SOBRE UNA FORMA ELEMENTAL DE EXPOSICION DE LA TEORIA DE LA CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXION Y MAXIMOS Y MINIMOS DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Por JOSE TOLA PASQUEL
Profesor de la Universidad Católica del Perú

1.—Indicamos aquí brevemente una forma de exponer las citadas cuestiones cuando sea necesario anticiparlas a la fórmula de Taylor.

Supongamos que $y = f(x)$ es una función derivable dos veces en un entorno de x_0. La función

$$\triangle(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)$$

mide la diferencia de ordenadas de la curva y de su tangente en el punto $[x_0, f(x_0)]$ para el valor x de la variable. Según sea positivo o negativo $\triangle(x)$, la curva se encontrará en x encima o debajo de esa tangente. Según el teorema de los acrecentamientos finitos se tendrá para los valores de x de un cierto entorno de x_0

$$\begin{aligned} \triangle(x) &= (x - x_0)\,[f'(x_1) - f'(x_0)] \\ &= (x - x_0)\,(x_1 - x_0)\,f''(x_2) \end{aligned}$$

siendo $x_1 \in$ Int. x_0x ; $x_2 \in$ Int. $x_0x_1 \subset$ Int. x_0x. [1])

Si fuera $f''(x_0) = 0$, y además existiera en cierto entorno de x_0 la tercera derivada, tendríamos por el teorema de los acrecentamientos finitos

$$f''(x_2) = (x_2 - x_0)\,f'''(x_3),$$

[1]) Int. ab = intervalo cuyos extremos son a y b. $x \in$ Int. ab, significa que el número x está contenido en el intervalo ab. Int. $ab \subset$ Int. cd quiere decir que el intervalo ab está contenido en el intervalo cd.

y por tanto

$$\triangle(x) = (x - x_0)\,(x_1 - x_0)\,(x_2 - x_0)\,f'''(x_3)$$

siendo $x_3 \in$ Int. $x_0x_2 \subset$ Int. x_0x.

Si supusiéramos ahora que $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, y que existiera la cuarta derivada en un entorno de x_0, resultaría del teorema de los acrecentamientos finitos

$$f'''(x_3) = (x_3 - x_0)\,f^{(4)}(x_4)$$

y $\triangle(x) = (x - x_0)\,(x_1 - x_0)\,(x_2 - x_0)\,(x_3 - x_0)\,f^{(4)}(x_4)$

siendo $x_4 \in$ Int. $x_0x_3 \subset$ Int. x_0x.

Y en general, se demostrará por inducción completa que *si en un entorno de* x_0 *existen las* n *primeras derivadas* ($n \geqq 2$), *siendo* $f^{(p)}(x_0) = 0$ *para* $2 \leqq p \leqq n - 1$, *se tendrá*

$$\triangle(x) = (x - x_0)\,(x_1 - x_0)\,\ldots\,(x_{n-1} - x)\,f^{(n)}(x_n),$$

perteneciendo $x_1, x_2, \ldots x_n$ *al intervalo* x_0x.

2.—**Signo de la función** $\triangle(x)$. — Las diferencias $(x_i - x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ tienen evidentemente el mismo signo que $(x - x_0)$, luego el producto $(x - x_0)\,(x_1 - x_0)\,\ldots\,(x_{n-1} - x_0)$ será positivo o negativo según que n sea por o impar, y estableceremos la siguiente proposición: *si* $f(x)$ *admite las* n *primeras derivadas* ($n \geqq 2$) *en un entorno de* x_0, *siendo además* $f^{(p)}(x_0) = 0$ para $2 \leqq p \leqq n - 1$, *se tiene*

$$\mathrm{sg}\,\triangle(x) = \mathrm{sg}\,f^{(n)}(x_n),\ ^{2)}$$

para valores pares de n, *y*

$$\mathrm{sg}\,\triangle(x) = \mathrm{sg}\,(x - x_0)\ .\ \mathrm{sg}\,f^{(n)}(x_n),$$

para los valores impares de n, *siendo* x_n *un punto del intervalo* x_0x.

2) sg A = signo del número real A.

3.—**Concavidad y puntos de inflexión.** — Sin entrar en los detalles de la sencilla interpretación geométrica diremos que la curva de ecuación $y = f(x)$, en que $f(x)$ es continua, presenta para $x = x_0$ su *concavidad hacia arriba* o *hacia abajo*, si en un entorno de x_0, exceptuado este punto, $\triangle(x)$ es una función positiva o negativa, respectivamente. Si $\triangle(x)$ tiene un signo para $x < x_0$ y otro para $x > x_0$, en un entorno de x_0, diremos que en x_0 la curva posee un *punto de inflexión*.

De estas definiciones y de la proposición demostrada en el N. 2 resulta el teorema siguiente:

Si $\mathrm{f(x)}$ *admite en un entorno de* $\mathrm{x_0}$ *derivadas continuas hasta un orden no menor de dos, y la derivada de menor orden, entre aquellas de orden no menor de 2, que no se anula en* $\mathrm{x_0}$, *es de orden par, la curva* $\mathrm{y = f(x)}$ *presenta en* $\mathrm{x_0}$ *su concavidad hacia arriba, si dicha derivada es positiva, y hacia abajo si es negativa.*

En cambio, si la primera derivada de orden no menor que 2 que no se anula en $\mathrm{x_0}$ *es de orden impar, la curva presenta en* $\mathrm{x_0}$ *un punto de inflexión.*

En efecto, si en primer término admitimos que $f^{(2p)}(x_0) \neq 0$, siendo p entero positivo, y además es $f^{(n)}(x_0) = 0$ para $2 \leqq n < 2p$, se tendrá según lo antes demostrado

$$\operatorname{sg} \triangle(x) = \operatorname{sg} f^{(2p)}(x_{2p}),$$

y puesto que $f^{(2p)}(x)$ es continua, habrá un entorno de x_0 en que $f^{(2p)}(x)$ tiene el signo de $f^{(2p)}(x_0)$, y por consiguiente, para x en ese entorno, en cuyo caso x_{2p} también se encontrará en él, se tendrá

$$\operatorname{sg} \triangle(x) = \operatorname{sg} f^{(2p)}(x_0),$$

de donde se deduce, con arreglo a las definiciones arriba dadas, la primera parte del teorema.

Si ahora suponemos que $f^{(2p+1)}(x_0) \neq 0$, para p entero positivo, y además, para cada entero n tal que $2 \leqq n < 2p + 1$ es $f^{(n)}(x_0) = 0$, se tendrá

$$\operatorname{sg} \triangle(x) = \operatorname{sg}(x - x_0) \;.\; \operatorname{sg} f^{(2p+1)}(x_{2p+1}),$$

y por la continuidad de $f^{(2p+1)}(x)$, se tendrá en un entorno de x_0

$$\operatorname{sg} \triangle(x) = \operatorname{sg}(x - x_0) \ . \ \operatorname{sg} f^{(2p+1)}(x_0).$$

Ahora bien, el signo de $f^{(2p+1)}(x_0)$ es constante, mientras que $(x - x_0)$ es positivo o negativo, según que sea $x > x_0$ o $x < x_0$. Resulta entonces que el signo de $\triangle(x)$ es uno para $x < x_0$ y otro para $x > x_0$, en un cierto entorno de x_0, lo cual demuestra que en x_0 hay un punto de inflexión.

4.—**Máximos y mínimos.** — Introduciendo la noción de máximos y mínimos de la manera ordinaria, una vez demostrado que es necesario que sea $f(x_0) = 0$ para que en x_0 haya máximo o mínimo, es fácil probar que, si esa condición se cumple, es suficiente para que haya máximo en x_0, que en este punto la curva presente su concavidad hacia abajo, y para que haya mínimo, que presente su concavidad hacia arriba.

El teorema del N. 3 proporciona inmediatamente la manera de determinar los puntos de inflexión y de determinar el sentido de la concavidad en los demás puntos. En particular, en aquellos puntos en que la primera derivada se anula, la aplicación del teorema permitirá averiguar si existen máximos, mínimos o puntos de inflexión. Los criterios que así resultan son los bien conocidos.

José TOLA PASQUEL.