = 50.500$$

c) Método de cuotas crecientes en progresión geométrica

En igual forma que el método anterior, el esquema de cuotas (que crecen por multiplicación del factor «q») y desarrollo de las fórmulas es como sigue:

$$W - R = D_1 + D_1\,q + D_1\,q^2 + \ldots. + D_1\,q^{n-1}$$

$$W - R = D_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$\boxed{D_1 = \frac{W - R}{(q^n - 1)\,/\,(q - 1)}}$$

Obsérvese que, si la razón «q» fuera igual a (1 + i), es decir, que las cuotas crecieran en un porcentaje o proporción «i» de la inmediata anterior, la fórmula se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boxed{D_1 = \frac{W - R}{S_{\overline{n|}i}}}$$

El valor en libros al final del año «k» puede expresarse:

$$B_k = W - (D_1 + D_1\,q + D_1\,q^2 + \ldots. + D_1\,q^{k-1})$$

$$B_k = W - D_1 \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} \right)$$

Si q = (1 + i) entonces: $\boxed{B_k = W - D_1\,S_{\overline{k|}i}}$

Ejemplo de aplicación:

Con los mismos datos del método anterior y suponiendo que las cuotas crecen en un 10% de la inmediata anterior, hacer el cuadro de depreciación y verificar el valor de B_3.

$$D_1 = \frac{90.000}{S_{5\rceil 0,10}} = 14.741,77$$

$D_2 = 14.741,77\ (1,10) = 16.215,95$

k	D_k	B_k
0	–	100.000,00
1	14.741,77	85.258,23
2	16.215,95	69.042,28
3	17.837,55	51.204,73
4	19.621,30	31.583,43
5	21.583,43	10.000,00

$$B_3 = 100.000 - D_1\ S_{3\rceil 0,10} = 51.204,73$$

5. DEPRECIACIÓN CON REVALUACIÓN DE ACTIVOS

En economías con fuerte influencia de procesos inflacionarios, los valores de los activos pierden valor no solo por la natural depreciación sino — especialmente— por efectos de la inflación. En estos casos, los gobiernos dictan medidas de revaluación de activos y fijan periódicamente porcentajes de aumento del valor en libros de dichos activos (fijos o duraderos, tales como edificios, muebles y enseres, instalaciones sujetas a depreciación y otros). Cuando se dictan estas medidas, es necesario hacer ajustes en las inversiones de activos y sus correspondientes reservas o cuentas de depreciación acumulada.

Ejemplo:

Un activo de valor inicial de $ 1.000.000 tiene una vida útil estimada de 10 años, sin valor residual, en el que se aplica el método de línea recta. Al cabo de 4 años de uso, presentará la siguiente situación:

a) Costo original: $ 1.000.000
b) Depreciación anual (10%): $ 100.000
c) Depreciación acumulada (4D): $ 400.000
d) Valor en libros (1.000.000 - 400.000): $ 600.000

Supongamos que, al final de 4 años de uso, la norma gubernamental dispone que todos los activos de esta naturaleza deben revaluarse en un 60%. La regla por aplicarse consiste en aumentar en dicho porcentaje, tanto el activo (valor del bien) como el pasivo (depreciación acumulada).

En este momento, al final del cuarto año, el estado será el siguiente:

Activo (1.000.000 x 1,6)	=	$ 1.600.000
Depreciación acumulada (400.000 x 1,6)	=	$ 640.000
Valor en libros	=	$ 960.000

Contablemente, por obra y gracia del decreto de revaluación, se ha producido un incremento en el patrimonio de la empresa, que toma el nombre de «excedente de revaluación», y el asiento en libros sería (por aumento de activo, pasivo y patrimonio):

Activo	**600.000**	
Depreciación acumulada		240.000
Excedente de revaluación		**360.000 (*)**

NOTA: la depreciación se mantiene al 10% del nuevo valor del activo. Ahora supondremos que se produce otra revaluación al final del sexto año (2 años más tarde de la anterior), que dispone un aumento del 50%. La situación cambia del siguiente modo:

a) Nuevo valor del activo (1.600.000 x 1,5)	$ 2.400.000
b) Depreciación anual (10%)	$ 240.000
c) Depreciación acumulada (9.600.000 x 1,6)	$ 1.440.000
d) Valor en libros (2.400.000 - 1.400.000)	$ 960.000

El asiento contable al final del 6.° año será:

Activo	**800.000**	
Depreciación acumulada		480.000
Excedente de revaluación		**320.000 (*)**

NOTA: los excedentes de revaluación (*), como son aumentos de patrimonio, pueden servir para convertirse en «capital» o para que la empresa acuerde distribuir utilidades o dividendos a sus accionistas.

El cuadro de depreciación, que refleja los cambios indicados precedentemente, es el siguiente:

Año	Valor del activo	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Revaluaciones		Valor en libros
				del Activo	del Pasivo	
0	1.000.000	–	–			1.000.000
1	1.000.000	100.000	100.000			900.000
2	1.000.000	100.000	200.000			800.000
3	1.000.000	100.000	300.000			700.000
4	1.000.000	100.000	400.000			600.000
REV	**1.600.000**	–	**640.000**	**600.000**	**240.000**	**960.000**
5	1.600.000	160.000	800.000			800.000
6	1.600.000	160.000	960.000			640.000
REV	**2.400.000**	–	**1.440.000**	**800.000**	**480.000**	**960.000**
7	2.400.000	240.000	1.680.000			720.000
8	2.400.000	240.000	1.920.000			480.000
9	2.400.000	240.000	2.160.000			240.000
10	2.400.000	240.000	2.400.000			–

6. DEPRECIACIÓN CON MÉTODOS COMBINADOS

Consiste en aplicar dos o más métodos durante la vida útil del activo.

Ejemplo:

Un equipo industrial que costó \$ 500.000 será depreciado en 10 años, al final de los cuales podrá tener un valor de desecho de \$ 5.000. Durante los 6 primeros años se depreciará por el 70% de su valor original aplicando el método de la tasa fija sobre base variable, mientras que, en el plazo restante, se depreciará por el método de cuotas crecientes en una cantidad fija o constante anual. Hacer el cuadro de depreciación.

$$\text{Tasa fija: } 1 - \sqrt[6]{\frac{0{,}3\ W}{W}} = 1 - 0{,}3^{1/6} = 0{,}181811$$

Primera parte:

Datos: W = 500.000; R = 0.3 W (porque se depreciará el 70% y quedará solo el 30%); n = 6 años.

k	t	$D_k = tB_{k-1}$	Bk
0	–	–	500.000
1	0,181811	90.906	409.094
2	0,181811	74.378	334.716
3	0,181811	60.855	273.861
4	0,181811	49.791	224.070
5	0,181811	40.738	183.332
6	0,181811	33.332	150.000

Segunda parte:

Datos: W = 0,3 x 500.000 = 150.000; R = 5.000 (del enunciado); n = 4 años.

El método que se aplica es el de cuotas crecientes en progresión aritmética, porque cada cuota aumenta en una cantidad constante o razón «b», cuyo importe deberá calcularse cuidando que la primera cuota de esta etapa sea «D_6 + b» por el enunciado.

$$150.000 - 5.000 = (D_6 + b) + (D_6 + 2b) + (D_6 + 3b) + (D_6 + 4b)$$

$$145.000 = 4\,D_6 + \frac{4}{2}(b + 4b) = 4\,D_6 + 10b$$

$$b = 1.167{,}2$$

K	$D_k = D_6 + kb$	Bk
0	–	150.000
1	34.499	115.501
2	35.666	79.835
3	36.834	43.001
4	38.001	5.000

7. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se propone depreciar un activo adquirido en $ 100.000 bajo dos sistemas: por el método de línea recta o depositando las cuotas de depreciación en un fondo de

reposición que gane intereses. Si el valor en libros al final de 16 años de uso será de $ 20.000, calcular la tasa de interés del segundo método si se sabe que la diferencia de los castigos anuales por ambos sistemas es de $ 1.618,40. (5%)

2. Un equipo industrial adquirido en $ 150.000 deberá prestar servicios durante 10 años con un valor residual del 20%. Si se estima que producirá 200 unidades mensuales trabajando a un ritmo de solo 11 meses cada año y que los gastos de mantenimiento serán de $ 2.000 mensuales durante su vida útil, calcular el costo por unidad producida en relación con la depreciación y los gastos. (16,36)

3. Un activo adquirido en $ 1.000.000 será depreciado en 10 años con un valor residual del 20%. Si las cuotas de depreciación, crecientes en progresión aritmética de razón 1.000, ganarán el 5% de interés compuesto a efecto de formar un fondo de reposición, indicar el valor de las 10 cuotas. (La 1.ª es $ 21.340 y las restantes $ 1.000 más cada año)

4. Hallar el costo de adquisición de un activo fijo sujeto a depreciación durante 10 años si se considera un interés de ahorros del 6% y un valor residual igual a su 15%. Para ello se sabe que la suma de las cuotas de depreciación a la mitad de su vida útil por los sistemas del fondo amortizante de cuotas constantes y la tasa variable sobre fija es de 15.725. ($ 100.000)

5. El valor en libros y la cuota de depreciación correspondientes al 5.° año de los 6 años de vida útil de un activo es $ 97.500 y $ 22.500, respectivamente. Hallar el costo de adquisición si se sabe que los castigos están en razón directa a sus años de trabajo. ($ 160.000)

6. Una máquina que fue adquirida en $ 150.000 se depreciará en 15 años por tercios de su costo cada 5 años aplicando sucesivamente tres métodos: el de línea recta, el de tasa variable sobre base fija y el de Küntzle. Hacer el cuadro de depreciación. (R = 0)

CAPÍTULO XIII

Bonos

1. Definición, notación y elementos

Un bono es un documento, más propiamente denominado «título de deuda», emitido generalmente por el Estado, la corporación edilicia o cualquier entidad pública, con el objeto de reunir fondos procedentes de una cantidad grande de acreedores o compradores de los bonos puestos en venta o circulación.

La entidad emisora se compromete a pagar cierta cantidad en determinada fecha y también a pagar unos pagos periódicos por cierto tiempo.

Notación y elementos

F = Valor de emisión, llamado también «valor a la par» (es la cantidad impresa en el documento)

r = Tasa de interés ofrecida por la entidad emisora para retribuir periódicamente a los compradores mediante un «cupón» que viene incorporado en el documento

C = Precio del bono al redimirse o cancelarse por el emisor, o cantidad que recibe el tenedor del bono al redimirse

$R = Fr$ = Valor del cupón o intereses del bono

n = Término o número de períodos que debe transcurrir para la redención o retiro de la circulación de los bonos

V = Precio de compra del bono

i = Tasa de mercado o de rendimiento esperado por el comprador

2. Precio de compra

El precio de compra de un bono en la fecha de cualquier vencimiento del cupón, cuya cantidad ya se ha pagado, está dado por la siguiente fórmula (valor actual tanto del bono por redimirse como de los cupones no vencidos):

$$\boxed{V = C\,(1+i)^{-n} + R\,a_{\overline{n}|i}}$$

El elemento «n» es el número de períodos que faltan para redimirse el bono.

Ejemplo:

Calcular el precio de compra de un bono de \$ 10.000 que vence al cabo de 5 años para tener un rendimiento (tasa de mercado) del 2% semestral, siendo la tasa del cupón el 1,5% semestral.

$C = F = 10.000$

$n = 5\,(2) = 10$ semestres

$r = 0{,}015$ sem.

$i = 0{,}02$ sem.

$R = Fr = 10^4\,(0{,}015) = 150$

$C = 10.000\,(1{,}02)^{-10} + 150\,a_{\overline{10}|0,02}$

$C = \$\ 9.550{,}87$

3. BONOS CON PRIMA Y DESCUENTO

Al comprarse un bono, pueden presentarse dos situaciones, dado que existen dos tasas de interés: la primera, que se encuentra en los cupones o intereses periódicos del bono (representado por «r»); y la segunda, la del mercado o la tasa esperada por el comprador (i):

a) Si $i = r$, el precio de compra es igual al valor a la par ($V = F$).

b) Si $i < r$, el precio de compra es menor que el valor a la par ($V < F$). En este caso, se llama «compra con descuento» ($D = F - V$).

c) Si $i > r$, el precio de compra es mayor que el valor a la par ($V > F$). En este caso, se llama «compra con prima» ($P = V - F$).

a) Compra con descuento

$$D = F - V$$
$$D = F - [\,F\,(1+i)^{-n} + R\,a_{\overline{n}|i}\,]$$
$$D = F - [\,F\,(1+i)^{-n} + Fr\,a_{\overline{n}|i}\,]$$
$$D = F\,[\,1 - (1+i)^{-n} + r\,a_{\overline{n}|i}\,]$$
$$D = F\,(\,i\,a_{\overline{n}|i} + r\,a_{\overline{n}|i}\,)$$

$$\boxed{D = F\,(i - r)\,a_{\overline{n}|i}}$$ Fórmula del descuento

b) Compra con prima

Cuando r < i se dice que el bono se compra con prima, es decir, más caro que su valor de emisión:

$$P = V - F$$
$$P = F\,(1 + i)^{-n} + R\,a_{\overline{n}|i} - F$$
$$P = F\,(1 + i)^{-n} + Fr\,a_{\overline{n}|i} - F$$
$$P = F\,[\,(1 + i)^{-n} - 1 + r\,a_{\overline{n}|i}\,]$$
$$P = F\,(\,i\,a_{\overline{n}|i} + r\,a_{\overline{n}|i}\,)$$

$$\boxed{P = (r - i)\,a_{\overline{n}|i}}$$ Fórmula de la prima

NOTA: ambas fórmulas descritas son el valor actual de cuotas periódicas positivas, formadas por la diferencia de las dos tasas usadas en la operación de compra de bonos. En el primer caso, cuando se compra a un menor valor que el valor nominal o a la par de un bono, naturalmente se obtendrá un descuento, mientras que, en el caso contrario (r > i), se comprará el bono recargado, es decir, una prima o mayor valor que el precio de emisión.

Ejemplo 1:

Calcular el descuento por la compra de un bono de \$ 20.000 con el interés del 2% trimestral y la tasa de mercado del 2,5% trimestral, si se sabe que faltan 2 años y 3 meses para su redención.

$$D = 20.000\,(0{,}025 - 0{,}02)\,a_{\overline{9}|0{,}025} = 797{,}87$$

Prueba: $V = 20.000\,(1{,}025)^{-9} + (20.000 \times 0{,}02)\,a_{\overline{9}|0{,}025} = 19.202{,}91$

$$D = 20.000 - 19.202{,}91 = 797{,}87$$

Ejemplo 2:

Se compra un bono de \$ 10.000 faltando 5 $^1/_2$ años para su redención. Si la tasa del bono es 4% semestral y la del mercado es el 3,8% semestral, calcular la prima pagada en la compra del título y el valor de emisión de este.

$$P = 10.000\,(0{,}04 - 0{,}038)\,a_{\overline{11}|0{,}038} = 177{,}11$$

Prueba: $V = 10.000\,(1{,}038)^{-11} + (10.000 \times 0{,}04)\,a_{\overline{11}|0{,}038} = 10.177{,}11$

$$V = F + P$$
$$V = 10.000 + 177{,}11 = 10.177{,}11$$

4. AMORTIZACIÓN DE LA PRIMA

Al comprar un bono con prima, el valor en libros del comprador es mayor que el valor al vencimiento del bono. Por otro lado, los intereses o cupones son más que los intereses a base del rendimiento estipulado. La diferencia entre los intereses se usa para amortizar la prima tal que, al vencimiento del bono, el valor en libros sea igual al valor del vencimiento del bono. De este modo, el valor en libros tiene que ir disminuyendo hasta llegar al valor en la fecha del vencimiento.

Para determinar el valor en libros inmediatamente después de haberse vencido y pagado «k» cupones desde que se compró el bono, se usa la siguiente relación:

$$\boxed{V_k = V\,(1 + i)^k - R\,S_{\overline{k|}i}}$$

Para conocer el valor en libros V_k en cualquier momento «k», es conveniente hacer una tabla de desarrollo. Tomado el ejemplo 2 indicado precedentemente, calcular el precio de compra con las tasas trimestrales r = 4%; i = 3,8%; n = 11 trimestres; el valor de libros al final de 5 trimestres, y hacer la tabla respectiva.

$$V = 10.000\,(1{,}038)^{-11} + 10.000\,(0{,}04)\,a_{\overline{11|}0{,}038} = 10.177{,}11$$

El valor en libros al final de k = 5 semestres es:

$$V_5 = 10.177{,}11\,(1{,}038)^5 - 400\,S_{\overline{5|}0{,}038} = 10.105{,}52$$

(Col) k	(1) R	(2) $i\,V_{k-1}$	(3) $i\,V_{k-1} - R$	(4) $V_k = V_{k-1} + (3)$
0	–	–	–	10.177,11
1	400	386,73	–13,27	10.163,84
2	400	386,23	–13,77	10.150,07
3	400	385,70	–14,30	10.135,77
4	400	385,16	–14,84	10.120,93
5	400	384,60	–15,40	10.105,53

5. ACUMULACIÓN DEL DESCUENTO

Cuando se compra un bono con descuento, el valor en libros del comprador es menor que el valor al vencimiento del bono, porque los intereses del cupón son menores que los intereses en base a la tasa de rendimiento o de mercado. La diferencia se usa para aumentar el valor en libros hasta que este sea igual al valor del vencimiento en la fecha que se vence.

Para determinar el valor en libros habiendo pagado y vencido «k» cupones, se usa la misma fórmula indicada en el apartado anterior.

$$\boxed{V_k = V(1+i)^k - R\, S_{\overline{k|}i}}$$

La tabla para conocer el valor en libros «V_k» en cualquier momento «k» proviene del ejemplo que se enuncia a continuación:

Se tiene un bono C = F = 10.000; r = 2% semestral faltando 15 semestres para su vencimiento con la tasa del 2,5% semestral esperada. Se pide calcular el precio de compra, el valor en libros al recibir el quinto cupón y preparar una tabla que indique el valor en libros al final de los primeros 5 semestres.

Precio de compra: $V = C(1+i)^{-n} + R\, a_{\overline{n|}i}$

$$V = 10.000\,(1{,}025)^{-15} + 0{,}02\,(10.000)\, a_{\overline{15|}0{,}025}$$

$$V = 9.380{,}94$$

El valor en libros al final de 5 semestres es:

$$V_k = V(1+i)^k - R\, S_{\overline{k|}i}$$

$$V_5 = 9.380{,}94 - 200\, S_{\overline{5|}0{,}025}$$

$$V_5 = 9.380{,}94$$

(Col) k	(1) R	(2) $i\,V_{k-1}$	(3) $i\,V_{k-1} - R$	(4) $V_k = V_{k-1} + (3)$
0	–	–	–	9.380,94
1	200	234,52	34,52	9.415,46
2	200	235,39	35,39	9.450,85
3	200	236,27	36,27	9.487,12
4	200	237,18	37,18	9.524,30
5	200	238,11	38,11	9562,41

6. PRECIO DEL BONO EN CUALQUIER MOMENTO

Cuando se compra un bono entre dos fechas de cupón, el precio de compra «V» se calcula con la fórmula: $V = B + i\,f\,B$

Siendo: $B =$ Precio en la fecha de cupón inmediatamente anterior a la fecha de compra

$f =$ Fracción de tiempo transcurrido desde esta fecha de cupón

Ejemplo:

Se tiene un bono de \$ 1.000 cuya fecha de cupón es el primer día de cada semestre al 3% semestral con vencimiento a 10 años. La tasa de mercado es 2,5% semestral. Se pide determinar el precio de compra transcurrido 4 meses del tercer vencimiento semestral del cupón (20 – 3 = 17 = n).

Precio de compra:

$$V = 1.000\,(1{,}025)^{-17} + 30\, a_{\overline{17|}0{,}025} = 1.445{,}83$$
$$V = B + i\,f\,B = B\,(1 + if) = 1.445{,}83\,(1 + 0{,}025 \times 4/6)$$
$$V = 1.469{,}93$$

7. RESCATE DE OBLIGACIONES

Consiste en el retiro periódico de una parte de los bonos en circulación, generalmente por sorteo, para lo cual deben tenerse presente los siguientes símbolos:

Q = Número de bonos emitidos
V = Valor nominal de cada bono (igual al valor de compra cuando la emisión es a la par)
QV = Valor total de la emisión
i = Tasa de interés por período
n = Número de obligaciones que se amortizarán en el tiempo previsto por la entidad emisora

Al final de cada período, se sortea un número de obligaciones, de modo que la suma de las que corresponden a cada período debe ser igual al número total que se ha emitido. Si designamos por $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n$ al número de obligaciones sorteadas al final de los períodos 1, 2, 3 .... n, tendremos la siguiente igualdad:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots + Q_n$$

Según lo que precede, el total del préstamo o deuda contraída por la institución emisora será «QV». Si «R» es el servicio, evidentemente tendremos:

$$QV = R\, a_{\overline{n|}i}$$

Esta relación es similar a la que ya conocemos para el caso de las deudas indivisas.

El cociente entre la cuota capital y el valor nominal de cada obligación nos dará el número de estas, que deben salir sorteadas. Sin embargo, lo frecuente es que este cociente no dé un número exacto de obligaciones por sortear, sino que quede, además, un residuo, al que designaremos por «r_k» (siendo k igual a 1, 2, ...n). Entonces tendremos que capitalizar este residuo y agregarlo al servicio del sorteo siguiente. Así:

Al final del primer período, tendríamos: $\dfrac{C_1}{V} = Q_1 + r_1$

Al final del segundo período: $\dfrac{C_2 + r_1\,(1+i)}{V} = Q_2 + r_2$

... y así sucesivamente.

Al final del período «k», menor que «n», tendremos que se habrá rescatado o extinguido un cierto número de obligaciones, que designaremos por «Q^e_k», y quedará en circulación otro número de obligaciones, denominadas obligaciones vivas, a las que designaremos por «Q^v_k». De este modo, la suma de ambas será igual al número total de obligaciones emitidas, esto es:

$$Q = Q^e_k + Q^v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

8. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

En este caso, un cuadro de amortización tiene por objeto mostrar el desarrollo de los diversos elementos que intervienen a lo largo del plazo de la deuda.

Supongamos que se emiten 1.000 títulos de valor nominal $ 100, cada uno a la tasa del 5% anual, y que deben ser amortizados en 10 años con sorteos anuales. En este caso, tenemos una deuda de $ 100.000, cuyo servicio constante será:

$$R = \frac{QV}{a_{\overline{n|}i}} = \frac{100.000}{a_{\overline{n|}i}} = 12.950{,}46$$

El cuadro de amortización correspondiente se da a continuación:

k	(1) $R = QVa^{-1}_{\overline{n}\rceil i}$	(2) $R' = R + (6)_{k-1}$	(3) $I_k = iV(9)_{k-1}$	(4) $C_k = (2) - (3)$	(5) $r_k = (4) - (7)$	(6) $r_k = (1+i)$	(7) $Q_k = Ret$	(8) $Q^e_k = Ext$	(9) $Q^v_k = Q - (8)$
0	-	-	-	-	-	-	-	-	1.000
1	12.950,46	12.950,46	5.000	7.950,46	50,46	52,98	79	79	921
2	12.950,46	13.003,44	4.605	8.398,44	98,44	103,36	83	162	838
3	12.950,46	13.053,82	4.190	8.863,82	63,82	67,01	88	250	750
4	12.950,46	13.017,47	3.750	9.267,47	67,47	70,84	92	342	658
5	12.950,46	13.021,30	3.290	9.731,30	31,30	32,86	97	439	561
6	12.950,46	12.983,32	2.805	10.178,32	78,32	82,24	101	540	460
7	12.950,46	13.032,72	2.300	10.732,70	32,70	33,34	107	647	353
8	12.950,46	12.984,80	1.765	11.219,80	19,80	20,79	112	759	241
9	12.950,46	12.971,23	1.205	11.766,25	66,.25	69,56	117	876	124
10	12.950,46	13.020,02	620	12.400,02	0	0	124	1.000	0

Explicación de las columnas en orden del desarrollo:

(1) = Servicio periódico (anual) constante

(9) = Número de bonos u obligaciones vivas o no extinguidas o rescatadas en cualquier momento «k»

(3) = Cuota interés en el momento «k». Se calcula aplicando la tasa «i» al número de obligaciones vivas del período anterior multiplicado por el valor nominal (V) del bono.

(4) = Cuota capital del mismo período «k». Resulta de restar la cuota interés (columna 3) de la columna anterior (columna 2), cuyo valor se aplica a continuación.

(2) = Cuota capital + residuo capitalizado (columna 6)

(5 = Residuo: al obtener la cuota capital restando las columnas (2) - (3) (por ejemplo: C_4 = 13.021,30 - 3.290 = 9.731,30); si retiramos un número entero de bonos de 100 cada uno, debemos pasar 79 bonos a bonos extinguidos ($Q_k = Q_5 = 97$), de lo que queda un residuo de 31,30, es decir, r_5.

(6) = El residuo hallado en la operación anterior (r_5 = 31,30) se capitaliza por un período, así: r_5 (1,05) = 32,86, que sirve para agregar a la columna (1) y

obtener un nuevo valor recargado (columna 2 = 12.950,46 + 32,86 = 12.983,32).

(8) = Número acumulado de bonos extinguidos o retirados
(por ejemplo: $Q^e{}_7 = Q^e{}_6 + Q_7 = 540 + 107 = 647$)

(9) = Número de obligaciones vivas o por retirar
(por ejemplo: $Q^v{}_7 = Q - Q^e{}_7 = 1.000 - 647 = 353$)

(7) = Número entero de bonos retirados en cada periodo

CAPÍTULO XIV

Problemas de revisión

NOTA: si no se mencionan las frecuencias de la tasa de interés o la duración del tiempo, se entiende que son anuales. Igualmente, las cuotas periódicas de toda renta se consideran vencidas, salvo que se indique que son anticipadas.

1. Una deuda pagadera mediante 25 cuotas anuales de \$ 1.000 c/u, cuyo primer término se paga a los 7 años, es sustituida por 40 pagos semestrales inmediatos y constantes. Calcular la cuota semestral vencida si la tasa es el 5% anual. (R = \$ 416,80)

2. Se desea formar un capital de \$ 150.000 mediante depósitos de \$ 5.800 cada fin de mes para ganar el 1% de interés mensual. Calcular el tiempo exacto de ahorro. (R = 23 cuotas + 17 días de capitalización)

3. ¿A qué tasa de interés anual debe colocarse un capital para que se duplique en 15 años? (R = \$ 4.73%)

4. Un capital de \$ 100.000 ha sido colocado de la siguiente manera: una parte al 3% y otra al 3,5%. Al cabo de 20 años, los montos de cada una de la partes son iguales entre sí. Determinar cada una de las partes. (R = 52.419,41 y 47.580,59)

5. Debiendo cancelar hoy \$ 15.000, proponemos hacerlo mediante dos pagos iguales de \$ 10.000 cada uno, que vencerán dentro de 5 y 10 años, respectivamente. Hallar la tasa de interés anual. (R = 3,98%)

6. En un plazo de 3 años, deberá pagarse una deuda de \$ 215.000, incluido un interés del 15% anual capitalizable mensualmente. Se desea efectuar un convenio con el acreedor para hacer 3 pagos fijos de \$ 60.000 anuales y un último pago por el mismo importe después de un tiempo que resulte su vencimiento, pactado a la misma tasa efectiva anual del 15%. Calcular el plazo de pago de la cuarta cuota. (R = 3 años; 10 meses; 14 días)

7. Un deudor debe pagar $ 10.000 a los 3 años y $ 15.000 a los 5 años. El deudor pide liberarse de esos pagos por uno solo al cabo de 6 años, a intereses compuestos y a la tasa del 6%. ¿Cuál será el monto de este pago único? (R = 27.810,16)

8. Un capital es depositado a una tasa del 3% mensual por 5 meses. Si a partir de ese momento la tasa cambia a 2,5% mensual, determine cuántos meses deben pasar para retirar como mínimo el doble del capital depositado inicialmente. (R = 22 m)

9. Se deposita un capital en un banco que paga el 5% de interés efectivo trimestral. Después de un año, el banco reajusta la tasa de interés al 3% efectivo mensual, en cuya oportunidad se hacen depósitos mensuales por un año, cada uno equivalente a la cuarta parte del capital inicial colocado. Transcurridos tres años a partir del último depósito, se liquida la cuenta y se retira todo lo acumulado, que asciende a $ 50.000. Calcular el capital inicial y cuánto se habrá ganado en interés sólo en el segundo año. (R = $ 3.266,72; $ 3.480,76)

10. Si la tasa de interés a la que coloqué mi capital hace 10 años hubiese sido el doble de lo que fue, habría recibido hoy el doble de lo que recibo. Determinar la tasa de interés. (R = 7,75%)

11. Usted desea saber en cuántos meses cancelará una deuda de $ 10.000 si la tasa anual efectiva es de 30% y la cuota mensual que usted se compromete a pagar es de $ 651,92. Tenga presente que las cuotas se cancelan con pagos adelantados y que la primera se cancela al inicio del 3.^{er} mes. (R = 20 m)

12. ¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente el monto de $ 300 es $ 500 en 10 años? (R = 5,14%)

13. Un préstamo de $ 60.000 se amortizará en 5 años al 6%. La cuota capital que corresponde al segundo servicio será el doble de la primera, la tercera el triple de la primera y así sucesivamente. Determinar la primera cuota capital y construir el cuadro de amortización. (R = 4.000)

14. Si el valor actual de 20 cuotas trimestrales constantes es igual al valor actual de 40 cuotas también trimestrales y constantes, y además se sabe que cada una de las 40 cuotas equivalen a $^3/_4$ de cada una de las 20 cuotas, hallar la tasa trimestral. (R = 5,65%)

15. Se colocan 2 capitales: uno de $ 100.000 a una cierta tasa y el otro de $ 80.000 a una tasa menor. Después de 4 años, se ha obtenido en total $ 209.292,56. Determinar ambas tasas de interés si se sabe que, en caso de inversión de las

tasas, lo que se habría obtenido al final de los 4 años habría sido menor que el monto anterior en $ 1.340,20. (R = 3% y 4,5%)

16. Hoy se coloca un capital y, luego, cada 2 años, dos capitales equivalentes al doble y al triple del primero, respectivamente, de modo que, para ganar el 18% nominal capitalizable mensualmente, se obtenga un interés total de $ 30.000 al cabo de 6 años. Calcular los capitales colocados. (R = C = 5.664 ; 2C ; 3C)

17. Un ahorrista contrata un plan de depósitos en un banco que paga el 2,32% de interés trimestral con el objeto de formar un capital de $ 80.000 en tres años. Los depósitos son «2x» y «3x» al comienzo del primer y segundo año, respectivamente. Además, depositará cuotas trimestrales vencidas equivalentes a «x/2», durante el primer año; «x», durante el segundo; y «1,2x», durante el tercer año. Calcular el total de intereses ganados en los 3 años. (R = 10.314,27)

18. Mediante la entrega de $ 10.000 al final de cada año y durante 20, queremos formar un monto que nos permita percibir una renta durante 20 años. Si la tasa es del 4%, determinar el término de la renta. (R = 21.918,59)

19. Un objeto cuesta, al contado, $ 60.000 y, comprándolo a plazos, se paga el 25% de cuota inicial. Por el saldo se pagarán cuotas mensuales durante 3 años al interés del 9% nominal capitalizable mensualmente. Las indicadas cuotas serán constantes durante la primera mitad del plazo señalado y las restantes serán crecientes cada vez en un 5% de la primera de la etapa anterior. Calcular el total de intereses pagados en la operación. (R = 7.389,02)

20. Se ha colocado un capital de $ 400.000. Si se hubiese retirado un año después, se habría recibido $ 23.152,50 de más, mientras que, retirándolo un año antes, se hubiera recibido $ 22.050,00 de menos. Calcular la tasa de interés y el tiempo. (R = 5% y 3 años)

21-. Un capital colocado hoy en una entidad financiera ganará el 18% anual capitalizable trimestralmente. Después de 1,5 años, se retira la cuarta parte de los intereses ganados hasta entonces y, a partir de ese momento, la tasa de interés se capitaliza mensualmente. ¿Cuál será el monto total por retirar 2 años más tarde del primer retiro si se sabe que este fue de $ 30.000? (R = 17.108)

22. Un préstamo de $ 100.000 se paga en 5 años con mensualidades crecientes cada vez en $ 100 al interés del 9% efectivo anual. Al final de 3 años, se tiene disposición de dinero y se decide pagar la deuda existente al contado. Determinar el desembolso que hay que efectuar y el ahorro que significa este pronto pago. (R = $ 88.735; $ 9.030)

23. Para liquidar una deuda de \$ 10.000, con intereses al 4% convertible semestralmente, B acuerda hacer una serie de pagos de X cada uno: primero con vencimiento al término de 6 meses, el segundo con vencimiento en 5 años, y un año después un pago de \$2.500. Hallar X. (R = \$ 893,82)

24. Calcular qué cantidad de dinero se puede formar al final de 5 años si se depositan cuotas trimestrales vencidas al 2% de interés trimestral solo durante los 3 primeros años, de modo que, en los trimestres de orden impar, las cuotas serán de \$ 500 cada una, mientras que las de orden par serán por doble cantidad. (R = 11.746,90)

25. Una suma de \$ 10.000 ha sido colocada a intereses compuestos a la tasa del 5,5%. ¿Qué otra suma habría sido preciso colocar, 3 años después, a la misma tasa, para obtener 20 años después de la primera colocación una suma triple a la primera? (R = 35.227,23)

26. ¿Qué cantidad depositada el día de hoy en una cuenta que paga el 4% convertible trimestralmente será suficiente para hacer 20 retiros trimestrales de \$ 500 cada uno si se hace el primero al término del primer año? (R = \$ 8.087,33)

27. Mediante 24 cuotas mensuales adelantadas, que ganan el 2% mensual, se puede formar \$ 40.000. Si dichas cuotas son crecientes en un 3% de la inmediata anterior, calcular las mensualidades de orden 1 y 24, así como el total de interés ganados al cabo de los 2 años. (R = 924,12; 1.823,83; 8.185,81)

28. Si hubiese colocado 8/3 de lo que coloqué hace 20 años a la tasa del 2,25% semestral, habría recibido hoy \$ 17.025,00 de más. Se desea saber cuál fue el capital colocado. (R = 3.804,37)

29. Un préstamo de \$ 100.000 se amortiza en 5 años con cuotas mensuales crecientes en un 2% de la primera y se reconoce el 1% de interés mensual. Calcular:

    a) El saldo del adeudo si falta un año para terminar la amortización e indicar la proporción del préstamo que queda por pagar. (R = 33.400; 33,4%)
    b) La cuota capital 49. (R = 2.479,09)

30. M compró una granja con valor de \$ 25.000. Pagó \$12.000 iniciales y acordó pagar el saldo con intereses al 3% mediante pagos anuales de \$ 2.000, tanto tiempo como fuera necesario, y un pago final menor un año más tarde. Justamente después del tercer pago anual, los documentos firmados por M se vendieron a un inversionista que esperaba ganar el $3^1/_2$ % ¿Cuál fue el precio de venta? (R = \$ 7.921,51)

31. Un capital recibido puede ser reembolsado con seis servicios iguales. Si se sabe que la segunda y tercera cuota capital suman \$ 31.985,65, y la tasa efectiva del período es de 4%, se pide calcular el préstamo, el servicio y la ultima cuota capital. (R = 100.000; 19.076,19; 18.342,49)

32. En una operación de amortización pagadera en 3 años con servicios trimestrales constantes, la deuda por pagar de \$ 18.000 a la mitad del plazo total pactado representa el 58% del préstamo recibido. Calcular la tasa de interés trimestral. (R = 5,53%)

33. Un comerciante contrata un préstamo por \$ 100.000 al 6% pagadero en 16 años mediante servicios constantes. Determinar la cuota interés y la cuota capital correspondientes al 10.° servicio; asimismo, determinar la deuda extinguida y la deuda residual al comienzo del 11.° servicio. (R = 3.314,33; 6.580,88; 27.170,36; 72.829,64)

34. Un préstamo de \$ 200.000 debe extinguirse en 10 años con servicios iguales. Al final del 5.° año, la deuda residual es \$ 112.137,40. Se desea saber la tasa del préstamo. (R = 5%)

35. Un préstamo de \$100.000 se amortiza en 6 años con servicios mensuales vencidos al 1,2% de interés mensual. Estas cuotas serán variables cada dos años: en el primer bienio, serán constantes; en el segundo, serán decrecientes en un 5% de la inmediata anterior; y, en el tercero, serán crecientes en un 8% de la primera de esta etapa, que será igual a la cuota constante de la primera etapa. Calcular las cuotas de orden general 1, 25, 49 y el total de intereses pagados en los 6 años. ($R_1 = R_{49}$ = 1.935,57; R_{25} = 1.838,79)

36. Una deuda se paga con 6 cuotas trimestrales tales como \$ 250, 500, 750, etc., incluido el 5% de interés trimestral. Hacer el cuadro de amortización y verificar por fórmula la cuota-interés de orden 4. (R = 169,10)

37. La compañía XYZ utiliza baterías que cuestan \$ 30 con una vida útil de 2 años. Se ofrece otro modelo que cuestan \$ 40 con una vida probable de 3 años. ¿Cuál de los dos modelos es mejor inversión sobre la base de 5%? (R = La primera)

38. Según contrato, un préstamo debe amortizarse en 3 años con cuotas mensuales tales como \$ 1.000, 1.050, 1.102.50, etc. al interés del 1.5% mensual. Si se decide pagar la deuda existente al final de 2 años, ¿cuánto tendría que desembolsarse y cuánto se ahorra por pronto pago? (R = 26.899,37; 2.800,63)

39. Se desea formar \$ 100.000 en tres años, para lo cual se abre una cuenta de ahorros con un depósito inicial de \$ 2.000 en un banco que paga el 12% nominal

capitalizable mensualmente; luego, se depositan cuotas mensuales durante 2 y $^1/_2$ años. Calcular el total de intereses que se habrá ganado en los tres años y también lo ganado solo en el año intermedio. (R = $ 19.078,82; 3.773,20)

40. El comprador de un terreno tiene, para los efectos del pago, la posibilidad de elegir entre las siguientes alternativas:

    a) pagar al contado $ 175.000; y
    b) aceptar dos letras c/u de $ 100.000, en la que la primera vencerá dentro de 2 años y la segunda dentro de 3 años.

    Si la tasa de interés es del 6%, determinar cuál es la alternativa más favorable? (R= b)

41. Un ahorrista se propone efectuar el siguiente plan de ahorros durante 6 años, con el objeto de recibir $ 100.000 al final de un año adicional (total 7 años), para ganar un interés del 8% nominal anual, capitalizable mensualmente:

    a) Deposita hoy $ 5.000.
    b) Durante los 2 primeros años, cuotas mensuales constantes.
    c) Durante los siguientes 4 años, cuotas trimestrales también constantes de importe doble que las anteriores.

    Se pide calcular el total de intereses que habrá ganado al final del plazo conveni do. (R = $ 30.348,17)

42. Con intereses al 5% convertible trimestralmente, ¿qué pagos iguales X hechos al final de cada 6 meses por 10 años amortizarán una deuda de $ 12.000? (R = 770,90)

43. Si el valor actual de 10 cuotas anuales de $ 1.600 cada una es igual al de doble número de cuotas de $ 1.000 cada una, hallar la tasa de interés. (R = 5,241%)

44. Se compra un objeto a plazos mediante 36 cuotas mensuales anticipadas de $ 1.500 cada una y se reconoce el 1,80% de interés mensual en dichas cuotas. ¿Cuál es el precio al contado del objeto y cuánto se habría pagado por intereses por comprar a plazos? (R = 40.201,32; 13.798,68)

45. De un préstamo que se paga con 10 servicios, se conoce la cuota capital correspondiente al 5.° pago, que es igual a $ 48.319,15; y la cuota interés correspondiente al 8.° servicio, que es igual a $ 8.816,82. Determinar el monto del préstamo y la tasa de interés. (R = $ 500.000; 5%)

46. Calcular el importe neto actual de una deuda que es pagadera durante 5 años a la tasa de 48% efectiva anual y del siguiente modo:

    a) Durante los 2 primeros años, se pagan cuotas trimestrales que, comenzando por $ 1.000, crecen en 5% de la inmediata anterior.
    b) En el plazo restante, $ 4.000 mensuales. (R = $ 44.183,65)

47. Un préstamo se amortiza con 36 cuotas mensuales, tales como $ 500; $ 537,5; $ 577,81; etc., al interés del 1,5% mensual. Determinar qué proporción del préstamo está pendiente de amortización al final de 2 años. (R = 81,5%)

48. Una persona se propone el siguiente plan de ahorros para ganar el 3% de interés trimestral. Se pide calcular qué monto de interés habrá ganado al cabo de 8 años.

    a) Depósito inicial de $ 5.000
    b) Depósitos mensuales equivalentes al 15% del inicial durante 2 años
    c) Depósitos anuales equivalentes al 180% del inicial durante el plazo restante.
    (R = 13.309,74)

49. M obtiene un préstamo por $ 3.000 y acuerda pagarlo con interés al 5% convertible trimestralmente mediante pagos trimestrales de $ 225 por el tiempo que sea necesario. Hallar el número de pagos completos necesarios y el importe del pago final un período posterior. (R = 14; $ 152,57)

50. ¿Cuál debe ser el plazo del diferido de una renta de pago vencido de 18 términos c/u igual a $ 6.000 para que su valor actual al 4% sea igual al valor actual de una renta de pago anticipado de 12 términos iguales a $ 6.000? (R = 1 año, 11 meses)

51. Al nacimiento de su hijo, M desea depositar en un banco una cantidad tal que le proporcione a su hijo pagos de $ 1.250 cada 6 meses durante 4 años, y que venza el primero, cuando cumpla 18 años. Si su banco paga el 3% convertible semestralmente, ¿cuánto tendrá que depositar M? (R = 5.557,05)

52. Ahorrando desde hoy $ 1.000 mensuales adelantados durante 10 años, se puede formar un capital que permita percibir una renta trimestral permanente e indefinida. ¿Cuál es esta renta si se aplica el 1% de interés mensual? (R = $ 7.040,11)

53. Un préstamo de $ 50.000 se amortiza en 5 años con cuotas bimestrales que crecen cada vez en un 8% de la primera al interés del 2% mensual. Calcular lo pendiente de pago a la mitad del plazo convenido. (R = $ 45.133,51)

54. En una operación de amortización por el método progresivo al 1,5% de interés mensual, el préstamo amortizado hasta la mitad del plazo convenido es $ 21.670

y, a su vez, el saldo es el 56,66% del préstamo recibido. Calcular el plazo de amortización, el préstamo, el servicio mensual y la cuota interés de orden 20. (n = 36 m; P = 50.000; R = 1.807,62; I_{20} = 404,21)

55. Un préstamo es igual a 16,178 veces el primer servicio trimestral, siendo este equivalente a $ 2.392,63 y siendo las restantes cada vez mayores en 4% de la inmediata anterior. El plazo de amortización es de 4 años a la tasa de interés del 3% trimestral. Calcular la deuda residual a la mitad del plazo total convenido y determinar cuánto se ahorraría por intereses si se decide pagar el saldo en ese momento. (R = $ 26.314,06; 3.857,73)

56. Un ahorrista desea formar un capital de $ 30.000 al cabo de 18 meses, para lo cual deposita cada comienzo de semestre cuotas de ahorro de las que se conoce que son $ 5.000 y $ 4.000 las dos últimas, al interés del 9% nominal capitalizable mensualmente. Calcular cuánto ha ganado solo en el semestre intermedio. (R = 5.043,16)

57. Hoy se recibe un préstamo para amortizarlo en dos años con cuotas mensuales tales como $ 300; 450; 600; etc., al interés del 1% mensual. Después de un año, se recibe del mismo acreedor otro préstamo equivalente al 40% del anterior, cuya deuda total deberá amortizarse en el segundo año del contrato, bajo la misma modalidad, pero con un recargo en la tasa de interés en una proporción del 25%. Calcular las cuotas de orden 1 y 12 del segundo año que no son secuenciales de las del primer año. (R = $ 4.441,20; 6.091,20)

58. 57,5% del préstamo recibido representa la deuda residual al final del año de amortización de los dos años pactados mediante cuotas mensuales constantes de $ 1.800 cada una. Determinar la deuda inicial, la cuota capital número 15, la cuota interés de orden 20 y el total de intereses pagados solo en el segundo año. (R = 25.328; 1.126,31; 376,14; 5.464,65)

59. Un inversionista es invitado a colocar su dinero bajo dos alternativas de rentabilidad: la primera de $ 50.000 semestrales durante 10 años y la segunda de ingresos anuales crecientes tales como $ 66.000; 72.600; 79.860; etc., durante el mismo tiempo. Al 8% de interés efectivo anual, ¿por cuál de las opciones se decidiría? (R = La segunda)

60. Con cuotas de $ 30.000, obtenemos un valor actual de $ 330.000. Si la tasa de interés es el 5,5%, calcular el número de cuotas y discutir las posibles soluciones. (a. Los primeros 16 R = 30.000 y el R_{17} = 40.056,57; b. Los primeros 17R = 30.000, el R_{18} = 10.647)

61. Hoy se coloca un capital que ganará el 1% mensual. Después de 8 meses, se retira la tercera parte de interés ganado hasta entonces. Un año más tarde, se retira el 80% del capital inicial; el resto debe quedar por un año más para ganar el 4% trimestral. Si al final de esta operación se retiran $ 40.000, ¿cuál fue el capital inicial colocado? (R = $ 87.882.16)

62. Se recibe un préstamo para amortizarlo mediante cuotas trimestrales decrecientes en un 5% de la inmediata anterior. Si se comienza por $ 2.000, durante 4 años al 4% de interés trimestral, calcular el saldo de la deuda a la mitad del plazo convenido y la cuota interés correspondiente a la cuota número nueve. (R = $ 23.510)

63. Decidir qué es más conveniente: comprar un bien pagando $ 40.000 semestrales durante 15 años o pagar $ 30.000 semestrales permanentes sin límite de tiempo. Aplicar, en ambos casos, el 6% de interés semestral. (R = La primera)

64. Un préstamo de $ 200.000 se amortiza en 6 años; los servicios de los 3 primeros años son al 8% de interés anual y los restantes, al 10% de interés anual. Si se sabe que todos los servicios son iguales, hacer el cuadro de amortización. (R = $ 44.989,26)

65. Hay tres propuestas de inversión para comprar un bien y se desea saber cuál es la más ventajosa si 7,5% anual es el costo del dinero. Las inversiones ofrecen las siguientes alternativas de desembolsos adelantados:

    a) $ 40.000 anuales durante 10 años;
    b) $ 50.000 el primer año, 50.500 el segundo, 51.000 el tercero y así sucesivamente durante 7 años; y
    c) $ 178.000 cada 5 años durante 15 años. (R = La primera)

66. Se forma un monto de $ 500.000 en tres años mediante cuotas mensuales vencidas y crecientes en un 3% de la inmediata anterior para ganar el 1% de interés mensual. Calcular los intereses ganados en el año intermedio. (R = $ 245.396,33)

67. Una renta perpetua de $ 30.000 y diferida de un año cuesta $ 970.873,79. Determinar la tasa de interés. (R = 3%)

68. Un préstamo de $ 80.000 se amortiza al 5% de interés trimestral con 3 servicios trimestrales de igual importe y otros 3 de $ 10.000; 15.000 y 20.000. Hacer el cuadro de amortización. (R = 16.559.55)

69. Hoy se deposita un capital en un banco que paga el 12% de interés nominal, capitalizable mensualmente. Después de ocho meses, se retira el 25% de los

intereses ganados hasta entonces. Medio año más tarde, el banco reajusta la tasa de interés efectivo trimestral, y eso anima al ahorrista a depositar triple capital que el anterior. En estas condiciones, después de un año a partir del segundo depósito, el ahorrista retira \$ 45.580 por ambos depósitos. Calcular los capitales colocados. (R = \$ 9.800; 29.400)

70. Un préstamo de \$ 60.000 se paga en dos años al interés de 5% trimestral. En el primer año, las cuotas serán mensuales crecientes en un 8% de la primera, mientras que, en el segundo año, las cuotas trimestrales también serán crecientes pero en 2% de la inmediata anterior. Calcular:

    a) la primera y última cuota del primer año,
    b) la primera cuota del segundo año,
    c) el total de intereses pagados en los dos años y
    d) el saldo de la deuda medio año antes del término del plazo de amortización.

(R = \$ 2.835,49; 5.330,72; 5.437,33; 11.407,82; 10.621,31)

71. Un objeto que cuesta al contado \$ 45.000 se compra a plazos pagando el 20% de cuota inicial y, por el saldo, se pagan cuotas mensuales decrecientes en un 5% de la inmediata anterior durante 2 y $^1/_2$ años al interés del 3% trimestral. Calcular:

    a) el total de intereses pagados en la operación;
    b) el saldo de la deuda a la mitad del plazo convenido; y
    c) el total de intereses ahorrados por pagar el saldo al contado.

(R = \$ 5.683,37; 16.705,60; 1.478,04)

72. Un préstamo se amortiza con 9 servicios anuales. La primera cuota capital es \$ 87.022,24 y la 5.ª es \$ 109.863,57. Determinar lo siguiente: primero, la tasa; segundo, la última cuota capital; tercero, el servicio; y, cuarto, el préstamo. (R = 6%; C_9 = 138.700,22; R = 147.022,24; P = 10^6)

73. Si el objeto del problema n.° 71 hubiera sido comprado con dos cuotas de \$ 30.000 a los 15 y 30 meses, respectivamente, ¿qué tasa de interés trimestral se hubiera aplicado? (R = 3,98%)

74. La suma de los montos de dos capitales, el primero al 4% trimestral durante 10 trimestres y el segundo al 5% trimestral durante 15 trimestres, es \$ 2.551,29. Los valores actuales de ambos capitales suman \$ 790,15. Determinar los capitales. (R = \$ 598,40; 800,80)

75. Un préstamo de \$ 10.000.000 se amortiza al 5% de interés. Se desea conocer el plazo de duración si se sabe lo siguiente: primero, que la deuda residual al final del 10.° año es \$ 8.106.847; y, segundo, si se sabe que la amortización se realiza semestralmente y que en estas condiciones la deuda residual correspondiente al 20.° es \$ 121.601. (R = 30 años)

76. Un señor recibe una renta de \$ 1.200 durante 5 años. Durante los 10 años siguientes, recibe solo \$ 800; una vez finalizados estos y por los 7 años siguientes, recibe solo \$ 250, con lo cual la renta se agota. La tasa de interés fue del 5%; del 4,5 y del 6%, respectivamente. Se pide el valor actual total de la renta. (R = 10.860,24)

77. Se recibe un préstamo de \$ 40.000 para amortizarlo en 5 cuotas mensuales: las primeras 3 al 1% de interés mensual y las restantes, al 2% de interés mensual. Siendo las 5 cuotas iguales, hacer el cuadro de amortización. (R = \$ 8.384,76)

78. Mediante cuotas mensuales vencidas durante 4 años, al 15% mensual de interés, se forma un capital de \$ 50.000. Siendo las cuotas crecientes en un 2% de la inmediata anterior, calcular las de orden 1; 20; 36 y 48. (R = 460; 670; 920; 1.166)

79. Si se colocan dos capitales iguales y deseamos que el primero alcance el mismo monto que el segundo al 1% de interés mensual, y si los plazos son, respectivamente, 18 y 36 meses, qué tasa mensual corresponde al primer capital. (R = 2,01%)

80. Se recibe un préstamo de \$ 50.000 para ser pagado en 4 años mediante cuotas trimestrales constantes a la misma tasa de interés mensual que las 30 cuotas mensuales constantes y vencidas, cuyo total es \$ 45.000, con una ganacia de \$ 7.177,34 en dos y medio años. Calcular qué proporción del préstamo está por pagar si faltan 2 años y 3 meses para el término de la amortización. (R = \$ 31.020,76; 62,04%)

81. Una sociedad contrata un préstamo de \$ 2.000.000, reembolsables con 10 servicios anuales a la tasa del 5%. Después del tercer pago del servicio, el prestamista accede una reducción del 10% sobre el monto de los intereses adeudados. Calcular el monto real de este tercer servicio. (R = \$ 250.639,04)

82. Un préstamo se cancela en 4 años al interés del 4.5% trimestral; las cuotas del primer y segundo años son mensuales constantes de \$ 300 c/u, mientras que las del plazo restante son trimestrales, tales como \$ 400; \$ 440; \$ 480; etc. Determinar el préstamo recibido y el saldo al fin de 2 y $^1/_2$ años. (R = \$ 8.486,31; 2.965,11)

83. Un ahorrista deposita cuotas trimestrales adelantadas y constantes para formar \$ 100.000 en 4 y medio años, aparte de dos cuotas extras de \$ 5.000 y 8.000, con el mismo objeto al final del segundo y tercer años, respectivamente. Si todos sus depósitos ganan el 2,28% de interés mensual, calcular los intereses ganados entre 2 y medio y 4 años. (R = \$ 25.534,99)

84. Hoy se recibe un capital cuyo 80% se coloca para obtener, después de 3 años y 3 meses, el doble del capital que se colocó hace 21 meses. Hallar la tasa de interés trimestral aplicada. (R = 4,69%)

85. Los valores actuales de dos rentas inmediatas de pago vencido, la primera de 10 términos anuales a la tasa del 4% anual y la segunda de 15 términos a la tasa del 4,5%, suman \$ 24.220,22. Los montos de ambas rentas suman \$ 43.182,28. Determinar los términos o cuotas anuales diferentes de ambas rentas. (R = \$ 1.000; \$ 1.500)

86. Hoy se coloca un capital y, luego, cada 2 años, dos capitales equivalentes al doble y al triple del primero, respectivamente, de modo que, si se gana el 18% nominal capitalizable mensualmente, se obtiene un interés total de \$ 30.000 al cabo de 6 años. Calcular los capitales colocados. (R = \$ 5.663,99; x2; x3)

87. Un ahorrista contrata un plan de depósitos en un banco que paga el 2,32% de interés trimestral con el objeto de formar un capital de \$ 80.000 en tres años. Los depósitos son «2x» y «3x» al comienzo del primer y segundo año, respectivamente. Además, depositará cuotas trimestrales vencidas equivalentes a «x/2», durante el primer año; «x», durante el segundo; y «1,2x», durante el tercer año. Calcular el total de intereses ganados en los 3 años. (R = \$ 10.822,70)

88. Un objeto cuesta al contado \$ 60.000 y, comprándolo a plazos, se paga el 25% de cuota inicial. Por el saldo, se pagarán cuotas mensuales durante 3 años al interés del 9% nominal capitalizable mensualmente. Las indicadas cuotas serán constantes durante la primera mitad del plazo señalado y las restantes serán crecientes cada vez en un 5% de la primera de la etapa anterior. Calcular el total de intereses pagados en la operación. (R = \$ 16.750)

89. Determinar:

   a) las tasas equivalentes mensual, bimestral y trimestral del 18% anual,
   b) las tasas proporcionales trimestral, cuatrimestral y semestral del 16% anual,
   c) la tasa nominal del 1,2% mensual, 4,5% trimestral y 3,25% cuatrimestral, y
   d) la conversión del 2% bimestral a las tasas equivalentes mensual, trimestral y semestral. (R = Aplicar reglas del capitulo III)

90. Calcular la duración de una renta de pago anticipado y diferido de 20 años, cuyos términos son de $ 100.000 anuales y cuyo valor actual, a la tasa del 4,5%, es de $ 705.800,45. (R = 30 años)

91. Mediante 24 cuotas mensuales adelantadas, que ganan el 2% mensual, se puede formar $ 40.000. Si dichas cuotas son crecientes en un 3% de la inmediata anterior, calcular las mensualidades de orden 1 y 24, así como el total de intereses ganados al cabo de los 2 años. (R = $ 924,12; $ 1.823,83; $ 8.185,81)

92. Un préstamo de $ 100.000 se amortiza en 6 años con servicios mensuales vencidos al 1,2% de interés mensual. Estas cuotas serán variables cada dos años: en el primer bienio, serán constantes; en el segundo, serán decrecientes en un 5% de la inmediata anterior; y, en el tercero, serán crecientes en un 8% de la primera de esta etapa, que será igual a la cuota constante de la primera etapa. Calcular las cuotas de orden general 1, 25, 49 y el total de intereses pagados en los 6 años. (R = $ 1.935,57; $ 1.838,79; $ 5.342,18; $ 63.052,58)

93. Según contrato, un préstamo debe amortizarse en 3 años con cuotas mensuales tales como $ 1.000; $ 1.050; $ 1.102,50, etc., al interés del 1,5 mensual. Si se decide pagar la deuda existente al final de 2 años, ¿cuánto tendría que desembolsarse y cuánto se ahorra por pronto pago? (R = $ 26.899,37; 2.800,63)

94. Un préstamo de $ 100.000 se amortiza al 1% de interés mensual en un plazo de 6 años. En el primer tercio de este plazo, se pagarán cuotas mensuales crecientes en un 5% de la primera. En el segundo tercio, no habrá pagos. Y, en el tercero, las cuotas vencidas trimestrales serán decrecientes en un 2% de la inmediata anterior, siendo la primera igual a la última del primer tercio. Calcular el total de intereses pagados en la operación. (R = $ 6.035,50)

95. Una deuda de $ 40.000 se amortiza en dos años por el método americano, pagando 2% mensual al acreedor y ganando 1,5% mensual en las cuotas del fondo de amortización. Determinar cuánto es el costo neto de la operación. (R = $ 6.254.18)

96. Tres capitales colocados con intervalo de 6 meses se convierten en $ 50.000 al final de 2 años. Siendo $ 20.000 y 10.000 los dos primeros capitales, calcular el total de intereses ganados y el interés ganado solo por el tercer capital. La tasa de interés es de 0,84% mensual. (R = $ 7.401,77; $ 1.330,24)

97. Un préstamo de $ 60.000 se cancela en tres años mediante cuotas trimestrales al 4% de interés trimestral. Calcular dichas cuotas si las del segundo y tercer años son el doble y el triple que las del primero, respectivamente. Determinar luego el total de intereses pagados en los 3 años. (R = $ 3.372,19; x2; x3; $ 20.932,56)

98. Un préstamo se cancela en 2 años con cuotas mensuales tales como \$ 500; \$ 530; \$ 561,80; etc. Calcular el préstamo y el saldo al final del primer año, si el 1% es la tasa de interés mensual. (R = \$ 21.888,04; \$ 15.810,27)

99. Una persona abre una cuenta de ahorros con \$ 6.000 en un banco que paga el 15% de interés anual, capitalizable mensualmente. Durante 2 años, deposita trimestralmente el 15% del depósito inicial y, luego, en los dos años siguientes, el 6% del mismo pero mensualmente. Al final del cuarto año, retira el 80% de los intereses ganados solo por el primer depósito. Se desea saber cuánto deberá retirar un año más tarde si desea retirar todo lo restante, equivalente a 6 veces el deposito inicial, después de 12 meses mas tarde. (R = \$ 1.573,56)

100. Un préstamo de \$ 100.000 se paga en 6 años al interés del 13,50% efectivo anual, mediante los siguientes desembolsos:

a) al año, el 10% del préstamo;
b) durante los siguientes 2 años, mensualmente el 2% del préstamo; y
c) durante los siguientes 2 años, bimestralmente el 4% del préstamo.

¿Cuál es el saldo que se requiere un año más tarde para su cancelación? (R = 4.131,56)

Bibliografía

ALCARAZ SEGURA, L.
Cálculos financieros. México D. F.: Mc Graw Hill, 1958.

AYONA LEÓN, Moisés
Matemáticas financieras. Lima: Universidad Villarreal, 1969.

AYRES JR., Frank
Matemáticas financieras. México D. F.: Mc Graw Hill, 1971.

CASTRO GÓMEZ, Carlos
Elementos fundamentales de matemática financiera. Lima: UNI, 1972.

DE LA CUEVA, Benjamín
Matemáticas financieras. México D. F.: UNAM, 1968.

DE VICENZO, Osvaldo N.
Matemática financiera. Buenos Aires: Kapeluz, 1973

GALDÓS Lic. L.
Matemáticas de hoy. Madrid: Cultural, 2002.

GARAYAR PACHECO, Gregorio
Lecciones de matemáticas financieras. Lima: Editorial Jurídica, 1973.

GARCÍA, Jaime A.
Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Santa Fe de Bogotá: Pearson, 1968.

GONZÁLES GALÉ, José
Matemáticas financieras. Buenos Aires: López, 1956.

LAZZERINI, Silvio y G. GOLDSMITH
Elementos de matemáticas financieras. Santiago de Chile: Universitaria, 1965.

MARAVAL CACESNOVES, Darío
Matemática financiera. Madrid: Dossat, 1960.

MARIMÓN, Rafael
Nociones de aritmética mercantil. Barcelona: Seix y Barral, 1959.

MOORE, Justin H.
Manual de matemáticas financieras. México: Uteha, 1960.

MURIONI, Oscar y Ángel TROSSERO
Cálculo financiero. Buenos Aires: Tesis S.A., 1986.

PALACIOS, Hugo E.
Introducción al cálculo actuarial. 2.ª ed. Madrid: Mapfre, 1996.
Compendio de Matemática Financiera. 4.ª ed. Lima: Imprenta Núñez,1993.

PINO QUINTANA, Ernesto
Matemáticas financieras. La Habana: Escuela de Ciencias Comerciales de la Universidad de La Habana, 1953.

SCHNEIDER, Erick
Teoría de la inversión. Buenos Aires: El Ateneo, 1971.

VÁSQUEZ CRUZ, Ruperto
Elementos de Matemática Comercial. Puerto Rico: Editorial Universitaria, 1969.

VENTO ORTIZ, Alfredo
Finanzas aplicadas. Lima: Universidad del Pacífico, 1968.

Fundamentos Técnicos de la Matemática Financiera
Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
Ediciones Atenea EIRL
Av. Carlos Gonzales 252, San Miguel
Telf.: 452-4239 / 452-4123
edicionesatenea@yahoo.com
Marzo de 2006

PUBLICACIONES RECIENTES

Albañilería estructural
Héctor Gallegos y Carlos Casabonne

Una concepción trágica de la cultura
Selma Baptista

Derecho Internacional Público. Tomo III. Solución pacífica de controversias
Fabián Novak y
Luis García-Corrochano

Obras esenciales I
Guillaume Apollinaire

Fondo Editorial
Pontificia Universidad Católica del Perú
Plaza Francia 1164, Lima 1 - Perú
Teléfono: (51 1) 330-7410, 330-7411
Fax: (51 1) 330-7405
Correo electrónico: feditor@pucp.edu.pe

ISBN 9972-42-756-0

9 789972 427565