

La Ecuación General de Segundo Grado

5.1 DEFINICION. Una *sección cónica* C es el conjunto de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo F es e veces su distancia a una recta fija L . Así, C consiste de todos los puntos P que cumplen

$$d(P, F) = ed(P, L)$$

Se llama *foco* al punto F , *directriz* a la recta L y *excentricidad* al número $e \geq 0$.

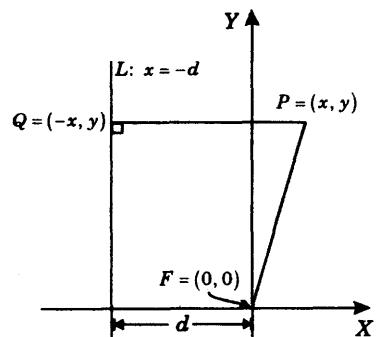
Tenemos el siguiente resultado:

5.2 TEOREMA.

- 1) Si $0 \leq e < 1$, entonces C es una elipse.
- 2) Si $e = 1$, entonces C es una parábola.
- 3) Si $e > 1$, entonces C es una hipérbola.

DEMOSTRACION. En efecto, supongamos que $F = (0, 0)$ y que L es la recta $x = -d$, donde $d = d(F, L)$. Si $P(x, y)$ es un punto de C , entonces se cumple que

$$d(P, F) = ed(P, L) \quad (1)$$



De (1) se tiene, $\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d|$,

y elevando al cuadrado ambos miembros y agrupando términos en x , llegamos a:

$$(1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 = e^2d^2 \quad (2)$$

Si $e \neq 1$ entonces la ecuación (2) se puede escribir

$$(1 - e^2) \left[x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x \right] + y^2 = e^2d^2,$$

completando cuadrados

$$(1 - e^2) \left[x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2} \right] + y^2 = e^2d^2 + \frac{e^4d^2}{1 - e^2}$$

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

y dividiendo por $\frac{e^2d^2}{1 - e^2}$

$$\frac{\left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)}} + \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{1 - e^2}} = 1 \quad (3)$$

y esta ecuación es equivalente con (2) si $e \neq 1$.

Podemos concluir que C es

1. *una parábola* si $e = 1$, ya que entonces la ecuación (2) es $y^2 = 2dx + d^2$

$$y^2 = 4p(x - h)$$

donde $4p = 2d$; $h = -\frac{1}{2}d$

2. *una elipse* si $e < 1$, ya que entonces la ecuación (3) es $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde

$$a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} > b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} > 0, \text{ pues } e < 1 \text{ y } h = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

3. una hipérbola si $e > 1$, ya que entonces la ecuación (3) es

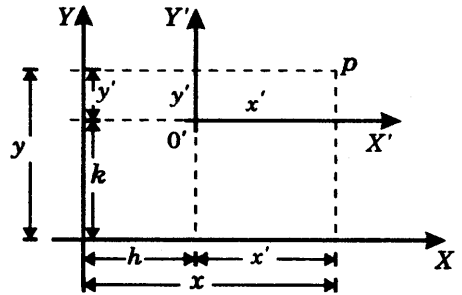
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$ y $b^2 = \frac{e^2 d^2}{e^2 - 1} > 0$, pues $e > 1$, y $h = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$.

5.3 TRASLACION DE EJES

Sea el sistema de coordenadas cartesianas XY . Decimos que un sistema de coordenadas cartesianas $X'Y'$ ha sido obtenido por *traslación de los ejes X e Y al punto O'* si se cumple que:

- 1) El origen $X'Y'$ es O'
- 2) Los ejes X y X' son paralelos y tienen el mismo sentido.
- 3) Los ejes Y e Y' son paralelos y tienen el mismo sentido.



Un punto P cualquiera del plano admite dos pares de coordenadas:

- uno, el par (x, y) referido al sistema XY
- y otro, el par (x', y') referido al sistema $X'Y'$

Si (h, k) son las coordenadas XY del punto O' , entonces las ecuaciones entre los pares de coordenadas (x, y) , (x', y') del punto P son:

$$\begin{matrix} x = x' + h & \text{o} & x' = x - h \\ y = y' + k & & y' = y - k \end{matrix}$$

EJEMPLO 1. Trasladar los ejes XY de modo que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2y + 8 = 0$ referida a los nuevos ejes no contenga términos de segundo grado, ni término constante.

SOLUCION. Sean $x = x' + h$, $y = y' + k$

las ecuaciones de traslación de ejes, donde (h, k) es el origen del sistema de coordenadas $X'Y'$.

Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$(x' + h)^3 - 3(x' + h)^2 + 2(y' + k) + 8 = 0,$$

desarrollando y agrupando términos:

$$x'^3 + 3(h-1)x'^2 + 3(h^2 - 2h)x' + 2y' + (h^3 - 3h^2 + 2k + 8) = 0$$

Puesto que los términos de segundo grado y el término constante deben ser nulos, debe cumplirse

$$h - 1 = 0$$

$$h^3 - 3h^2 + 2k + 8 = 0$$

ecuaciones que resueltas dan $h = 1, k = -2$.

Luego, habrá que trasladar los ejes XY al punto $(1, -2)$, y referida a los nuevos ejes $X'Y'$ la ecuación toma la forma

$$x'^3 - 3x' + 2y' = 0$$

EJEMPLO 2. Hallar una traslación de los ejes de tal forma que la ecuación

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

referida a los nuevos ejes, no contenga términos de primer grado.

SOLUCION.

1er. método. Partimos de la ecuación de traslación de los ejes $x = x' + h, y = y' + k$, y procedemos como en el ejemplo anterior.

2do. método. Completamos cuadrados en la ecuación dada.

$$3(x^2 + 2x) - 2(y^2 + 4y) - 11 = 0$$

$$3(x^2 + 2x + 1) - 3 - 2(y^2 + 4y + 4) + 8 - 11 = 0$$

$$3(x+1)^2 - 2(y+2)^2 - 6 = 0,$$

que se escribe $3x'^2 - 2y'^2 - 6 = 0$,
si efectuamos la traslación $x' = x + 1, y' = y + 2$

5.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Expresar $x^2 + xy + y^2 - 3x + 2 = 0$ respecto de un sistema de coordenadas obtenido por traslación de ejes, si la ecuación resultante no contiene términos de primer grado.

RESPUESTA. $x'^2 + x'y' + y'^2 - 1 = 0$

PROBLEMA 2. Se han trasladado los ejes XY a un punto O' . Si la ecuación $3x - 2y = 6$ referida a los nuevos ejes no contiene término constante y la distancia de O' al origen XY es 5, hallar las coordenadas del punto O' .

RESPUESTA. $O' = (4, 3)$, $O' = (-\frac{16}{13}, -\frac{63}{13})$

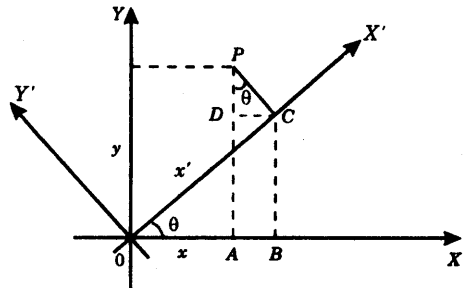
5.5 ROTACION DE EJES

Consideremos dos sistemas de coordenadas cartesianas XY y $X'Y'$ con origen común O . Sean (x, y) las coordenadas en XY , y (x', y') las coordenadas en $X'Y'$ de un punto cualquiera P del plano. Decimos que el sistema de $X'Y'$ ha sido obtenido rotando en un ángulo θ el sistema XY si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \tag{1}$$

Estas ecuaciones entre las coordenadas de un punto pueden obtenerse gráficamente en la forma que a continuación describimos. Para simplificar la exposición vamos a suponer que el ángulo de rotación θ está comprendido entre 0° y 90° .

Sean A y C , los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los ejes X y X' respectivamente, y B y D los pies de las perpendiculares trazadas desde C al eje X y al segmento \overline{AP} , respectivamente.



Es fácil ver que $\angle DPC = \theta$.

Se tiene $x = d(O, A) = d(O, B) - d(A, B)$,

pero $d(O, B) = x' \cos \theta$ (en el triángulo OBC)

$d(A, B) = d(D, C) = y' \sin \theta$ (en el triángulo DPC)

y por lo tanto $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ (2)

En forma similar se tiene $y = d(A, P) = d(A, D) + d(D, P)$,

pero $d(A, D) = d(B, C) = x' \sin \theta$ (en el triángulo OBC)

$d(D, P) = y' \cos \theta$ (en el triángulo DPC)

por lo tanto $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ (3)

Nota.

1. Si despejamos x' e y' en las ecuaciones (1) obtenemos

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\y' &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta\end{aligned}\quad (4)$$

2. Las ecuaciones (1) o (4) se llaman *ecuaciones de rotación de los ejes*, y la relación que ellas definen entre los pares de coordenadas (x, y) , (x', y') , se denomina una (*transformación de*) *rotación*.

3. Si hacemos $u = \cos \theta$ y $v = \operatorname{sen} \theta$, las ecuaciones (1) se expresan

$$x = ux' - vy', \quad y = vx' + uy'$$

junto con la condición adicional $u^2 + v^2 = 1$, que es otra forma de definir la rotación.

En muchos problemas de rotación de ejes no es necesario conocer el ángulo θ , sino más bien los números u y v .

5.6 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. ¿Qué rotaciones de coordenadas transforma la ecuación $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$ en la ecuación $7x'^2 + y'^2 = 8$?

SOLUCION. Sean las ecuaciones de rotación de ejes

$$x = ux' - vy', \quad y = vx' + uy', \quad u^2 + v^2 = 1 \quad (1)$$

Remplazando x, y en la ecuación dada

$$\begin{aligned}2(ux' - vy')^2 + 3(ux' - vy')(vx' + uy') + 2(ux' + uy')^2 &= 4 \\2(u^2x'^2 - 2uvx'y' + v^2y'^2) + 3(uvx'^2 + u^2x'y' - v^2x'y' - uv y'^2) + \\+ 2(v^2x'^2 + 2uvx'y' + u^2y'^2) &= 4\end{aligned}$$

Agrupando términos y multiplicando por 2 resulta

$$2(2u^2 + 3uv + 2v^2)x'^2 + 6(u^2 - v^2)x'y' + 2(2v^2 - 3uv + 2u^2)y'^2 = 8$$

Por el enunciado del problema debemos tener

$$2(2u^2 + 3uv + 2v^2) = 7 \quad (2)$$

$$6(u^2 - v^2) = 0 \quad (3)$$

$$2(2v^2 - 3uv + 2u^2) = 1 \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 0$, obtenemos $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, y sustituyendo estos valores de u y v en (2) y (4) vemos que

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad u = -\frac{\sqrt{2}}{2}, v = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ cumplen todas las condiciones.}$$

RESPUESTA. Las rotaciones son $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, y $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, que corresponden a un ángulo rotado de 45° y 225° , respectivamente.

PROBLEMA 2. Simplificar la ecuación $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y - 45 = 0$ por una rotación y traslación de ejes.

SOLUCION.

Paso 1. Mediante una rotación eliminamos el término diagonal xy .

Sea $x = ux' - vy'$, $y = vx' + uy'$ donde, $u^2 + v^2 = 1$, (1)

una rotación que elimina el término $x'y'$.

Reemplazando x, y en las ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} & (11u^2 - 24uv + 4v^2)x'^2 + (11u^2 + 24uv + 4v^2)y'^2 + \\ & + (-22uv - 24u^2 + 24v^2 + 8uv)x'y' + (6u + 8v)x' + (-6v + 8u)y' - 45 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Puesto que el término en $x'y'$ debe ser nulo

$$-14uv + 24(-u^2 + v^2) = 0 \quad \text{o} \quad 7uv = 12(v^2 - u^2) \quad (3)$$

Resolvemos las ecuaciones (1) y (3). Elevando al cuadrado (3) y reemplazando $v^2 = 1 - u^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} 49u^2v^2 &= 144(v^2 - u^2)^2 \\ 49u^2(1 - u^2) &= 144(1 - 2u^2)^2 \\ 625u^4 - 625u^2 + 144 &= 0 \end{aligned}$$

o, $u^4 - u^2 + \frac{144}{625} = 0$, que resuelta para u^2 da

$$u^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times \frac{144}{625}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{49}{625}}}{2} = \frac{16}{25} \quad \text{o} \quad \frac{9}{25}$$

Luego $u = \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{3}{5}$, y de (1), $v = \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{4}{5}$.

Debemos verificar si estos valores de u y v cumplen la ecuación (3).

Si $u = \pm \frac{4}{5}$ y $v = \pm \frac{3}{5}$ entonces el segundo miembro de (3) es negativo, y por consiguiente u y v deben tener signos opuestos.

Así, $(u, v) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ o $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Similarmente $(u, v) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ o $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

De esta manera vemos que hay 4 rotaciones posibles que eliminan el término en $x'y'$.

Vamos a elegir la rotación dada por $u = \frac{3}{5}, v = \frac{4}{5}$.

Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos

$$-x'^2 + 4y'^2 + 10x' - 9 = 0$$

Paso 2. Mediante una traslación de ejes eliminamos el término lineal $10x'$:

$$-(x'^2 + 10x') + 4y'^2 - 9 = 0 \Rightarrow -(x' + 5)^2 + 4y'^2 + 16 = 0$$

$$-x_1^2 + 4y_1^2 + 16 = 0 \Rightarrow \frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \text{donde } x_1 = x' + 5, y_1 = y'$$

RESPUESTA. $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{4} = 1$.

Nota. Hay otras soluciones correspondientes a las rotaciones restantes. De una manera más precisa, para el problema que acabamos de tratar se obtienen finalmente dos formas simplificadas, a saber:

$$\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y_1^2}{16} - \frac{x_1^2}{4} = 1.$$

PROBLEMA 3. Hallar el ángulo que hay que rotar los ejes para eliminar el término cuadrático o diagonal xy de la ecuación $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3} - 8y = 0$

SOLUCION. Consideremos la rotación $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$. Sustituyendo x, y en la ecuación dada, el coeficiente de $x'y'$ resulta ser

$$4\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

y puesto que deseamos eliminar el término en $x'y'$, dicho coeficiente debe ser nulo. Así, debemos tener

$$4\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

o, en función del ángulo 2θ , $2\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos 2\theta = 0$

Luego $\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3}$.

Como $2\theta = 60^\circ$ satisface tal condición, vemos que $\theta = 30^\circ$ da lugar a una rotación que elimina el término xy .

RESPUESTA. Un ángulo de rotación de 30° .

LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

5.7 DEFINICION. Se llama ecuación general de segundo grado o ecuación cuadrática general en las variables x e y a una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, y al menos uno de los coeficientes A, B o C es no nulo.

Llamamos *discriminante* de la ecuación al número $\Delta = B^2 - 4AC$.

El conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación se llama una *curva de segundo grado*.

Las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) son curvas de segundo grado ya que satisfacen ecuaciones de la forma (1). Sin embargo, hay curvas de segundo grado que no son secciones cónicas, por ejemplo:

- (1) La curva $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ consiste de un solo punto: $(2, 3)$, pues si completamos cuadrados obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0, \text{ cuya única solución es } (2, 3).$$

- (2) La curva $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$ es la recta $x = 2y + 1$, ya que si factorizamos el primer miembro obtenemos

$$(x - 2y - 1)^2 = 0$$

- (3) La curva $2x^2 - 3y^2 - xy = 0$ consiste de las *dos rectas* $2x - 3y = 0$ y $x + y = 0$, ya que la ecuación se puede escribir

$$(2x - 3y)(x + y) = 0$$

- (4) La curva $x^2 + y^2 - 2xy + 5 = 0$ *no tiene puntos*, ya que la ecuación puede escribirse $(x - y)^2 = -5$, que obviamente no tiene soluciones pues el primer miembro siempre es no negativo.

Se suele decir que estos casos constituyen los *casos excepcionales o degenerados* de las secciones cónicas. Se prueba que toda curva de segundo grado es una sección cónica o una sección cónica degenerada, aludiendo a los casos que acabamos de mencionar.

5.8 PROPOSICION. Supongamos que $B \neq 0$ en la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para eliminar el término en xy mediante una rotación de los ejes el ángulo de rotación θ debe cumplir la condición

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Nota. En este caso $\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$, $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$ y la rotación viene dada por $x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$, $y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$.

Convenio Sobre el Angulo de Rotación. Suponemos que θ está comprendido entre 0° y 90° , y por lo tanto 2θ se encuentra en los cuadrantes I o II del plano XY .

Ejemplo. Mediante una rotación de los ejes simplificar la ecuación

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 + \sqrt{13}x - 2\sqrt{13}y + 2 = 0.$$

Solución. Se tiene $\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$$y \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$y \text{ la rotación es } x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y') \quad y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y').$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$13x'^2 - 13y'^2 - x' - 8y' + 2 = 0.$$

5.9 TEOREMA. La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F = 0$ es la ecuación de

- 1) una elipse (o elipse degenerada) si $B^2 - 4AC < 0$,
- 2) una parábola (o parábola degenerada) si $B^2 - 4AC = 0$,
- 3) una hipérbola (o hipérbola degenerada) si $B^2 - 4AC > 0$.

5.10 NOTA. Los casos de degeneración son

- 1) Para la elipse $\begin{cases} \text{Un punto} \\ \text{Ningún punto} \end{cases}$

- 2) Para la parábola $\begin{cases} \text{Dos rectas paralelas} \\ \text{Una recta (dos rectas iguales)} \\ \text{Ningún punto} \end{cases}$
- 3) Para la hipérbola $\begin{cases} \text{Dos rectas que se cortan.} \end{cases}$

Hagamos un estudio más preciso sobre la naturaleza de la curva

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Supongamos que $C \neq 0$ y sea $\Delta = B^2 - 4AC$ el discriminante de la ecuación. Podemos escribir

$$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$$

y resolviendo para y

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)}}{2C}$$

El radicando es

$$R = (Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)$$

El discriminante de esta expresión es

$$4(BE - 2CD)^2 - 4(B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF).$$

Tenemos el siguiente cuadro para la curva

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (C \neq 0)$$

DISCRIMINANTE	GENERO DE CURVA	RADICANDO	ESPECIE DE CURVA
$B^2 - 4AC < 0$	Elipse	$\delta > 0$ $\delta = 0$ $\delta < 0$	Elipse Elipse-punto No tiene puntos
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola	$p \neq 0$ $p = 0, q > 0$ $p = 0, q = 0$ $p = 0, q < 0$	Parábola Dos rectas paralelas Una recta No tiene puntos
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola	$\delta \neq 0$ $\delta = 0$	Hipérbola Dos rectas que se cortan

donde $p = BE - 2CD,$

$$q = E^2 - 4CF,$$

$$\delta = p^2 - \Delta q = (BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF)$$

5.11 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Discutir la siguiente curva y simplificarla

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x + 10y - 25 = 0.$$

SOLUCION. Se tiene $A = 4, B = 4, C = 1$ y por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$. Por consiguiente, la curva es una parábola (o parábola degenerada).

Calculamos la rotación

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{4}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Luego
$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y').$$

Sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos $x'^2 + 5\sqrt{5}y' - 25 = 0,$

que es la parábola
$$x'^2 = -5\sqrt{5}(y' - \sqrt{5}).$$

PROBLEMA 2. Determinar la naturaleza de la siguiente curva

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y + 13 = 0.$$

SOLUCION. Se tiene $A = 17, B = -12, C = 8$. Puesto que $B^2 - 4AC = -400$, la curva es una elipse. Simplificando la ecuación mediante una rotación de los ejes, se tiene

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4}. \text{ Puesto que } 0 \leq 2\theta \leq 180^\circ, \text{ se sigue que } \cos 2\theta = -\frac{3}{5}.$$

Luego
$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Sustituyendo las ecuaciones $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$ en la ecuación de la curva dada obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{17}{5}(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) - \frac{12}{5}(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2) + \\ + \frac{8}{5}(4x'^2 + 4x'y' + y'^2) - \frac{30}{\sqrt{5}}x' + \frac{40}{\sqrt{5}}y' + 13 = 0 \end{aligned}$$

$5x' + 20y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' + \frac{40}{\sqrt{5}}y' + 13 = 0 \Rightarrow \left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$, ecuación cuya única solución es el punto $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Luego la elipse se reduce a este punto.

RESPUESTA. La curva es una elipse punto.

PROBLEMA 3. Sea la ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

- 1) Probar que si $B \neq 0$, entonces un ángulo de rotación θ elimina al término xy si y solamente si se cumple $\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$.
- 2) Si $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ es una ecuación obtenida de la ecuación dada por rotación de los ejes, entonces se cumple la relación

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'.$$

SOLUCION. Consideremos una rotación cualquiera

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta, \quad y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

Sustituyendo en la ecuación dada

$$A(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + C(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta) + E(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + F = 0$$

obtenemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\ B' = -2A \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta \\ E' = -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta \\ F' = F \end{array} \right.$$

- 1) Para que el término $B'x'y'$ sea cero se requiere que $B' = 0$, o sea

$$(-A + C) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{A - C}{B}.$$

- 2) Debemos probar que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.

Empleando las expresiones que hemos calculado y llamando $u = \cos\theta$, $v = \operatorname{sen}\theta$, de modo que $u^2 + v^2 = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} B' &= \left[-2Auv + B(u^2 - v^2) + 2Cuv \right]^2 \\ &= 4A^2u^2v^2 + B^2(u^2 - v^2)^2 + \\ &\quad + 4C^2u^2v^2 - 4ABuv(u^2 - v^2) - 8ACu^2v^2 + 4BCuv(u^2 - v^2) \\ -4A'C' &= -\left[4Au^2 + Buv + Cv^2 \right] \left[Av^2 - Buv + Cu^2 \right] \\ &= -4A^2u^2v^2 + 4ABu^3v - 4ACu^3 - 4ABuv^3 + \\ &\quad + 4B^2u^2v^2 - 4BCu^3v - 4ACv^4 + 4BCuv^3 - 4C^2u^2v^2 \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro nos da

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= B^2(u^2 - v^2)^2 - 8ACu^2v^2 - 4ACu^4 + 4B^2u^2v^2 - 4ACv^4 \\ &= B^2(u^2 + v^2)^2 - 4AC(u^2 + v^2)^2 = B^2 - 4AC, \end{aligned}$$

puesto que $u^2 + v^2 = 1$.

PROBLEMA 4. Hallar la excentricidad de $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$.

SOLUCION. Se tiene $A = 9$, $B = -4$, $C = 6$. Luego $B^2 - 4AC = -200$ y la curva es una elipse. Efectuamos una rotación para eliminar el término cuadrático xy

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4},$$

de donde $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Sustituyendo las relaciones $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$

en la ecuación dada se obtiene

$$\frac{9}{5}(x' - 2y')^2 - \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + 6(2x' + y')^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{4}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 4 = 0$$

$$5x'^2 + 10y'^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}x' + \frac{20}{\sqrt{5}}y' + 4 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{2}{5}} + \frac{\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

Así, tenemos que $a^2 = \frac{2}{5}$, $b^2 = \frac{1}{5}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{5}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

RESPUESTA. $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 5. Hallar la excentricidad de la curva $4xy - 3x^2 - 16 = 0$.

SOLUCION. Escribimos $3x^2 - 4xy + 16 = 0$.

Luego $A = 3$, $B = -4$, $C = 0$ y $B^2 - 4AC = 16 > 0$.

Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

Efectuamos una rotación de los ejes para eliminar el término xy

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A-C}{B} = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La rotación es $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$.

Y sustituyendo en la ecuación

$$\frac{3}{5}(x' - 2y')^2 - \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + 16 = 0 \Rightarrow -x'^2 + 4y'^2 + 16 = 0$$

o
$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Luego $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 20$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

RESPUESTA. $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera que pasa por $(-6, 4)$, $(3, -5)$, $(6, 10)$ y $(2, 3)$.

SOLUCION.

Paso 1. En primer lugar probaremos que si

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

es la ecuación de la hipérbola equilátera, entonces $A + C = 0$

En efecto, supongamos que efectuamos una rotación de los ejes que elimina el término cuadrático xy , de manera que la ecuación de la curva referida a los nuevos ejes es

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{2}$$

donde $A' = A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta$

$$C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

Sumando miembro a miembro obtenemos

$$A' + C' = A(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + C(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

o sea que $A' + C' = A + C$ (3)

Ahora bien, puesto que (2) es la ecuación de una hipérbola equilátera se cumple $A' + C' = 0$. Luego de (3) se sigue que $A + C = 0$.

Paso 2. De acuerdo al *paso 1* la ecuación de la hipérbola es

$$Ax^2 + Bxy - Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Suponiendo que $A \neq 0$ (por supuesto, también podríamos suponer que $B \neq 0$) y dividiendo la ecuación entre A , se obtiene

$$x^2 - y^2 + bxy + dx + ey + f = 0$$

Reemplazando las coordenadas de los puntos $(-6, 4)$, $(3, -5)$, $(6, 10)$, $(2, 3)$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 20 - 24b - 6d + 4e + f &= 0 \\ -16 - 15b + 3d - 5e + f &= 0 \\ -64 + 60b + 6d + 10e + f &= 0 \\ -5 + 6b + 2d + 3e + f &= 0, \end{aligned}$$

que resuelto da $b = \frac{7}{2}$, $d = -\frac{23}{2}$, $e = -12$, $f = 43$

RESPUESTA. $2x^2 - 2y^2 + 7xy - 23x - 24y + 86 = 0$.

PROBLEMA 7. Probar que si $B^2 - 4AC > 0$, entonces la curva $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una hipérbola.

SOLUCION. Efectuando una rotación de los ejes que elimine el término cuadrático xy se obtiene

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' + E'^2 = 0 \quad (1)$$

Por la parte 2 del problema 3, los discriminantes de las ecuaciones son iguales $-4A'C' = B^2 - 4AC$, y siendo $B^2 - 4AC > 0$ por hipótesis, obtenemos $A'C' < 0$. Luego A' y C' tienen signos opuestos.

Completando cuadrados en (1) obtenemos

$$A' \left(x'^2 + \frac{D'}{A'} x' \right) + C' \left(y'^2 + \frac{E'}{A'} y' \right) = -F'$$

$$A' \left(x' + \frac{D'}{A'} \right)^2 + C' \left(y' + \frac{E'}{A'} \right) = R \quad (2)$$

donde $R = -F' + \frac{D'^2}{2A'} + \frac{E'^2}{2A'}$.

Debemos considerar dos casos:

Caso 1. $R \neq 0$. Entonces (2) se escribe
$$\frac{\left(x' + \frac{D'}{2A'} \right)^2}{\frac{R}{A'}} + \frac{\left(y' + \frac{E'}{2A'} \right)^2}{\frac{R}{C'}} = 1$$

que es una hipérbola con ejes paralelos a los ejes $X'Y'$ puesto que $\frac{R}{A'}$ y $\frac{R}{C'}$ tienen signos opuestos.

Caso 2. $R = 0$. Entonces (2) se escribe

$$\left(y' + \frac{E'}{2A'} \right)^2 = -\frac{A'}{C'} \left(x' + \frac{D'}{2A'} \right)^2$$

o
$$y' = -\frac{E'}{2A'} \pm \sqrt{-\frac{A'}{C'}} \left(x' + \frac{D'}{2A'} \right)$$

que representa dos rectas que se cortan.

En resumen, si $B^2 - 4AC > 0$ entonces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa a una hipérbola o dos rectas que se cortan.

PROBLEMA 8. Se llama *cuerda focal* de una cónica a un segmento de recta que pasa por el foco y cuyos extremos se encuentran en la cónica. Probar que si dos cuerdas focales de una parábola son perpendiculares, entonces la suma de los inversos de sus longitudes es una constante.

SOLUCION. Consideramos la parábola $y^2 = 4d(x + d)$ con el foco en el origen.

Entonces una recta que pasa por el foco es de la forma $y = mx$.

Calcularemos la longitud de la cuerda determinada por los puntos de intersección de la recta con la parábola.

Sustituyendo $y = mx$ en la ecuación de la parábola tenemos

$$m^2 x^2 = 4d(x + d) \quad \text{o} \quad m^2 x^2 - 4dx - 4d^2 = 0$$

cuyas raíces son
$$x_1, x_2 = \frac{2d \pm 2d\sqrt{1+m^2}}{m^2},$$

y por lo tanto
$$x_1 - x_2 = \frac{4d\sqrt{1+m^2}}{m^2}$$

Luego $P_1 = (x_1, mx_1)$, $P_2 = (x_2, mx_2)$ determinan una cuerda focal cuya longitud es

$$\begin{aligned} L = d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(1+m^2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1+m^2)(4d)^2(1+m^2)}{m^4}} = 4d \left[\frac{1+m^2}{m^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

De igual manera para la recta $y = -\frac{1}{m}x$, perpendicular a la recta dada, la longitud de la cuerda dada es

$$L' = 4d \left[\frac{1 + \left(-\frac{1}{m}\right)^2}{\left(-\frac{1}{m}\right)^2} \right] = 4d(1+m^2) \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} = \frac{m^2}{4d(1+m^2)} + \frac{1}{4d(1+m^2)} = \frac{1}{4d} = \text{constante.}$$

5.12 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Simplificar las siguientes ecuaciones mediante rotación y traslación de los ejes e indicar la naturaleza de la cónica que representan.

1. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 14x - 10y + 15 = 0.$

2. $5x^2 - 20xy - 10y^2 + 8x - 4y - 28 = 0.$

3. $x^2 + 6xy + 9y^2 + x - 7y + 1 = 0.$

4. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$

5. $5x^2 - 24xy - 5y^2 - 8x + 14y + 16 = 0.$

6. $15x^2 + 5xy + 3y^2 = 155$.
7. $3x^2 - 8xy - 16y^2 - x + 4y = 0$.
8. $48x^2 - 12xy + 43y^2 + 12x + 18y + 3 = 0$.
9. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 7 = 0$.
10. $5x^2 + 5y^2 - 6x + 12y + 19 = 0$.

Haciendo uso del discriminante y del radicando de la ecuación de segundo grado, identificar las siguientes curvas:

11. $2x^2 - xy - 3y^2 = 0$.
12. $4x^2 + 4xy + 4y^2 + 14x + 10y + 7 = 0$.
13. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7x + 5y + 7 = 0$.
14. $2x^2 + 8xy + 2y^2 + 10x + 14y + 5 = 0$.
15. $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 20x - 43y + 14 = 0$.
16. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 8x + 14y + 7 = 0$.
17. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.
18. Una cuerda pasa por el foco F de una sección cónica tiene sus extremos P_1 y P_2 sobre la curva. Probar que

$$\frac{1}{d(F, P_1)} + \frac{1}{d(F, P_2)} = \text{constante}.$$

19. Hallar la ecuación de (la recta que contiene a) la cuerda de la curva $4x^2 - 3y^2 = 36$, si se sabe que el punto medio de la cuerda es $(4, 2)$.
20. Sea la ecuación de una elipse $x^2 + xy + 2y^2 - x + 3y + F = 0$.

Hallar los valores de F para los cuales la curva es

- a) una elipse;
- b) una elipse punto, ¿cuál es el punto?;
- c) una elipse sin puntos.

RESPUESTAS

1. Elipse: $\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$

2. Hipérbola: $\frac{y''^2}{3} - \frac{x''^2}{2} = 1.$

3. Parábola: $x''^2 = \frac{1}{\sqrt{10}} y''.$

4. Parábola dos rectas paralelas: $y'' = -\frac{1}{\sqrt{13}}, y'' = \frac{2}{\sqrt{13}}$, o en coordenadas XY:

$$2x - 3y + 1 = 0, 2x - 3y - 2 = 0.$$

5. Hipérbola: $x''^2 - y''^2 = 1.$

6. Elipse: $\frac{x''^2}{10} + \frac{y''^2}{62} = 1.$

7. Hipérbola dos rectas.

8. Elipse punto: $\frac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{4}} = 0$, o $(x'', y'') = (0, 0).$

9. Parábola: $y''^2 = \sqrt{2}x''.$

10. Elipse sin puntos: $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{2} = -1.$

11. Hipérbola dos rectas que se cortan.

12. Elipse.

13. Elipse sin puntos.

14. Hipérbola.

15. Parábola.

16. Elipse punto.

17. Parábola: dos rectas paralelas.

19. $y = \frac{1}{3}(8x - 26).$

20. a) $F < 2,$ b) $F = 2$ la elipse punto es $(1, -1)$ c) $F > 2.$