

**HUGO SARABIA SWETT
CARLOS VELIZ CAPUÑAY**

**Introducción
al
ANALISIS**



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1992



Primera edición, 1975
Segunda edición, 1977
Tercera edición, 1992

Introducción al análisis

Copyright © 1992 por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria, cuadra 18. San Miguel. Apartado 1761. Lima, Perú. Tlfs. 626390; 622540, Anexo 220.

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Derechos reservados

Impreso en el Perú - Printed in Peru.

INTRODUCCION AL ANALISIS

PRESENTACION DE LA TERCERA EDICION

La acogida que tuvo la segunda edición y la ayuda que el Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú brinda para realizar trabajos como éste, nos ha permitido hacer una tercera edición del presente libro.

Nuestra experiencia y los diversos comentarios de los profesores que han usado repetidas veces este texto, nos han indicado que la organización básica así como el nivel de presentación, son los adecuados para nuestros estudiantes que se inician en las diferentes carreras científicas y tecnológicas. Sin embargo hemos realizado algunos cambios y agregados que permiten la mejor presentación de los principales conceptos, pero manteniendo esencialmente la misma estructura anterior.

Agradecemos una vez más a la Pontificia Universidad Católica del Perú que a través de su Fondo Editorial nos ha prestado el apoyo necesario para esta nueva edición.

Hugo Sarabia Swett

Carlos Véliz Capuñay

Lima - Perú
1992

PROLOGO

Motivados por el deseo de presentar un curso introductorio al Análisis Matemático que permitiese a los estudiantes que han escogido una carrera de Ciencias o Ingeniería, Educación-Ciencias o Economía, conseguir una cierta madurez para poder afrontar cursos más avanzados de Matemáticas, Física o Química, desarrollamos en una edición previa y por intermedio del Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, un texto para un curso semestral de 4 horas semanales que abarcaba dos partes principales: una introducción a la Geometría Analítica y una introducción al Análisis Matemático.

Acogiendo las sugerencias de distintos profesores que desarrollaron dicho texto presentamos esta vez una nueva edición ampliada cuyo contenido se resume en lo siguiente:

En los primeros capítulos se desarrollan las propiedades de los Números Reales y lo fundamental de Geometría Analítica Plana: gráficas de ecuaciones e inecuaciones, la línea recta y las cónicas, y las transformaciones de traslación y rotación.

En el capítulo cinco el lector tendrá ocasión de establecer su primer contacto con uno de los conceptos más importantes del análisis: el concepto de límite. Se pretende que el estudiante logre comprender este difícil

tema, primero a través de ejemplos que presentan la idea de límite en forma intuitiva para luego dar la definición rigurosa de límite aclarada con ejemplos sencillos de aplicación. En este capítulo hay también una sección dedicada a las funciones continuas.

El último capítulo está dedicado a las derivadas, sus aplicaciones más importantes vinculadas con la geometría y la física y las integrales indefinidas presentadas como antiderivadas. Si no alcanzara el tiempo para cubrir todo el material presentado, se recomienda dejar para estudio posterior la sección correspondiente a máximos y mínimos de una función.

Prácticamente todo tema tratado en el texto es seguido de ejemplos desarrollados aclaratorios. Como un complemento a la teoría, en todos los capítulos se presentan diversos grupos de ejercicios. Al final del texto se dan las soluciones de la mayoría de los ejercicios propuestos.

En cuanto a prerequisites, el nivel del texto es apropiado para estudiantes que han terminado sus estudios secundarios y conocen en forma adecuada el Álgebra, la Geometría y la Trigonometría elemental.

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú la que por intermedio de su Fondo Editorial ha hecho posible esta nueva edición y a nuestros colegas por sus observaciones y sugerencias. Asimismo nuestro agradecimiento a la Oficina de Publicaciones que ha sido, con gran dedicación, la encargada del copiado e impresión de esta versión.

Hugo Sarabia Swett

Carlos Véliz Capuñay

Lima - Perú

INDICE GENERAL

CAPITULO O

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Sección	0.1	Conjuntos	1
		Operaciones con conjuntos	1
	0.2	Relaciones	7
		Dominio, y rango de una relación	7
	0.3	Función	8
		Ejercicios 0.1	12
	0.4	Los números reales	14
	0.5	Sistema de los números reales	15
	0.6	Relación de orden en los números reales	21
		La recta numérica	23
	0.7	Radicales	25
	0.8	Intervalos	26
	0.9	Valor absoluto	31
	0.10	Distancia entre dos puntos de una recta	34
	0.11	Ecuaciones e inecuaciones cuadráticas	35
	0.12	El axioma del supremo	39
		Ejercicios 0.2	41
			XI

CAPITULO 1

SISTEMAS DE COORDENADAS Y GRAFICAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

Sección	1.1	Sistemas de coordenadas cartesianas en el plano	47
	1.2	Distancia entre dos puntos en una razón dada	50
		Ejercicios 1.1	61
	1.3	División de un segmento en una razón dada	56
	1.4	Gráficas definidas por ecuaciones e inecuaciones	63
		Ejercicios 1.2	82
		Gráficas definidas por inecuaciones	84
		Intersecciones de gráficas definidas por inecuaciones	87
	1.5	Determinación de la ecuación de un lugar geométrico.	91
		Ejercicios 1.3	96

CAPITULO 2

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Sección	2.1	Pendiente de una recta	101
	2.2	La línea recta	105
	2.3	Líneas rectas paralelas y perpendiculares	110
		Ejercicios 2.1	113
	2.4	Ecuación general de la línea recta	114
	2.5	Posiciones relativas de dos rectas	115
	2.6	Distancia de un punto a una recta	118
	2.7	Angulo entre dos rectas	122
		Ejercicios 2.2	125

CAPITULO 3

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

Sección	3.1	La circunferencia	129
	3.2	La parábola	134
		Ejercicios 3.1	144
	3.3	La elipse	146
	3.4	La hipérbola	156
		Ejercicios 3.2	167
	3.5	Definición general de las cónicas	171
		Ejercicios 3.3	175
	3.6	Traslación y rotación de ejes	176
		Ecuación general de segundo grado	186
		Ejercicios 3.4	191
	3.7	Secciones planas de un cono recto circular	192
	3.8	Historia y aplicaciones de las secciones cónicas	193

CAPITULO 4

SISTEMAS DE COORDENADAS POLARES

Sección	4.1	Introducción	197
	4.2	Cambios de coordenadas	199
	4.3	Gráficas definidas por ecuaciones en coordenadas polares	202
	4.4	Intersecciones de gráficas en polares	212
	4.5	Lugares geométricos en polares	215
		Ejercicios 4.1	218

CAPITULO 5

LIMITES DE FUNCIONES

Sección	5.1	Introducción	221
	5.2	Funciones reales de variable real	221
	5.3	Idea intuitiva de límite	233
	5.4	Definición de límite de una función	236
	5.5	Algunos teoremas sobre límites	240
		Ejercicios 5.2	248
	5.6	Límites de funciones trigonométricas	251
	5.7	Aplicación: Asíntotas en coordenadas polares	256
		Ejercicios 5.3	259
	5.8	Funciones continuas	261
		Ejercicios 5.4	266

CAPITULO 6

DERIVADAS Y FUNCIONES PRIMITIVAS

Sección	6.1	Recta tangente a una curva	269
	6.2	Velocidad instantánea	273
	6.3	La derivada	278
	6.4	Derivada de funciones trigonométricas	285
		Ejercicios 6.1	287
	6.5	Derivada de una función compuesta	289
		Ejercicios 6.2	293
	6.6	Aplicaciones de la derivada	294
		Recta normal a una curva	294
		Angulo entre dos curvas	295
		Aceleración	297
		Máximos y mínimos de una función	299
		Ejercicios 6.3	312
	6.7	Antiderivadas	313
		Ejercicios 6.4	320
		Respuesta de los Ejercicios	323

Capítulo 0

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Revisaremos brevemente en este capítulo los conceptos relativos a los números reales que se usan en el desarrollo de los diferentes temas que trataremos. Conceptos relativos a los conjuntos y funciones serán estudiados previamente.

0.1 CONJUNTOS

La idea de conjunto es el de una colección de objetos. Cada objeto se llama *elemento* del *conjunto*.

Para nombrar a un conjunto se utilizan letras mayúsculas, A, B, C, etc., y para los elementos se usan letras minúsculas, x , y , z , etc. Algunos conjuntos que se usan a menudo tienen una notación especial. Así:

\mathbb{N} , denota al conjunto de los números naturales,

\mathbb{Z} , denota al conjunto de los números enteros,

\mathbb{Q} , denota al conjunto de los números racionales,

\mathbb{R} , denota al conjunto de los números reales.

Entre los símbolos que representan a los elementos se da una relación de *igualdad*. Se dice que a y b son iguales y se escribe $a = b$ si ambos representan al mismo elemento. De otro modo se escribe $a \neq b$. La relación de igualdad satisface las siguientes propiedades:

E_1 $a = a, \forall a$. Esta propiedad se llama *reflexiva*.

E_2 Si $a = b$, entonces $b = a, \forall a$ y b . (Propiedad *simétrica*)

E_3 Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c. \forall a, b$ y c . (Propiedad *transitiva*).

Para indicar que un objeto x es un elemento del conjunto A se escribe $x \in A$ y se lee: " x pertenece al conjunto A ". Para indicar que " x no pertenece al conjunto A " se escribe $x \notin A$.

Gráficamente se representa un conjunto de la siguiente manera:

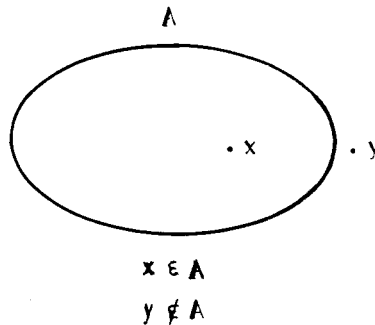


Fig. 0.1

Un conjunto se describe nombrando sus elementos o indicando una propiedad que cumplan éstos. Se acostumbra encerrar con llaves a los elementos del conjunto. Así la expresión:

$$A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

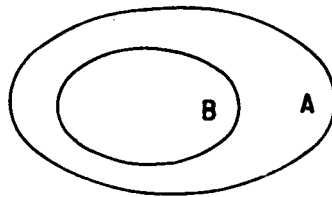
indica que el conjunto A está formado por los números naturales 0, 2, 4, 6, etc. El conjunto A también puede ser descrito así:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par} \} ,$$

expresión que se lee: "el conjunto A está formado por todos los números naturales x tal que x es par".

SUBCONJUNTOS

Dado un conjunto A diremos que el conjunto B es *subconjunto* de A o que B está *contenido* en A y se escribe $B \subset A$, si todo elemento de B es también elemento de A.



$$B \subset A$$

Fig. 0.2

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se dice que el conjunto A es *igual* al conjunto B y se escribe $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$. Es decir, si A y B tienen los mismos elementos.

EL CONJUNTO VACIO

Se llama conjunto *vacío*, y se denota con Φ , al conjunto que no tiene elementos.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subset A, \quad \forall A.$
2. $\Phi \subset A, \quad \forall A.$
3. Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C, \quad \forall A, B$ y $C.$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Con los conjuntos se pueden realizar una serie de operaciones tales como la *intersección*, la *reunión*, la *diferencia*, el *producto cartesiano*.

INTERSECCION DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se define la *intersección* de A y B , y se denota con $A \cap B$, como el conjunto formado por todos los elementos comunes a A y B .

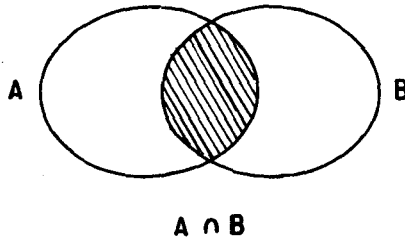


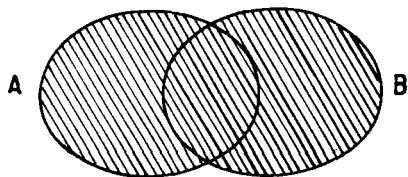
Fig. 0.3

Ejemplo 0.1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 3, 8, 10\}$, se tiene que:

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

REUNION DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se define la *reunión* o *unión* de A con B y se denota con $A \cup B$, como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A, al conjunto B, o a ambos a la vez.



$A \cup B$

Fig. 0.4

Ejemplo 0.2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, se tiene que

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B, se define la diferencia de A y B, como el conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Se denota con $A - B$.

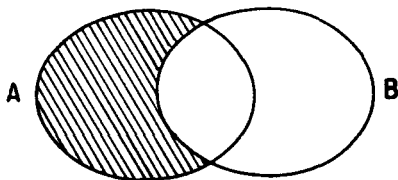


Fig. 0.5

$A - B$

Ejemplo 0.3. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, se obtiene que

$$A - B = \{1\}$$

Si $B \subset A$, a la diferencia de A y B también se le llama *complemento de B respecto de A* y se denota con $C_A B$.

PRODUCTO CARTESIANO

Para definir esta operación será necesario desarrollar el concepto de *par ordenado*.

Dado un elemento a de A y un elemento b de B, al conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

se le denomina *par ordenado* y se denota con (a, b) . Esto es,

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Al elemento a se le llama la *primera coordenada* o *primera componente* del par y a b , la *segunda coordenada* o *segunda componente* del par.

Establecida ya la igualdad de conjuntos, se puede demostrar que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si i sólo si, $a = c$ y $b = d$. Esto es: si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$ y recíprocamente, si $a = c$ y $b = d$ entonces $(a, b) = (c, d)$.

PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, el *producto cartesiano* de A y B, (o simplemente *producto* de A y B), se define como el conjunto formado por todos los pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. La notación que se usa para el producto de A y B es $A \times B$.

Si $A = \Phi$ o $B = \Phi$, se define $A \times B = \Phi$

Ejemplo 0.4. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3\}$, se tiene que

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Nótese que $A \times B \neq B \times A$.

0.2. RELACIONES

Dados los conjuntos A y B , cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, se llama *relación* de A en B .

Ejemplo 0.5. Si $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 7, 9\}$, se tiene que los siguientes subconjuntos de $A \times B$, son relaciones de A en B :

$$R_1 = \{(0, 5), (0, 7), (3, 9)\}$$

$$R_2 = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7)\}$$

La idea de una relación de A en B es el de una *correspondencia* entre elementos de A y elementos de B . En R_1 por ejemplo, al elemento 0 le corresponde el elemento 5.

En general, si un par (x, y) está en la relación R , de A en B , se puede decir que "*y es el correspondiente de x*" según la relación R .

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION

Dada una relación R de un conjunto A en un conjunto B , denominaremos *dominio* de R , al conjunto de todos los elementos x de A para los que existe y de B y para los que se cumple: $(x, y) \in R$.

Se denota con $\text{Dom}(R)$ al dominio de R .

Simbólicamente,

$$\text{Dom}(R) = \{x \in A \mid \text{existe } y \in B, (x, y) \in R\}$$

Análogamente, se denomina *rango* de la relación R y se denota con $\text{Ran}(R)$, al conjunto de todos los elementos y de B para los que existe un elemento x de A y tal que $(x, y) \in R$.

Simbólicamente,

$$\text{Ran } (R) = \{y \in B / \text{ existe } x \in A, (x, y) \in R\}$$

Para la relación R_1 , del ejemplo anterior,

$$\text{Dom } (R_1) = \{0, 3\} \text{ y } \text{Ran } (R_1) = \{5, 7, 9\}.$$

0.3 FUNCION

Hemos observado que una relación del conjunto A en el conjunto B , indica una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B . Tal correspondencia es muchas veces "ambigua" en el sentido de que un elemento de A puede tener más de un correspondiente en B . Muchas veces nos interesan las relaciones en donde no aparecen tales ambigüedades; esto es, las relaciones en donde no existen dos pares distintos con primeras componentes iguales. Estas relaciones se llaman funciones. La definición formal es la siguiente:

Dados los conjuntos A y B , se llama *función* de A en B , a toda relación de A en B cuyo dominio es A y tal que no existen dos pares diferentes en la relación con las primeras componentes iguales.

Equivalentemente, una función de A en B es toda correspondencia que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B .

Se acostumbra nombrar a las funciones con las letras f, g, h , etc.

NOTACION FUNCIONAL

Simbólicamente una función f de A en B , se representa con la siguiente notación:

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{o con} \quad A \xrightarrow{f} B$$

Para indicar que f hace corresponder al elemento $x \in A$, el elemento $y \in B$, se usa una de las siguientes notaciones:

$$\begin{array}{l} f: x \longrightarrow y \\ \text{o} \quad f: x \longrightarrow f(x) \\ \text{o} \quad y = f(x) \end{array}$$

y se dice que "*y* es la imagen de *x*, según *f*" o que "*x* es una preimagen de *y* según *f*" o que "*y* es el valor de la función *f* en *x*".

Los conceptos de dominio y rango de una función aparecen en forma natural pues toda función es una relación.

Ejemplo 0.6. La relación del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en el conjunto $B = \{3, 8, 9, 16\}$,

$$\{(1, 3), (2, 3), (3, 8), (4, 16)\},$$

es una función, mientras que la relación

$$\{(1, 3), (2, 3), (2, 8), (3, 8), (4, 16)\},$$

no es función, pues el elemento 2 no tiene una única imagen.

FUNCIONES BIYECTIVAS

Una función de A en B se llama *inyectiva*,

$$\text{si } f(x_1) = f(x_2), \text{ implica } x_1 = x_2,$$

o equivalentemente:

$$\text{si } x_1 \neq x_2, \text{ implica } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Si el rango de la función f es todo el conjunto B , la función se llama *suryectiva*.

Si una función es inyectiva y suryectiva a la vez, ésta se llama función *biyectiva*.

Ejemplo 0.7. Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{2, 5, 7\}$$

se tiene que la relación

$$R = \{(1, 2) , (2, 5) , (3, 7)\}$$

es una función biyectiva.

COMPOSICION DE FUNCIONES

Dadas las funciones

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{y} \quad g: C \subset B \longrightarrow D$$

llamaremos composición de g con f , a la función que denotaremos con $g \circ f$, que tiene como dominio al conjunto

$$\{x \in \text{Dom} (f) / f(x) \in \text{Dom} (g)\}$$

y cuya regla de correspondencia está dada por

$$[g \circ f] (x) = g (f (x))$$

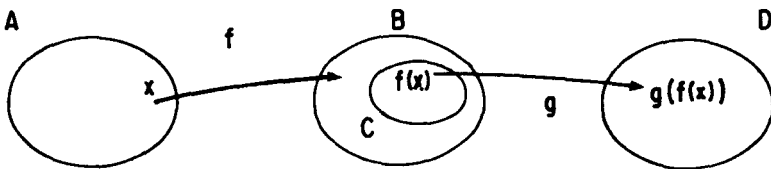


Fig. 0.6

Ejemplo 0.8. Si $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 6, 8, 9\}$, $C = \{6, 8, 9\}$, $D = \{10, 11, 12, 13\}$ y se tienen las funciones f de A en B y g de C en D , definidas por

$$\begin{array}{ll}
 f(4) = 8 & g(6) = 10 \\
 f(5) = 4 & g(8) = 11 \\
 f(6) = 6 & g(9) = 13, \\
 f(7) = 9 &
 \end{array}$$

se tendrá que el dominio de $g \circ f$ es $\{4, 6, 7\}$ y

$$\begin{array}{l}
 [g \circ f](4) = g(f(4)) = 11, \\
 [g \circ f](6) = g(f(6)) = 10, \\
 [g \circ f](7) = g(f(7)) = 13.
 \end{array}$$

El lector puede observar que la composición de funciones no es una operación conmutativa. Esto es $f \circ g \neq g \circ f$.

INVERSA DE UNA FUNCION

Dada una función biyectiva de A en B , es posible hallar una función g de B en A que prácticamente "deshace" lo que la función f hizo; es decir: si $y = f(x)$ entonces $g(f(x)) = x$. Esta función g se llama *función inversa* de f y se denota con f^{-1} .

Más exactamente, dada la función biyectiva f de A en B , la *función inversa* de f , que se denota con f^{-1} , es la función de B en A tal que:

$$[f \circ f^{-1}](y) = y \quad \text{y} \quad [f^{-1} \circ f](x) = x.$$

Ejemplo 0.9. Dada la función f de $A = \{1, 3, 5\}$ en $B = \{2, 6, 10\}$, definida por:

$$f(1) = 2, \quad f(3) = 6 \quad \text{y} \quad f(5) = 10,$$

la función inversa f^{-1} , es una función de B en A y está definida por:

$$f^{-1}(2) = 1, \quad f^{-1}(6) = 3, \quad f^{-1}(10) = 5.$$

EJERCICIOS 0.1

1.— Indicar los elementos que forman cada uno de los siguientes conjuntos.

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es impar}\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo y menor que } 20\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} / 3x = 5\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x + 1 = 15\}$

2.— Indique una propiedad que describa a cada uno de los siguientes conjuntos.

- a) $A = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$
- b) $B = \{\dots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$
- c) $C = \{112, 121, 130, 103, 211, 220, 202, 310, 301, 400\}$

3.— Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $A \times B$.

4.— Si $A = \{x / x \text{ es triángulo}\}$, $B = \{x / x \text{ es triángulo recto}\}$ y $C = \{x / x \text{ es polígono}\}$, indique el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

- a) $A \subset B$
- b) $B \subset A$
- c) $A \cap B \subset B$
- d) $A \cap B \subset A$
- e) $A \subset C$
- f) $A \cap B \subset C$
- g) $A \cap B \cap C \subset A \cap B$

5.— Ilustrar gráficamente las siguientes propiedades:

- a) $A \cap B \subset A$
- b) $A \subset A \cup B$
- c) Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$
- d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

6.— Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 7\}$, indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B . En los casos

en que sea función, indique el dominio y el rango.

- a) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$
- b) $g = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (3, 7), (4, 5), (5, 7)\}$
- c) $h = \{(1, 5), (2, 7)\}$.

7.— Dada la función f con dominio $\{1, 2, 3, 8\}$ y definida por

$$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (8, 64)\}$$

hallar $f(2)$, $f(3)$.

8.— Para la función con dominio $\{2, \sqrt{3}, 7, 9, -10\}$ y con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 3x + 1$, hallar:

- a) El conjunto de pares que forman la función.
- b) Indique el rango de la función.

9.— Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (si es posible), indicando el dominio en cada caso,

- a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$
 $g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$
- b) $f = \{(1, -2), (2, -5), (3, 0), (4, -1)\}$
 $g = \{(0, 1), (1, 0), (3, 3), (-1, 4), (2, 1)\}$.

10.—Para cada una de las siguientes funciones biyectivas, hallar la función inversa correspondiente.

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$$
$$g = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$

11.—Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{6, 7\}$,

- a) Construir todas las funciones biyectivas de B en A .
- b) Construir todas las funciones biyectivas de A en A .

- 12.—Si el número de elementos de A es m y el número de elementos de B es n con $m = n$, ¿cuántas funciones biyectivas se pueden definir de A en B ?
- 13.—Si f y g son funciones inyectivas y es posible encontrar $g \circ f$, pruebe que $g \circ f$ es inyectiva.
- 14.—Si f y g son funciones suryectivas y es posible encontrar $g \circ f$, pruebe que $g \circ f$ es suryectiva.

0.4. LOS NUMEROS REALES

Uno de los conceptos más importantes en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología es el conjunto de los números reales (\mathbb{R}). Este conjunto, como se recordará, fue construido de manera progresiva en los cursos de la Matemática escolar.

Partiendo del conjunto de los números naturales,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

se construyó el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

La creación de \mathbb{Z} permitió, entre otras cosas, resolver ecuaciones tales como

$$x + 7 = 5$$

A partir del conjunto \mathbb{Z} se construye el conjunto de los números racionales,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

En \mathbb{Q} es posible resolver ecuaciones tales como

$$3x + 7 = 5 ;$$

sin embargo, \mathbb{Q} no contiene a muchos elementos tal como $\sqrt{2}$, que aparecen como soluciones de ecuaciones importantes que se presentan en la Física, en la Geometría, etc. Esta dificultad obliga a considerar otro conjunto, el de los números irracionales \mathbb{I} , que sí contiene a $\sqrt{2}$ y a otros elementos, como: $\sqrt{3}$, e , π , etc. El conjunto de los racionales reunido con el conjunto de los números irracionales da lugar al conjunto de los números reales. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Otras presentaciones de los números reales se pueden realizar. Una de ellas considera a los números racionales como expresiones decimales periódicas (4. 7, $-0.3 \dots$, 5.171717 ..., etc), y a los números irracionales como expresiones decimales infinitas (0. 121221222 ... , 3.1416 ..., etc); otra considera al sistema de los números reales a partir de una lista de axiomas. Esta última presentación es la que formalizamos a continuación.

0.5 SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Llamaremos *sistema de los números reales* y lo denotaremos con \mathbb{R} a un conjunto provisto de dos operaciones: *adición* y *multiplicación*.

Se considera que la *adición* es una operación que a cada par de números reales (a, b) le asigna un número real llamada *suma* de a y b y que se denota con $a + b$. Se entiende por *multiplicación*, a la operación que a cada par (a, b) de números reales le asigna un número real llamado *producto* de a y b y que se denota con $a.b$ o simplemente con ab .

La adición y multiplicación de números reales satisfacen los siguientes axiomas:

A₁ Asociatividad de la adición.

$$\forall a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

A₂ Conmutatividad de la adición.

$$\forall a, b, \quad a + b = b + a.$$

A₃ Existencia y unicidad de la identidad aditiva

Existe en \mathbb{R} un único número real llamado *cero*, denotado con 0 y que cumple con:

$$a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

A₄ Existencia y unicidad del opuesto

Para cada número real a existe un único número real denotado con $-a$, llamado *opuesto* de a tal que

$$a + (-a) = 0,$$

M₁ Asociatividad de la multiplicación.

$$\forall a, b, c, \quad (ab) c = a (bc).$$

M₂ Conmutatividad de la multiplicación.

$$\forall a, b, \quad ab = ba.$$

M₃ Existencia y unicidad de la identidad multiplicativa

Existe en \mathbb{R} un único número real llamado *uno*, denotado con 1 y que cumple la igualdad

$$a.1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

M₄ Existencia y unicidad del inverso.

Para cada número real a diferente de 0, existe un único número

real, denotado con $\frac{1}{a}$ o con a^{-1} que cumple con

$$a \left(\frac{1}{a} \right) = 1 .$$

El siguiente axioma relaciona las operaciones de adición y multiplicación.

D Distributividad de la multiplicación respecto de la adición

$$\forall a, b, c, \in \mathbb{R} , \quad a (b + c) = ab + ac$$

Aparte de las propiedades enunciadas, existe otro axioma que se conoce con el nombre de *axioma del supremo* y que justamente permite probar que los números racionales están contenidos en los números reales. Este axioma será enunciado posteriormente.

A partir de los axiomas indicados se puede demostrar una serie de propiedades para \mathbb{R} , algunas de las cuales veremos a continuación.

Teorema 0.1. (Propiedad de igualdad – adición)

$$a = b \text{ si y sólo si } a + c = b + c$$

Para probar que $a = b$ implica $a + c = a + c$, usemos la propiedad reflexiva de la relación de igualdad:

$$a + c = a + c$$

Sustituyendo a por b en el segundo miembro de la última igualdad se tendrá:

$$a + c = b + c$$

Ahora demostremos que si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Si $a + c = b + c$, se tiene, por la primera parte, que,

$$a + c + (-c) = b + c + (-c) .$$

Aplicando A_1 y luego A_4 , se cumple: $a = b$.

De manera análoga se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 0.2. (Propiedad de igualdad - multiplicación).

Para $c \neq 0$, se cumple que:

$$a = b \text{ si y sólo si } ac = bc$$

Usando los axiomas y las propiedades ya indicadas, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Teorema 0.3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $a0 = 0$
2. $-a = (-1)a$
3. $-(-a) = a$
4. $(-a)(-b) = ab$
5. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
6. $(-a)(-b) = ab$
7. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
8. $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Prueba de 1.

$$a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$$

Aplicando el teorema 0.1, se tiene la propiedad.

Prueba de 2.

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

$$a + (-1)a = 0$$

Por la unicidad del opuesto se tiene que la última igualdad implica:

$$(-1)a = -a$$

Prueba de 8.

Probaremos que $ab = 0$ implica $a = 0$ ó $b = 0$; el recíproco será probado por el lector.

Por el absurdo, supongamos que $ab = 0$ no implica $a = 0$ ó $b = 0$, sino: $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Podemos escribir:

$$ab = 0 = a0 .$$

Como $a \neq 0$ se tiene, por el teorema 0.2, que $b = 0$, en contradicción con el hecho de que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

El siguiente teorema muestra la manera de encontrar la solución de la ecuación de la forma $ax + b = 0$, entendiéndose por *solución* de la ecuación, al valor de x que al ser reemplazado en $ax + b = 0$ la hace a ésta verdadera.

Teorema 0.4. Si a , b y x son números reales y $a \neq 0$ entonces

$$ax + b = 0 \text{ si y sólo si } x = -a^{-1} b .$$

Probemos primero que si $ax + b = 0$ entonces $x = -a^{-1} b$.

La segunda parte, esto es: si $x = -a^{-1} b$ entonces $ax + b = 0$, la probará el lector.

Si $ax + b = 0$, se tiene: $ax + b + (-b) = 0 + (-b)$, de donde:

$$ax = -b$$

Multiplicando en la igualdad por a^{-1} :

$$a^{-1} ax = a^{-1} (-b)$$

ó

$$x = a^{-1} (-b) = -a^{-1}b$$

SUSTRACCION Y DIVISION DE NUMEROS REALES

A partir de las operaciones de adición y multiplicación se pueden definir las operaciones de *sustracción* y *división* de números reales.

Se denomina *sustracción* de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b le hace corresponder el número $a + (-b)$ el cual se denota con $a - b$.

El número $a - b$ se llama *diferencia* de a y b .

Se denomina *división* de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b , $b \neq 0$ le hace corresponder el número real ab^{-1} el que se denomina *cociente* de a y b .

POTENCIA DE UN NUMERO REAL

Para todo número real a , $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{IN}$ se define

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}, \quad \text{si } n \geq 1, \text{ y}$$

$$a^{-n} = 1/(a^n) \quad \text{si } n \geq 1.$$

La expresión a^n se lee "potencia *enésima* de a ". Al número a se le llama *base* y a n , *exponente*.

Las siguientes son algunas de las propiedades que se cumplen para la potencia *enésima* de a .

Teorema 0.5. Para el número real $a \neq 0$, m y n números enteros se cumple:

a) $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$.

b) $(a^m)^n = a^{mn}$.

c) $\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n}$.

0.6 RELACION DE ORDEN EN LOS NUMEROS REALES

Estudiaremos ahora una relación entre los números reales que permitirá el establecimiento de un orden entre éstos.

Admitiremos que existe un subconjunto de \mathbb{R} , que denotaremos con \mathbb{R}^+ , y que cumple con las siguientes propiedades:

0_1 Para cada número real a , se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad -a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0 .$$

0_2 Si a y b son elementos del conjunto \mathbb{R}^+ , entonces:

$$a + b \quad \text{y} \quad ab \text{ son elementos de } \mathbb{R}^+ .$$

Dado un elemento $a \in \mathbb{R}$, si a es un elemento de \mathbb{R}^+ , diremos que a es un *número real positivo* y se dice que es un *número real negativo* si $-a$ es un elemento de \mathbb{R}^+ . De este modo, según 0_2 , el producto de dos números positivos es positivo y también la suma de dos números positivos es un número positivo.

Así mismo se observa de inmediato que el producto de dos números reales negativos es un número positivo, mientras que el producto de un número positivo por otro negativo es un número negativo.

Como resultado de lo anterior se tiene que a^2 es un número positivo. De este modo se tiene que $1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$ y también $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, ..., etc.

Usando los axiomas y las propiedades descritas, se demuestra que los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , y \mathbb{Q} están contenidos en \mathbb{R} . El lector puede realizar esta prueba.

DEFINICION DE LA RELACION MENOR

Si a y b son dos números reales se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número real positivo.

Si a es menor que b se dice, de manera equivalente, que b es mayor que a , y se escribe $b > a$.

Se observa de inmediato que si a es un número mayor que 0, a es un número positivo y recíprocamente, si a es un número positivo, entonces a es mayor que 0. De igual manera, si a es un número menor que 0, a es un número negativo y recíprocamente.

Se cumplen las siguientes propiedades para la relación menor.

Teorema 0.6.

1. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
2. Si $a < b$ entonces $ac < bc \quad \forall c > 0$ y
si $a < b$ entonces $ac > bc \quad \forall c < 0$.
3. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

A manera de ejemplo, demostraremos la propiedad 1.

Si $a < b$, entonces $b - a > 0$.

$$\begin{aligned}\text{Como } b - a &= b + (-a) = (b + c) + [(-a) + (-c)] = \\ &= [b + c] - [a + c],\end{aligned}$$

se tendrá: $b + c > a + c$.

LA RECTA NUMERICA

Una representación geométrica muy útil en nuestro desarrollo, es la que se refiere a la representación de los números reales en una recta. Esta representación se basa en el axioma que establece lo siguiente:

"A cada punto de la recta corresponde un único número real, y recíprocamente.

A cada número real le corresponde un único punto de la recta".

Se obtiene de este modo una biyección entre los números reales y los puntos de la recta lo que permite una identificación de cada punto A de la recta con un número real x . Al número real x que identifica al punto A se le llama coordenada de A . La biyección también permite una representación de la relación "menor". Si un punto P de la recta lo identificamos con el número 0 podemos indicar que los números positivos están a la "derecha" de P , mientras que los que están a la "izquierda" de P , corresponderán a los números negativos. También si un punto B está a la derecha de A , podemos decir que el número, x que le corresponde al punto B , es mayor que el número y , que representa al punto A .

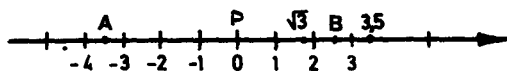


Fig. 0.7

DEFINICION DE LA RELACION MENOR O IGUAL

Diremos que a es menor o igual que b y se escribe $a \leq b$, si a es menor que b o a es igual que b .

Si $a \leq b$, se dice, de manera equivalente, que b es mayor o igual que a , y se escribe $b \geq a$.

El lector puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.7 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
2. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
3. Si $a \neq b$ entonces $a < b$ o $b < a$.
4. Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc \quad \forall c \geq 0$ y
Si $a \leq b$ entonces $ac \geq bc \quad \forall c \leq 0$.

Teorema 0.8. Si a y b son números reales positivos,

$$a < b \text{ si y sólo si } b^2 > a^2 .$$

Veamos primero que $0 < a < b$ implica $a^2 < b^2$.

$$0 < a < b \text{ implica } b > a \text{ y } b > 0, \text{ luego: } b^2 > ab . \quad (1)$$

$$\text{Tambi3n a partir de } 0 < a < b, \text{ se tiene: } ab > a^2 . \quad (2)$$

Usando las relaciones (1), (2) y la propiedad 3 del Teorema 0.6, se tiene:

$$b^2 > a^2 .$$

El lector puede demostrar la segunda parte.

0.7 RADICALES

Aceptaremos que toda ecuaci3n $x^n = a$ con $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{IN}$, tiene una 3nica soluci3n real no negativa. A esta 3nica soluci3n no negativa de la ecuaci3n se le llama la *ra3z n-3sima de a* y se denota con $\sqrt[n]{a}$ o $a^{1/n}$. A n se le llama el *3ndice* de la ra3z n-3sima, mientras que al n3mero a , se le llama *expresi3n subradical*. A expresiones de la forma $\sqrt[n]{a}$ se les llama *expresiones radicales*.

Teorema 0.9. Para las expresiones radicales se cumplen las siguientes propiedades:

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \forall n \in \mathbb{IN}^+ \text{ y } \forall p \in \mathbb{IN}^+ ,$$

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
3. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
4. $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} \quad \forall b > 0$

Teorema 0.10. Si $b \geq 0$, entonces

$$a^2 > b \text{ si y sólo si } a > \sqrt{b} \text{ o } a < -\sqrt{b} .$$

Probaremos que $a^2 > b$ implica $a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$. El lector probará el recíproco.

Si $a \geq 0$, se tiene: $a^2 > b = (\sqrt{b})^2$. Por el teorema 0.8, $a > \sqrt{b}$.

Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y nuevamente $(-a)^2 = a^2 > b = (\sqrt{b})^2$.

Aplicando el teorema 0.8, se tiene $a < -\sqrt{b}$.

Teorema 0.11.

Si $b > 0$, entonces,

$$a^2 < b \text{ si y sólo si } -\sqrt{b} < a < \sqrt{b} .$$

0.8 INTERVALOS

Ciertos conjuntos de números reales que se describen mediante la relación menor o menor o igual son importantes para simplificar las notaciones así como para lograr una rápida identificación de otros en la recta numérica. Estos conjuntos son los intervalos y se definen a continuación.

El *intervalo abierto* con extremos a y b , que se denota con $]a, b[$ está definido por

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

En la recta numérica $]a, b[$ se representa como en la siguiente figura.



Fig. 0.8

El *intervalo cerrado* con extremos a y b , que se denota con $[a, b]$ está definido por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} .$$

En la recta numérica $[a, b]$ se representa como en la siguiente figura.



Fig. 0.9

Los círculos marcados indican que los extremos a y b están comprendidos en el intervalo.

El *intervalo semiabierto por la izquierda* con extremos a y b , que se denota con $]a, b]$ está definido por

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} .$$

El *intervalo semiabierto por la derecha* con extremos a y b , que se denota con $[a, b[$ está definido por

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} .$$



Fig. 0.10

El símbolo $]a, +\infty[$ representa al conjunto

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a < x\} .$$

De igual modo

$$]-\infty, a[\text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} / x < a\} ,$$

$$[a, +\infty[\text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\} ,$$

$$]-\infty, a] \text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\} .$$

En la siguiente figura se ilustran los dos últimos intervalos.



Fig. 0.11

Se acostumbra usar el símbolo $]-\infty, +\infty[$ para representar a todos los números reales.

Ejemplo 0.10. Hallar los números reales que satisfacen la inecuación.

$$2x + 3 < 5 .$$

La inecuación dada es equivalente a $2x + 3 - 3 < 5 - 3$, de donde se tiene: $2x < 2$.

Multiplicando la última desigualdad por $1/2$:

$$x < 1 .$$

También se comprueba que si $x < 1$, entonces $2x + 3 < 5$.

Luego, el conjunto solución, esto es, el conjunto de los x que satisfacen la inecuación es: $]-\infty, 1[$.

Ejemplo 0.11. Hallar los valores de x que satisfacen

$$2 \leq 2 - 5x < 4 .$$

La relación es equivalente a:

$$2 \leq 2 - 5x \quad \text{y} \quad 2 - 5x < 4$$

o a:

$$2 - 2 \leq 2 - 5x - 2 \quad \text{y} \quad 2 - 5x - 2 < 4 - 2 ,$$

o también a: $0 \leq -5x < 2 .$

Multiplicando por $-1/5$ y aplicando la propiedad 4 del Teorema 0.7, se tiene:

$$-2/5 < x \leq 0 .$$

El conjunto solución es el intervalo $]-2/5, 0]$, que se representa en la siguiente figura:



Fig. 0.12

Ejemplo 0.12. Hallar los valores de x que satisfacen:

$$4x^2 + 12x + 9 > 16 .$$

$4x^2 + 12x + 9 > 16$ se puede escribir de manera equivalente como: $(2x + 3)^2 > 16$, lo que por el teorema 0.10 equivale a:

$$2x + 3 > 4 \quad \text{ó} \quad 2x + 3 < -4.$$

Luego x satisface: $x > 1/2$ ó $x < -7/2$.

El conjunto solución es:

$$]-\infty, -7/2[\cup]1/2, +\infty[.$$

Ejemplo 0.13. Hallar los números reales x que satisfacen

$$\frac{1 - x}{x} \leq 3 .$$

Observamos que x debe ser diferente de 0.

Caso A. Si $x > 0$, la relación puede escribirse como

$$1 - x \leq 3x ,$$

o como:

$$1 \leq 4x ;$$

esto es:

$$1/4 \leq x .$$

En este caso x debe satisfacer $x > 0$ y $x \geq 1/4$, es decir $x \geq 1/4$.

Caso B. Si $x < 0$, se tiene:

$$1 - x \geq 3x$$

ó

$$1/4 \geq x .$$

En este caso x debe satisfacer $x < 0$ y $x \leq 1/4$; es decir: $x < 0$.

Resumiendo los casos A y B se tendrá que los números x que satisfacen la relación son aquellos que son mayores o iguales que $1/4$ (caso A), o que son menores que 0 (caso B). El conjunto solución es:

$$]-\infty, 0[\cup [1/4, +\infty[$$

y se representa como en la siguiente figura:

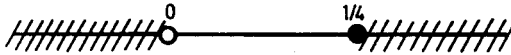


Fig. 0.13

0.9 VALOR ABSOLUTO

El *valor absoluto* de un número real x , se denota con $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 0.14

$$|3| = 3$$

$$|0| = 0$$

$$|-3| = -(-3) = 3$$

Las propiedades más importantes del valor absoluto aparecen en el siguiente teorema.

Teorema 0.12

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \leq a$, $a \geq 0$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.
3. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \geq a$ ó $x \leq -a$.
4. $|x| = \sqrt{x^2}$.
5. $-|x| \leq x \leq |x|$.
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
7. $|ab| = |a| |b|$.

Como ilustración probaremos las propiedades 3, 6 y 7.

Prueba de 3.

Parte A. Probaremos que $|x| \geq a$ implica $x \geq a$ ó $x \leq -a$.

Caso 1: $x \geq 0$.

Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, luego, $x = |x| \geq a$ implica: $x \geq a$.

Caso 2: $x < 0$.

Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, luego $-x = |x| \geq a$ implica:
 $x \leq -a$.

Parte B. Veamos ahora que

$x \geq a$ ó $x \leq -a$ implica $|x| \geq a$.

Caso 1: $x \geq a$.

Si $x \geq a$ y $x \geq 0$, se tiene de inmediato que $|x| = x \geq a$, es decir: $|x| \geq a$.

Si $x \geq a$ y $x < 0$, se tiene $|x| = -x$ y $-x \leq -a$, de donde $|x| \leq -a$, es decir $a \leq -|x|$.

Como $-|x| \leq |x|$ (propiedad 5), se tiene: $a \leq |x|$.

Caso 2: $x \leq -a$.

Se deja como ejercicio.

Prueba de 6.

Usando la propiedad 5 se tiene;

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned}$$

Luego:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Usando ahora la propiedad 2 se tiene la propiedad 6.

Prueba de 7.

Usando la propiedad 4 se tiene:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = |a| |b|.$$

Los siguientes ejemplos nos indican algunas aplicaciones de las propiedades del valor absoluto.

Ejemplo 0.15. Hallar los valores de x que satisfacen

$$|3x + 4| = 2.$$

Por la definición de valor absoluto se tiene que:

Si $3x + 4 \geq 0$, $|3x + 4| = 2$ implica $3x + 4 = 2$, de donde $x = -2/3$.

Si $3x + 4 < 0$, $|3x + 4| = 2$ implica $-(3x + 4) = 2$, de donde $x = -2$.

El conjunto solución es: $\{-2/3, -2\}$.

Ejemplo 0.16. Hallar los valores de x que satisfacen $|3x| \leq x - 1$.

Por la propiedad 2, la relación se puede escribir de manera equivalente como:

$$-(x - 1) \leq 3x \leq x - 1 \quad \text{con } x - 1 \geq 0 . \quad (1)$$

Bastará entonces resolver (1).

$-(x - 1) \leq 3x \leq x - 1$ con $x - 1 \geq 0$ se puede escribir en forma equivalente como:

$$1 - x \leq 3x, \quad 3x \leq x - 1 \quad \text{y} \quad x \geq 1$$

ó como: $1/4 \leq x$, $x \leq -1/2$ y $x \geq 1$.

Luego, si existe un valor de x que resuelva la inecuación dada, éste debe satisfacer las tres últimas desigualdades a la vez; lo que es imposible. El conjunto solución es el vacío, Φ .

0.10 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE UNA RECTA

Dados los puntos P y Q de la recta con coordenadas x_1 y x_2 , respectivamente, la *distancia* entre P y Q , que se denota con $d(P, Q)$, se define como

$$d(P, Q) = |x_2 - x_1| .$$

Gráficamente:

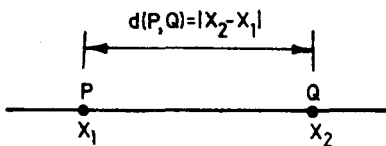


Fig. 0.14

Ejemplo 0.17. Si P y Q tienen coordenadas 5 y -3 , respectivamente, entonces:

$$d(P, Q) = |-3 - 5| = 8 .$$

0.11. ECUACIONES E INECUACIONES CUADRATICAS

Se llama *ecuación cuadrática* a toda ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0 .$$

Los valores de x que satisfacen la ecuación se llaman *raíces* o *soluciones* de la ecuación.

Inecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\leq 0, & ax^2 + bx + c &\geq 0, \\ ax^2 + bx + c &< 0, & ax^2 + bx + c &> 0, \\ && \text{con } a &\neq 0 \end{aligned}$$

se llaman *inecuaciones cuadráticas*.

Con el fin de estudiar las soluciones de la ecuación cuadrática, escribámosla de la siguiente manera:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ y $4a^2 > 0$, la ecuación tendrá solución real si $b^2 - 4ac \geq 0$ y no tendrá solución real, si $b^2 - 4ac < 0$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación se transforma en

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

y en este caso la ecuación cuadrática tiene la única solución

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática se puede escribir como:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o como:

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

obteniéndose las raíces:

$$x_1 = \frac{-b^2 + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama *discriminante* de la ecuación o de la expresión $ax^2 + bx + c$, y se le denota con Δ .

Podemos resumir los resultados anteriores de la siguiente manera:

"La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$,

tiene una única raíz si $\Delta = 0$;

tiene dos raíces reales diferentes si $\Delta > 0$; y

no tiene solución real si $\Delta < 0$ ".

Ejemplo 0.18. Resolver

a. $2x^2 + 3x - 1 = 0$

b. $3x^2 + 6x + 7 = 0$

El discriminante de la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$ es $\Delta = 17 > 0$, luego tiene dos raíces reales diferentes; ellas son:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} .$$

El discriminante de la ecuación

$$3x^2 + 6x + 7 = 0,$$

es $\Delta = -48 < 0$; luego la ecuación no tiene soluciones reales.

PROPIEDADES DE LAS RAICES DE LA ECUACION CUADRATICA

Nótese que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática cumplen con las siguientes propiedades:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ejemplo 0.19. Hallar los números α y β cuya suma es 7 y su producto es 12.

Se puede considerar que α y β son raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ en donde

$$7 = \alpha + \beta = -b \quad \text{y} \quad 12 = \alpha \beta = c.$$

Reemplazando los valores de b y c en la ecuación, se tiene:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Resolviendo la ecuación: $\alpha = 3$ y $\beta = 4$.

Aplicando el método explicado para resolver ecuaciones cuadráticas y las propiedades expresadas en los teoremas sobre radicales se resuelven la inecuaciones cuadráticas. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 0.20. Resolver $x^2 - 4x - 5 > 0$.

La inecuación puede escribirse de manera equivalente como:

$$(x - 2)^2 > 9 \quad ,$$

Aplicando el teorema 0.10 se obtiene:

$$(x - 2) > 3 \quad \text{ó} \quad (x - 2) < -3 \quad ;$$

esto es:

$$x > 5 \quad \text{ó} \quad x < -1 \quad .$$

El conjunto solución es: $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$.

0.12. EL AXIOMA DEL SUPREMO

Desarrollaremos previamente algunos conceptos necesarios para enunciar el axioma.

DEFINICION DE CONJUNTO ACOTADO SUPERIORMENTE.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \Phi$ se llama *conjunto acotado superiormente* si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq k \quad \forall a \in A$$

El número real k se llama *cota superior* de A .

Un conjunto acotado puede tener infinitas cotas superiores.

Análogamente se definen *conjunto acotado inferiormente* y *cota inferior*.

Ejemplo 0.21. Los intervalos $[3, 6]$ y $[3, 6[$ son conjuntos acotados superiormente. Una cota superior para ambos intervalos, es 6; también son cotas superiores de éstos todos los números reales mayores o iguales que 6.

El conjunto $[3, +\infty[$ no es un conjunto acotado superiormente.

DEFINICION DE SUPREMO DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \Phi$, se dice que $s \in \mathbb{R}$ es el *supremo de A* si cumple con las siguientes propiedades:

1. s es una cota superior de A .
2. Si k es cota superior de A entonces $s \leq k$.

Se tiene entonces que el supremo s de un conjunto A , es la *menor de las cotas superiores de A*.

La propiedad 2 se expresa, en forma equivalente, de la siguiente manera:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $a_0 \in A$, tal que

$$s - \varepsilon < a_0 .$$

Ejemplo 0.22. Se tiene que

- a) el supremo de $[3, 6[$, es 6

- b) el supremo de $[3, 6]$, es 6
- c) el supremo de $\{x \in \mathbb{R} / x = n / (n + 1), n \in \mathbb{N}\}$, es 1.

EL AXIOMA DEL SUPREMO (Axioma de completitud)

"Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \Phi$, se cumple que si A es acotado superiormente entonces A tiene supremo s ".

El axioma del supremo permite "completar" la recta. El conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$$

es un conjunto no vacío ($0 \in A$) y acotado superiormente (3 es una cota superior de A). Se puede demostrar además que el supremo de A , que existe en \mathbb{R} (por el axioma del supremo), es igual a $\sqrt{2}$, número que no es racional. Se tiene de este modo, que A no tiene supremo en \mathbb{Q} pero sí en \mathbb{R} . Si sólo consideráramos a \mathbb{Q} , el punto que le correspondería a $\sqrt{2}$ sería una "discontinuidad" de la recta.

Ejercicios 0.2

1. Probar que en \mathbb{R} se cumplen cada una de las siguientes propiedades:
 - a. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $ab \neq 0$.
 - b. $a = 0$ ó $b = 0$ si y sólo si $ab = 0$
 - c. $-(-a) = a$
 - d. $(-a)(-b) = ab$
 - e. $a(-b) = (-a)(b) = -(ab)$

f. $0 - x = -x$

g. $-(x - y) = -x + y$

h. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

i. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

j. $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ para $b \neq 0$ y $d \neq 0$

k. $a^m a^n = a^{m+n}$

l. $(a^m)^n = a^{mn}$

m. $a = b$ si y sólo si $ac = bc$ para $c \neq 0$.

n. Si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ ó $a = -b$

2. Resolver

a. $3x + 2 = 7$

b. $3 + 5x = 7x$

3. Demostrar que:

a. Si $a < b$ entonces $ac < bc \quad \forall c > 0$
Si $a < b$ entonces $ac > bc \quad \forall c < 0$

b. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

c. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$

d. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

e. Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc \quad \forall c \geq 0$

Si $a \leq b$ entonces $ac \geq bc \quad \forall c \leq 0$

f. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces,

$b^2 > a^2$, implica $b > a$.

4. Si a y b tienen el mismo signo, $ab > 0$
Si a y b tienen signos diferentes, $ab < 0$

(Se dice que x e y tienen el mismo signo si x e y son ambos positivos o ambos negativos).

5. Probar que: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a}$

6. Probar que si $b > 0$, $a^2 < b$ si y sólo si $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

7. Probar que:

a. $|x| \leq a$, $a \geq 0$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$

b. $|x| = \sqrt{x^2}$

c. $-|x| \leq x \leq |x|$

8. Resolver

a. $4x - 5 < 7$

b. $-2 \leq 3x - 1 \leq 7x + 3$

c. $x / (x - 1) \leq 3$

d. $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

e. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \leq 0$

f. $x^2 - 2x + 1 < 0$

g. $(x + 2)^2 > 9$

h. $\frac{2x + 5}{x + 1} \leq 8 + x$

i. $|x| = 7$

j. $|2x + 7| = 4x + 2$

k. $|2x + 1| \geq 2 + x$

l. $|x^2 - 1| < 2$

ll. $|x^2 - 1| > 2$

m. $|x + 1| < |4x + 3|$

n. $|5x + 8| = |3x + 2|$

o. $|x + 2x| > |x|$

p. $|x - 1| + |x + 4| = 3$

9. Hallar un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $0 < |x - 1| < \delta$, se tenga:

$$|2x - 2| < 0.001 .$$

10. ¿Es posible encontrar un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $0 < |x - 1| < \delta$ se tenga:

$$|2x - 8| < 0.001?$$

11. Para cada $\varepsilon > 0$, ¿es posible hallar un valor de $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $|x - 2| < \delta$ se tenga $|3x - 6| < \varepsilon$?

Dé un valor de $\delta > 0$ si:

a. $\varepsilon = 0.0001$

b. $\epsilon = 10^{-7}$

c. $\epsilon = 10^{-10}$

12. Resolver:

a. $3x^2 - 7x + 2 = 0.$

b. $2x^2 - 4x + 4 = 0$

13. Demostrar que la expresión $ax^2 + bx + c$ y a

a. tienen el mismo signo $\forall x \in \mathbb{R}$ si el discriminante de la expresión es menor que 0.

b. tienen el mismo signo $\forall x \in \mathbb{R}$ y $x \neq (-b/2a)$ si el discriminante de la expresión es 0.

Sugerencia: Use la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

14. Demostrar que si el discriminante de la expresión $ax^2 + bx + c$, es positivo, y si α y β son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con $\alpha < \beta$, entonces:

a. $ax^2 + bx + c$ y a tienen el mismo signo si x está en el intervalo $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$ y

b. $ax^2 + bx + c$ y a tienen signos diferentes si x está en el intervalo $]\alpha, \beta[$.

Sugerencia: Use la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

15. Usando los resultados de los ejercicios 13 y 14, resolver las si-

siguientes inecuaciones:

a. $3x^2 + 2x + 2 < 0$

b. $2x^2 + x + 5 > 0$

c. $3x^2 - 6x + 5 \geq 0$

d. $-5x^2 + 40x - 74 > 0$

16. Hallar los valores de m para los cuales la ecuación $mx^2 + (m + 1)x + 2(m - 1) = 0$, tiene raíces reales.

17. Usando las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática, resolver los siguientes sistemas:

a.
$$\begin{aligned}x + y &= 11 \\xy &= 24\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 5 \\x + 2y &= 5\end{aligned}$$

18. Hallar el supremo de los siguientes conjuntos

a. $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{n + 2}{n + 1}, n \in \mathbb{N}\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} / x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} n \neq 0\}$

19. Probar que el supremo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es único.

20. Probar que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\sup A \leq \sup B ,$$

donde $\sup A$ significa supremo de A .

Capítulo 1

SISTEMAS DE COORDENADAS Y GRAFICAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1.1. SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO

Esta vez trabajaremos con pares ordenados (x, y) de números reales.

El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) se llama *plano numérico* y se denota con \mathbb{R}^2 . Así:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Se trata ahora de identificar cada par ordenado de \mathbb{R}^2 con puntos en un plano geométrico tal como se hace con los números reales y los puntos de la recta. Usaremos para este fin el *Método de Descartes*:

Tomemos una recta horizontal en el plano geométrico y llamemos a ésta eje X , tomemos también una recta vertical y llamémosla eje Y . La intersección de los ejes se llama *origen*, y lo denotaremos con O . Escogemos una unidad de medida y con ella establecemos en cada recta un sistema coordenado cuidando de que el cero de ambas coincidan con el origen. Fijamos además la dirección positiva en el eje X a la derecha del origen y la dirección positiva en el eje Y arriba del origen.

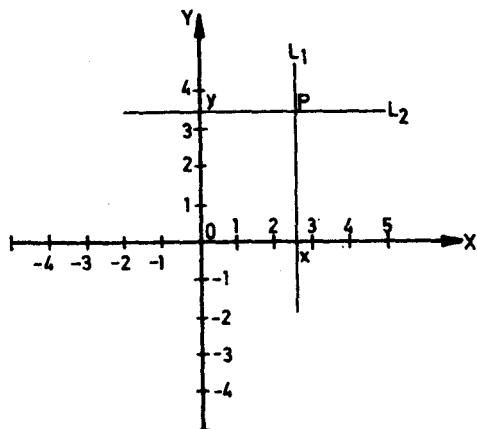


Fig. 1.1

Para cada punto P del plano consideremos las rectas L_1 y L_2 perpendiculares a los ejes X e Y , respectivamente, trazadas desde P . El número que corresponde a la intersección de L_1 con el eje X se llama *abscisa* de P (o *coordenada x*) y se denota con x , mientras que el número que corresponde a la intersección de L_2 con el eje Y se llama *ordenada* de P (o *coordenada y*) y se denota con y .

Por el método descrito siempre es posible asignarle a cada punto P del plano geométrico un único par ordenado (x, y) formado por su abscisa y ordenada. Recíprocamente, a cada par ordenado (u, v) de \mathbb{R}^2 se le puede asignar un único punto Q en el plano geométrico, el que

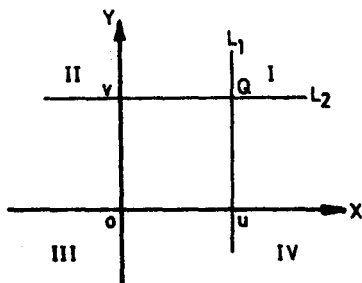


Fig. 1.2

se consigue ubicando el número u en el eje X y el número v en el eje Y para luego trazar las rectas L_1 y L_2 perpendiculares a los ejes X e Y , respectivamente, en los puntos correspondientes a u y v . La intersección de L_1 y L_2 será el punto Q buscado. (Fig. 1.2.)

Hemos establecido una "correspondencia biunívoca" entre cada punto P del plano geométrico y cada par (x, y) de \mathbb{R}^2 en el sentido siguiente:

"A cada punto P le corresponde un único par (x, y) y recíprocamente, a cada par (x, y) corresponde un único punto P ".

La correspondencia biunívoca se llama un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas.

Los ejes X e Y se llaman *ejes coordenados* y dividen al plano en 4 regiones cada una de las cuales se llama *cuadrante*. Se considera como primer cuadrante aquel en donde la abscisa y ordenada son positivas; los otros se enumeran siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj.

En virtud de la correspondencia establecida queda identificado \mathbb{R}^2 con el plano geométrico, de este modo podemos llamar a cada par (x, y) con la palabra *punto*. En adelante si el punto P tiene coordenadas (x, y) escribiremos $P = (x, y)$ o simplemente $P(x, y)$.

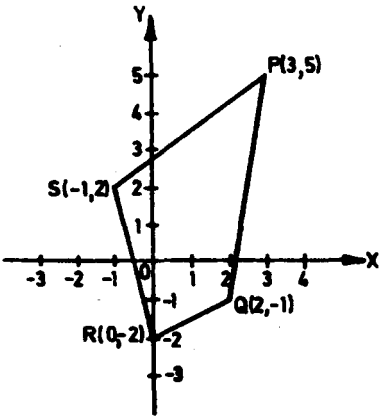


Fig. 1.3

Ejemplo 1.1. La gráfica del cuadrilátero cuyos vértices $PQRS$ son $P(3, 5)$, $Q(2, -1)$, $R(0, -2)$ y $S(-1, 2)$ aparece en la figura 1.3.

El sistema cartesiano rectangular es un caso particular de los sistemas cartesianos en general, en los cuales el ángulo formado por los ejes puede tener cualquier medida entre 0° y 180° . Existe también en el plano otro sistema muy utilizado y que estudiaremos más adelante: el sistema de coordenadas polares.

1.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Obtendremos una fórmula que nos permita calcular la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. Por la correspondencia biunívoca establecida entre los planos numérico y geométrico podemos identificar la idea de distancia entre dos puntos con el concepto geométrico de longitud de un segmento. Si denotamos con $d(P, Q)$ a la distancia entre los puntos P y Q y por \overline{PQ} al segmento que los une, entonces $d(P, Q) = |\overline{PQ}|$, donde las barras verticales indican longitud del segmento.

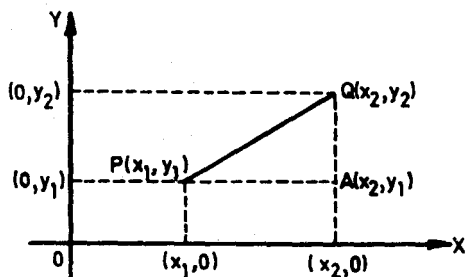


Fig. 1.4

Tracemos el triángulo rectángulo PAQ rectángulo en A . Las coordenadas del punto A son (x_2, y_1) . Por encontrarse P y A sobre una

recta paralela al eje de abscisas, entonces $d(P, A) = |\overline{PA}| = |x_2 - x_1|$. Por encontrarse Q y A sobre una recta paralela al eje de ordenadas, entonces $d(Q, A) = |y_2 - y_1|$. Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$d(P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}. \quad \text{Esto es:}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observaciones: Se deduce inmediatamente de la fórmula de la distancia las siguientes propiedades:

1. $d(P, Q) = d(Q, P)$. Es decir la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q a P .

2. $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.

Ejemplo 1.2. a) si $P = (1, 2)$ y $Q = (4, 6)$, entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$$

b) si $P = (1, 2)$ y $Q = (3, -4)$, entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-4 - 2)^2} = 2\sqrt{10}$$

c) si $P = (7, 5)$ y $Q = (7, 3)$, entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(7 - 7)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2} = |3 - 5| = 2.$$

Ejemplo 1.3. Usar el teorema de Pitágoras para probar que el triángulo cuyos vértices son

$A = (1/4, 3/4)$, $B = (1/2, 1/2)$ y $C = (4, 4)$ es rectángulo.

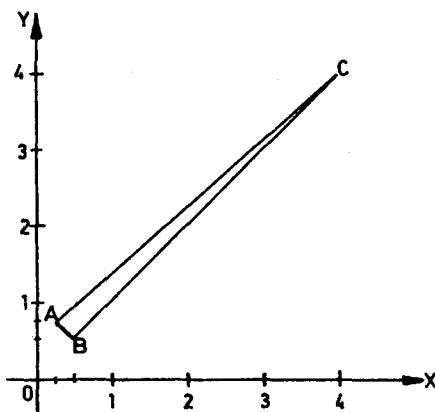


Fig. 1.5

El lado \overline{AB} mide:

$$d(A, B) = \sqrt{(1/4 - 1/2)^2 + (3/4 - 1/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

El lado \overline{BC} mide:

$$d(B, C) = \sqrt{(4 - 1/2)^2 + (4 - 1/2)^2} = \frac{7}{2} \sqrt{2}$$

El lado \overline{CA} mide:

$$d(C, A) = \sqrt{(4 - 1/4)^2 + (4 - 3/4)^2} = \frac{\sqrt{394}}{4}$$

Se tiene además que: $(d(A, B))^2 + (d(B, C))^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$$+ \left(\frac{7}{2} \sqrt{2}\right)^2 = \frac{197}{8} = (d(C, A))^2.$$

Luego se trata de un triángulo rectángulo con hipotenusa \overline{AC} .

Ejemplo 1.4. Probar que las diagonales de un rectángulo tienen longitudes iguales.

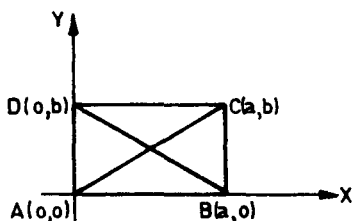


Fig. 1.6

Para simplificar las expresiones de cada uno de los vértices, tracemos el rectángulo de tal modo que dos de los lados consecutivos coincidan con los ejes. De este modo los vértices son:

$$A = (0, 0), B = (a, 0), C = (a, b) \text{ y } D = (0, b).$$

Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos que:

$$d(D, B) = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ y}$$

$$d(A, C) = \sqrt{a^2 + b^2};$$

luego $d(D, B) = d(A, C)$.

Ejemplo 1.5. Determinar un punto equidistante de los puntos $A = (1, 7)$, $B = (8, 6)$ y $C = (7, -1)$.

Sea $P = (x, y)$ el punto buscado. Debe cumplirse:

$$d(P, A) = d(P, B) = d(P, C).$$

$d(P, A) = d(P, B)$ se cumple si y sólo si:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2}; \quad (\text{a})$$

$d(P, A) = d(P, C)$ se cumple si y sólo si:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} \quad (\text{b})$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (a) y (b) se obtiene el sistema:

$$7x - y - 25 = 0$$

$$3x - 4y = 0.$$

cuya solución es $x = 4$, $y = 3$. Luego el punto buscado es $P = (4, 3)$.

Definición 1.1. Dados los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, el *punto medio* del segmento de recta que une P y Q se define como el punto M con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Se comprueba directamente que $d(P, M) + d(M, Q) = d(P, Q)$ y $d(P, M) = d(M, Q)$. Luego M está en el segmento de recta PQ y además equidista de sus extremos P y Q .

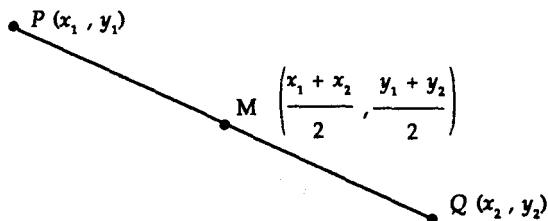


Fig. 1.7

Ejemplo 1.6. El punto medio del segmento que une los dos puntos $P = (3, 7)$ y $Q = (8, -3)$ es

$$M = \left(\frac{3 + 8}{2}, \frac{7 + (-3)}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, 2 \right)$$

Ejemplo 1.7. Los vértices de un triángulo son $A = (1, 7)$, $B = (8, 6)$ y $C = (7, -1)$. Si D es el punto medio del lado \overline{BC} , hallar la longitud de la mediana \overline{AD} :

El punto medio D tiene coordenadas $(15/2, 5/2)$. Luego la longitud de la mediana \overline{AD} es:

$$\sqrt{(15/2 - 1)^2 + (5/2 - 7)^2} = \frac{\sqrt{250}}{2}$$

Ejemplo 1.8. Dado el cuadrilátero $ABCD$ (figura 1.8), probar que el segmento que une los puntos medios de las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} , biseca al segmento que une los puntos medios de los lados \overline{BC} y \overline{AD} .

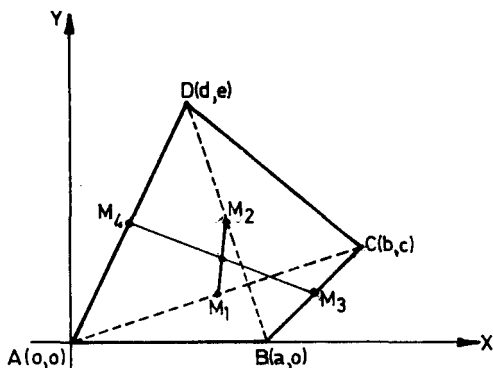


Fig. 1.8

Llamemos con M_1 y M_2 a los puntos medios de las diagonales y con M_3 y M_4 los puntos medios de los lados \overline{BC} y \overline{AD} respectivamente.

Las coordenadas de estos puntos medios son:

$$M_1 = (b/2, c/2), \quad M_2 = \left(\frac{a+d}{2}, e/2 \right).$$

$$M_3 = \left(\frac{a+b}{2}, c/2 \right), \quad M_4 = (d/2, e/2).$$

El punto medio del segmento que une M_1 y M_2

$$\text{es } \left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{e+c}{4} \right)$$

El punto medio del segmento que une M_3 y M_4 es

$$\left(\frac{a + b + d}{4}, \frac{c + e}{4} \right)$$

Como ambos puntos medios tienen iguales coordenadas entonces coinciden y se tiene demostrado lo pedido.

13. DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Dado el segmento de recta $\overline{P_1 P_2}$ que une los puntos P_1 y P_2 se trata de encontrar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que esté en el segmento y lo divida en una razón dada.

Definición 1.2. Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y los números positivos r_1 y r_2 diferentes de cero, se dice que el punto $P(x, y)$, del segmento que une P_1 y P_2 , divide al segmento en la razón r_1 / r_2 si se cumple que:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ejemplo 1.9. El punto $P(8/3, 8/3)$ divide al segmento que une los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(4, 4)$ en la razón 2.

En efecto:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{\sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9}}}{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}}} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = 2$$

En los ejemplos y ejercicios, cuando se indican los extremos de un segmento, asumiremos que el extremo nombrado en primer orden es el extremo inicial (punto P_1).

Ejemplo 1.10. El punto medio de un segmento divide a éste en la razón 1.

En efecto, si P_1 y P_2 son los extremos del segmento y M el punto medio, entonces $d(P_1, M) = d(M, P_2)$ y por tanto:

$$\frac{d(P_1, M)}{d(M, P_2)} = 1$$

Probaremos que si $P(x, y)$ divide al segmento con extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón r_1 / r_2 , entonces:

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2} \qquad y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2} \qquad (1.1)$$

Formemos los triángulos rectángulos P_1AP y PBP_2 (figura 1.9), donde las coordenadas de A son (x, y_1) y las de B , (x_2, y)

Por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Como el punto P divide al segmento en la razón r_1/r_2 , entonces:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

luego, según sea la posición de P con respecto a P_1 y P_2 , se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad (\text{fig. 1.9 a})$$

$$\text{ó} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \qquad (\text{fig. 1.9 b})$$

Despejando x de cualquiera de las expresiones anteriores se obtiene

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}$$

De igual manera se obtiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \text{ó} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$$

y despejando y se consigue la fórmula

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

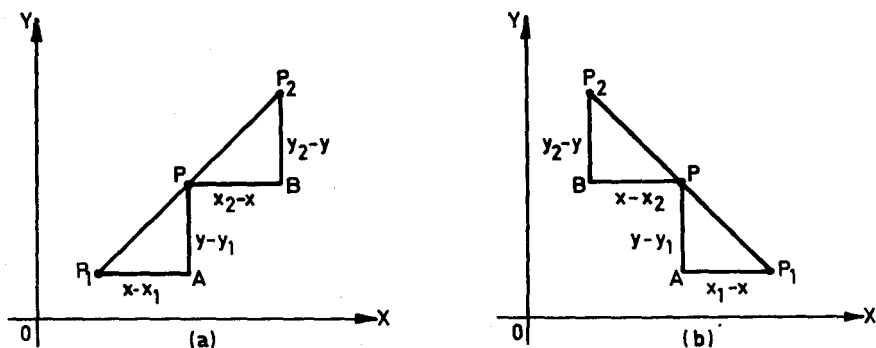


Fig. 1.9

Ejemplo 1.11. Encontrar las coordenadas del punto que divide al segmento de extremos $P_1 (-2, 5)$ y $P_2 (3, 0)$ en la razón $3/2$.

En este caso, bastará sustituir en las fórmulas anteriores los valores $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 5$, $y_2 = 0$; obteniéndose:

$$x = 1, \quad y = 2 .$$

El punto buscado tiene coordenadas $P (1, 2)$.

Ejemplo 1.12. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las medianas (baricentro) del triángulo con vértices en $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. (Usar el hecho de que el baricentro divide a la mediana AM_1 , en la razón 2, siendo M_1 el punto medio del lado opuesto al vértice A).

Sea $P(x, y)$ el punto de intersección de las medianas. Se sabe que el baricentro divide a las medianas en la razón 2, en particular a la mediana AM_1 . Como M_1 tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

entonces utilizando las fórmulas de las coordenadas de un punto de división, se tiene para $r_1 = 2$, y $r_2 = 1$:

$$x = \frac{x_1 + 2 \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + 2 \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \right)}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

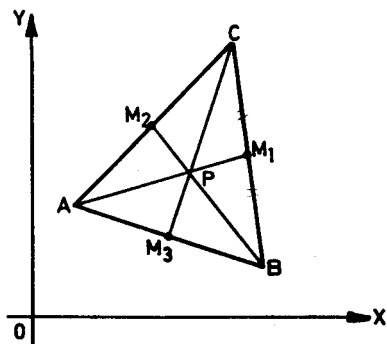


Fig. 1.10

Nota.— Las fórmulas establecidas en (1.1) consideran que el punto P de división pertenece al segmento $\overline{P_1 P_2}$, es decir, el punto

P es un punto de división interno. Sin embargo, este concepto puede ser extendido para el caso en que el punto P está fuera del segmento. Si consideramos la misma definición y usamos la figura 1.11 se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

de donde:

$$x = \frac{r_1 x_2 + (-r_2) x_1}{r_1 + (-r_2)},$$

$$y = \frac{r_1 y_2 + (-r_2) y_1}{r_1 + (-r_2)}$$

Observamos que las fórmulas que se obtienen para x e y son parecidas a las que se tienen en (1.1) salvo en el signo de r_2 . Esto indica que si establecemos, convencionalmente, que la razón r_1/r_2 es negativa cuando P es externo, se tendrá:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

obteniéndose de aquí las mismas fórmulas de (1.1).

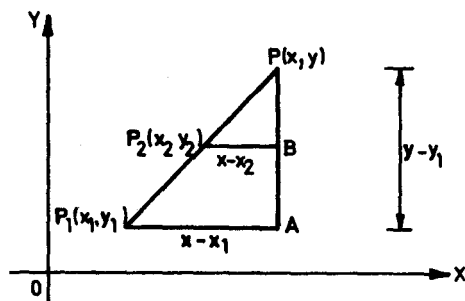


Fig. 1.11

Ejemplo 1.13. El segmento con extremos en $P_1 (-2, -2)$ y $P_2 (1, 0)$ es dividido por el punto $P (x, y)$ en la razón $-3/2$. Encontrar P .

La razón negativa nos indica que P es un punto de división externo. En este caso $r = -3/2$ y podemos tomar $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$ (o también $r_1 = -3$ y $r_2 = 2$, el resultado es el mismo) :

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2} = \frac{(3)(1) + (-2)(-2)}{3 + (-2)} = 7$$

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2} = \frac{(3)(0) + (-2)(-2)}{3 + (-2)} = 4$$

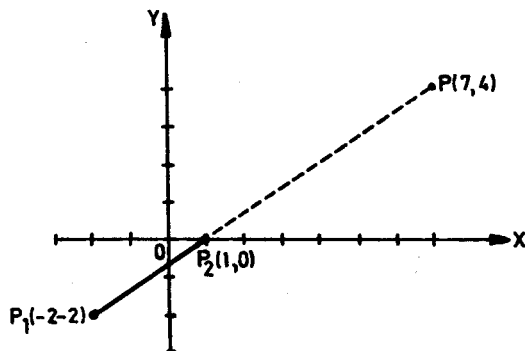


Fig. 1.12

EJERCICIOS 1.1

- Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son $A (a, b)$, $B (a + c, b)$, $C (a + c, b + d)$.
- $P_1 (1, 1)$, $P_2 (-3, -1)$ y $P_3 (4, y)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Hallar y .
- La distancia del punto $(x, -6)$ al punto $(3, 4)$ es 10. Hallar el valor de x .
- El punto $(3, 4)$ es el punto medio del segmento \overline{AB} . Hallar las coordenadas del punto B si $A = (1, 1)$.

5. Probar que el triángulo ABC con vértices $A (0, 0)$, $B (1/2, 1)$ y $C (0, 5/4)$ es un triángulo rectángulo.
6. Pruebe que las diagonales de un trapecio isósceles tienen igual longitud.
7. Demuestre, usando la fórmula de distancia, que los puntos $P_1 (0, 1)$, $P_2 (3, 7)$ y $P_3 (-3, -5)$ son colineales.
8. Pruebe que en un triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.
9. Hallar las longitudes de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A (-4, 4)$, $B (0, 0)$ y $C (0, -4)$.
10. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $-1/2$ siendo $P_1 (-4, -2)$ y $P_2 (4, 6)$.
11. Hallar las coordenadas del punto P si :
 - a) Está en el segmento con extremos $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 4)$ y dista 4 veces más de P_1 que de P_2 .
 - b) Está en la prolongación del segmento con extremos $P_1 = (0, 4)$ y $P_2 = (3, 3)$ y $d(P, P_1) = 4 d(P, P_2)$.
12. Hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que dividen internamente al segmento de extremos $A (0, 2)$ y $B (-3, 10)$ en 3 partes iguales.
13. Hallar el área del rectángulo cuyos vértices opuestos son $P_1 (4, 6)$ y $P_2 (-1, -4)$.
14. Probar que si dos medianas de un triángulo tienen longitudes iguales, éste es isósceles.
15. El triángulo ABC isósceles es rectángulo en $A (-2, 1)$. Si el punto $P (1, 4)$ divide al cateto \overline{AC} en la relación

$$\frac{d(A, P)}{d(A, C)} = \frac{1}{2}$$

determinar la ordenada del vértice B , sabiendo que B se encuentra en el cuarto cuadrante.

16. Determinar el producto de las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo de vértices $A (1, 2)$, $B (5, 3)$ y $C (3, 4)$.
17. Un triángulo tiene por vértices $A (-4, -3)$, $B (8, 0)$, y $C (6, 12)$. Por el punto $(36/5, 24/5)$ que pertenece al lado \overline{BC} se traza una

paralela a \overline{AB} que corta al lado \overline{AC} en el punto D . Calcular la abscisa de D .

18. Sabiendo que en un triángulo la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a las longitudes de los lados adyacentes, calcular la longitud de la bisectriz del triángulo ABC trazada desde $A(1, 3)$, si $B = (-2, -3)$ y $C = (3, -1)$.
19. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(6, 2)$ y $P_2(-3, 10)$. Determinar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $-8/3$.

14. GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES E INECUACIONES

Hemos estudiado el concepto de relación de un conjunto A en un conjunto B . Esta vez nos interesa el caso en donde A y B son iguales a \mathbb{R} . Es decir, relaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Estas relaciones se llaman relaciones *reales*. Las relaciones reales que serán de mayor interés en nuestro desarrollo serán aquellas que están determinadas por ecuaciones o inecuaciones. Es el caso, por ejemplo, de la relación $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1\}$, que está formada por todos los pares (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuya segunda componente es igual al cuadrado de la primera más uno. Otro caso es el de la relación $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y < x\}$, formada por todos los pares (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuya segunda componente es menor que la primera.

DOMINIO Y RANGO DE UNA ECUACION

En adelante, una relación real definida por una ecuación, será referida indicando tan sólo la ecuación que la determina. En tal sentido hablaremos del *dominio* de la ecuación o *extensión* de x y del *rango* de la ecuación o *extensión* de y en lugar del dominio o rango de la relación; correspondiendo al dominio los valores de x para los que puede obtenerse un valor y cuando x se reemplaza en la ecuación. Las mismas consideraciones se siguen si la relación está definida mediante una inecuación.

En virtud de la identificación de los pares de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con los puntos del plano geométrico, podemos representar a las relaciones reales en el plano geométrico y como en el caso del dominio y rango hablaremos de la representación gráfica de la ecuación o inecuación cuando se trate de representar gráficamente a relaciones definidas por ecuaciones o inecuaciones.

GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES

Tomemos la ecuación $y = x^2 + 1$ que define al conjunto R_1 descrito en la introducción y consideremos algunas soluciones de esta ecuación, es decir consideremos algunos pares (x, y) que satisfacen la ecuación. Por ejemplo el par $(0, 1)$, obtenido al poner $x = 0$ en la ecuación. Del mismo modo obtenemos las soluciones $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 10)$, $(4, 17)$, $(-1, 2)$, $(-2, 5)$, $(-3, 10)$, $(-4, 17)$, etc.

Las soluciones señaladas pueden disponerse en una tabla como la siguiente:

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = x^2 + 1$	1	2	5	10	17	2	5	10	17

Es claro que tales soluciones no son todas las que satisfacen la ecuación. El número de soluciones es infinito.

Podemos ubicar en el plano geométrico los pares obtenidos y unirlos con una curva lisa. Si asumimos que esta curva contiene todas las soluciones y que todo punto que no esté en la curva no satisface la ecuación, entonces la curva trazada (Fig. 1.13) representa a la ecuación $y = x^2 + 1$.

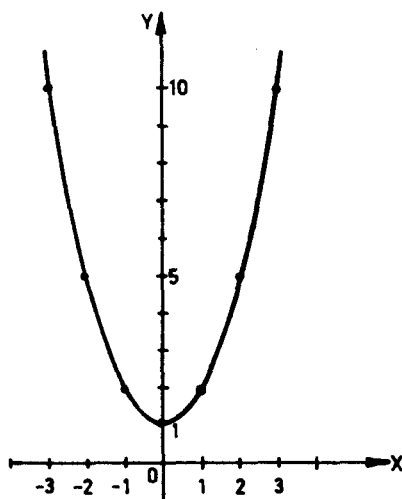


Fig. 1.13

Presentamos a continuación la definición de gráfica de una ecuación.

Definición 1.3. La *gráfica de una ecuación* en \mathbb{R}^2 es el conjunto de todos los pares (x, y) de \mathbb{R}^2 cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación.

La gráfica de una ecuación también se llama *lugar geométrico o curva*. Generalmente se usa también la expresión "la gráfica de una ecuación", para referirse a la representación gráfica de los pares (x, y) que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1.14. Trazar la gráfica de $y = x + 1$

Algunos pares se muestran en la siguiente tabla:

x	0	1	2	4	-1	-2	-3
$y = x + 1$	1	2	3	5	0	-1	-2

Obsérvese que cualquiera que sea el valor de x que se reemplace en la ecuación siempre se obtiene un valor para y . También podemos obtener valores de x si reemplazamos valores determinados de y .

La gráfica que aparece en la figura 1.14 representa a la ecuación dada y corresponde a una recta.

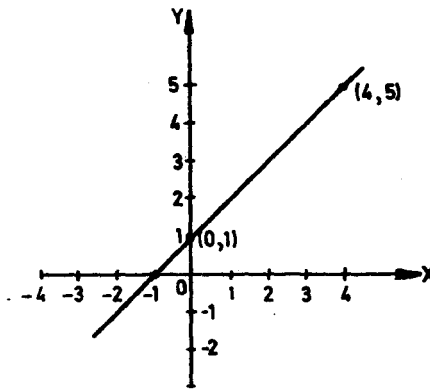


Fig. 1.14

Ejemplo 1.15. Trazar la gráfica de $y = |x|$

Cualquiera que sea el valor de x que se reemplace, este determina un valor de y real no negativo. Según esto no existirán puntos de la gráfica debajo del eje X .

Algunos pares que satisfacen la ecuación aparecen en la siguiente tabla:

x	0	1/2	1	2	3.4	-1	-3
$y = x $	0	1/2	1	2	3.4	1	3

La gráfica aparece en la figura 1.15.

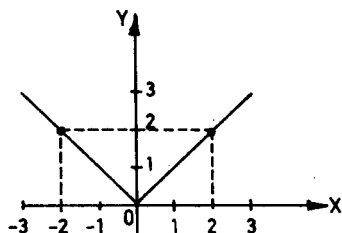


Fig. 1.15

Ejemplo 1.16. Trazar la gráfica de $y^2 + x = 4$.

La ecuación puede ser escrita en la forma: $y = \pm \sqrt{4 - x}$.

Algunas soluciones aparecen en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	-1	-2
$y = \pm \sqrt{4 - x}$	± 2	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \sqrt{2}$	± 1	$\pm \sqrt{5}$	$\pm \sqrt{6}$

Cuando se reemplaza x por el valor 0, se obtiene ± 2 , es decir se tienen los pares $(0, 2)$ y $(0, -2)$, cuando se reemplaza x por 1, se tienen los pares $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$, etc.

Nótese que los valores x que pueden ser reemplazados en la ecuación y para los cuales tiene ésta sentido, no pueden ser mayores que 4, es decir debe cumplirse $x \leq 4$. Si en la ecuación dada despejamos x , se observa en cambio que para cualquier valor de y , siempre se obtiene para x , un valor real: $x = 4 - y^2$.

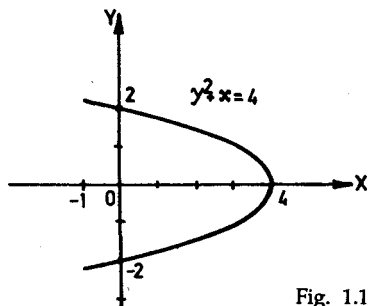


Fig. 1.16

Ejemplo 1.17. Determinar el dominio y rango de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Trazar la gráfica correspondiente.

Despejando el valor de y se tiene que $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$, de donde se observa que para que y tenga un valor real debe cumplirse: $9 - x^2 \geq 0$, es decir $x^2 \leq 9$, o sea $-3 \leq x \leq 3$. Por tanto el dominio es:

$$D = \{x / -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3].$$

Si despejamos el valor de x : $x = \pm \sqrt{9 - y^2}$, se tiene que los valores de y para los que tiene sentido la ecuación deben cumplir: $9 - y^2 \geq 0$, y como en el caso anterior el rango es:

$$R = \{y / -3 \leq y \leq 3\} = [-3, 3].$$

Algunos pares que satisfacen la ecuación aparecen en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \pm \sqrt{9 - x^2}$	0	$\pm \sqrt{5}$	$\pm \sqrt{8}$	± 3	$\pm \sqrt{8}$	$\pm \sqrt{5}$	0

La representación de la gráfica aparece en la figura 1.17 y corresponde a una circunferencia de radio 3 y centro en $(0, 0)$.

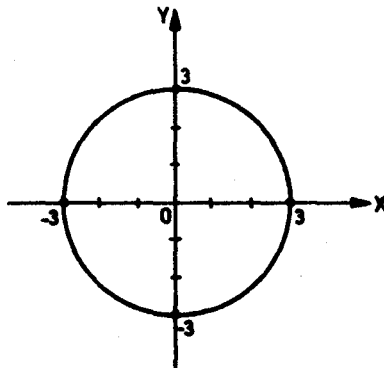


Fig. 1.17

Ejemplo 1.18. Trazar la gráfica de $y = 2$ e indicar el dominio y el rango.

La ecuación es independiente de x , cualquiera que sea el valor que se tome para x siempre se tiene que $y = 2$. El dominio es el conjunto de todos los números reales, mientras que el rango sólo tiene un elemento: $\{2\}$ (Fig. 1.18).

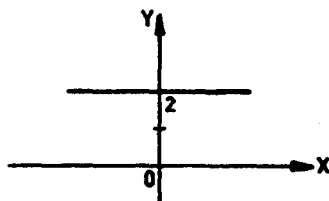


Fig. 1.18

Ejemplo 1.19. Determinar el dominio y el rango de la ecuación

$$y = \frac{|x|}{x} - 1$$

La ecuación tiene sentido para todo valor real de x diferente de 0. Luego el dominio se puede escribir como $\mathbb{R} - \{0\}$

Si $x < 0$, $y = \frac{-x}{x} - 1$, es decir $y = -2$

Si $x > 0$, $y = \frac{x}{x} - 1$, es decir $y = 0$.

Luego el rango de la ecuación está formado por dos valores: -2 y 0 . El gráfico de la ecuación aparece en la figura 1.19.

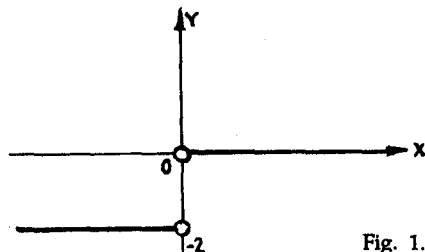


Fig. 1.19

Ejemplo 1.20. Trazar la gráfica de $(y - x)(y - x^3) = 0$.

Se sabe que en los números reales, $ab = 0$ es equivalente a decir que $a = 0$ ó $b = 0$, de aquí que la ecuación dada es equivalente a:

(a) $y - x = 0$ ó (b) $y - x^3 = 0$.

Los puntos que satisfacen la ecuación dada, satisfacen la ecuación (a) o la ecuación (b); así mismo, los puntos que satisfacen la ecuación (a) o (b) satisfacen $(y - x)(y - x^3) = 0$

La representación de la ecuación corresponde a las gráficas de $y = x$ y de $y = x^3$, (fig. 1.20).

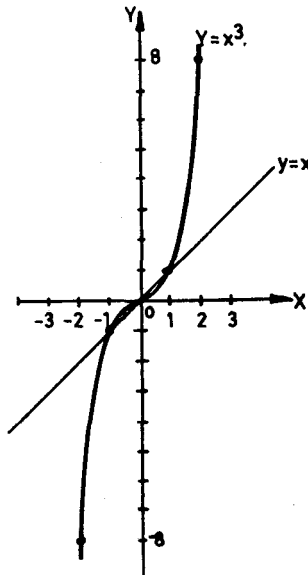


Fig. 1.20

El estudio y trazado de la gráfica de una ecuación puede efectuarse en forma más precisa si previamente a la determinación de puntos de la curva, se procede al análisis de ciertas características o propiedades de la gráfica, como por ejemplo: intersecciones con los ejes, simetría, extensiones y asíntotas.

El estudio de las extensiones se refiere a un punto tratado anteriormente, la determinación del dominio y rango de la ecuación. Los otros temas los trataremos a continuación.

INTERSECCIONES CON LOS EJES

Los puntos en el eje X tienen la forma $(x, 0)$, luego si queremos encontrar los puntos de intersección de una gráfica con el eje X , bastará con sustituir en su ecuación y por el valor 0 , y resolver para x . Así mismo, si queremos hallar las intersecciones de la gráfica con el eje Y , bastará con sustituir el valor de x por 0 y resolver para y debido a que los puntos en el eje Y tienen la forma $(0, y)$.

Ejemplo 1.21. Intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Haciendo $y = 0$ en la ecuación se obtiene $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ ó factorizando:

$$(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0.$$

Luego $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-3, 0)$ son los 3 puntos de intersección de la gráfica con el eje X .

Haciendo $x = 0$, se obtiene $y = -3$. El único punto de corte de la gráfica y el eje Y es entonces $(0, -3)$.

SIMETRIA DE LA GRAFICA DE UNA ECUACION RESPECTO DE UNA RECTA

La siguiente definición es importante para definir, después, la simetría de la gráfica de una ecuación respecto de una recta.

Definición 1.4. Se dice que los puntos P y P' son simétricos respecto de la recta L , si ésta es mediatriz del segmento PP' .

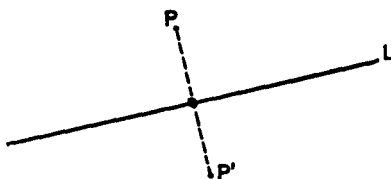


Fig. 1.21

Así el punto $P(1, -2)$ es simétrico al punto $P'(-1, -2)$ respecto de la recta $x = 0$ (eje Y); el punto $Q(1, 0)$ es simétrico al punto $Q'(0, 1)$ respecto a la recta $y = x$; el punto $R(3, 3)$ es simétrico, respecto de la recta $y = 2$, con el punto $R'(3, 1)$. (fig. 1.22).

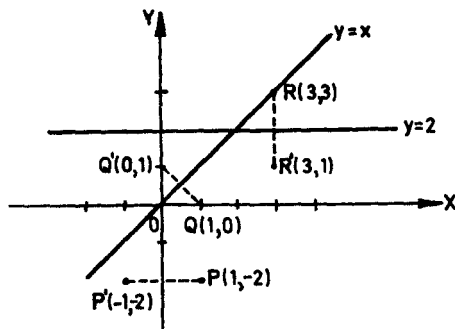


Fig. 1.22

Definición 1.5. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto a una recta L si para todo punto P de la gráfica existe un punto Q de la gráfica tal que P y Q son simétricos respecto de L .

Es importante considerar la simetría respecto a los ejes coordenados.

SIMETRÍA RESPECTO DEL EJE Y

Si un punto $P(x, y)$ está en la gráfica de una ecuación que es simétrica respecto del eje Y , entonces el punto $P'(-x, y)$ también está en la gráfica. Recíprocamente, si los puntos $P(x, y)$ y $P'(-x, y)$ satis-

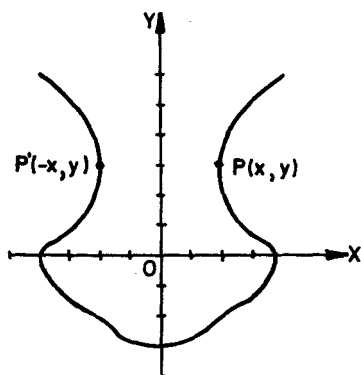


Fig. 1.23

facen una ecuación, entonces la gráfica de esta ecuación es simétrica respecto del eje Y . Luego, *la gráfica de una ecuación es simétrica respecto del eje si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente al reemplazar x por $-x$* . En la figura 1.23 aparece una gráfica simétrica al eje Y .

Ejemplo 1.22. La gráfica $y = x^2 + 1$ es simétrica respecto del eje Y , pues si sustituimos x por $-x$ en la ecuación ésta no se altera:

$$y = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \quad (\text{ver figura 1.13}).$$

SIMETRIA RESPECTO DEL EJE X

De manera análoga al caso anterior, se tiene que: *la gráfica de una ecuación es simétrica respecto del eje X si y sólo si al sustituir y por $-y$ en la ecuación se obtiene otra ecuación equivalente a la primera*.

Ejemplo 1.23. La gráfica de $y^2 + x = 4$ es simétrica respecto al eje X . (Fig. 1.16).

Ejemplo 1.24. La gráfica de $y^2 - x^2 = 0$ es simétrica respecto del eje X , pues al reemplazar x por $-x$, se tiene $y^2 - (-x)^2 = 0$, que corresponde a una ecuación equivalente a la anterior. También es simétrica con respecto al eje Y .

SIMETRIA RESPECTO DE UN PUNTO

Definición 1.6. Dos puntos P y P' son simétricos respecto del punto A , si A es punto medio del segmento PP' . Así, $(3, 1)$ es simétrico con el punto $(5, 9)$ respecto del punto $(4, 5)$; y $(-9, 4)$ es simétrico con $(9, -4)$ respecto del origen de coordenadas.

Definición 1.7. Una gráfica es simétrica respecto del punto A , si para cada punto P de la gráfica existe un punto P' de la gráfica que es simétrico respecto de A .

Es fácil demostrar que la gráfica de una ecuación es simétrica respecto del origen de coordenadas si al sustituir x por $-x$ e y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente a la anterior (fig. 1.24).

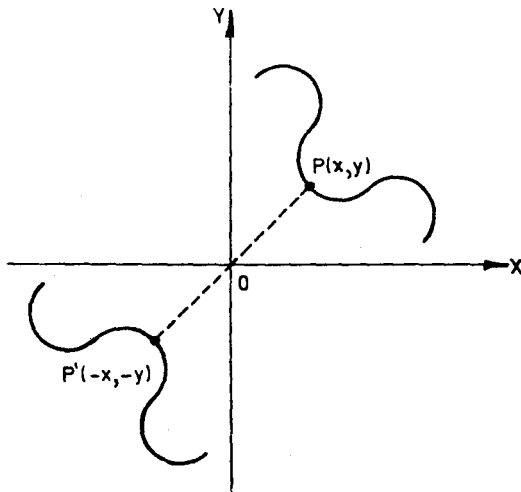


Fig. 1.24

Ejemplo 1.25. La gráfica de $y = x^3$ es simétrica respecto del origen de coordenadas pues $-y = (-x)^3$ corresponde a una ecuación equivalente a $y = x^3$.

Las simetrías estudiadas son importantes para la representación de curvas en el plano. Si una gráfica por ejemplo, es simétrica respecto del eje Y , bastará con encontrar su representación en el primer y cuarto cuadrante, y luego hacer uso de la simetría mencionada para completarla.

Ejemplo 1.26. Teniendo en cuenta el dominio, rango, las simetrías y las intersecciones con los ejes, trazar la gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Dominio y rango:

La ecuación la podemos escribir en la forma:

$$y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2},$$

luego los valores de x para los cuales existe un valor real de y son aquellos que cumplen con la relación: $4 - x^2 \geq 0$ ó en forma equivalente con la relación $(2 - x)(2 + x) \geq 0$; ésta a su vez es equivalente a las relaciones $2 - x \geq 0$ y $2 + x \geq 0$ ó a las relaciones $2 - x \leq 0$ y $2 + x \leq 0$. Resolviendo las dos primeras resulta que x debe cumplir con la relación $-2 \leq x \leq 2$, mientras que si resolvemos las dos últimas relaciones, tendremos los resultados: $x \geq 2$ y $x \leq -2$ que no pueden ser cumplidos por un valor de x , simultáneamente. Luego el dominio es $[-2, 2]$.

Si despejamos el valor de x en la ecuación dada,

$$x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - y^2}$$

se tiene, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, que los valores de y para los que existe un valor real de x son aquellos que satisfacen la relación $-3 \leq y \leq 3$, que representa el rango de la ecuación.

Simetría:

La gráfica es simétrica respecto del eje Y pues reemplazando x por $-x$ en la ecuación se tiene otra ecuación equivalente:

$$\frac{(-x)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Asimismo se puede comprobar que la gráfica es simétrica con respecto del eje X y con respecto del origen. Bastará con graficar en el primer cuadrante.

Intersecciones:

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación se tiene: $\frac{x^2}{4} = 1$,

resolviendo para x resulta: $x = \pm 2$.

Luego las intersecciones con el eje X son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Haciendo $x = 0$ y resolviendo para y en la ecuación, se tiene que $y = \pm 3$; por tanto las intersecciones con el eje Y son $(0, 3)$ y $(0, -3)$.

La gráfica está representada en la figura 1.25 y corresponde a una elipse, curva que estudiaremos en detalle más adelante.

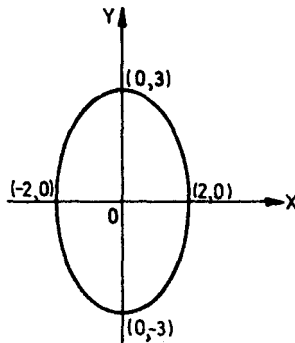


Fig. 1.25

ASINTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES DE LA GRAFICA DE UNA ECUACION

Consideremos la ecuación: $y = \frac{1}{x - 1}$.

Algunos pares de la gráfica de esta ecuación se escriben en la siguiente tabla:

x	5	4	3	2	1.5	1.3	1.2	1.1	1.01	0.7	0.9	0.99
$y = \frac{1}{x-1}$	1/4	1/3	1/2	1	2	10/3	5	10	100	-10/3	-10	-100

La representación de la ecuación aparece en la figura 1.26

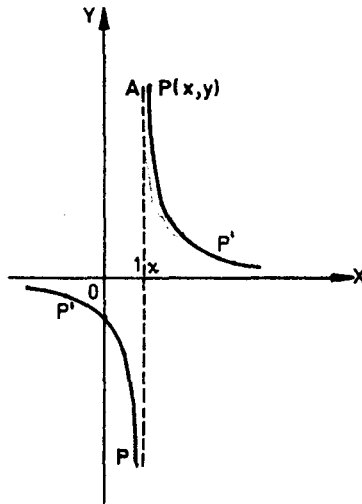


Fig. 1.26

Obsérvese que a medida que los valores de x se acercan a 1 por la derecha, el punto $P(x, y)$ se aleja cada vez más del origen mientras que el segmento de perpendicular trazado de P a la recta $x = 1$ tiene longitud cada vez más pequeña.

Consideraciones análogas podemos hacer cuando x toma valores cada vez más cercanos a 1 por la izquierda. En este caso se dice que la recta $x = 1$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de

$$y = \frac{1}{x - 1} .$$

Por otro lado, si la ecuación dada se escribe

$$x = \frac{1}{y} + 1 ,$$

se observa que a medida que y se acerca a 0 por encima del eje X , el punto $P(x, y)$ que se obtiene se aleja cada vez más del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta $y = 0$ (eje de las x), tiende a 0. La recta $y = 0$ se llama en este caso *asíntota horizontal* de la gráfica de

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

En general decimos que: la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de una ecuación si cuando x se acerca a x_0 por la derecha (o por la izquierda), el punto $P(x, y)$ que se obtiene se aleja indefinidamente del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta tiende a 0; y que la recta $y = y_0$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de esta ecuación si cuando y se acerca a y_0 por arriba (o por debajo), el punto $P(x, y)$ que se obtiene se aleja indefinidamente del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta tiende a 0.

Ejemplo 1.27. La ecuación

$$y = \frac{1}{x^2}$$

tiene como asíntota vertical a la recta $x = 0$ (eje de las Y) y como asíntota horizontal a la recta $y = 0$ (eje de las X) (fig. 1.27).

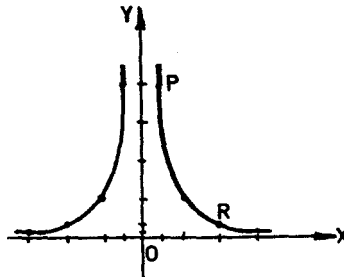


Fig. 1.27

Ejemplo 1.28. La ecuación

$$y = \frac{1}{x + 3} + 1$$

tiene como asíntota vertical a la recta $x = -3$ y como asíntota horizontal a la recta $y = 1$. Esta última se obtiene si se escribe la ecuación en la forma $x = \frac{1}{y - 1} - 3$. Véase la figura 1.28 .

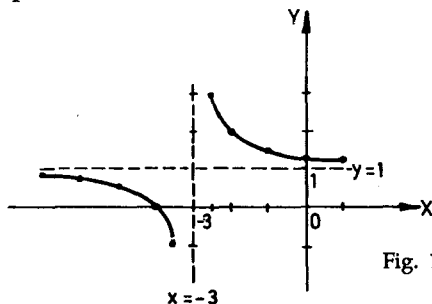


Fig. 1.28

Ejemplo 1.29. La gráfica de la ecuación

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

tiene como asíntotas verticales a las rectas $x = 1$ y $x = -1$ y como asíntota horizontal a la recta $y = 0$. Estas afirmaciones se constatan si en primer lugar se escribe la ecuación como

$$y = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$$

(para las asíntotas verticales) y en la forma $\frac{1}{y} + 1 = x^2$ para la asíntota horizontal. (Fig. 1.29) .

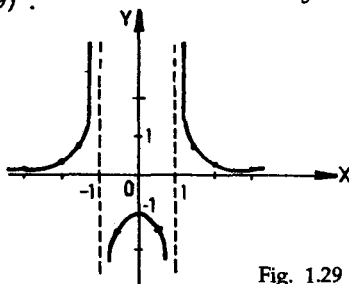


Fig. 1.29

INTERSECCIONES DE GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES

A menudo es importante conocer puntos que están a la vez en dos o más gráficas definidas por ecuaciones; la manera de hallar tales puntos se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.30. Hallar la intersección de las gráficas definidas por las ecuaciones:

$$y + x = 5 \quad \text{y} \quad x - y = 2 .$$

Si existe algún punto de intersección, este deberá satisfacer ambas ecuaciones, de ahí que resolviendo el sistema tendremos el o los puntos de intersección.

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} ,$$

se tiene que $x = 7/2$, $y = 3/2$.

Luego existe un punto de intersección, $P = (7/2, 3/2)$.

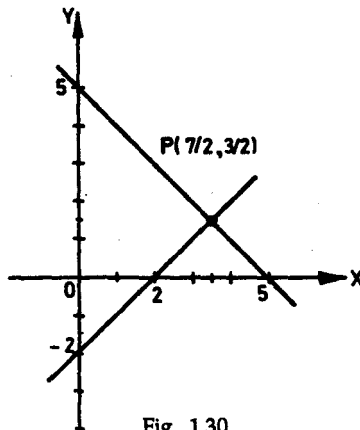


Fig. 1.30

Ejemplo 1.31. Hallar la intersección de las gráficas de

$$x^2 + 2y^2 = 3 \quad \text{y} \quad y = x + 2.$$

Como en el caso anterior, resolvemos el sistema;

$$x^2 + 2y^2 = 3 \quad \text{(a)}$$

$$y - x = 2 \quad \text{(b)}$$

De b) se tiene $y = 2 + x$, valor que reemplazado en a) nos da:
 $x^2 + 2(2 + x)^2 = 3 \quad \text{ó} \quad 3x^2 + 8x + 5 = 0$, de donde

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -5/3.$$

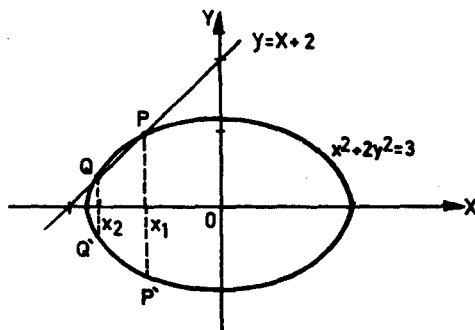


Fig. 1.31

Reemplazando los valores hallados para x en la ecuación b) se tienen los puntos $P = (-1, 1)$ y $Q = (-5/3, 1/3)$ intersección de las gráficas.

Conviene hacer la aclaración siguiente: si el reemplazo de x_1 y x_2 se efectúa en la ecuación a) entonces se obtiene, además de los puntos P y Q , los puntos $P' (-1, -1)$ y $Q' (-5/3, -1/3)$.

Sin embargo estos últimos puntos no están en la intersección pues si bien satisfacen b) en cambio no satisfacen a).

Ejemplo 1.32. Hallar $A \cap B$ donde:

$$A = \{(x, y) / 2x^2 + y^2 = 1\} \quad y$$

$$B = \{(x, y) / x^2 + 2y^2 = 1\}$$

$A \cap B$ tiene por elementos los pares $P(x, y)$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones $2x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + 2y^2 = 1$, es decir el sistema:

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

Sumando la primera ecuación a la segunda multiplicada por -2 , se obtiene: $-3y^2 = -1$ de donde $y = \pm \sqrt{1/3}$ que reemplazado en la primera ecuación da $2x^2 = 2/3$ o $x = \pm \sqrt{1/3}$.

Luego:

$$A \cap B = \{(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}), (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}), (-\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}), (\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3})\}$$

EJERCICIOS 1.2

1. Determinar en que cuadrantes pueden estar los puntos $P(x, y)$ si:

a. $xy = 9$

d. $y = |x| + 1$

b. $x - y = 0$

e. $x^2 = y^2$

c. $xy = -9$

2. Determinar el punto simétrico de:

a) $A(2, 3)$ b) $B(-1, 4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(-1, 1/2)$, respecto de: el origen de coordenadas, el eje X , el eje Y , la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

3. Estudiar la simetría con respecto al eje X , eje Y y del origen, de las siguientes ecuaciones:

a. $y = x^4$

d. $y = \sqrt{5x + 1}$

b. $y^2 = |x|$

e. $xy + y^2 = 7x - 1$

c. $2x^2 + 3y^2 = 1$

4. Determinar el dominio y rango de las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 - y^2 = 0$

b. $y + 2x + 1 = 0$

c. $y = x^2 + 4$

d. $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

e. $yx = 4$

f. $y = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x \end{cases}$

g. $x^2y + 2xy - 1 = 0$

h. $2xy^2 + 2yx = 1$

i. $|x| + |y| = 1$

j. $|x| = 1$

k. $y = -x - |x - 2|$

5. Hallar el rango de las siguientes ecuaciones si el dominio es el que se indica:

a. $y = 2x + 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 5\}$

b. $y = x^2 + 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x\}$

c. $y = x^3$; $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 1\}$

d. $y = |x|$; $D = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 2\}$

e. $xy = 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1\}$

6. Teniendo en cuenta el dominio, rango, simetría respecto del eje X, eje Y y origen, intersecciones con los ejes y asíntotas, representar las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a. $y = -x - 3$

b. $y = 2x^2 + 3$

c. $y + x^3 + 1 = 0$

d. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

e. $x^2 - y^2 = 1$

f. $y = \sqrt{x + 1}$

g. $x + y^2 = 4$

h. $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

i. $y = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

j. $y = \frac{|x| + x}{2}$

- k. $|y| = 2x + 3$
 l. $(x + y)(y - 1) = 0$
 m. $y^2 - x^2y - xy + x^3 = 0$
 n. $x^2 - y^2 = 0$
 o. $x^3 - x^2y - 6xy^2 = 0$
 p. $|x^2 - 4| = y + 4$
 q. $\frac{1}{(y - 1)^2} = x$
- r. $y - 3 = \frac{1}{x^2 - x - 2}$
 s. $y^3 = x^2$
 t. $|y + x| = x$
 u. $(x^2 + 5x - 24)y = x + 8$
 v. $(x - 4)y^2 = x + 3$
 w. $(1 + x^2)y = x$

7. En cada uno de los casos siguientes hallar los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones dadas:

- a. $y = 4x^2$
 $y = 8x$
 b. $y^2 = 4x$
 $x - y = -4$
 c. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 $x + y = 4$
 d. $xy = 1$
 $x + y = 2$
 e. $y^2 + 2xy - 3x^2 + 7 = 0$
 $x - 3y + 1 = 0$
 f. $x^2 + y^2 - 2x = 1$
 $2x + y - 5 = 0$
- g. $3xy + 6x = 4y$
 $2y - 3x - 4 = 0$
 h. $x^2 + y^2 = 1$
 $y = x^2$
 i. $x^2 + y^2 = 1$
 $y = x^3$
 j. $x^2 + y^2 = 4$
 $x^2 - y^2 = 1$
 k. $-x^2 + y^2 = 1$
 $x^2 - y^2 = 1$
 l. $-x^2 + y^2 = 1$
 $2x^2 - y^2 = 5$

GRAFICAS DEFINIDAS POR INECUACIONES

Consideremos ahora el subconjunto de \mathbb{R}^2 , $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 2x + 1\}$, de todos los pares cuya segunda componente es menor que el doble de la primera componente más 1.

Algunos pares que están en B o que satisfacen la inecuación son: $(2, 1)$, $(10, 9)$, $(7, -8)$, $(0, 0.5)$. Para representar la gráfica de la inecuación tracemos la gráfica de $y = 2x + 1$ que corresponde a una recta que

divide al plano en dos partes denominadas semiplanos.

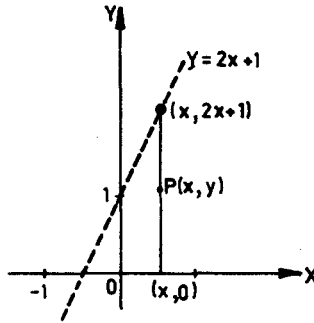


Fig. 1.32

Observemos que para cada valor de x , la parte de la recta paralela al eje Y que pasa por $(x, 0)$ y contenida en el semiplano que está por debajo de $y = 2x + 1$ tiene sus puntos $P(x, y)$ con $y < 2x + 1$.

Esto sucede para cada valor de x , luego el semiplano que está por debajo de la recta $y = 2x + 1$ (sin incluir a ésta) representa a $y < 2x + 1$. (La línea punteada indica que $y = 2x + 1$ no está incluida en la representación).

En general podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.8. La *gráfica de una inecuación en \mathbb{R}^2* se define como el conjunto de todos los pares $P(x, y)$ que satisfacen la inecuación.

Ejemplo 1.33. Representar la gráfica de $x + y > 2$.

La inecuación $x + y > 2$, equivale a la inecuación $y > 2 - x$, si seguimos un proceso análogo al ejemplo anterior se tendrá que la representación de $x + y > 2$ corresponde al semiplano que está por encima de la recta $y = 2 - x$ (sin incluir a ésta).

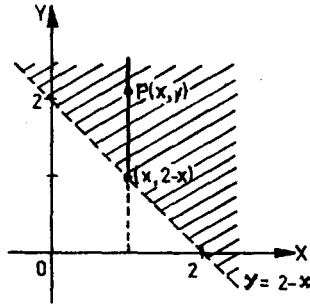


Fig. 1.33

Ejemplo 1.34. Representar la gráfica de $y \leq x^2$.

Los puntos que satisfacen la desigualdad están en la curva y por debajo de la curva (parábola) $y = x^2$.

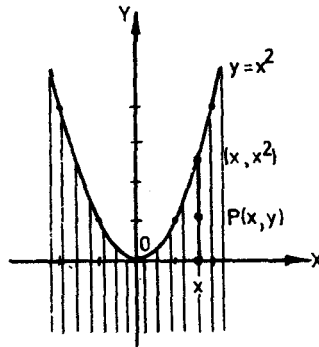


Fig. 1.34

Ejemplo 1.35. Trazar la gráfica de $x^2 + y^2 < 4$.

Todos los puntos que están en la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia), satisfacen la igualdad $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Luego estos puntos distan del centro 2 unidades. Los puntos que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 4$, también satisfacen la desigualdad $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$; por tanto estos puntos distan del centro en menos de dos unidades, luego están dentro del círculo; (fig. 1.35).

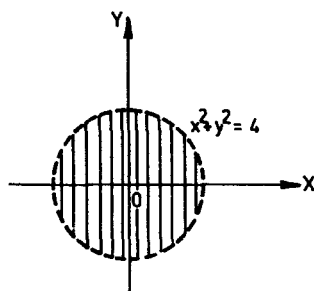


Fig. 1.35

INTERSECCIONES DE GRAFICAS DEFINIDAS POR INECUACIONES

Consideremos ahora regiones del plano definidas por la intersección de gráficas de inecuaciones. Los siguientes ejemplos ilustran regiones de este tipo.

Ejemplo 1.36. Representar gráficamente $A \cap B$, donde:

$$A = \{(x, y) / y < x\} \quad y$$

$$B = \{(x, y) / y > 1 - x\} .$$

Los pares (x, y) que están en la intersección $A \cap B$ satisfacen a la

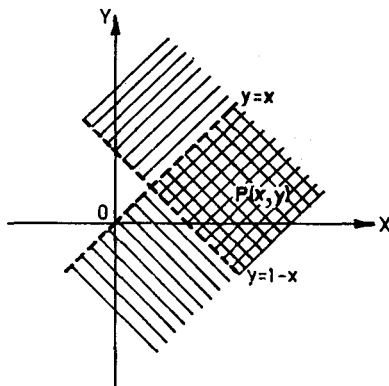


Fig. 1.36

vez las desigualdades: $y < x$ y $y > 1 - x$; tales pares están en el semiplano que está por debajo de la recta $y = x$ y en el semiplano que está por encima de la recta $y = 1 - x$. (En ambos casos los puntos sobre las rectas no pertenecen a los conjuntos considerados).

Ejemplo 1.37. Representar $A \cap B \cap C$, si:

$$A = \{(x, y) / y - x - 1 \geq 0\}$$

$$B = \{(x, y) / y - 5x - 5 \leq 0\}$$

$$C = \{(x, y) / y + x - 5 \leq 0\}$$

La gráfica corresponde a los puntos $P(x, y)$ que satisfacen a la vez las desigualdades:

$$y - x - 1 \geq 0, \quad y - 5x - 5 \leq 0 \quad \text{y} \quad y + x - 5 \leq 0.$$

Dicha región aparece representada en la figura 1.37.

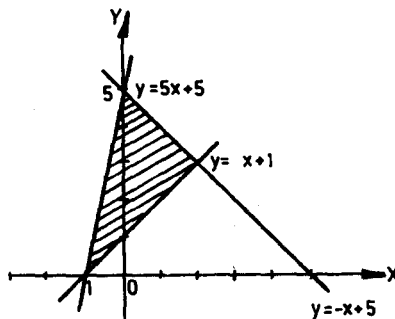


Fig. 1.37

Ejemplo 1.38. Representar gráficamente al conjunto $A \cap B$ donde:

$$A = \{(x, y) / |x| \leq 1/2\}$$

$$B = \{(x, y) / x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\} .$$

Los pares del conjunto A pueden ser caracterizados, en forma equivalente, por la relación $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ó por la relación $-\frac{1}{2} \leq x$ y $x \leq \frac{1}{2}$.

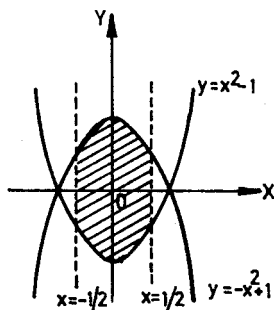


Fig. 1.38

Los pares del conjunto B pueden ser caracterizados por las dos relaciones:

$$x^2 - 1 \leq y \quad \text{y} \quad y \leq -x^2 + 1 .$$

Luego los pares $P(x, y)$ deben satisfacer a la vez las desigualdades $x \leq 1/2$, $-1/2 \leq x$, $x^2 - 1 \leq y$, $y \leq -x^2 + 1$.

La figura 1.38 representa al conjunto $A \cap B$.

Ejemplo 1.39. Representar gráficamente el conjunto de los pares $P(x, y)$ que satisfacen las relaciones:

$$y \leq x \leq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4 .$$

Los pares deben satisfacer las inecuaciones: $y \leq x$ (por debajo o en la recta $y = x$), $x \leq 0$ (a la izquierda o en el eje de ordenadas), $x^2 + y^2 \leq 4$ (interior a la circunferencia o en ella).

La representación gráfica aparece en la figura 1.39.

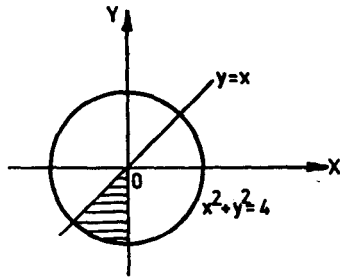


Fig. 1.39

Ejemplo 1.40. Representar gráficamente el conjunto $A = \{(x, y) / |x| + |y| \leq 1\}$.

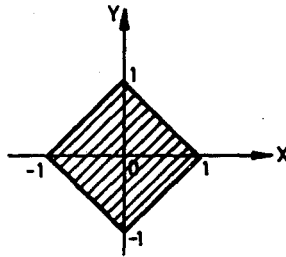


Fig. 1.40

Los pares $P(x, y)$ que están en A satisfacen la relación $|x| + |y| \leq 1$.

Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ la relación se puede escribir como: $x + y \leq 1$. Si $x \leq 0$ e $y \leq 0$ la relación se puede escribir $-x - y \leq 1$. Si $x \leq 0$ e $y \geq 0$, la relación se puede escribir $-x + y \leq 1$. Si $x \geq 0$ e $y \leq 0$, la relación se puede escribir como $x - y \leq 1$. En resumen, los pares deben satisfacer:

- | | | | | | |
|-----------------|----|------------|---|------------|-----------------|
| $x + y \leq 1$ | si | $x \geq 0$ | e | $y \geq 0$ | (I cuadrante) |
| $-x - y \leq 1$ | si | $x \leq 0$ | e | $y \leq 0$ | (III cuadrante) |
| $-x + y \leq 1$ | si | $x \leq 0$ | e | $y \geq 0$ | (II cuadrante) |
| $x - y \leq 1$ | si | $x \geq 0$ | e | $y \leq 0$ | (IV cuadrante) |

La figura 1.40 representa al conjunto A .

1.5. DETERMINACION DE LA ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO

Uno de los más importantes logros de la Geometría Analítica es el haber conseguido la integración del álgebra con la geometría. Esto lo podemos apreciar a través de dos problemas fundamentales que se presentan en el curso:

- (1) Dada una ecuación, trazar en el plano la gráfica que la representa;
- (2) Dadas ciertas condiciones geométricas que deben cumplir los puntos de un lugar geométrico o gráfica, determinar su ecuación.

En las secciones anteriores hemos estudiado el primer problema. En esta sección estudiaremos el segundo.

Aclaremos que la determinación de la ecuación de un lugar geométrico implica la determinación de una ecuación que es satisfecha por todos los puntos que pertenecen al lugar geométrico y que no es satisfecha por los puntos que no están en el lugar geométrico.

No hay ningún método general que se pueda dar para resolver este problema. Sin embargo, puede ser útil en la mayoría de los casos, comenzar con un croquis, hecho en base a las condiciones geométricas que definen al lugar geométrico dado, donde se situará un punto genérico $P(x, y)$ del lugar. Luego se expresarán analíticamente las condiciones geométricas dadas y se tratará de determinar una ecuación que relacione las coordenadas x e y del punto genérico P .

Los ejemplos siguientes aclararán el método.

Ejemplo 1.41. Determinar la ecuación del lugar geométrico o gráfica de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$.

La figura. 1.41 muestra un croquis con los datos.

Según la condición del problema, el punto $P(x, y)$ está situado en el plano de manera que $d(P, A) = d(P, B)$, es decir:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2}$$

elevando al cuadrado: $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2$

Simplificando: $y = x$

Luego la ecuación que cumplen los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y de B es la de la recta $y = x$.

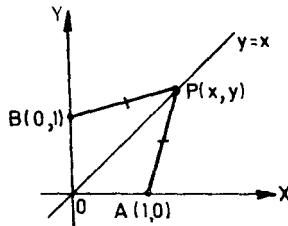


Fig. 1.41

Ejemplo 1.42. Determinar la ecuación de los puntos $P(x, y)$ que distan del origen de coordenadas $O(0, 0)$, 4 unidades.

Por la propiedad descrita se tiene que:

$$d(P, O) = 4 \quad \text{ó} \quad \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 4$$

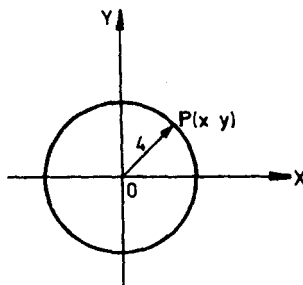


Fig. 1.42

Elevando al cuadrado y simplificando: $x^2 + y^2 = 16$. Ecuación que corresponde a la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4.

Ejemplo 1.43. Un punto $P(x, y)$, se mueve de tal modo que su distancia al eje X es igual a su distancia al punto fijo $F(0, 4)$.

Un punto genérico $P(x, y)$ del lugar geométrico es tal que: $d(P, F) =$ distancia de P al eje X.

La distancia de P al eje X es $|y|$. Luego: $d(P, F) = |y|$ ó $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2} = |y|$.

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene la ecuación que debe cumplir P :

$$y = 1/8 x^2 + 2$$

Ecuación que corresponde a una parábola (figura 1.43)

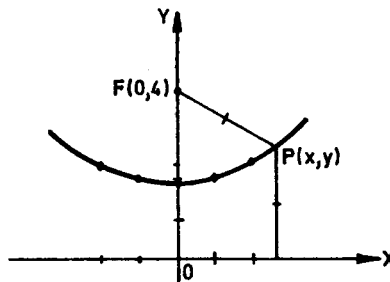


Fig. 1.43

Ejemplo 1.44. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la suma de sus distancias a los puntos $F_1(2, 0)$ y $F_2(-2, 0)$ es siempre igual a 6 .

Un punto $P(x, y)$ con tal propiedad cumple con la siguiente condición:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6$$

$$\text{ó} \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\text{ó} \quad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2 ;$$

ecuación que se puede escribir como:

$$36 + 8x = 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando se tiene:

$$9y^2 + 5x^2 = 45$$

$$\text{ó} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Ejemplo 1.45. Un segmento \overline{AB} se mueve de tal modo que su extremo A se encuentra siempre en el semieje positivo de las X , mientras que el extremo B se encuentra siempre en el semieje positivo de las Y . Hallar el lugar geométrico del punto medio $P(x, y)$ del segmento \overline{AB} , sabiendo que el triángulo AOB que forma el segmento con los ejes tiene siempre área igual a 8 unidades.

Como $P(x, y)$ es punto medio del segmento \overline{AB} se tiene que las

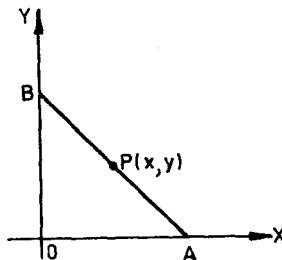


Fig. 1.44

coordenadas de A son: $A = (2x, 0)$ y las de $B = (0, 2y)$. Luego, como el área del triángulo AOB es 8 se tiene la ecuación:

$$\frac{(2x)(2y)}{2} = 8 \quad \text{con} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

$$\text{ó} \quad y = \frac{8}{2x} \quad \text{con} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

Ejemplo 1.46. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje X es igual a la menor distancia de P a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Hallar la ecuación del lugar geométrico generado por P .

La distancia de $P(x, y)$ al eje X es $|y|$. La menor distancia de P a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es: $|\sqrt{x^2 + y^2} - 1|$.

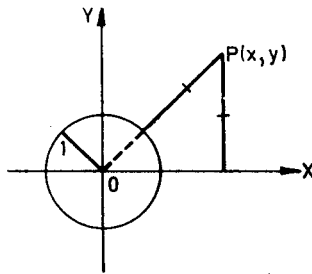


Fig. 1.45

Luego P cumple con la igualdad:

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - 1| = |y|$$

la cual es equivalente a:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = y \quad \text{ó} \quad \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = -y$$

Luego: $P(x, y)$ cumple con:

$$x^2 + y^2 = (y + 1)^2 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = (-y + 1)^2$$

Equivalentemente $P(x, y)$ cumple con:

$$x^2 = 2y + 1 \quad \text{o con:} \quad x^2 = -2y + 1.$$

Se recomienda al lector dibujar el lugar geométrico utilizando las ecuaciones halladas y comprobar que una parte del lugar geométrico está en el interior de la circunferencia.

EJERCICIOS 1.3

A) Gráficas definidas por inecuaciones.

1.— Representar las gráficas definidas por las inecuaciones siguientes:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| a) $y \leq 2x + 1$ | h) $y \geq -3$ | o) $xy \leq 1$ |
| b) $y \geq 2x + 1$ | i) $ y \leq 5$ | |
| c) $y \leq x^3$ | j) $y - x^4 \geq 0$ | p) $y^2 \geq \frac{1}{x}$ |
| d) $ x \leq 2$ | k) $y > x - 1$ | |
| e) $ x \geq 2$ | l) $y > x + 2 $ | |
| f) $x^2 + y^2 \leq 16$ | m) $ x + y \geq 1$ | |
| g) $ x + y \leq 1$ | n) $(x - 4)y^2 > x + 3$ | |

2.— Representar $A \cap B$ donde A y B se dan en cada caso.

- a) $A = \{(x, y) / 2x + y - 3 \geq 0\}$
 $B = \{(x, y) / x - 2y + 1 \leq 0\}$
- b) $A = \{(x, y) / 0 < y \leq x\}$
 $B = \{(x, y) / y > |x| - 1\}$
- c) $A = \{(x, y) / |x| \geq 1\}$
 $B = \{(x, y) / |y| \geq 1\}$
- d) $A = \{(x, y) / |x| < |y|\}$
 $B = \{(x, y) / 1 < |x|\}$
- e) $A = \{(x, y) / y \geq x^2\}$
 $B = \{(x, y) / y \leq 2\}$

3.— Representar $A \cap B \cap C$ donde A , B , y C se dan en cada caso.

- a) $A = \{(x, y) / y \geq x\}$
 $B = \{(x, y) / y \geq -x\}$
 $C = \{(x, y) / y \leq 4\}$

e Y y forma con ellos un triángulo de área constante e igual a 12 unidades.

11.—Un triángulo ABC tiene dos vértices fijos $A(0, 0)$ y $B(2, 0)$ y el tercer vértice describe la curva cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M intersección de las medianas.

12.—Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que divide al segmento \overline{AB} , con extremos en los semiejes positivos de X e Y y que forma con ellos un triángulo de área igual a $49/2$, en la razón

$$\frac{d(A, P)}{d(A, B)} = \frac{3}{7}$$

13.—Hallar la ecuación del lugar geométrico determinado por los puntos de intersección de las familias de rectas

$$y = m(x + 2) \quad \text{e} \quad y = \frac{3}{m}(x - 2), \quad \text{para todo valor de } m \neq 0.$$

14.—Sea \overline{AP} un segmento de 9 unidades de longitud y B un punto del segmento que dista 4 unidades de A . El segmento \overline{AP} se desplaza de manera que los puntos A y B se encuentran siempre en los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por P .

15.—Un punto se mueve en el primer cuadrante de manera que su distancia al eje Y es proporcional al tiempo y su distancia al eje X , proporcional al cuadrado del tiempo. Determinar la ecuación de la trayectoria que describe el punto sabiendo que parte del origen y que en algún instante pasa por $(3, 4)$.

16.—Una recta móvil corta a los ejes coordenados determinando con ellos triángulos de área igual a 5 unidades de superficie. Determinar el lugar geométrico descrito por el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la recta móvil.

17.—Un segmento de recta de longitud constante igual a 6 unidades se mueve de modo que sus extremos siempre están en los ejes

coordenados. Determinar la ecuación del lugar geométrico generado por el pie de la perpendicular trazada desde el origen al segmento dado.

- 18.— $A (4, 0)$ y $B (-4, 0)$ son dos de los vértices de un triángulo ABP cuyo tercer vértice $P (x, y)$ se mueve de manera que siempre la suma de los ángulos del triángulo en A y B es 135° . Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por el vértice P al moverse éste en el primer y segundo cuadrante.
- 19.—Dos de los vértices de un triángulo son $A (1, 0)$ y $B (5, 0)$ y los ángulos interiores correspondientes a estos vértices miden 2α y α respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico generado por el tercer vértice.
- 20.—Hallar una ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de longitud 12 cuyos extremos se apoyan siempre en los ejes coordenados.
21. Un triángulo tiene dos vértices en $(0, 0)$, $(4, 0)$ y el tercero varía en la recta $y = 4$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del ortocentro del triángulo.

Capítulo 2

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

2.1. PENDIENTE DE UNA RECTA

A continuación desarrollaremos conceptos que permiten expresar, mediante un número, la inclinación de una recta cualquiera respecto del eje X.

Definición 2.1. Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ con $x_2 \neq x_1$ se define la *pendiente de la línea recta que pasa por P_1 y P_2* como el número:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Obsérvese que como $x_2 \neq x_1$, las rectas que se consideren no pueden ser verticales (perpendiculares al eje X).

Así, la recta que pasa por los puntos $P_1(1, 2)$ y $P_2(3, 4)$, tiene pendiente:

$$m = \frac{4 - 2}{3 - 1} = 1 ;$$

La recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 3)$ y $P_2(3, -2)$, tiene pendiente:

$$m = \frac{-2 - 3}{3 - (-1)} = -5/4 .$$

La recta que pasa por los puntos $P_1 (5, 4)$ y $P_2 (7, 4)$, tiene pendiente:

$$m = \frac{4 - 4}{7 - 5} = 0.$$

Esta última recta es paralela al eje X. En general toda recta paralela al eje X tiene pendiente 0.

Parecería que la pendiente de una recta varía de acuerdo a los puntos P_1 y P_2 que se tomen, pero esto no sucede. En efecto, tomemos dos puntos $P'_1 (x'_1, y'_1)$ y $P'_2 (x'_2, y'_2)$, diferentes a P_1 y P_2 en la recta L , que pasa por $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$.

Llamemos con m' al número que se obtiene como pendiente al tomar P'_1 y P'_2 y probemos que $m = m'$. Tomando los triángulos rectángulos $P'_1 AP'_2$ y $P_1 BP_2$ (fig. 2.1), se tiene por semejanza que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

Es decir: $m = m'$.

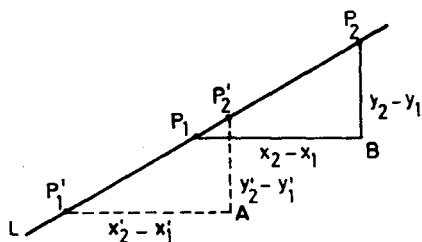


Fig. 2.1

Geoméricamente la pendiente de una recta representa a la tangente del ángulo que forma la recta L con el eje X (fig. 2.2), puesto que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

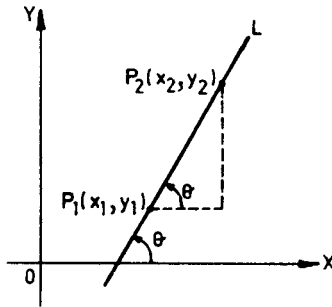


Fig. 2.2

Con fines prácticos obsérvese que:

a) Si la pendiente de una recta es positiva y si la abscisa de un punto crece ($x_2 > x_1$) entonces la ordenada del mismo punto también crece ($y_2 > y_1$). Una recta con esta particularidad se muestra en la figura 2.3.

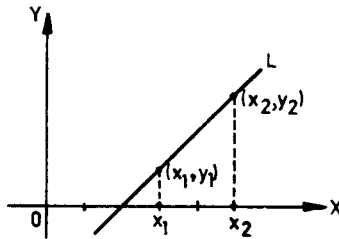


Fig. 2.3

b) Si la pendiente de una recta es negativa y si la abscisa de un punto crece ($x_2 > x_1$), entonces la ordenada decrece ($y_2 < y_1$). La gráfica en este caso debe ser como la de la figura 2.4.

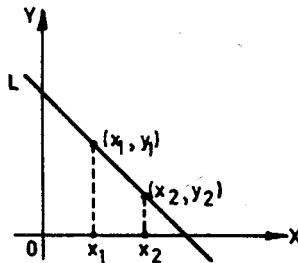


Fig. 2.4

Ejemplo 2.1. Encontrar la inclinación con respecto al eje X de la recta que pasa por P_1 y P_2 donde:

- a) $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 3)$
- b) $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (3, -3)$
- c) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \sqrt{3})$

a) La pendiente de la recta en este caso es

$$m = \frac{3 - 1}{3 - 1} = 1.$$

Luego el ángulo θ de inclinación de la recta con respecto al eje X tiene tangente igual a 1. Es decir: $\operatorname{tg} \theta = 1$. De aquí resulta: $\theta = 45^\circ$.

b) La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-3 - 1}{3 - (-1)} = -1.$$

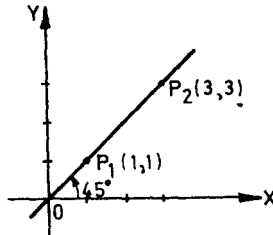


Fig. 2.5

Luego el ángulo θ de inclinación de la recta con respecto al eje X tiene tangente igual a -1 . Esto es: $\operatorname{tg} \theta = -1$. Luego $\theta = 135^\circ$.

c) La tangente del ángulo de inclinación en este caso es

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Luego $\theta = 60^\circ$.

2.2 LA LINEA RECTA

En la sección 2.1 se definió el concepto de pendiente de una recta determinada por los puntos $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$ como el

número real $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$, y se estableció que este número

m no depende del par particular de puntos elegidos en la recta para calcularlo. Con ésta observación podremos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1. La línea recta L que pasa por el punto $P_1 (x_1, y_1)$ con pendiente m tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m (x - x_1) . \quad (2.1)$$

Primero debemos demostrar que si $P (x, y)$ es un punto cualquiera de la recta L , entonces las coordenadas de P satisfacen la ecuación.

Supongamos $P = P_1$. Es evidente que las coordenadas de P_1 satisfacen a la ecuación (2.1) desde que

$$y_1 - y_1 = m (x_1 - x_1) \quad \text{ó} \quad 0 = 0$$

Si consideramos el caso $P \neq P_1$, entonces desde que existe m , la recta L no es vertical y por lo tanto $x \neq x_1$ ó $x - x_1 \neq 0$, y

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando por $x - x_1 \neq 0$ ambos miembros se obtiene

$$y - y_1 = m (x - x_1) .$$

Esto prueba que las coordenadas de cualquier punto sobre la recta satisfacen la ecuación (2.1), incluyendo las coordenadas del punto P_1 .

Para que la demostración sea completa, debemos además demostrar que todo punto $P(x', y')$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2.1) está realmente sobre la recta L . Es decir, debemos estar seguros de que no existen puntos de la gráfica de $y - y_1 = m(x - x_1)$ que no están sobre la recta L .

Sea $P'(x', y')$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2.1). Entonces: $y' - y_1 = m(x' - x_1)$ y si $x' = x_1$ entonces también $y' = y_1$ o sea, $P' = P_1$ y P' está sobre L .

Si $x' \neq x_1$, entonces $x' - x_1 \neq 0$ y podemos dividir por $x' - x_1$ quedando $m = \frac{y' - y_1}{x' - x_1}$.

Esto prueba que P' está sobre la recta que pasa por P_1 con pendiente m , es decir P' está sobre L . Esto completa la demostración.

La ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se llama la ecuación de una recta en la *forma de punto y pendiente*.

Ejemplo 2.2 Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(-2, 5)$ con pendiente $-3/4$.

Por el teorema anterior la ecuación es $y - 5 = -3/4(x + 2)$ ó $3x + 4y - 14 = 0$.

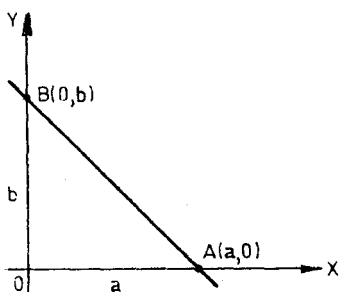


Fig. 2.6

Toda recta L no vertical interseca a los ejes coordenados en los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$. Los números a y b se denominan *abscisa y ordenada en el origen*, respectivamente.

La ecuación de la recta que pasa por $B(0, b)$ con pendiente m será: $y - b = m(x - 0)$ ó $y = mx + b$. Esta forma de la ecuación de la recta se llama *forma de pendiente y ordenada en el origen*.

Si una recta L es vertical (paralela al eje Y), corta al eje de abscisas X en algún punto tal como el punto $(a, 0)$ (fig. 2.7); cualquier punto de abscisa $x = a$ está en L , no importando cual sea su ordenada. Así, los puntos $(a, 1)$, $(a, 5/2)$, $(a, -3)$ están sobre L . Recíprocamente si un punto está sobre la recta L , entonces su abscisa será a . De esta manera, la ecuación $x = a$ es la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$.

En forma similar se puede probar que: la ecuación $y = b$ es la ecuación de la recta horizontal (paralela al eje X) que pasa por el punto $(0, b)$ (fig. 2.8).

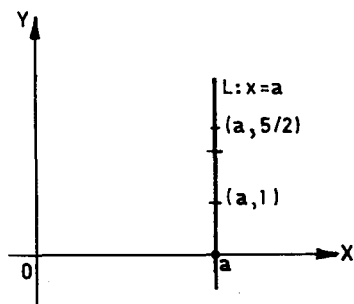


Fig. 2.7

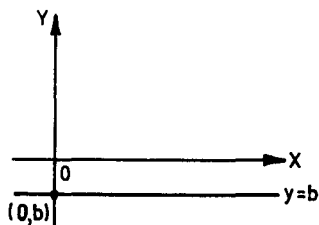


Fig. 2.8

Problema: Determinar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Si $x_1 = x_2$ entonces la recta que pasa por P_1 y P_2 es vertical y su ecuación es $x = x_1$.

Si $x_1 \neq x_2$ entonces la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P_2 es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y utilizando la ecuación de una recta en su forma de punto y pendiente se tiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) .$$

Ejemplo 2.3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 (4, 6)$ y $P_2 (-1, 3)$.

Utilizando la ecuación de una recta que pasa por dos puntos se obtiene:

$$y - 6 = \frac{3 - 6}{-1 - 4} (x - 4) \quad \text{ó}$$

$$3x - 5y + 18 = 0 .$$

Problema: Hallar la ecuación de la recta con abscisa en el origen $a \neq 0$ y ordenada en el origen $b \neq 0$. (fig. 2.6).

La recta pasa por los puntos $A (a, 0)$ y $B (0, b)$, por lo tanto su pendiente es:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = - \frac{b}{a} .$$

La forma pendiente y ordenada en el origen nos permite establecer la ecuación de la recta:

$$y = \frac{-b}{a} x + b \quad \text{o en forma equivalente:} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 .$$

Esta forma de la ecuación de una recta se denomina *forma intersección*.

Ejemplo 2.4. Determinar la ecuación de una recta con abscisa en el origen 2 y que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área 6 unidades.

La ecuación de la recta en su forma intersección es

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{b} = 1.$$

El área del triángulo BOA (fig. 2.6) es

$$\frac{ab}{2} = \frac{2b}{2} = b = 6.$$

Luego la ecuación de la recta buscada es

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{ó} \quad 3x + y - 6 = 0.$$

Ejemplo 2.5. Un punto dista 5 unidades del origen y la pendiente de la recta que lo une con el punto $A(3, 4)$ es $1/2$. Determinar sus coordenadas.

Sea $P(x, y)$ el punto buscado. Entonces

$$\frac{y - 4}{x - 3} = 1/2 \quad \text{ó} \quad x = 2y - 5. \quad (1)$$

Como $P(x, y)$ dista 5 unidades del origen, entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2): elevando (1) al cuadrado: $x^2 = 4y^2 - 20y + 25$; de (2): $x^2 = 25 - y^2$. Igualando, ordenando y simplificando: $y^2 - 4y = 0$ ó $y(y - 4) = 0$.

Dos soluciones para y : $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Reemplazando estos valores en la ecuación (1) de la recta se obtiene: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

La única solución al problema es el punto $P_1(-5, 0)$ puesto que la otra posible solución $P_2(3, 4)$ coincide con el punto A .

2.3 LINEAS RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Un estudio de las pendientes de dos rectas podrá indicarnos si estas son paralelas o perpendiculares o no poseen estas propiedades.

Teorema 2.2. Dos rectas diferentes son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas y con pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

Primero probaremos que si $m_1 = m_2$ entonces L_1 y L_2 son paralelas.

Supongamos que siendo $m_1 = m_2$, sin embargo L_1 y L_2 no son paralelas. Demostraremos que esta suposición nos lleva a una contradicción. En efecto, como L_1 y L_2 no son paralelas, se cortan en un punto $P_0(x_0, y_0)$ que estará sobre ambas rectas, es decir: $y_0 = m_1x_0 + b_1$ y $y_0 = m_2x_0 + b_2$. De donde $b_1 = b_2$, y por lo tanto L_1 y L_2 tienen las mismas ecuaciones, es decir son iguales, lo que contradice la hipótesis de que L_1 y L_2 son distintas.

Luego la suposición inicial es falsa, y L_1 y L_2 son paralelas.

Nos queda por probar que si L_1 y L_2 son paralelas entonces $m_1 = m_2$.

$$\begin{aligned} \text{Sean: } L_1 &: y = m_1x + b_1 \\ L_2 &: y = m_2x + b_2. \end{aligned}$$

Supongamos $m_1 \neq m_2$ y probemos que esto conduce a que L_1 y L_2 tienen un punto de intersección y por lo tanto no son paralelas. En efecto, calculemos las coordenadas del punto de intersección: $m_1x + b_1 = m_2x + b_2$, de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad \text{y reemplazando en } L_1 : \\ y &= \frac{m_1(b_2 - b_1)}{m_1 - m_2} + b_1 = \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

(ambos valores existen pues se supone que $m_1 \neq m_2$). Luego el punto de intersección es:

$$P_0 = \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \right)$$

Esto es una contradicción pues L_1 y L_2 son paralelas diferentes.

Ejemplo 2.6. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 6$ con ordenada en el origen -4 .

Comparando la ecuación de la recta $y = -2x + 6$ con la forma pendiente y ordenada en el origen: $y = mx + b$ se observa que para esta recta, $m = -2$ y $b = 6$.

Se estableció en el teorema 2.2 que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, luego la recta buscada tiene también pendiente -2 . Siendo su ordenada en el origen -4 , su ecuación es: $y = -2x - 4$ ó $2x + y + 4 = 0$.

Ejemplo 2.7. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 6$ que pasa por el punto $P_1 (-1, -1)$.

Por ser la recta buscada paralela a la recta $y = -2x + 6$ entonces su pendiente es -2 . Como además pasa por $P_1 (-1, -1)$, la ecuación de una recta en su forma punto-pendiente nos da: $y + 1 = -2(x + 1)$ ó $2x + y + 3 = 0$.

Teorema 2.3. Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 .

Sean:

$$\begin{aligned} L_1 & : y = m_1 x + b_1 \\ L_2 & : y = m_2 x + b_2 . \end{aligned}$$

Supongamos L_1 y L_2 perpendiculares. Tracemos por el origen dos rectas l_1 y l_2 paralelas a L_1 y L_2 respectivamente (fig. 2.9).

Las ecuaciones de l_1 y l_2 son: $y = m_1 x$, e $y = m_2 x$, respectivamente.

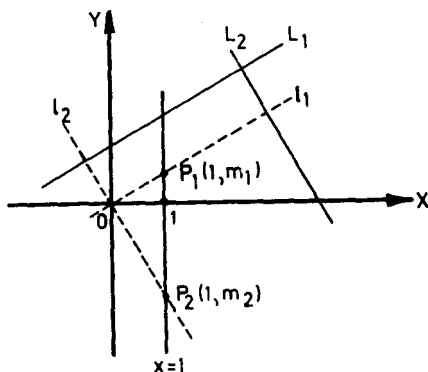


Fig. 2.9

Tracemos la recta $x = 1$ que corta a l_1 y l_2 en los puntos $P_1(1, m_1)$ y $P_2(1, m_2)$ respectivamente. El triángulo P_1OP_2 es rectángulo, luego el teorema de Pitágoras permite establecer:

$$[d(0, P_1)]^2 + [d(0, P_2)]^2 = [d(P_1, P_2)]^2 ; \text{ es decir:}$$

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$$

$$m_1m_2 = -1.$$

Para probar la segunda parte, supongamos que $m_1m_2 = -1$. Invertiendo los pasos de la demostración de la primera parte, se llega a probar que:

$$[d(0, P_1)]^2 + [d(0, P_2)]^2 = [d(P_1, P_2)]^2 .$$

De aquí se deduce que l_1 y l_2 son perpendiculares y por lo tanto también lo son L_1 y L_2 .

Ejemplo 2.8. Encontrar la ecuación de la recta L_1 que contiene al punto $(-1, -3)$ y es perpendicular a la recta L_2 de ecuación $4x + 8y + 5 = 0$.

La pendiente m_2 , de L_2 , es $-1/2$. Por el teorema 2.3 la pendiente m_1 de L_1 debe cumplir $m_1m_2 = -1$; luego $m_1 = 2$. La ecuación de L_1 se

determina utilizando la fórmula punto pendiente:

$$\begin{aligned}y + 3 &= 2(x + 1) && \text{ó} \\2x - y - 1 &= 0\end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.1

- 1.—Encontrar en cada caso la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente indicada y trazar la gráfica respectiva.
 - a) $(3, -2)$, $3/4$
 - b) $(10, -1)$, $\sqrt{3}$
- 2.—Encontrar en cada caso la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:
 - a) $(-1, 2)$, $(3, 4)$
 - b) $(0, 0)$, $(5, -3)$
 - c) $(\sqrt{2}, -18)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
- 3.—Sea el triángulo ABC de vértices $A(-1, 1)$, $B(6, 2)$, $C(2, 5)$. Determinar:
 - a) La ecuación del lado \overline{AB} ;
 - b) La mediana de A al lado \overline{BC} ;
 - c) La altura bajada de A al lado \overline{BC} ;
 - d) La ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a \overline{AC} ;
 - e) La ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a \overline{AB} ;
 - f) El punto de intersección de las rectas de los acápites d) y e).
- 4.—Las ecuaciones de dos de los lados de un paralelogramo son $2x - 3y + 7 = 0$ y $4x + y = 21$. Si uno de sus vértices es $(-1, -3)$, encontrar los otros vértices.
- 5.—Determinar el valor de k en la ecuación: $2x + 3y + k = 0$, de manera que esta recta forme con los ejes coordenados un triángulo de 27 unidades de área.
- 6.—Determinar el valor de m para el cual la recta $y = mx + m$ pasa por el punto $(-1/2, 3)$.

- 7.—Determinar la ecuación de la recta que contiene el segmento de longitud menor que une el origen con un punto de la recta de ecuación $2y - 4x = 9$.
- 8.— Dado un triángulo cualquiera probar que el punto P intersección de las medianas (baricentro) divide a la mediana \overline{VM} en la razón 2, siendo V uno de los vértices y M el punto medio del lado opuesto a V .
- 9.— Hallar las coordenadas del vértice C del triángulo ABC sabiendo que $A = (-3, 5)$, $B = (8, -7)$ y que las coordenadas del baricentro del triángulo son $(4, -2)$.
- 10.—Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y que interseca a las rectas: $x - y = 3$, $y = 2x + 4$ en A y B , respectivamente de tal manera que el origen es punto medio de \overline{AB} .
- 11.—Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de la recta de pendiente igual a 1 y de ordenada en el origen k , con la recta de pendiente k y ordenada en el origen 0, a medida que k toma todos los valores reales posibles.

2.4. ECUACION GENERAL DE LA LINEA RECTA

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ donde por lo menos uno de los números reales A ó B es diferente de cero, se llama *ecuación lineal general* en las variables x e y ó *ecuación lineal de primer grado* en x e y .

Teorema 2.4. Toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación lineal de primer grado en x e y .

Hemos visto que si una recta es no-vertical, entonces su ecuación puede tomar la forma: $y = mx + b$ ó $mx - y + b = 0$. Es decir, es una ecuación lineal en x e y donde $A = m$, $B = -1$ y $C = b$. Si la recta es vertical entonces su ecuación es $x = a$, que es también de la forma:

$Ax + By + C = 0$, donde $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

Por último, si la recta es horizontal, su ecuación es $y = b$, ecuación lineal con $A = 0$, $B = 1$ y $C = -b$.

Teorema 2.5. La gráfica de una ecuación lineal de primer grado en x e y , $Ax + By + C = 0$ con A ó B diferentes de cero, es una línea recta.

Si $B \neq 0$, podemos escribir la ecuación $Ax + By + C = 0$ en la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

que es la ecuación de una recta con pendiente $m = -\frac{A}{B}$

y ordenada en el origen $b = -\frac{C}{B}$

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la ecuación lineal puede escribirse

$x = -\frac{C}{A}$, que es la ecuación de una recta vertical.

Los dos teoremas últimos nos permiten reconocer cualquier ecuación de primer grado en dos variables como la ecuación de una línea recta.

2.5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Consideremos las ecuaciones de dos rectas no paralelas a los ejes coordenados, en su forma general:

$$L : Ax + By + C = 0$$

$$L' : A'x + B'y + C' = 0$$

Las pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B} \quad \text{para la recta } L, \text{ y}$$

$$m' = -\frac{A'}{B'}, \quad b' = -\frac{C'}{B'} \quad \text{para } L'.$$

Si las rectas son paralelas, entonces $m = m'$, o sea

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \quad \text{ó también} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Si las rectas L y L' son coincidentes, entonces además se tendrá que $b = b'$, es decir

$$-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'} \quad \text{o sea} \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Por tanto, si L y L' son coincidentes se tiene que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Si las rectas dadas son perpendiculares, entonces se cumple la relación $mm' = -1$ entre sus pendientes. Es decir

$$\left(\frac{-A}{B}\right) \left(\frac{-A'}{B'}\right) = -1 \quad \text{ó} \quad AA' + BB' = 0.$$

Por último para que las rectas L y L' se corten en un solo punto, será necesario y suficiente que no sean paralelas, es decir:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{ó} \quad AB' - A'B \neq 0.$$

Los recíprocos de los resultados anteriores son todos evidentes. Podemos entonces enunciar el teorema siguiente:

Teorema 2.6. Si las ecuaciones de dos rectas no paralelas a los ejes coordenados son:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 & \text{y} \\ A'x + B'y + C' &= 0. \end{aligned}$$

entonces las rectas:

- a) Son coincidentes si y sólo si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
- b) Son paralelas si y sólo si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ó $AB' - A'B = 0$
- c) Son perpendiculares si y sólo si $AA' + BB' = 0$
- d) Se cortan en un solo punto si y sólo si $AB' - A'B \neq 0$ ó $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Ejemplo 2.9. Determinar los coeficientes A y B en la ecuación de la recta:

$$Ax + By + 4 = 0,$$

de manera que pase por la intersección de las rectas $3x - 4y - 6 = 0$, $x + y - 9 = 0$ y sea perpendicular a la recta $2y + x - 36 = 0$.

Para determinar el punto de intersección, resolvemos simultáneamente el sistema:

$$3x - 4y - 6 = 0$$

$$x + y - 9 = 0,$$

obteniendo como solución $x = 6$, $y = 3$. Es decir, $P(6, 3)$ es un punto de paso de la recta $Ax + By + 4 = 0$, por tanto $6A + 3B + 4 = 0$. (1)

Como la recta es además perpendicular a $2y + x - 36 = 0$, entonces debe verificarse $AA' + BB' = 0$, o sea $A + 2B = 0$. (2)

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $A = -8/9$, $B = 4/9$.

Ejemplo 2.10. Determinar la distancia de punto $P(1, 4)$ a la recta L de ecuación $3x + 2y = 6$.

Si L_1 es la recta que pasa por P y es perpendicular a L , y P_1 es el punto de intersección de L y L_1 , entonces la distancia buscada es $d(P, P_1)$. (fig. 2.10).

Siendo $m = -3/2$ la pendiente de L , la pendiente de L_1 es $m_1 = 2/3$. La ecuación de L_1 es $y - 4 = 2/3 (x - 1)$, ó $3y - 2x = 10$. Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ 3y - 2x &= 10 \end{aligned}$$

encontramos las coordenadas del punto $P_1 = (-2/13, 42/13)$.

La distancia pedida es:

$$d(P, P_1) = \sqrt{(1 + 2/13)^2 + (4 - 42/13)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

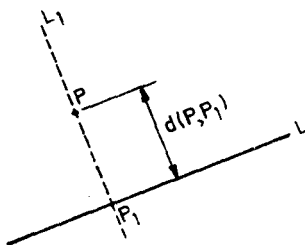


Fig. 2.10

2.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

En el ejemplo último se vio un método que permite calcular la distancia de un punto del plano a una recta dada. Sin embargo, debido a la frecuencia con que es necesario determinar esa distancia, es preferible encontrar una fórmula que nos permita resolver el problema con menor dificultad.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto del plano y $L: Ax + By + C = 0$ una recta no-vertical dada. Sea S el pie de la perpendicular bajada de P_1 a L . la longitud del segmento $\overline{P_1S}$ se denomina *distancia del punto P_1 a la recta L* .

La recta vertical que pasa por P_1 corta a L en un punto Q y al eje de abscisas en un punto R . Si llamamos θ al ángulo SP_1Q del triángulo rectángulo QSP_1 , entonces la distancia por calcular es $d(P_1, S) = d(P_1, Q) \cos \theta$. (fig. 2.11) (1)

Las coordenadas del punto Q son (x_1, y_0) y por estar Q en la recta L se tiene:

$$Ax_1 + By_0 + C = 0, \text{ ó también } y_0 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B},$$

Luego:

$$\begin{aligned} d(P_1, Q) &= |y_1 - y_0| = \left| y_1 - \left(\frac{-Ax_1 - C}{B} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \end{aligned} \quad (2)$$

Si llamamos α al ángulo que forma L con la parte positiva del eje de las abscisas, entonces si $\alpha < 90^\circ$ se tiene $\theta = \alpha$, y $\text{tg } \theta = \text{tg } \alpha = m$; si $\alpha > 90^\circ$ entonces $\theta = 180^\circ - \alpha$, y $\text{tg } \theta = \text{tg } (180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -m$.

Además, en cualquier caso, siempre $0 \leq \theta < 90^\circ$ y por tanto $\cos \theta$ es siempre positivo.

Como la pendiente de la recta L es

$$m = -\frac{A}{B}$$

entonces $\text{tg } \theta = \pm \frac{A}{B},$

y el $\cos \theta$ podemos calcularlo por la fórmula

$$\cos \theta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

La condición $\cos \theta > 0$ exige que el signo del radical se escoja siempre igual al signo de B . Reemplazando (2) y (3) en la ecuación (1):

$$d(P_1, S) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \left(\frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right),$$

donde el signo del radical se escoge igual al de B .

Si sólo nos interesa el valor absoluto de la distancia entonces podemos simplificar la expresión anterior y escribir finalmente:

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

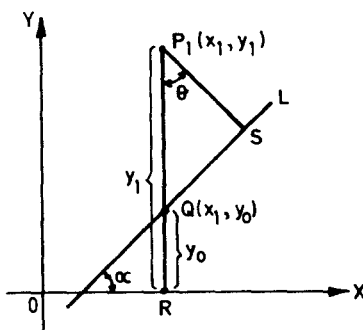


Fig. 2.11

En algunos problemas interesa considerar un signo para la distancia, denominándose entonces *distancia relativa*. Por convención, le haremos corresponder a la distancia relativa el signo que resulta al calcularla por la expresión $d(P_1, S) = (y_1 - y_0) \cos \theta$. Es decir el signo es el mismo que el de la diferencia $y_1 - y_0$ (puesto que $\cos \theta$ es positivo). En este caso, la fórmula de la distancia relativa es:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde el signo debe tomarse igual al signo de B para estar de acuerdo con la convención señalada.

Para terminar, observemos que el signo de la distancia relativa nos indica la posición relativa del punto P_1 con respecto a la recta L . En efecto, si Q es el punto de intersección de la recta L con la recta vertical que pasa por P_1 , entonces la distancia es positiva si P_1 está por encima de Q (puesto que en este caso $y_1 > y_0$) y negativa si P_1 está por debajo de Q , ($y_1 < y_0$).

Es decir, la distancia relativa es positiva o negativa según el punto P_1 esté arriba o debajo de la recta L , respectivamente.

Las posibles posiciones de P_1 , respecto de la recta L , según sea su inclinación, se presentan en la figura 2.12.

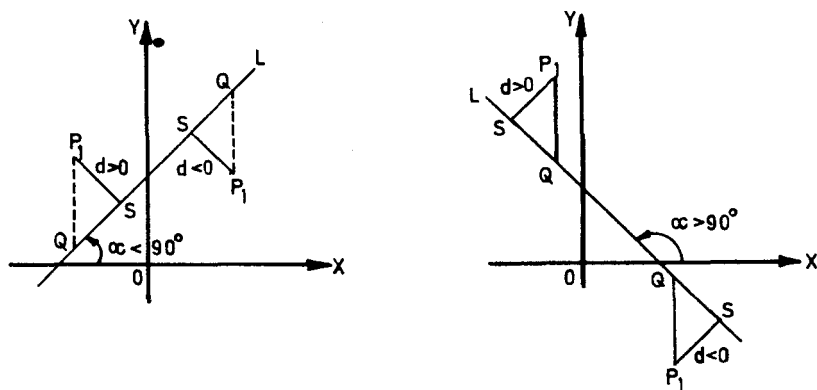


Fig. 2.12

Ejemplo 2.11. Determinar la distancia entre las rectas paralelas $L: 2x - 3y + 6 = 0$, y $L_1: 2x - 3y - 12 = 0$.

Consideremos un punto de L , por ejemplo su ordenada en el origen: $B = (0, 2)$. La distancia entre L y L_1 es igual a la distancia del punto $B(0, 2)$ a la recta L_1 . Si d es esta distancia, entonces:

$$d = \frac{|(-3)(2) - 12|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}.$$

Ejemplo 2.12. Los vértices de un triángulo son $A(-3, 1)$, $B(5, -1)$, y $C(6, 5)$. Determinar la longitud de la altura bajada del vértice C al lado \overline{AB} .

La ecuación de la recta que contiene al lado \overline{AB} es:

$$x + 4y - 1 = 0$$

La longitud buscada es igual a la distancia de C a la recta $x + 4y - 1 = 0$:

$$d = \frac{|6 + (4)(5) - 1|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{25}{\sqrt{17}} .$$

Problema: Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas $x + y + 4 = 0$, $7x - y + 4 = 0$.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Luego, si $P(x, y)$ es un punto en la bisectriz del ángulo formado por:

$$x + y + 4 = 0, \quad 7x - y + 4 = 0, \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{|x + y + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|7x - y + 4|}{\sqrt{49 + 1}}, \quad \text{es decir, hay 2 soluciones:}$$

$$\frac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = \frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}} \quad \text{y} \quad \frac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = - \frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}}$$

Simplificando y ordenando: $x - 3y - 8 = 0$, $3x + y + 6 = 0$. La primera ecuación corresponde a la bisectriz del ángulo obtuso y la segunda a la del ángulo agudo.

2.7 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Estableceremos en esta sección, una relación que permita expresar la tangente del ángulo α que forman dos rectas L_1 y L_2 en función de las pendientes respectivas.

Primero definiremos lo que vamos a considerar como el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2 .

El ángulo que L_1 forma con L_2 es el ángulo α no mayor de 180° medido en el sentido contrario al de las agujas de un reloj desde L_2 hasta L_1 .

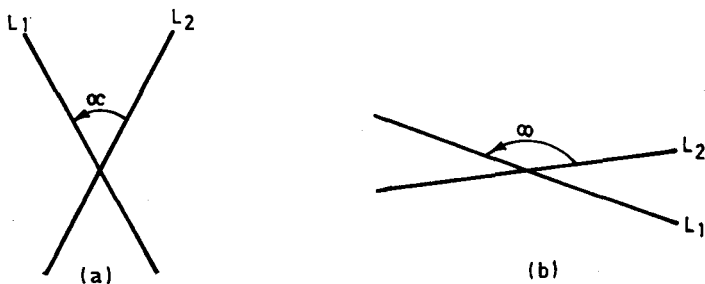


Fig. 2.13

En las figuras 2.13 a) y b) se muestra en cada caso, el ángulo que L_1 forma con L_2 .

Sean L_1 y L_2 rectas con pendiente m_1 y m_2 respectivamente. Si α es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 entonces:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

si $m_1 m_2 \neq -1$, esto es si L_1 y L_2 no son perpendiculares.

En efecto, si θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 respectivamente, entonces (fig. 2.14):

$\theta_1 = \theta_2 + \alpha$, de donde $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ y tomando tangentes:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

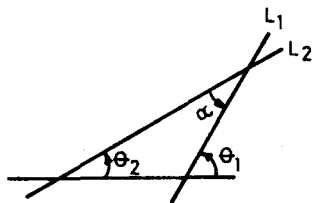


Fig. 2.14

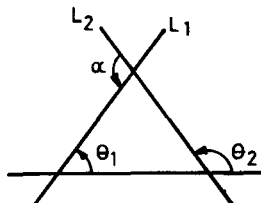


Fig. 2.15

En la figura 2.15 se tiene:

$\theta_2 = \theta_1 + (180^\circ - \alpha)$, de donde $\alpha = 180^\circ + (\theta_1 - \theta_2)$, y

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [180^\circ + (\theta_1 - \theta_2)] = \operatorname{tg} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} .$$

Ejemplo 2.13. Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-1, -4)$, $B(1, 4)$ y $C(5, 1)$.

Llamemos L_1 a la recta que contiene al lado \overline{AC} , L_2 a la que contiene al lado \overline{BC} y L_3 a la que contiene a \overline{AB} . Entonces las pendientes de L_1 , L_2 y L_3 son respectivamente:

$$m_1 = \frac{1 + 4}{5 + 1} = \frac{5}{6} ,$$

$$m_2 = \frac{4 - 1}{1 - 5} = -\frac{3}{4} ,$$

$$m_3 = \frac{4 + 4}{1 + 1} = \frac{8}{2} = 4 .$$

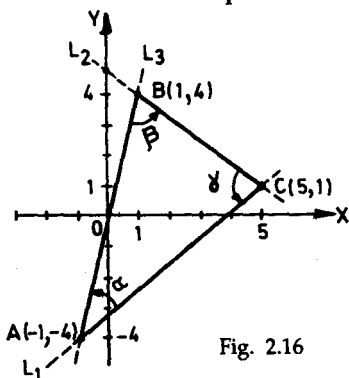


Fig. 2.16

El ángulo interior α , formado por las rectas L_3 y L_1 (en ese orden), se calcula por la fórmula deducida en el acápite anterior:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1} = \frac{4 - 5/6}{1 + 20/6} = \frac{19}{26} = 0.731 .$$

Análogamente para los ángulos β (formado por L_2 y L_3) y γ (formado por L_1 y L_2).

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{-3/4 - 4}{1 - 3} = \frac{19}{8} = 2.375$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{5/6 + 3/4}{1 - 15/24} = \frac{38}{9} = 4.222$$

En las tablas de valores naturales encontramos los ángulos buscados: $\alpha = 36^\circ 09'$, $\beta = 67^\circ 10'$ y $\gamma = 76^\circ 41'$.

EJERCICIOS 2.2

1.— Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas:

a) $x - 3y + 4 = 0$

b) $2x + 5y - 2 = 0$

2.— Determinar, analizando los coeficientes de los siguientes pares de ecuaciones, cuales representan rectas que coinciden, son paralelas o se cortan en un punto:

a) $6x + 2y + 5 = 0$

$x + 3y + 5 = 0$

c) $2x + 2/3y = 2/3$

$3x + y = -1$

b) $x - y - 6 = 0$

$x + y - 6 = 0$

d) $8x - 2y = 2$

$2x - 1/2y = 1/2$

3.— Hallar el valor de a para que la recta: $ax + (a - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

4.— Determinar los valores de a_1 y a_2 para que las dos ecuaciones: $a_1x - 7y + 18 = 0$, $8x - a_2y + 9a_1 = 0$ representen la misma recta.

5.— Determinar si existe algún punto perteneciente a la recta que pasa por los puntos: $A(1/2, -1)$ y $B(7, 11/2)$, tal que su abscisa sea igual a su ordenada.

6. Hallar la ecuación de una recta con ordenada en el origen igual a -4 y perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-10, 1)$, $B(4, -6)$.

7. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(9, 6)$ y corta a las rectas: $2x - 3y + 6 = 0$, $y - 4 = 0$ en los puntos B y C respectivamente, de tal manera que:

$$\frac{d(B, A)}{d(A, C)} = \frac{2}{3}$$

- 8.— Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-5/12$ y forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de perímetro 15 unidades.
- 9.— Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $8x + 15y - 10 = 0$, y que se encuentran a una distancia igual a 2 unidades del punto $A (2, 1)$.
- 10.— Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados se encuentran sobre las rectas $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$ y $6x - 7y - 16 = 0$.
- 11.— La recta que pasa por $A (2, 6)$ y $C (5, -2)$ es tangente en el punto A , a una circunferencia que pasa por el punto $B (3, 9)$. Determinar el centro de la circunferencia.
- 12.— Las rectas $y = (1/2)x$, $y = 2x$ son cortadas en los puntos M_1 y M_2 respectivamente, por una recta que se mueve manteniéndose paralela siempre al eje de abscisas. Determinar el lugar geométrico del punto de intersección de las perpendiculares en M_1 y M_2 a las rectas $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, respectivamente.
- 13.— Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ y dista del punto $P (4, 1)$ una distancia igual a $\sqrt{5}$.
- 14.— La recta L pasa por el punto $A (9, 6)$ y corta a las rectas $2x - 3y + 6 = 0$, $y - 4 = 0$ en los puntos B y C respectivamente.

Encontrar la pendiente de L si $\frac{d(B, A)}{d(B, C)} = \frac{2}{5}$.

- 15.— La recta L : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

forma con los semiejes coordenados positivos un triángulo de área igual a 4 unidades. Hallar $a + b$ sabiendo que la recta L y la recta $y = 2x$ forman un ángulo cuya tangente es 2.

- 16.— Sea $A (2, 0)$ y $B (3, 3)$ la base de un triángulo. Hallar el vértice C sabiendo que está en el primer cuadrante, que el área del trián-

gulo ABC es 5 unidades de superficie y que la recta que une C con el origen forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

17.—La recta L se mueve en el plano de tal modo que el ángulo que forma con el eje X es 60° . Si A y B son los puntos donde L corta a los ejes X e Y , hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de \overline{AB} .

18.—Encontrar el valor de a de manera que las ecuaciones siguientes representen a dos rectas paralelas pero no coincidentes:

$$ax + (a - 1)y - 2(a + 2) = 0$$

$$3ax - (3a + 1)y - (5a + 4) = 0.$$

19.—Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $3x + 2y - 1 = 0$.

20.—Determinar las coordenadas del punto en el primer cuadrante que equidista de los puntos $(4, 1)$ y $(-1, -2)$ y dista 3 unidades de la recta $12y - 5x + 30 = 0$.

Capítulo 3

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

En este capítulo presentaremos en primer término, algunos lugares geométricos definidos por propiedades específicas y que representan gráficas de ecuaciones de segundo grado con dos variables.

En la segunda parte veremos como las ecuaciones de los lugares geométricos tratados anteriormente pueden ser deducidas partiendo de una propiedad común a todas ellas. Esta propiedad común permitirá establecer la llamada definición general de las cónicas.

Al final del capítulo daremos razones que justifican la denominación de secciones cónicas a los lugares geométricos de ecuaciones de segundo grado con dos variables.

3.1 LA CIRCUNFERENCIA

Definiremos a una *circunferencia* como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo denominado *centro* de la circunferencia.

La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se llama *radio*.

Si $P(x, y)$ es un punto genérico de una circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r , entonces por la definición de circunferencia se tiene: $d(P, C) = r$, es decir:

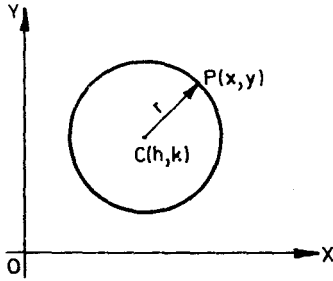


Fig. 3.1

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r, \quad \text{ó} \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (3.1)$$

Si la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas, entonces $h = 0$ y $k = 0$; y la ecuación (3.1) se reduce a la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 3.1. La ecuación de la circunferencia con centro en $(-1/2, 4)$ y radio $\sqrt{3}$ es:

$$(x + 1/2)^2 + (y - 4)^2 = 3$$

Si desarrollamos y ordenamos la ecuación (3.1), obtenemos la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Ecuación que tiene la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.2)$$

y se denomina ecuación general de una circunferencia.

Luego, toda ecuación de una circunferencia será de la forma de la ecuación (3.2). Recíprocamente, dada una ecuación de la forma (3.2), podemos completar cuadrados en ella y escribirla bajo la forma:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (D^2 + E^2 - 4F)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (3.1): $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, observamos que toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representará una circunferencia de centro

$$\left(h = -\frac{D}{2}, k = -\frac{E}{2}\right)$$

y radio

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F},$$

siempre que se cumpla la condición $D^2 + E^2 - 4F > 0$

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces $r = 0$, y la circunferencia se reduce a un punto, el centro.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, entonces r es imaginario y se dice que la ecuación representa a una circunferencia imaginaria.

Ejemplo 3.2. Determinar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 9 = 0$$

Llevemos la ecuación dada a la forma (3.1). Dividiendo entre 4:

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + \frac{9}{4} = 0,$$

completando cuadrados:

$$(x - 3/2)^2 - \frac{9}{4} + (y + 2)^2 - 4 + \frac{9}{4} = 0$$

simplificando:

$$(x - 3/2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Por tanto:

$$C (3/2, -2) \quad y \quad r = 2$$

La ecuación ordinaria (3.1) o la ecuación general (3.2) de una circunferencia contienen 3 constantes arbitrarias, por tanto es necesario, en general, imponer 3 condiciones geométricas para definir su ecuación.

Ejemplo 3.3. Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A (4, 6)$, $B (-2, -2)$ y $C (-4, 2)$

Solución 1. Los 3 puntos dados siempre que no estén sobre una misma recta, determinan 3 condiciones geométricas que permiten definir a la circunferencia. Reemplazando las coordenadas de cada punto en la ecuación general de una circunferencia, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se obtienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas o constantes arbitrarias D , E y F :

$$4D + 6E + F = -52$$

$$-2D - 2E + F = -8$$

$$-4D + 2E + F = -20$$

Resolviendo el sistema se encuentran los valores: $D = -2$, $E = -4$, $F = -20$. La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Esta primera solución se ha determinado siguiendo un método estrictamente algebraico.

Solución 2: Dados 3 puntos en un plano se puede trazar la circunferencia que pasa por ellos determinando el centro de la circunfe-

rencia, que se encuentra en la intersección de las mediatrices de los segmentos determinados por los 3 puntos dados. El radio es igual a la longitud del segmento que une al centro con uno cualquiera de los puntos dados.

Así, la pendiente de la recta que pasa por C y A es $1/2$ y el punto medio del segmento \overline{CA} es $(0, 4)$. La pendiente de la mediatriz es -2 y $(0, 4)$ un punto de paso, luego: $y + 2x - 4 = 0$ es su ecuación.

Análogamente podemos determinar que la ecuación de la mediatriz del segmento CD es: $2y - x - 3 = 0$.

El punto de intersección de las mediatrices nos determina el centro O de la circunferencia ($h = 1, k = 2$). El radio $r = d(A, O) = 5$, y aplicando (3.1), la ecuación buscada es:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 .$$

Ejemplo 3.4. Una circunferencia de radio $r = 1$ es tangente a las rectas $3x - 4y = 0$ y $4x - 3y = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que su centro está en el primer cuadrante.

Usando los datos del problema se presenta un croquis en la figura 3.2. Hay 4 circunferencias tangentes a las rectas dadas, pero la que tiene su centro en el primer cuadrante será aquella cuyo centro esté sobre la bisectriz del ángulo agudo formado por las tangentes. La ecuación de esta bisectriz es:

$$-\frac{4x - 3y}{-\sqrt{25}} = \frac{3x - 4y}{-\sqrt{25}}$$

ó

$$y = x.$$

Luego, si $C(h, k)$ es el centro, entonces $h = k$ (1)

La distancia de $C(h, k)$ a la recta $4x - 3y = 0$, (ó a la recta $3x - 4y = 0$) es 1, luego

$$-\frac{4h - 3k}{-\sqrt{25}} = 1 \tag{2}$$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $h = 5$ y $k = 5$.

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 1$ ó en su forma general $x^2 - 10x + y^2 - 10y + 49 = 0$.

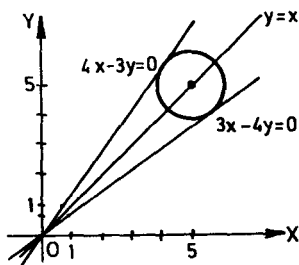


Fig. 3.2

Ejemplo 3.5. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a esta circunferencia en el punto $(6, 7)$.

La pendiente de la recta que pasa por $C(4, 3)$ y el punto de tangencia $(6, 7)$ es:

$$m = \frac{7 - 3}{6 - 4} = 2 \quad ,$$

la pendiente de la tangente es $-1/2$ y su ecuación:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 6), \quad \text{ó} \quad x + 2y - 20 = 0.$$

3.2 LA PARABOLA

La *parábola* se define como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo (*el foco*) y de una recta fija (*la directriz*). La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es un eje de simetría de la curva y se denomina *eje de la parábola*. El punto de intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

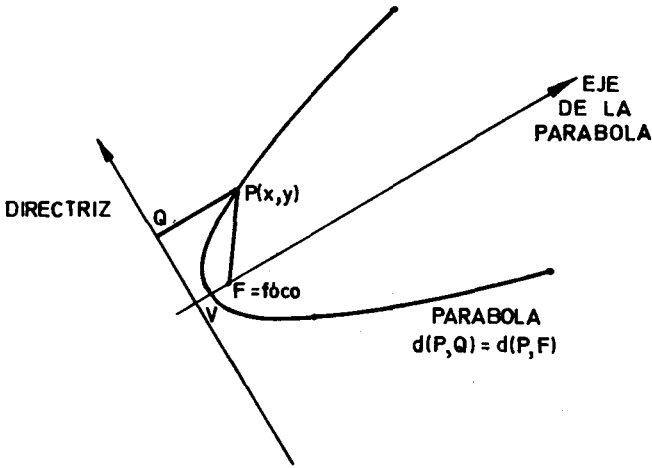


Fig. 3.3

ECUACION DE UNA PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Veremos que en el caso de que una parábola tenga su vértice en el origen y su eje coincida con uno de los ejes coordenados entonces su ecuación toma la forma más sencilla, conocida como *forma canónica*.

Sea $F(0, p)$ el foco e $y = -p$ la directriz de una parábola de eje confundido con el eje de ordenadas. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola y Q el punto de intersección de la perpendicular a la directriz, que pasa por P . Las coordenadas de Q son $(x, -p)$. Por definición de parábola: $d(P, F) = d(P, Q)$, es decir:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

Efectuando operaciones y simplificando:

$$x^2 = 4py \quad (3.3)$$

El vértice de la parábola está en el origen y su eje es el eje Y, eje de simetría de la curva.

Si la parábola tiene por foco $F(p, 0)$ y directriz $x = -p$, entonces en forma análoga se puede deducir que su ecuación es:

$$y^2 = 4px \tag{3.4}$$

Su vértice está en el origen y su eje es el eje de abscisas.

En las ecuaciones (3.3) y (3.4), el valor absoluto de la constante p es igual a la distancia del foco al origen o la distancia de la directriz al origen.

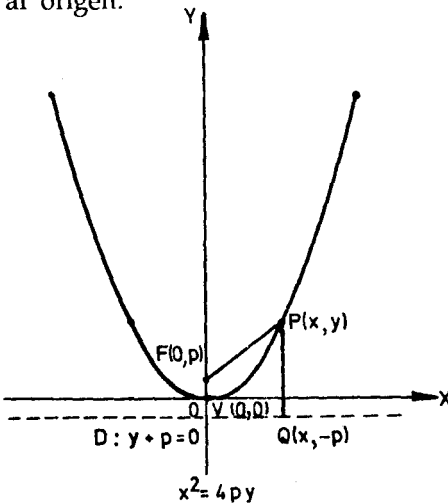
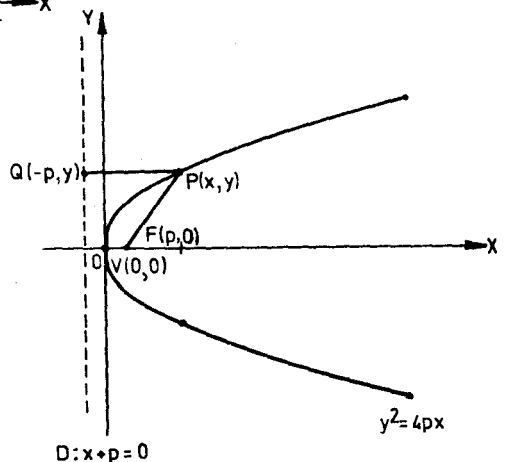


Fig. 3.4



Si analizamos los posibles valores de p en la ecuación $x^2 = 4py$, vemos que si:

$p > 0$, entonces sólo podemos tomar valores de $y \geq 0$. Además, conforme el valor de y crece, el valor de x también crecerá. Luego el lugar geométrico de (3.3) es una curva abierta que se extiende, en el semi-plano superior, hacia arriba indefinidamente;

$p < 0$, entonces $y \leq 0$ y la curva se extenderá indefinidamente hacia abajo permaneciendo siempre en el semi-plano inferior.

Ejemplo 3.6. Hallar la ecuación de la parábola con foco $(0, 4)$ y directriz $y + 4 = 0$

El eje será el eje de ordenadas y el vértice el origen. Su ecuación será de la forma: $x^2 = 4py$, donde $p =$ ordenada del foco $= 4$.

La ecuación es $x^2 = 16y$.

Ejemplo 3.7. Una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje coincide con el eje Y , pasa por el punto $(6, -3)$. Determinar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

La ecuación será de la forma $x^2 = 4py$.

El punto $(6, -3)$ satisface la ecuación, luego $36 = 4p(-3)$, de donde $p = -3$.

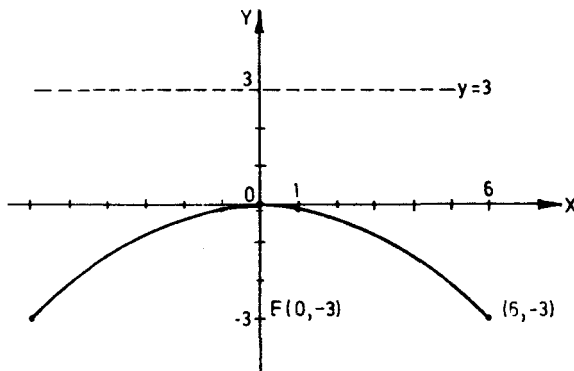


Fig. 3.5

La ecuación de la parábola es $x^2 = -12y$, las coordenadas del foco $F(0, p) = (0, -3)$ y la ecuación de la directriz $y = -p = 3$. (Fig. 3.5).

Si en la ecuación $y^2 = 4px$, se tiene:

$p > 0$, la ecuación se extiende hacia la derecha del eje de ordenadas y hacia arriba y abajo del eje de abscisas;

$p < 0$, la curva se extiende hacia la izquierda del eje de ordenadas y hacia arriba y abajo del eje de abscisas.

ECUACION DE UNA PARABOLA DE VERTICE V (h, k) Y EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS .

Sea $F(x_0, y_0)$ el foco e $y = l$ la ecuación de la directriz de una parábola de eje vertical. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces:

$$d(P, F) = d(P, Q)$$

donde Q tiene coordenadas (x, l) . Luego:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |y - l| ,$$

y elevando al cuadrado: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - l)^2$.

Si expresamos x_0, y_0 y l en función de las coordenadas del vértice $V(h, k)$ y de la distancia del vértice al foco o a la directriz, que como anteriormente llamaremos p , se tiene:

$$x_0 = h , \quad y_0 = k + p , \quad l = k - p .$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$(x - h)^2 + [(y - k) - p]^2 = [(y - k) + p]^2$$

Efectuando y simplificando: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, (3.5)

ecuación que corresponde a una parábola de vértice en (h, k) y eje paralelo al eje de ordenadas. El foco tiene coordenadas $(h, k + p)$ y la ecuación de la directriz es: $y = k - p$.

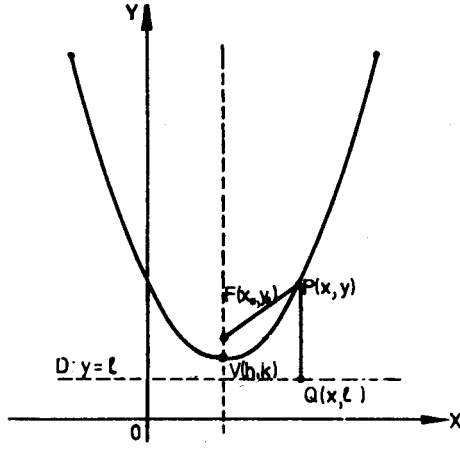


Fig. 3.6

La ecuación (3.5) se puede escribir en la forma:

$$x - h = \pm \sqrt{4p(y - k)} .$$

Entonces:

- si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba de la recta $y = k$, y
- si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo de la recta $y = k$.

Ejemplo 3.8. Determinar la ecuación de la parábola de vértice en $V(-2, -3)$, eje paralelo al eje de ordenadas y que pasa por el punto $P(0, -5)$.

La ecuación será de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. En este problema $h = -2, k = -3$, luego: $(x + 2)^2 = 4p(y + 3)$. Además el punto $P(0, -5)$ pertenece a la parábola, por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$$(2)^2 = 4p(-5 + 3) : \text{ de donde } p = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la parábola es:

$$(x + 2)^2 = -2(y + 3), \text{ ó desarrollando:}$$

$$x^2 + 4x + 2y + 10 = 0$$

Las coordenadas del foco son: $x_0 = h = -2$, $y_0 = k + p = -3 - 1/2 = -7/2$

La ecuación de la directriz es $y = k - p = -3 + 1/2 = -5/2$
(fig. 3.7).

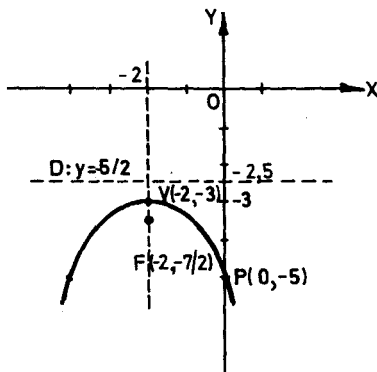


Fig. 3.7

Utilizando un procedimiento análogo al seguido para deducir la fórmula (3.5), podemos encontrar que la ecuación de una parábola de vértice $V(h, k)$ y eje paralelo al eje de abscisas es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{3.6}$$

Siendo $|p|$ la distancia entre el foco y el vértice.

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha de la recta $x = h$, si $p < 0$, se abrirá hacia la izquierda.

El foco estará en $F(h + p, k)$ y la ecuación de la directriz es $x = h - p$.

Ejemplo 3.9. Demostrar que la ecuación $y^2 - 4y - 4x - 4 = 0$ representa una parábola y hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz.

Completando cuadrados en la ecuación $y^2 - 4y - 4x - 4 = 0$, se obtiene: $(y - 2)^2 = 4(x + 2)$.

Ecuación de la forma (3.6) que corresponde a una parábola de eje paralelo al eje X , con valor de $p = 1$ y coordenadas del vértice $(-2, 2)$. Las coordenadas del foco son: $(h + p, k) = (-1, 2)$, y la ecuación de la directriz: $x = h - p = -2 - 1 = -3$.

ECUACION GENERAL DE UNA PARABOLA DE EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Desarrollando y ordenando las ecuaciones (3.5) y (3.6), se obtienen ecuaciones de las formas:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad y$$

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{respectivamente.}$$

La primera de estas ecuaciones, es la ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje Y .

Si $E = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas al eje Y , dos rectas coincidentes paralelas al eje Y ó ningún lugar geométrico, según las raíces de la ecuación $x^2 + Dx + F = 0$ sean reales distintas, reales iguales o complejas, respectivamente.

La segunda ecuación, es la ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje de abscisas. Si $D = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas al eje X , dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico.

trico, según las raíces de la ecuación $y^2 + Ey + F = 0$ sean raíces reales distintas, reales iguales o complejas, respectivamente.

Podemos generalizar lo anterior diciendo que la ecuación de toda parábola de eje paralelo a uno de los ejes coordenados es de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde: $A = 0, (D \neq 0)$ ó $C = 0, (E \neq 0)$.

Recíprocamente, una ecuación de segundo grado del tipo anterior, donde $A = 0, (D \neq 0)$, ó $C = 0, (E \neq 0)$, tiene por gráfica una parábola de eje paralelo a uno de los ejes coordenados.

En efecto, supongamos $A = 0$ pero D y C distintos de cero en la ecuación de segundo grado con dos variables $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Completando cuadrados se obtendrá la ecuación:

$$\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = - \frac{D}{C} \left(x + \frac{4CF - E^2}{4CD} \right)$$

que es de la forma (3.6) y que representa a una parábola de eje paralelo al eje de abscisas.

En forma análoga se procede para el caso $C = 0$.

Ejemplo 3.10. Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola: $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$ en el punto de contacto $(-6, 3)$.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto de tangencia $(-6, 3)$ es:

$$y - 3 = m(x + 6) \quad \text{ó} \quad y - mx - 6m - 3 = 0.$$

Debemos encontrar el valor de m de manera que la intersección de la recta $y - mx - 6m - 3 = 0$ y la parábola sea un solo punto. Despejando x de la ecuación de la recta:

$$x = \frac{y - 6m - 3}{m}, \quad m \neq 0,$$

y reemplazando en la ecuación de la parábola se tiene:

$$y^2 + 4 \left(\frac{y - 6m - 3}{m} \right) + 2y + 9 = 0$$

Efectuando operaciones y ordenando: $my^2 + (4 + 2m)y - (15m + 12) = 0$.

Esta ecuación debe tener dos raíces iguales (para obtener un sólo punto de intersección), luego el discriminante de esta ecuación de segundo grado en y , debe ser cero:

$$(4 + 2m)^2 + 4m(15m + 12) = 0.$$

Desarrollando: $4m^2 + 4m + 1 = 0$ ó $(2m + 1)^2 = 0$.

Es decir $m = -1/2$. La ecuación de la tangente es:

$$y + \frac{1}{2}x - 6 \left(-\frac{1}{2} \right) - 3 = 0 \quad ,$$

$$y + \frac{1}{2}x = 0 \quad \text{ó} \quad 2y + x = 0 \quad ;$$

Para $m = 0$ se encuentra la recta $y = 3$, paralela al eje de la parábola y que también la corta en un solo punto, $(-6, 3)$, pero no es tangente.

Ejemplo 3.11. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo eje principal es paralelo al eje Y y pasa por los puntos $P_1(1, 1)$, $P_2(-2, -11)$, $P_3(3, -1)$.

La ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje Y es de la forma:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Esta ecuación tiene 3 coeficientes por determinar, pero los 3 puntos de paso permiten establecer las condiciones para su determinación.

Reemplazando las coordenadas de $P_1 (1, 1)$, $P_2 (-2, -11)$ y $P_3 (3, -1)$, se obtienen las ecuaciones:

$$1 + D + E + F = 0$$

$$4 - 2D - 11E + F = 0$$

$$9 + 3D - E + F = 0$$

Resolviendo el sistema: $D = -3$, $E = 1$, $F = 1$.

La ecuación es: $x^2 - 3x + y + 1 = 0$, ó completando cuadrados:

$$(x - 3/2)^2 = - (y - 5/4) ,$$

ecuación que corresponde a una parábola con vértice en $V (3/2, 5/4)$ y $p = -1/4$.

EJERCICIOS 3.1

- 1.— Determinar las coordenadas del centro y el radio de cada una de las circunferencias.
 - a) $2x^2 + 2y^2 = 4x + y$
 - b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 6$
- 2.— Determinar la ecuación de la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:
 - a) El diámetro de la circunferencia es el segmento que une los puntos $(-2, 5)$ y $(6, -1)$.
 - b) El centro de la circunferencia está en el eje de abscisas y pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(7, 5)$.
 - c) El radio es 10 y pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(6, 2)$.
- 3.— Determinar la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ que biseca la cuerda cuya ecuación es: $3y + x - 6 = 0$.
- 4.— Determinar la ecuación del lugar geométrico generado por un punto que se mueve de manera que su distancia al punto $(2, -1)$ es 5 veces su distancia a la recta $4x + 3y + 1 = 0$.

- 5.— Establecer la ecuación de una circunferencia tangente al eje de abscisas en el punto $(10, 0)$ y a otra circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 58 = 0$.
- 6.— Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las rectas concurrentes: $7x - y - 5 = 0$; $x + y + 13 = 0$ y que pasan por el punto $(1, 2)$.
- 7.— Determinar la ecuación de las siguientes parábolas:
- Vértice $(0, 0)$, foco $(0, -3)$
 - Foco $(0, 0)$, vértice $(0, -3)$
 - Foco $(3, 2)$, directriz $y = 4$
 - Eje $y = 3$ y los puntos $(6, -1)$ y $(3, 1)$ están en la parábola.
- 8.— Determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz en cada una de las parábolas siguientes:
- $x^2 = 12y$
 - $y^2 = -14x$
 - $5y^2 = 2x$
 - $y + 6x^2 = 0$
 - $2x^2 + 3y = 0$.
- 9.— Determinar las coordenadas del vértice y del foco y las ecuaciones de la directriz y del eje de las parábolas:
- $x^2 + 4x - 6y - 2 = 0$.
 - $y^2 + x + 6y + 6 = 0$.
- 10.— Determinar la ecuación de la parábola de foco $(0, -1)$ y directriz $y - x - 2 = 0$.
- 11.— Encontrar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$, trazadas desde el punto $(-4, 1)$.
- 12.— Un triángulo equilátero inscrito en la parábola de ecuación $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$, tiene uno de sus vértices coincidente con el vértice de la parábola.
Determinar las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.
- 13.— Demostrar que la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $y_1y = 2p(x + x_1)$.
- 14.— Hallar en la parábola $y^2 = 64x$ el punto P más próximo a la recta $4x + 3y + 86 = 0$ y calcular la distancia del punto P a esta recta.

- 15.—Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $x^2 = 16y$, y es perpendicular a la recta $x + 2y + 3 = 0$.
- 16.—Determinar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de manera tal que la pendiente de la recta que pasa por P y $A(4, 4)$ es siempre menor en una unidad que la pendiente de la recta que pasa por P y $B(2, 2)$.
- 17.—Determinar el área del sector circular que forman las rectas L_1 y L_2 que pasan por el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + x - y - 7/2 = 0$ y con pendientes 2 y $1/3$ respectivamente.
- 18.—Determinar la ecuación de la recta de pendiente positiva, que pasa por el punto $(1, -1)$ y forma la base (lado desigual) de un triángulo isósceles con las rectas $y = 5$, $4x + 3y - 11 = 0$.
- 19.—Hallar la ecuación de una circunferencia tangente a la recta $7x - 24y - 55 = 0$, y cuyo centro es el de la circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$.
- 20.—Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(0, 2)$ y es tangente en el origen a la recta $y + 2x = 0$.

3.3. LA ELIPSE

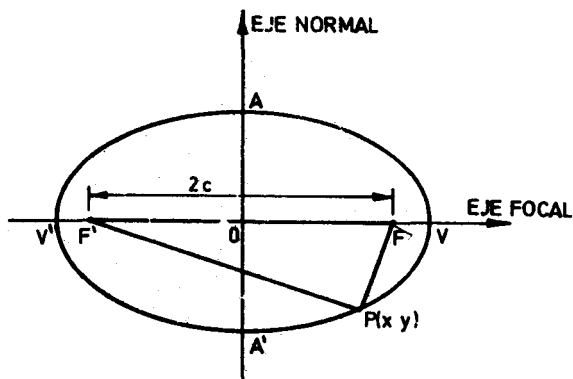
Una *elipse* es un conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los puntos fijos.

Los puntos fijos se denominan *focos* de la elipse.

Si F y F' son los dos focos de una elipse, entonces la distancia entre ellos se llama *distancia focal* y se designa por $2c$.

Al punto medio del segmento $\overline{FF'}$ se le denomina el *centro* de la elipse. La recta determinada por los focos se llama *eje focal*. Este eje focal corta a la elipse en dos puntos V y V' , llamados *vértices*. El segmento que une los vértices V y V' se llama *eje mayor*. Finalmente, se denomina *eje normal*, a la recta que pasa por el centro de la elipse

y es perpendicular al eje focal. El eje normal corta a la elipse en dos puntos A y A' . el segmento AA' se llama *eje menor*.



Elipse:

$$d(P, F) + d(P, F') = \text{cte} > d(F, F')$$

Fig. 3.8

ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos primero el caso de una elipse de centro en el origen de coordenadas y cuyo eje focal coincide con el eje de abscisas. Si designamos por $2c$ a la distancia focal, entonces las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición dada, el punto P debe satisfacer la condición:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a \quad ,$$

donde a es una constante positiva mayor que c .

Esta condición puede expresarse por la ecuación:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (3.6a)$$

con $a > c > 0$.

Pasando el segundo radical al segundo miembro y elevando al cuadrado:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

Simplificando: $cx + a^2 = a \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Elevando al cuadrado nuevamente:

$$c^2 x^2 + 2a^2 cx + a^4 = a^2 [(x + c)^2 + y^2] = a^2 x^2 + 2a^2 xc + a^2 c^2 + a^2 y^2$$

ordenando: $(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$.

Siendo $a^2 > c^2$, se tiene que $a^2 - c^2$ es un número positivo al que llamaremos b^2 , es decir: $b^2 = a^2 - c^2$.

Reemplazando en la ecuación anterior: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Dividiendo por $a^2 b^2$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (3.7)

Ecuación que corresponde a una elipse con centro en el origen y eje focal el eje X.

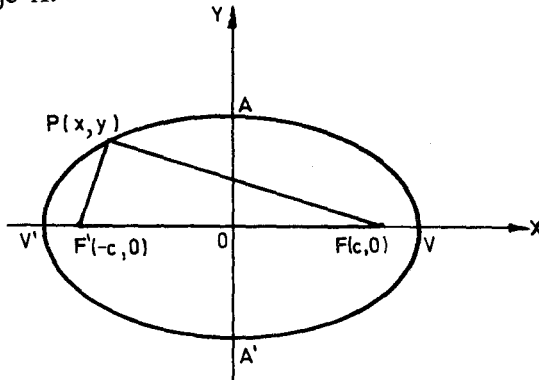


Fig. 3.9

Analicemos la ecuación (3.7). Las intersecciones con el eje X (eje focal) son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, luego por definición, estas son las coordenadas de los vértices V y V' respectivamente.

La distancia entre los vértices es entonces $2a$, es decir, la longitud del eje mayor de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, lo que hace que la longitud del llamado eje menor sea $2b$.

La ecuación (3.7) nos permite asegurar que la elipse es simétrica con respecto al eje X, al eje Y y al origen, o lo que es lo mismo, simétrica con respecto al eje focal, al eje normal y al centro de la elipse.

Si despejamos la variable y de (3.7) obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} ,$$

que nos indica que el dominio de la ecuación es $-a \leq x \leq a$.

Si despejamos x :

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} ,$$

se concluye que el rango es: $-b \leq y \leq b$.

Luego la elipse está limitada por el rectángulo de lados $x = \pm a$ e $y = \pm b$.

Si la elipse tiene su centro en el origen pero su eje focal coincide con el eje de ordenadas entonces los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ y siguiendo el método anterior, se puede determinar que la ecuación correspondiente es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3.8}$$

Las expresiones (3.7) y (3.8) se llaman las formas canónicas de la ecuación de una elipse.

Nota.— Observemos que si la ecuación de una elipse está dada en

sus formas canónicas [ecuaciones (3.7) y (3.8)] , entonces, desde que $a^2 > b^2$, el denominador mayor corresponderá a la variable vinculada al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Ejemplo 3.12. Determinar la ecuación de la elipse de vértices en $V(5, 0)$, $V'(-5, 0)$ y focos en $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$.

El centro es $(0, 0)$, el origen de coordenadas, y su eje focal coincide con el eje X , por tanto la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

El valor de a es igual a la longitud del semieje mayor, es decir, la mitad de la distancia entre V y V' . Luego $a = 5$. El valor de b , semieje menor, lo definimos por $b^2 = a^2 - c^2$, donde c es la mitad de la distancia focal, $d(F, F') = 8$. Por tanto: $b^2 = 25 - 16 = 9$, y $b = 3$.

La ecuación es entonces:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ejemplo 3.13. La ecuación de una elipse es

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Determinar las coordenadas de los focos y vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Según la nota de la parte superior, la ecuación corresponde a una elipse de centro en el origen y eje focal coincidente con el eje Y . La ecuación (3.8) nos indica que $a^2 = 16$ y $b^2 = 8$. Luego: $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 8 = 8$.

Las coordenadas de los vértices son $V = (0, a) = (0, 4)$ y $V' = (0, -a) = (0, -4)$.

Las coordenadas de los focos son: $F = (0, c) = (0, 2\sqrt{2})$ y $F' = (0, -c) = (0, -2\sqrt{2})$.

El eje mayor es $2a = 8$ y el eje menor $2b = 4\sqrt{2}$.

La gráfica está representada en la figura 3.10.

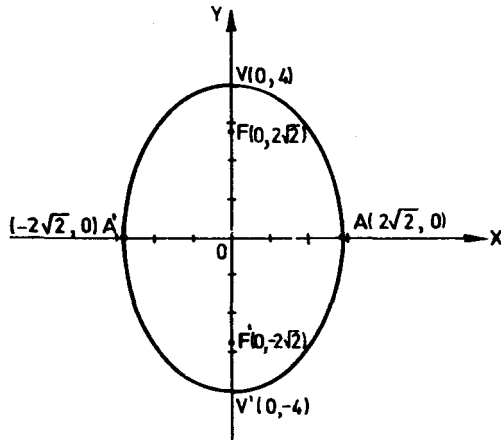


Fig. 3.10

ECUACION DE UNA ELIPSE DE CENTRO C (h, k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una elipse de centro $C (h, k)$ y eje focal paralelo al eje X. Si como anteriormente, llamamos $2c$ a la distancia focal, entonces las coordenadas de los focos son: $F (h + c, k)$ y $F' (h - c, k)$. Sea $P (x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por definición se cumple la relación:

$$d (P, F) + d (P, F') = 2a ,$$

siendo como en el caso anterior, a una constante positiva mayor que c . Es decir:

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

ó también:

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

Hagamos $x - h = x'$, $y - k = y'$, quedando:

$$\sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} = 2a$$

que representa a la ecuación (3.6a) de la página 148, donde se ha cambiado x por x' e y por y' . Luego realizando operaciones y simplificando se obtendrá la ecuación (3.7) correspondiente:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Como $x' = x + h$, e $y' = y + k$, se obtiene finalmente:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (3.9)$$

Ecuación de una elipse con eje focal paralelo al eje X, centro en $C(h, k)$, focos en: $F(h + c, k)$, $F'(h - c, k)$, vértices en: $V(h + a, k)$, $V'(h - a, k)$. La longitud del semieje mayor es a y la del semieje menor es b . La distancia del centro a cada foco es c y la relación que liga las constantes a , b y c es: $c^2 = a^2 - b^2$.

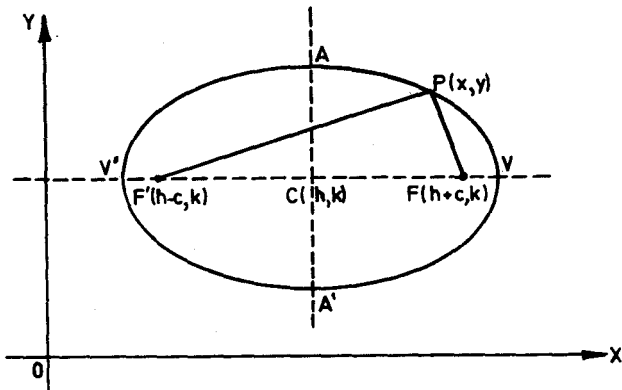


Fig. 3.11

Si el eje focal es paralelo al eje Y y el centro está en (h, k) , la fórmula correspondiente es:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (3.10)$$

Ejemplo 3.14. Los vértices de una elipse son $V(5, -2)$ y $V'(-1, -2)$. Encontrar la ecuación de la elipse si uno de sus focos está en la recta $y - 2x + 10 = 0$.

El centro es $C(2, -2)$, punto medio que une V y V' .

El eje focal, paralelo al eje de abscisas, tiene ecuación $y = -2$.

Las coordenadas de uno de los focos se encuentran resolviendo simultáneamente las ecuaciones $y - 2x + 10 = 0$, $y = -2$. Se obtiene $F(4, -2)$.

Luego:

$c =$ distancia del centro a uno de los focos $= d(C, F) = 2$

$a =$ semieje mayor $=$ distancia del centro a uno de los vértices
 $= d(C, V) = 3$.

De donde: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

La ecuación es de la forma (3.9), por tanto:

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{5} = 1, \text{ es la ecuación pedida.}$$

ECUACION GENERAL DE UNA ELIPSE DE EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Si desarrollamos las ecuaciones (3.9) y (3.10) vemos que éstas pueden expresarse en las formas:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0, \quad y$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + (a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2) = 0, \text{ respectivamente.}$$

Ambas expresiones corresponden a una ecuación de 2º grado con dos variables del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

donde A y C tienen diferente valor pero el mismo signo. (A y $C \neq 0$).

Recíprocamente, dada una ecuación de segundo grado, del tipo anterior, con A y C distintos de cero y del mismo signo, bastará completar cuadrados para demostrar que su gráfica es una elipse.

En efecto completando cuadrados y ordenando:

$$A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, la ecuación representa al punto

$$\left(-\frac{D}{2A} , -\frac{E}{2C} \right)$$

Si es distinto de cero, obtenemos:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2}} = 1 ,$$

que es una ecuación de las formas (3.9) ó (3.10).

Si $A = C$, entonces los ejes mayor y menor de la elipse son iguales y la gráfica correspondiente es una circunferencia. Si los denominadores son negativos, la elipse es imaginaria.

Ejemplo 3.15. Determinar el centro, los focos, los vértices y la longitud de los semiejes de la elipse de ecuación:

$$25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$$

Completando cuadrados:

$$25(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0 ,$$

$$25(x + 3)^2 - 225 + 9(y - 2)^2 = 0$$

$$25(x + 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 225 .$$

Dividiendo por 225 :

$$\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1 .$$

Luego la elipse tiene:

Eje focal: Paralelo al eje Y ;

Semieje mayor: $a = 5$

Semieje menor: $b = 3$

Centro: $C(-3, 2)$. $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; $c = 4$.

Focos: $F(-3, 2 + c) = (-3, 6)$, $F'(-3, 2 - c) = (-3, -2)$.

Vértices: $V(-3, 2 + a) = (-3, 7)$, $V'(-3, 2 - a) = (-3, -3)$.

Ejemplo 3.16. Una elipse de eje paralelo al eje de abscisas, pasa por el punto $(6, 0)$ y tiene sus vértices en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ y es concéntrica con ella. Determinar su ecuación.

El centro de la elipse está confundido con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ ó $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Es decir $C(4, -2)$.

Además la longitud del semieje mayor a es igual al radio de la circunferencia, $a = 5$.

Siendo la elipse de eje focal paralelo al eje X , su ecuación es de la forma:

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{b^2} = 1.$$

Las coordenadas de $P(6, 0)$ satisfacen esta ecuación:

$$\frac{(6 - 4)^2}{25} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

De donde se obtiene el valor $b^2 = \frac{100}{21}$

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{100/21} = 1, \quad \text{ó}$$

$$4x^2 + 21y^2 - 32x + 84y + 48 = 0.$$

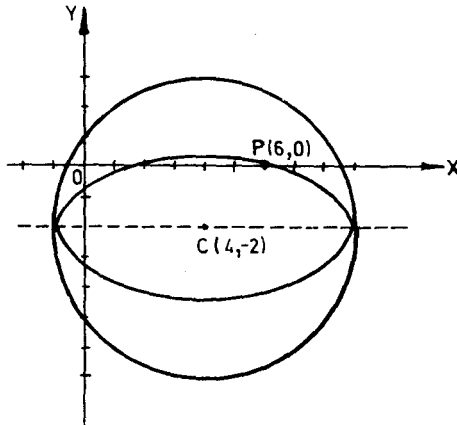


Fig. 3.12

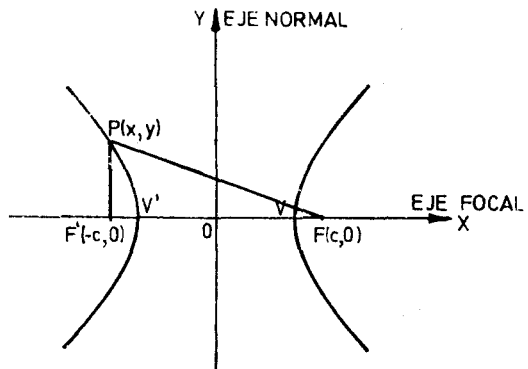
3.4 LA HIPERBOLA

Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es constante y menor que la distancia entre los puntos fijos.

Los dos puntos dados se llaman *focos* de la hipérbola y la distancia entre ellos, cuya medida se designa por $2c$, se llama *distancia focal*.

Al punto medio del segmento que une los focos se le denomina *centro* de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos se llama *eje focal*. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos que se denominan *vértices* de la hipérbola. El segmento que une los vértices se llama *eje transverso* o *focal*. finalmente, se llama *eje normal*, a la recta perpendicular al eje focal y que pasa por el centro.



Hipérbola:
 $|d(P, F) - d(P, F')| = cte. < d(F, F')$

Fig. 3.13

ECUACION DE LA HIPERBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos la hipérbola de centro el origen de coordenadas y eje focal ó transverso coincidente con el eje X (fig. 3.13). Las coordenadas de los focos son en este caso, $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, siendo c una constante positiva.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la hipérbola, entonces por la definición, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente:

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a ,$$

en donde a es una constante positiva tal que $2a < 2c$.

La condición geométrica es equivalente a las dos relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \quad , \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= -2a \quad .\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación de la elipse, podemos demostrar que las dos ecuaciones últimas se reducen cada una a la ecuación:

$$(c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2) .$$

Por ser $c > a > 0$, $c^2 - a^2$ es siempre positivo y podemos designar a esa diferencia por b^2 . Sustituyendo en la última ecuación se tiene: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$. Dividiendo por $a^2 b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.11}$$

ecuación que corresponde a una hipérbola con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas y $c^2 = a^2 + b^2$. Estudiemos la ecuación (3.11). Las intersecciones con el eje X son los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$. Luego el eje transversal mide $2a = d(V, V')$. No hay intersecciones con el eje Y , sin embargo los puntos $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, que están sobre el eje normal, determinan un segmento al que se le llama *eje conjugado*. La longitud del eje conjugado es entonces $2b$.

La gráfica de (3.11), la hipérbola, es simétrica con respecto a los dos ejes coordenados y con respecto al origen.

Si despejamos la variable y de (3.11), obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} ,$$

que nos indica que el dominio de la ecuación es $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Si despejamos x ,

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} ,$$

vemos que x es real para todo valor real de y . Luego el rango es \mathbb{R} .

Según lo anterior podemos concluir que la hipérbola representada por la ecuación (3.11), no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una que se extiende indefinidamente hacia la derecha de $x = a$ y otra hacia la izquierda de $x = -a$ y ambas hacia arriba y abajo del eje X .

Si la hipérbola tiene su centro en el origen pero su eje focal es coincidente con el eje Y , entonces los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ y siguiendo el método anterior se obtiene la ecuación respectiva:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (3.12)$$

Las expresiones (3.11) y (3.12) se llaman las *formas canónicas* de la ecuación de una hipérbola.

ECUACION DE UNA HIPERBOLA DE CENTRO $C(h, k)$ Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

La deducción de las ecuaciones en este caso, se deja como ejercicio al estudiante. En todo caso, es idéntica a la utilizada para la elipse en la sección correspondiente.

Las ecuaciones son:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (3.13)$$

Centro $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje de abscisas.

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (3.14)$$

Centro $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje de ordenadas.

Nota.— En la hipérbola, a diferencia de la elipse, donde siempre $a > b$, se puede tener $a > b$, $a < b$ ó $a = b$. Luego la posición de una hipérbola con respecto a los ejes coordenados debe determinarse de manera distinta a la indicada para la elipse.

Se estudia la ecuación de la hipérbola en su forma canónica y se observa que la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso (eje focal) de la hipérbola.

Ejemplo 3.17. Determinar la ecuación de una hipérbola de focos $(\pm \frac{5}{2}, 0)$ y cuyo eje conjugado mide 4.

El centro es el origen y el eje focal el eje X, luego la ecuación será de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además, como el eje conjugado mide 4, entonces $b = 2$.

La distancia focal es $d(F, F') = 5 = 2c$. De donde $c = \frac{5}{2}$.

La ecuación que relaciona a , b , y c en una hipérbola es $c^2 = a^2 + b^2$.

$$\text{Luego } a^2 = c^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

La ecuación es:

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ó} \quad 16x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$$

Ejemplo 3.18. Determinar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices y las longitudes de los ejes transverso y conjugado de la hipérbola:

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0.$$

Completando cuadrados:

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 4y) + 64 = 0.$$

$$4(x + 4)^2 - 64 - 9(y - 2)^2 + 36 + 64 = 0,$$

$$4(x + 4)^2 - 9(y - 2)^2 = -36. \text{ Multiplicando por } -\frac{1}{36}:$$

$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x + 4)^2}{9} = 1.$$

Siendo el signo del coeficiente de la variable y , positivo, por la aclaración anterior sabemos que la hipérbola tiene su eje focal paralelo al eje Y . Su centro es $C(-4, 2)$ y como $a = 2$ y $b = 3$ entonces las longitudes de los ejes transverso y conjugado son 4 y 6 respectivamente. Además: $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$. Luego $c = \sqrt{13}$ y las coordenadas de los focos son $F(-4, 2 + \sqrt{13})$ y $F'(-4, 2 - \sqrt{13})$. Las coordenadas de los vértices son: $V(-4, 4)$ y $V'(-4, 0)$.

ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA

Consideremos la hipérbola de centro el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje X , de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las dos rectas representadas por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

tienen una relación muy importante con la ecuación anterior. Demostraremos que estas rectas son asíntotas de la hipérbola considerada.

En el primer capítulo estudiamos las asíntotas verticales y horizontales, es decir, paralelas a los ejes coordenados. Las asíntotas que no son paralelas a los ejes coordenados se denominan asíntotas oblicuas. El concepto de asíntota, sea esta paralela a los ejes u oblicua, es el mismo. Una recta se llama *asíntota* de una curva, si a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente tendiendo a cero.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 ,$$

puede expresarse por

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0 ;$$

donde el primer factor representa a la recta de ecuación

$$L_1 : y = \frac{b}{a}x ,$$

y el segundo a la recta

$$L_2 : y = -\frac{b}{a}x$$

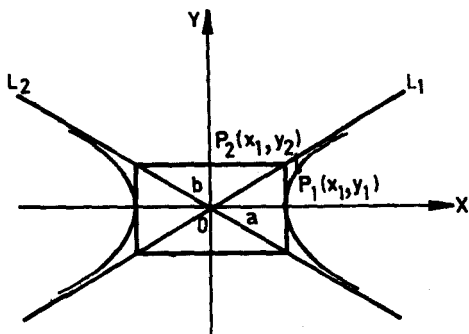


Fig. 3.14

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola considerada.

Sea $P_2(x_1, y_2)$ el punto sobre L_1 que está en la vertical que pasa por P_1 . La longitud de P_1P_2 no es la distancia de P_1 a la recta, pero si probamos que $d(P_1, P_2)$ tiende a cero cuando P_1 se aleja del origen, habremos también probado que la distancia de P_1 a la recta tiende a cero, puesto que esta última distancia es menor o igual que $d(P_1, P_2)$.

Como

$$y_2 = \frac{b}{a} x_1 \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}, \quad \text{entonces:}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a} (x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}). \quad \text{Racionalizando:}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a} \left[\frac{x_1^2 - (x_1^2 - a^2)}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}} \right] = \frac{ab}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}$$

Si P_1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y alejándose indefinidamente del origen, entonces x_1 aumenta también indefinidamente de valor y la diferencia $y_2 - y_1$ decrecerá continuamente aproximándose a cero.

En forma similar se demuestra que en los casos en que P_1 se desplaza sobre la parte inferior de la rama derecha o sobre la parte superior o inferior de la rama izquierda, el valor absoluto de la diferencia $y_2 - y_1$ tiende a cero. P_2 se tomará sobre L_1 ó L_2 según sea el caso. Observemos que las asíntotas L_1 y L_2 de la

hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, son las diagonales del rectángulo determi-

nado por las rectas $x = \pm a$ e $y = \pm b$, donde a y b son las longitudes de los semiejes transverso y conjugado respectivamente. (Ver fig. 3.14).

Ejemplo 3.19. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 5y^2 = 8$.

Igualando a cero el primer miembro: $9x^2 - 5y^2 = 0$.

Factorizando: $(3x - \sqrt{5} y) (3 + \sqrt{5} y) = 0$.

Las ecuaciones de las asíntotas son: $3x - \sqrt{5} y = 0$,

$3x + \sqrt{5} y = 0$.

HIPERBOLAS CONJUGADAS

Dos hipérbolas se dice que son *conjugadas* si el eje transverso de cada una es igual al eje conjugado de la otra.

Así, si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

entonces la ecuación de su conjugada es

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 .$$

Dos hipérbolas conjugadas tienen siempre un centro común, las mismas asíntotas y todos los focos equidistan del centro.

Hipérbolas
Conjugadas

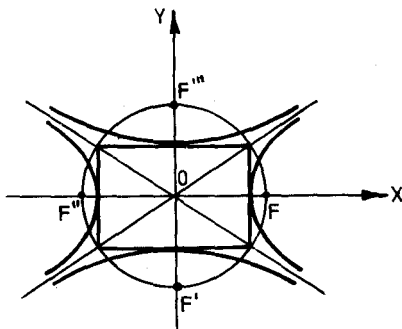


Fig. 3.15

Ejemplo 3.20. Dada la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y = 68$, determinar la ecuación de sus asíntotas y la ecuación de la hipérbola conjugada.

Completando cuadrados: $4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) = 68$,

$$4(x - 1)^2 - 4 - 9(y - 2)^2 + 36 = 68$$

$$4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 36 \quad \text{ó}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1 .$$

Igualando a cero el primer miembro de la penúltima ecuación, encontramos las ecuaciones de las asíntotas: $4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 0$. Factorizando la expresión:

$$[2(x - 1)]^2 - [3(y - 2)]^2 = 0 , \text{ se obtiene:}$$

$$[2(x - 1) + 3(y - 2)] [2(x - 1) - 3(y - 2)] = 0 .$$

De donde:

$2x + 3y - 8 = 0$ y $2x - 3y + 4 = 0$, son las ecuaciones de las asíntotas.

Para encontrar la ecuación de la conjugada, bastará cambiar el signo a uno de los miembros de la última ecuación:

$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x - 1)^2}{9} = 1 , \quad \text{ó} \quad 9y^2 - 4x^2 + 8x - 36y = 4 .$$

HIPÉRBOLA EQUILÁTERA O RECTANGULAR

Una hipérbola que tiene sus ejes transverso y conjugado iguales, es decir $a = b$, se llama *hipérbola equilátera*.

En el caso de una hipérbola equilátera, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 , \text{ se convierte en: } x^2 - y^2 = a^2 \quad (3.15) ,$$

y su conjugada en $y^2 - x^2 = a^2$. Sus asíntotas son las rectas $y = \pm x$, es decir rectas que forman 45° y 135° con los ejes de abscisas, respectivamente y un ángulo entre ellas de 90° . Debido a que sus asíntotas se cortan en ángulo recto, es que algunas veces son llamadas *hipérbolas rectangulares*.

Una hipérbola equilátera de ecuación particularmente simple es aquella que tiene por asíntotas los ejes coordenados, pero que por tener su eje focal oblicuo, la estudiaremos en detalle, en la sección 3.6. Tal ecuación tiene la forma $xy = k$ (Fig. 3.16), donde k es una constante cualquiera distinta de cero.

Si $k > 0$, x e y tienen que tener siempre el mismo signo y la gráfica tiene una rama en el primer cuadrante y otra en el tercero.

Si $k < 0$, x e y tienen signos contrarios y las ramas están en el 2° y 4° cuadrante.

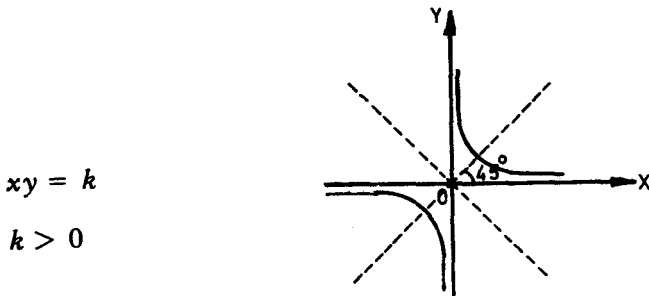


Fig. 3.16

ECUACION GENERAL DE UNA HIPERBOLA DE EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) al desarrollarse toman las formas:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + (b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2) = 0, \text{ y}$$

$$b^2y^2 - a^2x^2 + 2a^2hx - 2b^2ky + (b^2k^2 - a^2h^2 - a^2b^2) = 0,$$

respectivamente. Ambas corresponden a una ecuación de 2° grado de la forma:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C tienen signos opuestos. (A y $C \neq 0$).

Recíprocamente, dada una ecuación de 2° grado del tipo anterior, con A y C de signos opuestos, bastará completar cuadrados para demostrar que su gráfica es una hipérbola. En efecto, completando cuadrados y ordenando:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF \neq 0$, entonces dividiendo por el segundo miembro:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2 C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2}} = 1,$$

que es una ecuación de las formas (3.13) ó (3.14) desde que A y C tienen signos opuestos.

En el caso particular de que $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, entonces la penúltima ecuación puede factorizarse en dos factores de primer grado que representan dos líneas rectas que se cortan.

EJERCICIOS 3.2

1.— Determinar el centro, los focos, los vértices y los semiejes de las elipses siguientes:

- a) $5x^2 + 20x + 9y^2 - 54y + 56 = 0$
- b) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

2.— Encontrar, en cada caso, la ecuación de la elipse que tiene:

- a) Vértices $(\pm 5, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$.
- b) Vértices $(-3, 2)$ y $(7, 2)$ y focos $(5, 2)$ y $(-1, 2)$.
- c) Focos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, longitud de eje menor igual a 8.

3.— El eje mayor de una elipse es 18 y el punto $(6, 4)$ pertenece a la curva. Determinar su ecuación sabiendo que el centro es el origen de coordenadas y el eje focal el eje X.

4.— Determinar la ecuación de la tangente a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

en el punto de contacto P cuya abscisa es $x = 1$ y su ordenada es positiva.

5.— Determinar n para que la recta $y = 2x + n$ sea tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

6.— Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por el vértice de un triángulo cuya base mide 4, y la suma de los otros lados es constante e igual a 8.

7.— Determinar la ecuación de la hipérbola correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

- a) Focos $(-1, 1)$ y $(5, 1)$, un vértice en $(0, 1)$.
- b) Focos $(-1, 3)$ y $(-7, 3)$, longitud del eje conjugado igual 4.

8.— Determinar las coordenadas del centro, los focos, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas:

- a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 16y = 31$
- b) $y^2 + 6y - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

9. Demostrar que el producto de las distancias de un punto cualquiera de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

(Sugerencia: Sin perder generalidad, puede probarse para una hipérbola de centro el origen y de ejes los ejes coordenados).

10.— Utilizando el resultado del ejercicio anterior, determinar la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $2x - y - 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ y pasa por el punto (4, 6).

11.— Los focos de una hipérbola son $(\pm 10, 0)$ y las ecuaciones de sus asíntotas son $y = \pm 2x$. Encontrar su ecuación.

12.— Determinar los puntos de intersección de las cónicas $x^2 - y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 25$.

13.— Determinar un punto de la hipérbola

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

tal que su abscisa es el doble de su ordenada.

14.— El eje transverso de una hipérbola es 10 y el punto (6, 4) pertenece a la hipérbola. Determinar su ecuación si su centro es el origen de coordenadas.

15.— Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1,$$

y que son paralelas a la recta $2y - 4x + 1 = 0$.

16.— Encontrar las ecuaciones de las cuatro rectas tangentes comunes a las cónicas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + 16y^2 = 4$.

17.— Los focos de la elipse

$$\frac{(x + 3)^2}{16} + \frac{(y + 5)^2}{9} = 1$$

son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de esta última coinciden con los vértices de la elipse. Determinar la ecuación de la hipérbola.

18.— Hallar los puntos de intersección de la recta $4x - 3y - 16 = 0$, y la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

- 19.—Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$, trazadas desde el punto $(-1, -7)$.
- 20.—Determinar la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus focos en $(0, -\sqrt{2})$.
- 21.—Calcular el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{y la recta } x = 4.$$

- 22.—Determinar la distancia entre las dos rectas paralelas a $4x - 4y + 11 = 0$ y tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$.
- 23.—Sabiendo que el área de una elipse está dada por la fórmula πab , calcular el área de la elipse $16x^2 + y^2 + 32x - 4y + 16 = 0$.
- 24.— La base de un triángulo es de longitud fija y sus extremos son $A(1, 0)$ y $B(5, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice si uno de los ángulos de la base del triángulo es el doble del otro.
- 25.— El punto $P(m, n)$ de la elipse $4x^2 + y^2 - 72 = 0$ es tal que su distancia a la recta $2x + y - 16 = 0$ es máxima. Calcular las coordenadas de P .

Resumen.— Dada una ecuación de segundo grado, lo visto anteriormente nos permite conocer, el tipo de cónica que representa.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Relación entre los coeficientes	Tipo de Cónica	Casos excepcionales
$A = C$	Circunferencia	Un punto Ningún lugar geométrico

$A = 0 \text{ ó } C = 0$	Parábola	Dos rectas paralelas Dos rectas coincidentes Ningún lugar geométrico
$A \text{ y } C \text{ iguales signos}$	Elipse	Un punto Ningún lugar geométrico
$A \text{ y } C \text{ distintos signos}$	Hipérbola	Dos rectas que se cortan

3.5 DEFINICION GENERAL DE LAS CONICAS

Las diversas cónicas estudiadas difieren mucho entre si, como hemos podido comprobar por sus gráficas, sin embargo es posible establecer una ley común que las genere:

Una *sección cónica* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la relación entre su distancia a un punto fijo F y su distancia a una recta fija D es una constante dada e .

El punto fijo F se llama *foco*, la recta fija D se llama *directriz* y la constante dada e , *excentricidad*.

Según sea el valor de la excentricidad e , el lugar geométrico representará una parábola, una elipse o una hipérbola.

Para simplificar los desarrollos, pero sin que esto signifique pérdida de generalidad en la demostración, asumiremos que la directriz es el eje Y y que el foco está en el eje de abscisas.

Sean, $F (s, 0)$ el foco, $P (x, y)$ un punto genérico del plano y Q el pie de la perpendicular bajada de P a la directriz (*eje Y*) (fig. 3.17).

Por la definición general de una sección cónica tenemos que:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e.$$

Reemplazando:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - s)^2 + y^2} \quad , \quad d(P, Q) = |x| \quad , \quad \text{se obtiene:}$$

$$\frac{\sqrt{(x - s)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

Elevando el cuadrado y ordenando:

$$x^2 - 2sx + y^2 + s^2 - e^2x^2 = 0$$

$$\text{ó} \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2sx + s^2 = 0 \quad (3.17) .$$

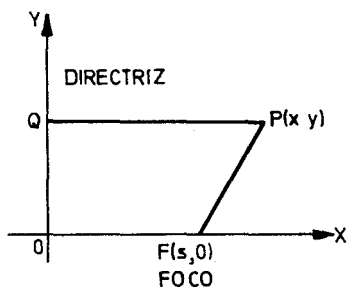


Fig. 3.17

La ecuación (3.17) es una ecuación de segundo grado en dos variables de la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, luego de acuerdo al resumen anterior, representa:

- Una parábola; si el coeficiente de x^2 es cero (el coeficiente de y^2 es 1), es decir si $1 - e^2 = 0$, o sea si $e = 1$;
- una elipse; si los coeficientes de x^2 e y^2 son del mismo signo, es decir si $1 - e^2 > 0$ o sea si $e < 1$;
- una hipérbola; si los coeficientes de x^2 e y^2 son de signos contrarios, es decir $1 - e^2 < 0$ o sea $e > 1$;

Como e , cociente de dos distancias, es siempre positiva, entonces podemos establecer que si la excentricidad vale:

- $e = 1$, la curva es una *parábola*,
- $0 < e < 1$, la curva es una *elipse*,
- $e > 1$, la curva es una *hipérbola*.

Veamos la relación que hay entre la excentricidad e y los valores a y b de una elipse:

Supongamos una elipse de centro el origen de coordenadas, focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y ecuación de la directriz correspondiente al foco F , $x = l$.

Recordemos que en una elipse, el valor de c en función de a y b es $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

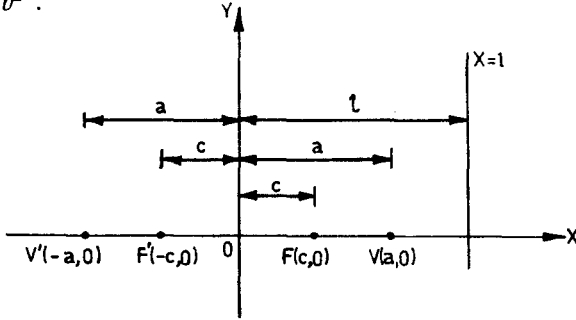


Fig. 3.18

Los vértices $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ de la elipse, pertenecen al lugar geométrico luego satisfacen las relaciones:

$$\frac{d(V, F)}{d(V, Q)} = e, \quad \frac{d(V', F)}{d(V', Q)} = e.$$

De la figura 3.18 se obtiene entonces:

$$\frac{a - c}{l - a} = e, \quad \frac{a + c}{l + a} = e,$$

o también: $a - c = e(l - a)$ y $a + c = e(l + a)$.

Sumando miembro a miembro y simplificando:

$$l = \frac{a}{e}, \tag{3.18}$$

distancia de la directriz al centro de la elipse.

Restando miembro a miembro y simplificando:

$$c = a e \tag{3.19}, \text{ distancia del foco al centro de la elipse.}$$

Procediendo en forma similar pero ahora considerando una hipérbola con centro en el origen y focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y directriz $x = l$ se tiene (fig. 3.19):

$$\frac{d(V, F)}{d(V, Q)} = e, \quad \frac{c - a}{a - l} = e, \quad c - a = e(a - l) \quad y$$

$$\frac{d(V', F)}{d(V', Q)} = e, \quad \frac{c + a}{a + l} = e, \quad c + a = e(a + l).$$

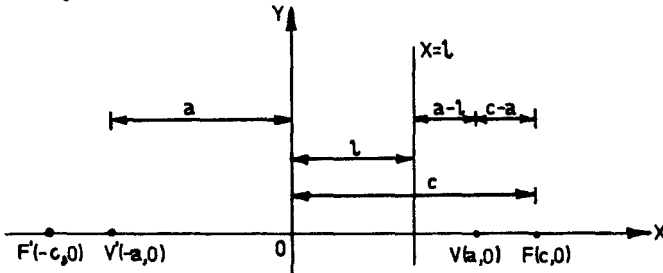


Fig. 3.19

Sumando y restando las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$l = \frac{a}{e}, \quad \text{distancia de la directriz al centro de la hipérbola,}$$

$$c = ae, \quad \text{distancia del foco al centro de la hipérbola.}$$

(Recordemos que en una hipérbola: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

Ejemplo 3.21. Determinar la ecuación de una elipse de vértices $V(3, 5)$, $V'(3, -1)$ y excentricidad $e = 1/3$.

$$d(V, V') = 2a = 6, \quad a = 3$$

Como se trata de una elipse de eje horizontal, entonces

$$h = 3, \quad k = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Luego el centro es: $C(3, 2)$.

Por la fórmula (3.19), $c = ae = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Además $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$.

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

ó

$$9x^2 + 8y^2 - 54x - 32y + 41 = 0$$

Ejemplo 3.22. Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hallar la ecuación de la hipérbola si la excentricidad es: $e = 2$.

En la elipse: $a = 5$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

En la hipérbola: $c = 4$, $e = 2$ y $a = \frac{c}{e} = \frac{4}{2} = 2$.

Además $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$.

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \text{ó} \quad 3x^2 - y^2 = 12.$$

EJERCICIOS 3.3.

1.— Se denomina *lado recto* (*latus rectum*) de una cónica, a la longitud de la cuerda que pasa por uno de los focos y es perpendicular al eje focal.

Demostrar que el lado recto de una parábola es $|4p|$, y el de una elipse ó hipérbola es $\frac{2b^2}{a}$.

- 2.— Demostrar que en toda hipérbola equilátera la excentricidad es $\sqrt{2}$.
- 3.— Hallar la ecuación de la elipse de excentricidad $e = 1/2$, foco $(-4, 1)$ y directriz correspondiente $y + 3 = 0$.
- 4.— La excentricidad de una hipérbola es $e = 3$. Si la distancia de un punto P de la hipérbola a la directriz más cercana es 4, calcular la distancia del punto P al foco más cercano.
- 5.— Hallar la ecuación de una elipse, sabiendo que $e = 1/2$, $F(3, 0)$ y la directriz correspondiente tiene por ecuación $x + y - 1 = 0$.
- 6.— Encontrar la ecuación de una elipse de centro en $(0, 0)$ y eje mayor sobre el eje de las abscisas sabiendo que su lado recto es 6 y su excentricidad $e = 1/2$.
- 7.— Determinar la ecuación de la hipérbola que tiene por directrices $x = 4$ y $x = 0$, eje transverso la recta $y = 1$, y excentricidad $e = 2$.
- 8.— Una elipse es tangente a una circunferencia de tal manera que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. Calcular su excentricidad.
- 9.— Determinar la excentricidad de la cónica que tiene su centro en $C(1, -3)$, uno de sus focos en $F(0, -6)$ y el punto de intersección de una de sus directrices con el eje focal es $(3, 3)$.
- 10.— Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse.

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hallar la ecuación de la hipérbola si su excentricidad es igual a 3,

3.6 TRASLACION Y ROTACION DE EJES

Al estudiar las cónicas hemos podido comprobar que las ecuaciones de las gráficas correspondientes pueden ser más o menos simples

según sea el sistema de coordenadas al cual estén referidas. Así por ejemplo, la elipse de semiejes mayor y menor iguales a 2 y 1 respectivamente, centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de abscisas, tiene por ecuación $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Sin embargo, si consideramos que la misma elipse tiene sus ejes paralelos a los ejes coordenados y su centro en (1, 2), su ecuación es en este caso $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$. Finalmente, si consideramos la elipse original referida a un sistema de coordenadas tal que su eje de abscisas forma 45° con el eje focal y mantenemos el centro en (1, 2), la nueva ecuación es aún menos simple que la anterior: $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 5 = 0$.

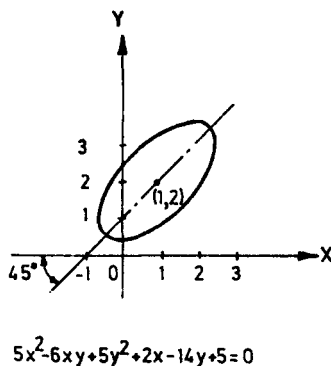
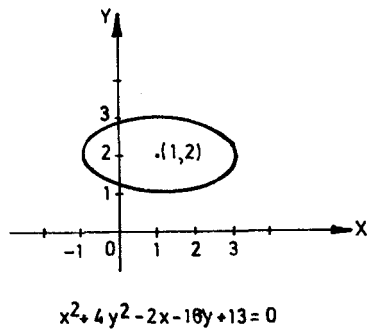
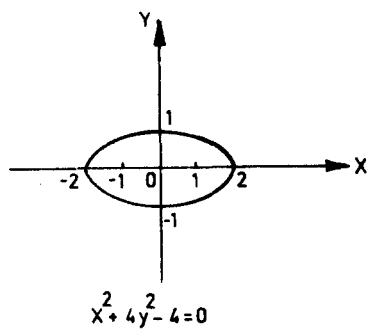


Fig. 3.20

Este ejemplo nos muestra la importancia que tiene el escoger convenientemente el sistema de coordenadas cuando el problema nos lo permite. Sin embargo, muchas veces tanto la gráfica como el sistema de coordenadas ya están dados y sólo nos queda entonces recurrir a una transformación de ejes si deseamos expresar la ecuación de la gráfica dada en una forma más simple. En esta sección trataremos las transformaciones denominadas traslación de ejes y rotación de ejes. La primera de ellas, la traslación, ya ha sido usada de una manera indirecta al estudiar las cónicas cuando el centro (caso de la elipse o hipérbola) o el vértice (caso de la parábola) no estaban en el origen de coordenadas.

TRASLACION DE EJES

Dado el sistema de coordenadas XY (Fig. 3.21), consideremos además el sistema $X'Y'$ con origen de coordenadas en el punto (h, k) y con los ejes X' e Y' paralelas a los ejes X e Y , respectivamente.

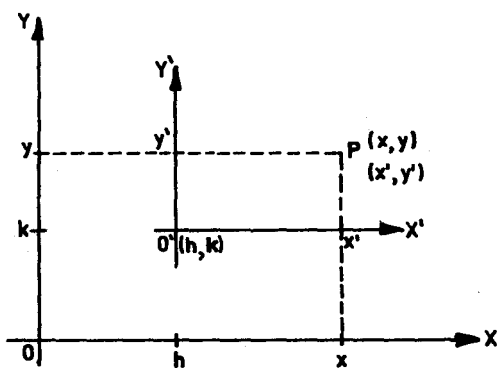


Fig. 3.21

Cualquier punto P puede ser considerado con dos pares de coordenadas: el par (x, y) referido al sistema XY y el par (x', y') referido al sistema $X'Y'$.

La relación que puede establecerse entre los pares que corresponden a P es:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

(3.20)

o en forma equivalente:

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

(3.21)

Si dos sistemas de coordenadas XY y $X'Y'$ satisfacen la relación (3.20), diremos que el sistema XY ha sido trasladado paralelamente al punto (h, k) .

Ejemplo 3.23. Referir la ecuación $y = (3/2)x + 3$ al sistema $X'Y'$ obtenido al trasladar XY paralelamente al punto $(2, 6)$.

Las ecuaciones (3.21) de traslación de ejes son, en este caso;

$$x = x' + 2$$

$$y = y' + 6$$

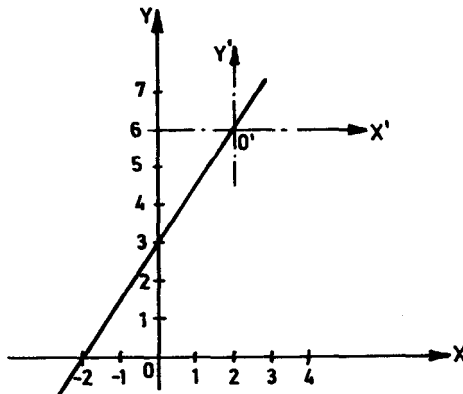


Fig. 3.22

Reemplazando estos valores en la ecuación dada se tiene

$$y' + 6 = (3/2)(x' + 2) + 3, \quad \text{ó}$$

$$y' = (3/2)x' ,$$

que corresponde a una recta que pasa por el origen del nuevo sistema $X'Y'$.

Algunas veces el origen del sistema trasladado no se conoce y debe ser determinado convenientemente de acuerdo a las condiciones del problema.

Ejemplo 3.24. Usando una traslación adecuada expresar la ecuación $y^3 - 6y^2 - x + 12y - 12 = 0$ en una forma más simple.

Reemplazando las ecuaciones de traslación (3.21) se tiene:

$$(y' + k)^3 - 6(y' + k)^2 - (x' + h) + 12(y' + k) - 12 = 0$$

Desarrollando y ordenando:

$$y'^3 + (3k - 6)y'^2 + (3k^2 - 12k + 12)y' - x' - h + k^3 - 6k^2 + 12k - 12 = 0$$

El término y'^3 no desaparecerá cualquiera que sean los valores escogidos para h y k .

En cambio si podemos eliminar el término correspondiente a y'^2 si hacemos su coeficiente $3k - 6 = 0$. Esto nos obliga a fijar el valor de $k = 2$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior ésta se convierte en:

$$y'^3 - x' - h - 4 = 0.$$

Nos queda todavía la opción de escoger el valor de h convenientemente de manera que se anule el término independiente. Es decir, tomar $-h - 4 = 0$, o sea $h = -4$. Con este valor de h la ecuación queda reducida finalmente a la forma: $y'^3 = x'$, referida al sistema $X'Y'$ obtenido al trasladar XY al punto $(-4, 2)$.

Es obvio que la gráfica puede ahora ser dibujada con más facilidad.

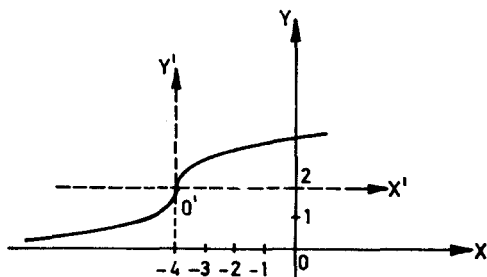


Fig. 3.23

Ejemplo 3.25. Utilizando traslación de ejes simplificar la ecuación $9x^2 - 36x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.

Tratándose de una ecuación de segundo grado sin el término xy , el método más simple para encontrar el nuevo centro del sistema consiste en completar cuadrados.

La ecuación anterior puede expresarse como:

$$9(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$$

Si trasladamos el sistema al punto $(-2, 1)$, las ecuaciones de traslación de ejes son: $x' = x + 2$, $y' = y - 1$. La ecuación dada se transforma en $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ ó

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 .$$

ROTACION DE EJES

Hemos visto que una traslación de ejes simplifica muchas veces las expresiones de ciertas ecuaciones permitiendo efectuar el dibujo de la gráfica con rapidez. Sin embargo en otros casos la traslación es insuficiente o inaplicable para conseguir la simplificación deseada y necesitamos recurrir a una rotación de ejes. Esta última transformación nos permitirá también completar el estudio de la ecuación de segundo grado en las variables x e y .

Consideremos el sistema XY con origen O y el sistema $X'Y'$ con el mismo origen y de tal modo que el eje X' forme un ángulo α con el eje X .

Consideraremos que el ángulo α puede variar entre $0 \leq \alpha < 90^\circ$.

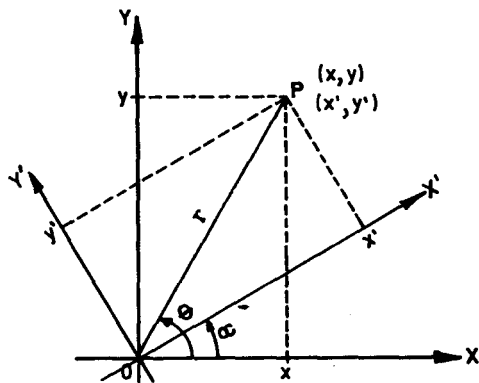


Fig. 3.24

Todo punto P puede ser referido a dos pares de coordenadas, (x, y) y (x', y') , según usemos el sistema XY o el sistema $X'Y'$.

Si denotamos con r al segmento \overline{OP} y llamamos θ al ángulo que forma con el eje X , se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cos (\theta - \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\ y' &= r \operatorname{sen} (\theta - \alpha) = r \operatorname{sen} \theta \cos \alpha - r \cos \theta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{3.23}$$

Reemplazando x e y de (3.22) en (3.23) se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si dos sistemas XY y $X'Y'$ satisfacen las ecuaciones (3.24), diremos que el sistema XY ha sido rotado el ángulo α .

Si de (3.24) despejamos los valores de x e y obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \\ y &= x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nota.— Es importante observar que el grado de una ecuación no se altera por efectos de una traslación o rotación. En efecto, supongamos una ecuación de grado n referida a XY . Al aplicar las relaciones de transformación (3.21) ó (3.25), por ser estas lineales, el grado de la ecuación transformada referida a $X'Y'$ no podrá aumentar de grado, es decir, su grado es menor o igual que n . Supongamos que la nueva ecuación tiene grado menor que n . Podemos utilizar las relaciones (3.20) y (3.24) para referirla nuevamente a XY . Pero estas relaciones son también lineales, luego la ecuación referida a XY no puede aumentar de grado y seguirá siendo éste menor que n . Esta contradicción prueba que el grado de la ecuación en $X'Y'$ tiene que ser n .

Ejemplo 3.26. Expresar la ecuación $xy = 1/2$ en el sistema $X'Y'$ obtenido al rotar los ejes XY un ángulo de 45° .

En este caso conocemos el ángulo de rotación, $\alpha = 45^\circ$, y bastará aplicar directamente las relaciones (3.25), reemplazando x e y en la ecuación $xy = 1/2$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) = 1/2 \quad ,$$

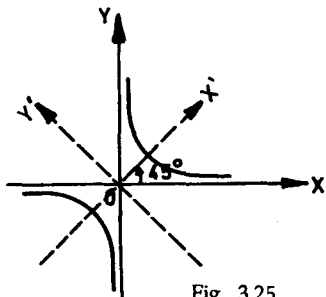


Fig. 3.25

o efectuando: $x^2 - y^2 = 1$.

La gráfica corresponde a la hipérbola equilátera de la fig. 3.25.

Ejemplo 3.27. Por medio de una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $4x + 3y = 12$ en otra que no tenga término en y' .

Reemplazando en la ecuación dada las expresiones $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$, se tiene:

$$4(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 3(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) = 12,$$

$$(4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha) x' + (3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha) y' = 12.$$

Si se desea eliminar el término en y' entonces α debe ser tal que $3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha = 0$, ó $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$. Con este valor de α la ecuación se reduce a $(4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha) x' = 12$, y reemplazando los valores $\sin \alpha = 3/5$ y $\cos \alpha = 4/5$, se obtiene finalmente $x' = 12/5$.

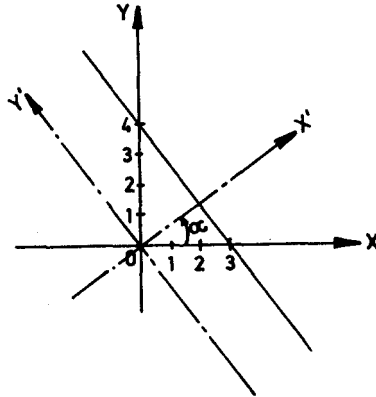


Fig. 3.26

Ejemplo 3.28. Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $(3, 4)$ y $(-3, -4)$ es igual a $2\sqrt{26}$. Graficar la ecuación.

Por la condición dada sabemos que el lugar geométrico corresponde a una elipse de focos $(3, 4)$ y $(-3, -4)$ y eje mayor igual a $2\sqrt{26}$. Esta condición implica la relación:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 4)^2} = 2\sqrt{26}$$

6

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = 2\sqrt{26} - \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 4)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$3x + 4y + 26 = \sqrt{26} \sqrt{x^2 + 6x + y^2 + 8y + 25} .$$

Elevando al cuadrado nuevamente y simplificando se tiene:

$$17x^2 + 10y^2 - 24xy = 26$$

Por los datos sabemos que la elipse respectiva tiene su centro en el origen y que por tanto si hacemos una rotación de ejes de manera que el eje X' coincida con el eje focal, la ecuación referida a este nuevo sistema es de la forma

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 ,$$

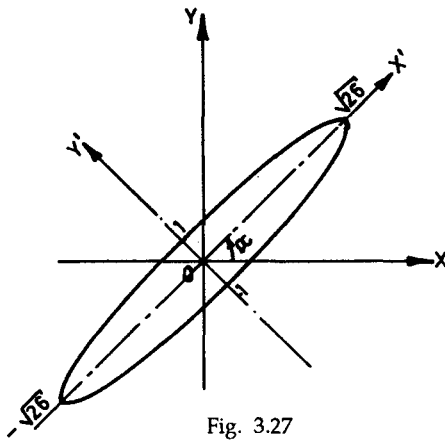


Fig. 3.27

es decir, la forma canónica o más simple de las ecuaciones de una elipse. Como uno de los focos es $(3, 4)$, entonces el ángulo α de rotación es el correspondiente a $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$ ó $\operatorname{sen} \alpha = 4/5$ y $\operatorname{cos} \alpha = 3/5$. Obsérvese que no es necesario hallar el valor de α .

Las ecuaciones de transformación son:

$$x = \frac{3}{5} x' - \frac{4}{5} y'$$

$$y = \frac{4}{5} x' + \frac{3}{5} y' \quad ,$$

que reemplazadas en la ecuación obtenida nos da:

$$x^2 + 26y^2 = 26 \quad , \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{26} + y^2 = 1 \quad ,$$

Lo que representa a una elipse con eje mayor en el eje X' e igual a $2\sqrt{26}$ y eje menor en Y' e igual a 2. La gráfica aparece en la figura 3.27.

ECUACION COMPLETA DE 2º GRADO EN LAS VARIABLES

X e Y

Una ecuación completa de segundo grado en las variables x e y es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.26)$$

donde los coeficientes A , B y C no pueden ser iguales a cero a la vez. En las secciones anteriores hemos estudiado esta ecuación cuando $B = 0$ y verificamos que siempre representa una cónica (o casos especiales). Usando rotación de ejes probaremos que una ecuación de segundo grado con $B \neq 0$ puede reducirse a otra en donde $B = 0$. Esto nos permitirá utilizar los resultados de las secciones anteriores en las que no se consideraron ecuaciones con el término rectangular xy .

Consideremos la ecuación (3.26) con $B \neq 0$. Si rotamos los ejes XY un ángulo α (el que tomaremos positivo y menor que 90°), las ecuaciones de transformación (3.25) son:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad .$$

Reemplazando estos valores en la ecuación general (3.26) se tiene una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad (3.27)$$

donde:

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha \\ B' &= B (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (C - A) (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \\ C' &= A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha \\ D' &= D \cos \alpha + E \operatorname{sen} \alpha \\ E' &= -D \operatorname{sen} \alpha + E \cos \alpha . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si deseamos que en la nueva ecuación no aparezca el término $x'y'$ se tendrá que escoger α de tal modo que

$$B' = B (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (C - A) 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

sea cero, esto es:

$$\begin{aligned} B \cos 2\alpha + (C - A) \operatorname{sen} 2\alpha &= 0 \quad \text{ó} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{A - C}{B} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

La última expresión tiene sentido pues $B \neq 0$.

Si $A = C$ entonces $\operatorname{ctg} 2\alpha = 0$, y será suficiente tomar $\alpha = 45^\circ$ para conseguir la eliminación del término xy .

Si utilizamos las relaciones (3.28) se puede comprobar (la dificultad es sólo algebraica) que se cumple la relación

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC .$$

Es decir, que esta relación entre los coeficientes A , B y C es "invariante" por una rotación.

Si α es escogido de manera que verifique (3.29) entonces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.26)$$

se transforma en

$$A'x^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad (3.30)$$

cumpléndose además la relación

$$-4A'C' = B^2 - 4AC .$$

Por otro lado, hemos establecido (ver cuadro resumen pág. 170) que la ecuación (3.30) representa:

- Una parábola (o casos excepcionales) si $A' = 0$ ó $C' = 0$, es decir si $-4A'C' = 0$;
- Una elipse (o casos excepcionales) si A' y C' tienen los mismos signos, es decir si $-4A'C' < 0$;
- Una hipérbola (o casos excepcionales) si A' y C' tienen signos diferentes, es decir si $-4A'C' > 0$.

Luego usando la igualdad $-4A'C' = B^2 - 4AC$, podemos conocer, dada una ecuación general completa de segundo grado, cual es el tipo de cónica que representa:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		
Relación entre los coeficientes	Tipo de Cónica	Casos excepcionales
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola	Dos rectas paralelas Dos rectas coincidentes Ningún lugar geométrico
$B^2 - 4AC < 0$	Elipse	Un punto Ningún lugar geométrico
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola	Dos rectas que se cortan

Ejemplo 3.29. Dada la ecuación de segundo grado $8x^2 - 12xy + 13y^2 = 20$.

- Determinar el tipo de cónica que representa
- Simplificar la ecuación usando una rotación de los ejes.

a) $B^2 - 4AC = 144 - 416 = -272 < 0$, luego la ecuación corresponde a una elipse o a un caso especial.

b) El ángulo α que reduce la ecuación es tal que

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{5}{12} .$$

Escogiendo α entre 0° y 90° , 2α estará entre 0° y 180° ; de este modo:

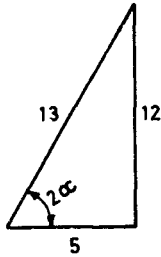


Fig. 3.28

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 5/13 \quad , \quad y \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de rotación de ejes para luego reemplazarlas en la ecuación dada, se tiene:

$$\begin{aligned} &8 \left(\frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}} \right)^2 - 12 \left(\frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}} \right) \left(\frac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}} \right) + 13 \left(\frac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}} \right)^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 8x^2 + 17y^2 &= 20 \quad , \quad \text{ó} \\ \frac{x^2}{2} + \frac{17y^2}{20} &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.30. Identificar el tipo de curva que representa la ecuación:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0 .$$

Realizar una rotación y luego una traslación para eliminar el término xy y los términos lineales (si es posible), respectivamente.

Siendo la ecuación de segundo grado y verificándose que $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$, la curva es una cónica del tipo parabólico.

El ángulo α de rotación es tal que:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4}$$

Como el ángulo 2α es positivo y menor que 180° , entonces por tener cotangente negativa está en el segundo cuadrante y le corresponderá un coseno negativo y seno positivo:

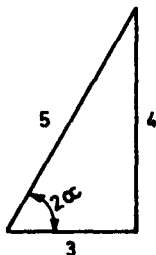


Fig. 3.29

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{5}, \quad y$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de rotación de ejes y luego reemplazando estas en la ecuación dada se tiene:

$$4 \left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4 \left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \right)^2 + 8 \left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \right) - 4 \left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \right) - 5 = 0$$

Simplificando:

$$5y'^2 - 4\sqrt{5}y' - 5 = 0.$$

Completando cuadrados:

$$(\sqrt{5}y' - 2)^2 = 9 \quad \text{ó} \quad \left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{9}{5}$$

Trasladando los ejes $X'Y'$ al punto

$$\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right),$$

se obtiene $y'^2 = 9/5$, ecuación que representa dos rectas paralelas al eje X'' (caso excepcional de una parábola) :

$$y''_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad y''_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

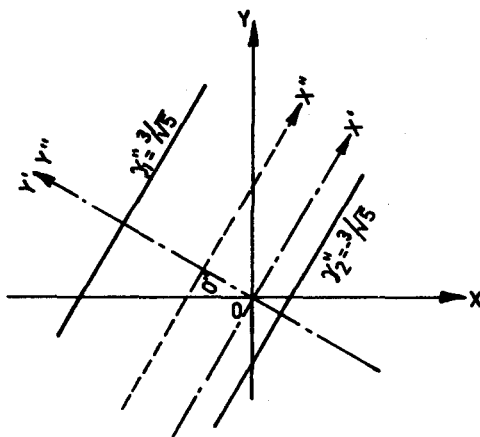


Fig. 3.30

EJERCICIOS 3.4

En cada uno de los problemas 1 al 10 siguientes, determinar el tipo de cónica que representa la ecuación dada y por medio de rotación y traslación de ejes simplificarla.

1. $6x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
2. $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 70x + 10y + 100 = 0$
3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 10xy - 6x - 6y + 2 = 0$
5. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
6. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}(x + y) - 6 = 0$
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 45x - 60y - 400 = 0$
8. $xy + x - y = 0$

9. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$
10. $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$
11. El área que encierra una elipse de semiejes mayor y menor a y b , respectivamente, está dada por la fórmula $A = \pi ab$.

Calcular el área que encierra la elipse

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

12. Dada la familia de cónicas: $(\lambda - 4)x^2 + \lambda y^2 + 2y + \lambda = 0$, analizar los valores del parámetro λ que determinan que la ecuación represente una parábola, una elipse o una hipérbola.

3.7. SECCIONES PLANAS DE UN CONO CIRCULAR RECTO

La denominación de *secciones cónicas* que se acostumbra a dar a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, proviene de la época en que fueron descubiertas como intersecciones de un plano con un cono recto circular.

Consideremos un cono que se extiende a ambos lados de su vértice. Cada una de las partes en las que el vértice divide al cono se denominan hojas.

Sea β el semi-ángulo del cono, es decir el ángulo que forma el eje

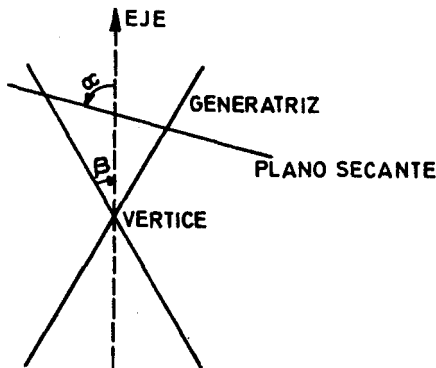


Fig. 3.31

del cono con una generatriz. Supongamos un plano que corta al cono formando un ángulo α con su eje.

Un corte longitudinal del cono y el plano secante se puede apreciar en la figura 3.31.

Los distintos tipos de secciones cónicas aparecen según sea la relación entre los ángulos α y β .

En esta forma se obtiene:

- a) Una circunferencia, si $\alpha = 90^\circ$ (plano perpendicular al eje).
- b) Una elipse, si $\beta < \alpha < 90^\circ$
- c) Una parábola, si $\alpha = \beta$ (plano paralelo a una generatriz).
- d) Una hipérbola, si $0 \leq \alpha < \beta$.

Las circunferencias y elipses son secciones que se obtienen cuando los planos cortan todas las generatrices de una de las hojas del cono. Las parábolas se obtienen cuando los planos cortan algunas de las generatrices de una hoja del cono. Las hipérbolas se obtienen cuando los planos cortan algunas de las generatrices de las dos hojas del cono (fig. 3.32).

3.8 HISTORIA Y APLICACIONES DE LAS SECCIONES CONICAS

El descubrimiento de las secciones cónicas se atribuye a los matemáticos griegos, aproximadamente en los años 375 - 325 A.C. Los estudios sobre las cónicas efectuados por Apolonio, quien vivió por los años 200 antes de Cristo, fueron unos de los logros más profundos de la geometría clásica griega. Se atribuye a Apolonio la definición de las secciones cónicas que hemos estudiado en este capítulo. Cerca de 2,000 años más tarde, Galileo (1564 - 1642) descubrió que un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de una torre, cae a la tierra siguiendo una trayectoria parabólica.

Por la misma época, Kepler (1571 - 1630), formuló la hipótesis de que los planetas se movían en órbitas elípticas con el Sol como foco.

Unos 80 años más tarde, Isaac Newton (1642 - 1724) fue capaz de descubrir que una trayectoria planetaria elíptica, implica las leyes de la gravedad universal.

Actualmente se aplican las propiedades de las secciones cónicas en la teoría de las órbitas de planetas, cometas y satélites artificiales. La teoría se aplica también, a las lentes de los telescopios, microscopios y

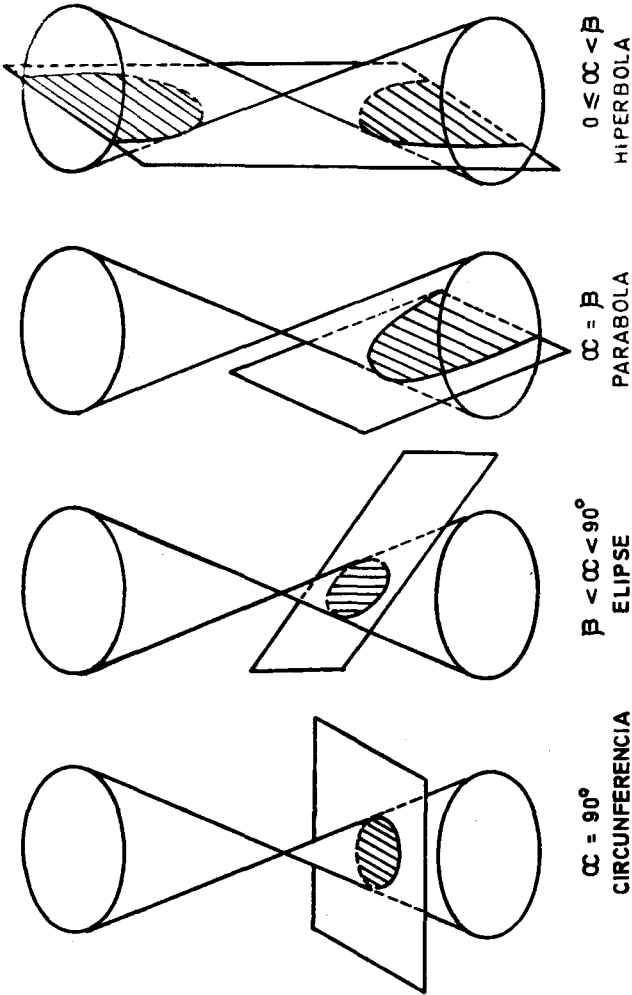


Fig. 3.32

otros instrumentos ópticos; a predicciones meteorológicas, comunicaciones por satélites, geodesia y construcciones de edificios y puentes.

Las cónicas también aparecen en el estudio de la estructura atómica y en los sistemas de mando a control remoto de barcos y aeroplanos.

Las superficies de revolución formadas por las secciones cónicas, tienen aplicaciones en las ciencias que tratan de la luz, del sonido y de las ondas de radio.

Estos ejemplos y muchos más que no se han indicado, demuestran la importancia de las secciones cónicas.

Capítulo 4

SISTEMAS DE COORDENADAS POLARES

4.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores hemos utilizado el sistema cartesiano rectangular como referencia para la ubicación de puntos en un plano. Sin embargo existen otros sistemas de coordenadas que para determinados problemas pueden ser utilizados con mayores ventajas que el cartesiano. Uno de estos sistemas es el de coordenadas polares que definiremos a continuación.

Consideremos una recta en el plano geométrico que llamaremos *eje polar* y un punto fijo en esta recta que llamaremos *polo*. Fijamos la dirección positiva del eje polar a la derecha del polo. Para cada punto P del plano consideremos el segmento \overline{OP} que une el polo O con el punto P y el ángulo θ que hace este segmento \overline{OP} con la parte positiva del eje polar. La longitud de \overline{OP} es el *radio vector*, que se denota por r y θ es el *ángulo polar* o *vectorial*.

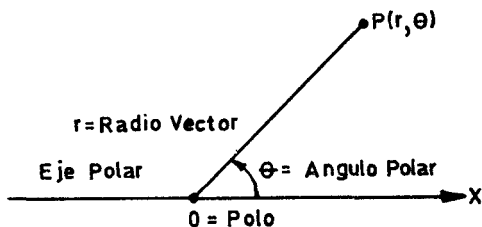


Fig. 4.1

Los valores de r y θ se llaman las *coordenadas polares* del punto P y se denotan por $P (r, \theta)$.

Hay diversas convenciones acerca de los signos que se pueden asignar a r y θ . Nosotros usaremos la siguiente:

CONVENCION DE SIGNOS DEL ANGULO POLAR Y EL RADIO VECTOR:

1ro.— El ángulo polar θ se mide siempre a partir de la parte positiva del eje polar y es positivo si la medida se efectúa en el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo si se hace en el sentido de las agujas de un reloj.

2do.— El radio vector se mide a partir del polo y es positivo cuando se mide sobre la línea terminal (OP) del ángulo polar y negativo si se mide sobre la prolongación de esta línea a través del polo.

El ángulo polar se puede dar en cualquier medida angular pero lo más frecuente es usar grados sexagesimales o radianes.

Dado entonces un par de coordenadas polares, existe un *único* punto P del plano con dichas coordenadas. Así, los puntos del plano correspondientes a los pares de coordenadas polares $(2, 30^\circ)$, $(-3, \pi/2)$, $(1, -60^\circ)$ y $(-2, -45^\circ)$ son los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 respectivamente (figura 4.2).

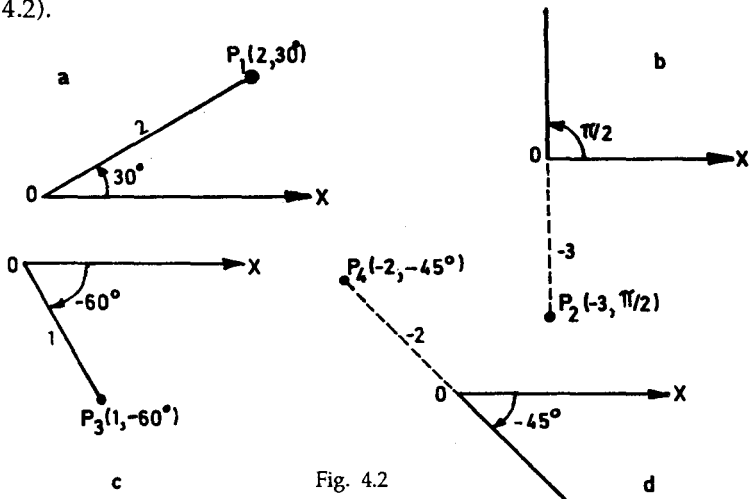


Fig. 4.2

Sin embargo el problema recíproco ya no mantiene la unicidad de relación entre un punto del plano y sus coordenadas polares. En efecto, la convención dada permite que un punto del plano pueda ser representado por infinitos pares de coordenadas polares. En primer lugar observemos que un ángulo polar θ y un ángulo polar $\theta + 2n\pi$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, tienen un lado final común; luego el punto $P(r, \theta)$ admite también las coordenadas $P(r, \theta + 2n\pi)$ para cualquier n entero. También el punto $P(r, \theta)$ tendrá coordenadas $(-r, \theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, e impar, por ejemplo. En fin, hay pues infinitos pares de coordenadas que corresponden a un mismo punto del plano.

Por ejemplo, el punto $P(2, 30^\circ)$ admite también las coordenadas polares $(-2, 210^\circ)$, $(2, -330^\circ)$, $(-2, -150^\circ)$, $(2, 390^\circ)$, entre otros.

Ya veremos más adelante los graves inconvenientes que acarrea esta falta de bi-unicidad entre pares de coordenadas polares y puntos del plano.

4.2 CAMBIOS DE COORDENADAS

Frecuentemente es necesario transformar la ecuación cartesiana de un lugar geométrico en la respectiva ecuación polar y viceversa.

Las fórmulas que permiten estas transformaciones se pueden determinar fácilmente si consideramos un sistema cartesiano rectangular y un sistema polar de manera que el origen y el eje de abscisas del primero coincidan con el polo y el eje polar del segundo, respectivamente, como en la figura 4.3.

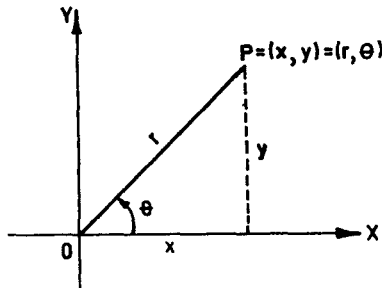


Fig. 4.3

Entonces, para un punto P cualquiera que tenga coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) , se pueden establecer las fórmulas:

$$x = r \cos \theta \quad (4.1) \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad (4.2)$$

que permiten obtener las coordenadas cartesianas de un punto conociendo sus coordenadas polares.

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y luego sumándolas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{ó} \quad r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.3)$$

Dividiendo miembro a miembro, las dos primeras ecuaciones:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{o} \quad \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (y/x), \quad (4.4)$$

$$\text{con } x \neq 0$$

Las ecuaciones (4.3) y (4.4) permiten conocer las coordenadas polares de un punto conociendo sus coordenadas cartesianas.

Finalmente, utilizando las fórmulas (4.1), (4.2) y (4.3), se obtienen las dos siguientes que serán de utilidad en futuras transformaciones:

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.5), \quad \cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.6)$$

Ejemplo 4.1. Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(-2, 135^\circ)$.

Usando las fórmulas (4.1) y (4.2):

$$x = r \cos \theta = -2 \cos 135^\circ = (-2) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = -2 \operatorname{sen} 135^\circ = (-2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

$$\text{Luego: } P (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

En este caso no hay más que una solución posible.

Ejemplo 4.2. Hallar las coordenadas polares de un punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(-3, -2)$.

Empleando (4.3) y (4.4):

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{9 + 4} = \pm \sqrt{13}$$

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{arc tg} \left(\frac{-2}{-3} \right) = \text{arc tg} \left(\frac{2}{3} \right) = \text{arc tg} (0.666)$$

En este caso tenemos infinitas soluciones.

Generalmente, mientras no se pida expresamente otra cosa, escogeremos de las infinitas soluciones, aquella que corresponde a un valor de r *positivo* y un valor de θ comprendido entre $0 \leq \theta < 360^\circ$. Al par así escogido se le denomina *par principal* de coordenadas polares del punto. En el ejemplo, por estar P en el 3er. cuadrante, su par principal es $(\sqrt{13}, 213^\circ 41')$.

Otros pares de coordenadas polares de P son, por ejemplo

$$(-\sqrt{13}, 33^\circ 41'), \quad (\sqrt{13}, -146^\circ 19')$$

Ejemplo 4.3. Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico cuya ecuación polar es $r = 2 \text{ sen } \theta$.

Usando (4.3) y (4.5):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Efectuando: } x^2 + y^2 = 2y \quad \text{ó} \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Ecuación de una circunferencia de centro $(0, -1)$ y radio 1.

Ejemplo 4.4. Determinar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación es $x^2 - 4y - 4 = 0$ (parábola de vértice en $(0, -1)$ y eje focal el eje Y).

Reemplazando en la ecuación cartesiana: $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$, se obtiene:

$$r^2 \cos^2 \theta - 4r \operatorname{sen} \theta - 4 = 0 ,$$

$$r^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - 4r \operatorname{sen} \theta - 4 = 0 ,$$

$$r^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4r \operatorname{sen} \theta + 4 = (r \operatorname{sen} \theta + 2)^2 . \text{ De donde:}$$

$$r = \pm (r \operatorname{sen} \theta + 2) , \text{ o sea:}$$

$$r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta} \quad \text{ó} \quad r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$$

Podría parecer que las dos ecuaciones encontradas representan lugares geométricos distintos, sin embargo este es uno de los inconvenientes que mencionamos, se presenta por la falta de biunicidad entre puntos del plano y sus coordenadas polares: *La ecuación de un lugar geométrico puede expresarse de varias formas distintas en coordenadas polares.*

Recordemos que las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ corresponden a un mismo punto. Luego, podemos reemplazar en la segunda ecuación (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$:

$$r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow -r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} (\theta + \pi)} \Leftrightarrow r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$$

Es decir, las dos ecuaciones representan al mismo lugar geométrico.

La solución puede ser, entonces,

$$r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$$

4.3. GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

De acuerdo a la definición dada en la sección 1.4, la gráfica de una ecuación en polares es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación.

Según esto, el método general para trazar una gráfica consiste en dar valores a una de las variables en la ecuación y encontrar el valor correspondiente a la otra variable, determinándose así pares (r, θ) que satisfacen la ecuación.

En la práctica el trazado de gráficas puede simplificarse si se efectúa previamente un estudio de intersecciones, simetría y extensión.

La determinación de asíntotas en polares, sin el auxilio del cálculo diferencial, es bastante complicado y preferimos dejarlo para el capítulo 5 cuando el estudiante tenga nociones de límites.

Intersecciones.— Las intersecciones que se acostumbra a determinar son las correspondientes al eje polar y a un eje perpendicular al eje polar en el polo.

Las primeras se encuentran haciendo $\theta = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, n\pi$ en general, para $n \in \mathbf{Z}$ y determinando en la ecuación los correspondientes valores de r .

Si existen algunas intersecciones con el eje a 90° , estas se obtendrán haciendo $\theta = \frac{n}{2} \pi$, $n \in \mathbf{Z}$ e impar, ó sino:

$$\theta = \left(\frac{2n + 1}{2} \right) \pi, n \in \mathbf{Z} .$$

Simetrías.— Las más importantes son las siguientes:

a) *Simetría con respecto al eje polar* (fig. 4.4)

Existe simetría con respecto al eje polar, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $-\theta$, ó
- Se reemplaza θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.

b) *Simetría con respecto al eje a 90°* (fig. 4.5).

Hay simetría con respecto al eje 90° , si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $\pi - \theta$, ó
- Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$.

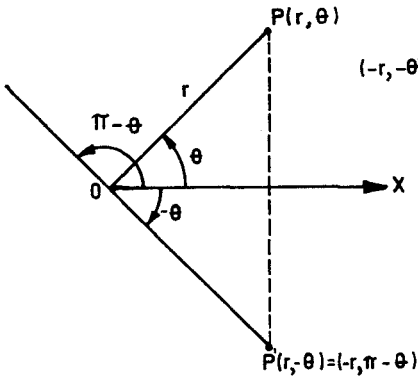


Fig. 4.4.

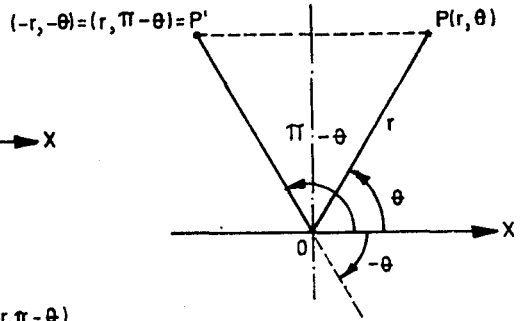


Fig. 4.5

c) *Simetría con respecto al polo* (Fig. 4.6).

Se tiene simetría con respecto al polo, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $\pi + \theta$, ó
- Se reemplaza r por $-r$.

Extensión. Para analizar la extensión de la gráfica, conviene en lo posible despejar r en función de θ . Los valores de θ que hacen a r imaginario ó complejo, deben ser desechados. Si algún valor de θ hace $r = +\infty$, esto indica que la curva "tiende hacia el infinito en esa dirección". A menudo, importantes cambios se presentan en las vecindades de los valores de θ que hacen $r = +\infty$ y por lo tanto puede ser útil determinar valores de r correspondientes a valores de θ un poco menores y un poco mayores que los que hacen a r infinito.

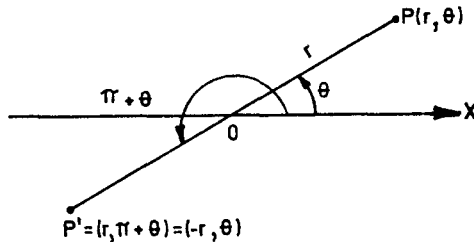


Fig. 4.6

También es importante determinar los valores de θ que hacen a r máximo o mínimo.

Todos estos puntos serán aclarados a lo largo de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.5. Dibujar la curva de ecuación: $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$.

Primero estudiaremos intersecciones, simetría y extensión.

a) *Intersecciones*

Con el eje polar: para $\theta = n\pi$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Con el eje a 90° : para $\theta = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Las intersecciones con los ejes se reducen al polo ($r = 0$). El haber obtenido $r = 0$ para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ indica que la curva se acerca al polo siguiendo las direcciones de los ángulos polares 0° y 90° .

b) *Simetrías.*— Con respecto al eje polar; cambiamos θ por $-\theta$ y observamos que la ecuación se altera: $r = 3 \operatorname{sen} 2(-\theta) = 3 \operatorname{sen} (-2\theta) = -3 \operatorname{sen} 2\theta$.

Sin embargo esto no indica que no existe la simetría; debemos además verificar la segunda regla, es decir, reemplazar θ por $\pi - \theta$ y $-r$ por $-r$:

$$\begin{aligned} -r &= 3 \operatorname{sen} 2(\pi - \theta) = 3 \operatorname{sen} (2\pi - 2\theta) = 3 \operatorname{sen} (-2\theta) = -3 \operatorname{sen} 2\theta \Leftrightarrow \\ r &= 3 \operatorname{sen} 2\theta. \end{aligned}$$

Luego existe simetría con respecto al eje polar.

— Con respecto al eje a 90° :

Se reemplaza θ por $\pi - \theta$;

$$r = 3 \operatorname{sen} 2(\pi - \theta) = 3 \operatorname{sen} (2\pi - 2\theta) = 3 \operatorname{sen} (-2\theta) = -3 \operatorname{sen} 2\theta. \text{ No cumple.}$$

Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$:

$$-r = 3 \operatorname{sen} 2(-\theta) = 3 \operatorname{sen} (-2\theta) = -3 \operatorname{sen} 2\theta \Leftrightarrow r = 3 \operatorname{sen} 2\theta.$$

Existe simetría con respecto al eje a 90° .

— Con respecto al polo:

Se reemplaza r por $-r$ y se observa que no cumple.

Se reemplaza θ por $\pi + \theta$.

$$r = 3 \operatorname{sen} 2(\pi + \theta) = 3 \operatorname{sen} (2\pi + 2\theta) = 3 \operatorname{sen} 2\theta .$$

Existe simetría con respecto al polo.

c) *Extensión.*— Por la simetría con respecto a los dos ejes y al polo, será suficiente estudiar la extensión para valores de θ correspondientes al primer cuadrante: $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

Para todo valor de θ en el intervalo anterior, r existe con valores reales.

El valor máximo de r se obtiene cuando $\operatorname{sen} 2\theta = 1$, es decir cuando $2\theta = 90^\circ$ ó $\theta = 45^\circ$ y corresponde a $r = 3$.

El mínimo valor ya lo obtuvimos para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ y corresponde a $r = 0$, el polo.

d) *Otros puntos de la curva*

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2θ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\operatorname{sen} 2\theta$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/2$	0
$r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$	0	$3/2$	2.60	3	2.60	$3/2$	0

e) *Gráfica.*— (Ver Fig. 4.7)

Ejemplo 4.6. Dibujar la gráfica de la ecuación $r = 6 \cos \theta + 3$.

a) *Intersecciones.*— Con el eje polar: $\theta = 0 \Rightarrow r = 9$
 $\theta = 180^\circ \Rightarrow r = -3$

Para otros múltiplos de π se obtienen los mismos valores. Luego hay dos puntos de intersección con el eje polar: $(9, 0^\circ)$ y $(-3, 180^\circ)$.

Con el eje a 90° : $\theta = 90^\circ \Rightarrow r = 3$
 $\theta = 270^\circ \Rightarrow r = 3$

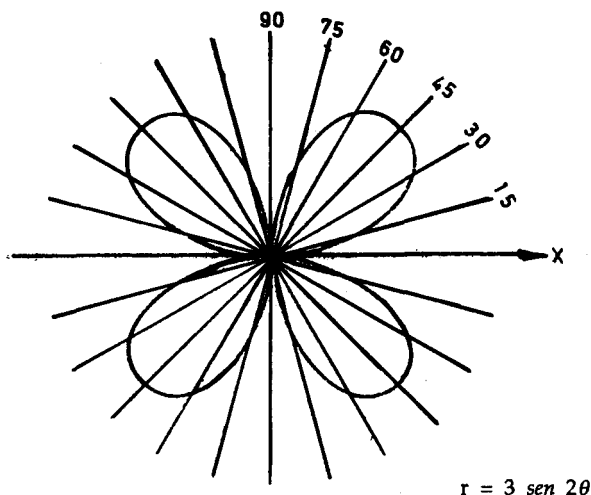


Fig. 4.7

Para otros múltiplos de la forma $(2n + 1) 90^\circ$, para $n \in \mathbf{Z}$, se obtienen los mismos valores.

Luego hay dos puntos de intersección con el eje a 90° : $(3, 90^\circ)$ y $(3, 270^\circ)$.

b) *Simetrías.*— La única simetría que se puede verificar es la que corresponde al eje polar, pues al cambiar θ por $-\theta$ no cambia la ecuación.

No hay simetría con respecto a un eje a 90° ni con respecto al polo (verificarlo).

c) *Extensión.* Para todo valor de θ se obtiene uno de r , real y finito. La curva es cerrada. El máximo valor de r corresponde al valor θ que hace $\cos \theta = 1$, es decir $\theta = 0^\circ$ y $r = 9$.

El mínimo valor de r corresponde al valor de θ que hace $\cos \theta = -1$, es decir $\theta = 180^\circ$ y $r = -3$.

Conviene también estudiar para qué valores de θ , si existen, r toma el valor de cero:

$$0 = 6 \cos \theta + 3, \quad \cos \theta = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$\theta = 120^\circ$ y 240° como valores principales. La curva pasa por el polo con direcciones 120° y 240° respectivamente.

d) *Otros puntos de la curva.*— Por la simetría con respecto al eje polar será suficiente dar valores a θ entre 0 y 180° . En la gráfica la parte que se ha dibujado por simetría, aparece en trazo discontinuo.

En la tabla que se da a continuación, se han tabulado los pasos que hay que efectuar para encontrar algunos puntos adicionales de la curva.

La última línea de la tabla se ha empleado para indicar las letras que se les ha asignado a los puntos respectivos de la gráfica en la figura 4.8.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	105°	120°	135°	150°	180°
$\cos \theta$	1	0.87	0.71	0.5	0	-0.26	-0.5	-0.71	-0.87	-1
$6\cos \theta$	6	5.2	4.2	3	0	-1.56	-3	-4.2	-5.2	-6
$r = 6\cos\theta + 3$	9	8.2	7.2	6	3	1.44	0	-1.2	-2.2	-3
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Ejemplo 4.7. Gráfica de la ecuación en polares de la espiral

hipérbolica $r = \frac{\pi}{\theta}$, para valores de $\theta > 0$.

Para que la ecuación tenga sentido, los valores de θ deben ser tomados en radianes.

Para todo valor de $\theta \neq 0$ existe valor real de r .

Conforme θ se acerca al valor cero, r va tomando valores cada vez más grandes tendiendo hacia infinito.

"Si θ varía entre 0 y 2π radianes (1 vuelta completa), r decrecerá desde $+\infty$ hasta $1/2$. Si θ sigue creciendo indefinidamente entonces el denominador del segundo miembro de la ecuación aumentará de valor

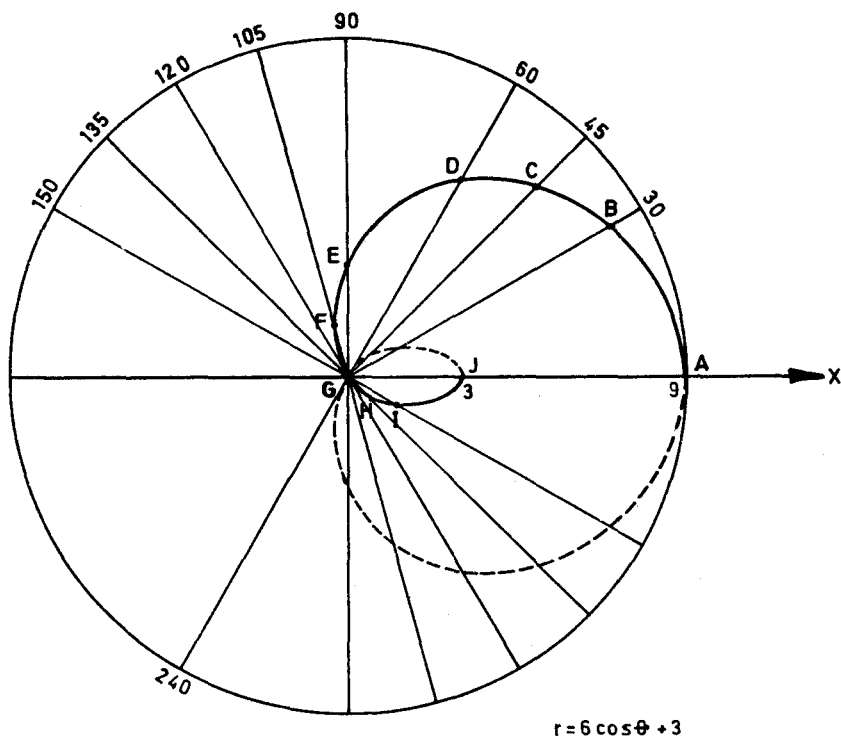


Fig. 4.8

indefinidamente y r decrecerá tendiendo a cero. Es decir, al crecer el ángulo polar la curva se va enrollando alrededor del polo pero sin llegar nunca a pasar por él. Se dice que el polo es un *punto asintótico* de la curva.

La curva cortará entonces a toda recta que pasa por el polo en infinitos puntos. Así por ejemplo, la dirección del eje polar está dada por los valores de $\theta = n\pi$ para cualquier n entero. Luego los infinitos puntos de corte de la curva con el eje polar son

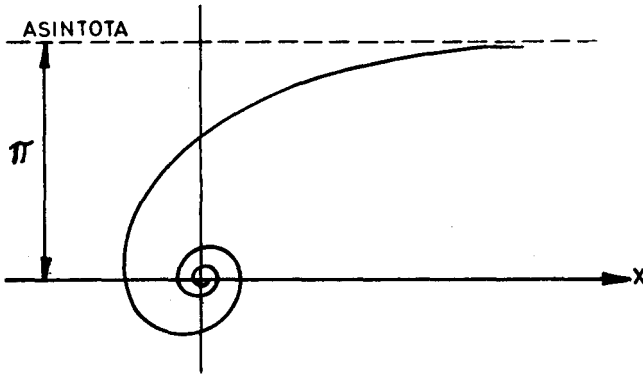
$$P_n \left(n\pi, \frac{1}{n} \right)$$

para n entero distinto de cero.

Ya vimos que para $n = 0$, $r = +\infty$ y la curva puede tener una asíntota según la dirección $\theta = 0$, es decir, una asíntota paralela al eje polar. La distancia de la asíntota (si existe) al polo se puede determinar fácilmente empleando límites y lo haremos en el capítulo siguiente. En nuestro caso, la asíntota dista π unidades del polo.

Las coordenadas de algunos puntos de la gráfica se encuentran en la tabla siguiente:

θ	$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	crece indefinidamente
$r = \frac{\pi}{\theta}$	12	6	4	3	2	1	2/3	1/2	2/5	decrece hacia cero.



Espiral hiperbólica $r = \pi/\theta$

Fig. 4.9

Hemos visto en coordenadas cartesianas que las ecuaciones más simples son $x = constante$ ó $y = constante$, que representan rectas paralelas a los ejes coordenados. En coordenadas polares también las ecuaciones más simples son de la forma $\theta = constante$ y $r = constante$.

La primera ecuación, $\theta = k$, constante, representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo ángulo polar es igual a k y su radio vector, cualquier valor. Es decir, se trata de una recta que pasa por el polo y forma un ángulo $\theta = k$ con el eje polar.

La segunda ecuación, $r = a$, constante, representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo radio vector es igual al valor a y su ángulo polar cualquier valor. La gráfica es una circunferencia de centro el polo y radio a .

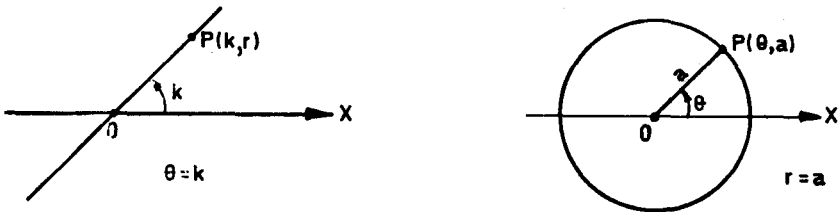


Fig. 4.10

INCONVENIENTES DE LA MULTIPLE REPRESENTACION QUE TIENE UN PUNTO EN COORDENADAS POLARES

Cuando se utiliza el sistema polar debe tenerse cuidado con los errores que se pueden presentar debido al hecho de que un punto tiene más de un par de coordenadas polares que lo representan.

Por ejemplo, algunas veces las coordenadas de un punto no satisfacen a una ecuación dada, pero sin embargo otro par de coordenadas del mismo punto si la satisface. Este es el caso del punto $P(3/2, -15^\circ)$ el cual, aparentemente, no pertenece a la gráfica de la ecuación $r = 3 \text{ sen } 2\theta$ puesto que sus coordenadas no la satisfacen: $3/2 \neq 3 \text{ sen } (-30^\circ) = 3(-1/2) = -3/2$.

Sin embargo el par $(-3/2, 165^\circ)$ que representa al mismo punto P , si es solución de la ecuación: $-3/2 = 3 \text{ sen } (330^\circ) = 3(-1/2) = -3/2$.

Debe también tenerse cuidado cuando se estudia la simetría de una curva, pues solo podemos asegurar que *no* es simétrica después de haber analizado todas las posibles representaciones de puntos simétricos correspondiente (ver ejemplo 4.5).

Cuando se trata de lugares geométricos, debe recordarse que estos pueden tener dos ó más ecuaciones distintas que los representan. Como en el caso de las ecuaciones

$$r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta} \quad \text{y} \quad r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} \theta} \quad \text{del ejemplo 4.4}$$

Cuando se estudia la extensión de una ecuación, a menudo sucede que algunos valores de θ hacen r imaginario sin que esto signifique que necesariamente no exista curva en la región correspondiente.

Por ejemplo, en la ecuación $r^2 = \operatorname{sen} \theta$, r es imaginario para $180^\circ < \theta < 360^\circ$, lo que parecería indicar que no existe curva por debajo del eje polar; sin embargo para cualquier valor de $0 < \theta < 180^\circ$ se obtienen dos valores de r , uno positivo y otro negativo. El valor negativo nos dará justamente puntos de la curva por debajo del eje polar.

Estos son algunos ejemplos de los casos que nos obligan a extremar el cuidado cuando trabajamos en coordenadas polares.

4.4. INTERSECCIONES DE GRAFICAS EN POLARES

Las coordenadas de los puntos de intersección de dos gráficas en polares se determinan, igual que en cartesianas, resolviendo simultáneamente las ecuaciones respectivas o sus equivalentes. La diferencia está en que las ecuaciones por resolver no serán algebraicas sino trigonométricas en la mayoría de los casos.

Para tener seguridad de que se han encontrado todos los puntos de intersección, es recomendable hacer un croquis de las gráficas respectivas.

Ejemplo 4.8. Determinar los puntos de intersección de $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 3 \operatorname{cos} \theta$.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones dadas:

$$2 \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{cos} \theta, \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{2}, \quad \text{de donde } \theta = 56^\circ 18' + n \cdot 180^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Los valores principales son $\theta_1 = 56^\circ 18'$ y $\theta_2 = 236^\circ 18'$.

Los valores de r correspondientes son $r_1 = 2 \operatorname{sen} 56^\circ 18' = (2) 0.832 = 1.664$, y $r_2 = 2 \operatorname{sen} 236^\circ 18' = 2 (-0.832) = -1.664$.

Ambos pares de coordenadas corresponden al mismo punto $P_1(1.664, 56^\circ 18') = (-1.664, 236^\circ 18')$. Cualquier otro valor de θ para n distinto de uno o cero, conducirá al mismo punto P_1 .

Aparentemente P_1 es el único punto que tienen en común las gráficas. Sin embargo, como las coordenadas del polo son $r = 0$ y θ cualquier valor, debe siempre analizarse por separado si el polo es un punto de la intersección de las gráficas.

Bastará verificar si en cada una de las ecuaciones existe un valor de θ que hace que r sea nulo.

En nuestro ejemplo, para $\theta = 0^\circ$ se obtiene $r = 0$ en la ecuación $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ y para $\theta = 90^\circ$ se obtiene también $r = 0$ en la segunda ecuación $r = 3 \operatorname{cos} \theta$.

Luego el polo pertenece a ambas gráficas y es por tanto otro punto de intersección.

Las dos gráficas se dan en la figura 4.11.

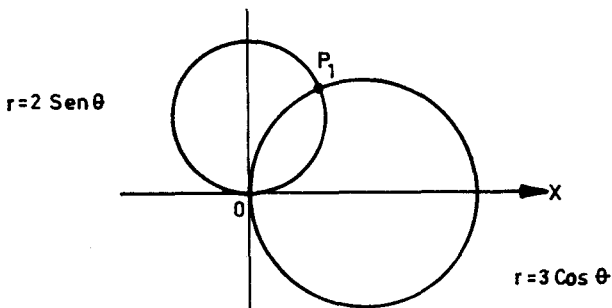


Fig. 4.11

Ejemplo 4.9. Determinar los puntos de intersección de las curvas de ecuación $r = \text{sen}^2\theta$ y $r = \text{cos}^2\theta$.

Procediendo como en el ejemplo anterior, se verifica que el polo es un punto de intersección de las curvas dadas.

Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones dadas:

$$\text{cos}^2\theta = \text{sen}^2\theta \quad , \quad \text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 0 \quad , \quad \text{cos } 2\theta = 0 \quad .$$

Luego: $2\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Por tanto:

$$\text{sen } \theta = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad , \quad \text{expresión que es igual a } \pm \text{cos } \frac{\pi}{4} =$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{si } n \text{ es impar, y a } \pm \text{sen } \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{si } n \text{ es par.}$$

Luego para todo valor de n se obtiene:

$$r = \text{sen}^2 \theta = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \quad .$$

Los valores principales de θ se obtienen dando a n los valores $n = 0, 1, 2$ y 3 , respectivamente.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{4} \quad , \quad \text{y} \quad \theta_4 = \frac{7\pi}{4} \quad .$$

Los puntos de intersección son cinco:

El polo, $P_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \right)$, $P_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$, $P_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{4} \right)$ y

$$P_4 \left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{4} \right) \quad .$$

La gráfica correspondiente está dada en la figura 4.12 donde se aprecia que estos son los únicos 5 puntos de intersección.

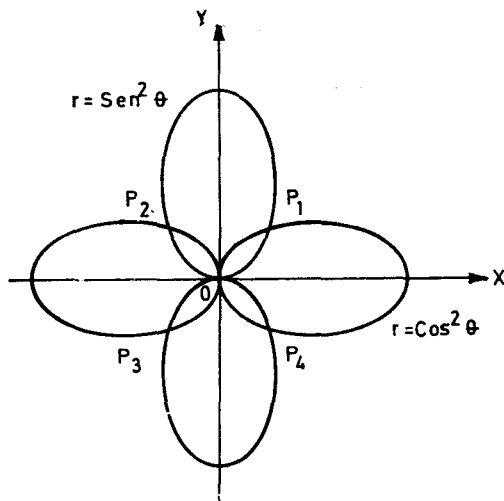


Fig. 4.12

4.5. LUGARES GEOMETRICOS EN POLARES

Este problema ya fue tratado en coordenadas cartesianas en el primer capítulo. Sin embargo, en el caso de polares, debe ponerse especial cuidado para que la ecuación determinada sea tal que las coordenadas de *todos* los puntos del lugar geométrico sean solución de ella y a su vez *ningún* punto que no esté en el lugar geométrico tenga algún par de coordenadas que sea solución de la ecuación.

Como señalamos anteriormente, no existe método general que pueda seguirse en la determinación de ecuaciones de lugares geométricos. Una recomendación importante es iniciar la solución del problema haciendo un croquis con los datos y luego plantear las condiciones que deben cumplir r y θ para que el punto genérico $P(r, \theta)$ pertenezca al lugar geométrico dado.

Algunos ejemplos ilustrarán la forma de como debe procederse.

Ejemplo 4.10. Un segmento de recta de longitud constante igual a 6 unidades, se mueve de modo que sus extremos están siempre en dos rectas que se cortan a 90° . Determinar la ecuación del lugar geométrico

generado por el pie de la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las rectas al segmento dado.

Consideremos un sistema polar con su eje polar y su eje a 90° coincidentes con las rectas dadas.

Sea \overline{AB} el segmento de longitud 6 y $P(r, \theta)$ el pie de la perpendicular trazada de O al segmento \overline{AB} (figura 4.13).

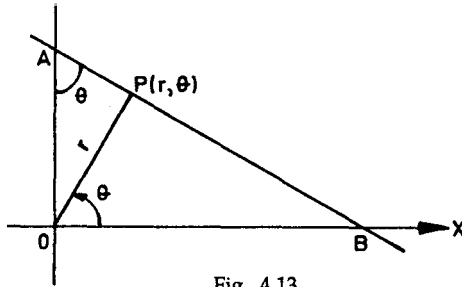


Fig. 4.13

En el triángulo rectángulo OPB : $r = d(O, B) \cos \theta$, y en el triángulo rectángulo AOB :

$$d(O, B) = d(A, B) \operatorname{sen} \theta = 6 \operatorname{sen} \theta.$$

Luego $r = 6 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 3 \operatorname{sen} 2 \theta$.

Como P puede estar en cualquiera de los 4 cuadrantes (según la posición de AB), la curva constará de cuatro ramas. La gráfica de $r = 3 \operatorname{sen} 2 \theta$, que analizamos en el ejemplo 4.5, corresponde a la rosa de 4 hojas.

Ejemplo 4.11. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del polo y de una recta paralela al eje polar que pasa por el punto $(4, \pi/2)$.

En la figura 4.14, $d(O, P) = d(P, R)$ es decir: $r = 4 - d(P, Q) = 4 - r \operatorname{sen} \theta$.

Luego: $r + r \operatorname{sen} \theta = 4$ y $r = \frac{4}{1 + \operatorname{sen} \theta}$.

Ecuación de una parábola de foco en el polo y vértice en $(2, \frac{\pi}{2})$.

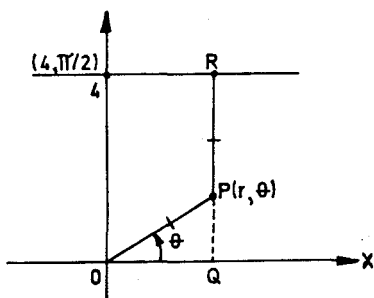


Fig. 4.14

Ejemplo 4.12. Sea una circunferencia de centro O , diámetro \overline{AB} y radio a . Sea M un punto que se desplaza sobre la circunferencia y N la proyección de este punto sobre \overline{AB} . Sea P el simétrico de N respecto al radio \overline{OM} . Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por P .

Consideremos un sistema polar de referencia como se indica en la figura 4.15. Si las coordenadas de P son (r, θ) , entonces:

$$r = d(O, P) = d(O, N) = a \cos \frac{\theta}{2} .$$

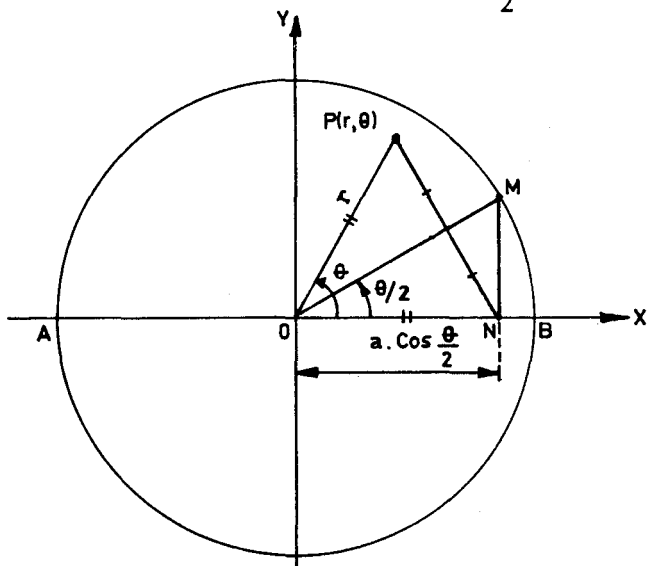


Fig. 4.15

EJECICIOS 4.1

1.— Ubicar en un sistema polar los puntos de coordenadas:

$$(-3, 45^\circ), (2, -135^\circ), \left(-1, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\pi\right),$$

$(-2.5, 7 \text{ rad.}).$

2.— Escribir tres pares de coordenadas distintas para cada uno de los puntos del ejercicio 1.

3.— Determinar las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas polares son:

$$(0, 90^\circ), (\sqrt{2}, -45^\circ), (5, 420^\circ), (4, 0^\circ), (-1, \pi), \left(-\sqrt{2}, \frac{5}{2}\pi\right),$$
$$\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

4.— Determinar la representación polar principal de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son:

$$(1, 1), (\sqrt{3}, -1), (5, 2), (-1, -\sqrt{3}), (2, 0) (0, 3).$$

5.— Hallar la ecuación cartesiana correspondiente a cada una de las ecuaciones polares siguientes:

$$\text{a) } r = 3 \cos \theta ; \quad \text{b) } r = \frac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta} ; \quad \text{c) } r = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta} ;$$

$$\text{d) } r = \frac{6}{1 - 1/2 \cos \theta} .$$

6.— Hallar la ecuación polar correspondiente a cada una de las ecuaciones cartesianas siguientes:

- a) $xy = 2$
- b) $x^2 + y^2 = 16;$
- c) $2x - y = 0;$
- d) $x^2 - y^2 = 4$
- e) $y^2 - 3x^2 - 24x - 36 = 0$

7.— Trazar la gráfica de las ecuaciones:

a) $r = \frac{3}{2}$ b) $\theta = 2$ radianes c) $r = 4 \operatorname{cosec} \theta$

d) $r = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ e) $r = \operatorname{sen} \frac{\theta}{3}$ f) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

g) $r^2 = \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\cos \theta}$ h) $r = \cos 3\theta$ i) $r = 2(1 - \cos \theta)$.

8.— Determinar los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas:

a) $r = \frac{\pi}{\theta}$ b) $r = 2 \cos \theta$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$ $r = 1$

c) $r = \frac{1}{2 + 2 \cos \theta}$ d) $r^2 = 9 \cos 2\theta$
 $r = 2 \cos \theta + 1$ $r = 3\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$

9.— Desde un punto fijo O de una circunferencia cuyo diámetro mide 6 unidades se traza una cuerda cualquiera \overline{OB} . Determinar la ecuación polar del punto P que se encuentra a una distancia constante igual a 3 unidades del punto B y sobre la cuerda \overline{OB} o su prolongación.

10.— Dos vértices opuestos de un cuadrado son

$$P_1 \left(2, \frac{13\pi}{6} \right) \text{ y } P_2 \left(3, -\frac{17\pi}{6} \right).$$

Determinar el área del cuadrado.

11.— Determinar la ecuación en polares del lugar geométrico de los puntos que equidistan del polo y de la recta perpendicular al eje polar en el punto $(-3, 0^\circ)$.

12.— La ecuación $r = 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$ representa una circunferencia. Determinar las coordenadas de su centro y la longitud del radio.

13.—Determinar el radio vector del punto $(-2, \pi/2)$ si se toma como polo el punto $(2, \pi/3)$ y eje polar un eje paralelo al primitivo.

14.—La ecuación

$$r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

representa a una cónica. Calcular la longitud de su lado recto.

15.—Verificar que la ecuación

$$r = \frac{16}{3 - 5 \cos \theta}$$

representa una de las ramas de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de las directrices y de las asíntotas de esta hipérbola.

Capítulo 5

LIMITES DE FUNCIONES

5.1. INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es iniciar y familiarizar al alumno con el concepto de límite, uno de los más importantes del análisis y que ha permitido tratar en forma rigurosa ideas como las de derivada, continuidad e integración de funciones.

En el capítulo siguiente se presentará el concepto de derivada de una función donde se apreciará su vinculación con el de límite de una función en un punto.

En este capítulo sobre límites, se insistirá principalmente en la definición misma de límite y en la técnica general de las demostraciones que será desarrollada a través de ejemplos sencillos y de la demostración de algunos teoremas básicos.

Se previene al alumno que no es común el obtener una completa comprensión de este concepto en un primer encuentro con él.

5.2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Esta vez, como en el caso de las relaciones reales nos referiremos a funciones en donde, tanto el dominio como el rango son subconjun-

tos de \mathbb{R} . Tales funciones se llaman *funciones reales de variable real* o simplemente *funciones reales*. En este sentido una *función real* f es todo subconjunto de \mathbb{R}^2 que cumple con la propiedad siguiente:

"dos pares distintos del subconjunto no pueden tener igual la primera componente".

La definición dada permite asegurar que para toda función se cumple la siguiente propiedad:

"ninguna recta vertical puede intersectar a la gráfica que representa a la función en más de un punto".

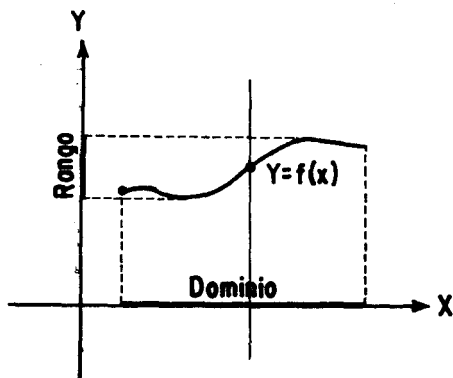


Fig. 5.1

Así, de los conjuntos de \mathbb{R}^2 siguientes:

$$f = \{(x, y) / y = 4\} , \quad g = \{(x, y) / y = x^2\}$$

$$h = \{(x, y) / y^2 = x\} , \quad s = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\} ,$$

sólo los dos primeros cumplen con la definición de función. Las gráficas correspondientes se indican en la siguiente figura:

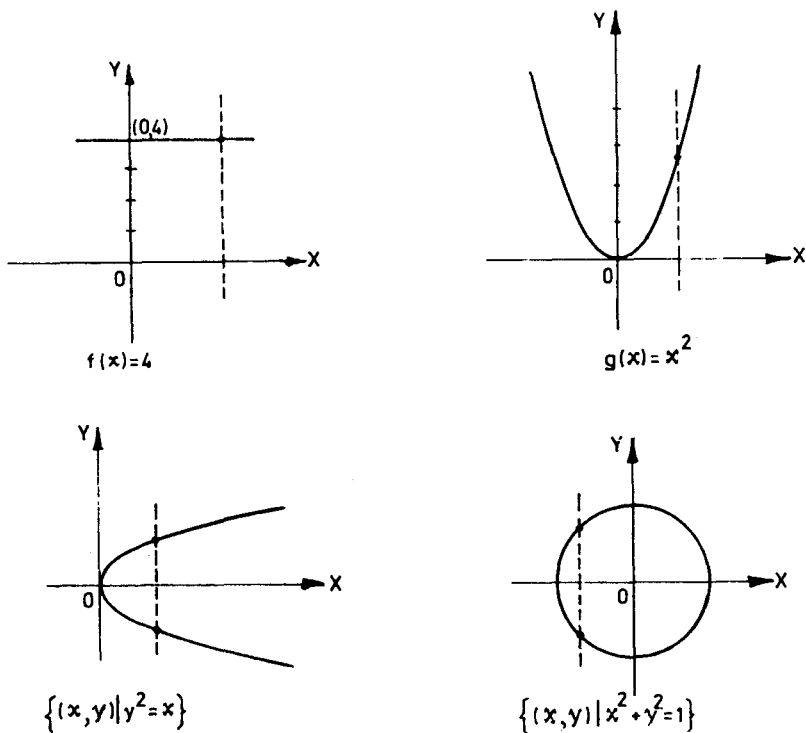


Fig. 5.2

También, como en el caso de las relaciones reales, usaremos preferentemente funciones que pueden ser definidas por ecuaciones lo que nos permitirá usar los resultados referentes a las relaciones definidas por ecuaciones.

La definición de función, también en este caso, nos permite establecer una correspondencia entre los elementos del dominio y los elementos del rango, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango. Esta correspondencia nos permitió sin confusión alguna, denotar a un par (x, y) de una función f , por $(x, f(x))$, es decir, escribir $y = f(x)$. Si por ejemplo, la función es:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3x + 4\}$$

podemos escribir simplemente

$$f(x) = 3x + 4,$$

para referirnos a ella o, también

$$f: x \longrightarrow 3x + 4,$$

lo cual subraya la correspondencia que existe entre los elementos x del dominio y los elementos $f(x) = 3x + 4$ del rango.

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

Definiremos a continuación algunas funciones reales que se usan a menudo.

✓ La función *identidad* I , que se define con la regla de correspondencia $I(x) = x$ y cuyo dominio es el conjunto \mathbb{R} .

La gráfica de la función identidad es la recta que pasa por el origen de coordenadas y cuyo ángulo que forma con el eje X , mide 45° .

✓ La función *constante*, que se define como la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = c$, c constante, cuyo dominio es \mathbb{R} . Su gráfico corresponde a una recta paralela al eje de las X y que pasa por el punto $(0, c)$.

✓ La función *valor absoluto*, es la función definida con la regla de correspondencia $f(x) = |x|$ y con dominio \mathbb{R} .

✓ La función *raíz cuadrada*, definida con la regla de correspondencia $f(x) = \sqrt{x}$ y cuyo dominio es el conjunto de los reales no negativos.

La gráfica de la función raíz cuadrada aparece a continuación.

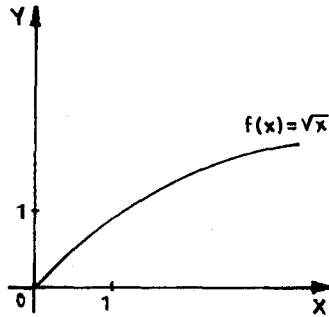


Fig. 5.3

La función *polinómica de grado n*, con la regla de correspondencia

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{con } a_1 \in \mathbb{R} \text{ y } a_n \neq 0, \text{ y cuyo}$$

dominio es el conjunto \mathbb{R} .

La función *mayor entero* definida con la regla de correspondencia $f(x) = \llbracket x \rrbracket$, en donde

$$\llbracket x \rrbracket = m, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ si y sólo si } m \leq x < m + 1.$$

El dominio de la función mayor entero es \mathbb{R} y su rango,

La gráfica de la función mayor entero aparece a continuación.

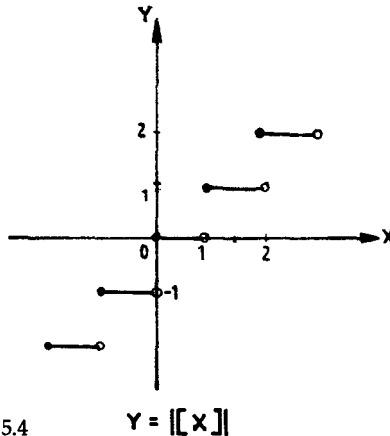


Fig. 5.4

IGUALDAD DE FUNCIONES

Dadas las funciones f y g , se dice que f es igual a g y se escribe $f = g$ si el dominio de f es igual al dominio de la función g y $f(x) = g(x)$, para todo x del dominio común.

OPERACIONES CON FUNCIONES REALES

Dadas las funciones f y g , con dominios $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$, respectivamente, se definen la *suma*, la *diferencia*, el *producto* y el *cociente* de f y g . Las notaciones que se usan son, respectivamente, $f + g$, $f - g$, fg , y f/g . Las reglas de correspondencia son:

Para la suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g).$$

Para la diferencia:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g).$$

Para el producto:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g).$$

Para el cociente:

$$(f/g)(x) = f(x) / g(x)$$

$$\forall x \in \text{Dom}(f) \cap \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 5.1. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g , tienen como reglas de correspondencia y como dominios, los que se indican a continuación:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x - 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } x \neq 2.$$

COMPOSICION DE FUNCIONES REALES

Además de las operaciones indicadas, revisaremos la composición de funciones, operación que fue estudiada en secciones anteriores.

Dadas las funciones reales

$$\begin{aligned} f &\text{ con dominio } A \text{ y rango } B \text{ y} \\ g &\text{ con dominio } C \subset B \text{ y rango } D, \end{aligned}$$

se denomina *composición* de g con f y se denota $g \circ f$, a la función cuyo dominio consiste de los elementos $x \in A$, tales que $f(x) \in C$ y cuya regla de correspondencia es:

$$[g \circ f](x) = g(f(x))$$

Ejemplo 5.2. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = x - 1 \text{ con } \text{Dom}(f) = [-1, 4]$$

$$g(x) = x^2 - 1 \text{ con } \text{Dom}(g) = [0, 2],$$

hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución.

La regla de correspondencia de $g \circ f$ es:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 - 1$$

y su dominio,

$$\begin{aligned} \text{Dom } (g \circ f) &= \{x \in \text{Dom } (f) / f(x) \in \text{Dom } (g)\} \\ &= \{x \in [-1, 4] / 0 \leq x - 1 \leq 2\} \\ &= [1, 3] \end{aligned}$$

La regla de correspondencia de $f \circ g$ es:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = x^2 - 2$$

y su dominio,

$$\begin{aligned} \text{Dom } (f \circ g) &= \{x \in \text{Dom } (g) / g(x) \in \text{Dom } (f)\} \\ &= \{x \in [0, 2] / -1 \leq x^2 - 1 \leq 4\} \\ &= [0, 2] \end{aligned}$$

FUNCION INVERSA

Hemos indicado que dada una función biyectiva

$$f = \{(x, f(x)) / x \in \text{Dom } (f)\}$$

la inversa de f ,

$$f^{-1} = \{(f(x), x) / x \in \text{Dom } (f)\},$$

es una función que cumple con $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$, que su dominio es el rango de f y que su rango es el dominio de f .

Usaremos ejemplos para aplicar estos conceptos.

Ejemplo 5.3. La función f definida por:

$$f(x) = 3x + 5 \quad x \in \mathbb{R}$$

es una función biyectiva.

En efecto, $f(x_1) = f(x_2)$ implica: $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$; esto es:

$$x_1 = x_2$$

Esta prueba es suficiente pues es inmediato que f es suryectiva.

Se puede definir entonces, la inversa de f :

$$f^{-1} = \{(3x + 5, x) / x \in \mathbb{R}\}$$

Si escribimos $y = 3x + 5$, se tendrá, despejando el valor de x ,

$$x = \frac{y - 5}{3}$$

y así: $f^{-1} = \{(y, (y - 5) / 3), y \in \mathbb{R}\}$

Poniendo x en lugar de y , se obtiene:

$$f^{-1} = \{(x, \frac{x - 5}{3}) / x \in \mathbb{R}\}$$

Luego, la regla de correspondencia de la inversa la podemos escribir como:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3}$$

La inversa de una función real f , por lo estudiado, puede representarse gráficamente, a partir del gráfico de f . Su representación gráfica es simétrica a la de f , con respecto de la gráfica de $y = x$ (figura 5.5).

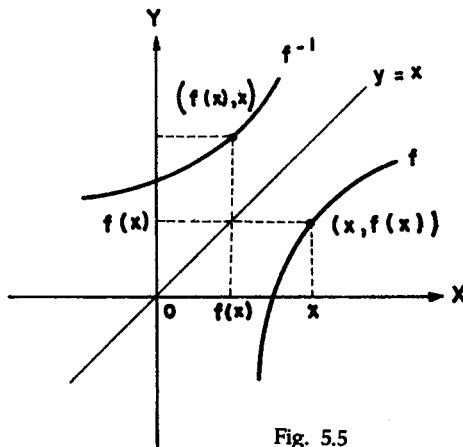


Fig. 5.5

Ejemplo 5.4. La función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y con dominio $[1, 4]$ tiene como rango al intervalo $[1, 2]$. El dominio de la función inversa de f tiene como dominio a $[1, 2]$ y su rango es $[1, 4]$. La regla de correspondencia es:

$$f^{-1}(x) = x^2$$

Las gráficas de f y de f^{-1} aparecen a continuación.

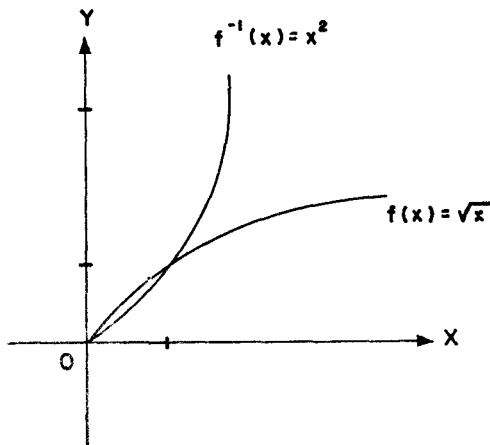


Fig. 5.6

Ejemplo 5.5. Restringir el dominio de la función f definida por $f(x) = x^2$ de tal modo que tenga inversa.

La función indicada tiene como dominio al conjunto \mathbb{R} y en tal conjunto ésta no es inyectiva; sin embargo si restringimos el dominio, por ejemplo, al conjunto

$$\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

la función f , como función de \mathbb{R}^+_0 en \mathbb{R}^+_0 es una función biyectiva, y como tal, tiene inversa. La regla de correspondencia de la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Ejercicios 5.1

1. Hallar el dominio y rango de las funciones reales de variable real, determinadas por las siguientes reglas de correspondencia. Representar gráficamente a cada una de las funciones.

- a. $f(x) = 1/x$
- b. $f(x) = \sqrt{x+1}$
- c. $f(x) = 4 - \sqrt{2x+3}$
- d. $f(x) = x^3$
- e. $f(x) = (x-2)^3$
- f. $f(x) = -(x+4)^3 + 2$
- g. $f(x) = \sqrt{x^2}$
- h. $f(x) = \llbracket 3x \rrbracket$
- i. $f(x) = |x-3| + 1$
- j. $f(x) = (x-3)^2$
- k. $f(x) = (x-3)^2 + 5$
- l. $f(x) = -(x-3)^2 + 5$
- m. $f(x) = \sqrt{x-5}$
- n. $f(x) = \sqrt{x+3}$
- o. $f(x) = 1/x$
- p. $f(x) = 1/(x-3)$
- q. $f(x) = \lceil 1/(x-3) \rceil + 2$
- r. $f(x) = x / (x-2)$
- s. $f(x) = \text{sen } x$
- t. $f(x) = \text{cos } x$

2. Sea $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$ y para cada entero positivo i sea $f(x) = i$ si $x \in [1/(i+1), 1/i]$.

Indique el dominio y rango de la función. Graficar f .

3. Dadas las funciones reales de variable real f , g y h , definidas por las reglas de correspondencia

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad h(x) = x^3 - x,$$

describir las siguientes funciones, indicando su dominio, rango y la regla de correspondencia.

a. $f + g$ b. g/f c. $f \cdot g$ d. f/h .

4. Dadas las funciones reales f y g , definidas por $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = \sqrt{x + 1}$, hallar:

- a. $(f \circ g)(3)$,
 b. $(g \circ f)(3)$
 c. la función $f \circ g$, indicando su dominio y su regla de correspondencia.

5. En cada caso hallar la regla de correspondencia y el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.

a. $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = x - 1$

b. $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$ $x \in [1, 5]$

c. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x + 2$

6. Decir si las funciones reales definidas por las siguientes reglas de correspondencia, son biyectivas. Si su respuesta es afirmativa, indique en cada caso, la función inversa.

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = 1/x$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

d. $f(x) = x^2 + 2$.

7. Dadas las siguientes reglas de correspondencia de funciones reales, restringir el dominio de tal modo que ellas tengan inversa.

a. $f(x) = x^2 + 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- b. $f(x) = |x|$
 c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
 d. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

5.3 IDEA INTUITIVA DE LIMITE

Veamos previamente a la definición rigurosa, un ejemplo donde se resalte la idea intuitiva de lo que significa límite de una función en un punto. Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$ (ver figura 5.7) y analicemos el comportamiento de los valores de la función cuando los valores de la variable se toman cada vez más próximos al valor cero:

x	± 1	± 0.8	± 0.6	± 0.4	± 0.2	± 0.1	± 0.04	± 0.01
$f(x) = x^2 + 1$	2	1.64	1.36	1.16	1.04	1.01	1.0016	1.0001

Se observa en el cuadro que conforme el valor x se acerca (tiende) a cero, sea manteniéndose positivo o negativo, $f(x)$ se acerca (tiende) al valor 1. Más aún, podemos encontrar valores de $f(x)$ tan próximos al valor 1 como deseemos con solo tomar a x suficientemente próximo a cero. En efecto, supongamos que se desee encontrar un intervalo que contenga a cero, de manera tal que para cualquier valor de x dentro de ese intervalo, siempre se tenga que el valor correspondiente de $f(x)$ difiera de uno, en valor absoluto, en menos de 0.002. Es decir, deseamos encontrar un intervalo de x tal que en dicho intervalo, para cualquier valor de x , se tenga: $|f(x) - 1| < 0.002$.

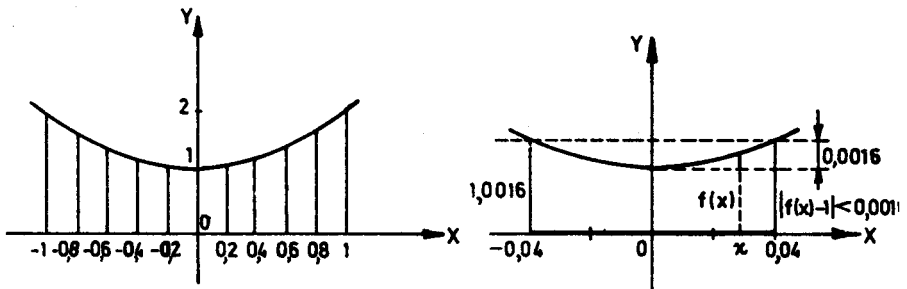


Fig. 5.7

En la tabla de valores calculada anteriormente, se aprecia que existe más de un intervalo que cumple la condición. Uno de ellos, por ejemplo, es el intervalo $]-0.04, 0.04[$. En efecto, el mayor valor de $f(x)$ en este intervalo es menor que el que corresponde a los valores $x = \pm 0.04$, para los cuales se obtiene $f(x) = 1.0016$ o sea que $|f(x) - 1| < |f(0.04) - 1| = 0.0016 < 0.002$. Para cualquier otro valor de x entre -0.04 y 0.04 la diferencia $|f(x) - 1|$ permanecerá con mayor razón menor que 0.002 .

El análisis que se ha efectuado para el número 0.002 podría haberse realizado en la misma forma para cualquier otro número positivo, por pequeño que éste sea, permitiéndonos encontrar un intervalo que contiene a cero y de manera que cualquier valor de x dentro del intervalo determina un valor de $f(x)$ tal que $|f(x) - 1|$ sea menor que el número dado.

Este análisis del comportamiento de la función en las vecindades del valor cero, nos permite asegurar que la función $f(x)$ se puede acercar al valor 1 cuanto se desee, con sólo tomar el valor de x suficientemente próximo a cero. Es decir, el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$, cuando x tiende a cero es uno.

Otro Ejemplo: consideremos la función:

$$m(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4}$$

definida para todo $x \neq 4$ en el intervalo $[-5, 5]$.

Para el valor $x = 4$ la función no está definida. Sin embargo nos interesa averiguar si existe un número al cual se acerca el valor de la función cuando x se acerca al valor 4. El estudio se hace con más facilidad si racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{(\sqrt{25 - x^2} - 3)(\sqrt{25 - x^2} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)} \\ &= \frac{25 - x^2 - 9}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16 - x^2}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)} = - \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)} \\
 &= \frac{-(x + 4)}{\sqrt{25 - x^2} + 3} \quad ; \quad x \neq 4.
 \end{aligned}$$

Puesta la función $m(x)$ bajo esta forma, podemos observar que cuando x se aproxima a 4, entonces su numerador se aproxima a -8 y

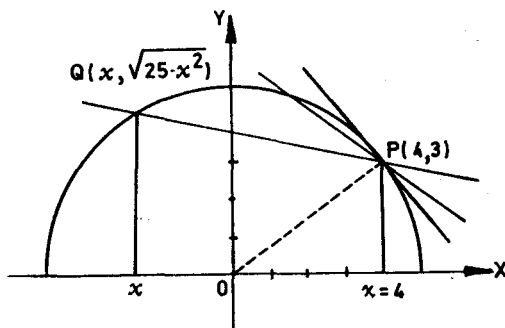


Fig. 5.8

su denominador a 6. Luego, para valores de x muy vecinos a $x = 4$, la función $m(x)$ tomará valores muy vecinos a $-4/3$. Podemos asegurar que $m(x)$ puede acercarse al valor $-4/3$ cuanto se desee con solo tomar x suficientemente próximo a 4. Es decir, el límite de la función $m(x)$ cuando x tiende a 4 es $-4/3$.

Tenemos así un ejemplo de una función que tiene límite cuando x tiende a 4, aunque, como se ha visto, la función no está definida en $x = 4$.

Este ejemplo tiene una interpretación geométrica interesante. Consideremos la semi-circunferencia de ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ y el punto $P(4, 3)$ sobre ella. Sea $Q(x, y) = (x, \sqrt{25 - x^2})$ un punto cualquiera de la semi-circunferencia, distinto de P . La pendiente de la secante que pasa por P y Q puede expresarse por la función $m(x)$ del ejemplo:

$$m(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4} \quad ; \quad x \neq 4.$$

Al acercarse x al valor 4, el punto Q se desplaza sobre la circunferencia aproximándose al punto P ; la secante gira alrededor de P tendiendo a convertirse en tangente a la curva en el punto P . Podemos pues *intuir* que el límite de $m(x)$ cuando x tiende a 4 nos da el valor de la pendiente de la tangente a la circunferencia en P , como posición límite de la secante que pasa por P y Q .

Como la pendiente del radio \overline{OP} es $3/4$, efectivamente la pendiente de la tangente a la curva en $P(4, 3)$ es $-4/3$.

5.4 DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION

En los ejemplos anteriores hemos empleado varias veces las frases: "*acercarse cuanto se desee*" y "*suficientemente próximo*", cuyo significado se dejó a la interpretación del alumno. La imprecisión en el significado de estas frases es lo que nos obliga a dar una definición más rigurosa y precisa de límite.

Diremos que la función f tiene por límite L cuando x tiende al valor a , si para todo número positivo ε , existe un número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumpla la condición $0 < |x - a| < \delta$.

Si existe el límite anterior, escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Nótese que la condición $0 < |x - a| < \delta$ representa geométricamente, en la recta real, un intervalo abierto con centro en a , longitud 2δ y al cual *no* pertenece el punto $x = a$:

Es importante observar que de acuerdo con esta aclaración, para estudiar el límite de una función en el punto $x = a$, sólo interesa analizar (como se hizo en los dos ejemplos previos) el comportamiento de la

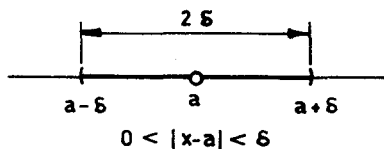


Fig. 5.9

función en puntos vecinos a $x = a$, no dependiendo este límite para nada del valor que la función puede tomar en $x = a$. Más aún, la función puede no estar definida para $x = a$ y sin embargo puede existir el límite en ese punto.

Para entender mejor la idea de límite, es útil dar una interpretación geométrica a la definición.

Ejemplo 5.6. Consideremos la función $f(x) = 3x - 2$ cuya gráfica aparece en la figura 5.10.

Cuando x tiende al valor $x = 2$, $f(x)$ tiende al valor 4 y podemos asumir (luego será verificado) que el límite de f en $x = 2$ es $L = 4$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$.

Si realmente $L = 4$ es el límite, entonces para todo $\varepsilon > 0$ debe existir un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| = |(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - 2| < \delta$.

Es decir, dado un $\varepsilon > 0$, cualquiera, existe un intervalo $]a - \delta, a + \delta[=]2 - \delta, 2 + \delta[$ tal que para todo x en este intervalo (excepto quizá $x = 2$), el valor de la función cae dentro del intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[=]4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon[$, Geométricamente esto significa que dada una franja horizontal de ancho 2ε con centro la recta $y = 4$, debemos poder encontrar una franja vertical de ancho 2δ con centro la recta $x = 2$, tal que la gráfica de $f(x) = 3x - 2$ en el intervalo $0 < |x - 2| < \delta$ esté íntegramente dentro del rectángulo intersección de las dos franjas mencionadas.

Con la ayuda de la figura 5.10 podemos verificar, geoméricamente, que cualquiera que sea el ε dado siempre podemos determinar un

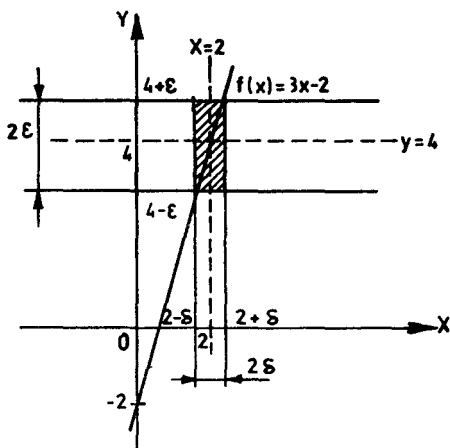


Fig. 5.10

δ , que en general variará con el ϵ , que permita que la definición de límite se cumpla. Sin embargo, esto que se aprecia con claridad en el dibujo, debe ser corroborado a través de un proceso analítico.

Así, si nosotros imponemos a x la condición $0 < |x - 2| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - 4| = |(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta.$$

Por tanto, cualquiera que sea $\epsilon > 0$ que consideremos, será suficiente tomar $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, para que cada vez que

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 3\delta = 3 \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Esto comprueba que de acuerdo a la definición, el límite de f cuando x tiende a 2 es 4.

Ejemplo 5.7. Determinar el límite de la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 5, & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

cuando x tiende a 2.

Observemos que:

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = \frac{(3x - 2)(x - 2)}{x - 2} = 3x - 2 \text{ para todo } x \neq 2.$$

Es decir $g(x)$ es igual a la función $f(x)$ del ejemplo 5.6 excepto para $x = 2$.

Es evidente, por la definición de límite, que dos funciones que toman los mismos valores en una vecindad del punto $x = a$ (intervalo abierto conteniendo el punto $x = a$), tienen el mismo límite (si existe) en este punto.

Luego, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, donde $f(x)$ es la función del ejemplo 5.6.

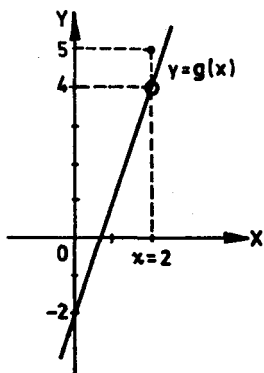


Fig. 5.11

Ejercicio: Determinar el límite de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \text{ no es entero} \\ 1 & \text{si } x \text{ es entero,} \end{cases}$$

cuando x tiende a $3/2$ y cuando x tiende a -2 .

5.5 ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Teorema 5.1. Límite de la función constante: $f(x) = k$.

Mientras no se determinen los límites de algunas funciones conocidas y se establezcan los teoremas más importantes, el único camino que nos queda para calcular el límite de una función dada, consiste en escoger un valor L que a priori asumiremos es el límite de la función y luego aplicar la definición de límite para probar que efectivamente el L escogido es el límite buscado. Por supuesto que la función misma nos dá la pauta para escoger convenientemente el número L .

Sea la función constante definida por: $f(x) = k$, para todo número real x .

En este caso es evidente que el valor L que debemos asumir es $L = k$.

Debemos verificar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$,

para cualquier número real a . O sea que dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - k| < \varepsilon$.

En este caso, muy particular, el valor de $\delta > 0$ por escoger puede ser cualquier número positivo, por ejemplo $\delta = 1$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, para todo x en el intervalo $]a - 1, a + 1[$, se tendrá $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Teorema 5.2. Límite de la función identidad: $f(x) = x$.

Sea la función identidad definida por $f(x) = x$ para todo x real.

La gráfica de esta función es una recta de pendiente uno que pasa por el origen.

Si un punto está sobre la recta, entonces sus dos coordenadas son iguales. Parece conveniente asumir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es justamente $L = a$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, bastará tomar como δ el valor $\delta = \varepsilon$, entonces cada vez que se cumpla $0 < |x - a| < \delta$ se verificará que: $|f(x) - L| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ esto comprueba efectivamente que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.

Teorema 5.3. Límite de la función lineal: $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.

Vamos a probar que $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$

Observemos que: $|f(x) - L| = |mx + b - ma - b| = |mx - ma| = |m| |x - a|$. Ahora bien, si $|x - a| < \delta$ entonces queda $|f(x) - L| < |m| \delta$; y será suficiente escoger un δ tal que $|m| \delta \leq \varepsilon$. Por ejemplo, podemos escoger

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$$

entonces si $0 < |x - a| < \delta$ se tendrá:

$$|f(x) - L| = |m| |x - a| < |m| \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon.$$

Teorema 5.4.

a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y c es una constante cualquiera, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$$

b) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

d) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, y $L_2 \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Efectuaremos las demostraciones de las partes a) y b) dejando las dos últimas demostraciones para un curso posterior.

Demostración de la parte a):

Asumiremos $c \neq 0$ puesto que si $c = 0$ entonces cf es la función constante nula cuyo límite fue calculado por el Teorema 5.1.

Consideremos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Deseamos probar que existe un $\delta > 0$, (escogido convenientemente y en general como función de ε) tal que:

$$|cf(x) - cL| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Por la hipótesis se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Luego, dado un número positivo cualquiera, por ejemplo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta_1$$

El δ que buscamos para la demostración lo tomamos $\delta = \delta_1$, entonces, cada vez que $0 < |x - a| < \delta = \delta_1$ se tendrá $|cf(x) - cL|$

$$= |c| |f(x) - L| < |c| \varepsilon_1 = |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \text{ relación que teníamos que}$$

probar.

Demostración de la parte b):

Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Por hipótesis, dados ε_1 y ε_2 números positivos arbitrarios, existirán números positivos δ_1 y δ_2 dependientes en general de ε_1 y ε_2 respectivamente, tal que $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, y $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Si escogemos

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \delta = \text{mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}, \quad \text{entonces cada vez}$$

que $0 < |x - a| < \delta$ se tiene: $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$ y por tanto $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Además también se tiene que: $|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; que es lo que tenemos que demostrar.

Los cuatro teoremas anteriores son básicos en el proceso del cálculo de límites de funciones o en la demostración de nuevos teoremas que son consecuencia de los primeros. Este es el caso de los dos teoremas siguientes:

Teorema 5.5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L^n$$

$[f(x)]^n = f(x) \cdot f(x) \dots f(x)$, n veces. Aplicando la parte c del teorema 5.4 se tiene: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \dots f(x))$ $n - 1$ veces

$$= L \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \dots f(x)) \quad n - 1 \text{ veces}$$

Aplicando nuevamente el teorema 3:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \dots f(x) \quad n - 2 \text{ veces}$$

seguimos procediendo en la misma forma, obtendremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

La demostración puede también efectuarse utilizando inducción.

Caso particular: $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$.

En efecto, ya probamos que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. Luego por el Teorema 5.5, $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$.

Teorema 5.6. Límite de una función polinómica. Si $P(x)$ es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Aplicando los teoremas anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_nx^n) = \\ &= a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = P(x_0) \end{aligned}$$

Un último teorema que no demostraremos pero si lo enunciaremos por su utilidad en los ejercicios sobre límites, es el siguiente:

Teorema 5.7. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt{L}$$

Ejemplo 5.8. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2 + 3t + 2}{t^3 + 2t - 6} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} (4t^2 + 3t + 2)}{\lim_{t \rightarrow 0} (t^3 + 2t - 6)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x^2 + 8x^3}{2x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4 - 3x + 8x^2)}{x(2 - 5x)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (4 - 3x + 8x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5x)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)} = \frac{0}{0}, \text{ forma}$$

indeterminada¹ que debe evitarse por algún artificio algebraico.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2} \quad \text{si } x \neq 2$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{5}{4}$$

1 Se dice que una función es indeterminada cuando para algún valor de la variable toma una de las formas siguientes:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, (+\infty) - (+\infty), 0^0, \infty^0, 1^\infty, \text{ donde } \infty \text{ puede ser } +\infty \text{ ó } -\infty.$$

En los cursos de Análisis se estudian métodos para levantar la indeterminación cuando algunas de las formas señaladas se presenta al calcular un límite. El método más empleado hace uso de la derivada y fue establecido por el matemático francés Guillermo de L'Hospital.

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + 5}} =$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)}} = \sqrt{\frac{8 + 4 - 3}{4 + 5}} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = \frac{0}{0}, \text{ forma indeterminada.}$$

Como

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}, \text{ siempre que } x \neq 1,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0}, \text{ forma indeterminada.}$$

$$\text{Como } \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{(x + a)(x - a)}{(x^2 + ax + a^2)(x - a)} = \frac{x + a}{x^2 + ax + a^2},$$

si $x \neq a$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x + a}{x^2 + ax + a^2} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}$$

si $a \neq 0$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{0}{0}, \text{ forma indeterminada.}$$

$$\text{Como } \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

si $x \neq 1$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{3}{0} \quad \text{valor que no existe.}$$

Podemos decir que no existe límite.

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} = \frac{0}{0}, \quad \text{forma indeterminada}$$

Racionalizando el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x^2 + 6}}{3 + \sqrt{x^2 + 6}} &= \frac{(3 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 6})}{9 - (x^2 + 6)} = \\ &= \frac{(3 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 6})}{3 - x^2} = 3 + \sqrt{x^2 + 6}, \quad \text{si } x^2 \neq 3; \end{aligned}$$

es decir si $x \neq \pm\sqrt{3}$.

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (3 + \sqrt{x^2 + 6}) = 6$$

$$\text{i) Si } f(x) = x^3, \quad \text{calcular } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2. \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) =$$

$$= 3x^2$$

j) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$. Haciendo $x = y^3$ ó $y = x^{1/3}$ entonces cuando $x \rightarrow 8$, $\lim y = \lim x^{1/3} = 2$, y podemos calcular el límite equivalente:

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y - 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2 + 2y + 4)}{(y-2)} = 12$$

EJERCICIOS 5.2

- 1.— Demostrar, aplicando la definición de límite que $\lim_{x \rightarrow 2} (8x - 4) = 12$. Determinar el máximo δ que corresponde, en cada caso, al valor de $\varepsilon = 1/2$ y $\varepsilon = 0.001$.
- 2.— Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(x+2)}{x+1}$

d) $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^3}{2-\sqrt{r^2+3}}$

b) $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^{-2}-1}{z+1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2}$

c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+y}-2}{y}$

f) $\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2-4}{y^2-3y+2}}$

g) $\lim_{z \rightarrow 2} \sqrt{\frac{z^3-8}{z^2-4}}$

3.— Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en cada uno de los siguientes casos

a) $f(x) = c$

b) $f(x) = ax + b$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

e) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

4.— Probar que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, entonces ese límite es único

Sugerencia: Asumir: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2,$

donde $L_1 \neq L_2$

Escoger $\varepsilon < \frac{1}{2} |L_1 - L_2|$. Determinar δ_1 y δ_2 para los dos

límites y tomar $\delta = \text{mínimo} \{\delta_1, \delta_2\}$.

Probar que entonces se tiene la siguiente contradicción:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| < |L_1 - L_2|$$

5.— Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

Nota. La definición de límite exige que se pruebe la existencia de un δ cada vez que se toma un ε arbitrario. Por supuesto que encontrado un δ apropiado, se tienen infinitos δ que también cumplirán con la definición (todo δ menor que el hallado). Hemos visto que en general el δ depende de ε . Lo que hay que aclarar es que esa dependencia no es siempre lineal como podría parecer si sólo se tiene en cuenta los ejemplos sencillos que hemos desarrollado. La técnica de la demostración de la existencia de límite de una función en base a la definición, es decir, la técnica del $\varepsilon - \delta$, es bastante complicada de aplicar cuando las funciones, aun las algebraicas, no son lineales.

Con el objeto de dar una idea del procedimiento de demostración que se puede usar en los casos en que la función no sea lineal, desarrollaremos un último ejemplo.

Ejemplo 5.9. Demostrar, aplicando la definición, que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

Debemos probar que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x^2 - 9| < \varepsilon$ si $0 < |x - 3| < \delta$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $\delta = \text{mínimo} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$ (luego aclararemos porque escogemos este valor de δ).

Entonces, si $0 < |x - 3| < \delta$, como δ es menor o igual que 1, se tendrá $|x - 3| < 1$, y como también

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{7}, \text{ entonces } |x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Como: $|x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 5 < x + 3 < 7$

$\Rightarrow |x + 3| < 7$ y siendo, $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$, entonces $|x^2 - 9| = |x + 3|$

$|x - 3| < 7 \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$. Lo que prueba que el límite es 9.

Ahora veamos como se encontró $\delta = \text{menor entre } 1 \text{ y } \frac{\varepsilon}{7}$.

$|x^2 - 9| = |x + 3| |x - 3|$. Tenemos $|x - 3| < \delta$ y asumimos $|x - 3| < 1$, entonces, $-1 < x - 3 < 1$. Equivalentemente $|x + 3| < 7$.

Luego $|x^2 - 9| < 7\delta$ siempre que $|x - 3| < 1$, como deseamos que $|x^2 - 9| < \varepsilon$, tomamos $7\delta = \varepsilon$ entonces $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$, y $|x^2 - 9| < \varepsilon$, siempre que $|x - 3| < \delta$ y $|x - 3| < 1$. Luego δ está sujeto a *no ser nunca mayor* de 1 ó $\varepsilon/7$, es decir, δ podrá ser el menor de los números 1 y $\frac{\varepsilon}{7}$.

Una última aclaración. El valor 1 tomado como restricción para δ se ha escogido arbitrariamente. Cualquier otro valor positivo puede ser igualmente útil.

Así, si tomamos el valor 2, entonces el δ por determinar se calcularía así:

$$|x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 4 < x + 3 < 8 \Rightarrow |x + 3| < 8 \text{ y como } |x^2 - 9| = |x + 3| |x - 3| < 8\delta < \varepsilon, \text{ entonces tenemos que escoger } \delta = \text{mínimo} \left\{ 2, \frac{\varepsilon}{8} \right\}.$$

5.6. LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Hay 3 límites trigonométricos importantes que a continuación vamos a demostrar.

Teorema 5.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{cos } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

En la demostración vamos a utilizar la figura 5.12 que muestra un sector circular de radio 1 que subtiende un ángulo de x radianes.

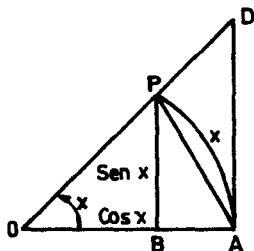


Fig. 5.12

La longitud del arco será entonces x .

En cada límite a probar interesan los valores de x cercanos a 0, luego podemos asumir que $0 < |x| < \pi/2$, esto es: $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Si $0 < x < \pi/2$, se tiene: $\text{sen } x = \overline{PB} < \overline{PA} < x$, es decir: $|\text{sen } x| < x$.

Si $-\pi/2 < x < 0$, se tiene: $0 < -x < \pi/2$, luego, como en el caso anterior; se cumple $0 < \text{sen } (-x) < -x$; en forma equivalente $x < \text{sen } x < 0$, es decir $|\text{sen } x| < |x|$.

En resumen: Para $0 < |x| < \pi/2$, $|\text{sen } x| < |x|$.

Luego dado $\varepsilon > 0$, bastará tomar $\delta = \varepsilon$ para probar que

$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = x$ pues cada vez que $|x - 0| < \delta$, se cumple

$$|\text{sen } x - 0| < |x| < \delta = \varepsilon.$$

Por otro lado:

para $0 < x < \pi/2$, tenemos:

$$0 < 1 - \cos x = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{AB} < \overline{PA} < x.$$

Para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, puesto que $0 < -x < \pi/2$, se

tiene: $0 < 1 - \cos (-x) < -x$ en forma equivalente:

$$0 < 1 - \cos x < -x.$$

En resumen para $0 < |x| < \pi/2$, se tiene: $0 < |1 - \cos x| < |x|$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, bastará tomar $\delta = \varepsilon$ para probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Por último, comparando el área del sector AOP con las áreas de los triángulos OBP y OAD se tiene para

$$0 < x < \frac{\pi}{2} :$$

Área triángulo OBP < área sector AOP < área triángulo OAD

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x < \frac{x}{2\pi} \pi < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Dividiendo por $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$: $\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$

Tomando inversas: $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$

Estas inecuaciones se han establecido para $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

pero son también correctas para: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ desde que

$\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Por tanto son válidas para

$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Ya demostramos que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, luego

también $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Es decir, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ estará tomando valores en-

tre los valores de 2 funciones que tienden a 1 cuando x tiende a 0.

Podemos concluir que también $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ tiene que ser 1. Esto completa la demostración.

Ejemplo 5.10. Calcular los siguientes límites trigonométricos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \text{tg } x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x}{\lim_{x \rightarrow 0} \text{cos } x} = \frac{0}{1} = 0 .$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x \text{ cos } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{cos } x} = 1 \cdot 1 = 1 .$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos } x}{x^2} = \frac{0}{0}, \text{ forma indeterminada.}$$

Utilizando un artificio:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \text{cos } x}{x^2} \cdot \frac{1 + \text{cos } x}{1 + \text{cos } x} &= \frac{1 - \text{cos}^2 x}{x^2 (1 + \text{cos } x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2 (1 + \text{cos } x)} \\ &= \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \text{cos } x} . \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $x \rightarrow 0$, se obtiene $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \\ &= (3)(1) = 3 . \end{aligned}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = (+\infty) - (+\infty)$, forma indeterminada.

Transformando en senos y cosenos:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x};$$

expresión que sigue siendo indeterminada, ahora de la forma

$$\frac{0}{0} \text{ cuando } x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Usando un artificio similar al de la parte c):

$$\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{4} + \operatorname{tg} x}{x} \right) &= \frac{2}{5} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{4}}{x} + \right. \\ &\left. + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right\} = \frac{2}{5} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{4}}{4 \cdot \frac{x}{4}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} \left\{ \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{4}}{\frac{x}{4}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} \right\} = \frac{2}{5} \left\{ \frac{1}{4} \cdot 1 + 1 \right\}$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2} = 0.5 .$$

g) $\lim_{2k \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4k}{4k^2}$. Haciendo $2k = x$ entonces cuando

$2k \rightarrow 0$ también $x \rightarrow 0$, es decir:

$$\lim_{2k \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4k}{4k^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x^2 (1 + \cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 2x}{x^2 (1 + \cos 2x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \text{sen}^2 2x}{(2x)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 2x} =$$

$$= (4)(1) \left(\frac{1}{1 + 1} \right) = \frac{4}{2} = 2.$$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x}}{5 \cdot \frac{\text{sen } 5x}{5x}} = \frac{3}{5}$.

5.7. APLICACION: ASINTOTAS EN COORDENADAS POLARES

En lo que sigue usaremos como referencia la figura 5.13.

Si una curva en polares tiene asíntota, entonces al acercarse un punto P de la curva a ésta el radio vector se acercará a la dirección que

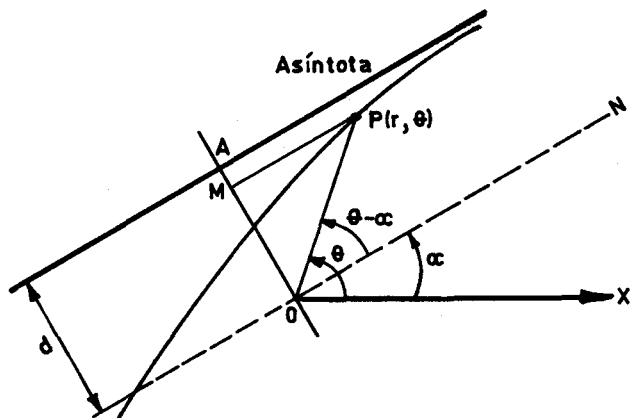


Fig. 5.13

tiene la recta \overline{ON} paralela a dicha asíntota. Por consiguiente las asíntotas corresponden a valores de θ para los cuales r se hace infinito. Así, si para $\theta = \alpha$ se tiene $r = +\infty$, entonces la dirección de la asíntota será paralela a la de la recta $\theta = \alpha$. Para ubicar a la asíntota será suficiente conocer, por ejemplo, su distancia al polo.

Se nota que esta distancia $d = \overline{OA}$ en la figura, es el límite de la proyección \overline{OM} del radio vector $r = \overline{OP}$ sobre el segmento \overline{OA} , perpendicular bajada del polo a la asíntota, cuando θ se acerca a α .

Es decir: $d = \lim_{\theta \rightarrow \alpha} \overline{OM}$.

Como $\overline{OM} = r \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha) \right\} = r \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$,

entonces $d = \lim_{\theta \rightarrow \alpha} r \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$

Si $d = +\infty$, no existirá asíntota pero sí una rama parabólica.

Ejemplo 5.11. Asíntota de la espiral hiperbólica $r = \frac{\pi}{\theta}$

estudiada en el ejemplo 4.7 del capítulo correspondiente a coordenadas polares.

Cuando $\theta = 0$, $r = +\infty$, luego $\alpha = 0$ es la dirección de la posible asíntota.

Su distancia al polo se determina por el límite:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{\theta \rightarrow \alpha} r \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \lim_{\theta \rightarrow 0} r \operatorname{sen} \theta \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi}{\theta} \operatorname{sen} \theta = \pi \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \pi \end{aligned}$$

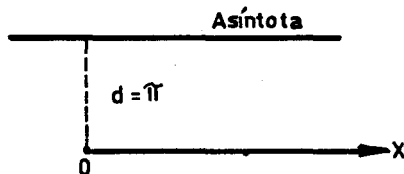


Fig. 5.14

Ejemplo 5.12. Asíntota de la curva en polares: $r = 3 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos} \theta}$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = +\infty$. Luego $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$d = \lim_{\theta \rightarrow \alpha} r \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} 3 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos} \theta} \operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-3 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta \right) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-3 \operatorname{sen}^2 \theta) = -3$$

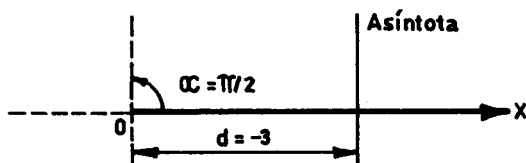


Fig. 5.15

El signo negativo de la distancia, indica que las 3 unidades deben medirse como se mide un radio vector negativo.

EJERCICIOS 5.3

Calcular los límites siguientes:

1.— $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$

3.— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \sqrt{1 - \cos x}}{x \operatorname{sen} 2x}$

2.— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} 3x)^3}$

4.— $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

$$5.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} 3x}{2 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} 7x}$$

$$6.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$7.- \lim_{y \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} (y - a)}{y^2 - a^2}$$

$$8.- \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} 3z}$$

$$9.- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\operatorname{cotg} 3\theta}$$

$$10.- \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$11.- \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$$

$$12.- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$13.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$$

$$14.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

$$15.- \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$$

$$16.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{x}$$

$$17.- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$18.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$19.- \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\pi - x}$$

$$20.- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

Determinar las asíntotas de las siguientes curvas:

$$21.- r = \frac{4 \cos 2\theta}{\cos \theta}$$

$$22.- r = \frac{\theta}{\theta^2 - 1}$$

$$23.- r = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - 2 \cos \theta}$$

5.8 FUNCIONES CONTINUAS

La idea intuitiva que podemos dar de función continua está ligada a la idea intuitiva de curva continua. Queremos que una función continua tenga una gráfica que pueda ser trazada sin saltos bruscos ni interrupciones, es decir, que pueda ser trazada en "forma continua".

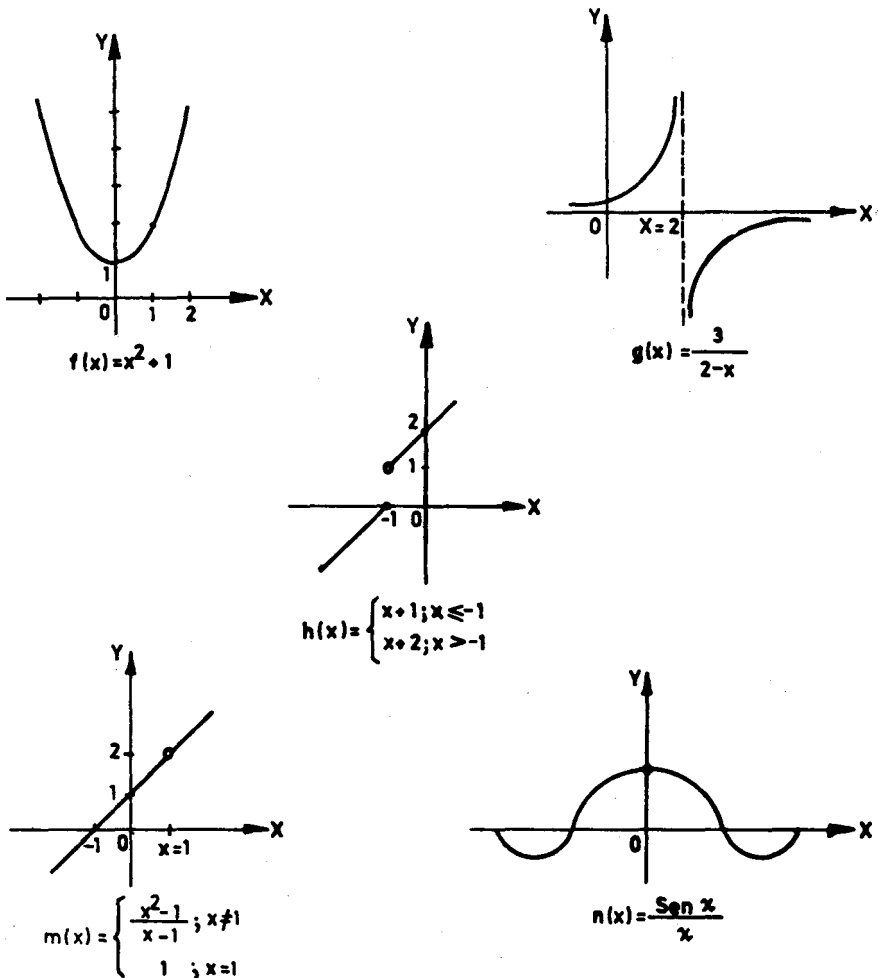


Fig. 5.16

Según esta idea, de las 5 funciones cuyas gráficas se indican en la figura 5.16, sólo la función f sería continua. Las funciones g , h y m presentan saltos bruscos en $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente; y la función $n(x)$ presenta una interrupción en $x = 0$.

Analicemos las gráficas de las cuatro últimas funciones que por no ser continuas las llamaremos *discontinuas*.

La función $g(x)$ cuando x se acerca a 2 tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ según x permanezca menor o mayor que 2 respectivamente. Es decir, en $x = 2$ la función sufre un "salto brusco infinito", careciendo de límite para ese valor de x .

La función $h(x)$ en $x = -1$ sufre también un salto pero esta vez "finito". No tiene límite en $x = 1$.

La función $m(x)$ presenta también un salto finito pero para $x = 1$. La diferencia con las funciones anteriores está en que el límite de $m(x)$ cuando x tiende a 1 existe y es igual a 2, pero sin embargo se presenta un salto en los valores de la función al pasar por $x = 1$, pues si bien la función tiende a 2 en cambio el valor de la función es 1 para $x = 1$. Es decir, $\lim_{x \rightarrow 1} m(x) \neq m(1)$.

Finalmente, la función

$$n(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

presenta una interrupción en su gráfica para el valor $x = 0$, debido a que la función no está definida en ese punto.

La definición de función continua evita estas y otras posibles discontinuidades en el trazado de la curva de una función.

Definición 5.1. Una función $f(x)$ definida en un intervalo que contiene al punto $x = a$ es *continua* en a si el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al valor a existe y es igual al valor que toma la función para $x = a$.

La definición señala que una función es continua en el punto a si se cumplen las condiciones siguientes:

- 1ro. f es definida en $x = a$, es decir, $f(a)$ es un valor real finito;
- 2do. Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a , es decir, el límite es único y finito;
- 3ro. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Las funciones cuyas gráficas aparecen en la figura 5.16., a excepción de $f(x) = x^2 + 1$, no cumplen todas las condiciones señaladas en la definición, luego no son continuas.

Si aplicamos la definición de límite podemos dar una definición de función continua equivalente a la dada anteriormente.

Definición 5.2. Una función $f(x)$ definida en un intervalo que contiene a $x = a$ es *continua* en a si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que para $|x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La demostración del siguiente teorema es inmediata si se aplica la definición de función continua y los teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.6 sobre límites.

Teorema 5.9. Las funciones constantes $f(x) = k$, identidad $f(x) = x$, lineal $f(x) = mx + b$ y polinómica $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ son continuas en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

Asimismo una aplicación directa del teorema 5.4, sobre límites permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 5.10. el producto de una función constante por una función continua en el punto $x = a$ es una función continua en este punto. La suma y el producto de dos funciones continuas en $x = a$ es continua en dicho punto. El cociente de dos funciones continuas en $x = a$ es continua en este punto si la función divisor no se anula en un intervalo que contenga a $x = a$.

Combinando los resultados obtenidos para límites y los teoremas 5.9 y 5.10 se puede estudiar la continuidad de muchas de las funciones de uso frecuente.

Ejemplo 5.13. Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Probar que toda función racional es continua en todo punto que no anule al divisor.

Una función racional es de la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son polinomios. Por el teorema 5.9 f y g son continuas y por el teorema 5.10 su cociente también lo será en todo punto que no anule al denominador.

Ejemplo 5.14. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces también es continua en ese punto la función $y(x) = \sqrt{f(x)}$, si $f(a) > 0$.

Si f es continua en a , entonces

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) > 0$. Por el teorema 5.7 se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt{f(a)} = y(a)$$

Luego $y(x)$ es continua en $x = a$.

Ejemplo 5.15. Estudiar la continuidad de la función.

$$f(x) = \frac{2x + \sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{x-3}}$$

El dominio de la función está dado por el intervalo $[-4, +\infty[$, excepto el punto $x = 3$ que anula el denominador.

Si a está en el dominio de f entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (2x + \sqrt{x+4}) &= \lim_{x \rightarrow a} 2x + \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x+4} = \\ &= 2a + \sqrt{a+4} . \end{aligned}$$

Luego el numerador es continuo para todo a en el dominio. Asimismo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} (x-3)} = \sqrt[3]{a-3},$$

luego, el denominador es también continuo para todo punto del dominio.

Por el teorema 5.10 que establece que el cociente de dos funciones continuas es una función continua en todo punto del dominio que no anule al divisor, se tiene que f es continua en todo punto x del conjunto $[-4, 3[\cup]3, +\infty[$.

Nota. La definición de función continua en $x = a$ exige que se cumpla

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Esta condición puede expresarse en otra forma que en algunos casos puede ser utilizada con ventajas.

Haciendo $x = a + h$, se tiene que cuando $x \rightarrow a$, $h \rightarrow 0$ y la condición es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

Teorema 5.11. Probar que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ son continuas para todo x real.

En la sección 5.6, teorema 5.8 se estableció que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cos} x = 1.$$

Como $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} h + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} h$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x \operatorname{cos} h) + \lim_{h \rightarrow 0} (\operatorname{cos} x \operatorname{sen} h) = \\ &= \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{cos} h + \operatorname{cos} x \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} h = \operatorname{sen} x \cdot 1 + \operatorname{cos} x \cdot 0 = \end{aligned}$$

= $\text{sen } x$.

Luego para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene : $\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } (x + h) = \text{sen } x$,

y de acuerdo con lo establecido en la nota anterior, $\text{sen } x$ es continua en todo x real.

En forma análoga se demuestra que $\text{cos } x$ es continua en todo punto x real.

Ejemplo 5.16. Continuidad de la función

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Por el teorema 5.11, $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ son continuas en todo x real. Luego $\text{tg } x$ es continua en todo punto real que no anule el denominador. Es decir, es continua en todo x real salvo los de la forma $\frac{\pi}{2} + n\pi$, para $n \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIOS 5.4.

- 1.— Demostrar que $f(x) = |x|$ es continua en todo punto real. Trazar su gráfica.
- 2.— Demostrar que la función $\text{cos } x$ es continua para todo valor real de x .
- 3.— Indicar para que valores de x las siguientes funciones son discontinuas. Hacer un croquis en cada caso.

a) $f(x) = \frac{2x}{3x - 2}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x - 6}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 ; & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2} x^2 - 3 ; & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$d) \quad f(x) = \frac{2x - 8}{|x - 3|}$$

$$e) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{|x-4|} & ; \quad x \neq 4 \\ 0 & ; \quad x = 4 \end{cases}$$

4.— Demostrar que la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} \quad \text{para } x \neq 0, f(0) = 1, \text{ es discontinua en } x = 0$$

5.— ¿Para qué valores de x son las funciones a) $\sec x$ y b) $\operatorname{cotg} x$ continuas?

6.— Una función es definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ A & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

¿Cuanto debe valer A para que f sea continua en $x = 2$? Trazar la gráfica de f .

7.— La función

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \quad \text{no está definida para } x = \pm 2, \text{ luego es}$$

discontinua en esos puntos. ¿Qué valor de $f(2)$ hace a $f(x)$ continua? ¿Existe un valor real para $f(-2)$ que haga continua a f en $x = -2$?

8.— La función $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-2}$

no tiene sentido para $x = 2$. ¿Es posible definir el valor de $f(2)$ de tal manera que la nueva función redefinida sea continua en $x = 2$?

Capítulo 6

DERIVADAS Y FUNCIONES PRIMITIVAS

Dos conceptos importantes nos pueden dar la idea de lo que es la derivada de una función: la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y la velocidad de un móvil.

6.1. RECTA TANGENTE A UNA CURVA

La Geometría Euclídeana establece que la recta T tangente a una circunferencia en un punto P de ella, es la recta que pasando por P es perpendicular al diámetro con extremo P . Esta idea se puede extender, haciendo uso de nuestra intuición, para cualquier curva en un punto específico de ella. Esto se puede lograr de la siguiente manera:

Sea C una curva y P un punto fijo de ella; tomemos un punto Q de C diferente de P (figura 6.2) y tracemos la recta S que pasa por P y Q , llamada recta secante. Podemos definir la *recta tangente a C en P* como la recta cuya posición es límite de la recta secante S cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva C .

El problema que se presenta es el de definir la ecuación de la recta tangente conocida la ecuación $y = f(x)$ de la curva y el punto $P = (x_1, f(x_1))$ de ella. Con los conocimientos que tenemos sobre límites y rectas podemos resolverlo inmediatamente. En efecto, se sabe que una recta queda determinada por un punto y su pendiente; conocido el punto P , faltaría determinar la pendiente de la recta tangente.

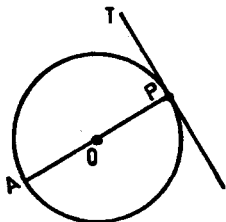


Fig. 6.1

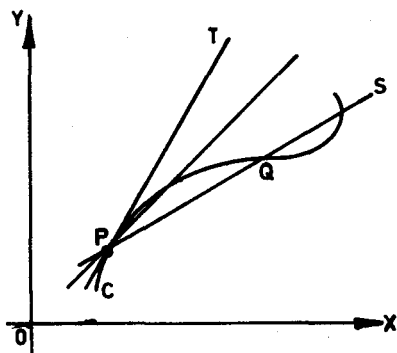


Fig. 6.2

De la discusión anterior podemos inferir que la pendiente de la recta tangente será el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por P y Q (donde Q es un punto de la curva C), cuando Q se acerca a P a lo largo de C .

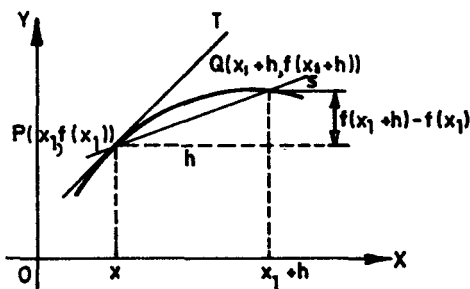


Fig. 6.3

La pendiente de la recta secante S que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_1 + h, f(x_1 + h))$ es:

$$m_s = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Por otro lado, observemos que cuando Q se acerca a P , h se acerca a 0, y viceversa, si h se acerca a 0, Q se acerca a P . Siendo la recta

tangente T la posición límite de la recta secante cuando Q se acerca a P , podemos establecer, por definición, *pendiente* m_T de T como:

$$m_T(x_1) = \lim_{Q \rightarrow P} m_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

si es que este límite existe.

Luego, la *ecuación de la recta tangente T en el punto $P = (x_1, f(x_1))$* es, también por definición, la recta cuya ecuación es:

$$y - f(x_1) = m_T(x_1)(x - x_1).$$

Ejemplo 6.1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $P(2, 4)$.

Se tiene:

$$x_1 = 2$$

$$f(x_1) = f(2) = 4$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= (x_1 + h)^2 = x_1^2 + 2x_1h + h^2 \\ &= 4 + 4h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_T(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 4(x - 2)$.

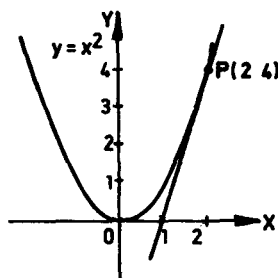


Fig. 6.4

Ejemplo 6.2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y = x^3$ en el punto $P(x_1, x_1^3)$. ¿Cuál es la ecuación cuando $x_1 = 2$ y $x_1 = 4$?

Se tiene que:

$$f(x_1) = x_1^3$$

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3$$

$$m_T(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3 - x_1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_1^2 + 3x_1 h + h^2) = 3x_1^2.$$

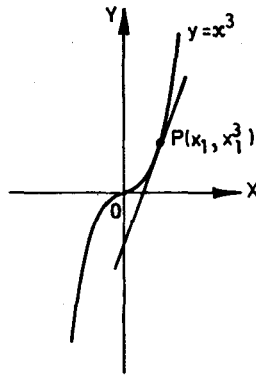


Fig. 6.5

Luego, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$y - x_1^3 = 3x_1^2(x - x_1).$$

Cuando $x_1 = 2$, el punto P es $(2, 8)$, $m_T(x_1) = 3(2)^2 = 12$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 8 = 12(x - 2).$$

Cuando $x_1 = 4$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 64 = 48(x - 4).$$

Ejemplo 6.3. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $P = (2, \sqrt{2})$.

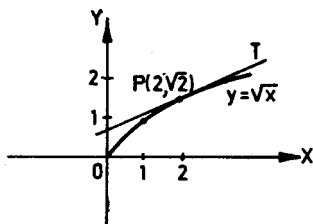


Fig. 6.6

La pendiente de la recta tangente en P es:

$$\begin{aligned}
 m_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} - \cancel{h}}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente en P es:

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (x - 2).$$

6.2. VELOCIDAD INSTANTANEA

Consideremos un móvil que se desplaza a lo largo de una línea recta E en la cual se considera un sistema coordenado. Sea $s = f(t)$ la posición del móvil en el tiempo t , donde t se toma no negativo. Supongamos que en el tiempo t_1 el móvil tiene la posición $f(t_1)$ y que

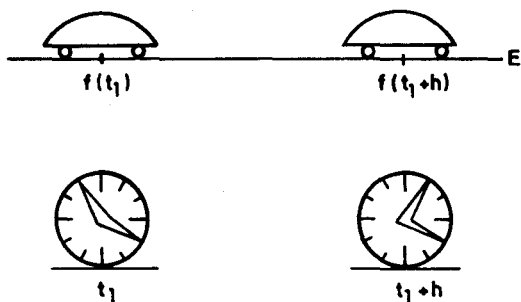


Fig. 6.7

en el tiempo $t_1 + h$, $h \neq 0$, el móvil tiene la posición $f(t_1 + h)$; luego, en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + h]$ el móvil ha recorrido $f(t_1 + h) - f(t_1)$.

Se define la *velocidad promedio* o *velocidad media* en el intervalo $[t_1, t_1 + h]$, como la razón:

$$v_m = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

La velocidad media de un móvil se define entonces, como el cambio de posición o desplazamiento del móvil por la unidad de tiempo y se expresa en unidades de distancia dividida entre unidades de tiempo: km/hora, m/seg., etc.

La velocidad promedio en un intervalo de tiempo dado, no nos permite conocer lo que sucede con el movimiento en cada instante t perteneciente al intervalo. Por ejemplo, si un móvil parte del punto O , recorre una cierta distancia y luego regresa nuevamente a O durante un intervalo de tiempo h , entonces la velocidad promedio durante el intervalo h es cero puesto que el desplazamiento es nulo en dicho intervalo. Sin embargo como en el caso de la recta tangente, podemos recurrir a nuestra intuición para conocer que sucede por ejemplo, en el tiempo $t = t_1$ del intervalo; para ello tomemos la velocidad promedio en intervalos $[t_1, t_1 + h]$ cada vez más pequeños, es decir haciendo que h se acerque a 0. El límite de las velocidades promedio cuando h tiende a 0 podemos tomarlo como una buena información de lo que ocurre en $t = t_1$.

Este límite se conoce como la *velocidad instantánea* o *velocidad* en $t = t_1$ y de una manera formal se puede definir por el límite:

$$v(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}, \text{ siempre que éste exista.}$$

Ejemplo 6.4. Un vehículo se mueve en línea recta según la ley $f(t) = 2t + 3$.

- ¿Cuál es su posición cuando $t = 0$?
- ¿Cuál es su posición cuando $t = 3$?
- ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo $[3, 4]$?
- ¿Cuál es la velocidad instantánea en el tiempo $t = 3$?

a) La posición del móvil cuando $t = 0$ es:

$$f(0) = 2(0) + 3 = 3$$

b) La posición del móvil cuando $t = 3$ es:

$$f(3) = 2(3) + 3 = 9$$

c) La velocidad promedio en el intervalo $[3, 4]$ es:

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{11 - 9}{1} = 2.$$

Si $f(t)$ se da en metros y t en segundos, por ejemplo, la velocidad promedio en $[3, 4]$ es 2 mts. por segundo (2 m/seg).

d) La velocidad instantánea en $t = 3$ es:

$$v(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3 + h) + 3 - [2(3) + 3]}{h} = 2.$$

Ejemplo 6.5. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba, siendo la ley del movimiento: $f(t) = 15t - 5t^2$, donde $f(t)$ está dada en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál es la posición de la piedra cuando $t = 0$, $t = 1$ seg, $t = 1.5$ seg, $t = 2$ seg, $t = 3$ seg.

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea para cada uno de los valores de t indicados en a)?

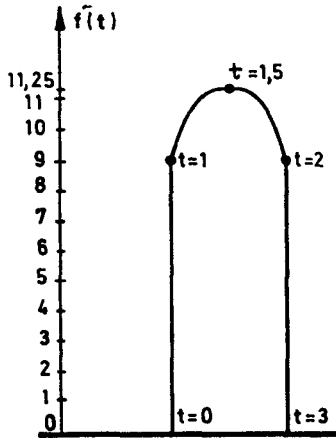


Fig. 6.8

- a) Para $t = 0$ seg, la posición es $f(0) = 0$ mts.
- Para $t = 1$ seg, la posición es $f(1) = 10$ mts.
- Para $t = 1.5$ seg, la posición es $f(1.5) = 11.25$ mts.
- Para $t = 2$ seg, la posición es $f(2) = 10$ mts.
- Para $t = 3$ seg, la posición es $f(3) = 0$ mts.

Si tomamos una recta vertical con un sistema coordenado de tal forma que 0 coincide con la posición de donde fue lanzada la piedra entonces podemos obtener la gráfica del movimiento en el intervalo $[0, 3]$.

b) La velocidad de la piedra en cualquier instante es:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(t+h) - 5(t+h)^2 - 15t + 5t^2}{h} =$$

$$= 15 - 10t = 5(3 - 2t)$$

Luego: cuando $t = 0$, $v(0) = 15$ m/seg.
 cuando $t = 1$, $v(1) = 5$ m/seg.
 cuando $t = 1.5$, $v(1.5) = 0$ m/seg.
 cuando $t = 2$, $v(2) = -5$ m/seg.
 cuando $t = 3$, $v(3) = -15$ m/seg.

Se nota que $v(0) = 15$ m/seg. es la velocidad con que fue lanzada la piedra. En el ascenso, y en el intervalo $t = 0$ a $t = 1.5$, la velocidad es positiva, mientras que en el descenso, en el intervalo de $t = 1.5$ a $t = 3$, la velocidad es negativa. Cuando la piedra alcanza su máxima altura la velocidad es 0 y cuando la piedra cae, la velocidad es la misma con que fue lanzada pero de signo opuesto.

Ejemplo 6.6. Un vehículo se desplaza en línea recta de acuerdo a la siguiente ley de movimiento:

$$s = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 4t \text{ mts,} \quad \text{siendo } 0 \leq t \leq 10.$$

- Describir en forma gráfica el desplazamiento del vehículo en los intervalos $[0, 1]$ $[1, 4]$, $[4, 10]$.
- ¿Cuál es la velocidad instantánea del vehículo para cada valor de t ?
- Dando valores a t comprendidos entre 0 y 1 podemos ver que f toma valores comprendidos entre 0 y 1.8 aproximadamente. Para valores de t comprendidos entre 1 y 4, $f(t)$ toma valores que van de 1.8 aprox. hasta -2.7 aprox.

Para valores de t en el intervalo $[4, 10]$, $f(t)$ toma valores que van de -2.7 aprox. hasta 123.3 aprox.

Gráficamente podemos representar el movimiento de la siguiente manera.

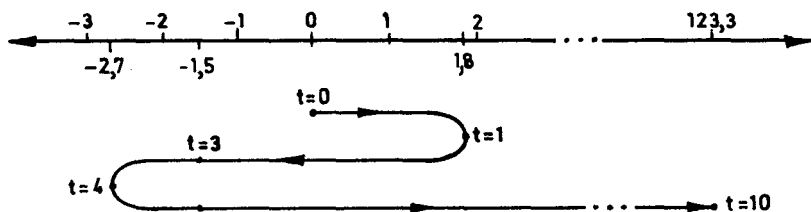


Fig. 6.9

b) Para cada valor de t la velocidad instantánea del vehículo es:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = t^2 - 5t + 4$$

$$= (t - 1)(t - 4)$$

Se observa en el intervalo $]0, 1[$, $v(t) < 0$, en $]1, 4[$, $v(t) < 0$ y en $t = 1$ y $t = 4$, $v = 0$.

En este ejemplo, como en el anterior, notamos que en los intervalos en donde $v > 0$, los valores de $f(t)$ aumentan cuanto t aumenta, mientras que los valores de $f(t)$ disminuyen cuando t aumenta si $v < 0$. Esto ocurre en forma general como veremos más adelante.

La interpretación física a los últimos resultados nos indica que cuando $v > 0$ el vehículo se desplaza en el sentido positivo con respecto al origen, que cuando $v < 0$ el vehículo se mueve en sentido negativo con respecto al origen, y que cuando $v = 0$ el vehículo se detiene.

6.3. LA DERIVADA

La determinación de las pendientes de una recta tangente a una curva, y de la velocidad instantánea nos conduce a los límites:

$$m_T(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

(donde $y = f(x)$ representa a la curva y $h \neq 0$)

$$v(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h},$$

(donde $s = f(t)$ representa a la ley del movimiento y $h \neq 0$).

Si por un momento prescindimos de lo que f representa en cada caso, observamos que esta operación de límite es la misma en ambos casos. Esto nos lleva a pensar en la posibilidad de que se pueda tomar esta operación de límite para cualquier función f . Este límite toma entonces, un nombre especial el que se introduce de una manera formal en la siguiente definición:

Definición 6.1. Dada la función $y = f(x)$, el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad h \neq 0, \text{ si existe, es llamado } \underline{\text{la derivada de } f}$$

con respecto de x en (x_1) .

Las notaciones que más se usan para la derivada de f con respecto de x en x_1 son:

$$D_x f(x_1), \frac{df}{dx}(x_1), f'(x_1), \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1}$$

Se usa también la notación delta:

Pongamos $\Delta x = h$ y llamemos:

$$\Delta f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Entonces la derivada aparece como:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$$

Podemos, como una *interpretación geométrica*, decir que la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_1$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Concepto que estudiamos en la introducción al tratar sobre recta tangente a una curva (fig. 6.3)

Ejemplo 6.7. Dada la función definida por $y = x^2 + 2x + 2$.

- Hallar $f'(2)$
- Hallar $f'(x)$
- Hallar $f'(1/2)$
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(3, f(3))$.

$$a) \quad f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 2, \quad f(2) = 2^2 + (2)(2) + 2 = 10$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) + 2 = h^2 + 6h + 10.$$

Luego

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 10 - 10}{h} = 6$$

$$b) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 2) = 2x + 2.$$

- Como $f'(x) = 2x + 2$, relación que se cumple para todo x , se tendrá que en particular para $x = 1/2$.

$$f'(1/2) = 2(1/2) + 2 = 3.$$

- La ecuación de la recta tangente a la curva en $P = (3, f(3))$. es:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

como $f(3) = 17$ y $f'(3) = 8$ según b) ,

resulta:

$$y - 17 = 8(x - 3) \quad \text{ó} \quad 8x - y - 7 = 0$$

Si se considera una función $y = f(x)$ y se determina su derivada en cualquier valor de x , como en la parte b) del ejemplo anterior, se obtiene una nueva función f' definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que se llama *derivada de f* . El proceso de hallar f' se llama *derivación*.

La derivada de f se denota con f' , ó $D_x f$ ó $\frac{df}{dx}$.

La derivada de una función $y = f(x)$ en $x = x_1$ se puede obtener también con el siguiente límite:

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad x \neq x_1.$$

Expresión que se obtiene haciendo en la definición: $x_1 + h = x$ y observando que $h \rightarrow 0$ es equivalente a $x \rightarrow x_1$.

Ejemplo 6.8. Hallar $D_x 1$.

La función cuya derivada queremos encontrar es $f(x) = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} D_x 1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_x 1 = 0$$

En general se obtiene el siguiente resultado:

$$D_x c = 0 \quad \text{para toda constante } c.$$

En efecto: $f(x) = c$,

$$D_x c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Ejemplo 6.9 Hallar

a) $D_x x$

b) $D_x x^2$

a) $f(x) = x$.

$$D_x x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

b) $f(x) = x^2$

$$D_x x^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$$

Un resultado un poco más general es el siguiente:

Derivada de una potencia:

$$D_x x^n = nx^{n-1} \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

Procederemos por inducción para probar esta fórmula.

Se sabe que para $n = 1$ se cumple la igualdad. (Ejemplo 6.9 a)

$$D_x x^1 = 1x^{1-1}$$

Asumiremos que para $n = k$, se cumple, es decir que:

$$D_x x^k = kx^{k-1}.$$

Ahora demostremos que para $n = k + 1$ también se cumple la igualdad, es decir que:

$$D_x x^{k+1} = (k+1) x^{(k+1)-1}$$

$$D_x x^{k+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{k+1} - x^{k+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k (x+h) - x^k x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k}{h} h$$

$$= D_x x^k \cdot x + x^k$$

$$= kx^{k-1} x + x^k = (k+1) x^{(k+1)-1}.$$

En realidad este resultado es mucho más general. Se puede probar que:

Si $n \in \mathbb{R}$, también se cumple que $D_x x^n = nx^{n-1}$

Ejemplo 6.10

a) $D_x x^7 = 7x^6$

b) $D_x x^{-3} = -3x^{-4}$ con $x \neq 0$

c) $D_x x^{1/7} = \frac{1}{7} x^{-6/7}$ con $x \neq 0$

$$d) \quad D_x \sqrt{x} = D_x x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{con } x \neq 0.$$

El siguiente teorema es de gran utilidad en el cálculo de las derivadas.

Teorema 6.1. Si f y g son dos funciones que tienen derivada, se cumple:

$$a) \quad D_x (f \pm g) = D_x f \pm D_x g.$$

$$b) \quad D_x (f \cdot g) = f D_x g + g D_x f.$$

$$c) \quad D_x \frac{f}{g} = \frac{g D_x f - f D_x g}{g^2} \quad \text{si } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(g).$$

Haremos la demostración de la parte a) dejando como ejercicio las partes b) y c).

$$\begin{aligned} a) \quad D_x (f \pm g) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= D_x f \pm D_x g. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.11. Pruebe que: $D_x cf = cD_x f$ donde c es una constante y f es una función cualquiera.

Derivando como un producto:

$$D_x cf = cD_x f + fD_x c = cD_x f + (f)(0) = cD_x f.$$

Ejemplo 6.12. Hallar

$$D_x (x^3 + 3x^{1/2} - 7x + 3)$$

El teorema 6.1 y la fórmula de la derivada de una potencia se pueden aplicar en este caso:

$$\begin{aligned} D_x (x^3 + 3x^{1/2} - 7x + 3) &= D_x x^3 + D_x 3x^{1/2} - D_x 7x + D_x 3 \\ &= 3x^2 + 3D_x x^{1/2} + x^{1/2} D_x 3 - (7 D_x x + xD_x 7) + 0 \\ &= 3x^2 + 3 \frac{1}{2} x^{-1/2} + x^{1/2} (0) - (7 + x (0)) + 0 \\ &= 3x^2 + \frac{3}{2} x^{-1/2} - 7 . \end{aligned}$$

6.4. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Teorema 6.2. Para las funciones trigonométricas se tienen los siguientes resultados importantes:

- | | |
|---|--|
| a) $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$ | d) $D_x \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$ |
| b) $D_x \operatorname{cos} x = -\operatorname{sen} x$ | e) $D_x \operatorname{sec} x = \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$ |
| c) $D_x \operatorname{tg} x = \operatorname{sec}^2 x$ | f) $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$ |

Daremos la demostración para las partes a) y c); las otras pueden hacerse como ejercicio.

$$\begin{aligned} \text{a) } D_x \operatorname{sen} x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} (x + h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos^2 h - 1)}{h (\cos h + 1)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{\cosh + 1} + \\
&\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos x = -\operatorname{sen} x (1) (0) + 1 \cos x = \cos x .
\end{aligned}$$

c) Por el teorema 6.1 (parte c), se tiene:

$$D_x \operatorname{tg} x = D_x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x D_x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x D_x \cos x}{\cos^2 x} .$$

Usando las partes a) y b) de este teorema, resulta:

$$D_x \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sec}^2 x .$$

Observación. En primer lugar debemos observar que tanto f como su derivada no siempre tienen el mismo dominio y en segundo lugar que los resultados que estamos obteniendo sólo tienen validez para los valores de x , para los cuales tiene sentido la igualdad. Así por ejemplo, la función $f(x) = x^{2/3}$ tiene por dominio al conjunto de todos los números reales (incluyendo el cero), siendo además continua en todo el dominio. Sin embargo su derivada:

$$D_x x^{2/3} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

no está definida para $x = 0$, siendo este un punto de discontinuidad de la función derivada. Luego la función $f(x) = x^{2/3}$ no es derivable en $x = 0$.

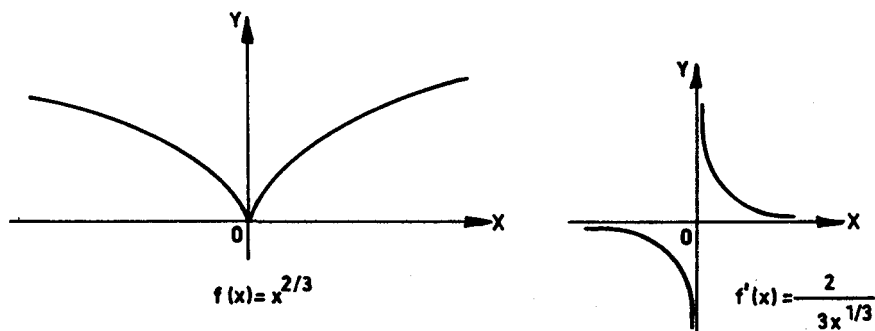


Fig. 6.10

Un croquis de las gráficas de f y f' aparece en la figura 6.10.

EJERCICIOS 6.1 Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.— $y = 2x^3 + 3x + 1$

2.— $y = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - 7x^{-4}$

3.— $y = \frac{2x^2 - 3}{4x - 5}$

4.— $y = \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 1}$

5.— $y = \frac{\text{sen } x - x \cos x}{\cos x + x \text{ sen } x}$

6.— $y = x - \text{sen } x \cos x$

7.— $y = 2x \text{ sen } x + (2 - x^2) \cos x$

8.— $y = \sqrt{x} \text{ sen } x + 1$

Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas indicadas en el punto que se especifica en cada caso:

9.— $f(x) = 3x + 1$ en $P(1, f(1))$

10.— $f(x) = x^3 + 5$ en $P(-1, f(-1))$

11.— $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

12.— $f(x) = \operatorname{cos} x$ en $P\left(\frac{\pi}{4}, \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}\right)$.

13.— Determinar la suma de la ordenada y abscisa en el origen de la tangente a la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, en el punto de abscisa 1.

14.— Determinar las coordenadas de los puntos de la curva $y = x^2 + 2x + 25$ en los cuales las tangentes pasan por el origen.

15.— Determinar el punto de la curva $f(x) = 2 + 5x - x^2$ en el que la inclinación de la tangente es de 45° .

16.— Encontrar las pendientes de las tangentes a las curvas

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y = x^2$$

en el punto de intersección. Determinar además, el ángulo que forman dichas tangentes.

17.— Hallar los puntos de la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x + 5$$

en donde la recta tangente es paralela al eje X.

18.— La función $f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 30t + 9$ describe el movimiento rectilíneo de un móvil con respecto a un punto fijo. Se pide:

- determinar para cuales valores de t el móvil se detiene;
- la distancia total recorrida por el móvil desde $t = 0$ hasta $t = 5$;
- el intervalo de tiempo durante el cual el móvil se desplaza en sentido contrario al inicial.

19.- Dada la función $y = (a + x)^{3/2} (Ax^2 - Bax + a^2C)$, determinar A , B y C de manera que la derivada sea $y' = (a^2 + x^2) \sqrt{a - x}$, (a es una constante arbitraria).

6.5. DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA

Con las fórmulas vistas hasta este momento, todavía quedan muchas funciones de uso frecuente cuyas derivadas son difíciles de calcular o simplemente imposible. Por ejemplo, para calcular la derivada de la función $(3x^2 + 4x + 1)^5$ podríamos desarrollar la potencia y luego emplear nuestras fórmulas; pero si la función es $(3x^2 + 4x + 1)^{100}$ el problema, aunque posible por el camino del desarrollo, es prácticamente imposible por lo laborioso. Si la función es $\text{sen}(2x^2)$, no tenemos otro modo, por el momento, para calcular su derivada que la aplicación de la definición de derivada. Lo mismo sucede con las funciones $\sqrt[6]{x^2 + 3}$, $\cos(3x + 2)$, etc.

Sin embargo, observemos que todas las funciones indicadas en el acápite anterior, pueden ser expresadas como una composición de funciones. Así si $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5$, podemos expresar $f = gou$, donde $u = u(x) = 3x^2 + 4x + 1$, y $g = g(u) = u^5$.

Es decir, $f(x) = (gou)(x) = g(u(x)) = g(3x^2 + 4x + 1) = (3x^2 + 4x + 1)^5$.

Si $f(x) = \cos(3x + 2)$, entonces podemos expresar $f = gou$ donde $u = u(x) = 3x + 2$, y $g = g(u) = \cos u$. Entonces $f(x) = (gou)(x) = g(u(x)) = g(3x + 2) = \cos(3x + 2)$.

En los dos ejemplos anteriores, las derivadas de las funciones $u = u(x)$ con respecto a x y las de $g = g(u)$ con respecto a u pueden ser determinadas por medio de las fórmulas de derivación tratadas anteriormente. El teorema que se enuncia a continuación, permite calcular la derivada de una función compuesta o función de función, como a veces se denomina, en términos de las derivadas de las funciones componentes.

Teorema 6.3. Sean g una función de u y u a su vez una función de x , ambas con derivada. Entonces la derivada de la función compuesta de g y u , es decir $f = g \circ u$ está dada por la expresión.

$$D_x f(x) = D_u g(u) \cdot D_x u(x)$$

Esta fórmula, denominada *regla de la cadena*, puede también expresarse en otras notaciones por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ó} \quad (g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Ejemplo 6.13. Calcular la derivada con respecto a x de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5$

b) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 3}$

c) $f(x) = \cos(3x + 2)$

a) Haciendo $u = 3x^2 + 4x + 1$ y $g(u) = u^5$ se tiene que $f(x) = g(u(x))$.

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_u g(u) \cdot D_x u(x) = D_u u^5 \cdot D_x (3x^2 + 4x + 1) \\ &= 5u^4 (6x + 4) = 5(6x + 4)(3x^2 + 4x + 1)^4 \end{aligned}$$

b) Haciendo $u = x^2 + 3$, $g(u) = u^{1/6}$, entonces $f = g \circ u$, y por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} D_x \sqrt[6]{x^2 + 3} &= D_u (u)^{1/6} \cdot D_x (x^2 + 3) = \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 3)^{-5/6} (2x) = \frac{x}{3} (x^2 + 3)^{-5/6} \end{aligned}$$

c) Haciendo $u = 3x + 2$, $g(u) = \cos u$, entonces

$$\begin{aligned} D_x \cos(3x + 2) &= D_u \cos u \cdot D_x (3x + 2) = -\operatorname{sen} u \cdot (3) = \\ &= -3 \operatorname{sen}(3x + 2) \end{aligned}$$

Teorema 6.4.

$$D_x [g(x)]^\alpha = \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot D_x g(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

En efecto, si hacemos $u = g(x)$ y, $f(u) = u^\alpha$, entonces aplicando la fórmula de la derivación de una función compuesta:

$$D_x [g(x)]^\alpha = D_x u^\alpha \cdot D_x u = \alpha u^{\alpha-1} \cdot D_x g(x) = \alpha [g(x)]^{\alpha-1} D_x g(x)$$

Ejemplo 6.14. Hallar:

a) $D_x (3x + \text{sen } x)^5$

b) $D_x \sqrt{2x + x^2}$

c) $D_x \text{sen } (3x^2)$

d) $D_x \sqrt{f(x)}$

a) $D_x (3x + \text{sen } x)^5 = 5(3x + \text{sen } x)^4 D_x (3x + \text{sen } x) =$
 $= 5 (3x + \text{sen } x)^4 (3 + \cos x)$

b) $D_x \sqrt{2x + x^2} = D_x (2x + x^2)^{1/2} =$
 $= \frac{1}{2} (2x + x^2)^{-1/2} \cdot D_x (2x + x^2) =$
 $= \frac{D_x (2x + x^2)}{2 \sqrt{2x + x^2}} = \frac{2 + 2x}{2 \sqrt{2x + x^2}} = \frac{1 + x}{\sqrt{2x + x^2}}$

c) Haciendo $g(x) = 3x^2$

$$f(x) = \text{sen } x.$$

se tiene $\text{sen } (3x^2) = f(g(x))$.

Luego

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen} (3x^2) &= D_x f (g (x)) \cdot D_x g (x) = \\ &= \cos (3x^2) \cdot D_x 3x^2 = \cos (3x^2) (6x) . \end{aligned}$$

$$d) \quad D_x \sqrt{f (x)} = D_x [f (x)]^{1/2} = \frac{1}{2} [f (x)]^{-1/2} \cdot D_x f (x) .$$

$$D_x \sqrt{f (x)} = \frac{D_x f (x)}{2 \sqrt{f (x)}}$$

Haciendo uso de la Regla de la Cadena, se obtiene en forma directa que si g es una función de x , entonces:

- a) $D_x \operatorname{sen} (g (x)) = \cos (g (x)) g' (x)$
- b) $D_x \cos (g (x)) = -\operatorname{sen} (g (x)) g' (x)$
- c) $D_x \operatorname{tg} (g (x)) = \sec^2 (g (x)) g' (x)$, etc.

Ejemplo 6.15. Hallar:

- a) $D_x \operatorname{sen} (7x + 8x^2)$
- b) $D_x \operatorname{tg} (2x + 5)^4$
- c) $D_x \sec (\sqrt{x})$
- d) $D_x \sec \sqrt{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} a) \quad D_x \operatorname{sen} (7x + 8x^2) &= \cos (7x + 8x^2) \cdot (7 + 16x) = \\ &(7 + 16x) \cos (7x + 8x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad D_x \operatorname{tg} ((2x + 5)^4) &= \sec^2 ((2x + 5)^4) \cdot D_x (2x + 5)^4 \\ &= \sec^2 ((2x + 5)^4) \cdot 4 (2x + 5)^3 (2) \\ &= 8 (2x + 5)^3 \sec^2 ((2x + 5)^4) \end{aligned}$$

$$c) \quad D_x \sec \sqrt{x} = \sec \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot D_x \sqrt{x} = (\sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}) \frac{1}{2 \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D_x \sec \sqrt{x^2 + 1} &= \sec \sqrt{x^2 + 1} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1} \cdot D_x (\sqrt{x^2 + 1}) = \\
 &= \sec \sqrt{x^2 + 1} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sec \sqrt{x^2 + 1} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1} .
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS 6.2

Calcular, utilizando la regla de la cadena, las derivadas de las siguientes funciones:

$$1.- y = \sqrt[4]{x^{2/3} + 3}$$

$$2.- u = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$$

$$3.- y = (3 - 2 \operatorname{sen} x)^5$$

$$4.- y = \operatorname{sen}^3(4x)$$

$$5.- y = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$6.- z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}$$

$$7.- y = \operatorname{sen}(x^2)$$

$$8.- y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}^2(3x^2 + 4))$$

$$9.- \text{Si } f(x) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{cosec} x}}, \text{ calcular } \left(f' \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^2$$

$$10.- y = \frac{\cos^3(3x + 5)}{3x + 5}$$

6.6. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Dos de las aplicaciones de la derivada han sido tratadas en la parte introductoria de este capítulo: recta tangente a una curva y velocidad instantánea. A continuación se desarrollarán otras aplicaciones importantes de la derivada tales como recta normal a una curva, ángulo entre dos curvas, aceleración instantánea y máximos y mínimos de una función.

RECTA NORMAL A UNA CURVA

Se ha estudiado la ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$; en base a este concepto definiremos el de recta normal.

Definición 6.2. La *recta normal* a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_1, f(x_1))$ es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en dicho punto.

Según la definición, si $m_T = f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P , entonces

$$m_N = - \frac{1}{f'(x_1)} ,$$

para $f'(x_1) \neq 0$, es la pendiente de la normal en P .

Ejemplo 6.16. Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal

a la curva $y = \text{sen } x$ en el punto de abscisa $x_1 = \frac{\pi}{4}$

La ordenada del punto es

$$y_1 = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Como $f'(x) = \cos x$, entonces

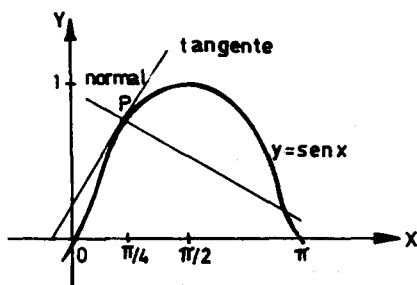


Fig. 6.11

$$m_T(x_1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad m_N(x_1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

La ecuación de la recta tangente en

$$P \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ es } y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

y la ecuación de la normal es:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

ANGULO ENTRE DOS CURVAS

Si dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en un punto P , entonces podemos definir ángulo formado por las curvas en el punto P de intersección, en la forma siguiente:

Definición 6.3. Dadas las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en P , el *ángulo formado por f y g* (en ese orden) en P , se define como el ángulo que forman T_1 y T_2 , rectas tangentes a $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, en P .

Si las rectas T_1 y T_2 coinciden, se dice que *las curvas son tangentes en P* .

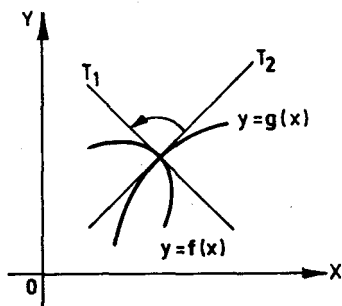


Fig. 6.12

Ejemplo 6.17. Hallar el ángulo que forman las curvas $y = -x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$ en cada uno de sus puntos de intersección.

Llamaremos $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Los puntos de intersección son: $P(1, 0)$ y $Q(-1, 0)$ que se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 1 \\ y &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

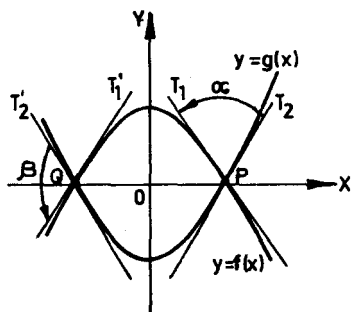


Fig. 6.13

Además, $f'(x) = -2x$, $g'(x) = 2x$.

Cálculo del ángulo en $P = (1, 0)$:

En $P = (1, 0)$ la recta tangente a $y = f(x)$ tiene pendiente $m = f'(1) = -2$ y la recta tangente a $y = g(x)$ tiene pendiente $m = g'(1) = 2$. Luego la tangente trigonométrica del ángulo α que forman f y g en P es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 - 2}{1 + (-2)(2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}; \alpha = 53^\circ 08'$$

Cálculo del ángulo en $Q (-1, 0)$:

En $Q (-1, 0)$, la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ es: $m = 2$ y la pendiente de la recta tangente a $y = g(x)$ es $m = -2$.

Luego la tangente trigonométrica del ángulo β que forman f y g en P es:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 - (-2)}{1 + (2)(-2)} = -\frac{4}{3}; \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} -\frac{4}{3}; \beta = 126^\circ 52'.$$

ACELERACION

La velocidad media y la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve en línea recta la hemos definido en base a la función $s(t)$ que describe la posición del cuerpo en cada instante t . A partir de la función que describe la velocidad instantánea $v(t)$, se puede definir, en forma análoga a lo que se hizo con la velocidad media y la velocidad instantánea, la aceleración media y, la aceleración instantánea.

La *aceleración media* en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + h]$, $h \neq 0$ se define como la razón

$$a = \frac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h} \quad y$$

La *aceleración instantánea* en el instante $t = t_1$ se define como el límite:

$$a(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h}, \quad h \neq 0, \text{ si existe.}$$

Esto es, $a(t_1) = v'(t_1)$.

Ejemplo 6.18. Un cuerpo se mueve en línea recta según la ley: $s = 10t - t^2$. Entonces:

a) la velocidad del cuerpo en cada instante t es $v(t) = 10 - 2t$

b) la aceleración media en el intervalo $[4, 6]$ es

$$a = \frac{v(6) - v(4)}{6 - 4} = \frac{-2 - 2}{2} = -2.$$

Las unidades para a son unidades de longitud sobre unidades de tiempo al cuadrado.

Es decir m/seg^2 , cm/seg^2 , etc.

c) La aceleración instantánea en el instante $t = 4$ es

$$\begin{aligned} a(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(4+h) - v(4)}{6-4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 - 2(4+h) - (10 - 2(4))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2. \end{aligned}$$

d) La aceleración en cada instante t es

$a(t) = v'(t) = -2$. La aceleración en este caso es negativa y constante.

Ejemplo 6.19. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y su ley de movimiento es:

$$s(t) = -2t^3 + 10t^2 + 4t,$$

donde t está dado en segundos y $s(t)$ en metros.

Hallar:

- a) La velocidad instantánea en cada instante t
- b) La aceleración media en el intervalo $[0, 4]$
- c) La aceleración cuando $t = 2$ seg.

a) $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 20t + 4$ m/seg.

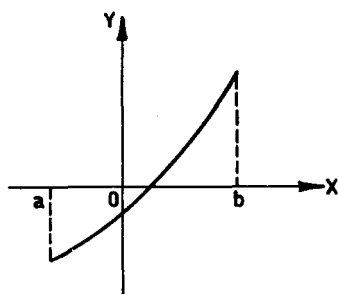
b) En $[0, 4]$, $a = \frac{v(4) - v(0)}{4 - 0} = \frac{-12 - 4}{4} = -4$ m/seg²

c) $a(t) = v'(t) = -12t + 20$;

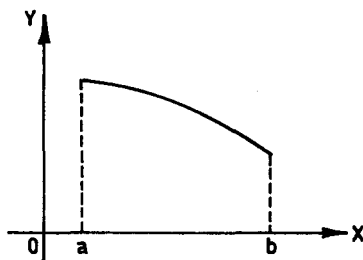
$a(2) = (-12)(2) + 20 = -4$ m/seg² .

MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION

Presentaremos, dentro de las limitaciones que un curso introductorio como éste impone, un método para determinar los máximos y mínimos de una función. El método que veremos no es el único. Otros pueden ser estudiados en un curso más avanzado de Análisis. Sin embargo, el procedimiento que plantearemos es general y puede por tanto ser aplicado en todos los casos.



Funcion Creciente



Funcion Decreciente

Fig. 6.14

Definición 6.4. Se dice que una función $y = f(x)$ es *creciente* en el intervalo $]a, b[$ si cada vez que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$, para x_1, x_2 en $]a, b[$. La función f es *decreciente* si cada vez que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$, figura 6.14.

Enunciaremos a continuación un teorema importante para la teoría de máximos y mínimos.

Teorema 6.5. Si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo $]a, b[$, entonces f es creciente en ese intervalo.

Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b) entonces f es decreciente en $]a, b[$.

Ejemplo 6.20. Determinar los intervalos en los que la función $f(x) = x^2$ es creciente o decreciente.

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x$. La función es creciente en aquellos intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ (teorema 6.5). Luego f es creciente para todo $x > 0$, es decir, en el intervalo $]0, +\infty[$.

Es decreciente si $f'(x) < 0$, luego es decreciente para todo $x < 0$, o sea en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Para $x = 0$ se tiene $f'(0) = 0$ y el teorema 6.5 no nos asegura nada en este caso. la figura 6.15 muestra a la función $f(x) = x^2$.

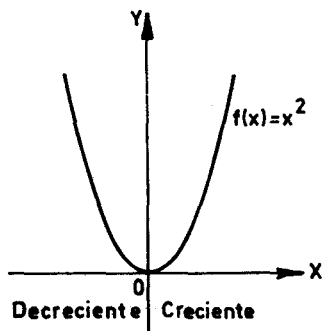


Fig. 6.15

Ejemplo 6.21. Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = 4x^2 + 2x^3$.

La derivada de $y = 4x^2 + 2x^3$ es $y' = 8x + 6x^2 = 2x(4 + 3x)$.

Analicemos, según sea el valor de x , los signos de los dos factores de y' :

si $x > 0$, $2x$ y $(4 + 3x)$ son positivos, luego $y' > 0$

si $x < 0$, $2x < 0$ pero $(4 + 3x)$ puede ser positivo o negativo. Si $-4/3 < x < 0$ entonces $(4 + 3x)$ es positivo y por tanto en este intervalo $y' < 0$. Si $x < -4/3$, entonces $(4 + 3x)$ es negativo y se tiene $y' > 0$.

Podemos resumir el anterior análisis en el cuadro siguiente:

x	$2x$	$4x + 3x$	$y' = 2x(4 + 3x)$	
$x > 0$	+	+	+	: creciente
$-\frac{4}{3} < x < 0$	-	+	-	: decreciente
$x < -\frac{4}{3}$	-	-	+	: creciente

La figura 6.16 presenta un croquis de la función $y = 4x^2 + 2x^3$.

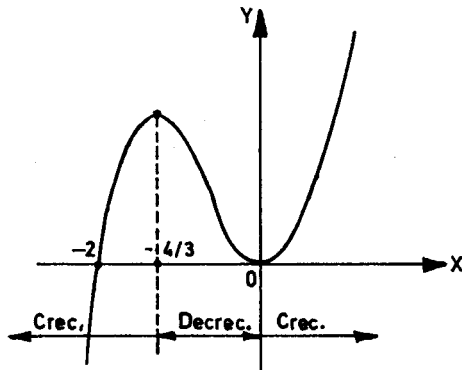


Fig. 6.16

Definición 6.5. Se dice que una función $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto x_0 si existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 tal que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in]a, b[, x \neq x_0$. La función $y = f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en x_0 si existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in]a, b[, x \neq x_0$.

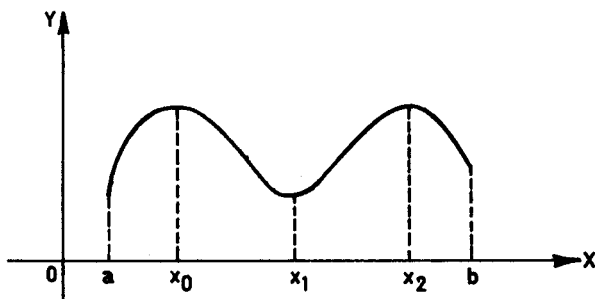


Fig. 6.17

Una función puede tener varios máximos y mínimos relativos en un intervalo. Mas aún, el valor que toma la función en un mínimo relativo puede ser mayor que el que toma en un máximo relativo. En la figura 6.17, x_0 y x_2 son máximos relativos en el intervalos $]a, b[$ y x_1 es un mínimo relativo en el mismo intervalo.

Teorema 6.6. Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y en este punto tiene un máximo o un mínimo relativo, entonces $f'(x_0) = 0$.

Haremos la demostración para el caso del máximo.

Supongamos que $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en x_0 .

Si $f'(x_0) \neq 0$ entonces $f'(x_0) > 0$ ó $f'(x_0) < 0$.

Si $f'(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en un intervalo que contiene a x_0 . Luego en ese intervalo, a la derecha de x_0 los valores de la función son mayores que $f(x_0)$, por definición de función creciente en un intervalo, en contradicción con la hipótesis que dice que hay un máximo relativo en x_0 .

Si $f'(x_0) < 0$ entonces por el teorema 6.5 la función es decreciente y los valores de la función correspondientes a valores de x a la izquierda de x_0 en un intervalo que contiene a x_0 serán mayores que $f(x_0)$, en contradicción con la hipótesis de que en x_0 la función tiene un máximo relativo.

Luego $f'(x_0) = 0$.

La demostración para x_0 , mínimo relativo es análoga.

Este teorema señala una condición necesaria para que en x_0 exista máximo o mínimo relativo, es decir, si en x_0 hay máximo o mínimo entonces la derivada de $f(x)$ en x_0 se anula. Sin embargo, la condición no es suficiente. La derivada de una función puede anularse en x_0 y no tener máximo ni mínimo en dicho punto. Por ejemplo, la función $y = x^3$ tiene por derivada $y' = 3x^2$ que para $x_0 = 0$ se anula. La gráfica de la función nos demuestra que $y = x^3$ no tiene ni máximo ni mínimo en $x_0 = 0$.

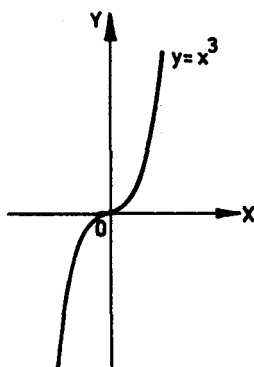


Fig. 6.18

El siguiente teorema proporciona un criterio general para la determinación de máximos y mínimos relativos de una función.

Teorema 6.7. Sea $y = f(x)$ una función definida en x_0 y tal que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe. Si

a) existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 y tal que para todo $x \in]a, x_0[$ se tiene $f'(x) > 0$ (creciente) y para todo $x \in]x_0, b[$

se tiene $f'(x) < 0$ (decreciente), entonces en x_0 existe un máximo relativo;

b) existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 y tal que para todo $x \in]a, x_0[$ se tiene $f'(x) < 0$ (decreciente) y para todo $x \in]x_0, b[$ se tiene $f'(x) > 0$ (creciente), entonces en x_0 existe un mínimo relativo;

c) existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 en el cual $f'(x)$ no cambia de signo, entonces x_0 no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo relativo de la función.

La demostración del teorema es inmediata. Haremos la parte a).

En $]a, x_0[$, $f'(x) > 0$, luego por el teorema 6.5 f es creciente en ese intervalo, es decir, $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in]a, x_0[$.

En $]x_0, b[$, $f'(x) < 0$, luego por el mismo teorema f es decreciente en $]x_0, b[$ es decir $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in]x_0, b[$. Luego se tiene:

$$f(x_0) > f(x) \text{ para todo } x \in]a, b[, x \neq x_0.$$

Por definición, x_0 es un máximo relativo de la función (fig. 6.19).

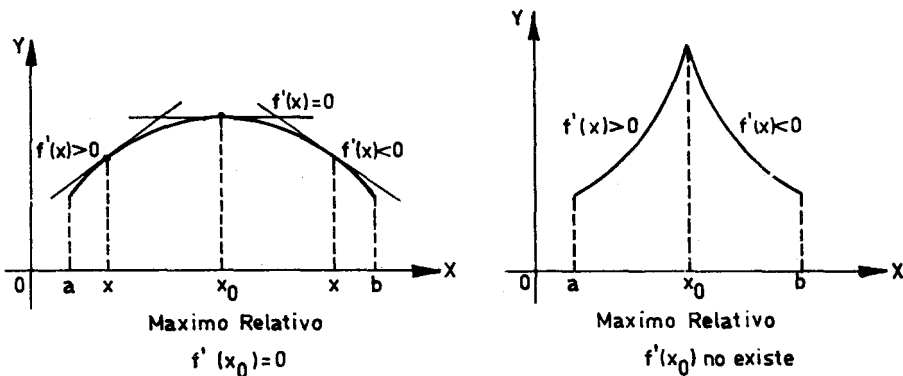


Fig. 6.19

Los dos últimos teoremas nos permiten establecer una regla para la determinación de máximos y mínimos relativos de una función.

- Regla: 1°. Hallar la derivada de la función.
 2°. Determinar los valores de x en donde la derivada vale cero o en donde la derivada no existe. Estos puntos se llaman *puntos críticos*.
 3°. Aplicar el teorema 6.7 a cada uno de los puntos críticos.

Si en x_0 la función toma un valor máximo o mínimo relativo, se dice que $f(x_0)$ es el *valor máximo* o *mínimo* relativo de la función, respectivamente.

Ejemplo 6.22. Encontrar los valores máximos o mínimos relativos de la función

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Aplicamos la regla dada:

- 1°. Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$.
 2°. Puntos críticos: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ambos anulan a la derivada.
 3°. Analicemos el punto $x_1 = 3$ según el teorema 6.7

Si $1 < x < 3$ entonces $y' < 0$, y si $x > 3$, $y' > 0$; luego en $x_1 = 3$ la función tiene un mínimo relativo.

Estudiemos el punto $x_2 = 1$.

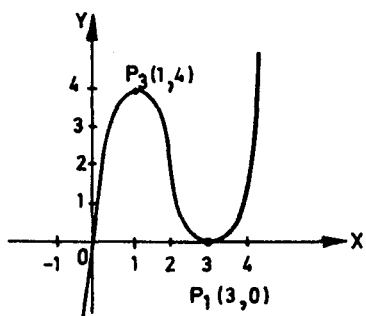


Fig. 6.20

Si $x < 1$ entonces $y' > 0$, y si $1 < x < 3$ entonces $y' < 0$; luego en $x_2 = 1$ la función tiene un máximo relativo.

Como $y(3) = 0$ e $y(1) = 4$, entonces la función tiene un valor mínimo relativo igual a cero y un valor máximo relativo igual a 4.

Ejemplo 6.23. Determinar los máximos o mínimos relativos de la función $y = (x - 1)^3 - 1$.

La derivada de la función dada es $y' = 3(x - 1)^2$

El único punto crítico es $x_1 = 1$.

Para valores de $x < 1$ ó $x > 1$, siempre $(x - 1)^2$ será positivo, es decir $y' > 0$ a la izquierda y a la derecha de $x_1 = 1$. Por la parte c) del teorema 6.7, en $x_1 = 1$ la función no tiene ni máximo ni mínimo. Más aún, siendo $y' > 0$ en un intervalo conteniendo a $x_1 = 1$, la función es creciente en ese intervalo.

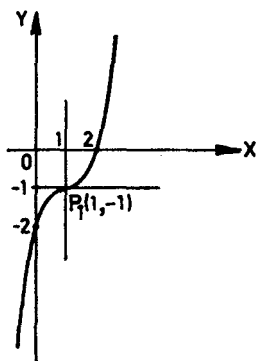


Fig. 6.21

Por supuesto que al anularse y' en $x_1 = 1$, la tangente a la curva en el punto correspondiente es horizontal y corta a la curva.

Ejemplo 6.24. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y = x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}.$$

La función puede escribirse como $y = x + \frac{3}{2} x^{2/3}$, cuya derivada

es $y' = 1 + x^{-1/3} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Encontremos los puntos críticos. Si $y' = 0$ entonces

$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, o sea $\sqrt[3]{x} = -1$, ó $x_1 = -1$.

En este caso hay otro punto crítico y es aquel valor de x para el cual la derivada no existe. Para $x_2 = 0$ la derivada se hace infinita.

Tenemos pues tres intervalos en los cuales debemos analizar el signo que toma la derivada:

Intervalo	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	Punto Crítico	Valor máximo o mínimo
$x < -1$	Negativo y menor que 1 en valor absoluto	$y' > 0$	$x_1 = -1$	$f(-1) = 0.5$, máximo
$-1 < x < 0$	Negativo y mayor que 1 en valor absoluto	$y' < 0$		
$x > 0$	Positivo	$y' > 0$	$x_2 = 0$	$f(0) = 0$, mínimo

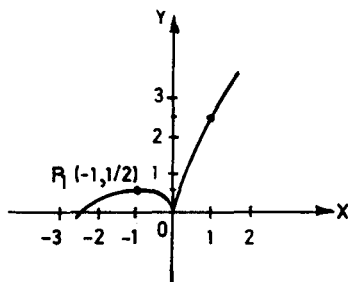


Fig. 6.22

Un croquis de la función $y = x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$ aparece en la figura 6.22 .

Definición 6.6. Dada la función $y = f(x)$ definida en el dominio D , se dice que f tiene un *máximo absoluto* en x_0 si $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in D, x \neq x_0$. Al valor $f(x_0)$ se le llama *máximo absoluto de f* en D .

Se dice que f tiene un *mínimo absoluto* en x_0 si $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in D, x \neq x_0$. $f(x_0)$ es entonces el *mínimo absoluto de f* en D .

Si una función es continua (para lo cual la existencia de la derivada es condición suficiente) en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces se puede demostrar que la función posee un máximo y un mínimo en dicho intervalo. Es evidente que el máximo y mínimo absoluto de la función corresponderá a puntos críticos o a los extremos del intervalo.

Ejemplo 6.25. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $y = \frac{x^3}{3} - x + 1$ en el intervalo cerrado $[-4, 4]$.

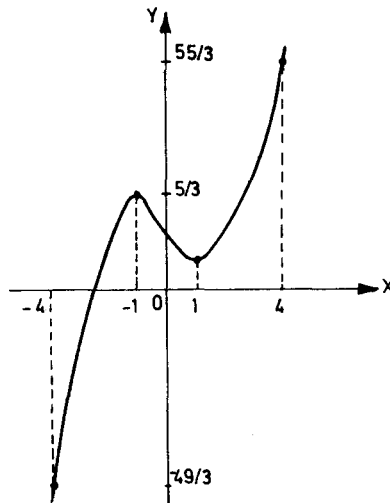


Fig. 6.23

Los valores máximo y mínimo de $y = f(x)$ pueden corresponder a los valores máximos y mínimos relativos o a los valores de f en los extremos del intervalo.

Como $y' = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, entonces hay dos valores críticos: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

El primer valor corresponde a un valor máximo relativo, $f(-1) = 5/3$, y el segundo a un valor mínimo relativo, $f(1) = 1/3$.

En los extremos del intervalo los valores de la función son $f(-4) = -49/3$ y $f(4) = 55/3$.

Luego el máximo absoluto corresponde a $x = 4$ y vale $55/3$ y el mínimo absoluto a $x = -4$ con el valor $-49/3$. (fig. 6.23).

Una idea de la gran variedad de problemas que se resuelven utilizando la teoría de máximos y mínimos la obtendrán al revisar la lista de ejercicios planteados al final del capítulo. Los ejemplos siguientes pueden ayudar a precisar el método que debe seguirse.

Ejemplo 6.26. Hallar el punto de la curva $2y = x^2$ más cercano del punto $P_0(4, 1)$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva $2y = x^2$.

La distancia de P a $P_0(4, 1)$ es $d = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$. Expresando d en función de una sola variable, por ejemplo x , se tiene:

$$d(x) = \sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}$$

El problema tiene solución si la función $d(x)$ tiene un mínimo.

Derivando se obtiene:

$$d'(x) = \frac{2(x - 4) + 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)x}{2\sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}} = \frac{x^3 - 8}{2\sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}}$$

Los valores críticos se obtienen haciendo $d'(x) = 0$, quedando $x^3 - 8 = 0$. Un solo valor crítico real, $x = 2$.

Debemos comprobar si este valor corresponde a un mínimo. Si $x < 2$ entonces $d' < 0$, y si $x > 2$, $d' > 0$. Luego la función $d(x)$ tiene un mínimo para $x = 2$. El valor mínimo es $d(2) = \sqrt{5}$ y la ordenada del punto buscado es

$$y = \frac{x^2}{2} = \frac{4}{2} = 2. \quad \text{Luego} \quad P = (2, 2).$$

Ejemplo 6.27. Las rectas $y = 2x$ y $3x + y = 30$ forman con el eje de abscisas un triángulo. Determinar los vértices del rectángulo de base en el eje X y de área máxima inscrito en dicho triángulo.

La figura 6.24 muestra un croquis del problema.

Sean $A(x_1, 0)$ y $B(x_2, 0)$ los vértices sobre el eje X .

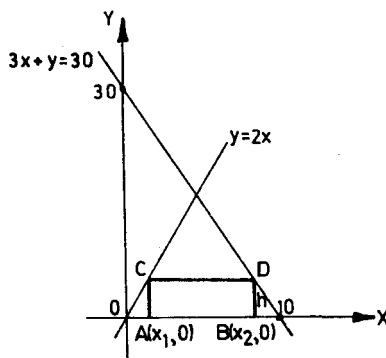


Fig. 6.24

Si h es la altura, entonces los otros vértices serán $C(x_1, h)$ y $D(x_2, h)$. El área del rectángulo es $A = (x_2 - x_1) \cdot h$. Expresando x_1 y x_2 en función de h se obtiene

$$x_1 = \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{h}{3} + 10, \quad \text{desde que } C \text{ y } D \text{ están sobre}$$

las rectas $y = 2x$ y $3x + y = 30$ respectivamente. Reemplazando en A :

$$A(h) = \left(-\frac{h}{3} + 10 - \frac{h}{2} \right) h = 10h - \frac{5}{6} h^2.$$

Derivando con respecto a h : $A'(h) = 10 - \frac{10}{6}h = 10\left(1 - \frac{h}{6}\right)$.

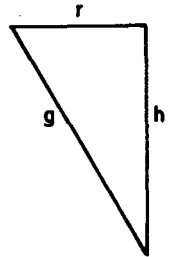
Un valor crítico es $h = 6$. Si $h < 6$, $A' > 0$ y si $h > 6$, $A' < 0$, luego la función $A(h)$ tiene un máximo en $h = 6$. Las coordenadas de los vértices son $A(3, 0)$, $B(8, 0)$, $C(3, 6)$, y $D(8, 6)$.

El área del rectángulo es 30 unidades de superficie.

Ejemplo 6.28. Se desea construir con la menor cantidad posible de plancha metálica un depósito con la forma de un cono recto circular (abierto por la base) y con capacidad de 2,000 litros. Calcular sus dimensiones.

Debemos calcular las dimensiones de un cono de área lateral mínima (sin la base) y volumen $2m^3$.

Sean, h la altura, g la generatriz y r el radio de la base del cono buscado.



Si S es el área lateral, entonces:

$S = \pi r g$. Además, de la figura:

$g^2 = r^2 + h^2$, y por dato

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 2$. De la última

Fig. 6.25

expresión se obtiene: $h^2 = \frac{36}{\pi^2 r^4}$ y de aquí $g^2 = r^2 + \frac{36}{\pi^2 r^4}$.

Elevando al cuadrado S y reemplazando g^2 se tiene:

$S^2 = \pi^2 r^4 + \frac{36}{r^2}$. Derivando con respecto a r : $S' = \frac{4\pi^2 r^3 - \frac{72}{r^3}}{2S}$.

El único valor crítico es $r = \sqrt[6]{\frac{18}{\pi^2}} = 1.11$ m.

Como la altura es igual a $h = \frac{6}{\pi r^2}$, entonces $h = 1.55$ m.

EJERCICIOS 6.3

Encontrar el ángulo que forman las curvas indicadas en los puntos donde se cortan.

1.— $4y = x^2 + 4$, $x^2 = 8 - 2y$

2.— $y = (x - 2)^2$, $y = -4 + 6x - x^2$

3.— $y = x^2$, $y = x^3$

4.— $xy = a^2$, $x^2 - y^2 = b^2$

5.— $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x + 5$

Hallar la velocidad y aceleración en cada uno de los problemas siguientes sabiendo que $s(t)$ representa el movimiento de un cuerpo que se desplaza en línea recta. s está dando en mts. y t en segundos.

6.— $s(t) = 2t + 1$; para $t = 1$, $t = t_1$

7.— $s(t) = -4t^2 + 7t + 5$ para $t = 0$, $t = 1$, $t = t_1$

8.— $s(t) = -3 \operatorname{sen} t + 1$ para $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = t_1$

9.— Discutir el movimiento de un punto P si su posición en el instante t está dado sobre un sistema coordenado rectilíneo por: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 20$ en el intervalo $t \in [0, 6]$

10.— Desde lo alto de una torre de 50 mts. de altura se deja caer una bola que cae según la ley $s(t) = -9.8t^2 + 50$. Determinar el instante en que toca el suelo; la velocidad inicial y la velocidad con que toca el suelo; la aceleración con que cae.

Determinar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones y hacer un croquis de la gráfica correspondiente.

11.— $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

16.— $f(x) = \sqrt[3]{x(x-7)^2}$

12.— $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

17.— $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

13.— $y = x^2(x - 12)^2$

18.— $y = 2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$

14.— $y = \frac{16}{x(4 - x^2)}$

19.— $y = \frac{6x}{1 + x^2}$

15.— $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$

20.— $y = 2 \operatorname{sec} x - \operatorname{tg} x$

- 21.— Encontrar un triángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio r .
- 22.— Determinar el punto de la gráfica de la ecuación $y = x^2$ más cercano del punto $(3, 0)$.
- 23.— Encontrar la altura h de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R .
- 24.— Hallar las dimensiones del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio R que tenga área máxima.
- 25.— Encontrar la altura h de un cilindro con máxima área lateral inscrito en una esfera.
- 26.— Determinar un punto sobre una curva $y = \frac{1}{1 + x^2}$ en el cual la tangente forma con el eje de abscisas el mayor ángulo posible (en valor absoluto).
- 27.— Hallar las dimensiones del rectángulo de área 100 m^2 de tal modo que su perímetro sea mínimo.
- 28.— El costo de producción de x artículos está dado por la función $C(x) = x^2 + 7x + 80$. ¿Cuántos artículos deberán producirse para que el costo sea mínimo?
- 29.— Determinar las dimensiones de un cilindro de volumen igual a $16\pi \text{ m}^3$, de manera que su superficie total sea mínima.
- 30.— Determinar la altura de un prisma regular triangular inscrito en una esfera de radio R de manera que el volumen del prisma sea máximo.

6.7 ANTIDERIVADAS

Se trata ahora de encontrar una función $y = F(x)$ cuya derivada $F'(x)$ sea una función dada $y = f(x)$.

Es decir F debe ser tal que $F'(x) = f(x)$. La función F es llamada *antiderivada* de f y la operación de hallarla se llama *antiderivación*.

La antiderivada de una función $y = f(x)$ se denota con $\int f(x)dx$ que se lee *integral de $f(x)$* . Esto es $D_x \int f(x) dx = f(x)$.

Ejemplo 6.29. Dada la función $f(x) = 3x$, se tiene que una antiderivada de f es

$F(x) = \frac{3x^2}{2}$, pues $F'(x) = 3x$. Podemos escribir entonces:

$$\int 3x \, dx = \frac{3x^2}{2}$$

Notemos que no solamente $F(x) = \frac{3x^2}{2}$ es una antiderivada de f , también lo son:

$$y = \frac{3x^2}{2} + 1$$

$$y = \frac{3x^2}{2} - 5$$

Y en general cualquier función de la forma: $y = \frac{3x^2}{2} + k$,

donde k es una constante cualquiera, es una antiderivada de f .

Ejemplo 6.30. Hallar una antiderivada de $y = x^3 + 3$.

Observemos que

$$D_x \left(\frac{x^4}{4} + 3x \right) = x^3 + 3, \text{ luego}$$

$$\int (x^3 + 3) \, dx = \frac{x^4}{4} + 3x$$

En general se tiene que

$$\int (x^3 + 3) \, dx = \frac{x^4}{4} + 3x + k, \text{ para cualquier constante } k.$$

Ejemplo 6.31. Si $D_x F(x) = 3x^2 + 3x + 1$ y $F(0) = 1$, hallar F .

Se trata de hallar la antiderivada de $y = 3x^2 + 3x + 1$ que pasa por $(0, 1)$.

Se tiene que: $D_x \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + k \right) = 3x^2 + 3x + 1$ siendo

k una constante cualesquiera. Luego

$$F(x) = \int (3x^2 + 3x + 1) dx = x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + k$$

pero $F(0) = 1$, es decir, $1 = F(0) = k$.

Por tanto, la función F buscada es $F(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + 1$.

A menudo podemos hallar la antiderivada de una función si recordamos las fórmulas de derivación que ya fueron estudiadas.

Así, para toda constante k , se tiene:

a) $D_x(x + k) = 1$, luego $\int dx = x + k$

b) $D_x \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k \right) = x^n$, $n \neq -1$,

luego $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, siempre que $n \neq -1$.

c) $D_x(\operatorname{sen} x + k) = \cos x$, luego $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$

d) $D_x(\cos x + k) = -\operatorname{sen} x$, luego $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$

e) $D_x(\operatorname{tg} x + k) = \sec^2 x$, luego $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k$

f) $D_x(\operatorname{ctg} x + k) = -\operatorname{csc}^2 x$, luego $\int \operatorname{csc}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + k$

g) $D_x(\sec x + k) = \sec x \operatorname{tg} x$, luego $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + k$

h) $D_x(\operatorname{csc} x + k) = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x$, luego $\int \operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x dx = -\operatorname{csc} x + k$

Un resultado importante que usado con las fórmulas que acabamos de dar, facilitará los cálculos de antiderivadas en el siguiente:

Teorema 6.8. Si f y g son funciones y a y b son constantes cualesquiera, entonces se cumple que:

$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$, siempre que existan $\int f(x) dx$ y $\int g(x) dx$.

En efecto:

$$D_x (a \int f(x) dx + b \int g(x) dx) = a D_x \int f(x) dx + b D_x \int g(x) dx = a f(x) + b g(x).$$

Luego:

$$\int (a f(x) + b g(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Ejemplo 6.32. Hallar: $\int (4x^5 + \sqrt{x} + \text{sen } x - 2x) dx$.

Por el teorema 6.8 se tiene:

$$\int (4x^5 + \sqrt{x} + \text{sen } x - 2x) dx = 4 \int x^5 dx + \int x^{1/2} dx + \int \text{sen } x dx - 2 \int x dx.$$

Aplicando las fórmulas resulta finalmente que:

$$\int (4x^5 + \sqrt{x} + \text{sen } x - 2x) dx = 4 \frac{x^6}{6} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + (-\cos x)$$

$$-2 \frac{x^2}{2} + k = \frac{2x^6}{3} + \frac{2}{3} x^{3/2} - \cos x - x^2 + k.$$

El siguiente resultado también es fácil de comprobar.

Teorema 6.9.

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + k \text{ para } n \neq -1.$$

En efecto, aplicando la regla de derivación de una función compuesta:

$$D_x \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + k = D_x \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} [g(x)]^n g'(x).$$

De aquí se deduce el teorema.

- Ejemplo 6.33.** Hallar:
- $\int (3x + 7)^{12} \cdot (3) dx$
 - $\int (3x + 7)^{12} dx$
 - $\int \text{sen } x \cos x dx$
 - $\int \text{tg}^3 x \sec^2 x dx$

a) Para aplicar el último teorema, hagamos: $g(x) = 3x + 7$. Se tiene $g'(x) = 3$.

$$\begin{aligned} \int (3x + 7)^{12} (3) dx &= \int [g(x)]^{12} g'(x) dx \\ &= \frac{[g(x)]^{13}}{13} + k = \frac{(3x + 7)^{13}}{13} + k. \end{aligned}$$

b) Observemos esta vez que para aplicar directamente el teorema falta el factor constante $g'(x) = 3$, pero podemos escribir:

$$\int (3x + 7)^{12} dx = \frac{1}{3} \int (3x + 7)^{12} (3) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \int (3x + 7)^{12} dx &= \frac{1}{3} \int (3x + 7)^{12} (3) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(3x + 7)^{13}}{13} + k \right] = \frac{(3x + 7)^{13}}{39} + k. \end{aligned}$$

c) Si hacemos $g(x) = \text{sen } x$, se tiene $g'(x) = \cos x$.

$$\text{Luego: } \int \text{sen } x \cos x dx = \int \text{sen } x D_x (\text{sen } x) dx = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + k$$

$$d) \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{sec}^2 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + k, \text{ puesto que } D_x (\operatorname{tg} x) = \operatorname{sec}^2 x.$$

Ejemplo 6.34. Hallar: a) $\int (3x^3 + 6x^2)^5 (3x^2 + 4x) \, dx$

$$b) \int x \sqrt{5x^2 + 7} \, dx$$

$$a) \int (3x^3 + 6x^2)^5 (3x^2 + 4x) \, dx = \frac{1}{3} \int (3x^3 + 6x^2)^5 (3) (3x^2 + 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (3x^3 + 6x^2)^5 (9x^2 + 12x) \, dx = \frac{(3x^3 + 6x^2)^6}{18} + k.$$

$$b) \int x \sqrt{5x^2 + 7} \, dx = \frac{1}{10} \int \sqrt{5x^2 + 7} (10x) \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \int (5x^2 + 7)^{1/2} (10x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 7)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{(5x^2 + 7)^{3/2}}{15} + k.$$

Ejemplo 6.35. Desde la azotea de un edificio de 30 mts. de altura, es lanzado verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad inicial de $v_0 = 20$ mts/seg. Hallar la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante t , la altura máxima que alcanza el objeto y el instante en el que toca el suelo.

Consideremos la recta coordenada en su sentido positivo hacia arriba, de tal modo que el origen coincida con la base del edificio. Denotemos con $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ las funciones que expresan la posición del cuerpo, la velocidad y la aceleración en cada instante t , respectivamente.

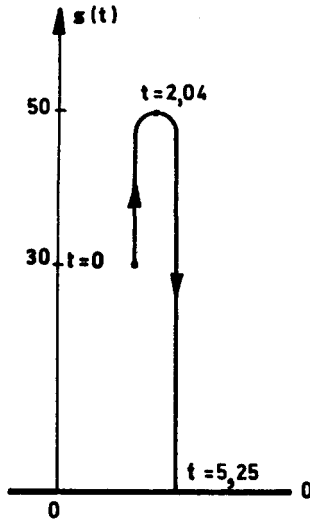


Fig. 6.26

La aceleración que actúa en el cuerpo es la de la gravedad que en valor absoluto es igual a 9.8 m/seg^2 y que está dirigida hacia abajo; por esta razón escribimos:

$$a(t) = -9.8 \text{ (constante en cada instante } t \text{)} .$$

Se sabe que $v'(t) = a(t)$. Luego:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int -9.8 dt = -9.8 t + k_1$$

pero: $v(0) = 20 \text{ mts/seg.}$, (en $t = 0$ la velocidad inicial, que es con la que se lanza el objeto es 20 mts/seg.),

luego, $20 = v(0) = -9.8(0) + k_1$ ó $k_1 = 20$. Es decir:

$$v(t) = -9.8 t + 20.$$

También $s'(t) = v(t)$, luego $s(t) = \int (-9.8 t + 20) dt$

$$= -\frac{9.8}{2} t^2 + 20t + k_2 . \text{ Pero en } t = 0, s(0) = 30, \text{ altura del edificio, luego:}$$

$$30 = s(0) = -\frac{9.8}{2} (0) + 20(0) + k_2 .$$

Por tanto la función que da la posición en cada instante t es

$$s(t) = -\frac{9.8}{2} t^2 + 20t + 30, \text{ donde } t \text{ se expresa en segundos y } s(t) \text{ en mts.}$$

Calculemos la altura máxima que alcanza el objeto. Como $s'(t) = -9.8t + 20$, entonces un punto crítico se obtiene de $-9.8t + 20 = 0$, o sea $t = 2.04$ seg. Cuando $t < 2.04$, $v' > 0$ y cuando $t > 2.04$, $v' < 0$; luego la función $s(t)$ tiene su único máximo para $t = 2.04$, y corresponde al valor $s(2.04) = 50.41$ mts.

Para calcular el instante en que el objeto toca el suelo, bastará encontrar el valor de t que hace $s(t) = 0$, es decir, la solución de la ecuación

$$-\frac{9.8}{2} t^2 + 20t + 30 = 0 .$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $t_1 = 5.25$ seg. y $t_2 = -1.17$ seg. La solución es t_1 y t_2 no tiene sentido en este problema.

EJERCICIOS 6.4

Calcular las siguientes antiderivadas:

1.— $\int \left(2x^2 + 3x - \frac{1}{x^2} \right) dx$

11.— $\int \frac{3t \, dx}{\sqrt{1-t^2}}$

2.— $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$

12.— $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

- 3.— $\int \operatorname{tg} 2x \operatorname{sec} 2x \, dx$
- 4.— $\int x \sqrt{2x^2 + 5} \, dx$
- 5.— $\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}}$
- 6.— $\int \frac{x^2 \, dx}{(8x^3 - 7)^2}$
- 7.— $\int (a^{1/3} - x^{1/3})^2 \, dx$
- 8.— $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx$
- 9.— $\int \sqrt{2x + 1} \, dx$
- 10.— $\int x \operatorname{sen} (x^2 + 1) \, dx$
- 13.— $\int \frac{(z + 1) \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 2z + 2}}$
- 14.— $\int y^2 (1 + 2y^3)^{-2/3} \, dy$
- 15.— $\int \frac{\cos 2x \, dx}{\operatorname{sen}^3 2x}$
- 16.— $\int \operatorname{sen} 3x \, dx$
- 17.— $\int \frac{\operatorname{sen} 2t \, dt}{\sqrt{2 - \cos 2t}}$
- 18.— $\int \operatorname{sen}^3 \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} \, dy$
- 19.— $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$
- 20.— $\int \cos^2 x \, dx$

Hallar las funciones \int que satisfacen las condiciones indicadas en cada caso.

21.— $D_x f = x^3 + 3x + 5, \quad f(1) = 1$

22.— $D_x f = \operatorname{sen} x + 7, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

23.— $D_x f = 3 \cos x + 7x, \quad f(\pi) = 4$

24.— La aceleración de un móvil que se desplaza en línea recta es $a(t) = 10 \text{ m/seg}^2$. Hallar la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante t sabiendo que parte del reposo.

25.— Un cuerpo se deja caer desde una torre de 50 mts. de altura. ¿Cuál es la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante t ? En qué momento toca el suelo? (Tomar la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/seg^2).

- 26.—Un cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg. desde una torre de 50 mts. de altura. a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cuerpo? b) ¿En qué instante toca el suelo? c) ¿Cuál es la velocidad que tiene el cuerpo en el momento de tocar el suelo? (Ver ejemplo 6.25).
- 27.— $f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 30t + 9$ describe el movimiento rectilíneo de un vehículo con respecto a un punto fijo. Determinar el intervalo de tiempo durante el cual el vehículo se desplaza en sentido contrario al inicial.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

CAPITULO 0

Ejercicios 0.1

1. a) $A = \{1, 3, 5, \dots\}$; 3) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$;
7. $f(2) = 4$, $f(3) = 9$; 9) $\text{Dom}(g \circ f) = \{1, 3\}$
 $\text{Ran}(g \circ f) = \{1, 4\}$

Ejercicios 0.2

8. c) $]-\infty, 1[\cup [1.5, +\infty[$ d) $]-\infty, -6] \cup [3, +\infty[$,
f) Φ , i) $\{7, -7\}$,
j) $\{5/2, -9/6\}$, l) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$,
ll) $\delta = \frac{1}{(2)(10^9)}$;

CAPITULO 1

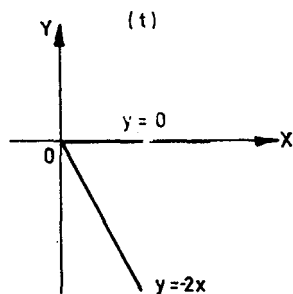
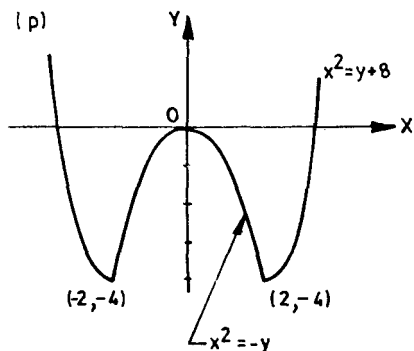
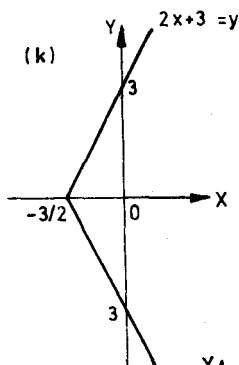
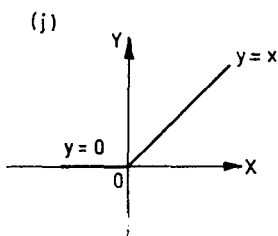
Ejercicios 1.1

2. -5 y -15 ; 3. 3 ; 4. $(5, 7)$; 10. $(-12, -10)$;
11. a) $\left(\frac{13}{5}, \frac{17}{5}\right)$, b) $P_1(-12, 8)$, $P_2(12, 0)$;
12. $P_1\left(-1, \frac{14}{3}\right)$, $P_2\left(-2, \frac{22}{3}\right)$; 15. -5 ; 16.9; 17.0; 18. $\frac{24}{5}$;

Ejercicios 1.2

1. (a) I y III, (b) I y III, (c) II y IV,
(d) I y II, (e) los cuatro;
2. (a) $(-2, -3)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$ y $(3, 2)$;
3. (b) Simetría con respecto a los ejes y al origen;
(d) sin simetrías;
4. (a) \mathbb{R} , \mathbb{R} , (c) \mathbb{R} , $[4, +\infty[$, (e) $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$,
(g) $\mathbb{R} - \{0 - 2\}$, $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$,
(i) $[-1, 1]$, $[-1, 1]$, (k) \mathbb{R} , $]-\infty, -2]$;
5. (a) $[-1, 11]$, (c) $[-8, 1]$, (e) $[1, +\infty[$

6.



Ejercicios 1.3

5. $24x + 20y - 47 = 0$;
6. $192x^2 + 256y^2 = 3072$;
7. $7y^2 - 9x^2 + 18x - 72 = 0$;
8. (a) $y = \pm 6$,
- (b) $3x^2 + 4y^2 = 192$;
9. $2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$;
10. $xy = 6$; $x < 0$, $y < 0$;
11. $9x^2 + 9y^2 - 18x + 8 = 0$;
12. $xy = 12$, $x > 0$, $y > 0$;
13. $y^2 - 3x^2 + 12 = 0$;

14. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1;$

15. $x = \frac{3}{2} \sqrt{y};$

16. $(x^2 + y^2)^2 = 10xy;$

17. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 6xy;$

18. $x^2 + y^2 - 8y - 16 = 0, y > 0;$

19. $3x^2 - 22x - y^2 + 35 = 0.$

CAPITULO 2

Ejercicios 2.1

1. (a) $3x - 4y - 17 = 0;$

2. (a) $x - 2y + 5 = 0,$ (c) $x = \sqrt{2};$

3. (a) $7y - x = 8,$ (b) $2y - x = 3,$

(c) $3y - 4x = 7,$ (d) $4x - 3y = 18,$

(e) $7y - x = 33,$ (f) $(9, 6);$

4. $(5, 1), (4, 5), (-2, 1);$ 5. $\pm 18;$

6. 6; 7. $x + 2y = 0;$ 9. $(7, -4);$

10. $y = -2x;$ 11. $y(x - 1) = x^2.$

Ejercicios 2.2

1. (a) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3},$

(b) $-\frac{2}{5}, \frac{2}{5};$

2. (a) se cortan,

(b) se cortan,

(c) paralelas,

(d) coincidentes;

3. 4 ;

4. Dos soluciones:

$$a_1 = 4, a_2 = 14$$

$$a'_1 = -4, a'_2 = -14 ;$$

6. $2x - y - 4 = 0 ;$

7. $y = -\frac{4}{3}x + 18 ;$

8. $y = -\frac{5}{12}x + \frac{5}{2} ;$

9. $8x + 15y + 3 = 0 ,$

$$8x + 15y - 65 = 0 ;$$

10. $\left(\frac{6}{17}, -\frac{7}{17}\right) ;$

11. $\left(\frac{74}{17}, \frac{117}{17}\right) ;$

12. $y = 0 ;$

13. $x + 2y - 1 = 0 ,$

$$x - 2y + 3 = 0 ;$$

14. $-\frac{4}{3} ;$

15. $\frac{7}{3}\sqrt{6} ;$

16. (8, 8) ;

17. $y = -\sqrt{3}x ;$

18. $\frac{1}{3} ;$

19. $y - 1 = -\frac{1}{5}x ;$ 20. $\left(\frac{3}{5}, 1\right) .$

CAPITULO 3

Ejercicios 3.1

2. (a) $x^2 - 4x + y^2 - 4y - 17 = 0$,

(b) $x^2 + y^2 - 8x - 18 = 0$,

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 16y - 32 = 0$,

$$x^2 + y^2 - 24x + 12y + 80 = 0 ;$$

3. $y = 3x - 1$;

5. $(x - 10)^2 + \left(y - \frac{29}{3}\right)^2 = \left(\frac{29}{11}\right)^2$, $(x - 10)^2 + \left(y - \frac{29}{3}\right)^2 = \left(\frac{29}{3}\right)^2$;

6. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$, $(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$;

10. $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 8y - 2 = 0$;

11. $y - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 4)$;

12. $(10, 1 + 4\sqrt{3})$, $(10, 1 - 4\sqrt{3})$;

14. $P(9, -24)$, $d = 10$;

15. $2x - y - 16 = 0$;

16. $x^2 - 8x + 2y + 8 = 0$;

17. $\frac{\pi}{2}$; 18. $2x - y - 3 = 0$;

19. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$;

20. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Ejercicios 3.2

1. $C (-2, 3), F' (-4, 3), V (1, 3), V' (-5, 3), a = 3, b = \sqrt{5} ;$

$F (0, 3) ;$

3. $\frac{x^2}{81} + \frac{5y^2}{144} = 1 ;$

4. $\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 ;$

5. $n = \pm 5 ;$

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 ;$

10. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0 ;$

11. $4x^2 - y^2 = 80;$

13. $\left(2 \sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{20}{3}} \right) ;$

14. $\frac{x^2}{25} - \frac{11y^2}{400} = 1 ;$

15. $y = 2x \pm \sqrt{10} ;$

16. $x = 2y \pm \sqrt{5}, x = -2y \pm \sqrt{5} ;$

17. $\frac{(x + 3)^2}{7} - \frac{(y + 5)^2}{9} = 1 ;$

18. $\left(\frac{25}{4}, 3 \right) ;$

19. $5x - 3y - 16 = 0 ;$

$13x + 5y + 48 = 0 ;$

20. $x^2 - y^2 + 1 = 0 ;$

21. $24 ;$

22. $\sqrt{2} ;$

23. $\pi ;$

24. $3x^2 - y^2 - 22x + 35 = 0 ;$

25. $18 .$

Ejercicios 3.3

3. $4x^2 + 3y^2 + 32x - 14y + 59 = 0$; 4. 12 ;

5. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$;

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$;

7. $\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{48} = 1$;

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

10. $\frac{9y^2}{8} - \frac{9x^2}{64} = 1$.

Ejercicios 3.4

1. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

2. $x^2 - y^2 = 4$;

3. $(x + y)(x - y) = 0$;

(caso excep. de hipérbola)

4. $6x^2 - 4y^2 = 1$;

5. $y^2 = 2\sqrt{2}x$;

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$;

7. $y^2 = 3x$;

8. $y^2 - x^2 = 2$;

9. $(2x - y)(2x + y) = 0$;
(dos rectas que se cortan)

10. $x = \pm \frac{3}{2\sqrt{5}}$

(dos rectas paralelas caso exc. de parábola) ;

11. $A = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

12. $\lambda = 0, \lambda = 4$:

parábolas ;

$\lambda < 0, \lambda > 4$:

elipses ;

$0 < \lambda < 4$:

hipérbolas .

CAPITULO 4

Ejercicios 4.1

5. (a) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ (circunferencia) ;

(b) $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$ (hipérbola) ;

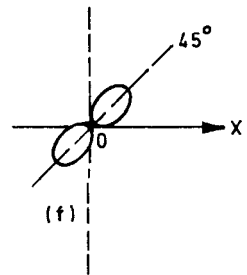
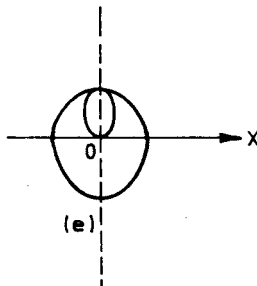
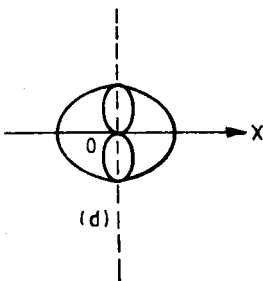
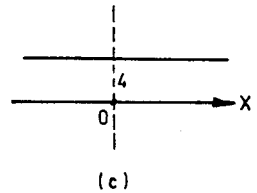
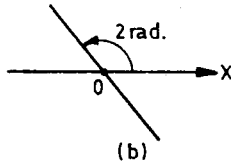
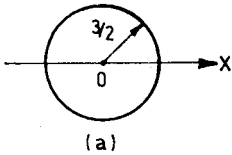
(c) $x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ (parábola) ;

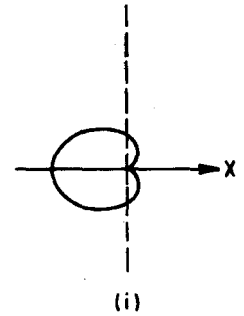
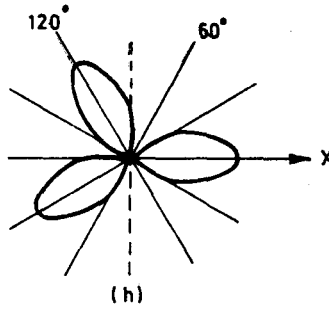
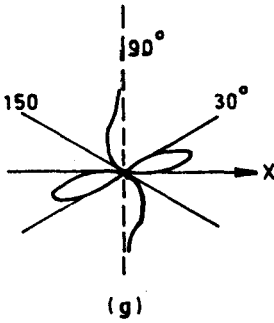
(d) $\frac{(x - 4)^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ (elipse) ;

6. (a) $r = \frac{6}{1 - 2 \cos \theta}$; (b) $r = 4$; (c) $\theta = \text{arc tg } 2$;

(d) $r^2 \cos 2 \theta = 4$; (e) $r^2 \text{sen } 2 \theta = 4$.

7.





8. (a) $P_n = \left(\frac{4}{4n+1}, \frac{(4n+1)\pi}{4} \right)$, (b) $\left(1, \frac{\pi}{3} \right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{3} \right)$;

(c) $(0.62, 100^\circ 57')$, $(0.62, 259^\circ 03')$, $(0.30, 49^\circ)$, $(0.30, 311^\circ)$;

d) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{\pi}{6} \right)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} \right)$, el polo ;

9. $r = 6 \cos \theta + 3$;

10. 12.5 ;

11. $r = \frac{3}{1 - \cos \theta}$;

12. $(\sqrt{3}, 1)$, 2 ;

13. $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$;

14. 2 ;

15. $r = -\frac{34}{5 \cos \theta}$ y $r = -\frac{16}{5 \cos \theta}$ (directrices) ;

$r = \frac{20}{3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{cos} \theta}$ y

$r = -\frac{20}{3 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{cos} \theta}$ (asíntotas) .

CAPITULO 5

Ejercicios 5.1

1. a. $\text{Dom } (f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
 $\text{Ran } (f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
3. b. $(g/f)(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$.
 $\text{Dom } (g/f) = \mathbb{R} - \{-1/2\}$.
5. c. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
 $\text{Dom } (f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\}$.
7. a. Restricción: $[0, +\infty[$.
ó, $]-\infty, 0]$.
- d. Restricción: $[0, 1]$.
ó, $[-1, 0]$.

Ejercicios 5.2

1. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8000}$;
- (b) 2,
- (d) 6,
- (f) 2,
3. (a) 0,
- (c) $2x$,
2. (a) $\frac{3}{2}$,
- (c) $\frac{1}{4}$,
- (e) 1,
- (g) $\sqrt{3}$;
- (b) a ,
- (d) $-\frac{1}{x^2}$

$$(e) \frac{1}{2\sqrt{x}} ;$$

$$5. (a) \frac{4}{3} , \quad (b) 3 , \quad (c) \frac{3}{2} ,$$

$$(d) \frac{1}{2} , \quad (e) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ejercicios 5.3

$$1. 1 ;$$

$$2. \frac{1}{9} ;$$

$$3. \text{ No existe ;}$$

$$4. 2 ;$$

$$5. +\infty ;$$

$$6. 0,$$

$$7. \frac{1}{2a} ;$$

$$8. \frac{1}{3} ;$$

$$9. \frac{1}{3} ;$$

$$10. 0 ;$$

$$11. \cos a ;$$

$$12. \pi ;$$

$$13. \frac{1}{2} (b^2 - a^2) ;$$

$$14. \frac{1}{2} ;$$

$$15. \pi ;$$

$$16. 1 ;$$

$$17. -\frac{1}{\sqrt{3}} ;$$

$$18. \frac{1}{4} ;$$

$$19. 0 ;$$

$$20. \frac{2}{\pi}$$

$$21. \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad d = 4;$$

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{2};$$

$$22. \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 \text{ radianes};$$

$$23. \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad d = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios 5.4

$$3. \quad (a) \frac{2}{3};$$

$$(b) 2, -3;$$

$$(c) 1,$$

$$(d) 3;$$

$$(e) 4;$$

$$5. \quad (a) x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \text{ entero},$$

$$(b) x \neq n\pi, \quad n \text{ entero};$$

$$6. \quad 4;$$

$$7. \quad f(2) = 1/24; \text{ no existe};$$

$$8. \quad \text{No}.$$

CAPITULO 6

Ejercicios 6.1

$$1. \quad 6x + 3;$$

$$3. \quad \frac{8x^2 - 20x + 12}{(4x - 5)^2};$$

$$5. \quad \frac{x^2}{(\cos x + x \operatorname{sen} x)^2};$$

$$6. \quad 2 \operatorname{sen}^2 x;$$

$$7. \quad x^2 \operatorname{sen} x;$$

$$9. \quad y = 3x + 1;$$

$$10. \quad 3x - y + 7 = 0;$$

$$11. \quad y = 1$$

$$12. \quad y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

13. $-\frac{18}{7}$;

14. (5, 60), (-5, 40) ;

15. (2, 8) ;

16. -1, 2, 71° 34' ;

17. (7, -125.67), (-3, 41) ;

18. (a) 1, 5

(b) 78 ;

(c) $1 < t < 5$;

19. $A = -\frac{2}{7}$;

$B = \frac{8}{35}$;

$C = -\frac{16}{105}$

Ejercicios 6.2

1. $y' = \frac{1}{6\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2+3})^{3/4}}$;

2. $u' = \frac{-1}{2(1+\sqrt{x})(\sqrt{x-x^2})}$

3. $y' = -10 \cos x (3 - 2 \operatorname{sen} x)^4$;

4. $y' = 12 \operatorname{sen}^2 4x \cdot \cos 4x$;

5. $y' = \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$;

6. $z' = \frac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$;

7. $y' = 2x \cos(x^2)$;

9. $\frac{3}{2}$.

Ejercicios 6.3

1. 108° 26' , 71° 34' ;

2. 40° 36' ;

3. tangentes en (0, 0), 8° 08' en (1, 1) ;

4. 90° ;

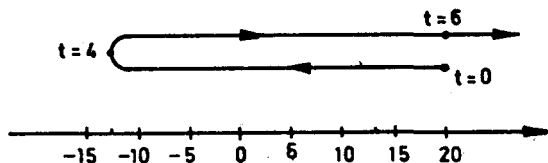
7. $v(0) = 7, a(0) = -8,$

$v(1) = -1, a(1) = -8 ;$

8. $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 ;$

$a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 ; \quad v(\pi) = 3; \quad a(\pi) = 0 ;$

9.



10. $t_0 = 2.26, v(0) = 0, v(t_0) = -44.3, a(t) = -19.6 ;$

Del 11 al 20 escribiremos; para simplificar, máx (a, b) (mín (a, b)) para indicar que en a existe máximo (mínimo) y el valor máximo (mínimo) $f(a)$ es b .

11. máx $(-2, 3)$, mín $(0, -1) ;$

12. máx $(-1, -4)$, mín $(1, 4) ;$

13. máx $(6, 1296)$, mín $(0, 0)$, mín $(12, 0)$

14. máx $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -3\sqrt{3}\right)$, mín $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}\right) ;$

15. máx $(0, \sqrt{2}) ;$

16. máx $(1, 36)$, mín $(7, 0)$.

17. máx $(0, 1)$, mín $(\pm 1, 0)$;

18. máx $\left(\left(k + \frac{1}{6}\right)\pi, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) ;$

mín $\left(\left(k - \frac{1}{6}\right)\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right), k = 0, \pm 1, \dots$

19. máx (1, 3), mín (-1, -3) ;

20. máx $\left(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}\right)$, mín $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

21. equilátero;

22. (1, 1) ;

23. $h = \frac{4}{3} R$;

24. cuadrado: $l = R\sqrt{2}$;

25. $h = R\sqrt{2}$;

26. $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$;

30. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Ejercicios 6.4

1. $\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x} + k$;

2. $\text{sen}^2 x + k$ ó $\frac{-\cos 2x}{2} + k$;

3. $\frac{\sec 2x}{2} + k$;

4. $\frac{1}{6} (2x^2 + 5)^{3/2} + k$;

5. $\frac{2}{5} \sqrt{5x - 2} + k$;

6. $\frac{(8x^3 - 7)^{-1}}{24} + k$;

8. $\frac{\text{sen}^4 x}{4} + k$;

9. $\frac{1}{3} (2x + 1)^{3/2} + k$;

$$10. -\frac{1}{2} \cos (x^2 + 1) + k ;$$

$$11. -3 \sqrt{1 - t^2} + k ;$$

$$12. \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + k ;$$

$$13. \frac{3}{4} (z^2 + 2z + 2)^{2/3} + k ;$$

$$14. \frac{1}{2} (1 + 2y^3)^{1/3} + k ;$$

$$15. -\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 2x} + k ;$$

$$18. \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{y}{2} + k ;$$

$$16. -\frac{1}{3} \cos 3x + k ;$$

$$19. \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k ;$$

$$17. \sqrt{2 - \cos 2t} + k ;$$

$$20. \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k ;$$

$$21. f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 5x - \frac{23}{4} ;$$

$$22. f(x) = -\cos x + 7x - \frac{7}{2} \pi ;$$

$$23. f(x) = 3 \operatorname{sen} x + \frac{7x^2}{2} + 4 - \frac{7}{2} \pi^2 ;$$

$$24. s(t) = 5t^2 ;$$

25. $s(t) = -4.9 t^2 + 50$, $t = 3.19$ seg ;

26. (a) $s_{\text{máx}} = s(4.08) = 131.60$ m. ;

(b) $t = 9.26$ seg. ;

(c) -50.76 m/seg. ;

27. $1 < t < 5$.

Introducción al análisis

se terminó de imprimir el mes de junio de 1992
en los talleres de Servicio Copias Gráficas S.A. (R.I. 21587)
Jorge Chávez 1059 Lima 5, Perú.
Esta edición consta de mil ejemplares.

PUBLICACIONES RECIENTES

TEOFILO ALTAMIRANO

Exodo: peruanos en el exterior. 1992. 228 p.

LUIS E. BACIGALUPO

Intención y conciencia en la Etica de Abelardo, 1992. 340 p.

CARLOS BLANCAS, CESAR LANDA y MARCIAL RUBIO

Derecho Constitucional General. 3ra. ed., aum. y corr. Tomo I., 1992. 558 p.

JOSE ANTONIO DEL BUSTO D.

San Martín de Porras (Martín Porras Velásquez). 1992. 407 p.

PEDRO DE CIEZA DE LEON

Crónica del Perú. Cuarta parte. Vol. I. Guerra de las Salinas. 1991. XLV + 440 p.

ADOLFO FIGUEROA

Teorías económica del capitalismo. 1992. 245 p.

JUAN OSSIO

Parentesco, reciprocidad y jerarquía en los Andes. 1992. 412 p.
+ 18 diagramas

FRANKLIN PEASE G.Y.

Los Incas: una introducción 1991. 196 p. (Biblioteca *Lo que debo saber*, Vol. I).

MIGUEL ANGEL RODRIGUEZ REA

El Perú y su literatura, guía bibliográfica. 1992. 254 p.

DENIS SULMONT, MARCEL VALCARCEL y WALTER TWANAMA

El Camino de la educación técnica. Los otros profesionales. 1991. 250 p.

JOSE TOLA PASQUEL

Introducción a la topología. 1992. 147 p.