

CAPITULO 8: FLUJO PERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN

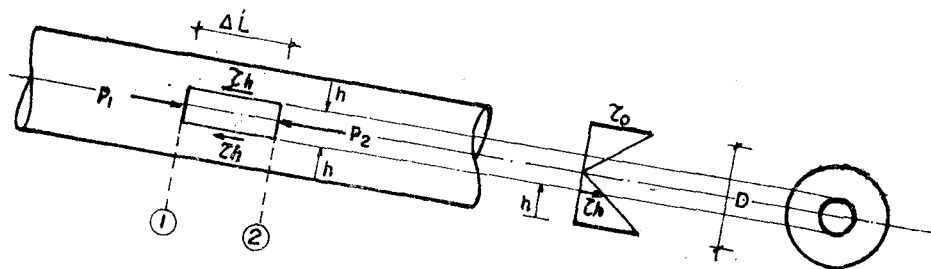
En este capítulo se deducen las fórmulas que gobiernan el flujo permanente en conductos a presión. Se describe también la manera de solucionar los problemas más comunes del flujo de líquidos en tuberías, especialmente el agua.

8.1 Distribución del esfuerzo cortante

En el esquema, para el cuerpo libre cilíndrico que se muestra, se cumple en la dirección del movimiento:

$$\Sigma F = m \cdot a = 0$$

porque siendo el flujo uniforme, la aceleración es nula.



Las fuerzas son:

$$\text{componente del peso} = \gamma \cdot \Delta V_0 = \gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 \Delta L \sin \theta$$

$$\text{diferencia de empujes} = (p_1 - p_2) \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2$$

$$\text{fuerza de corte} = \tau_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L$$

reemplazando:

$$\gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 \Delta L \sin \theta + (p_1 - p_2) \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 - \tau_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L = 0$$

dividiendo entre $\gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)$:

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L \sin \theta + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right) \left(\frac{D}{2} - h\right) = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

pero $\Delta L \sin \theta = Z_1 - Z_2$:

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \left[(Z_1 - Z_2) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right) \left(\frac{D}{2} - h\right) \right] = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

pero el corchete representa la caída de la línea de energía, de modo que sí,

S = pérdida de energía por fricción por unidad de longitud
 el corchete es: $S \cdot \Delta L$

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) S \Delta L = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

$$\tau_h = \gamma \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2}\right) S \dots (65)$$

en la pared el esfuerzo de corte es máximo:

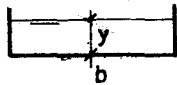
$$\tau_o = \gamma \frac{D}{4} S \dots (66)$$

Otra forma de escribir la (65) es:

$$\tau_h = \tau_o \left(1 - \frac{h}{r}\right) \quad r = \text{radio de la tubería}$$

que se usa para dibujar la variación del esfuerzo cortante en una sección de la tubería (ver figura última). Esta distribución es válida tanto para flujo laminar como para flujo turbulento, pues no se ha impuesto ninguna restricción al respecto.

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la ley de distribución del esfuerzo cortante en la sección de un canal. Para ello es necesario introducir el concepto de radio hidráulico (R) definido como la relación entre el área mojada de la sección y el perímetro mojado. Para un canal muy ancho:



$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} \approx \frac{by}{b} = y$$

Se obtiene:

$$\tau_h = \gamma (y - h) S \dots (65')$$

$$\tau_o = \gamma R S \dots (66')$$

8.2 Distribución de velocidades en el flujo laminar

Si el flujo es laminar se cumple la ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau_h = \mu \frac{d v_h}{d h}$$

utilizando la (65):

$$\gamma \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S = \nu \frac{d v_h}{dh}$$

dividiendo entre ρ :

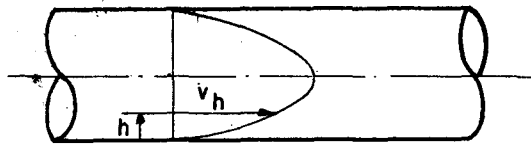
$$g \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S = \nu \frac{d v_h}{dh}$$

$$d v_h = \frac{g S}{\nu} \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) dh$$

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left(\frac{Dh}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + C \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 0 \\ v_h = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left(\frac{Dh}{4} - \frac{h^2}{4} \right) \dots\dots (67)$$

es decir, en una sección del tubo la velocidad se distribuye según una parábola:



La velocidad es máxima en el centro:

$$v_c = \frac{g S}{\nu} \frac{D^2}{16}$$

y la velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{D/2} v_h \cdot dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{D/2} v_h \cdot 2\pi \left(\frac{D}{2} - h \right) dh$$

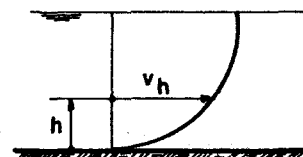
.....
.....

$$V = \frac{g S D^2}{32 \nu} \dots\dots (68) \text{ es decir un medio de la velocidad en el centro,}$$

Si siguiendo un procedimiento similar se deduce la ley de distribución de la velocidad en un canal muy ancho:

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left(yh - \frac{h^2}{2} \right) \dots (67')$$

$$y \quad V = \frac{g S R^2}{3 \nu} \dots\dots (68')$$



8.3 Distribución de velocidades en el flujo turbulento

Es necesario hacer el estudio por separado, para contornos lisos y contornos rugosos. Se hace notar que en los esquemas ilustrativos la escala vertical está bastante aumentada.

8.3.1 Contornos hidráulicamente lisos

Se parte de las siguientes hipótesis:

- * se forma en la pared una subcapa laminar de espesor δ que cubre la rugosidad de la pared K (en el capítulo 7 el espesor de la subcapa laminar se designó con δ_0).



- * fuera de la subcapa laminar el flujo es turbulento
- * en el flujo turbulento la ley del esfuerzo cortante es, según los estudios sobre todo de Prandtl:

$$\tau_h = \rho L^2 \left(\frac{d v_h}{dh} \right)^2 \quad \dots \quad (69)$$

L = longitud de mezcla, definida como la distancia media que tiene que recorrer una partícula para transferir su exceso de cantidad de movimiento.

$L = \chi h \left(1 - \frac{h}{D/2} \right)^{1/2}$, expresión que satisface la exigencia que L sea cero en la pared y en el eje del tubo.

χ = constante de Von Karman = 0,40

$h > \delta$ En la (69):

$$\sqrt{\tau_h / \rho} = \chi h \left(1 - \frac{h}{D/2} \right)^{1/2} \frac{d v_h}{dh}$$

τ_h según (65):

$$\sqrt{\frac{\gamma \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S}{\rho}} = \quad "$$

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S \left(1 - \frac{h}{D/2} \right)} = \quad "$$

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S} = \chi h \frac{d v_h}{dh}$$

$$d v_h = \frac{\sqrt{g \frac{D}{4} S}}{\chi} \frac{dh}{h}$$

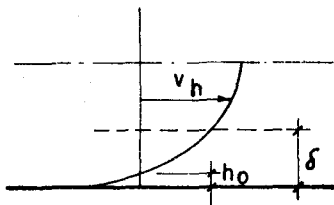
empleando la (66):

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S} = \sqrt{\frac{\gamma \frac{D}{4} S}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = v_* \dots \text{velocidad de corte}$$

$$d v_h = \frac{v_*}{x} \frac{dh}{h}$$

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ln h + C$$

esta ecuación no es válida en la pared pues para $h = 0$ $\ln h = -\infty$. Por eso, se designa con h_0 la distancia hasta donde es válida:



$$\left. \begin{array}{l} h = h_0 \\ v_h = 0 \end{array} \right\} C = -\frac{v_*}{x} \ln h_0$$

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ln \frac{h}{h_0} \dots (70)$$

$h \leq \delta$ Dentro de la subcapa laminar se cumple la ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau_h = \mu \frac{d v_h}{dh}$$

y se admite que $\tau_h = \tau_0$

$$\frac{d v_h}{dh} = \frac{\tau_h}{\mu} = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\tau_0/\rho}{\nu} = \frac{v_*^2}{\nu}$$

$$v_h = \frac{v_*^2}{\nu} h + C \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 0 \\ v_h = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$v_h = \frac{v_*^2}{\nu} h \dots (71)$$

Para $h = \delta$ son válidas las dos ecuaciones (70) y (71):

$$\left. \begin{array}{l} v_\delta = \frac{v_*}{x} \ln \frac{\delta}{h_0} \\ v_\delta = \frac{v_*^2}{\nu} \delta \end{array} \right\} \frac{v_*^2}{\nu} \delta = \frac{v_*}{x} \ln \frac{\delta}{h_0}$$

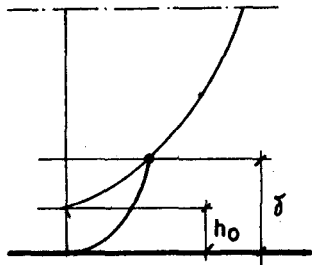
Prandtl demostró mediante el análisis y la experimentación que

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

... (72) Reynolds de corte referido a δ .

reemplazando:

$$11.6 v_* = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{\delta}{h_0}$$



$$\ln \frac{\delta}{h_0} = 11.6 \chi = 11.6 \times 0.40 = 4.64$$

$$h_0 = \frac{\delta}{104}$$

reemplazando en la (70):

$$v_h = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{104 h}{\delta} \quad \dots (73)$$

La velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_{\delta}^{D/2} v_h dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_{\delta}^{D/2} v_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) dh$$

.....
.....

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11.6 D}{\delta} \quad \dots (74)$$

y en función del radio hidráulico: $V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{46.4 R}{\delta} \quad \dots (75)$

(nótese cómo por simplicidad se desprecia en la integral el pequeño flujo de la subcapa laminar).

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la distribución de la velocidad y la velocidad media en un canal muy ancho:

$$v_h = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{104 h}{\delta} \quad \dots (73')$$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{38.3 R}{\delta} \quad \dots (75')$$

8.3.2 Contornos hidráulicamente rugosos

Se parte de las siguientes hipótesis:

* la altura de las asperezas es tan grande que no permite que se forme la subcapa laminar,



* siguen siendo aplicables las fórmulas sugeridas por Prandtl para el esfuerzo cortante.

Se puede entonces partir de la ecuación (70):

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{h}{h_0}$$

Nikuradse estudió con minuciosidad los conductos de paredes rugosas. Utilizó tubos con rugosidad artificial uniforme obtenida con granos de arena. Resultado de estos estudios es que la ecuación última es válida hasta

$$h_0 = \frac{K}{30} .$$

Reemplazando:

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{30 h}{K} \quad \dots\dots (76)$$

La velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_{h_0}^{D/2} v_h dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_{h_0}^{D/2} v_h \cdot 2 \pi \left(\frac{D}{2} - h\right) dh$$

.....
.....

$$V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{3.35 D}{K} \quad \dots\dots (77)$$

y en función del radio hidráulico: $V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{13.4 R}{K} \quad \dots\dots (78)$

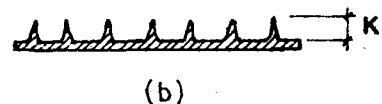
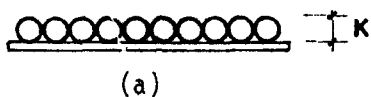
(aquí también se aprecia que por simplicidad se desprecia en la integral el pequeño flujo próximo a la pared).

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la distribución de velocidades y la velocidad media en un canal muy ancho:

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{30 h}{K} \quad \dots\dots (76')$$

$$V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{11.0 R}{K} \quad \dots\dots (78')$$

Los esquemas que siguen se refieren a la rugosidad artificial de Nikuradse (a) y a la rugosidad real de las tuberías comerciales (b).



en la rugosidad artificial K se refiere al diámetro de los granos de arena y en la rugosidad comercial a la altura media de las asperezas.

8.4 Pérdida de carga por fricción en el flujo laminar

La pérdida de carga por fricción en tuberías se determina con la fórmula Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \dots (79)$$

consistiendo el problema en establecer el valor del coeficiente de fricción f .

De la ecuación (68): $v = \frac{g D^2 S}{32 \mu}$

$$S = \frac{32 \mu v}{\gamma D^2}$$

$$h_f = \frac{32 \mu v L}{\gamma D^2} \quad \dots (80) \text{ ecuación Hagen - Poiseuille.}$$

adecuándola a la forma de la (79):

$$h_f = \frac{64}{\frac{\rho v D}{\mu}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

es decir, $f = \frac{64}{Re} \quad \dots (81)$

válida para cualquier tubería en que el flujo es laminar, es decir con números de Reynolds de hasta 2,300.

Para canales muy anchos se puede escribir:

$$h_f = S L$$

y tomar S de la ecuación (68'):

$$h_f = \frac{3 \nu \gamma L}{g R^2} \quad \dots (80')$$

8.5 Pérdida de carga por fricción en el flujo turbulento

8.5.1 Fórmula de Colebrook-White

Por definición, $h_f = S L$

según la (66): $h_f = \frac{4 \tau_0}{\gamma D} L$

comparándola con la (79):

$$\frac{4 \tau_0}{\gamma D} L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\tau_0 = f \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{8}$$

$$\tau_0 = f \cdot \rho \frac{V^2}{8} \quad \dots \quad (82)$$

reemplazando en la velocidad de corte:

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} \cdot V \quad \dots \quad (83)$$

o bien:
$$V = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* \quad \dots \dots \dots (83')$$

Recordemos la (74) válida para contorno hidráulicamente liso,

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11,6 D}{\delta}$$

pero
$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11,6$$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{v_* D}{\nu}$$

con la (83):
$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} \frac{V D}{\nu}$$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln 0,35 Re \sqrt{f}$$

con la (83')
$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* = \frac{v_*}{0,40} \ln 0,35 Re \sqrt{f}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,88 \ln 0,35 Re \sqrt{f}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,88 \ln Re \sqrt{f} - 0,92$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,03 \log Re \sqrt{f} - 0,92$$

ajustando los coeficientes a los valores obtenidos experimentalmente por Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log Re \sqrt{f} - 0,8$$

o bien:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2,51} \quad \dots \dots \dots (84)$$

válida para tuberías de paredes lisas.

Recordemos ahora la (77) válida para contorno hidráulicamente rugoso:

$$v = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{3.35 D}{K}$$

con la (83') $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* = \frac{v_*}{0.40} \ln \frac{3.35 D}{K}$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88 \ln \frac{3.35 D}{K}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88 \ln \frac{D}{K} + 1.06$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{D}{K} + 1.06$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{D}{2K} + 1.67$$

ajustando los coeficientes a los valores obtenidos experimentalmente por Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2K} + 1.74$$

o bien: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71 D}{K} \dots\dots\dots (85)$

válida para flujo altamente turbulento en tubería rugosa.

Luego se hicieron investigaciones en tuberías comerciales habida cuenta que la rugosidad comercial es irregular a diferencia de la rugosidad artificial de Nikuradse que es uniforme. Las diferencias se compatibilizaron asignando a cada material comercial una de las rugosidades artificiales. - Desde el punto de vista práctico el impase ha quedado definitivamente resuelto con la tabla del Apéndice A3.

Cuando una tubería trabaja en la zona de transición entre tubo liso y tubo rugoso altamente turbulento rige una fórmula que resulta de combinar las ecuaciones (84) y (85):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{K/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \dots\dots (86)$$

conocida como fórmula de Colebrook-White.

En ella se puede apreciar que si el tubo trabaja como liso la rugosidad - pierde significación, se ignora el primer término del paréntesis y resulta la (84); y que si el tubo trabaja como rugoso con flujo altamente turbulento el Re pierde significación, se ignora el segundo término y resulta la (85).

Si la tubería trabaja en la zona de transición ambos parámetros intervienen en su comportamiento y rige la (86).

Diagramas.- Con base en estos resultados ha sido construido el Diagrama de Moody que aparece en el Apéndice A4 y que sirve para determinar f cuando se conoce el caudal. También el diagrama de Johnson-Rouse que aparece en el Apéndice A5 y que sirve para determinar f cuando el caudal es desconocido.

Concepto de rugosidad.- Observando el diagrama de Moody se puede notar cómo en una misma tubería (un cierto valor de la rugosidad relativa K/D) su contorno puede tener unas veces comportamiento de liso, otras veces de rugoso y otras transicional.

Con esto debe quedar completamente aclarado el por qué del empleo de los términos "contorno hidráulicamente liso", "contorno hidráulicamente rugoso" y "contorno en transición".

Para las rugosidades relativas muy grandes no cabe la posibilidad de comportamiento liso porque no llega a formarse la subcapa laminar.

Comentario.- Cuando no se conoce el caudal no se puede determinar el Re para hallar f con el diagrama de Moody, a menos que se proceda por tanteos. Esto es obviado con el empleo del diagrama de Johnson-Rouse, en el cual el valor del eje X se procederá a justificar enseguida:

$$Re = \frac{V D}{\nu}$$

de aquí,
$$V^2 = \frac{Re^2 \nu^2}{D^2}$$

que reemplazado en la fórmula de Darcy-Weisbach da:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Re^2 \nu^2}{2g D^2}$$

despejando:
$$Re^2 \cdot f = \frac{2g D^3 h_f}{\nu^2 L}$$

$$Re \sqrt{f} = \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2g D h_f}{L}}$$

Los términos del segundo miembro son todos conocidos o se pueden determinar como ocurre con h_f ,

$$h_f = \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)$$

8.5.2 Fórmula de Chezy

Para contorno hidráulicamente liso rigen las ecuaciones:

$$(75) \text{ para tuberías, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{46.4 R}{\delta}$$

$$(75') \text{ para canales, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{38.3 R}{\delta}$$

la única diferencia está en el valor del coeficiente numérico, de manera que se puede conciliar, escribir el valor medio:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{42 R}{\delta} \quad \dots \quad (87)$$

y emplear esta única fórmula para tuberías y canales de contorno hidráulicamente liso.

Análogamente, para contorno hidráulicamente rugoso rigen:

$$(78) \text{ para tuberías, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{13.4 R}{K}$$

$$(78') \text{ para canales, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11.0 R}{K}$$

de modo que se puede conciliar escribiendo el valor medio del coeficiente numérico:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{12 R}{K} \quad \dots \quad (88)$$

y emplear esta única fórmula para tuberías y canales de contorno hidráulicamente rugoso.

Por último, para tuberías y canales trabajando en la zona de transición se puede emplear la fórmula que resulte de un arreglo de las dos últimas:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \quad \dots \quad (89)$$

En este punto son aplicables las mismas explicaciones que fueron dadas con ocasión de la fórmula (86) de Colebrook-White.

$$\text{Reemplazando } v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R S}{\rho}} = \sqrt{g R S}$$

$$\text{se obtiene: } V = \frac{\sqrt{g R S}}{\chi} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}}$$

$$V = \frac{\sqrt{g}}{0.40} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \cdot \sqrt{R S}$$

$$V = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \cdot \sqrt{R S}$$

es decir: $V = C \sqrt{R S} \dots (90)$ ecuación de Chezy.

$$C = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \dots \text{coeficiente de Chezy (L}^{1/2} \text{T}^{-1}\text{)}$$

V ... velocidad media

R ... radio hidráulico de la tubería o el canal

S ... pendiente de la línea de energía o pérdida de energía por unidad de longitud = $\frac{h_f}{L}$.

Concepto de rugosidad.- Un contorno se comporta, como hidráulicamente liso cuando:

$$K \leq 0.4 \delta \dots (91)$$

$$\delta \quad \frac{V_* K}{\nu} \leq 5$$

como hidráulicamente rugoso cuando:

$$K \geq 6 \delta \dots (92)$$

$$\delta \quad \frac{V_* K}{\nu} \geq 70$$

y en transición cuando:

$$0.4 \delta < K < 6 \delta \dots (93)$$

$$\delta \quad 5 < \frac{V_* K}{\nu} < 70$$

Los valores de K se obtienen del Apéndice A3.

8.5.3 Asuntos conexos

Caso de tuberías no circulares.- La pérdida de carga en las tuberías no circulares se puede evaluar con la fórmula de Darcy-Weisbach, a condición de usar el concepto de radio hidráulico en reemplazo del diámetro.

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

es decir,
$$h_f = f \frac{L}{4 R} \frac{V^2}{2g}$$

$$R_e = \frac{V 4 R}{\nu}$$

$$\frac{K}{D} = \frac{K}{4 R}$$

Aumento de la rugosidad con el tiempo.- El efecto corrosivo del agua hace que con el tiempo aumente el valor de la rugosidad absoluta (K) de las tuberías. El ritmo de aumento depende sobre todo de la naturaleza del agua conducida.

$$K_t = K_0 + \alpha t$$

K_0 ... rugosidad del tubo nuevo en mm (Apéndice A3)

α ... coeficiente que depende del tipo de agua (ver tabla en la referencia 3 de la Bibliografía).

t ... número de años de servicio de la tubería.

K_t ... rugosidad de la tubería después de t años de servicio.

Relación entre f y C .- Escribamos la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

y la ecuación de Chezy: $V = C \sqrt{R S}$

De esta última:

$$S = \frac{V^2}{C^2 R} = \frac{V^2 4}{C^2 D} \cdot \frac{2g}{2g} = \frac{8g}{C^2 D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = S \cdot L$$

$$h_f = \frac{8g}{C^2 D} \cdot \frac{V^2}{2g} L = \frac{8g}{C^2} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

es decir,
$$f = \frac{8g}{C^2}$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

Flujo laminar y flujo turbulento.- Como ha sido ya indicado, el escurrimiento laminar de los líquidos corresponde a números de Reynolds de hasta 2,300; luego viene un rango de R_e en que el flujo puede ser laminar o turbulento, y por último el escurrimiento turbulento corresponde a R_e mayores

que 4,000. Todo esto puede verse reflejado en el diagrama de Moody.

Puesto que no hay un R_e definido que separe el flujo laminar del turbulento, y ante la necesidad de utilizar uno a fin de facilitar la solución de problemas se conviene en señalar el valor $R_e = 2000$ como crítico. De aquí en adelante se considerará pues, como es usual, que el flujo es laminar si $R_e < 2,000$ y turbulento si $R_e > 2,000$. Este R_e está referido al diámetro.

Como en canales el R_e viene referido al radio hidráulico, el valor crítico es 500 ($D = 4 R$).

8.6 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 76.- Determinar el tipo de flujo que tiene lugar en una tubería de 30 cm de diámetro cuando a la velocidad de 1 m/sg fluye

a) agua de $\nu = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$; b) aceite de $\nu = 2.06 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sg}$.

$$a) R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{1.00 \times 0.30 \times 10^6}{1.13} = 265,000 > 2,000$$

es decir, el flujo es turbulento.

$$b) R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{1.00 \times 0.30 \times 10^4}{2.06} = 1,450 < 2,000$$

es decir, el flujo es laminar.

Ejemplo 77.- Un caudal de 44 lps de un aceite de $\mu = 0.0103 \frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$ y $\text{g.e.} = 0.85$ está circulando por una tubería de 30 cm de diámetro y 3,000 m de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga en la tubería?

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.044 \times 4}{\pi (0.30)^2} = 0.62 \text{ m/sg}$$

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{V D \rho}{\mu} = \frac{V D \gamma}{\mu g} = \frac{0.62 \times 0.30 \times 850}{0.0103 \times 9.8} = 1,565$$

es decir, el flujo es laminar y por lo tanto:

$$f = \frac{64}{R_e} = 0.0409$$

$$y \quad h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.0409 \cdot \frac{3000}{0.30} \cdot \frac{(0.62)^2}{2g} = 8.02 \text{ m}$$

Ejemplo 78.- Por una tubería horizontal de acero, de 15 cm de diámetro - está fluyendo un aceite pesado de $\nu = 4,13 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$ y $\text{g.e.} = 0.918$. Si la presión en el punto A es 11.0 kg/cm^2 y en B es 0.35 kg/cm^2 , siendo la distancia entre A y B de 900 m, ¿cuál es el caudal?.

Ecuación de Bernoulli entre A y B:

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - h_f = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$h_f = \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_B}{\gamma} = \frac{(11.0 - 0.35) \times 10^4}{0.918 \times 1000} = 116.0$$

es decir, $f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 116.0$

$$f \frac{900}{0.15} \frac{V^2}{2g} = 116.0$$

$$f 6000 \frac{V^2}{2g} = 116.0$$

Tratándose de un líquido altamente viscoso hay la presunción de que el flujo puede ser laminar.

De ser laminar el flujo rige la ecuación de Hazen-Poiseuille:

$$V = \frac{\gamma D^2 h_f}{32 \mu L} = 2.16 \text{ m/sg}$$

verificando: $R_e = \frac{V D}{\nu} = 785$

es decir, el flujo es efectivamente laminar y $V = 2.16 \text{ m/sg}$, con lo cual:

$$Q = AV = 0.038 \text{ m}^3/\text{sg} = 38 \text{ lps.}$$

Ejemplo 79.- Determinar la pérdida de carga en un tramo de tubería nueva de $K = 0.024 \text{ cm}$, de 30 cm de diámetro y $1,000 \text{ m}$ de longitud, cuando fluye agua de viscosidad $1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$ a una velocidad de 1.50 m/sg .

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = 3.98 \times 10^5, \text{ el flujo es turbulento.}$$

$$\frac{K}{D} = 0.0008$$

entrando al diagrama de Moody $f = 0.0194$ y por lo tanto:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 7.40 \text{ m.}$$

Ejemplo 80.- Los puntos A y B están unidos por una tubería nueva de $K = 0.006 \text{ cm}$, de 15 cm de diámetro y $1,200 \text{ m}$ de longitud. El punto B está situado 15.0 m por encima de A y las presiones en A y B son, respectivamente, 8.60 kg/cm^2 y 3.40 kg/cm^2 . ¿Qué caudal de un aceite de g.e. = 0.854 y $\nu = 3.83 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$ circula entre A y B?

$$\begin{aligned} h_f &= \left(Z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} \right) - \left(Z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \right) \\ &= \left(Z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left(Z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(8.6 - 3.4) \times 10^4}{0.854 \times 1000} - 15.0 = 45.89 \text{ m}$$

aparentemente el flujo es turbulento, luego:

$$R_e \sqrt{f} = \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2g D h_f}{L}} = 1.314 \times 10^4$$

$$\frac{K}{D} = 0.0004$$

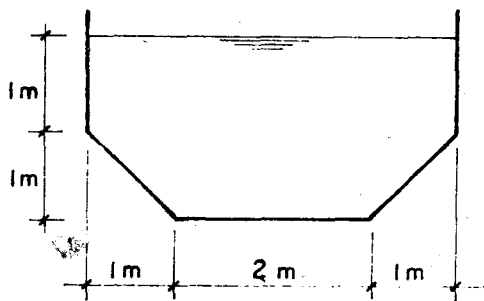
entrando al diagrama de Johnson-Rouse $f = 0.020$ con $h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

se determina la velocidad: $V = \sqrt{\frac{2g D h_f}{f L}} = 2.37 \text{ m/sg}$

$$y \quad Q = AV = 0.042 \text{ m}^3/\text{sg} = 42 \text{ lps.}$$

Empleo de la fórmula de Chezy.- Aun cuando la fórmula de Chezy también puede ser utilizada para resolver problemas de tuberías, es especialmente indicada para resolver problemas de conducción de agua en canales.

Ejemplo 81.- Un canal para conducción de agua tiene una sección transversal y dimensiones como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser la pendiente del fondo para transportar bajo condiciones de flujo uniforme un caudal de $3.5 \text{ m}^3/\text{sg}$?



$$K = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$$

1º averiguar si el flujo es laminar o turbulento,

$$A = 7 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 0.5 \text{ m/sg}$$

$$P = 6.828 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = 1.025 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{V R}{\nu} = 5.1 \times 10^5 > 500, \text{ el flujo es turbulento y se puede usar Chezy.}$$

2º suponer que el contorno es hidráulicamente rugoso,

$$C = 18 \log \frac{12 R}{K} = 50.2$$

$$V = C \sqrt{R S}$$

$$S = \frac{V^2}{C^2 R} = 0.000097$$

Verificación:

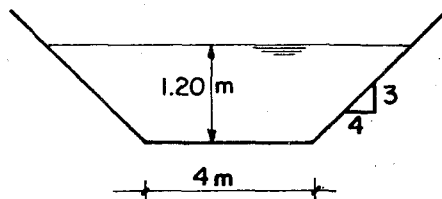
$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

$$v_* = \sqrt{g R S} = 0.0312$$

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{v_*} = 0.00037$$

$K > 6 \delta$, efectivamente.

Ejemplo 82.- Bajo condiciones normales, en el canal trapezoidal que se muestra el tirante de agua es 1.20 m. Si en condiciones extraordinarias el caudal se puede ver incrementado en 50%, ¿Cuál sería el tirante de agua en tal caso?.



$$K = 0.15 \text{ m}$$

$$S = 0.000125$$

$$\nu = 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$$

- 1º suponer que el flujo es turbulento. Se puede usar Chezy.
- 2º averiguar si el contorno es hidráulicamente liso o rugoso,

$$A = 6.72 \text{ m}^2$$

$$P = 8 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = 0.84 \text{ m}$$

$$v_* = \sqrt{g R S} = 0.032 \text{ m/sg}$$

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{v_*} = 0.00047 \text{ m}$$

$K > 6 \delta$... el contorno es hidráulicamente rugoso.

$$3^\circ \quad C = 18 \log \frac{12 R}{K} = 32.9$$

$$V = C \sqrt{R S} = 0.34 \text{ m/sg}$$

$$R_e = \frac{V_1 R}{\nu} = 2,285 > 500, \quad \text{el flujo es turbulento.}$$

$$Q = A V = 2.27 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$4^\circ \text{ nueva situación: } Q' = 1.5 Q = 3.41 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$A' = 4 d' + 1.33 d'^2$$

$$P' = 4 + 3.33 d'$$

$$R' = \frac{A'}{P'}$$

$$v_*' = \sqrt{g R' S}$$

$$\delta' = \frac{11.6 \nu}{v_*'}$$

$$C' = 18 \log \frac{12 R'}{K}$$

$$Q' = A' C' \sqrt{R' S}$$

probando diferentes valores del nuevo tirante d' se encuentra que la ecuación se satisface para $d' = 1.50 \text{ m}$.

8.7 Fórmula empírica de Hazen-Williams

Antes de que se conocieran las fórmulas de tipo logarítmico descritas en el apartado 8.5, las únicas disponibles para el diseño eran las de tipo exponencial de la forma:

$$V = a D^x S^y$$

V ... velocidad media

D ... diámetro

S ... pendiente de la línea de energía

a ... coeficiente de fricción

x, y ... exponentes

Una de ellas, de uso aún cotidiano, es la fórmula de Hazen-Williams:

$$V = 0.8494 C_H R^{0.63} S^{0.54} \quad \dots \quad (65)$$

V ... velocidad media en m/sg

R ... radio hidráulico en m

S ... pendiente de la línea de energía o pérdida unitaria de carga = $\frac{h_f}{L}$, adimensional.

C_H ... coeficiente de rugosidad de Hazen-Williams, que sólo depende del material del tubo.

La fórmula es válida dentro de las siguientes limitaciones:

- * tuberías rugosas,
- * conducción de agua,
- * flujo turbulento,
- * diámetro mayor de 2",
- * velocidades que no excedan de 3 m/sg.

Otras formas útiles de la (65) son:

$$V = 0.3547 C_H D^{0.63} S^{0.54} \dots (65a)$$

V ... m/sg
D ... diámetro en m.

$$V = 0.0351 C_H D^{0.63} S^{0.54} \dots (65b)$$

V ... m/sg
D ... pg

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

Q ... caudal en m³/sg
D ... m.

$$Q = 0.0000178 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65d)$$

Q ... m³/sg
D ... pg.

Valores de C_H

acero corrugado	60
acero con juntas, nuevo	135
acero galvanizado, nuevo y usado	125
acero remachado, nuevo	110
acero remachado, usado	85
acero soldado, nuevo	120
acero soldado, usado	90
acero soldado con revestimiento, nuevo y usado	130
fierro fundido, nuevo	130
fierro fundido, usado	110
fierro fundido, viejo	90
plástico	150
asbesto-cemento, nuevo	135
cobre y latón	130
conductos con acabado de cemento pulido	100
concreto acabado liso	130
concreto acabado común	120
tubos de barro vitrificado (drenes)	110

8.8 Pérdidas locales (tomado de la referencia 3 de la Bibliografía)

Cada pérdida local se expresa en la forma:

$$h_{pl} = K \frac{V^2}{2g} \quad \dots \quad (66)$$

donde:

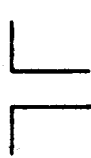
h_{pl} ... pérdida de carga en m.

K ... coeficiente sin dimensiones

V ... velocidad media en m/sg, aguas abajo de la singularidad, salvo indicación en contrario.

Enseguida se presentan los valores de K de acuerdo con la singularidad.

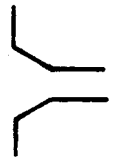
Pérdida por entrada



$$K = 0,5$$



$$K = 0,5 + 0,3 \cos \theta + 0,2 \cos^2 \theta$$



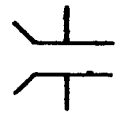
$$K = 0,15 - 0,25$$



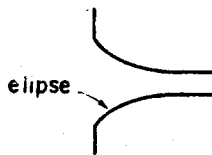
r/D	0,04	0,08	0,12	0,16	>0,2
K	0,26	0,15	0,09	0,06	<0,03



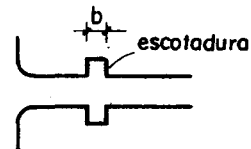
$$K = 0,06 - 0,10$$



$$K = 0,5$$



$K = 0,04 - 0,10$ para
tubo circular y $0,07 - 0,2$
para tubo rectangular



$K = 0,05 - 0,10$ si
 $\frac{b}{D} > 1$ ó $\frac{b}{H} > 0,2$ y
 $V > 2$ m/sg. De lo contrario
 $K = 0,$

La entrada elíptica es la que produce el mínimo de pérdida. Si el tubo es circular la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{(0,5 D)^2} + \frac{y^2}{(0,15 D)^2} = 1 \quad \dots \quad (67)$$

Si es de sección rectangular la ecuación es:

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{(0.33 H)^2} = 1 \quad \dots (68)$$

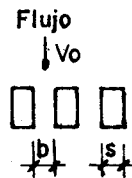
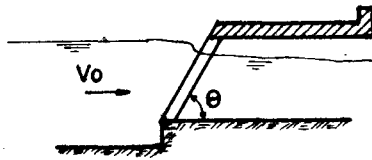


para definir la forma del perfil superior e inferior. Para la forma de los perfiles laterales se utiliza P en vez de H.

Pérdida por rejilla

Para rejillas parcialmente sumergidas,

Forma
 C_f 2.42 1.83 1.67 1.03 0.92 0.76 1.79



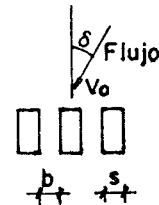
con el flujo normal al plano de la rejilla:

$$K = C_f (S/b)^{4/3} \text{ sen } \theta \quad \dots (69)$$

con el flujo no normal al plano de la rejilla:

$$K = K_* \beta$$

- K_* ... coeficiente para flujo normal
- β ... coeficiente de corrección que depende de la relación S/b y del ángulo δ .



en ambos casos, la V de la ecuación (66) es la V_0 frente a las rejillas, como si estas no existieran.

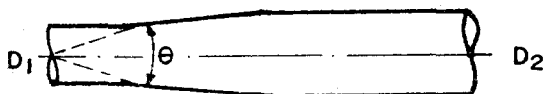
Para rejillas completamente sumergidas:

$$K = 1.45 - 0.45 (A_n/A_b) - (A_n/A_b)^2 \quad \dots (70)$$

- A_n ... área neta de paso entre barras
- A_b ... área bruta de la estructura de rejilla

en este caso, la V de la ecuación (66) es la velocidad neta a través de la rejilla.

Pérdida por ampliación



$$K = C_a \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad \dots (71)$$

$\frac{D_2}{D_1} = 1.5$	θ	8°	20°	40°	60°	80°	100°	140°	180°
	Ca	0.15	0.40	1.00	1.20	1.16	1.10	1.03	1.00

$\frac{D_2}{D_1} = 3$	θ	8°	20°	40°	60°	80°	100°	140°	180°
	Ca	0.15	0.40	0.80	1.00	1.05	1.05	1.03	1.00

Para ampliaciones bruscas $C_a = 1.00$



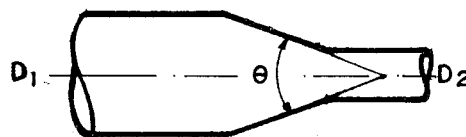
A fin de evitar separaciones, el ángulo θ del difusor debe cumplir:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{g D}}{2 V} \quad \dots \text{ para } \theta < 20^\circ$$

donde $D = \frac{D_1 + D_2}{2}$ $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$

Para calcular θ en transiciones con sección distinta de la circular, se usa el criterio del cono equivalente, es decir, un tronco de cono limitado por áreas circulares de la misma magnitud que las reales.

Pérdida por reducción



θ	4° a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°	
K	0.060	0.005	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

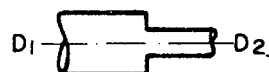
A fin de evitar pérdidas grandes, el ángulo de reducción θ no debe exceder del valor dado por:

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{g D}{V}}$$

donde $D = \frac{D_1 + D_2}{2}$ $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$

y en este caso $K = 0.1$

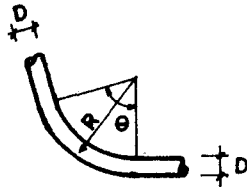
Para contracciones bruscas:



$\frac{D_2}{D_1}$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
K	0.10	0.18	0.25	0.32	0.37	0.42	0.45	0.47	0.50

Pérdida por cambio de dirección

Para curvas circulares en tubo de diámetro D y rugosidad K,



$$K = C_c \frac{\theta^\circ}{90^\circ}$$

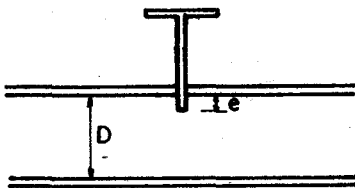
$\frac{K}{D} = 0.0020$	$\frac{R}{D}$	1	2	4	6	8
	C_c	0.50	0.30	0.24	0.18	0.18
$\frac{K}{D} = 0.0005$	$\frac{R}{D}$	1	2	4	6	8
	C_c	0.30	0.18	0.14	0.11	0.11
tubo liso	R_D	1	2	4	6	8
	C_c	0.25	0.15	0.11	0.08	0.08

Los cambios de dirección en tubos de gran diámetro se realiza mediante las curvas circulares recién descritas cuyos coeficientes K incluyen el efecto de pérdida por fricción.

Los cambios de dirección en tubos de pequeño diámetro se realiza mediante codos, de los cuales hay en el mercado diferentes tipos y cuyos valores K dependen del ángulo y del diámetro.

Pérdida por válvula.- Para tuberías de tamaño variado:

Válvula de compuerta:

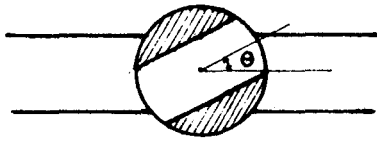


Ejemplo:

Para diámetro D = 50 mm.

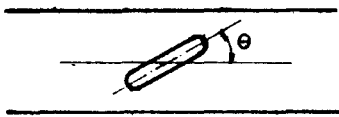
e/D	A/A ₀	K
1/8	0.949	0.07
2/8	0.856	0.26
3/8	0.74	0.81
4/8	0.609	2.06
5/8	0.466	5.52
6/8	0.315	17.0
7/8	0.159	97.8
31/32	---	159.0

Válvula esférica:



θ°	A/A_0	K
5	0.926	0.05
10	0.85	0.29
15	0.772	0.75
20	0.692	1.56
30	0.535	5.17
40	0.385	17.3
50	0.25	52.6
55	0.19	106.0
60	0.137	206.0
65	0.091	486.0

Válvula de mariposa o de lenteja:

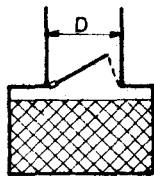


θ°	A/A_0	K
5	0.913	0.24
10	0.826	0.52
15	0.741	0.90
20	0.658	1.54
30	0.500	3.91
40	0.357	10.8
50	0.234	32.6
55	0.181	58.8
60	0.124	118.0
65	0.094	256.0
70	0.06	751.0

si la válvula está completamente abierta entonces usar:

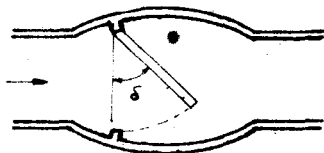
$$K = \frac{t}{D} = \frac{\text{espesor hoja}}{\text{diámetro}}$$

Válvula de pie:



D cm	K	D cm	K
4	12.9	20	5.2
5	10.0	25	4.4
6.5	8.8	30	3.7
8	8.0	35	3.4
10	7.0	40	3.1
12.5	6.5	45	2.8
15	6.0	50	2.5

Válvula check o de retención:



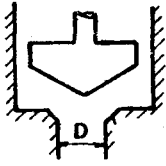
válvula completamente abierta:

D cm	5	10	15	20	30	40	50
K	18	8	6.5	5.5	3.5	2.5	0.8

válvula parcialmente abierta:

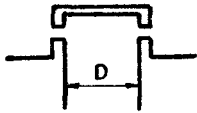
D cm	15	20	30	40	50	60	70
K	90	62	30	14	6.6	3.2	1.7

Válvula de alivio:



de forma cónica

$$K = 2.6 - 0.8 \frac{D}{Z} + 0.14 \left(\frac{D}{Z}\right)^2$$



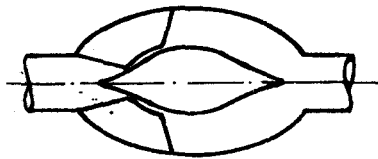
de forma plana

$$K = 0.6 + 0.15 \left(\frac{D}{Z}\right)^2$$

Para tuberías de diámetro pequeño hay en el mercado varios tipos de válvulas como las descritas. El valor de K para válvula completamente abierta depende del tipo y diámetro.

Para el control del gasto en tuberías de gran diámetro se usan las válvulas de aguja y de chorro hueco.

Válvula de aguja.- Se instalan en puntos intermedios o en el extremo.



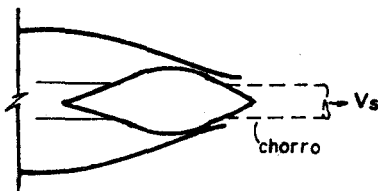
en punto intermedio

$$Q = C_d \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH} \quad \dots (72)$$

C_d ... coeficiente de gasto; para válvula completamente abierta $C_d = 0.58$.

D ... diámetro antes de la válvula en m.

H ... carga total antes de la válvula en m.



en el extremo final

Para válvula en el extremo la velocidad del chorro de salida es:

$$V_s = C_v \sqrt{2gH} \quad \dots (73)$$

C_v ... coeficiente de velocidad = 0.96 - 0.98

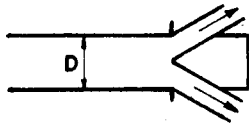
es decir:

$$K = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right) \quad \dots (74)$$

que afectaría a la carga de velocidad

con $\frac{V_s^2}{2g}$ para obtener la pérdida.

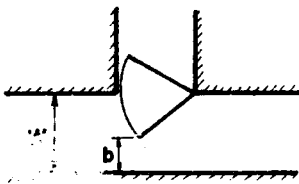
Válvulas de chorro hueco.- Se instalan en el extremo del conducto circular.



Para el gasto rige la ecuación (72), con un valor $C_d \approx 0.85$ para válvula completamente abierta.

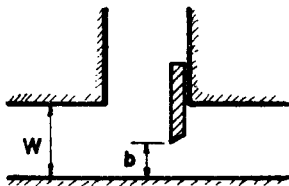
Pérdida por compuerta.- Las compuertas se utilizan para el control del gasto en conductos de gran diámetro y hay dos tipos básicos: radial y deslizante.

Compuerta radial:

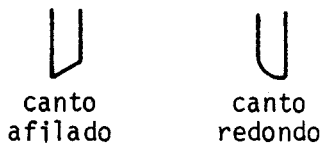


b/W	K
1.00	0.30
0.94	0.31
0.86	0.36
0.77	0.56
0.65	0.99
0.54	1.79
0.43	3.23
0.34	6.03
0.24	12.2
0.15	30.2
0.07	128.0

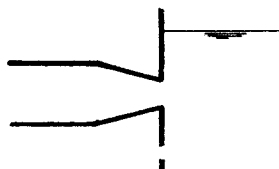
Compuerta deslizante:



b/W	K canto afilado	K canto redondo
	0.3	0.24
	0.38	0.36
	0.68	0.58
0.7	1.31	0.96
0.6	2.43	1.48
0.5	4.57	2.7
0.4	8.68	4.95
0.3	17.8	10.8
0.2	44.1	23.2
0.1	186.5	--



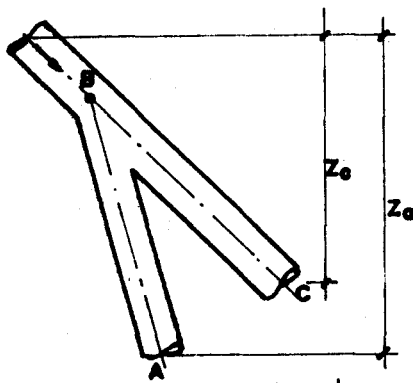
Pérdida por salida



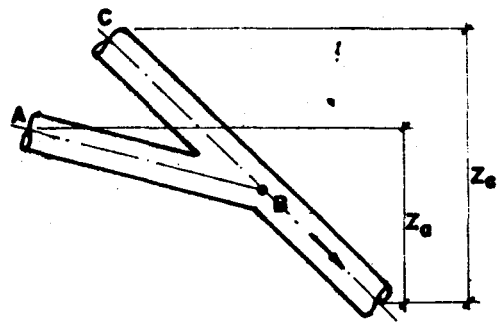
$$h_{ps} = K \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

A_s/A_1	K
0.2	0.84
0.4	0.87
0.6	0.90
0.8	0.94
1.0	1.00

Pérdidas por bifurcación



a) Separación



b) Unión

En a) despreciando la fricción, Bernoulli entre la corriente principal y la sección C:

$$Z_C + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g} + K_C \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{p - p_C}{\gamma} + Z_C = \frac{v_C^2}{2g} + (K_C - 1) \frac{v^2}{2g} \quad \dots \quad (75)$$

análogamente $\frac{p - p_a}{\gamma} + Z_a = \frac{v_a^2}{2g} + (K_a - 1) \frac{v^2}{2g} \quad \dots \quad (76)$

En b) procediendo de la misma manera;

$$\frac{p_C - p}{\gamma} + Z_C = (K_C + 1) \frac{v^2}{2g} - \frac{v_C^2}{2g} \quad \dots \quad (77)$$

$$\frac{p_a - p}{\gamma} + Z_a = (K_a + 1) \frac{v^2}{2g} - \frac{v_a^2}{2g} \quad \dots \quad (78)$$

Para cantos agudos como en la figura y $D = D_C$ rigen los valores de K_a y K_C de la tabla.

Para bifurcaciones en tubos de pequeño diámetro el valor de K depende del tipo de la bifurcación y los diámetros.

Q_a/Q	Separación				Unión			
	$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c
0.0	0.95	0.04	0.90	0.04	-1.20	0.04	-0.92	0.04
0.2	0.88	-0.88	0.68	-0.06	-0.40	0.17	-0.38	0.17
0.4	0.89	-0.05	0.50	-0.04	0.08	0.30	0.00	0.19
0.6	0.95	0.07	0.38	0.07	0.47	0.40	0.22	0.09
0.8	1.10	0.21	0.35	0.20	0.72	0.51	0.37	-0.17
1.0	1.28	0.35	0.48	0.33	0.91	0.60	0.37	-0.54

Ejemplos de aplicación

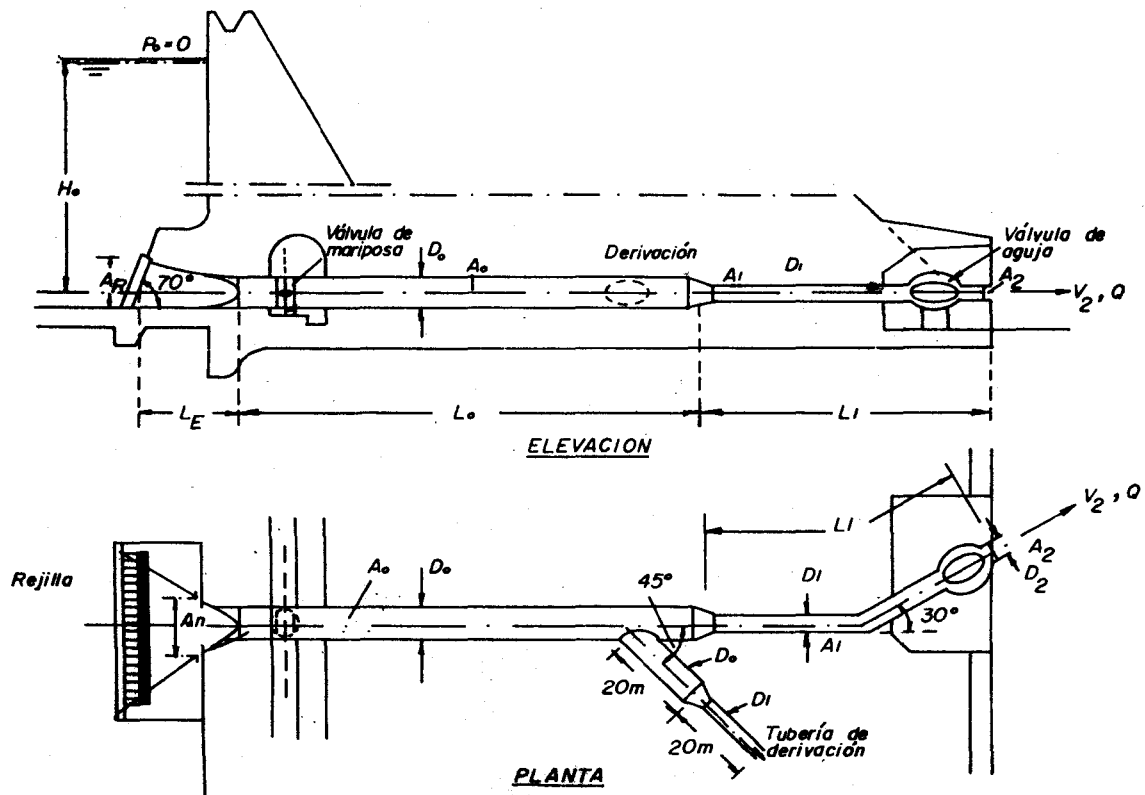
Ejemplo 83.- (Ref. 3) En la figura se presenta una tubería horizontal para la descarga de fondo de una presa, con una derivación lateral. Los datos son:

$H_o = 150$ m	$D_o = 4$ m	$A_o = 12.57$ m ²	Rejilla
$L_E = 20$ m	$D_1 = 3$ m	$A_1 = 7.07$ m ²	S/b = 0.1
$L_o = 60$ m	$D_2 = 2$ m	$A_2 = 3.14$ m ²	$C_f = 1.67$
$L_1 = 40$ m		$A_R = 120$ m ²	$\theta = 70^\circ$

en la válvula de mariposa $A_N = 30$ m²

en las escotaduras $b/h = 0.2$

rugosidad del conducto $K = 0.5$ mm



Determinar el gasto Q de la tubería, en el supuesto que se cierra el paso a la derivación lateral.

Bernoulli entre el nivel del agua en el embalse y la salida de la tubería:

$$H_0 - \sum h_p = \frac{V_2^2}{2g}$$

expresando cada pérdida en la forma $K \frac{V_2^2}{2g}$:

$$H_0 = \sum K \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_0 = (1 + \sum K) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g H_0}{1 + \sum K}}$$

De manera que habrá que pasar cada pérdida de la forma $K_i \frac{V_i^2}{2g}$ a la forma $K \frac{V_2^2}{2g}$:

$$K = K_i \frac{V_i^2}{V_2^2} = K_i \left(\frac{A_2}{A_i}\right)^2$$

es decir, multiplicando el valor K_i por la relación de áreas al cuadrado.

1. Rejilla. $K = 0.073$, $A_2/A_R = 0.0262 \rightarrow K_1 = 0.00005$

2. Reducción después de la rejilla. Se usa el criterio del cono equivalente. Los diámetros equivalentes son:

$$D_R = \sqrt{\frac{4 A_R}{\pi}} = 12.37 \text{ m} \quad D_N = \sqrt{\frac{4 A_N}{\pi}} = 6.19 \text{ m}$$

$$= 2 \text{ arc-tg} \frac{D_R - D_N}{2 L_E} = 17^\circ 34'$$

$$K = 0.19, \quad A_2/A_N = 0.105 \rightarrow K_2 = 0.0021$$

3. Entrada. Para forma de trompeta,

$$K = 0.08, \quad A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_3 = 0.005$$

4. Escotaduras. Para $V > 2 \text{ m/sg}$,

$$K = 0.05, \quad A_2/A_N = 0.105 \rightarrow K_4 = 0.00055$$

5. Válvula de mariposa abierta. Se supone:

$$K = 0.05, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_5 = 0.0031$$

6. Pérdida por bifurcación

$$K_c = 0.04, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_6 = 0.0025$$

7. Pérdida por reducción. Para θ entre 4° y 5° se elige:

$$K = 0.019, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_7 = 0.00376$$

8. Cambio de dirección. Para $\theta = 30^\circ$, $\frac{K}{D_1} = \frac{0.5}{3000} = 0.000167$ y $R/D \approx 2$:
 $C_c = 0.18$ y

$$K = 0.06, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_8 = 0.0119$$

9. Válvula de aguja. Para $C_v = 0.96$:

$$K = 0.08507, A_2/A_2 = 1.0 \rightarrow K_9 = 0.08507$$

10. Fricción en la zona de entrada. Se considera cero:

$$K_{10} = 0$$

11. Fricción en el tramo L_0 .

$$\frac{K}{D_0} = 0.000125 \text{ y } R_e \text{ grande, del diagrama de Moody } f_0 = 0.0125$$

$$K = f_0 \frac{L_0}{D_0} = 0.188, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_{11} = 0.01175$$

12. Fricción en el tramo L_1 :

$$\frac{K}{D_1} = 0.000167 \text{ y } R_e \text{ grande, del diagrama de Moody } f_1 = 0.0132$$

$$K = f_1 \frac{L_1}{D_1} = 0.176, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_{12} = 0.03485$$

$$\text{T o t a l } \quad \Sigma K = 0.16063$$

Reemplazando:

$$V_2 = 50.3 \text{ m/sg}$$

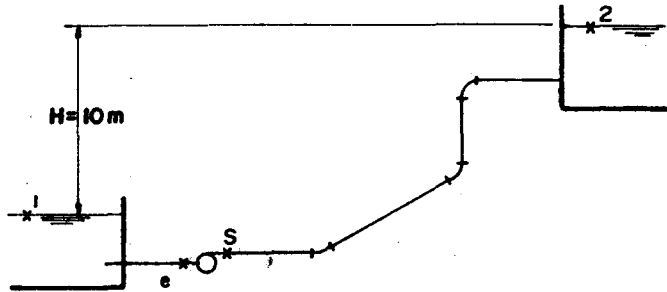
$$Q = 158 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$\text{pérdida total} = H_0 - \frac{V_2^2}{2g} = 20.91 \text{ m}$$

Ejemplo 84.- Una bomba de 25 CV de potencia y 75% de eficiencia debe abastecer un gasto de $6 \text{ m}^3/\text{min}$ de agua a 10°C , a un depósito cuyo nivel se encuentra 10 m arriba de la cisterna de bombeo. La tubería de conducción es de fierro fundido con incrustaciones ($K = 0.76 \text{ mm}$) con una

longitud de 100 m, tres curvas de radio 5D (dos de 45° y una de 90°) y una válvula con $K_v = 8$. Determinar el diámetro necesario en la tubería. Despreciar las pérdidas de carga en la tubería de aspiración.

($\nu = 1,31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$).



Bernoulli entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum h_{p1-e} + H_B - \sum h_{ps-2} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - 0 + H_B - \sum h_{ps-2} = Z_2 + 0 + 0$$

$$H_B = (Z_2 - Z_1) + \sum h_{ps-2}$$

$$H_B = 10 + \sum h_{ps-2}$$

$$\sum h_{ps-2} = H_B - 10$$

$$\text{Pot} = \frac{\gamma Q H_B}{75 \eta} \quad H_B = \frac{75 \eta \text{ Pot}}{\gamma Q} = \frac{75 \times 0,75 \times 25}{1,000 \times 0,1} = 14,06 \text{ m}$$

$$\sum h_{ps-2} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g} + K_v \frac{V^2}{2g} + K_s \frac{V^2}{2g}$$

$$\sum h_{ps-2} = \frac{V^2}{2g} (f \frac{L}{D} + K_c + K_v + 1)$$

reemplazando:

$$\frac{V^2}{2g} (f \frac{L}{D} + K_c + K_v + 1) = 4,06$$

Se resuelve por iteraciones. Después de probar varios valores se propone $D = 0,254 \text{ m}$.

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0,05065 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 1.974 \text{ m/sg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.199 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = 3.8 \times 10^5$$

$$\frac{K}{D} = 0.003$$

Moody:

$$f = 0.026 \rightarrow f \frac{L}{D} = 10.24$$

Del catálogo del fabricante:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para codos de } 45^\circ, K = 0.16 \\ \text{para codos de } 90^\circ, K = 0.25 \end{array} \right\} \rightarrow K_c = 2 \times 0.16 + 0.25 = 0.57$$

Se conoce $K_v = 8$.

Reemplazando y despejando $V = 2 \text{ m/sg}$

$$Q = 0.102 \text{ m}^3/\text{sg}$$

lo que quiere decir que el diámetro $D = 0.254 \text{ m}$ es el adecuado.

8.9 Aplicaciones

Para la solución de los diversos problemas de tuberías se dispone de tres fórmulas:

- * Colebrook-White
- * Chezy
- * Hazen-Williams

Por razones de simplicidad, todos los ejemplos de este apartado van a ser desarrollados con la fórmula de Hazen-Williams, dejando claramente establecido que también pueden ser resueltos con las otras fórmulas, especialmente con la de Colebrook-White.

Lo usual es que para cada tubería se conozca su longitud y coeficiente de rugosidad C_H . Los tres parámetros que quedan son Q , D y S ; de modo que hay necesidad de conocer dos cualesquiera de ellos a fin de determinar con la fórmula el tercero.

Se considera que la carga de velocidad es despreciable al lado de las cargas potencial y de presión, de modo que resultan confundidas la línea de energía y la línea de alturas piezométricas. Uno puede referirse a ellas con cualquiera de los dos nombres o empleando el término línea de gradiente hidráulico (LGH). La altura de velocidad resulta ciertamente insignificante en las así llamadas tuberías largas:

$$\left(\frac{L}{D} > 2,000\right)$$

8.9.1 Tuberías simples, en serie y en paralelo

Ejemplo 85.- Una tubería de $C_H = 110$ y $D = 30 \text{ cm}$ transporta 100 lps de agua ¿Cuál es la pérdida de carga en $1,200 \text{ m}$

de tubería?

$$\text{fórmula (65c), } Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54}$$

$$\text{reemplazando: } Q = 0.4100 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$C_H = 110$$

$$D = 0.30 \text{ m}$$

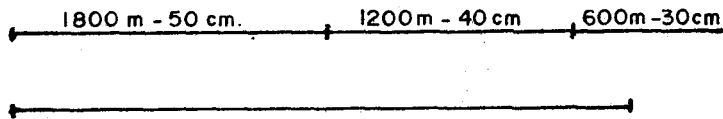
Se obtiene $S = 0.00875$, es decir $h_f = S \cdot L = 10.5 \text{ m}$.

Ejemplo 86.- Un sistema de tuberías en serie está constituido por un tramo de 1800 m de tubería de 50 cm, otro de 1200, de 40 cm y 600 m de 30 cm. Hallar:

- la longitud equivalente de una tubería de 40 cm.
- el diámetro de la tubería equivalente de 3,600 m,

Todas las tuberías tienen un $C_H = 130$.

Dos sistemas, en general, son hidráulicamente equivalentes si dejan pasar el mismo caudal Q con la misma pérdida de carga h_p .



- suponer un caudal $Q = 130 \text{ lps}$. Con la fórmula (65c):

$$S_{50} = 0.0009 \rightarrow h_p = 1.62 \text{ m (14.8\%)}$$

$$S_{40} = 0.0026 \rightarrow h_p = 3.12 \text{ m (28.4\%)}$$

$$S_{30} = 0.0104 \rightarrow h_p = 6.24 \text{ m (56.8\%)}$$

$$\Sigma h_p = 10.98 \text{ m (100.0\%)}$$

para la tubería equivalente:

$$Q = 130 \text{ lps}$$

$$C_H = 130$$

$$D = 40 \text{ cm}$$

con la fórmula (65c) se encuentra $S = 0.0026$

$$\text{es decir, } L = \frac{10.98}{0.0026} = 4,223 \text{ m}$$

para la tubería equivalente:

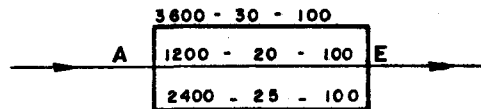
$$Q = 130 \text{ lps}$$

$$C_H = 130$$

$$L = 3,600 \text{ m} \rightarrow S = \frac{10.98}{3,600} = 0.0031$$

con la fórmula (65c) se encuentra $D = 39 \text{ cm}$.

Ejemplo 87.- En el sistema de tuberías en paralelo, la altura de presión en A es de 36 m de agua y en E de 22 m de agua. Suponiendo que las tuberías están en un plano horizontal, ¿qué caudal circula por cada una de las ramas en paralelo?



Despreciando las pequeñas alturas de velocidad, la caída de la LGH entre A y E es:

$$h_p = \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_E}{\gamma} = 36.0 - 22.0 = 14.0 \text{ m}$$

$$S_{30} = \frac{14}{3,600} = 0.0039 \rightarrow Q_{30} = 58.7 \text{ lps}$$

$$S_{20} = \frac{14}{1,200} = 0.0117 \rightarrow Q_{20} = 36.6 \text{ lps}$$

$$S_{25} = \frac{14}{2,400} = 0.0058 \rightarrow Q_{25} = 45.1 \text{ lps}$$

$$\text{TOTAL } Q = 140.4 \text{ lps}$$

Ejemplo 88.- Si en el sistema del ejemplo 87 el caudal total fuera de 280 lps, ¿qué pérdida de carga tiene lugar entre A y E y cómo se reparte el caudal en las ramas del circuito?. Resolver mediante dos métodos, a) del porcentaje y b) de la tubería equivalente. Proceder como si no se hubiera resuelto el ejemplo 87.

a) suponer una pérdida de carga entre A y E, $h_p = 8 \text{ m}$ y hallar los caudales.

$$S_{30} = \frac{8}{3,600} = 0.0022 \rightarrow Q_{30} = 43.1 \text{ (41.7\%)}$$

$$S_{20} = \frac{8}{1,200} = 0.0067 \rightarrow Q_{20} = 27.1 \text{ (26.2\%)}$$

$$S_{25} = \frac{8}{2,400} = 0.0033 \rightarrow Q_{25} = 33.2 \text{ (32.1\%)}$$

$$\text{TOTAL } Q = 103.4 \text{ (100.0\%)}$$

(compárense estos porcentajes con los que corresponden al ejemplo 87 y constátense cómo el caudal en cada rama del circuito es un porcentaje constante del caudal. Esto es siempre cierto para un intervalo razonable de pérdidas de carga entre los nudos).

Aplicando los porcentajes al caudal dado de 280 lps.

$$Q_{30} = 0.417 \times 280 = 117 \text{ lps} \rightarrow S_{30} = 0.0140 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

$$Q_{20} = 0.262 \times 280 = 73 \text{ lps} \rightarrow S_{20} = 0.0420 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

$$Q_{25} = 0.321 \times 280 = 90 \text{ lps} \rightarrow S_{25} = 0.0209 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

b) se usará el diámetro de 30 cm para la tubería equivalente. Suponer una pérdida de carga entre A y E de $h_p = 8 \text{ m}$ y hallar el caudal total.

$$S_{30} = \frac{8}{3,600} = 0.0022 \rightarrow Q_{30} = 43.1 \text{ lps.}$$

$$S_{20} = \frac{8}{1,200} = 0.0067 \rightarrow Q_{20} = 27.1 \text{ lps}$$

$$S_{25} = \frac{8}{2,400} = 0.0033 \rightarrow Q_{25} = 33.2 \text{ lps}$$

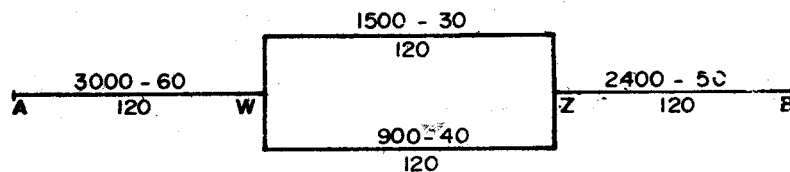
$$\text{TOTAL } Q = 103.4 \text{ lps}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = 103.4 \text{ lps} \\ D = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} S_{30} = 0.0111 \rightarrow L_e = \frac{h_p}{S_{30}} = 720 \text{ m de tubería de } 30 \text{ cm y } C_H = 100.$$

Para el caudal dado:

$$\left. \begin{array}{l} Q = 280 \text{ lps} \\ D = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} S_{30} = 0.0703 \rightarrow h_p = 0.0703 \times 720 = 50.6 \text{ m.}$$

Ejemplo 89.- Para el sistema mostrado, a) ¿cuál es el caudal si la caída de la LGH entre A y B es de 60 m?, b) ¿qué longitud de una tubería de 50 cm y $C_H = 120$ es equivalente al sistema AB?.



a) suponer una pérdida de carga entre W y Z y averiguar cómo se reparte un caudal cualquiera.

para $h_p = 9 \text{ m}$.

$$S_{30} = 0.0060 \rightarrow Q_{30} = 89 \text{ lps (26.3\%)}$$

$$S_{40} = 0.0100 \rightarrow Q_{40} = 250 \text{ lps (73.7\%)}$$

$$\text{TOTAL } Q = 339 \text{ lps (100.0\%)}$$

suponer un caudal en el sistema AB y averiguar cómo se reparte una pérdida de carga cualquiera en los tres tramos.

para $Q = 339 \text{ lps}$.

AW ... S = 0.0024	→	$h_p = 7.2 \text{ m}$	(23.7%)
WZ ...		$h_p = 9.0 \text{ m}$	(29.6%)
ZB ... S = 0.0059	→	$h_p = 14.2 \text{ m}$	(46.7%)
TOTAL		$h_p = 30.4 \text{ m}$	(100.0%)

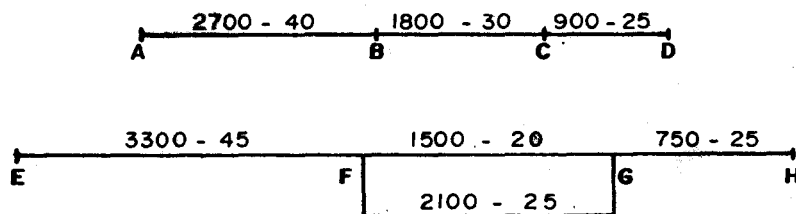
aplicar estos porcentajes a la pérdida de carga dada de 60 m.

$$\begin{aligned}
 h_{PAW} &= 60 \times 0.237 = 14.2 \text{ m} \rightarrow S_{60} = 0.0047 \rightarrow Q_{60} = 483 \text{ lps} \\
 h_{PWZ} &= 60 \times 0.296 = 17.8 \text{ m} \\
 h_{PZB} &= 60 \times 0.467 = 28.0 \text{ m} \rightarrow S_{50} = 0.0117 \rightarrow Q_{50} = 489 \text{ lps.}
 \end{aligned}$$

b) Utilizando la información anterior, en el sistema AB un caudal de 339 lps produce una pérdida de 30.4 m,

$$\left. \begin{aligned}
 Q &= 339 \text{ lps} \\
 D &= 50 \text{ cm} \\
 C_H &= 120
 \end{aligned} \right\} S_{50} = 0.0059 \rightarrow L_e = \frac{h_p}{S_{50}} = 5,153 \text{ m.}$$

Ejemplo 90.- De los dos sistemas que se muestran, ¿cuál de ellos tiene mayor capacidad? (usar $C_H = 120$ para todas las tuberías).



De los dos sistemas, el de mayor capacidad hidráulica es aquél que con la misma pérdida de carga deja pasar el caudal mayor, o aquél que deja pasar un mismo caudal con la menor pérdida de carga,

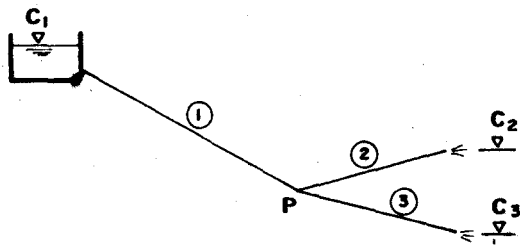
Se sugiere fijar un $Q = 100 \text{ lps}$ y determinar la pérdida total en cada sistema. Nótese que previamente debe determinarse según qué porcentajes se divide un Q cualquiera entre F y G.

Se deja para ser resuelto por el lector. El sistema EH resulta ser el de mayor capacidad,

8.9.2 Análisis de redes abiertas y cerradas

Cálculo manual de redes abiertas.- Una red es abierta cuando las tuberías que la componen se ramifican, sin unirse después. Los extremos finales de las ramas pueden terminar en un depósito o descargar libremente a la atmósfera.

Ejemplo 91.- (Un reservorio). Cuando la superficie libre del depósito se mantiene en una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?



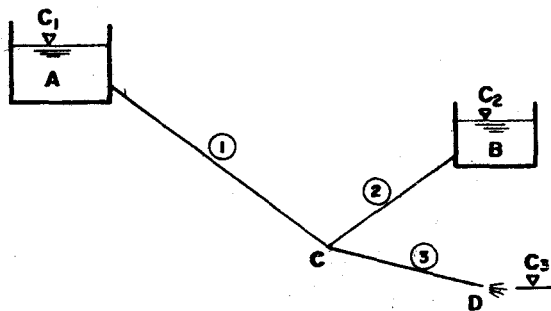
Datos: las tres cotas C_1 , C_2 , C_3 y el trió de valores L - D - C_H de cada tubería.

El problema se resuelve por tanteos. Se supone una cota para la LGH en el punto P, de determinan los tres caudales y se chequea la ecuación de nudo:

$$\sum Q = 0$$

es decir, la suma algebraica de caudales en P es cero (para ello se otorga un signo a cada caudal: + si llega, - si sale). El problema queda resuelto cuando se satisface la ecuación de nudo con la precisión deseada. Ver procedimiento en el ejemplo 92.

Ejemplo 92.- (Dos reservorios). Cuando las superficies libres de los depósitos se mantienen en una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?



$C_1 \dots 64.0$ m
 $C_2 \dots 57.0$ m
 $C_3 \dots 30.0$ m

	L m	D cm	C_H
1 ...	2,400	60	100
2 ...	1,200	40	100
3 ...	1,200	30	100

Como en el ejemplo 91, este problema se resuelve por tanteos.

Suponer: cota LGH en el punto C = 57.0 m.

$$\left. \begin{aligned} S_{60} &= \frac{h_p}{L} = \frac{7}{2,400} = 0.00292 \rightarrow Q_{60} = 311.0 \text{ lps (+)} \\ S_{30} &= \frac{h_p}{L} = \frac{27}{1,200} = 0.02250 \rightarrow Q_{30} = 151.4 \text{ lps (-)} \end{aligned} \right\} \sum Q = 159.6$$

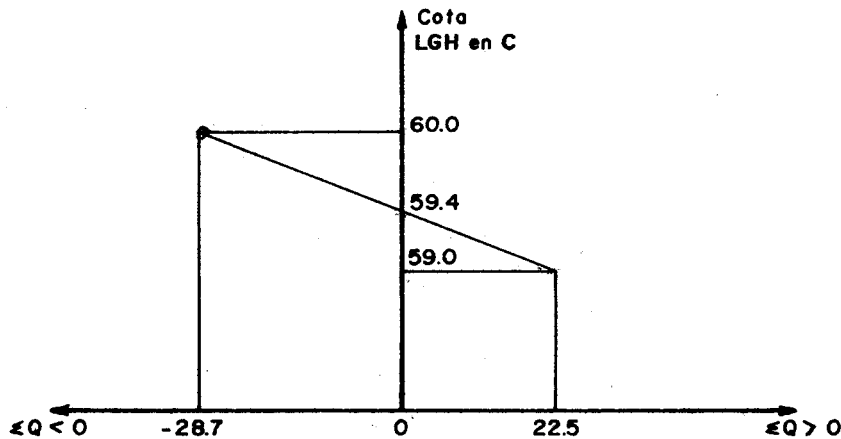
Suponer: cota LGH en C = 60.0 m.

$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00167 \rightarrow Q_{60} = 230.0 \text{ lps (+)} \\ S_{40} = 0.00250 \rightarrow Q_{40} = 98.5 \text{ lps (-)} \\ S_{30} = 0.0250 \rightarrow Q_{30} = 160.2 \text{ lps (-)} \end{array} \right\} \Sigma Q = -28.7$$

Suponer: cota LGH en C = 59.0 m.

$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00208 \rightarrow Q_{60} = 259.0 \text{ lps (+)} \\ S_{40} = 0.00167 \rightarrow Q_{40} = 79.2 \text{ lps (-)} \\ S_{30} = 0.02417 \rightarrow Q_{30} = 157.3 \text{ lps (-)} \end{array} \right\} \Sigma Q = 22.5$$

Dibujar a escala la gráfica auxiliar siguiente para determinar la cota definitiva de la LGH en C:

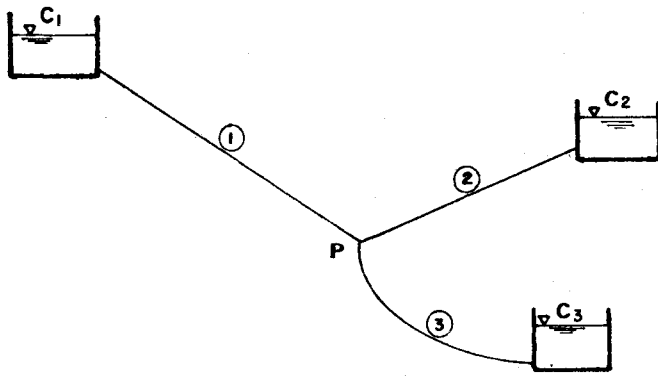


Suponer: cota LGH en C = 59.4 m.

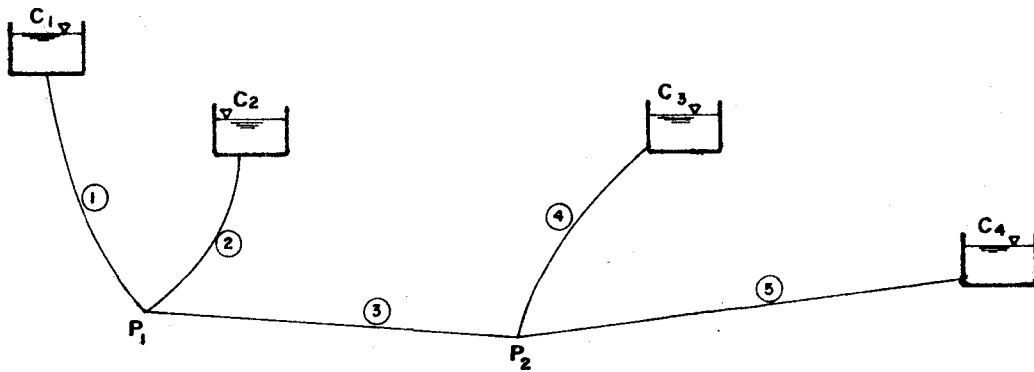
$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00192 \rightarrow Q_{60} = 248.0 \text{ lps} \rightarrow Q_{60} = 247.0 \\ S_{40} = 0.00200 \rightarrow Q_{40} = 87.3 \text{ lps} \rightarrow Q_{40} = 88.0 \\ S_{30} = 0.02450 \rightarrow Q_{30} = 158.5 \text{ lps} \rightarrow Q_{30} = 159.0 \end{array} \right\} \Sigma Q = 0$$

Ejemplo 93.- (Tres reservorios). El enunciado es análogo al de los ejemplos 91 y 92. Se conoce el nivel del agua en cada depósito y el juego de valores L-D-C_H de cada tubería.

El método de solución es el mismo.

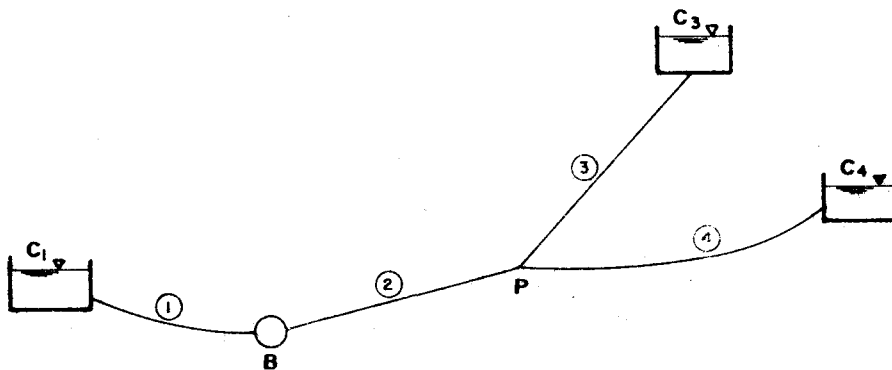


Ejemplo 94.- (Cuatro reservorios).



El método de solución consiste en suponer una cota para la LGH en uno de los nudos, determinar todos los caudales y verificar la ecuación de nudo en el otro nudo.

Ejemplo 95.- (Reservorios con bombeo).



- 1 ... tubería de aspiración
- 2 ... tubería de impulsión o descarga.

Como información adicional se tienen los datos del comportamiento de la bomba:

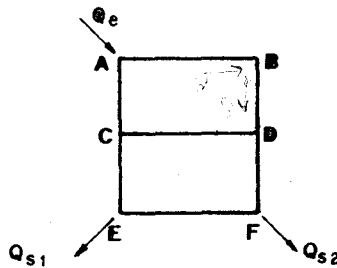
Q	H_m	η
-	-	-

es decir, para cada caudal su carga manométrica H_m (carga neta que entrega al agua) y la eficiencia con que lo hace.

El método de solución consiste en:

- * suponer un caudal en la tubería 1
- * determinar la cota de la LGH a la entrada de la bomba
- * agregar el valor H_m para conocer la cota de la LGH a la salida de la bomba
- * determinar los otros caudales
- * verificar la ecuación de nudo en P.

Cálculo manual de redes cerradas.- Una red es cerrada cuando las tuberías que la componen se unen formando circuitos. Es el caso de las redes de distribución de agua potable en ciudades.



Como información se tiene:

- * caudales que entran a la red y caudales que salen (la suma algebraica es cero, de modo que la red está balanceada exteriormente),
- * juego de valores $L-D-C_H$ para cada tubería.

Los caudales se reparten en las diferentes tuberías de modo que la red resulta balanceada interiormente. Si en cada nudo se asigna signo + a los caudales que llegan y signo - a los que salen, se cumplirá la ecuación de nudo en todos los nudos:

$$\sum Q = 0$$

Si en cada circuito simple se asigna signo + a las pérdidas de carga en sentido horario y signo - en sentido antihorario, se cumplirá la ecuación de circuito en todos los circuitos:

$$\sum h_f = 0$$

Métodos de cálculo.- El procedimiento general de cálculo es de aproximaciones sucesivas. Hay dos métodos básicos de cálculo:

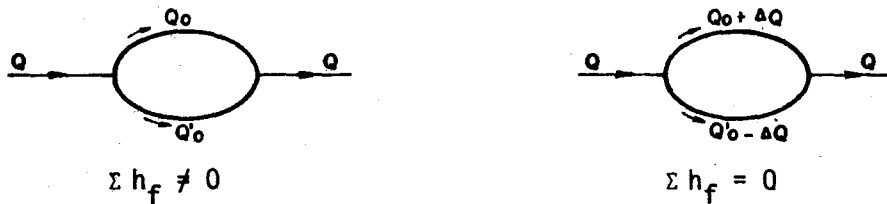
- * Método de balance de pérdidas. Consiste en suponer caudales (tenien

do cuidado de satisfacer la ecuación de nudo en todos los nudos), hallar las pérdidas y verificar la condición de circuito. Se corrigen los caudales y se repite el proceso hasta que se satisfaga, con la precisión deseada, la ecuación de circuito en todos los circuitos. Se conoce como método de Hardy-Cross.

* Método de balance de caudales. Consiste en suponer pérdidas (teniendo cuidado de satisfacer la ecuación de circuito en todos los circuitos), hallar los caudales y verificar la condición de nudo. Se corrigen las pérdidas y se repite el proceso hasta que se satisfaga, con la precisión deseada, la ecuación de nudo en todos los nudos. Se conoce como método de Cornish.

Fórmulas de corrección.- A fin de apurar la convergencia de valores, se deduce una fórmula para corregir los caudales cuando se emplea el primer método de cálculo y otra fórmula para corregir las pérdidas cuando se emplea el segundo método de cálculo:

ΔQ Se parte de considerar un circuito simple antes y después del balance:



De la ecuación Hazen-Williams se deduce $h_f = SL = KQ^{1.85}$

De esta manera la pérdida genérica de carga antes del balance es:
 $h_{f0} = K Q_0^{1.85}$ y después del balance: $h_f = K (Q_0 + \Delta Q)^{1.85}$

desarrollando el binomio: $h_f = K (Q_0^{1.85} + 1.85 Q_0^{0.85} \Delta Q + \dots)$

en que se desprecian los ΔQ de orden superior por ser ΔQ pequeño.

La condición de circuito es: $\Sigma K (Q_0^{1.85} + 1.85 Q_0^{0.85} \Delta Q + \dots) = 0$

$$\Sigma K Q_0^{1.85} + 1.85 \Sigma K Q_0^{0.85} \Delta Q = 0$$

$$\Delta Q = \frac{-\Sigma K Q_0^{1.85}}{1.85 \Sigma K Q_0^{0.85}}$$

es decir,

$$\Delta Q = - \frac{\Sigma h_{f0}}{1.85 \Sigma \frac{h_{f0}}{Q_0}}$$

Δh_f La pérdida de carga genérica antes del balance es $h_{f0} = K Q_0^{1.85}$
 y después del balance:

$$h_{fo} + \Delta h_f = K (Q_o + \Delta Q)^{1.85}$$

$$h_{fo} + \Delta h_f = K (Q_o^{1.85} + 1.85 Q_o^{0.85} \Delta Q)$$

$$h_{fo} + \Delta h_f = K Q_o^{1.85} + 1.85 K Q_o^{0.85} \Delta Q$$

luego
$$\Delta h_f = 1.85 \Delta Q \frac{h_{fo}}{Q_o}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta h_f}{1.85} \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

$$\Sigma \Delta Q = \frac{\Delta h_f}{1.85} \Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

pero $\Sigma (Q_o + \Delta Q) = 0$, condición de nudo,

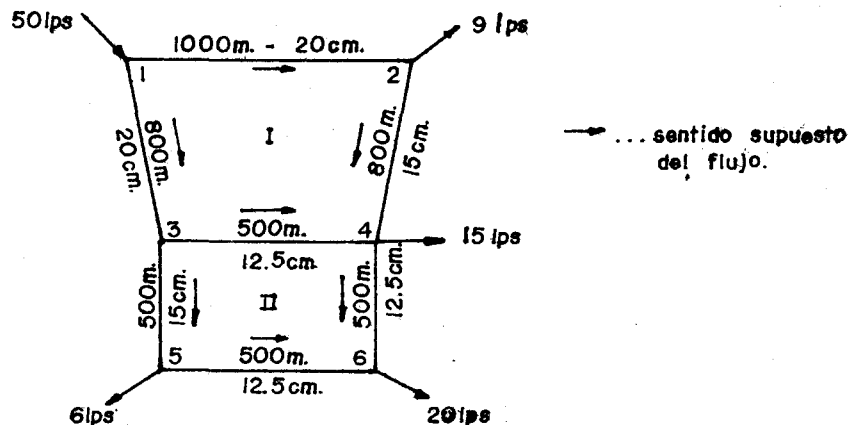
es decir $\Sigma Q_o = - \Sigma \Delta Q$

reemplazando:
$$- \Sigma Q_o = \frac{\Delta h_f}{1.85} \Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

$$\Delta h_f = - \frac{1.85 \Sigma Q_o}{\Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}}$$

NOTA: Si se usa Darcy-Weisbach en vez de 1.85 corresponde el valor 2.

Ejemplo 96.- En la red que se muestra, encontrar el caudal en cada tubería. Todas las tuberías tienen un $C_H = 130$.



La solución se encuentra en la página 197. Nótese cómo en la tubería 3-4, del segundo circuito, se considera el caudal previo modificado en el valor ΔQ del primer circuito. De esta misma manera se procede en las iteraciones siguientes.

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

$$Q \dots \text{m}^3/\text{sg}$$

$$D \dots \text{m}$$

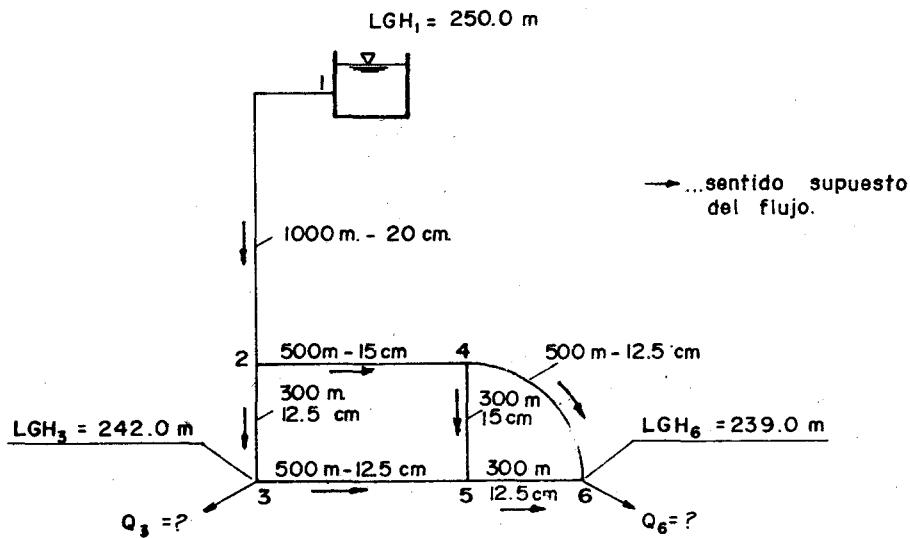
$$S = 0.00130 \frac{Q^{1.85}}{D^{4.87}}$$

$$\Delta Q = - \frac{\Sigma h_{fo}}{1.85 \Sigma \frac{h_{fo}}{Q_0}}$$

Ejemplo 97.- En la red que se muestra, encontrar el caudal en cada tubería. Todas las tuberías tienen un $C_H = 130$. El dato LGH se refiere a la cota que debe tener la línea de gradiente hidráulica.

LGH₁, queda determinada por la ubicación topográfica del tanque que alimenta la red;

LGH₃ y LGH₆, quedan determinadas por la cota topográfica y la altura de presión requerida en cada punto de la derivación.



De acuerdo a la información disponible corresponde emplear el método de balance de caudales. La solución se encuentra en las páginas 198 y 199. Nótese cómo en la tubería 4-5, por pertenecer a los dos circuitos, es necesario aplicar una doble corrección Δh_f , para que la pérdida corregida tenga un valor único.

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

$$Q \dots \text{m}^3/\text{sg}$$

$$D \dots \text{m}$$

$$Q = 36.218 D^{2.63} S^{0.54}$$

$$\Delta h_f = - \frac{1.85 \Sigma Q_0}{\Sigma \frac{Q_0}{h_{fo}}}$$

SOLUCION DEL EJEMPLO 96

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CIRCUITO TRAMO		D m	L m	Q ₀ lps	S ₀ o/oo	H ₀ m	H ₀ /Q ₀	ΔQ ₀ lps	Q ₁ lps
I	1-2	0.200	1000	25.0	3.58	3.58	143.20	-1.5	23.5
	2-4	0.150	800	16.0	6.37	5.10	318.75	-1.5	14.5
	4-3	0.125	500	-10.0	-6.49	-3.25	325.00	-1.5	-11.5+1.2
	3-1	0.200	800	-25.0	-3.58	-2.86	114.40	-1.5	-26.5
Σ = 2.57							901.35		
II	4-6	0.125	500	11.0	7.74	3.87	351.82	-1.2	9.8
	6-5	0.125	500	-9.0	-5.34	-2.67	296.67	-1.2	-10.2
	5-3	0.150	500	-15.0	-5.65	-2.83	188.67	-1.2	-16.2
	3-4	0.125	500	10.0+1.5	8.40	4.20	365.22	-1.2	10.3+0.5
Σ = 2.57							1202.38		
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S ₁ o/oo	H ₁ m	H ₁ /Q ₁	ΔQ ₁ lps	Q ₂ lps	S ₂ o/oo	H ₂ m	H ₂ /Q ₂	ΔQ ₂ lps	Q ₃ lps
3.19	3.19	135.74	-0.5	23.0	3.07	3.07	133.48	-0.04	22.96
5.31	4.25	293.10	-0.5	14.0	4.97	3.98	284.29	-0.04	13.96
-6.85	-3.43	333.01	-0.5	-10.8+0.1	-7.35	-3.68	343.93	-0.04	-10.74+0.02
-3.99	-3.19	120.38	-0.5	-27.0	-4.13	-3.30	122.22	-0.04	-27.04
Σ = 0.82		882.23			Σ = 0.07		883.92		
6.25	3.13	319.39	-0.1	9.7	6.13	3.07	316.49	-0.02	9.68
-6.73	-3.37	330.39	-0.1	-10.3	-6.85	-3.43	333.01	-0.02	-10.32
-6.52	-3.26	201.23	-0.1	-16.3	-6.59	-3.30	202.45	-0.02	-16.32
7.48	3.74	346.30	-0.1	10.7+0.04	7.40	3.70	344.51	-0.02	10.72
Σ = 0.24		1197.31			Σ = 0.04		1196.46		

Nótese cómo conforme avanzan las iteraciones el valor Σh_f se va haciendo más pequeño, tendiendo a cero en cada circuito. En cada circuito el valor ΔQ también tiende a cero.

Nótese que la pérdida de carga entre los nudos extremos 1 y 6 es prácticamente la misma para todos los caminos posibles.

SOLUCION DEL EJEMPLO 97

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
NUDO #	TRAMO	D m	L m	h_{fo} m	S_o o/oo	Q_o lps	Q_o/h_{fo}	Δh_f m	h_{f1} m	S_1 o/oo	Q_1 lps	
2	1-2	0.200	1000	-5.00	- 5.00	-30.1	0.006	0.22	-4.78	- 4.78	-29.3	
	3-2	0.125	300	3.00	10.00	12.7	0.004	0.22	3.22	10.73	13.2	
	4-2	0.150	500	3.00	6.00	15.6	0.005	0.22	3.22+0.46	7.36	17.4	
							$\Sigma = - 1.8$	0.015				$\Sigma = 1.3$
4	2-4	0.150	500	-3.00-0.22	- 6.44	-16.2	0.005	-0.46	-3.68+0.16	- 7.04	-17.0	
	5-4	0.150	300	1.00	3.30	11.3	0.011	-0.46	0.54-0.24	1.00	5.9	
	6-4	0.125	500	3.00	6.00	9.6	0.003	-0.46	2.54	5.08	8.8	
							$\Sigma = 4.7$	0.019				$\Sigma = - 2.3$
5	3-5	0.125	500	-1.00	- 2.00	- 5.3	0.005	0.24	-0.76	- 1.52	- 4.6	
	4-5	0.150	300	-1.00+0.46	- 1.80	- 8.1	0.015	0.24	-0.30-0.15	- 1.50	- 7.4	
	6-5	0.125	300	2.00	6.67	10.2	0.005	0.24	2.24	7.47	10.9	
							$\Sigma = - 3.2$	0.025				$\Sigma = - 1.1$

Continúa ...

Continuación

		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
NUDO #	TRAMO	Q_1/h_{f1}	h_f m	h_{f2} m	S_2 o/oo	Q_2 lps	Q_2/h_{f2}	Δh_f m	h_{f3} m	S_3 o/oo	Q_3 lps
2	1-2	0.0061	-0.16	-4.94	- 4.94	-29.9	0.00605	0.06	-4.88	- 4.88	-29.7
	3-2	0.0041	-0.16	3.06	10.20	12.8	0.00418	0.06	3.12	10.40	13.0
	4-2	0.0047	-0.16	3.52-0.15	6.74	16.6	0.00493	0.06	3.43-0.06	6.74	16.6
		$\Sigma = 0.0149$				$\Sigma = - 0.5$	0.01516				$\Sigma = - 0.1$
4	2-4	0.0048	0.15	-3.37-0.06	- 6.86	-16.7	0.00487	0.06	-3.37	6.74	-16.6
	5-4	0.0197	0.15	0.45-0.07	1.27	6.7	0.01763	0.06	0.44-0.05	1.30	6.8
	6-4	0.0035	0.15	2.69	5.38	9.1	0.00338	0.06	2.75	5.50	9.2
		$\Sigma = 0.0280$				$\Sigma = - 0.9$	0.02588				$\Sigma = - 0.6$
5	3-5	0.0061	0.07	-0.69	- 1.38	- 4.4	0.00638	0.05	-0.64	- 1.28	- 4.2
	4-5	0.0164	0.07	-0.38-0.06	- 1.47	- 7.3	0.01659	0.05	-0.39	- 1.30	- 6.8
	6-5	0.0049	0.07	2.31	7.70	11.0	0.00476	0.05	2.36	7.87	11.2
		$\Sigma = 0.0274$				$\Sigma = - 0.7$	0.02773				$\Sigma = 0.2$

199

1. Nótese cómo conforme avanzan las iteraciones el valor ΣQ se va haciendo más pequeño, tendiendo a cero en cada nudo. En cada nudo el valor Δh_f también tiende a cero.
2. Empleando este método es obvio que la pérdida de carga entre los puntos extremos 1 y 6 es la misma para todos los caminos posibles. También que en cada circuito $\Sigma h_f = 0$.

Comentario.- Es bueno hacer notar que en este apartado 8.9.2 que se refiere a análisis de redes, en lo que respecta a las redes cerradas, los dos métodos de cálculo, el de balance de pérdidas y el de balance de gastos, - son métodos de verificación y no de diseño. En el diseño de redes se determina el diámetro de cada tubería y no es tratado aquí.

Antes de atacar un problema de verificación (también de diseño) hay que hacer un breve recuento para ver que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones disponibles o datos.

En una red cerrada de r ramas o tuberías conocidas hay r caudales desconocidos o incógnitas. Los n nudos proporcionan $(n-1)$ ecuaciones independientes y los circuitos existentes proporcionan $(r-n+1)$ ecuaciones, de modo que el total de ecuaciones disponibles es:

$$(n-1) + (r-n+1) = n-1+r-n+1 = r$$

es decir igual al total de incógnitas. Tal es el caso de la red del ejemplo 96.

En el ejemplo 97, las incógnitas son 6 gastos y 3 cotas de la LGH, es decir 9. La información disponible comprende 5 ecuaciones independientes de los nudos, 2 ecuaciones de los circuitos y 2 cotas de LGH, es decir un total de 9 datos.

Cálculo de redes con computadora.- En una red cerrada, en general, de n nudos, se plantean $(n-1)$ ecuaciones independientes de nudo, de la forma

$$\sum Q = 0$$

y λ ecuaciones de circuito de la forma:

$$\sum h_f = Q$$

Cuando se combinan estas ecuaciones queda conformado un sistema de r ecuaciones no lineales. Al no existir un método de solución directa de este sistema se recurre al procedimiento de cálculo iterativo. Para sistemas simples de tuberías puede hacerse el cálculo manual en la forma recién descrita en los ejemplos 96 y 97. Para redes grandes se hace imprescindible el cálculo con computadora.

Existe un método, el de Newton-Raphson, que difiere de los métodos clásicos de balance de pérdidas y de balance de gastos, en que las correcciones a los caudales asumidos o a las pérdidas asumidas se aplican a toda la red simultáneamente. Este método converge más rápidamente, y tiene que ser hecho con computadora. No es tratado aquí.

Método de la teoría lineal.- De la ecuación Darcy-Weisbach se deduce:

$$h_f = KQ^2$$

Si la ecuación de circuito se escribe del modo:

$$\sum KQ^2 = 0$$

se forma un sistema de ecuaciones no lineales. Pero cuando se expresa:

$$h_f = K' Q$$

siendo $K' = K Q_0$,

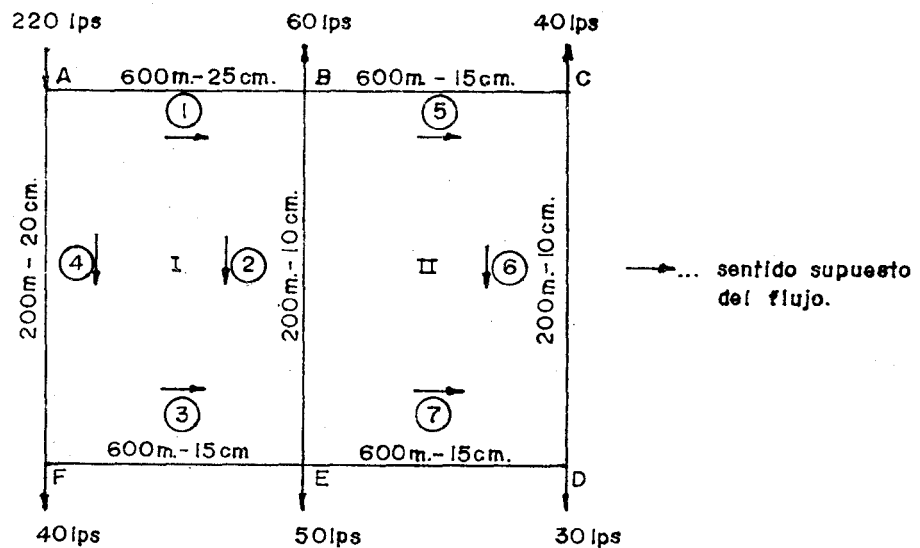
el sistema de ecuaciones no lineales se transforma en un sistema de ecuaciones lineales.

Cuando estas λ ecuaciones lineales de circuito, se combinan con las $(n-1)$ ecuaciones independientes de nudo, se forma un sistema de r ecuaciones lineales. Resolviendo este sistema de r ecuaciones lineales con r incógnitas se obtienen los valores Q .

Desde que los valores iniciales Q_0 son valores estimados, el procedimiento se repite hasta la precisión deseada en los caudales Q .

Al igual que el método Newton-Raphson, este método de la teoría lineal converge mucho más rápido que los métodos tradicionales de balance de pérdidas y de gastos, pero no se presta para el cálculo manual sino que tiene que usarse computadora.

Ejemplo 98.- (Referencia 8). Analizar la red cuya geometría se muestra, por el método de la teoría lineal. La rugosidad absoluta de todas las tuberías es $K = 0.06$ mm. Usar $\nu = 1.13 \times 10^{-6}$ m²/sg.



Ecuaciones de nudo, para caudales en m³/sg:

$$\begin{aligned} + Q_1 + Q_4 &= +0.220 \\ Q_1 - Q_2 - Q_5 &= 0.060 \\ Q_5 - Q_6 &= 0.040 \\ Q_2 + Q_3 - Q_7 &= 0.050 \\ - Q_3 + Q_4 &= 0.040 \end{aligned}$$

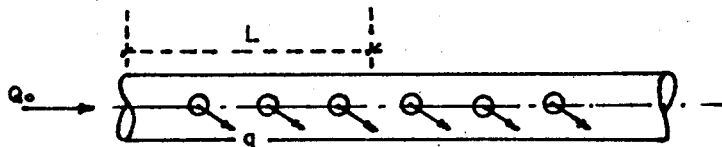
Los nuevos valores de K' se determinan usando el promedio de los caudales asumido y encontrado en cada tubería. Después de cuatro iteraciones más se obtienen los caudales finales. Los resultados son:

Tubería	Q lps	h_f m
AB	131.55	13.70
BE	25.02	19.55
FE	48.45	26.67
AF	88.45	6.59
BC	46.53	24.74
CD	6.55	1.52
ED	23.47	6.69

8.9.3 Tubería con servicio en camino

Es una tubería que cada cierta distancia tiene una salida de agua. Como el diámetro permanece constante, al ir disminuyendo el caudal, va disminuyendo la velocidad.

Por simplicidad se supone todavía válida la fórmula Darcy-Weisbach y el valor de f constante.



$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g A^2} = \frac{f}{2g D A^2} Q^2 L = K Q^2 L$$

si se considera que el gasto que sale es $q \text{ m}^3/\text{sg}$ por metro lineal de tubería, el gasto genérico es:

$$Q = Q_0 - q L$$

la pérdida de carga en una longitud pequeña:

$$d h_f = K Q^2 d L$$

y la pérdida de carga en una longitud L :

$$h_f = \int_0^L K Q^2 d L$$

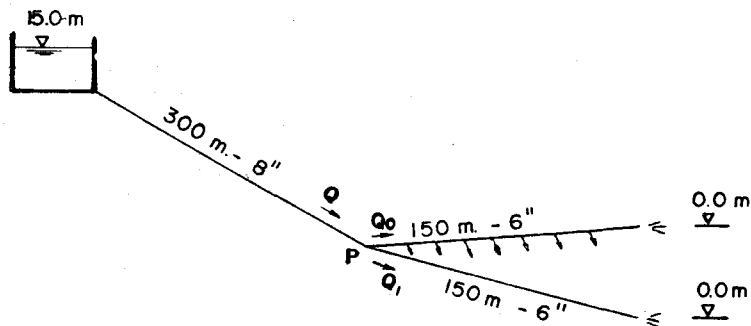
$$\begin{aligned}
 h_f &= \int_0^L K (Q_0 - qL)^2 dL = \int_0^L K (Q_0^2 + q^2 L^2 - 2 Q_0 q L) dL \\
 &= K \left[Q_0^2 L + \frac{q^3 L^3}{3} - Q_0 q L^2 \right] = KL \left[Q_0^2 + \frac{(Q_0 - Q)^2}{3} - Q_0 (Q_0 - Q) \right] \\
 &= KL \left(Q_0^2 + \frac{Q_0^2 + Q^2 - 2 Q_0 Q}{3} - Q_0^2 + Q_0 Q \right) \\
 &= \frac{KL}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q + Q^2)
 \end{aligned}$$

para el caso particular de gasto final igual cero:

$$h_f = \frac{KL}{3} Q_0^2$$

es decir, la tercera parte de la pérdida que ocurriría si el Q_0 fuera constante.

Ejemplo 99. (Referencia 4). De un depósito sale una tubería de 8" y 300 m que se bifurca en ramales de 6" y 150 m cada uno. Los extremos descargan libremente en la atmósfera. Uno de los ramales es una tubería que da servicio a través de salidas igualmente espaciadas y de modo que el gasto en el extremo es la mitad del gasto en el inicio del ramal. - Despreciando las pérdidas locales, y considerando un valor constante $f = 0.024$, calcular el gasto en cada ramal,



Designando con Q , Q_0 y Q_1 los caudales, como indica la figura, en la tubería que da servicio:

$$h_f = \frac{KL}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q + Q^2)$$

en esta fórmula $Q = \frac{Q_0}{2}$,

$$\therefore h_f = \frac{KL}{3} \left(Q_0^2 + \frac{Q_0^2}{2} + \frac{Q_0^2}{4} \right) = \frac{7KL}{12} Q_0^2 = 2,112.52 Q_0^2$$

Entre el depósito y el nudo P:

$$h_f = 1,718.78 Q^2$$

debiendo cumplirse: $1,718.78 Q^2 + 2,112.52 Q_0^2 = 15 \dots (1)$

En el otro ramal : $1,718.78 Q^2 + 3,621.46 Q_1^2 = 15 \dots (2)$

Por último : $Q = Q_0 + Q_1 \dots (3)$

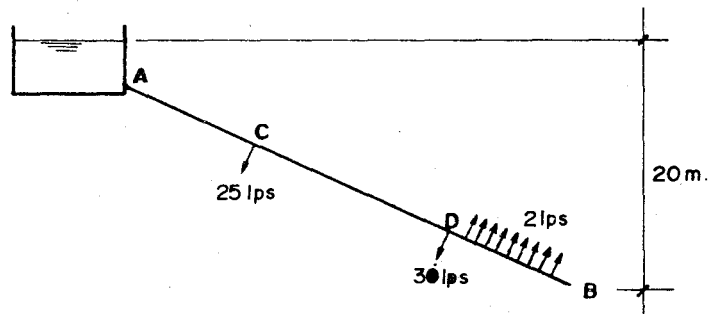
Resolviendo el sistema se determinan los valores solicitados, que resultan ser:

$$Q = 79.0 \text{ lps}$$

$$Q_0 = 44.8 \text{ lps}$$

$$Q_1 = 34.2 \text{ lps}$$

Ejemplo 100. (Referencia 4). Determinar el diámetro constante de un conducto rectilíneo AB, del cual se derivan gastos de 25 lps y 30 lps en C y D, respectivamente; asimismo se tienen, del punto D al B, derivaciones uniformes de 2 lps, a cada metro de longitud. En el punto B la presión debe ser por lo menos de 15 m de columna de agua y el factor de fricción es $f = 0.020$.



- AC = 20 m
- CB = 30 m
- DB = 20 m

Pautas para la solución.

- * no considerar pérdidas menores
- * la pérdida total de carga es de 5 m
- * el caudal en AC es 95 lps y el caudal en CD es 70 lps.

Se deja como ejercicio final para el lector.

ACERCA DE LA HISTORIA DE LA HIDRAULICA
(tomado de la referencia 4)

PRANDTL, Ludwig (1875-1953)

Se le considera el fundador de la Mecánica de Fluidos moderna. Nació en el sur de Alemania. Realizó estudios de ingeniería mecánica y se doctoró con una tesis sobre elasticidad.

Introdujo el concepto de capa límite. Fue llamado como profesor de la Universidad de Göttingen, estableciendo un importante Instituto para la investigación del movimiento de los fluidos.

Tuvo importantes discípulos como Blasius, Von Karman y otros, constituyendo una verdadera escuela dentro de la que cabe mencionar a Tietjens (dio forma de libro a las lecciones de Prandtl) y a Nikuradse (estudió experimentalmente la resistencia en tuberías).

ROUSE, Hunter

Es uno de los autores e investigadores contemporáneos que goza de mayor prestigio por su contribución al desarrollo y divulgación de la Mecánica de los Fluidos.

Se graduó de Master en el Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) en 1932, de doctor en ingeniería en Karlsruhe, Alemania, y de doctor en ciencias físicas en la Sorbona en 1959.

Tuvo una larga carrera en la docencia universitaria que inició como Asistente en el M.I.T. y culminó como Decano de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Iowa. Conferencista y profesor visitante recorrió muchos países del mundo.

Entre sus libros destacan: "Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers" (1938), "Elementary Mechanics of Fluids" (1953), "History of Hydraulics" (1957), "Engineering Hydraulics" (1950), "Advanced Mechanics of Fluids" (1959) y "Selected Writings" (1971).

APENDICE A1. PROPIEDADES DEL AGUA Y DEL AIRE (*)

Propiedades mecánicas del agua a la presión atmosférica

Temp. °C	Densidad $\frac{\text{kg-sg}^2}{\text{m}^4}$	Peso específico $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Viscosidad dinámica $\frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$	Viscosidad cinemática $\frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$	Presión de vapor $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (abs)
0	101.96	999.87	18.27×10^{-5}	1.792×10^{-6}	0.0056
5	101.97	999.99	15.50	1.520	0.0088
10	101.95	999.73	13.34	1.308	0.0120
15	101.88	999.12	11.63	1.142	0.0176
20	101.79	998.23	10.25	1.007	0.0239
25	101.67	997.07	9.12	0.897	0.0327
30	101.53	995.68	8.17	0.804	0.0439
35	101.37	994.11	7.37	0.727	0.0401
40	101.18	992.25	6.69	0.661	0.0780
50	100.76	988.07	5.60	0.556	0.1249

Propiedades del aire a la presión atmosférica

Temp. °C	Densidad $\frac{\text{kg-sg}^2}{\text{m}^4}$	Peso específico $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Viscosidad dinámica $\frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$	Viscosidad cinemática $\frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$
-20	0.1424	1.3955	16.917×10^{-7}	1.188×10^{-5}
-10	0.1370	1.3426	16.892	1.233
0	0.1319	1.2926	17.411	1.320
10	0.1273	1.2475	18.013	1.415
20	0.1229	1.2047	18.288	1.488
30	0.1188	1.1642	19.008	1.600
40	0.1150	1.1270	19.412	1.688
50	0.1115	1.0927	19.724	1.769

(*) Valores tomados de la referencia 2 de la Bibliografía.