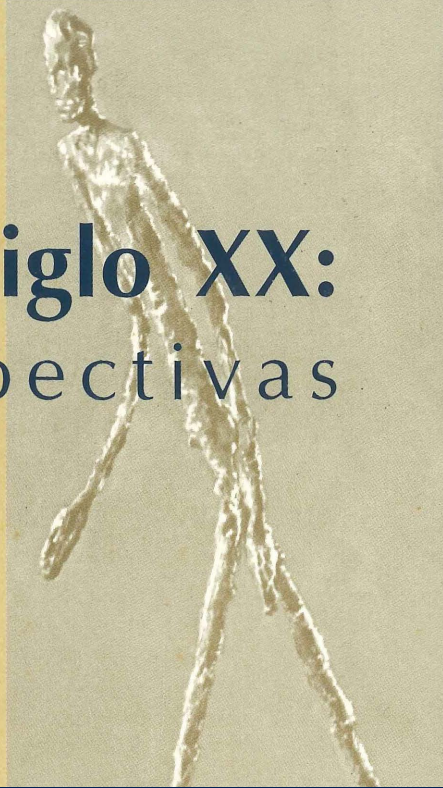
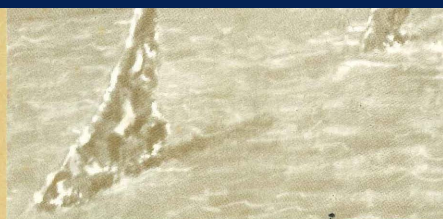


La filosofía del siglo XX: balance y perspectivas

Miguel Giusti | editor



Capítulo 46



Actas del
VII Congreso Nacional
de Filosofía



Pontificia Universidad Católica del Perú | Fondo Editorial 2000

La filosofía
del siglo XX:
balance y perspectivas

Miguel Gisella | editor

© Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria cuadra 18, San Miguel, Lima-Perú
Telf. 460-0872 - 460-2291 - 460-2870 anexos 220 y 356
Cuidado de la edición: Rocío Reátegui
Diseño de cubierta: Gisella Scheuch

La filosofía del siglo XX: balance y perspectivas
Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Derechos reservados
Impreso en el Perú - Printed in Peru
Primera edición: julio del 2000
ISBN 9972-42-354-9
Depósito Legal: 1501052000-2618



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL

La negación, la verdad y la inconsistencia

Óscar Masaveu

Potomac State College of West Virginia University, Estados Unidos

Presentaremos una lógica de primer orden de corte paraconsistente S . La lógica posee mucha de la versatilidad de la lógica clásica, pero además posee una serie de propiedades interesantes. La lógica no es finitamente trivializable por conjuntos de fórmulas que no contienen al símbolo de falsedad \perp . El sistema incluye una negación débil y en ella se puede definir una negación fuerte en el sentido de da Costa. Mediante un estudio de las relaciones existentes entre las dos negaciones se puede plantear y estudiar una serie de interrogantes filosóficas muy importantes. Las propiedades de la lógica misma ofrecen la posibilidad de estudiar más a fondo problemas relacionados con los fundamentos de las matemáticas tales como el concepto intuitivo de conjunto.

Lógicas paraconsistentes han sido estudiadas desde 1948 cuando Jaśkowski, atendiendo a una sugerencia de Lukasiewicz, inició su estudio con el trabajo [4]. Independientemente da Costa inicia a partir de 1954 un estudio que lo conduce a construir varios sistemas para consistentes. Una reseña histórica de los inicios del estudio de la paraconsistencia puede ser encontrado en [1]. Miró Quesada [5] creó el término lógica paraconsistente para denotar a un sistema que puede ser la base lógica para teorías inconsistentes pero no triviales.

En [6] detallamos como los sistemas C_n , $0 \leq n \leq \omega$ de da Costa [3] y los B_n , $0 \leq n < \omega$ de Bunder [2] motivaron el desarrollo del sistema lógico paraconsistente que llamamos P . El presente trabajo describe una de las direcciones en que hemos continuado el estudio iniciado [6]. También hemos extendido los resultados de [6] en la dirección de la lógica modal; los detalles serán presentados en un próximo trabajo.

En el presente trabajo adoptaremos una posición filosófica que muchos describen como un realismo platónico. Para nosotros entonces, los objetos matemáticos existen y se pueden percibir con la razón. Los conjuntos son algunos de los objetos matemáticos más importantes. Debido a las conocidas contradicciones a las que conduce la llamada Teoría Intuitiva de Conjuntos, se han propuesto varias teorías axiomáticas de conjuntos como alternativas. Todas ellas limitan el alcance del concepto de conjunto y no todas lo hacen de la misma forma. Una de las motivaciones para el presente trabajo es la búsqueda de un sistema lógico paraconsistente que pueda servir de base para estudiar al concepto intuitivo de conjunto. Tal sistema deberá ser lo suficientemente fuerte para permitir el desarrollo de las construcciones matemáticas usuales. El sistema deberá ser paraconsistente para permitir el

estudio de conjuntos intuitivos aun en la presencia de contradicciones sin que por ellas la teoría subyacente se trivialice. De esta forma se podría escoger entre las diversas teorías axiomáticas de conjuntos a la que mejor describa a los conjuntos intuitivos. Incluso se podría formular teorías alternativas nuevas. Podría también estudiarse preguntas fundamentales sobre la naturaleza de los conjuntos. Por ejemplo, si la Hipótesis del Continuo es válida o no. Creemos que el sistema S que presentamos es un buen punto de partida para la obtención del sistema lógico buscado.

Recordemos que es posible axiomatizar a la teoría de conjuntos Gödel-Bernays usando un número finito de axiomas. Nuestra segunda motivación también se relaciona con la teoría de conjuntos. Propiamente, está relacionada con el Teorema de Incompletitud de Gödel. Dada una teoría, para que sea válido dicho teorema es necesario que la teoría cumpla una serie de requisitos que abarcan desde su poder expresivo hasta la naturaleza de sus axiomas y sus reglas de inferencia. A lo que a veces se le da poca importancia es que también existen exigencias sobre el sistema lógico subyacente. Ahora bien, si el sistema lógico subyacente fuera paraconsistente estaríamos interesados en el Teorema de Incompletitud de Gödel, pero en la versión cuya conclusión sería que la no-trivialidad de la teoría no se podría demostrar dentro de la misma. Pero, nuevamente la validez del teorema dependería de requisitos sobre el poder expresivo de la teoría, de la naturaleza de sus axiomas y reglas de inferencia, y también del sistema lógico subyacente. Supongamos que se pudiera demostrar, usando sólo principios elementales, que el sistema lógico subyacente no es finitamente trivializable. Supongamos adicionalmente que la teoría axiomática de conjuntos que usáramos tuviera un fuerte poder expresivo y que permitiera realizar las construcciones matemáticas usuales utilizando para ello a un número finito de axiomas. Bajo estas circunstancias es posible que quizá se pudiera demostrar la no-trivialidad de la teoría dentro de la misma.

Finalmente, nos motiva también el hecho que muchas lógicas paraconsistentes poseen, además de la negación propia del sistema, a una negación fuerte. Usualmente la negación fuerte no es un operador primitivo de la lógica, más bien es un operador definido y posee muchas de las propiedades de la negación clásica. Es natural estudiar el proceso mediante el cual estos dos conceptos de negación se identifican en la lógica clásica. La lógica que presentamos identifica mucho más que otras lógicas paraconsistentes a los dos conceptos. Pero los conceptos siguen siendo distintos en S . Creemos que un estudio del proceso de identificación de los dos conceptos a medida que nos aproximamos a la lógica clásica puede darnos un mejor entendimiento de la negación y verdad clásica.

1. El sistema proposicional T

Presentamos dos sistemas lógicos proposicionales T y P . El lenguaje de ambos será el mismo que el de la lógica proposicional clásica en la versión que utiliza como símbolos primitivos a \wedge , \vee , \rightarrow , \neg , \top , \perp y a los paréntesis. Utilizaremos a p_1 , p_2 , p_3, \dots , p_n, \dots como las variables proposicionales y omitiremos paréntesis superfluos usando el convenio que el operador \rightarrow será el principal, así $A \wedge B \rightarrow B$ abreviará a la fórmula $(A \wedge B) \rightarrow B$ y no a $A \wedge (B \rightarrow B)$. Las nociones de fórmula y de prueba dentro de los sistemas serán definidos de la manera usual. Detalles adicionales pueden encontrarse en [6].

Sea T el sistema proposicional cuyos esquemas axiomáticos y regla de inferencia son:

0. T
1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \wedge B \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $\neg\neg A \rightarrow A$
10. $A \rightarrow \neg\neg A$
11. $\perp \rightarrow B$
12. $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$
13. $((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$
14. $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

En [6] presentamos el sistema proposicional P cuyos esquemas axiomáticos y regla de inferencia son:

0. T
1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \wedge B \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $\neg\neg A \rightarrow A$
10. $\perp \rightarrow B$
11. $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$
12. $((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$
13. $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

Dado un sistema lógico L denotaremos por $F(L)$ al conjunto de fórmulas de L .

Definición 1.1 Sean Σ y Π dos subconjuntos de $F(L)$.

- a) Dado un subconjunto Γ de Σ , se dice que el subconjunto (Σ, Π) -trivializa a L si toda fórmula $A \in \Pi$ es demostrable en L a partir de Γ .
- b) El sistema L se llama Σ, Π -trivializable si existe un subconjunto Γ de Σ que (Σ, Π) -trivializa a L . De lo contrario se dice que L no es (Σ, Π) -trivializable. Cuando $\Sigma = \Pi$, diremos que Γ trivializa a L relativo a Π . También diremos simplemente que L es trivializable relativo a Π o que L no es trivializable relativo a Π , según sea el caso.

- c) El sistema L se llama finitamente (Σ, Π) -trivializable si existe un subconjunto finito Γ de Σ que (Σ, Π) -trivializa a L . De lo contrario se dice que L no es finitamente (Σ, Π) -trivializable. Cuando $\Sigma = \Pi$, diremos simplemente que L es finitamente trivializable relativo a Π o que L no es finitamente trivializable relativo a Π , según sea el caso.
- d) Si L es (Σ, Π) -trivializable cuando Σ es el conjunto vacío de fórmulas y Π es $F(L)$, al sistema se le llama trivial. Caso contrario se dice que L es no-trivial.
- e) Si L es finitamente (Σ, Π) -trivializable cuando Σ es algún conjunto de fórmulas y Π es $F(L)$, al sistema se le llama finitamente trivializable. Caso contrario se dice que L no es finitamente trivializable.

Hacemos notar que $F(T) = F(P)$. Denotaremos por \mathbf{F} a este conjunto común de fórmulas. Dado un sistema L denotaremos por $F^*(L)$ al conjunto de fórmulas de L que no contienen a \perp . A $F^*(P)$ lo llamaremos simplemente \mathbf{F}^* .

En [6] demostramos que el sistema P no es $(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ -trivializable. Más aún, probamos que P no es finitamente trivializable relativo a \mathbf{F}^* .

Lema 1.2. Sean L y K dos sistemas lógicos, y sea $f: F(L) \rightarrow F(K)$ una transformación que cumple las siguientes condiciones:

1. Cada axioma de L es transformado por f en un teorema de K .
2. Para cada instancia de una aplicación de una regla de inferencia de L , existe en K una demostración de la imagen del consecuente de la regla a partir de las imágenes de los antecedentes de la misma.
3. $f(\perp) = \perp$.
4. Si una fórmula no contiene a \perp , su imagen tampoco contiene a \perp .
5. El sistema K es $(\{\perp\}, F(K))$ -trivializable.

Entonces si K no es (finitamente) $(F^*(K), F(K))$ -trivializable, L no es (finitamente) $(F^*(L), F(L))$ -trivializable.

Prueba Sea Γ un conjunto de fórmulas del sistema L y sea B una fórmula de L que es demostrable a partir de Γ en L . Usando 1 y 2 se puede demostrar por inducción sobre la longitud de la prueba en L que $f(B)$ es demostrable en K a partir del conjunto de las imágenes de las fórmulas de Γ . En particular la imagen de un teorema de L es un teorema de K .

Supongamos que L sea (finitamente) $(F^*(L), F(L))$ -trivializable. Por la observación anterior y por 3, existe una prueba en K de \perp a partir del conjunto de imágenes de las fórmulas de Γ , para algún conjunto (finito) Γ de fórmulas que no contienen a \perp . Por 4, las imágenes de las fórmulas de Γ tampoco contienen a \perp . En consecuencia, usando 5, se tendría que K sería (finitamente) $(F^*(K), F(K))$ -trivializable.

Definición 1.3 Sea $f: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ la transformación definida recursivamente por las siguientes condiciones:

- a) $f(p) = p$ para cada fórmula atómica de \mathbf{F} ,
- b) $f(\perp) = \perp$ y $f(T) = T$,
- c) $f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$,
- d) $f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$,

- e) $f(A \rightarrow B) = f(A) \rightarrow f(B)$,
 f) $f(\neg A) = f(B)$ si A es $\neg B$, y
 g) $f(\neg A) = \neg f(B)$ si A no es una negación.

Definición 1.4 Para cada número natural n definimos inductivamente al conjunto $\neg^n \mathbf{F}$ como sigue:

- a) $\neg^0 \mathbf{F} = \{A \in \mathbf{F} / A \text{ no es una negación}\}$, y
 b) $\neg^{n+1} \mathbf{F} = \{A \in \mathbf{F} / A = \neg B \text{ y } B \in \neg^n \mathbf{F}\}$.

Definición 1.5 Para cada número natural n y cada $A \in \mathbf{F}$ definimos inductivamente a la fórmula $\neg^n A$ como sigue:

- a) $\neg^0 A = A$, y
 b) $\neg^{n+1} A = \neg(\neg^n A)$.

Lema 1.6 Cada fórmula $A \in \mathbf{F}$ pertenece a $\neg^n \mathbf{F}$ para un solo número natural n . Una fórmula A pertenece a $\neg^n \mathbf{F}$ si y solamente si hay una fórmula $B \in \neg^0 \mathbf{F}$ tal que $A = \neg^n B$.

Prueba La primera aseveración se establece fácilmente por inducción sobre la longitud de la fórmula. La segunda se establece a partir de la primera por inducción sobre n .

Lema 1.7 Sea f la transformación de la Definición 1.3 y sea $A = \neg^n B$ con $B \in \neg^0 \mathbf{F}$. Entonces $f(A) = f(B)$ si n es par, y $f(A) = \neg f(B)$ si n es impar.

Prueba Inducción sobre n .

Teorema 1.8 T no es $(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ -trivializable.

Prueba Sea f la transformación de la Definición 1.3. Es suficiente probar que f satisface las condiciones 1 a 5 del Lema 1.2.

Que 3 se cumple es inmediato por la Definición 1.3. El requisito 5 fue probado en [6]. La condición 4 se prueba sin dificultad por inducción sobre la longitud de la fórmula.

Cada aplicación de Modus Ponens se transforma mediante f en una nueva aplicación de Modus Ponens, lo cual implica que 2 se cumple. La demostración de 1 utiliza nuestra observación sobre Modus Ponens y se hace mediante inducción sobre la longitud de la prueba. La prueba de que la imagen de cada axioma de T es demostrable en L es trivial excepto para los casos de los esquemas axiomáticos 9), 10) y 12) de T . Presentaremos aquí solamente estos casos.

Observemos que de los esquemas axiomáticos 1) y 2) para P se desprende fácilmente que el esquema $A \rightarrow A$ es válido en P .

Para 9) y 10), supongamos que $A = \neg^n B$ con $B \in \mathbf{F}$. Si n es par, por el Lema 1.7, la imagen del esquema axiomático es de la forma $f(B) \rightarrow f(B)$, que es demostrable en P por la observación anterior. Si n es impar, por el Lema 1.7, la imagen del esquema es de la forma $\neg f(B) \rightarrow \neg f(B)$, que también es demostrable en P por la misma observación.

Para el esquema axiomático 12) de T , supongamos que $A = \neg^n B$ con $B \in \neg^0 F$. Si n es par, por el Lema 1.7, la imagen del esquema es de la forma $(f(B) \rightarrow \perp) \rightarrow \neg f(B)$, que es demostrable en P el esquema axiomático 11) de P . En el caso en que n es impar, por el Lema 1.7, la imagen del esquema axiomático es de la forma $(\neg f(B) \rightarrow \perp) \rightarrow f(B)$ que se establece en P mediante el Teorema de Deducción para P con la ayuda de los esquemas $\neg\neg f(B) \rightarrow f(B)$ y $(\neg f(B) \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\neg f(B)$ que son casos de los esquemas axiomáticos 9) y 11) de P , respectivamente.

Definición 1.9 Una valorización para P es una función $v: F \rightarrow \{0, 1\}$ que cumple:

- i. $v(A \wedge B) = \text{Min}\{v(A), v(B)\}$,
- ii. $v(A \vee B) = \text{Max}\{v(A), v(B)\}$,
- iii. $v(A \rightarrow B) = 1$ sii $v(A) = 0$ ó $v(B) = 1$,
- iv. Si $v(A) = 0$ entonces $v(\neg A) = 1$ y $v(\neg\neg A) = 0$, y
- v. $(T) = 1, v(\perp) = 0$.

En [6] probamos que para cada $A \in F$, $v(A) = 1$ sii A es demostrable en P . Dicho de otra forma demostramos que las valorizaciones para P constituyen una semántica completa para P . También presentamos en [6] un procedimiento decisorio para P a base de casi-matrices.

Definición 1.10 Una casi-matriz para una fórmula A de F es un arreglo de 0's y 1's construido como en una tabla de verdad clásica excepto que una casi-matriz asigna sólo 1 a T y sólo 0 a \perp . Además se altera la construcción clásica si A es la negación de una fórmula B . En este caso se procede como sigue: Si a B se le ha asignado 0 en la línea, a A se le asigna 1. Si a B se ha asignado 1 en la línea hay dos casos:

Si B es la negación de una fórmula D y a D se le ha asignado 0 en la línea, a A se le asigna 0.

De otra forma se "parte" la línea en dos líneas asignando a A un 0 en la primera y un 1 en la segunda. El resto de los valores ya asignados antes de "partir" la línea original se mantienen en las dos líneas nuevas.

La Definición 1.10 se refiere a las tablas clásicas extendidas, no a las tablas abreviadas, es decir para que una fórmula aparezca en el encabezado de la tabla deberán aparecer allí previamente todas las subfórmulas propias de la misma. Asumiremos también que en el encabezado de la casi-matriz no aparecen fórmulas repetidas. De manera similar al caso clásico, una fórmula $A \in F$ es un teorema de P si y solamente si toda línea de una casi-matriz para la fórmula A le asigna 1 a la misma.

Desarrollamos a manera de ejemplo la casi-matriz para $(\neg\neg p \wedge T) \rightarrow \neg(\neg\neg p \wedge T)$ en donde p es una variable proposicional cualquiera.

T	p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \wedge T$	$\neg(\neg\neg p \wedge T)$	$(\neg\neg p \wedge T) \rightarrow \neg(\neg\neg p \wedge T)$
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
		1	0	0	1	1
			0	1	0	0
			1	1	1	1

La casi-matriz anterior es para un caso del esquema $A \rightarrow \neg A$ con $A \in \mathbf{F}^*$. En general para este tipo de fórmulas podemos probar el siguiente resultado.

Lema 1.11 En P no es demostrable instancia alguna del esquema $A \rightarrow \neg A$ en el cual la fórmula $A \in \mathbf{F}^*$.

Prueba Primero observamos que es muy fácil probar, por inducción sobre el número de fórmulas en el encabezado de las casi-matriz, que toda casi-matriz para una fórmula B que pertenece a \mathbf{F}^* posee una línea en la cual aparecen sólo 1's.

Consideremos una casi-matriz M para una instancia $B \rightarrow \neg B$ del esquema. Si nos restringimos a la casi-matriz M a las fórmulas del encabezado de M que aparecen antes de la aparición de B y a B misma, tendremos una casi-matriz N para B . La observación anterior proporciona una línea de la casi-matriz N (y por tanto una línea de la casi-matriz M) en la cual a B se le asigna un 1. De la Definición 1.10 se desprende que en la casi-matriz M debe existir una línea en que se le asigna 1 a B y 0 a $\neg B$. Por lo tanto la casi-matriz M posee una línea que asigna 0 a $B \rightarrow \neg B$ y por lo tanto esta última fórmula no es demostrable en P .

Antes de continuar notemos que si existen instancias del esquema $A \rightarrow \neg A$ que son demostrables en P , por ejemplo $\perp \rightarrow \neg \perp$ es una instancia del esquema axiomático 11). En [6] analizamos las relaciones entre P y el sistema C_ω de Da Costa que aparece en [2]. Por las observaciones hechas en [6], el Lema 1.11 también establece *mutatis mutandi* que en el sistema C_ω no es demostrable instancia alguna del esquema $A \rightarrow \neg A$.

Teorema 1.12 T no es finitamente trivializable relativo a \mathbf{F}^* .

Prueba Supongamos que el conjunto finito Γ trivializa a T relativo a \mathbf{F}^* . Agregando una o más fórmulas a Γ si fuera necesario, podemos asumir que $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ para algún $n \geq 2$. Sea la fórmula $B = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n$. Es relativamente fácil establecer que $\{B\}$ trivializa a T relativo a \mathbf{F}^* . De esta forma se puede demostrar a $\neg B$ a partir de B en T . Es claro que $B \in \mathbf{F}^*$.

La presencia de los esquemas axiomáticos 1) y 2) junto con la presencia de Modus Ponens como única regla de inferencia de T garantizan que el Teorema de la Deducción es válido para T y por lo tanto se podría probar $B \rightarrow \neg B$ en T . Sea f como en la Definición 1.3. Por el Lema 1.7, $f(B \rightarrow \neg B)$ sería demostrable en T . Como tenemos que $f(B \rightarrow \neg B)$ es igual a $f(B) \rightarrow \neg f(B)$ y $f(B) \in \mathbf{F}^*$, se tendría una contradicción con el Lema 1.11.

El Teorema 1.8 dice que para trivializar a T es necesario utilizar fórmulas que contengan a \perp . El Teorema 1.12 sostiene que para poder demostrar en T a todas las

fórmulas de T que no contienen a \perp es necesario agregar a T un conjunto necesariamente infinito de fórmulas que no contengan a \perp . En particular, si una teoría posee sólo un número finito de axiomas y los axiomas no contienen a \perp , no se podrá demostrar dentro de la teoría todas las fórmulas de T que no contienen a \perp .

El sistema T posee una semántica bivalente completa. Para obtenerla basta reemplazar a la condición iv de la Definición 1.9 por las condiciones: Si $v(A) = 0$ entonces $v(\neg A) = 1$, y $v(\neg\neg A) = 0$ ssi $v(A) = 0$. Adicionalmente T es decidible usando casi-matrices definidas de manera muy similar a las de la Definición 1.10. Para obtener la noción de casi-matriz correcta para T en la Definición 1.10 se debe cambiar el proceso usado para asignar valores a una negación por el siguiente procedimiento: Si a B se le ha asignado 0 en la línea, a A se le asigna 1. Si a B se ha asignado 1 en la línea hay dos casos:

Si B es la negación de una fórmula D a A se le asigna 0 si y sólo si a D se le ha asignado 0 en la línea.

De otra forma se "parte" la línea en dos líneas asignando a A un 0 en la primera y un 1 en la segunda. El resto de los valores ya asignados antes de "partir" la línea original se mantienen en las dos líneas nuevas.

No es nuestra intención estudiar la semántica o el procedimiento decisivo para T en el presente trabajo y no tocaremos estos temas nuevamente aquí excepto para dar la casi-matriz (en este nuevo sentido) de la fórmula $(\neg\neg p \wedge T) \rightarrow \neg(\neg\neg p \wedge T)$ en donde p es una variable proposicional. El lector podrá contrastarla con la obtenida anteriormente para el sistema P .

T	p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \wedge T$	$\neg(\neg\neg p \wedge T)$	$(\neg\neg p \wedge T) \rightarrow \neg(\neg\neg p \wedge T)$
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	1
					0	0
		1	1	1	1	1

2. El sistema de primer orden S

En la presente sección usaremos al sistema T para definir a un sistema lógico de primer orden S y estudiaremos algunas de sus propiedades. No desarrollaremos aquí su teoría de modelos pero sí detallaremos algunas de las fórmulas demostrables en el sistema.

El lenguaje de S será el mismo que el de la lógica de primer orden clásica en la versión que utiliza los símbolos primitivos a \forall , \exists , \wedge , \vee , \rightarrow , \neg , T , \perp y los paréntesis. Utilizaremos a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m, \dots$ como símbolos predicativos y denotaremos por $n(i)$ al número de términos a los cuales se debe aplicar al predicado P_i . Asumiremos que el lenguaje tiene un símbolo especial = para la igualdad y una cantidad a lo más enumerable de variables y de símbolos para constantes y funciones. Como en el caso de T omitiremos todo paréntesis superfluo usando el convenio que el operador \rightarrow es el principal.

Las nociones de término, fórmula atómica, fórmula, alcance de un cuanti-

ficador, variable libre, fórmula cerrada, y prueba son definidas de la manera usual.

Usaremos la notación $A_x[t]$ para denotar al resultado de reemplazar a cada aparición libre de x en A por el término t . Como es usual usaremos la notación $A \leftrightarrow B$ como una abreviatura para la fórmula $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Recalamos que \leftrightarrow no es un símbolo primitivo del sistema S .

Definición 2.1 Dada una fórmula A diremos que una variable x es reemplazable por el término t en la fórmula A si para cada variable y de t ninguna parte de A de la forma $\exists yB$ contiene una aparición libre de x .

Definición 2.2 Diremos que la fórmula B es una variante de la fórmula A si B puede ser obtenido a partir de A mediante una sucesión finita de sustituciones del siguiente tipo: substitúyase una parte de la forma $\exists xC$ por la fórmula $\exists yD$, en donde y no es libre en C y D se obtiene substituyendo toda aparición libre de x en C por y .

Definición 2.3 Dadas una variable x y una fórmula A diremos que una aplicación de un cuantificador $\exists xA$ o $\forall xA$ a la fórmula A es vacua si la variable x no aparece libre en A .

Definición 2.4 Dos fórmulas A y B se dicen congruentes a lo Kleene, en símbolos $A \approx B$, si satisfacen el siguiente requerimiento recursivo:

Si A es atómica, entonces $A \approx B$ sii B es A .

Si $*$ es cualquiera de los operadores $\wedge, \vee, \circ \rightarrow$, y A es de la forma $C * D$, entonces $A \approx B$ sii B es de la forma $E * F$ con $C \approx E$ y $D \approx F$.

Si A es $\neg C$, entonces $A \approx B$ sii B es $\neg D$ con $C \approx D$.

Si Qx es cualquiera de los cuantificadores $\forall x$ o $\exists x$, y A es QxC , entonces $A \approx B$ sii B es QyE en donde E se obtiene de una fórmula D , para la cual $B \approx C$, por la substitución de toda aparición libre de x en D por la variable y que no es libre en D .

Definición 2.5 Dado un cuantificador Qx se define al cuantificador Q^*x como sigue:

Si Qx es $\forall x$ entonces Q^*x es $\exists x$.

Si Qx es $\exists x$ entonces Q^*x es $\forall x$.

Definición 2.6 Una fórmula B es una variante prenexa de la fórmula A si B se obtiene a partir de A aplicando recursivamente algunas de los siguientes operaciones:

Reemplazar a una fórmula C por una variante,

Reemplazar una parte de C de la forma $\neg QxD$ por $Q^*x\neg D$,

Si $*$ es cualquiera de los operadores $\wedge, \vee, \circ \rightarrow$ y Qx es un cuantificador, reemplazar a una parte de C de la forma $QxD * E$ por la fórmula $Qx(D * E)$ siempre que x no aparezca libre en E ,

Si $*$ es cualquiera de los operadores $\wedge, \vee, \circ \rightarrow$ y Qx es un cuantificador, reemplazar a una parte de C de la forma $D * QxE$ por la fórmula

$Qx(D * E)$ siempre que x no aparezca libre en D ,
 Reemplazar una parte de C de la forma $QxD \rightarrow E$ por la fórmula
 $Q*x(D \rightarrow E)$ siempre que x no sea libre en E , y
 Reemplazar una parte de C de la forma $D \rightarrow QxE$ por la fórmula
 $Qx(D \rightarrow E)$ siempre que x no sea libre en D .

El sistema S tiene entre otros a los esquemas axiomáticos 1) a 13) de T . También tiene como una de sus reglas de inferencia a Modus Ponens a la cual, como en el caso de T , le asignaremos el número 14). Los demás esquemas axiomáticos y reglas de inferencia de S son los siguientes:

15. $\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall xB}$ si la variable x no aparece libre en A .
16. $\frac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow B}$ si la variable x no aparece libre en B .
17. $\forall xA \rightarrow A_x[t]$ si la variable x es reemplazable por el término t en A .
18. $A \rightarrow \exists xA_x[t]$ si la variable x es reemplazable por el término t en A .
19. $x = x$
20. $x = y \rightarrow (A \rightarrow A_x[y])$ si la variable x es reemplazable por la variable y en A .
21. $\neg \forall x\neg A \leftrightarrow \exists xA$
22. $\neg \exists x\neg A \leftrightarrow \forall xA$
23. $\forall x\neg A \leftrightarrow \neg \exists xA$
24. $\exists x\neg A \leftrightarrow \neg xA$
25. $\neg A \leftrightarrow \neg B$ si B es una variante prenexa de A .
26. $A \leftrightarrow B$ si $A \approx B$
27. $A \leftrightarrow B$ si A y B difieren sólo en cuantificadores vacuos.

El sistema S permite probar muchos de los teoremas de la lógica de primer orden clásica y muchos de los metateoremas válidos para la lógica de primer orden clásica son también válidos para S . Los siguientes teoremas son una muestra. Porque no es nuestro objetivo principal estudiar estas semejanzas, y por que muchas de las pruebas serán muy similares a las clásicas, omitiremos muchas de las pruebas y sólo bosquejaremos otras. Usaremos la notación \neg^*A para abreviar a $A \rightarrow \perp$. Es fácil ver, de manera similar al Teorema 2.5 de [6], que \neg^* constituya lo que Da Costa llama una negación fuerte. Es importante recordar que \neg^* no es un símbolo primitivo de S . Nos referiremos a la fórmula \neg^*A como la negación fuerte de A .

Teorema 2.7 Las siguientes reglas de inferencia son derivables en S .

$$\text{a) } \frac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow \exists xB}$$

$$\text{b) } \frac{A \rightarrow B}{\forall xA \rightarrow \forall xB}$$

$$\text{c) } \frac{A}{\forall xA}$$

Prueba Para demostrar a) asumamos que en S podemos demostrar $A \rightarrow B$. Por el esquema axiomático 18), $B \rightarrow \exists xB$. Ahora es fácil probar que $A \rightarrow \exists xB$, pero entonces, por la regla de inferencia 16), se tiene $\exists xA \rightarrow \exists xB$.

De manera similar usando 1) y 15) se prueba b).

Para demostrar c), asumamos que A es demostrable en S . Usando el esquema axiomático 1) y Modus Ponens obtenemos $T \rightarrow A$. Por la regla de inferencia 15) se tiene $T \rightarrow \forall xA$. Por el axioma 1) y Modus Ponens se obtiene $\forall A$.

Teorema 2.8 Sea B es la clausura de la fórmula A , entonces B es demostrable en S si y sólo si A es demostrable en S .

Prueba Si A es demostrable en S , usando el teorema 2.7 c) también lo es B . Si B es demostrable en S , se puede demostrar A usando repetidas aplicaciones del esquema axiomático 17).

El siguiente resultado es el Teorema de la Deducción para el sistema S . Para simplificar su enunciado necesitaremos introducir el siguiente convenio sobre la escritura de ciertas implicaciones. La expresión $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$ abreviará a la fórmula A cuando $n = 0$ y a la fórmula $B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (B_3 \rightarrow \dots \rightarrow (B_n \rightarrow A) \dots))$ cuando $n > 0$.

Teorema 2.9 (Teorema de La Deducción)

Sea Γ un subconjunto de $F(S)$. Una fórmula A es demostrable a partir de Γ en S si y solamente si existen $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, con $n \geq 0$, las cuales son clausuras de fórmulas de Γ , tales que en S es demostrable la fórmula $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$.

Prueba Inducción sobre la longitud de la prueba.

Teorema 2.10 Supongamos que la fórmula B se obtiene a partir de A reemplazando algunas apariciones de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ por B_1, B_2, B_3, B_n , respectivamente. Si en S son demostrables las fórmulas $A_1 \leftrightarrow B_1, A_2 \leftrightarrow B_2, A_3 \leftrightarrow B_3, \dots$, y $A_n \leftrightarrow B_n$; entonces en S es demostrable $A \leftrightarrow B$.

Prueba Inducción sobre la longitud de la fórmula A .

Teorema 2.11 Si B es una variante de A , entonces en S es demostrable la fórmula $A \leftrightarrow B$.

Prueba Inducción sobre el número de sustituciones hechas para obtener la variante B .

El siguiente resultado es en realidad el punto de partida hacia el estudio de una teoría de modelos para S . Presentaremos en un trabajo futuro ese desarrollo.

Teorema 2.12 (Teorema de la Reducción para la Trivialidad).

Sea Γ un subconjunto no vacío de $F(S)$. Entonces Γ trivializa a S si y solamente si existe un teorema de S que es una disyunción de negaciones fuertes de fórmulas, todas distintas entre sí, de Γ . (Aquí por la disyunción de una sola fórmula entendemos a la fórmula misma).

Prueba Si tal disyunción, $\neg *A_1 \vee \neg *A_2 \vee \neg *A_3 \dots \vee \neg *A_n$, existe, entonces la disyunción y cada una de las fórmulas A_1, A_2, A_3, \dots , y A_n son demostrables en S a partir de Γ . Usando el Teorema 2.9 junto con inducción sobre n es fácil probar apelando a los axiomas esquemáticos 5) y 8) que en el sistema S serían demostrables a partir de (las fórmulas $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n$ y $\neg *(A_1 \wedge A_2, \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n)$). Pero de estas dos fórmulas se obtiene \perp por Modus Ponens y por el axioma esquemático 11). De esta forma Γ trivializa a S .

Ahora supongamos que Γ trivializa a S . Por el Teorema 2.9 existe un subconjunto finito de clausuras de fórmulas de Γ tal que $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow \perp$. Una observación más detallada de la demostración del Teorema 2.9 revela que sin pérdida de generalidad podemos elegir $n \geq 0$ y a todas las clausuras distintas entre sí. Pero entonces, por inducción sobre n , se puede probar (con la ayuda del esquema axiomático 3) y usando el Teorema 2.9), que en S se puede demostrar la fórmula $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \perp$. Por inducción sobre n , se puede establecer (apelando al Teorema 2.9, a los esquemas axiomáticos 8) y 13) , y a Modus Ponens), que $\neg *A_1 \vee \neg *A_2 \vee \neg *A_3 \vee \dots \vee \neg *A_n$ es demostrable en S .

Teorema 2.13 En S son demostrables:

- a) $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
- b) $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
- c) $\forall xA \vee \forall xB \rightarrow \forall x(A \vee B)$
- d) $\exists x(A \wedge B) \rightarrow \exists xA \wedge \exists xB$
- e) $\exists x\neg *A \rightarrow \exists x\neg A$
- f) $\forall x\neg *A \rightarrow \forall x\neg A$
- g) $\exists x\neg *A \leftrightarrow \neg *\forall xA$
- h) $\forall x\neg *A \leftrightarrow \neg *\exists xA$
- i) $\neg *\exists x\neg *A \leftrightarrow \forall xA$
- j) $\neg *\forall x\neg *A \leftrightarrow \exists xA$
- k) $\neg *\exists x\neg *A \leftrightarrow \neg \exists x\neg A$
- l) $\neg *\forall x\neg *A \leftrightarrow \neg \forall x\neg A$

Prueba Probaremos a manera de ejemplo sólo e), k), y l).

Para probar e), notemos que el esquema axiomático 12) dice que $\neg *A \rightarrow \neg A$. Por el Teorema 2.7 a) se prueba e) en S .

Para demostrar k). Por i) $\neg *\exists x\neg *A \leftrightarrow \forall xA$. Por el esquema axiomático 22) se tiene $\neg \exists x\neg A \leftrightarrow \forall xA$. La prueba de k) se completa de manera fácil.

La demostración de l) es similar a la de k) pero usa j) y el esquema axiomático 21).

Teorema 2.14 Supongamos que B es una variante prenexa de la fórmula A. Entonces A es demostrable en S si y solamente si B es demostrable en S.

Prueba Inducción sobre el número de operaciones prenexas usadas para obtener B. Demostraremos sólo algunos casos a manera de ejemplo.

El caso en que se reemplaza una parte de A por una variante queda establecido por el Teorema 2.11.

Para el caso en que se reemplaza una parte de A de la forma $\neg Qx D$ por $Q^*x \neg D$ el resultado se establece usando los esquemas axiomáticos 23) y 24).

En el caso de reemplazar una parte de una fórmula C de la forma $Qx D \rightarrow E$ por la fórmula $Q^*x(D \rightarrow E)$ hay dos subcasos:

- En el subcaso en que Q es \forall se empieza por probar que en S son equivalentes $G \rightarrow H$ y $\neg *G \vee H$ para cualesquiera fórmulas G y H de F(S). Con ayuda de este resultado y el caso de las operaciones prenexas para \exists y el operador \vee se obtiene el resultado.
- En el subcaso en que Q es \exists se empieza por probar que en S son equivalentes $G \rightarrow H$ y $\neg *(G \wedge \neg *H)$ para cualesquiera fórmulas G y H de F(S). Con ayuda de este resultado y el caso de las operaciones prenexas para \exists y el operador \wedge se obtiene el resultado.

Los demás casos se demuestran como en el caso clásico.

Definición 2.15 Sea $g: F(S) \rightarrow F$ la transformación definida recursivamente por las siguientes condiciones:

- $g(T) = T$ y $g(\perp) = \perp$,
- $g(s = t) = \perp$, para cualquier par de términos s y t,
- $g(P_i(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n(i)}))$ para toda sucesión de términos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n(i)}$,
- $g(A \wedge B) = g(A) \wedge g(B)$,
- $g(A \vee B) = g(A) \vee g(B)$,
- $g(A \rightarrow B) = g(A) \rightarrow g(B)$,
- $g(\neg A) = \neg g(A)$,
- $g(\forall x A) = g(A)$ y $g(\exists x A) = g(A)$.

Lema 2.16 Sean A y B dos fórmulas que cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- B es $A_x[t]$ para algún término t,
- B es una variante de A,
- $A \approx B$,
- B es una variante prenexa de A, o
- A y B difieren sólo en cuantificadores vacuos.

Entonces $g(A) = g(B)$.

Prueba Cada caso se establece con relativa facilidad. Se usa inducción sobre la longitud de la fórmula en a). El caso de c) se prueba usando los casos de la definición recursiva. Para b) y d) se usa inducción sobre el número de las operaciones

permitida usadas para obtener la variante. Se establece e) por inducción sobre el número de cuantificadores vacuos en que difieren las fórmulas.

Lema 2.17 Si una fórmula $A \in F(S)$ no contiene a \perp , $g(A)$ tampoco contiene a \perp .

Prueba Inducción sobre la longitud de la fórmula.

Teorema 2.18 S no es $(F^*(S), F(S))$ -trivializable.

Prueba Como T no es (F^*, F) -trivializable basta comprobar que g , S , y T satisfacen las hipótesis que el Lema 1.2 señala para f , L y K , respectivamente. Que $g(\perp) = \perp$ se establece por la definición de g .

Usando el Lema 2.16 es fácil establecer que cada axioma de S es transformado por g en un teorema de T .

Cada aplicación de Modus Ponens en S , es transformada por g en una aplicación de Modus Ponens en T . Es fácil verificar que cada aplicación de las reglas 15) y 16) de S tiene la propiedad de que la imagen bajo g de la conclusión es demostrable en T a partir de la imagen bajo g de la premisa.

Por el Lema 2.17 y el esquema axiomático 11) de T se establecen las restantes hipótesis del Lema 1.2.

Teorema 2.19 S no es finitamente trivializable relativo a $F^*(S)$.

Prueba Es fácil establecer por inducción sobre la longitud de la fórmula que para toda fórmula $A \in F^*$ existe una fórmula $B \in F^*(S)$ tal que $A = g(B)$.

Supongamos que el subconjunto finito Γ de $F^*(S)$ trivializa a S relativo a $F^*(S)$. Sea Δ el conjunto de las clausuras de las fórmulas de Γ . Sea A una fórmula cualquiera de F^* . Sea B la fórmula de $F^*(S)$ tal que $A = g(B)$. Con la ayuda de los Teoremas de la Deducción para S y para T se establece que $g(B)$ se puede demostrar en T a partir del conjunto Π de imágenes de las fórmulas de Δ . Por el Lema 2.17, Π es un subconjunto de F^* . De ese modo el conjunto finito Π trivializa a T relativo a F^* contradiciendo al Teorema 1.12.

Contrastando con e), f), k), y l) del Teorema 2.13 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.20 No son demostrables en S los siguientes esquemas.

- a) $\exists x \neg A \rightarrow \exists x \neg^* A$
- b) $\forall x \neg A \rightarrow \forall x \neg^* A$
- c) $\neg A \rightarrow \neg^* A$
- d) $\neg \neg^* A \rightarrow \neg^* \neg A$

Prueba Probaremos que para cada uno de estos esquemas ninguna instancia del esquema en la cual $A \in F^*(S)$ es demostrable.

Sea C una instancia de alguno de los primeros tres esquemas en la cual $A \in F^*(S)$. Se tiene que $g(A) \in F^*$.

Por el Lema 1.7 tenemos que $g(A) = \neg^n B$ para algún $B \in {}^0 F$. Por lo tanto, si aplicamos a g seguido de f transformamos a la instancia C en la implicación $\neg f(B)$

$\rightarrow (f(B) \rightarrow \perp)$ cuando n es par. Cuando n es impar aplicando a g seguido por f transformamos a la instancia C en la implicación $f(B) \rightarrow (\neg f(B) \rightarrow \perp)$. Es fácil verificar que en ambos casos $f(B) \in \mathbf{F}^*$. En cualquiera de los dos casos denotaremos por D a la implicación resultante. Tenemos así que $D = f(g(C))$.

Consideremos a una casi-matriz M para la fórmula D . Si restringimos a la casi-matriz M a las fórmulas del encabezado de M que aparecen antes de $f(B)$ y a $f(B)$ misma, tendremos una casi-matriz N para $f(B)$. Por la observación hecha al principio de la demostración del Lema 1.11, existe una línea de N (y por lo tanto una línea de la casi-matriz M) que asigna 1 a la fórmula $f(B)$. En ambos casos, usando la Definición 1.10, se verifica fácilmente que existe una línea de M que asigna 0 a la fórmula D . De esa forma D no es demostrable en T .

Si la instancia C fuera demostrable en S , las propiedades de f y g harían que D fuera demostrable en T , contradiciendo a lo señalado anteriormente.

Sea C una instancia de alguno del esquema d) en la cual $A \in \mathbf{F}^*(S)$. Como en los casos anteriores se tiene que $g(A) \in \mathbf{F}^*$.

Por el Lema 1.7 tenemos que $g(A) = \neg^n B$ para algún $B \in \neg^0 \mathbf{F}$. Por lo tanto, si aplicamos a g seguido de f transformamos a la instancia C en $\neg(f(B) \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg f(B) \rightarrow \perp)$ cuando n es par. Cuando n es impar aplicando a g seguido por f transformamos a la instancia C en la implicación $\neg(f(B) \rightarrow \perp) \rightarrow (f(B) \rightarrow \perp)$. Es fácil ver que en ambos casos $f(B) \in \mathbf{F}^*$. En cualquiera de los dos casos denotaremos por D a la implicación resultante. Tenemos así que $D = f(g(C))$.

Como en el caso de los otros esquemas, consideremos a una casi-matriz M para la fórmula D . Si restringimos a la casi-matriz M a las fórmulas del encabezado de M que aparecen antes de $f(B)$ y a $f(B)$ misma, tendremos una casi-matriz N para $f(B)$. Por la observación hecha al principio de la demostración del Lema 1.11, existe una línea de N (y por lo tanto una línea de la casi-matriz M) que asigna 1 a la fórmula $f(B)$. En ambos casos, usando la Definición 1.10, se verifica fácilmente que existe una línea de M que asigna 0 a la fórmula D . De esa forma D no es demostrable en T .

Nuevamente si la instancia C fuera demostrable en S , las propiedades de f y g harían que D fuera demostrable en T , contradiciendo a lo señalado anteriormente.

En contraste con la partes c) y d) del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.21 En S son demostrables los siguientes esquemas.

- a) $\neg\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$
- b) $\neg\neg A \rightarrow \neg A$
- c) $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$

Prueba El esquema b) es el esquema axiomático 12). El esquema $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ se prueba usando los esquemas axiomáticos 10) y 13).

Daremos una prueba indirecta que el esquema $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ se puede probar en S . Se puede demostrar que si pensamos en los teoremas de T como esquemas, entonces cada instancia en S de uno de los teoremas de T es un teorema de S . Este resultado se puede establecer por inducción sobre la longitud de la prueba del teorema en T . Sea p una variable proposicional cualquiera de T . Usando el Teorema de la Deducción para T , la fórmula $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p$ se demuestra fácilmente en T .

Para el esquema c) usaremos la misma idea del párrafo anterior. En este caso usaremos la fórmula $\neg^* \neg^* p \rightarrow \neg \neg^* p$ en donde p es una variable proposicional de T . Dicha fórmula escrita usando símbolos primitivos de T se escribe $(\neg p \rightarrow \perp) \rightarrow \neg p \rightarrow \perp$. La fórmula se demuestra en T usando el Teorema de la Deducción para T .

3. El sistema S como respuesta a nuestras interrogantes

Recordemos que la creación de S fue motivada por tres inquietudes. Las primeras dos están relacionadas con la teoría de conjuntos. Para poder absolver estas inquietudes aún falta encontrar una axiomática finita para una teoría adecuada que permita realizar las construcciones matemáticas usuales usando esta base paraconsistente.

Ciertamente S parece poseer las propiedades exigidas por nuestras inquietudes. En el sistema S se puede demostrar muchos de los teoremas de la lógica clásica. Pedíamos que el sistema no fuera finitamente trivializable y que este hecho se pudiera probar de manera elemental. Los Teoremas 2.18 y 2.19 nos muestran que S tiene propiedades aún más importantes para el desarrollo de nuestro deseo de encontrar una teoría de conjuntos que pueda demostrar su propia no-trivialidad. No hemos tenido la oportunidad de desarrollar el tema aquí, pero S posee una rica e interesante teoría de modelos. Dicha teoría aparecerá en un futuro trabajo.

Con respecto a nuestra tercera inquietud, los teoremas demostrados sobre S parecen indicar una posible razón para que en la lógica clásica se identifiquen los conceptos de negación y de negación fuerte. En realidad preferimos pensar en la negación fuerte como un concepto distinto. En [6] interpretamos a la fórmula $\neg^* A$ como indicando que A es no-satisfacible. Las relaciones establecidas en S entre la negación y la negación fuerte indican que a medida que la fórmula se hace más compleja la diferencia entre los conceptos empieza a desaparecer. El comportamiento de ambas negaciones con respecto a los cuantificadores es muy similar, tanto que, por ejemplo, las fórmulas $\neg \forall x \neg A$, $\neg^* \forall x \neg^* A$, y $\exists x A$ son todas equivalentes entre sí en S . Aún queda por determinar si es posible por ejemplo identificar plenamente a los nociones a nivel cuantificacional sin identificarlas totalmente. Las técnicas que hemos desarrollado en el presente trabajo no son adecuadas para hacer la determinación. Nuevamente S es un buen punto de partida para estudiar nuestras inquietudes originales. Creemos que la identificación de las dos negaciones que se da en la lógica clásica está muy ligado al desarrollo de la lógica axiomática partiendo de inquietudes sobre las matemáticas, ciencia en la cual la mayoría de las nociones estudiadas se tienen que representar por fórmulas cuya estructura es bastante compleja.

4. Referencias bibliográficas

- [1] Arruda, A.I./Chuaqui, R./Da Costa, N.C.A. (eds.), "A survey of paraconsistent logic", 1980, pp. 1-4.
- [2] Bunder, M./Arruda, A.I./Da Costa, N.C.A., "A new hierarchy of paraconsistent logic", 1980, pp. 13-22.

- [3] Da Costa, N.C.A., "On the theory of inconsistent formal systems", en: *Notre Dame Journal Formal Logic*, XV (1974), pp. 497-510.
- [4] Jaskowski, S., *Rachunek zdán dla systemów dedukcyjnych aprzecznych*, 1948, p. 55-77.
- [5] Miró Quesada, Francisco, "Heterodox logic and the problem of the unity of logic", en: *The Journal of Symbolic Logic*, 43 (1976), p. 354.
- [6] Masaveu, Óscar, "Sobre un sistema paraconsistente", en: *Areté*, IX (1997), pp. 253-269.