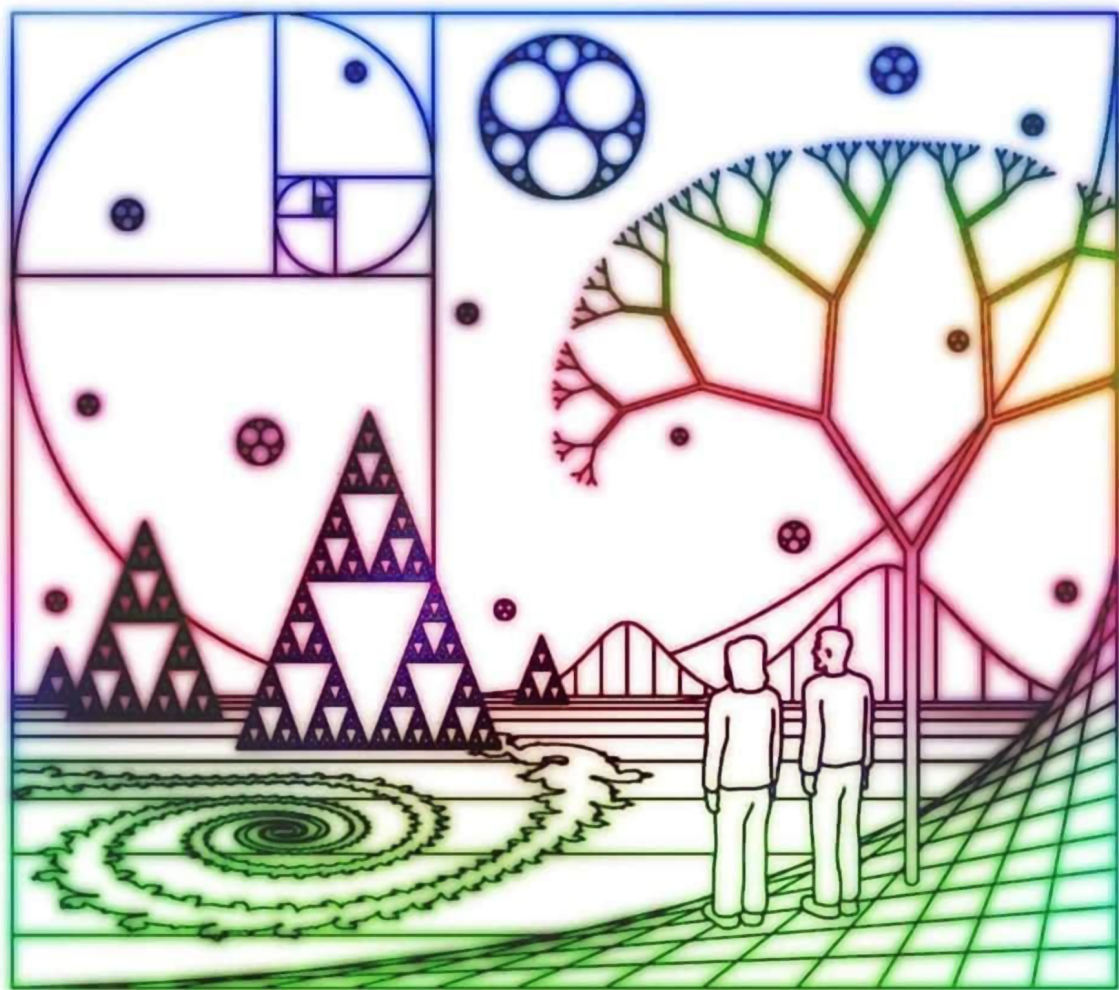


# ...Y MATEMÁTICAS

José Manuel Aroca Hernández-Ros



SERIE MATEMÁTICAS Y SOCIEDAD

**JOSÉ MANUEL AROCA HERNÁNDEZ-ROS** es doctor en Matemática (1970) por la Universidad Complutense de Madrid. Entre 1964 y 1974 ocupó diversos puestos en dicha universidad y en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas. En 1975 obtuvo una Cátedra de Geometría y Topología en la Universidad de Valladolid, ocupó los puestos de jefe de Departamento, decano, director del Instituto de Relaciones con Iberoamérica y dirigió más de 35 tesis doctorales.

Ha sido research fellow en Harvard (1971-1974), directeur de recherches (1994-1996) del CNRS francés, presidente de la Real Sociedad Matemática de España (1980 y 1995). Fue nombrado profesor honorario de la PUCP y profesor visitante permanente de la Cátedra de Matemáticas «José Tola Pasquel» (2009), y doctor honoris causa por la UNI (2014). Es académico correspondiente de las academias de ciencias de España y del Perú.

El doctor Aroca es reconocido mundialmente como un experto en el área de Resolución de singularidades, por lo que ha impartido cursos en las más prestigiosas universidades de Europa (Francia, Alemania), Asia (Japón) y América (Estados Unidos, México, Brasil, Colombia y el Perú). Su último libro publicado en colaboración con Heisuke Hironaka (Medalla Field) por la Editorial Springer se titula *Complex Analytic Desingularization* y, en palabras de los expertos, «explica en forma autocontenida y en un lenguaje actual, una de las demostraciones más difíciles producidas en matemáticas durante los últimos 50 años».

**...y matemáticas**

**SERIE Matemáticas y Sociedad**

**Editor**

**Francisco Ugarte Guerra** Instituto de Investigación sobre Enseñanza  
de las Matemáticas (IREM-PUCP)

# ...y matemáticas

José Manuel Aroca Hernández-Ros

**FONDO  
EDITORIAL  
PUCP**

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
**SOBRE LA ENSEÑANZA DE  
LAS MATEMÁTICAS**



**PUCP**

*...y matemáticas*

© José Manuel Aroca Hernández-Ros, 2022

De esta edición

© Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, 2022

irem@pucp.pe

<http://www.irem.pucp.edu.pe>

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2022

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

feditor@pucp.edu.pe

<http://fondoeditorial.pucp.edu.pe>

Diagramación: Karol José María Huarcaya Huarcaya

Primera edición: mayo de 2022

Impresión bajo demanda

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,  
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: 978-612-317-744-7

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-03518

Impreso en Aleph Impresiones S.R.L.

Jr. Risso 580, Lima - Perú

*Contribuyendo al desarrollo de la  
Educación Matemática en el país  
IREM*



# Índice general

Dedicatoria	11
Agradecimientos	11
Prólogo	13
Capítulo 1	17
1. Sociedad y matemáticas	17
1.1. Introducción . . . . .	17
1.2. De Pitágoras a los códigos . . . . .	25
1.3. Las trampas del tanto por ciento . . . . .	30
1.4. Un viaje de ida y vuelta: la teoría de nudos . . . . .	33
1.5. La forma del universo . . . . .	36
Capítulo 2	49
2. Medida de la Tierra y geometría en los siglos XV y XVI	49
2.1. Introducción . . . . .	50
2.2. Las traducciones: el <i>Almagesto</i> y los <i>Elementos</i> . . . . .	54
2.3. Los tratados de la <i>Esfera</i> de Sacrobosco a Regiomontano . . . . .	62
2.4. Jaume Ferrer y el Tratado de Tordesillas . . . . .	70
Capítulo 3	77
3. Arte y matemáticas	77
3.1. En donde el autor intenta averiguar qué es el arte . . . . .	78
3.2. De la finitud y el arte aleatorio . . . . .	84
3.3. Las matemáticas cómo objeto del arte . . . . .	89
3.4. <i>De Divina Proportione</i> . . . . .	100

3.5. La simetría está en todas partes . . . . .	109
3.6. ¿Una teoría matemática del arte? . . . . .	123
3.7. Matemáticas y arte, ¿algo en común? . . . . .	128
<b>Créditos de imágenes</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>143</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>151</b>

## Dedicatoria

Los tres capítulos de este libro corresponden a tres conferencias impartidas en la PUCP durante el año 2009, en que tuve el honor de ocupar la Cátedra Tola Pasquel. Conocí al profesor Tola a principios de la década de 1990, en mis primeras estancias en el Perú, y tuve la suerte de disfrutar varias conversaciones y algunas comidas con él. Era un hombre culto, buen conversador y entendido en matemáticas; tenía además el aire de mis viejos maestros, los maestros de aquella Universidad en la que los profesores no eran funcionarios, tenían alma y tenían el respeto casi reverencial de sus alumnos. Eran profesores con «don», don Pedro (Abellanas), don Germán (Ancoechea), don Ricardo (San Juan), don Alberto (Dou) y a ellos se une ahora en mi recuerdo don José (Tola), al que con todo respeto quiero dedicar este libro.

## Agradecimientos

Quiero dar las gracias, en primer lugar, a César Carranza, quien me abrió la puerta a la PUCP. César Carranza es uno de esos grandes hombres, como Elón Lima, Orlando Villamayor o Emilio Lluís, que se han dedicado toda su vida a las matemáticas en América, en la época en que era duro y difícil hacerlo. También quiero dar las gracias, y excúsenme por no citarlos uno a uno, al personal de la Sección Matemáticas y del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), que siempre me han acogido con cariño. Pero quiero dar las gracias especialmente a Francisco Ugarte, excelente alumno, gran profesor y sobre todo bueno, y a Cecilia Gaita, a quien agradezco su infinita paciencia con mis bromas sobre la didáctica.

Cádiz, salada claridad; Granada,  
agua oculta que llora.  
Romana y mora, Córdoba callada.  
Málaga cantaora.  
Almería dorada.  
Plateado Jaén. Huelva la orilla  
de las tres carabelas  
... y Sevilla

Manuel Machado

## Prólogo

Como prólogo de este trabajo he decidido utilizar las palabras que pronuncié con motivo de mi nombramiento como profesor honorario de la PUCP. Creo que en ellas conseguí, al menos un poco, reflejar mi amor por el Perú, sus gentes y la PUCP, que tan bien me ha acogido siempre.

Magnífico y excelentísimo señor rector de la PUCP, miembros de la presidencia, señoras y señores:

Creo que es mi obligación comenzar este parlamento que será breve —ya he hablado *in extenso* de matemáticas para todos los que han querido oírme durante el pasado mes— dando las gracias.

Dando las gracias a la sección de Matemáticas de la PUCP por proponerme como profesor honorario.

Dando las gracias al departamento de Ciencias por avalar la propuesta y dando las gracias al señor rector por proceder al nombramiento.

El nombramiento como profesor honorario fue para mí un doble honor: por el título que se me confiere por parte de una de las universidades más prestigiosas de Iberoamérica y por entrar en una nómina en la que figuran personas tan relevantes como mis queridos amigos Elón Lima y César Camacho, al que también debo agradecer su magnífica presentación.

Desde hace muchos años tengo un cariño especial al Perú y, en particular, a los peruanos. Una de las razones que motiva ese cariño es el deseo, el ansía incluso, de aprender que siempre he visto en ellos.

Hace ya más de quince años que vine por primera vez y hay dos cosas de aquella primera visita que no puedo olvidar: siempre recuerdo a un soldado que, todos los días, al salir de mi hotel, me apuntaba con una enorme ametralladora y tableteaba simulando disparar, para luego decirme adiós amablemente; y recuerdo sobre todo, en las mañanas temprano, las largas avenidas de Lima, con sus filas de tiendecitas de ambulantes y enormes cantidades de niños sentados en las aceras con sus cuadernos sobre las rodillas terminando, ayudados por sus padres, los deberes antes de salir para sus escuelas.

Siempre me he admirado al pasear por la avenida Arequipa el que una casa sí y otra no sea sede de un centro educativo. Creo que hay 84 universidades en el país y no sé si existirá un dato fiable sobre el número de centros educativos de todos los niveles. No voy a entrar a preguntar sobre su calidad, pero si estos centros existen es por alguna razón y estoy seguro de que ninguno de ellos tiene sus aulas vacías.

De nuevo nos encontramos con un afán por aprender, un convencimiento de que el conocimiento amplía las posibilidades de promoción, que no existen, al menos en esa magnitud, en ninguna otra de las naciones que conozco.

Otro ejemplo: ayer precisamente recibí la visita de un abogado de 91 años, acompañado de su nieto y una enfermera (ayudante, decía él). Venía a mostrarme sus trabajos sobre números primos a los que ha dedicado los últimos doce años. Es admirable el hecho en sí y no conozco casos similares, con su edad por una parte y la enorme cantidad de trabajo que había dedicado a su estudio. No era el mitómano que habla sin contenido, sino el observador paciente de tablas enormes de primos que ha tratado de buscar, durante miles de horas, sin herramientas ni conocimientos, periodicidades y pautas. Un ejemplo de amor por los números y las matemáticas.

Un último ejemplo: en el ciclo de conferencias que estoy dictando en esta universidad, nunca he visto ni oído hablar de cantidades de público similares en conferencias de matemáticas. Bien es verdad que la excepcional labor de organización y propaganda del profesor Ugarte, al que he decidido contratar como representante artístico, ha ayudado mucho, pero solo en el Perú se puede obtener un éxito de esta talla.

Por eso, cuando hablo del Perú, siempre me viene a la memoria la frase con que Minaya Alvar Fañez se lamentaba del sino de Mio Cid: «¡Oh Dios que buen vasallo si tuviera buen señor!».

Y no piensen que con esta frase quiero criticar a los políticos. Efectivamente, la frase es una crítica, pero no solo a ellos, los maestros y profesores somos también señores para nuestros alumnos y, al serlo, somos responsables de ellos y ante ellos. Les debemos lo mejor de nosotros, les debemos nuestro trabajo, nuestro esfuerzo y la renuncia a nuestros intereses personales. Y a cambio de lo que les damos, tendremos la recompensa de verlos superarse y superarnos.

Ese afán por aprender es la principal riqueza del Perú. Hoy la riqueza de un país se mide, no en su producción de materias primas —las materias primas se terminan—, no en sus fabricas y grandes empresas —hemos visto hundirse a las mayores—; la verdadera riqueza se mide en capital humano. La inversión en capital humano, a la que algunos llaman educación, siempre rinde intereses y nunca defrauda, y es la que más contribuye a proporcionar riqueza y felicidad a un país.

Hace unos veinte años organizamos en España la olimpiada iberoamericana de matemáticas; yo era entonces presidente de la Real Sociedad Matemática Española. Como país organizador estábamos interesados en lograr la asistencia de la mayor cantidad posible de delegaciones. Había una que nos produjo problemas: el Perú no lograba financiación, la OEI no tenía ya fondos. Al final conseguimos dinero, pero no sabíamos si había llegado a tiempo. Recuerdo la llamada desde Madrid de Juan Carlos Toscano, secretario de la OEI: «Llegaron, al fin llegaron, han venido dos chicos con un señor bajito muy raro». Creo que todos sabemos perfectamente quién era el profesor acompañante.

Aquella delegación del Perú no hizo un papel brillante, bastante fue el lograr participar, pero las cosas han cambiado: en las dos últimas olimpiadas internacionales, los resultados de la delegación peruana han sido espléndidos, todos los alumnos han

obtenido medalla y la posición del equipo en el *ranking* final, próxima a la de Brasil, ha sido mucho mejor que la de todos los países iberoamericanos, España incluida. En los últimos cinco años, docenas de alumnos peruanos han hecho un papel brillante en las olimpiadas. Esos alumnos son capital humano de primera calidad, pero ¿qué se ha hecho de ellos?, debemos llorar, como Jorge Manrique, Mosén Verdaguer o Francois Villón, preguntando: ¿dónde están mis compañeros, dónde están las nieves de antaño?

Tenemos en nuestras manos la posibilidad de ayudar al futuro del país y no debemos dejarla escapar. Afortunadamente en algunos países y momentos, y el Perú tiene la suerte de ser uno de ellos ahora, surgen personas excepcionales y con las ideas claras que nos indican el camino por seguir. El doctor Camacho es una de esas personas y el IMCA, su obra, es lo que se necesita en estos momentos. En mis sucesivas estancias en el Perú he visto progresar las matemáticas, pero esta última vez, tanto en el mes de junio, en el homenaje a Elón Lima por sus 80 años, como en el congreso de Puno, he visto a matemáticos muy jóvenes que me han sorprendido con trabajos del nivel de los realizados en centros internacionales de primera línea. No quiero mencionar nombres por no ser injusto, pero creo que están en la mente de todos.

Si de verdad se ama al Perú y se busca su progreso, esa tarea del profesor Camacho debe ser apoyada con todos los recursos materiales y humanos posibles, dejando de lado personalismos y nacionalismos universitarios, peores que los políticos.

Pregunté una vez a uno de mis maestros, Heisuke Hironaka, qué es lo que podía hacer para retribuirle de algún modo todo el tiempo y el trabajo que me dedicaba: «Haz lo mismo por otros», me dijo. Y ese debe ser el fundamento de nuestro trabajo como maestros: transportar la antorcha del conocimiento, iluminando nuestro entorno, y preparar los siguientes portadores de la antorcha.

La luz, en nuestra vida de maestros, es más que una metáfora. En la ceremonia en que se me nombraba en mi primer puesto de profesor de la Universidad Complutense en Madrid me fue entregada una medalla con el lema: *Perfundet omnia luce* («penetra todo con su luz»). No importa si la frase se refiere al conocimiento, como dicen unos, o a la libertad, como aparece en el lema de Fernando de Castro: *Libertas perfundet omnia luce* («conocimiento es libertad»).

La luz está en el lema de esta universidad: *Et lux in tenebris lucet*, frase del evangelio de San Juan: «La vida es la luz de los hombres y la luz brilla en las tinieblas mas las tinieblas no la comprendieron».

Luz de nuevo, la luz que estamos encargados de difundir, flota sobre todos los que nos dedicamos al estudio y la investigación. Pero creo que la luz que tenemos más próxima los matemáticos es la del *fiat lux*. Quién de nosotros ha experimentado alguna vez una satisfacción mayor que la de comprender, la que se produce cuando, tras muchas horas de esfuerzo, entendemos al fin aquello que estudiamos, ese momento glorioso en que suena para nosotros una voz que dice: «Hágase la luz y la luz se hace».

He dicho.

El autor



## Capítulo 1

### Sociedad y matemáticas

*[...] ha de ser astrólogo, para conocer por las estrellas cuántas horas son pasadas de la noche, y en qué parte y en qué clima del mundo se halla; ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas [...]*

Miguel de Cervantes

La frase que hemos escogido como lema es de don Quijote y explica lo que es necesario para entender la ciencia de la caballería andante. Esta frase no es más que una bandera para llamar la atención sobre el tema de nuestro trabajo, ya que no es necesario remontarnos hasta Cervantes para justificar el interés de las matemáticas para la sociedad del siglo XXI. En este ensayo pretendemos hacerlo con unas cuantas pinceladas que no harán justicia a un tema sobre el que pueden escribirse varios volúmenes.

#### 1.1. Introducción

Otro Miguel, cuya ausencia nunca lamentaremos bastante: Miguel de Guzmán (1936-2004), expone en las frases finales de uno de sus últimos trabajos [56] no solo la importancia del papel de las matemáticas en la sociedad actual, sino también la carga de responsabilidad que supone este papel para la comunidad matemática. Las frases que todos deberíamos tener presentes son las siguientes:

Yo quisiera mencionar otro punto de vista en torno a la relación de las matemáticas con la cultura y la sociedad y que tiene que ver con los aspectos éticos que la actividad matemática podría y debería tratar de desarrollar:

- La creciente matematización de la ciencia y de la cultura implica fuertes riesgos a los que es necesario prestar atención.
- Se puede pensar que, en gran parte, hemos abandonado actitudes básicas del quehacer matemático que fueron centrales en otros periodos de nuestra larga historia.
- La naturaleza misma del quehacer matemático implica el estímulo de ciertos valores específicos.
- La conveniencia de colocar en lugar destacado de nuestra actividad estas actitudes constituye un gran reto para el futuro.

En estas palabras hay una llamada a la responsabilidad de los matemáticos. Es obvio que nuestra principal tarea debe ser la investigación y el desarrollo de nuestra ciencia, pero no debemos encerrarnos en una torre de cristal y desvincularnos de la sociedad. Tenemos la obligación de preocuparnos por el uso de las matemáticas, por la forma en que los conocimientos matemáticos se difunden y, sobre todo, por los valores específicos que pueden ser transmitidos por medio de ellas. Y este último aspecto es esencial: las matemáticas son, por encima de todo, la ciencia de la razón y de la libertad. El quehacer matemático no admite limitaciones en el plano intelectual y el que se dedica a él encuentra la mejor recompensa en el resultado de su trabajo. Esta afirmación, que estamos seguros comparte la mayoría de los matemáticos, no tiene que ver con la división de estos en puros y aplicados, de la que hablaremos después, ya que es raro el matemático que, a la hora de obsesionarse con un problema, se preocupe de las ventajas económicas o la posición social, que pueda reportarle su solución. En nuestra opinión, con las matemáticas se puede, y se debe, comunicar la alegría del pensamiento libre, la satisfacción del descubrimiento, la belleza del razonamiento y el amor por el trabajo bien hecho.

Respecto a la función del quehacer matemático, es bien sabido que desde hace mucho tiempo hay una polémica en la comunidad matemática entre «matemática pura» y «matemática aplicada», polémica artificial entre los que pretenden asignar a nuestra ciencia uno de los dos papeles: reina o sierva de las ciencias, recogidos magistralmente, ya desde su título, en una de las obras del matemático e historiador Eric Temple Bell (1987).

Esta polémica no es nueva y encuentra su mejor definición en un fragmento muchas veces citado de una carta de Jacobi a Legendre escrita en 1830 [71]:

[...] M. Fourier opinaba que la finalidad primordial de las matemáticas consiste en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber sabido que la finalidad única de la ciencia es la de rendir honor al espíritu humano y que, por ello, una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo.

La postura de Fourier ha sido exagerada por aquellos que consideran las matemáticas como un lenguaje que, como afirma Fernández Perez [44]: «Permite describir patrones, pautas, simetrías, regularidades y estructuras para así entender fenómenos naturales y sociales, organizando información y extrayendo conclusiones de forma precisa y rigurosa».

En cualquier caso, las matemáticas son también un lenguaje esencial para la ciencia. En su polémica con Grassi (que escribía bajo el seudónimo Sarsi), Galileo [49] escribe:

Señor Sarsi, las cosas no son así. La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres con que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

Juan Arana [6] apostilla que, para la ciencia de hoy, la matemática no es solo el alfabeto con que está escrito el libro de la creación, sino que forma también la sintaxis del lenguaje que en él se articula y hasta su misma semántica. En resumen, no se hace de menos a la matemática cuando se dice de ella que es un lenguaje.

En el extremo contrario están los que opinan que la matemática es un sistema formal; es decir, un conjunto de axiomas y teoremas que se derivan de ellos. Llevando esta postura al extremo llegamos a la exageración de Bertrand Russel [100], que afirma que la matemática es: «La ciencia que no sabe de lo que trata, ni si lo que dice es verdad o mentira».

En nuestra opinión, la división pura-aplicada es artificial. No hay modo de saber, y hay una buena cantidad de ejemplos que así lo demuestran, cuál es pura y cuál es aplicada. Por otra parte, la segunda no puede vivir sin la primera. Esencialmente, la matemática aplicada consiste en un conjunto de técnicas que se usan en otras ciencias o en tecnología, pero su desarrollo se hace en matemática pura. Además podemos afirmar con certeza que cualquier resultado matemático, por abstracto que parezca, es o será aplicable. Como observa P. Griffiths [55]: «Uno de los misterios profundos de la vida es la forma en la cual la mejor matemática pura interesante por sí misma, inexplicablemente e impredeciblemente resulta ser útil».

Y esta no es solo la opinión de un matemático. Dirac [36] defiende también la matemática pura, «de gran belleza y enormemente elevada».

Parece ser uno de los rasgos fundamentales de la naturaleza el que las leyes físicas fundamentales se describan en términos de una teoría matemática de gran belleza y poder, necesitando unas matemáticas enormemente elevadas para entenderla. Se puede uno preguntar: ¿Por qué la naturaleza está construida a lo largo de estas líneas? Solamente se puede responder que nuestro conocimiento presente parece mostrar que la naturaleza está construida de esta forma. Lo único que podemos hacer es simplemente aceptarlo. Se puede describir tal vez la situación afirmando que Dios es un matemático de alta potencia y que usó matemáticas muy avanzadas al construir el universo. Nuestros débiles ensayos matemáticos nos capacitan para entender un poco el universo, y a medida que procedemos a desarrollar matemáticas más y más avanzadas, podemos esperar entender el universo mejor.

Sí podemos distinguir, en cambio —pero esa es otra cuestión distinta—, entre la matemática original que aborda problemas y desarrolla nuevas técnicas y la matemática que se ocupa de generalizaciones, las más de las veces estériles, y cuyos autores solo buscan incrementar unas listas de publicaciones que les permitirán mejoras salariales o incrementos de sus cuotas de poder en las universidades y centros de investigación.

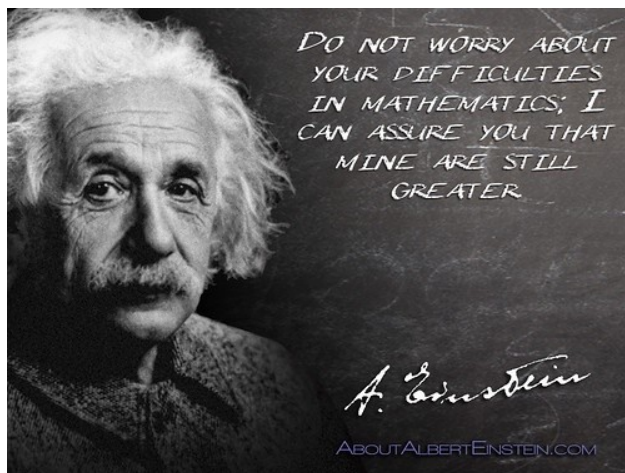


Figura 1.1. Albert Einstein.

Una función de las matemáticas que no podemos olvidar y que está por encima de estas discusiones es su importancia en la enseñanza, ya que en ella tienen un papel fundamental, sobre todo si entendemos los procesos de aprendizaje como algo más que la simple acumulación de conocimientos. El carácter eminentemente racional de las matemáticas las hace ser la herramienta formativa más adecuada para una sociedad en la que, cada vez más, el trabajo físico se deja en manos de las máquinas y el trabajo intelectual adquiere un papel predominante.

A nadie se le escapa que vivimos en una sociedad en permanente movimiento: los cambios (nos resistimos a utilizar la palabra progresos) sociales, científicos y técnicos se producen a una velocidad vertiginosa. Alguien escribió que el número de investigadores vivos y trabajando actualmente es mayor que el de los que han muerto. Además los países desarrollados invierten cantidades cada vez mayores en investigación, lo que produce una situación de cambio permanente y un avance inexorable de la automatización que hará inevitable la desaparición del trabajo de carácter mecánico.

La adaptación a esta sociedad requerirá un nuevo tipo de preparación del individuo y la palabra clave de esta será «flexibilidad». En un futuro inmediato no bastará con dominar unas técnicas, que van a quedar obsoletas rápidamente; sino que se precisará una fuerte formación de base, que proporcione un punto de apoyo para la rápida adaptación a las circunstancias y, en esta formación, pueden y deben jugar un papel fundamental las matemáticas.

No es este su único papel de importancia para la sociedad. Ya Napoleón, al acusar recibo de una de las obras de Laplace, le escribe, en una carta fechada el 12 de agosto de 1812, inmediatamente después de la batalla de Vitebsk: «El adelanto y perfeccionamiento de las matemáticas están unidos indisolublemente a la prosperidad del estado» [57].



Figura 1.2. Napoleon Bonaparte.

Y en efecto, no solo las ciencias físicas, campo natural de las matemáticas, sino las ciencias naturales y de la vida, la economía o la sociología utilizan cada vez más las matemáticas y no las elementales, sino técnicas avanzadas y muy sofisticadas.

Sin embargo, la enseñanza marcha, de modo incomprensible, por otros derroteros, llevada de la mano por didactas y pedagogos. La nueva orientación de los estudios universitarios, en algunos países europeos producto del llamado Plan Bolonia, da la razón a las palabras de uno de los matemáticos más importantes de la actualidad, Michael Atiyah, que en una conversación con el autor de estas líneas calificaba a dicho plan, como: «Una conspiración de las peores universidades inglesas para conseguir que las universidades del resto de Europa sean tan malas como ellas».

Este plan, destinado en un inicio a la armonización de los estudios en los distintos países de la Unión Europea para la mejor homologación de los títulos universitarios, se ha traducido en dos procesos: uno discutible y otro absolutamente negativo.

El primero es un intento de cambio en la metodología docente para adecuarla a los nuevos medios de comunicación y a la nueva sociedad. Este cambio, hecho por pedagogos sin contar con el consenso del profesorado, es simplemente una declaración de intenciones y esperamos que no pase de eso. Los profesores somos conscientes de la existencia de los nuevos medios y cada uno de nosotros trata de buscar su propia solución a los problemas didácticos sin necesidad de que los políticos nos expliquen lo que tenemos que hacer.

El segundo consiste en la implantación de estudios de grado cortos y especializados, complementados con estudios de máster directamente encaminados al mercado de trabajo. En nuestra opinión, no es la mejor solución ni para la universidad, a la que llegan estudiantes con poca formación y menos interés, ni para la sociedad. Los egresados universitarios servirán durante el tiempo que tardan en quedar obsoletas las técnicas que aprendieron y el aprendizaje de nuevas técnicas no es fácil si no se cuenta con una base suficiente.

Además la propia inercia del sistema universitario juega en contra del proceso propuesto. Pongamos un ejemplo en el que todo parecido con la realidad es mera coincidencia y del que no querríamos que se extrajera la consecuencia de que odiamos a los enólogos y menos aún al vino: los estudios de enología.

Estos estudios son interesantes en la actualidad, dada la importancia adquirida en los últimos años por el mercado del vino y la necesidad de mejorar la calidad de este producto, para competir con éxito en los mercados internacionales. En consecuencia, han sido muchas las universidades que han puesto en marcha un grado en enología, lo que supone la aparición en el mercado de trabajo de cientos de enólogos al año con la consiguiente saturación. Una vez que se saturado el mercado, ¿qué puede hacer un enólogo? René Thom<sup>1</sup> dio la respuesta a esta pregunta en una bonita y malintencionada fábula:

---

<sup>1</sup>El autor escucho esta fabula en círculos matemáticos franceses en los años 70, atribuida siempre a Thom. En Bröcker [18] aparece como un poema de Dsuang Dsi, completado por Thom. Este poema, en su traducción del alemana, dice: «Dschu Ping Mau hizo todo lo posible para aprender , del Maestro Schi Li Yi, como matar dragones. Después de tres años era experto en este arte, pero no había ningún dragón para mostrar su habilidad». Thom completa el verso con: «En consecuencia, empizo a enseñar a los demas como matar dragones».

Hubo una vez un hombre en China que quiso aprender a matar dragones, tras cuatro lagos años de estudio y trabajo consiguió saber todo lo necesario para dominar ese difícil arte, pero cuando lo hubo conseguido se encontró con que no había dragones que matar. Naturalmente el hombre puso una escuela para enseñar a matar dragones.

La salida del problema es mala, pero inevitable: las universidades ya han hecho el esfuerzo de poner un grado en marcha y no es tan fácil suprimirlo; de hecho no conocemos ni un solo caso de supresión de unos estudios de grado en la universidad. Los enólogos quieren trabajar y se crearán nuevas facultades de enología, porque hay profesionales preparados. La única forma de salir del círculo vicioso es dar a los enólogos parte de las competencias de los químicos y casualmente se suelen elegir las relativas a la enseñanza de la química en secundaria, lo cual no beneficia precisamente a los estudios de esta. Así, a la larga, una idea que parece buena a corto plazo produce consecuencias nefastas.

Cuánto más razonable sería crear unos estudios básicos de ciencias, una especialización en química y luego estudios de máster, que incluirían la enología, flexibles, fáciles de crear o suprimir con la enseñanza a cargo de profesionales exteriores contratados *ad hoc*, complementados con programas de doctorado exigentes y de calidad que garanticen la continuidad del sistema universitario.

Pero independientemente de la estructura de los estudios universitarios, las matemáticas tienen un papel claro, no solo en su calidad de instrumento y de lenguaje, sino por sus cualidades formativas. Del método matemático podemos aprender lecciones de indudable interés para muchos aspectos de la vida.

Los aspectos formativos de la matemática constituyen su método. Ya Descartes [33] proponía imitar el método matemático: «El método que enseña a seguir el orden verdadero, el camino recto y conocer con exactitud todas las circunstancias de lo que se busca, contiene todo aquello que da certeza a las reglas de la matemática».

A nuestro juicio, algunos de los elementos esenciales del método matemático son los siguientes:

1. Buscar el principio de los problemas: el Rey negro de Lewis Carroll [21] expresa esta idea de modo claro cuando le dice a Alicia: «Empieza por el principio —dijo el Rey con gravedad— y sigue hasta llegar al final y allí te paras».

Hacer esto es algo muy difícil, y no solo al tratar de explicar algo. Encontrar el principio de un problema requiere un enorme esfuerzo y supone casi haberlo resuelto, y al hablar de problema no nos referimos solo a problemas matemáticos o científicos. En cualquier circunstancia de la vida es muy importante tener la capacidad de analizar la situación y decidir por dónde empezamos a abordar nuestras dificultades. Lo mismo que la gimnasia prepara a una persona para afrontar retos deportivos, las matemáticas le preparan para afrontar retos intelectuales y esto, que nuestros abuelos sabían perfectamente, lo hemos olvidado ahora bajo la doctrina de que todas las ciencias son iguales y de que es igual una clase de circulación vial —evidentemente importante, pero en otro orden— que una de matemáticas.

2. Dividir el problema en etapas abordables: algo tan fácil de entender como: «Si quieres mover una piedra y no puedes, divídela en trozos y transpórtala trozo a trozo».

Esta es una verdad que parece estar fuera del alcance de la mayoría de las personas que se acobardan ante un problema demasiado grande para afrontarlo completo, en lugar de tratar de descomponerlo en problemas pequeños que puedan ser resueltos con más facilidad. Recordamos de nuevo que no hablamos solo de matemáticas, pero que por medio de ellas se puede asimilar esta técnica que luego puede usarse en cualquier ámbito.

3. La deducción: formalmente deducir es una operación muy simple que consiste en comparar dos cosas para saber si una es parte de la otra; pero esta operación es un misterio para el común de los mortales, para los cuales la expresión y «en consecuencia», no es sino un nexo entre dos frases que no tienen nada que ver una con la otra. Y no nos referimos solamente a personas iletradas o carentes de preparación. Todos podemos citar ejemplos de estudiantes de matemáticas para los cuales el signo de implicación es un signo de separación como una coma o dos puntos.

La matemática es la mejor herramienta para aprender a deducir, especialmente la geometría, en la que además las deducciones conducen a veces a resultados difíciles de admitir, y por tanto de intuir, pero ciertos.

4. La inducción: es muy conocida la discusión entre Huxley y Sylvester, recogida por J. R. Newman [88], sobre la existencia de inducción en las matemáticas. Huxley [63], al comentar la frase de Comte [28], dice: «Es entonces por el estudio de las matemáticas y solamente por ello, por lo que podemos hacernos una idea precisa y profunda de lo que es una ciencia».

Escribió en un texto titulado *Una charla después de la cena*, lo siguiente:

Esto es como decir que los únicos estudios que pueden darnos una idea precisa y profunda de lo que se entiende por ciencia, y al mismo tiempo proporcionan un concepto exacto del método general de la investigación científica, son los de una ciencia que no sabe nada de la observación, nada de la experimentación, nada de la inducción, nada de la causalidad.

Para Sylvester resultó sumamente fácil rebatir el discurso de Huxley y de paso descalificar a su adversario asegurando que, dada la afición de Huxley a la bebida, si en vez de hablar después de la cena lo hubiese hecho antes, sus afirmaciones habrían sido más ajustadas a la realidad.

Para cualquiera de nosotros resulta muy fácil encontrar numerosos ejemplos de cómo usar las matemáticas, especialmente la aritmética y la geometría, para encontrar procesos de experimentación e inducción que conducen a enunciados que pueden ser probados después por el método deductivo.

Insistamos, por último, antes de pasar a hablar de matemáticas de modo más preciso, en ese carácter de «gimnasia intelectual» que hemos adjudicado a las matemáticas. No podemos olvidar que estas tienen fundamentalmente un carácter

formativo y que, al igual que no se puede estudiar la gimnasia en un libro, no pueden limitarse a una lista de conceptos y enunciados. El razonamiento y la demostración son los mejores ejercicios para formar el intelecto.

El carácter formativo de las matemáticas se pone de manifiesto no hablando de él, sino mediante la buena presentación de los conceptos y técnicas matemáticas, y eso hay que hacerlo en todos los niveles de la enseñanza.

## 1.2. De Pitágoras a los códigos

Vamos a presentar ahora un primer ejemplo que nos dará una idea de la evolución de un enunciado matemático. Comenzamos con el teorema de Pitágoras (569 - aprox. 475 a. C.): en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

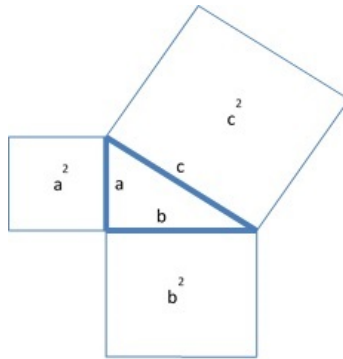


Figura 1.3. Teorema de Pitágoras.

De este teorema existen numerosas demostraciones (Loomis [77] recogió un total de 370 en 1927), incluso hay una debida al vigésimo presidente de los Estados Unidos, J. A. Garfield (1831-1881).

El teorema ha sido objeto hasta de canciones como el rock Pitágoras (1960) del cantante italiano Adriano Celentano. La demostración de la figura es probablemente la más visual de todas ellas.

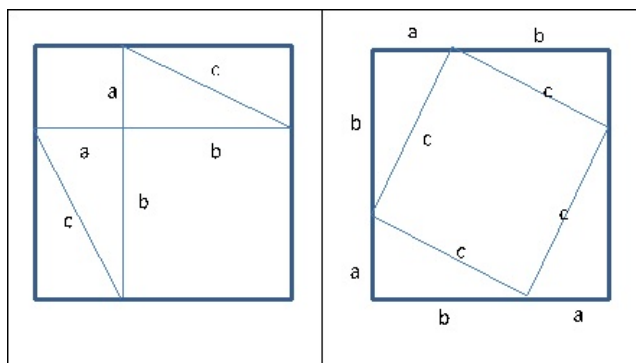


Figura 1.4. Demostración visual del teorema de Pitágoras.

La contrapartida algebraica del teorema de Pitágoras se puede establecer diciendo que las longitudes de los catetos  $a$  y  $b$  y la longitud de la hipotenusa  $c$  de un triángulo rectángulo verifican la ecuación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Una vez vista la ecuación, lo natural, y con certeza previo al teorema, es preguntarse por las soluciones enteras no nulas de la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Las ternas de enteros no nulos  $(x; y; z)$  que son soluciones de la ecuación anterior —por ejemplo  $(3; 4; 5)$ — son los llamados números pitagóricos. Un cambio de variable:  $u = x/z$ ,  $y = y/z$ , prueba que buscar las ternas de números pitagóricos es lo mismo que buscar las soluciones racionales de la ecuación:

$$u^2 + v^2 = 1$$

Es decir, los puntos de coordenadas racionales de la circunferencia de centro el origen y radio 1. Si proyectamos estereográficamente, desde el punto  $(1; 0)$ , la circunferencia de centro el origen y radio 1 sobre el eje de abscisas:

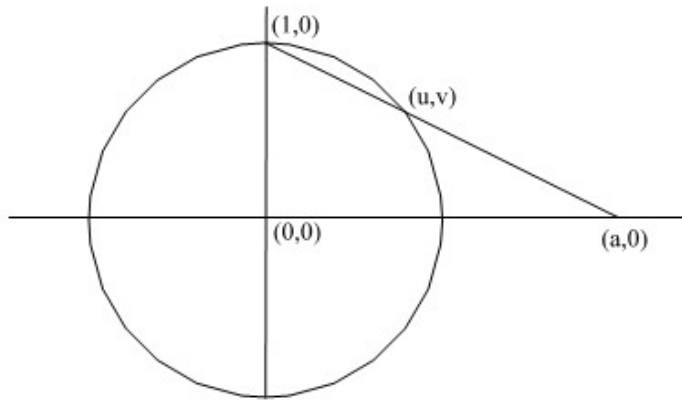


Figura 1.5. Proyección estereográfica.

el punto  $(u; v)$  de la circunferencia que se proyecta sobre el punto  $(a; 0)$  del eje viene dado por:

$$u = \frac{2a}{a^2 + 1} \text{ y } v = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

Los valores racionales de  $a = m/n$  se corresponden con los puntos racionales de la circunferencia, que son entonces los de coordenadas:

$$\left( \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right)$$

Así todas las ternas de números pitagóricos responden, salvo producto de un factor constante, a la fórmula:

$$(2mn; m^2 - n^2; m^2 + n^2)$$

Con este punto de partida es natural preguntarse por ecuaciones diofánticas más generales, como la ecuación de Fermat:

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2$$

Fermat (1650) conjeturó que esta ecuación no tiene soluciones enteras no triviales.



Figura 1.6. Pierre de Fermat.

La prueba de esta conjetura, que puede enunciarse en términos algebraicos diciendo que las curvas algebraicas:

$$u^n + v^n = 1, \quad n > 2$$

no tienen puntos racionales no triviales, la precisó hace más de trescientos cincuenta años (Taylor & Wiles [113]). Además, abrió el camino a otra nueva generalización, que consiste en estudiar el conjunto de puntos racionales de una curva algebraica racional:

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$$

Si la curva es una cónica, es decir de grado dos, hemos visto un caso, la ecuación de Pitágoras, con infinitos puntos racionales, pero la circunferencia de centro el origen y radio tres:

$$x^2 + y^2 = 3$$

no tiene puntos racionales, ya que la correspondiente ecuación diofántica:

$$a^2 + b^2 = 3c^2$$

no tiene soluciones no triviales, como se comprueba tomando restos módulo tres. Por tanto, las cónicas o no tienen puntos racionales o tienen infinitos; ya que, si lo tienen, la proyección estereográfica desde ese punto prueba que se pueden construir infinitos.

Si suponemos que la curva es no singular y la consideramos como una curva en el plano complejo, es topológicamente una superficie real compacta y conexa y su topología queda determinada por su género, las cónicas proyectivas corresponden al género cero, es decir son topológicamente esferas. Entonces, la situación del problema es la siguiente:

- Para genero cero, o no tienen puntos racionales o tienen una infinidad numerable de ellos.
- Mordell [85] demostró que las curvas de genero uno o bien no tienen puntos racionales o son curvas elípticas que pueden tener un grupo finito de puntos racionales o un grupo abeliano infinito perfectamente conocido.
- Mordell [85] conjeturó que las curvas de género mayor que uno, sobre cuerpos de números, tienen solo un número finito de puntos racionales.
- Gerd Faltings [40] probó esta conjetura sesenta años después de que fuera enunciada por Mordell.

La siguiente generalización del teorema de Pitágoras es el estudio del número de puntos de una curva algebraica con coeficientes en un cuerpo finito. Esta generalización, aun más abstracta que la de Mordell, tiene interesantes aplicaciones prácticas a los llamados «códigos de Goppa».

Codificar una información significa escribirla mediante una serie de símbolos, o sea letras, agrupados en bloques, es decir palabras. La codificación no tendría interés si luego no se pudiera recuperar la información codificada. El principal obstáculo para hacerlo se debe a los errores en los procesos de transmisión, llamados «ruido», el cual es el problema principal de la codificación. Naturalmente, la mejora de los medios de transmisión disminuye el ruido, pero las matemáticas proporcionan métodos para detectar e incluso corregir los errores producidos por él. R. W. Hamming [58] es el autor de la idea central común a la mayoría de estos métodos. Su idea es complementar cada palabra con una serie de letras de control; es decir, construir una aplicación (llamémosla  $f$ ) del conjunto de palabras del código en otro conjunto de palabras, de modo que el par  $(P, f(P))$  permita conocer si en  $P$  hay errores o incluso corregirlos.

El primer método utilizado fue el llamado «código de paridad». Las letras del código son 0 y 1 y a cada palabra se le añade un 0 o un 1 según el número de letras de la palabra sea par o impar, con lo que se puede descubrir algunos errores. Un segundo método, llamado «código de repetición», consiste en repetir varias veces cada letra de la palabra. Este código no solo permite detectar errores, sino también corregirlos; ya que, vista la posible palabra y sus repeticiones, se puede decidir cuál es la original más probable. Por ejemplo, con tres repeticiones (000), se interpreta como 0; pero en (011), es más probable que sea 1.

Si establecemos una longitud constante  $n$  para las palabras y nos limitamos a las letras 0, 1, el conjunto de palabras del código es un subconjunto del espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el cuerpo de dos elementos  $F_2$ , pero no tenemos que limitarnos al 0 y al 1. Podemos usar como letras los elementos de un cuerpo finito  $F_q$  y tomar como palabras los elementos de un subconjunto  $C$  de un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  sobre este cuerpo. La información complementaria se puede establecer con una aplicación lineal  $f$  de  $V$  en un espacio vectorial  $W$  de dimensión  $k$ , es decir una matriz  $k \times n$ . El cociente  $n/k$  se llama «tasa de transmisión del código».

La aplicación lineal  $f$  se debe elegir de modo que la imagen de cada palabra  $P$ ,  $f(P)$  permita recuperar  $P$  del modo más fiable posible. Para lograr este objetivo, se trata de separar lo más posible las imágenes de las palabras, separación que se mide en términos de la llamada «distancia de Hamming». Fijada una base de  $W$ , la distancia entre dos palabras es el número de coordenadas diferentes. Esta distancia es una métrica y, si la distancia mínima de dos elementos de  $F(C)$  es  $d$ , el código permite corregir  $e$  errores con  $d = 2e + 1$  o  $d = 2e + 2$ ; porque, para cada palabra de  $W$  que difiera en  $e$  letras de una de las de  $f(C)$ , hay una única palabra de este conjunto más próxima a ella, la cual es probablemente la correcta.

El matemático ruso V. D. Goppa [53] demostró, en los años setenta del pasado siglo, que se podían construir buenos códigos usando técnicas de geometría algebraica en la línea de las antes descritas. Partiendo de una curva algebraica proyectiva no singular  $X$ , sobre un cuerpo finito de  $q$  elementos  $F_q$  con el mayor número posible de puntos, se toman: un conjunto finito de puntos de la curva  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , el divisor  $G = P_1 + P_2 + \dots + P_n$  y un divisor  $D$  disjunto de  $G$ . Se construye el conjunto:

$$L(D) = \{f \in F_q(X)^* \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

es decir, el espacio vectorial de funciones racionales en una variable que tienen en los puntos seleccionados como máximo un polo simple y se toma la aplicación lineal:

$$\gamma : L(D) \longrightarrow F_q^n, \quad \gamma(f) = (f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n))$$

La imagen de esta aplicación es un código geométrico de Goppa de longitud  $n$ . El teorema clásico de Riemann-Roch permite calcular los parámetros del código. El problema de encontrar buenos códigos de Goppa es encontrar curvas con muchos puntos racionales. Curiosamente, las curvas de Shimura que intervienen en la prueba del teorema de Fermat-Taylor-Wiles proporcionan buenos códigos de Goppa.

### 1.3. Las trampas del tanto por ciento

Vamos a dedicar esta sección a exponer algunos usos y abusos de una herramienta de la aritmética elemental: el tanto por ciento. Todos sabemos lo que significa: un cinco por ciento es cinco de cada cien, pero también diez de doscientos y mil de veinte mil; por tanto, es claro que, si se comparan tantos por ciento, hay que hacerlo hablando de porcentajes de la misma cantidad y que el cinco por ciento de mil es mayor que el veinte por ciento de cien.

Los políticos en sus debates olvidan voluntariamente ese hecho, por lo que se presenta la situación siguiente, en la cual todo parecido con la realidad **no** es mera coincidencia.

¿Pueden dos políticos mentir y decir la verdad al mismo tiempo en un debate?:

- **Político A:** El paro durante nuestros cuatro años de gobierno ha descendido.
- **Político B:** El paro durante los cuatro años de gobierno de su partido ha aumentado.

Érase una vez un país hipotético que en el año 2004 tenía 20 millones en habitantes en edad de trabajar y de ellos 1 800 000 estaban en paro. En ese mismo país, el año 2008 había 24 millones de posibles trabajadores y 1 920 000 parados. Es claro que la afirmación del candidato *B* es cierta: hay 120 000 parados más, pero en el año 2004 el porcentaje de paro respecto a la población activa era del 9% y en 2008 del 8%. Luego el candidato *A* también dice la verdad: la tasa de paro ha bajado un 1%. En consecuencia, ambos políticos pueden asegurar que dicen la verdad y que su contrincante miente.

Hay otras afirmaciones que inciden en aspectos muy trágicos de la vida y que las autoridades deberían precisar para evitar malas y peligrosas interpretaciones.

Hace unos años, en Francia, las estadísticas oficiales publicadas en los periódicos cifraban en un 32% el porcentaje de los accidentes de automóvil debido a que el conductor de uno de los vehículos accidentados presentaba un nivel de alcoholemia superior al permitido. Una cadena de televisión llevó la estadística al absurdo haciendo, en un programa de humor, una encuesta por diversas tabernas del país en la que se planteaba la siguiente pregunta: «Si un 32% de los accidentes se producen porque uno de los conductores implicados está bajo los efectos del alcohol y un 68% se produce porque ninguno de los dos conductores ha bebido, ¿opina usted que, en consecuencia, es mucho más peligroso conducir sereno que borracho?»

Casi todos los preguntados estaban de acuerdo con la afirmación y algunos, elegidos obviamente por tener aspecto de bebedores habituales, añadían comentarios como: «Está claro que los abstemios van siempre de peor humor y son, por tanto, más peligrosos», o «Por favor, venga a explicarle esto a mi mujer».

Los pocos que dudaban de la afirmación lo hacían sin poder explicar la razón de sus dudas. Y es claro que, en primer lugar, es descabellado atribuir un accidente a una sola razón —tan absurdo hacerlo a una tasa de alcohol elevada como a una tasa de alcohol nula— y, en segundo lugar, el dato suministrado no significa nada, a menos que lo complementen con un muestreo que establezca qué porcentaje de los conductores maneja su automóvil habitualmente bajo los efectos del alcohol. Si ese porcentaje, como parece obvio, es inferior al 32% podríamos concluir, como primera aproximación, que la afirmación es falsa. No se entiende la razón por la cual las autoridades o los periodistas ocultan siempre ese dato, que seguro poseen.

Otro fallo importante se produce por el convencimiento de las autoridades de que los simples números no son serios y que la pequeña aportación matemática de substituir números por porcentajes da más seriedad a las noticias. Es muy conocida la anécdota siguiente: en el resumen estadístico de una memoria sobre la criminalidad en España, en un año de principios del pasado siglo, se recogía el dato de que el 100% de las violaciones habían sido cometidas por flautistas del teatro real.

La noticia, recogida así por los periódicos, resultaba realmente alarmante, sobre todo para los flautistas del teatro real, que podían ser linchados en cualquier momento; pero una lectura de la memoria hacia ver que en el año solo se había cometido una violación. Así, la información de la noticia era sesgada o tendenciosa.

Esta tendencia a utilizar porcentaje cuando se trata con cifras pequeñas está mucho más extendida de lo que parece y lo peor es que esos porcentajes sirven para que tomen decisiones muchos organismos oficiales, entre los que, para nuestra vergüenza, están los organismos universitarios.

Otro misterio para los políticos, incluidos muchos en cuyo currículum figura la críptica frase: «Tiene estudios de economía e ingeniería» —la cual probablemente significa que alguna vez asistió a alguna clase de estas materias—, es la adición de porcentajes. Una vez leímos una noticia según la cual: como ha subido un 3% la harina, un 2% el aceite y un 5% la mano de obra, el pan sube un 10%. Obviamente la afirmación es falsa. Para saber en qué porcentaje debe subir el pan, tenemos que conocer más datos. Por ejemplo, podrían decirnos que en el precio del pan:

- La harina repercute un 30%
- El aceite un 5%
- La mano de obra un 40%
- Otros factores un 25%

Entonces, para hacer un pan de ochenta céntimos, invertimos: 24 céntimos de harina, que sube 0.72 cénts.; 4 cénts. de aceite, que sube 0.08 cénts.; y 32 cénts. de mano de obra, que sube 0.16 cénts. Luego el pan debe subir 0.96 cénts., en lugar de los 8 que quieren subirlo, y que con matemáticas o sin ella lo subirán de todos modos.

Otro ejemplo es el que sigue, tomado esta vez del magnífico libro, muy recomendable para todos los que usan la estadística, *El tigre que no está* [13]. La BBC, el 12 de noviembre de 2002, difundió la noticia siguiente: «Por cada copa de alcohol que consume una mujer, su riesgo de cáncer de mama se incrementa en un seis por ciento». Si entendemos la noticia en sentido literal, una mujer que consuma 17 copas de alcohol tiene la más absoluta certeza de que, en lugar de una borrachera, tendrá un cáncer de mama. Si somos un poco más estrictos y pensamos que el incremento es de un 6% de probabilidad a cada copa, teniendo en cuenta la fórmula del interés compuesto, bastarían unas pocas botellas para garantizarse el cáncer.

La noticia real, malinterpretada por la BBC, también imprecisa, era menos aterradora. Se trataba de un informe de un grupo de científicos de Oxford que decía: «El riesgo de cáncer de mama de una mujer aumenta en un seis por ciento por cada copa de alcohol de más que consuma al día».

Obviamente no es lo mismo «una copa más» que «una copa más al día», pero aun así la noticia no está completa si no se conoce el riesgo inicial. Si para un individuo el riesgo es de 1% y se pasa a un 1.06, la cuestión no parece preocupante; pero si es de uno por cien mil y se pasa a un 1.06 por cien mil, no es preocupante en absoluto. No sucede lo mismo con la sociedad, donde el incremento mínimo del riesgo por individuo supone un incremento en el número total de casos que puede repercutir de modo notable en el coste de la seguridad social.

Hay otros aspectos del uso de la aritmética similares al porcentaje; por ejemplo, el cambio de moneda y su oscilación en el tiempo. En estos momentos, la crisis económica ha hecho bajar de forma drástica el precio del petróleo, pero aún en los tiempos de precio elevado y refiriéndonos a la Unión Europea, la subida del precio del petróleo era bastante discutible.

En efecto, el precio del petróleo en los mercados internacionales se fija en dólares, pero los países de la Unión Europea lo pagan en euros. Así en el año 2000, el barril de petróleo de referencia costaba 70 dólares, que en ese momento eran 70 euros; en marzo de 2008 el precio del barril era de 100 dólares y el valor del euro era de 1.55 dólares; luego el precio del barril era de 65 euros aproximadamente, por tanto había bajado 5 euros.

No queremos entrar en ejemplos que involucran técnicas matemáticas más complejas, pero para completar esta sección queremos informar al lector que la correlación entre la curva de nacimientos en Europa en los últimos veinte años y la curva que describe la evolución de la población de cigüeñas en París en el mismo periodo, es perfecta. ¡Que el lector saque sus propias conclusiones!

#### 1.4. Un viaje de ida y vuelta: la teoría de nudos

La teoría de nudos es un buen ejemplo de cómo una teoría nacida de la química se convierte en matemática pura, se transforma y vuelve de nuevo a aplicarse en un campo completamente distinto.

Todos tenemos una idea intuitiva de los objetos geométricos llamados formalmente nudos: basta tomar una cuerda, anudarla de la forma que se desee y pegar después sus extremos, con lo que tenemos una figura homeomorfa a una circunferencia pero que, a menos que hayamos hecho los nudos de una forma muy especial (los ilusionistas saben mucho de esto), no puede transformarse en una circunferencia sin cortarla, desanudarla y volverla a pegar.

Dos nudos que pueden transformarse uno en otro sin cortar la cuerda se llaman equivalentes, formalmente se consideran los nudos sumergidos en la esfera y orientados. Por su parte, dos nudos se llaman isótopos si existe un homeomorfismo lineal a trozos de la esfera en sí misma que conserva la orientación y transforma uno en otro. Una propiedad compartida por un nudo y los equivalentes a él se llama invariante.

La primera propuesta de clasificación sistemática de nudos al físico, P. Tait [111], quien se interesó por la clasificación de los nudos porque en 1867 Lord Kelvin conjeturó que los átomos eran tubos anudados de éter. Así, el intento de Tait de clasificar los nudos y las coligaciones<sup>2</sup> por los puntos de cruzamiento de sus proyecciones planas abría la puerta a una fundamentación de la clasificación de los elementos químicos y a la estructuración de la tabla periódica.

Cuando una veintena de años después el modelo de Kelvin se mostró inadecuado y perdió interés, ya estaba lanzado a los matemáticos el desafío de la clasificación de nudos.

El polinomio invariante de Alexander [5], descubierto en 1923, resultó ser una herramienta mejor que las empleadas por Tait. Al mismo tiempo, los resultados de Brauner [18] y Burau [19], encaminados a describir localmente y desde el punto de vista real las curvas analíticas irreducibles complejas, que veremos a continuación, dieron nuevo interés a la teoría de nudos, esta vez exclusivamente dentro de las matemáticas.

Una «curva analítica plana» es el conjunto de ceros de una función analítica compleja de dos variables. El plano complejo se puede identificar con el espacio real de dimensión cuatro y, como la anulación de una función compleja equivale a la anulación de sus partes real e imaginaria, una curva analítica compleja se puede visualizar como una superficie real en  $\mathbb{R}^4$  con una singularidad aislada en el origen. Esta superficie es transversal a una esfera del espacio de dimensión cuatro, centrada en el origen y de radio suficientemente pequeño, de modo que la intersección de ambas es una curva esférica cerrada y no singular. La proyección estereográfica de esta curva es un nudo en  $\mathbb{R}^3$ , el que no depende de la esfera (si el radio de esta es lo suficientemente pequeño).

La forma del nudo anterior es muy curiosa. Un toro hueco se obtiene pegando una superficie cilíndrica por sus extremos, cuidando de no anudarla. Por tanto, tiene dos agujeros: el central y el envuelto por la superficie cilíndrica. Si consideramos un toro y arrollamos sobre él una cuerda que antes de cerrarse da  $m_1$  vueltas en torno al agujero central y  $n_1$  en torno al otro, tenemos un nudo tórico de genero 1. Si ahora inflamamos la cuerda para convertirla en un toro anudado y repetimos el proceso, tenemos un nudo tórico de genero 2 y así sucesivamente. Un nudo de genero  $g$  queda determinado, salvo isotopía, por los pares de enteros:

$$\{(m_1; n_1), (m_2; n_2), \dots, (m_g; n_g)\}$$

A esto se llama «exponentes característicos del nudo».

Brauner y Burau probaron que las curvas analíticas dan lugar a nudos tóricos de genero finito y que los exponentes característicos del nudo que, como hemos dicho, son un sistema completo de invariantes del mismo, se pueden calcular directamente a partir de las series de potencias de exponentes fraccionarios, que Puiseux había demostrado eran las soluciones de la ecuación de la curva (ecuaciones de las ramas). Este resultado sirvió a Zariski como base de la llamada «teoría de la equisingularidad», una de las ramas más estudiadas de la Geometría Algebraica en los años 70.

<sup>2</sup> Una coligación (*link*) es una colección de nudos entrelazados.

A finales de los 80, Gordon y Luecke [54] probaron que los complementos de dos nudos son homeomorfos si y solo si los nudos son isótopos, resultado que no es válido para las coligaciones. De este modo, el estudio de los nudos es de enorme interés para la clasificación topológica de las tres variedades, al menos de aquellas que son complementos de nudos. Se da el caso que, «salvo para un tipo muy particular de nudos», las variedades complementarias de nudos admiten una estructura hiperbólica —precisamente las variedades estudiadas por Thurston (Medalla Fields, 1982)—.

Al mismo tiempo, V. Jones hizo otro descubrimiento sorprendente, esta vez relacionado con una estructura muy próxima a los nudos: las trenzas.

Una trenza (*braid*) no es más que una colección de cuerdas que unen puntos situados en planos paralelos y se han entrelazado entre sí sin anudarse unas con otras. Dos trenzas del mismo número de cuerdas se pueden componer al unir los extremos de una con los orígenes de la otra, con lo cual puede dotar el conjunto de clases de trenzas de un número de cuerdas dado, de una estructura algebraica de grupo. Artin [8], en 1923, dio una descripción de estos grupos en términos de generadores y relaciones. Claramente una trenza da lugar a una coligación si se pegan los extremos de las cuerdas que la forman. Alexander [4] probó, en 1923, que todas las coligaciones se pueden obtener de esta forma.

El descubrimiento de Jones (1984) [64] fue la existencia de una relación entre las álgebras de Von Neumann, que tienen conexión con la mecánica cuántica, y los grupos de trenzas. Los conjuntos de generadores y relaciones de las álgebras de Von Neumann coinciden con los de los grupos de trenzas; así, los grupos de trenzas y las coligaciones tienen una vía natural de conexión con la mecánica cuántica.

Usando esta analogía, Jones [65] descubrió en 1987 un nuevo polinomio invariante de los nudos y abrió un camino para la búsqueda de polinomios invariantes. En poco tiempo aparecieron media docena más de ellos, uno de los cuales —el HOMFLY [48]— fue descubierto simultáneamente por seis matemáticos cuyas iniciales dan nombre al polinomio. Esto también abrió la puerta a los trabajos de E. Witten (Medalla Fields, 1990) que extendió estos invariantes a tres variedades generales (es decir, no necesariamente complementarias de nudos). Otro de los resultados esenciales de Witten ha sido la interpretación de los invariantes de Jones como integrales de Feynman de una teoría gauge tridimensional. Esta interpretación permite extender la teoría de Jones de polinomios invariantes de nudos en la esfera tridimensional a nudos en variedades arbitrarias de dimensión 3.

La obra de Witten que le valió una Medalla Fields justifica las palabras de M. Atiyah (I.C.M., 1990):

En este amplio y excitante campo, en el que trabajan muchos de los físicos y matemáticos más importantes del mundo, Edward Witten se presenta como la figura más influyente e importante, aunque es definitivamente un físico y así lo demuestra de forma clara su lista de publicaciones. Pocos matemáticos rivalizan con él en el dominio de las matemáticas y su habilidad para interpretar ideas físicas en forma matemática es única. Una y otra vez ha sorprendido a la comunidad matemática por sus brillantes aplicaciones del punto de vista físico para obtener nuevos y profundos teoremas matemáticos.

## 1.5. La forma del universo

Para concluir este trabajo, vamos a explicar, usando las matemáticas, qué se entiende por forma del universo y qué podemos decir sobre la forma del nuestro. Al lector le puede parecer extraño el tema. Tiene sentido hablar de forma de una superficie en el espacio de dimensión tres en que vivimos, pero parece que hablar de forma presupone hablar de un espacio de más dimensiones. Veamos que eso no es necesario.

Para entender primero de qué hablamos, podemos recurrir a un cuento escrito en colaboración por Weeks [121] y Abbot [1].



Figura 1.7. Edwin Abbott.

Sus protagonistas son animales fabulosos: las planarias. Ellas y su mundo «planilandia» (*flatland*) son descritos así por Abbot [1]:

Imaginaos una amplia hoja de papel en que líneas, rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se movieran libremente por todas partes, sobre la superficie o más precisamente dentro de la superficie, sin la capacidad ni de poder alzarse por encima ni de poder hundirse por debajo de ella, muy parecidos a sombras, solo que consistentes y con los bordes luminosos, y poseeréis una noción bastante correcta de mi país y de mis paisanos.

Weeks introduce la revolución en planilandia. Uno de sus habitantes, llamado CC (Cristóbal Colón, claro está), intenta convencer a sus paisanos de que habitan sobre una esfera. La noción de esfera es tan abstrusa para una planaria como la de 3-esfera (que describiremos más adelante) para nosotros, de modo que la tarea de CC es realmente compleja.

Afortunadamente tiene una idea genial para demostrar a sus paisanos la veracidad de su teoría: saldría de su pueblo caminando hacia el norte en línea recta y aparecería por el sur tras dar la vuelta a su universo. Felizmente su mundo es pequeño y CC completa la expedición en poco tiempo. Pero a su regreso, continúa chocando con la incredulidad de sus paisanos, quienes le hacen ver amablemente que, además de estar loco, tiene una pierna más corta que otra y, creyendo andar en línea recta, se ha movido en un círculo por la llanura.

CC no se desanima y recurre a un nuevo experimento. Repetirá el viaje marcando el camino con una línea roja y luego hará un nuevo viaje saliendo por el este para regresar por el oeste. Así, al medir los pasos caminados en este segundo viaje, si lo que sus paisanos dicen es cierto, la distancia desde el pueblo al punto en que encuentre la línea roja será distinta de la distancia recorrida desde este punto hasta llegar de nuevo al pueblo; por el contrario, si son iguales, él será quien tiene razón.

Completa la primera expedición e inicia la segunda y tras mucho caminar y antes de encontrar la línea roja ve ante sí otro pueblo. Corre sorprendido a saludar a sus desconocidos habitantes y al acercarse se da cuenta de que está de nuevo en su punto de salida. Esta vez CC decide ingresar voluntariamente en el manicomio. Por suerte, ya en la puerta, tuvo la suficiente intuición del espacio para comprender que habitaba sobre una rosquilla.

La historia de CC habría sido aún más difícil si planilandia hubiera sido una banda de Möbius. En este caso se habrían intercambiado su izquierda y su derecha tras su primera vuelta al mundo. Esta perspectiva hace terrorífico un viaje de circunnavegación de uno de los tipos posibles de universo tridimensional: ¡al final del viaje se pueden intercambiar el dentro y el fuera del viajero!

Como hemos visto en nuestra fábula, podemos distinguir un toro de una esfera y ello de forma puramente topológica. Cabe preguntarse ahora por la cantidad de superficies esencialmente distintas que podemos encontrar y, cuando decimos esencialmente distintas, queremos decir no isomorfas topológicamente (es decir, no homeomorfas).

Normalmente se suelen describir de modo intuitivo los espacios homeomorfos como aquellos que se pueden transformar uno en otro por una deformación sin cortar ni agujerear. El inconveniente de esta descripción es que de forma insensible imaginamos nuestros espacios como subespacios de  $\mathbb{R}^3$  y así perdemos precisión. Por ejemplo, un aro de cuerda es homeomorfo al resultado de cortarlo, anudarlo y volverlo a pegar y, sin embargo, no es posible en general deshacer el nudo deformándolo en  $\mathbb{R}^3$  sin cortar la cuerda de nuevo; es decir, hay que distinguir los problemas de clasificar espacios mediante las relaciones:

1. Dos espacios  $X$  e  $Y$  son equivalentes si y solo si son homeomorfos.
2. Dos espacios  $X$  e  $Y$  sumergidos en un espacio  $Z$  son equivalentes si y solo si existe un homeomorfismo de  $Z$  en  $Z$  que transforma  $X$  en  $Y$ .

Ambos son problemas muy distintos, que además admiten variantes, equivalencia homotópica, isotopía, etc., extremadamente sutiles.

Si nos limitamos a la primera clasificación y para superficies compactas y conexas, es bien sabido que el grupo de Poincare (grupo fundamental) suministra un sistema completo de invariantes. De manera más precisa: el abelianizado del grupo fundamental de una superficie conexa compacta  $X$  es  $\mathbb{Z}^{2g}$ , si  $X$  es orientable y  $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2$ , si  $X$  es no orientable. Además, dos superficies son homeomorfas si y solo si los abelianizados de sus grupos fundamentales son isomorfos.

El número  $g$  se llama el género de la superficie; entonces, dos superficies orientables son homeomorfas si y solo si tienen el mismo género y lo mismo sucede con las no orientables. En particular, la única superficie compacta y conexa simplemente conexa (es decir, con grupo fundamental trivial) es la esfera de dimensión 2 (2-esfera).

De forma optimista podríamos intentar buscar un resultado similar para dimensión tres —es decir, buscar un sistema completo de invariantes para variedades topológicas tridimensionales—; pero el problema es enormemente más complicado y está lejos de ser resuelto. Para entender un poco más el grado de complejidad del problema, tratemos de imaginar cómo es la 3-esfera, es decir la esfera en el espacio de dimensión cuatro. Naturalmente cabe pensar en la 3-esfera como el conjunto de los puntos  $(x; y; z; t)$  del espacio real de dimensión 4 que verifican la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

Pero esto no da idea de su forma.

Una alternativa es recurrir a la proyección estereográfica; es decir, la proyección de la esfera desde uno de sus puntos (polo de la proyección) sobre el hiperplano tangente en el punto diametralmente opuesto.

Como la aplicación es un homeomorfismo de la esfera menos el polo sobre el hiperplano, la  $n$ -esfera sería el resultado de añadir al espacio de dimensión  $n$  un punto en el que se colapsaría todo el infinito, pero así solo se ven bien las esferas de dimensiones 1 y 2 para las que esta descripción no es tampoco necesaria.

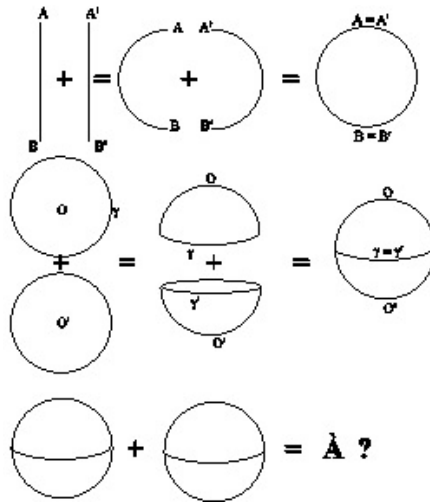


Figura 1.8. Suma topológica de dos segmentos. Suma de dos bolas.

La suma topológica de dos segmentos, identificando sus extremos, es una circunferencia, mientras que la de dos círculos identificando sus bordes es una esfera. ¿Se imaginan la suma de dos bolas identificando sus superficies?

Un método, que es más adecuado topológicamente (figura 1.8), es comenzar por la esfera de dimensión 0; es decir, los puntos  $+1$  y  $-1$  en la recta. Estos puntos limitan la bola de dimensión uno, que es el segmento de extremos  $+1$  y  $-1$ .

Pegando dos bolas de dimensión uno por su borde —es decir, el  $+1$  de la primera con el de la segunda y lo mismo el  $-1$ —, se obtiene topológicamente, tras una pequeña deformación, una circunferencia que limita el círculo o bola de dimensión 2. Pegando dos círculos por su borde, se obtiene una esfera que encierra una bola de dimensión 3. Pegando dos bolas por su borde —es decir, tomando dos esferas terrestres e identificando cada punto de la primera con el punto de la segunda con igual longitud y latitud—, se obtiene la 3-esfera.

La caracterización de la esfera de dimensión 3, similar a la dada para la de dimensión 2, que sería el escalón más sencillo en la clasificación de variedades de tres dimensiones, es la llamada conjetura de Poincaré: la 3-esfera; es conexa, compacta y simplemente conexa: cualquier lazo trazado sobre ella se puede contraer hasta cerrarlo en un punto). Poincaré conjeturó que estas propiedades son características de la 3-esfera; toda variedad de dimensión 3 conexa, compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera. La conjetura de Poincaré (1904) tiene una generalización natural: «Toda variedad topológica con los mismos invariantes (homología y grupo fundamental) de una esfera de dimensión  $n$  es a homeomorfa a ella».

Hemos visto la respuesta afirmativa a esta conjetura para  $n = 2$ , que era ya bien conocida en el siglo XIX. Para la dimensión 5, la probó Zeeman en 1961. También en este año, Smale lo hizo para la dimensión mayor o igual que 7 y, en 1962, Stallings para el caso  $n = 6$ . Pero hubo que esperar hasta 1986, año en que Freedman probó

la conjetura para  $n = 4$ , más aun proporcionó una clasificación completa de las variedades topológicas de dimensión 4 compactas y simplemente conexas por medio de dos invariantes.

Sin embargo, en su formulación inicial (para la 3-esfera), la conjetura de Poincaré solo ha sido probada en 2003 por Perelman. J. M. Montesinos tiene interesantes resultados en el problema general de clasificación de variedades tridimensionales, así como una conjetura que generaliza la de Poincaré y es más fina que otra generalización, la de Waldhausen, cuya falsedad probaron Boileau y Zieschang en 1984.

Entender las variedades diferenciales de dimensión 3 fue el trabajo de Thurston que le valió la Medalla Fields en 1982 y fue la primera revolución en la Geometría en baja dimensión. C. T. C. Wall, en la descripción de la obra de Thurston hecha con motivo de su Medalla Fields en el I. C. M. de 1982, observa que:

La topología en dimensión 3 tenía una fuerte tradición de técnicas de “manos desnudas” y relativamente poca interacción con otros temas. Tras la obra de Thurston los argumentos directos continúan jugando un papel importante, pero la topología 3-dimensional ha retornado a la corriente principal de las matemáticas.

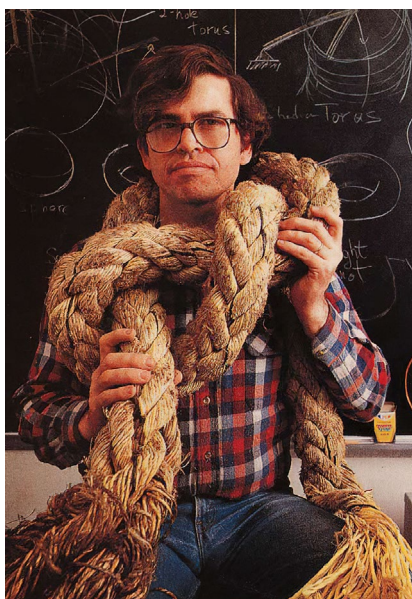


Figura 1.9. William Paul Thurston.

La idea básica del trabajo de Thurston es considerar el caso tridimensional como análogo al bidimensional, suponiendo que una clase muy amplia de variedades tridimensionales admite una estructura hiperbólica; es decir, son cocientes del espacio hiperbólico por grupos discretos de isometrías o, lo que es lo mismo, admiten una métrica de curvatura constante negativa. La prueba de esta conjetura para la clase

de variedades de Haken le permitió dar un teorema de estructura para las variedades diferenciales compactas en dimensión 3.

Para analizar la clasificación de acuerdo con el segundo criterio, nos encontramos con el problema natural de sumergir nuestras variedades en un espacio euclídeo: dada una variedad topológica (resp. diferenciable)  $X$  de dimensión  $n$ , averiguar cuándo y para qué valores de  $m$  existe una inmersión (resp. inmersión diferenciable) de  $X$  en el espacio  $\mathbb{R}^m$ . Y el mismo problema se puede plantear en los contextos analítico complejo o algebraico sobre un cuerpo cualquiera.

Vamos a analizar con más detalle este problema, no solo por su interés, sino también porque en puntos trascendentales del mismo aparecen nombres españoles. En los años treinta del pasado siglo, la topología se limitaba a estudiar casi únicamente subconjuntos muy especiales de espacios euclídeos, los complejos geométricos simpliciales, aunque Frechet había introducido los espacios abstractos en 1906. El punto, el segmento, la región plana limitada por un triángulo, la porción de espacio limitada por un tetraedro y, en general, el cierre convexo de  $p + 1$  puntos afinmente independientes, se llaman «símplices» de dimensión  $0, 1, 2, 3, p$ , respectivamente. El borde de un símplex está compuesto por aquellos de dimensión inferior, a los que se les llama «caras del símplex». Un complejo geométrico en  $\mathbb{R}^n$  es una colección finita  $K$  de símplexes de  $\mathbb{R}^n$ , tal que si un símplex está en  $K$ , todas sus caras están en esta; mientras que dos símplexes distintos de  $K$ , o bien son disjuntos o uno de ellos es una cara del otro o tienen una cara común. Se llama «dimensión del complejo» a aquella de uno de sus símplexes de dimensión máxima.

Es claro que un complejo geométrico está determinado, salvo su posición en el espacio ambiente, por la simple enumeración de los vértices de sus símplexes (caras 0-dimensionales). Así, se puede definir un complejo abstracto como una familia de subconjuntos  $\{s_p^j\}$  de un conjunto finito  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  cuyos elementos se llaman vértices del complejo. Cada uno de los  $s_p^j$  se llama símplex  $p$ -dimensional y está compuesto por  $p + 1$  vértices distintos; además, en el complejo abstracto figuran como símplexes 0-dimensionales todos los conjuntos  $\{a_i\}$  y todos los subconjuntos de un símplex son símplexes (llamados caras del primero). El máximo de los  $p$  se llama dimensión del complejo abstracto.

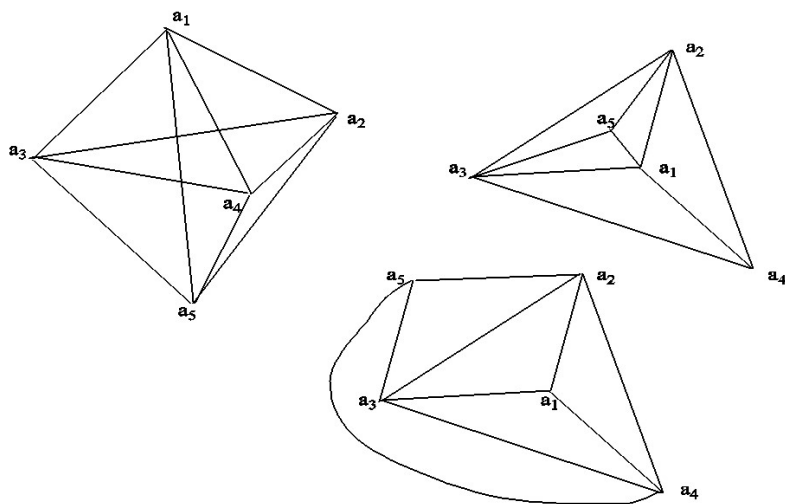


Figura 1.10. Doble configuración tetraédrica de Menger.

Se llama realización geométrica  $n$ -dimensional de un complejo abstracto a una aplicación inyectiva de su conjunto de vértices en  $\mathbb{R}^n$  que transforme cada símplice abstracto  $s_p^j$  en el conjunto de vértices de un símplice  $p$ -dimensional  $s_p^j$  de modo que la familia de los  $\{s_p^j\}$  sea un complejo geométrico.

Menger [82] y Nöbeling [90] demostraron en 1931 que todo complejo abstracto  $n$ -dimensional admite una realización de dimensión  $2n + 1$  y el primero dio un ejemplo de un complejo de dimensión 1 que no admite realización bidimensional. El complejo llamado «doble configuración tetraédrica» de Menger es:

$$\begin{aligned} & \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_5\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \\ & \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_4\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_5\}\} \end{aligned}$$

Son cinco puntos unidos dos a dos de todas las formas posibles. Es fácil ver que este complejo no admite una realización bidimensional, porque cinco puntos del plano no se pueden unir dos a dos sin que los caminos que los unen se corten. En el espacio tridimensional admite una realización aplicándolo sobre los vértices de dos tetraedros con una cara común.

Kuratowski propone otro ejemplo del mismo tipo. Dados seis puntos del plano divididos en dos grupos de tres, es imposible unir cada punto de uno de los grupos con los tres del otro sin que se corten las líneas que los unen (problema de las tres casas y las tres fuentes). Más aun, demuestra que todo complejo de dimensión 1 que no admite una realización bidimensional contiene uno de los dos ejemplos que hemos construido.

Menger y Nöbeling plantean el problema de si existe para todo  $n$  un complejo  $n$ -dimensional que no admite realizaciones de dimensión  $2n$ . La primera solución correcta del problema se debe al matemático español Flores de Lemus [47], quien fue capaz de dar dos familias de ejemplos, en todas las dimensiones, que generalizan los de Menger y Kuratowski.

Otro español, E. Lluís Riera [76], más de 20 años después, demuestra un resultado análogo para variedades algebraicas: toda variedad algebraica proyectiva de dimensión  $n$  admite una inmersión en un espacio proyectivo de dimensión  $2n + 1$  y existen variedades de dimensión  $n$  no sumergibles en un espacio de dimensión  $2n$ .

El paso del problema topológico al diferencial o al algebraico se complica más cuanto más compleja es la estructura añadida. La existencia de particiones de la unidad proporciona el método de prueba de Whitney, en el caso diferencial, y un método de proyección es el método de Lluís.

El problema de la inmersión está ligado a la posibilidad de hablar de forma de una variedad. En la geometría clásica, trabajando con subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , parece razonable hablar de un espacio que se curva o hablar de forma de un espacio; pero, con nuestro planteamiento, no tenemos un espacio ambiente. ¿Qué sentido tiene hablar de un espacio que se curva? Para comprender la solución de este problema volvamos de nuevo a nuestra fábula y esta vez tomándonos, si cabe, más libertades matemáticas que en la fábula anterior.

Imaginemos ahora una sola planaria llamada  $S$  situada en el centro de un círculo de cien pasos de diámetro.  $S$  avanza un paso hacia el borde, en cualquier dirección, y aunque ella no aprecia nada, nosotros observamos que su tamaño disminuye y lo hace en la cantidad precisa para que le sigan quedando 100 pasos hasta el borde y así pasa cada vez. Cuanto más se acerca al borde, se hace más y más pequeña, y aunque para nosotros se aproxima a salir del círculo, a ella le queda siempre la misma cantidad de camino. Su universo, acotado desde nuestro punto de vista, es para ella infinito.

Es fácil construir este universo, o precisamente uno un poco más complejo, pero con la misma propiedad. Basta definir una distancia en el círculo en la forma siguiente: si  $A$  y  $B$  están en el interior del círculo la recta  $AB$  corta a su borde en dos puntos  $C$  y  $D$ , se llama entonces distancia de  $A$  a  $B$  al logaritmo neperiano del valor absoluto de la razón doble:

$$[A, B; C, D] = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Con esta distancia, el interior del círculo tiene estructura de espacio métrico, el cual resulta muy interesante además porque de hecho es el modelo de Beltrami del plano hiperbólico. Las líneas de mínima distancia (rectas) son los segmentos de recta intersecados por el círculo y la geometría del círculo tiene las propiedades de la geometría euclídea, salvo las derivadas del célebre «quinto postulado» (por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a ella), que obviamente no es válido en el mundo de  $S$ .

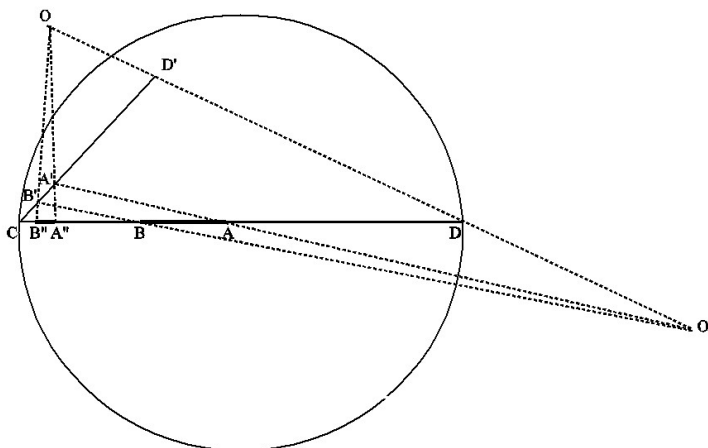


Figura 1.11. La distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  es la misma que la distancia entre los puntos  $A'$  y  $B'$ .

Como la razón doble es invariante por proyección, es fácil convencerse de que, tal como se puede observar en la figura 1.11, puntos próximos al borde, aparentemente más cercanos entre sí que puntos próximos al centro, están sin embargo a la misma distancia con nuestra métrica: la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  es la misma que la distancia entre  $A''$  y  $B''$ . Así, la distancia de cualquier punto del interior del círculo al borde es infinita. ¿Pero qué tiene que ver esta métrica con la forma?

Podemos repetir de nuevo nuestra fábula. Imaginemos dos rectas paralelas en el plano situadas a igual distancia a uno y otro lado de una recta  $r$  y tracemos una curva asintótica a ambas rectas y simétrica respecto a  $r$ , a continuación giremos la figura en torno a  $r$  construyendo así un cilindro de revolución con una superficie en su interior asintótica al cilindro. Supongamos que la superficie es transparente e iluminémosla con un foco en el infinito para que se proyecte en una pantalla ortogonal al cilindro.

Coloquemos ahora a  $S$  en el vértice de la superficie. En la pantalla veremos un círculo con  $S$  en su centro. Si ahora  $S$  se mueve en la superficie, su sombra se desplazará por el círculo, pero nunca llegará al borde, porque ahora  $S$  deberá recorrer una distancia verdaderamente infinita para que esto suceda. El hábitat de  $S$  tiene ahora nuestra métrica, pero tiene forma y el efecto es el mismo. Es decir, la forma no es sino una métrica distinta y cabe hablar de curvatura de la métrica en lugar de curvatura del espacio.

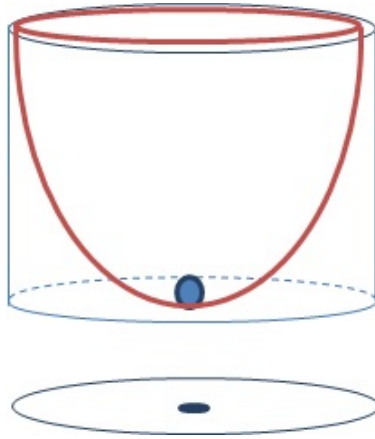


Figura 1.12. La superficie prolongable hasta el infinito se proyecta en el círculo que está acotado.

De un modo formal, podemos definir una métrica de Riemann en una variedad diferenciable como una familia de métricas en los espacios tangentes que varían diferenciablemente con el punto. La longitud de un arco de curva diferenciable se calcula integrando la medida de su vector tangente, mientras que la distancia se obtiene como solución de un problema variacional de mínimo de las longitudes de arcos que unen dos puntos. En particular, la métrica estándar de  $\mathbb{R}^n$  induce una métrica de Riemann en sus subvariedades. Schläfli [104] conjeturó que, dada una variedad diferenciable de dimensión 2 con una métrica de Riemann, aquella se puede sumergir localmente en  $\mathbb{R}^3$ , de modo que la inmersión sea una isometría, si se dota su imagen de la métrica inducida por la del espacio ambiente. La superficie imagen está curvada y la forma de medir en ella es la usual; así se puede considerar que hablar de métrica es una manera de hablar de forma. La conjetura de Schläfli fue demostrada por Janet y Cartán, pero subsiste el problema de la existencia de una inmersión isométrica global que, salvo en casos muy particulares, está abierto.

Durante mucho tiempo, los cosmólogos pensaron que la teoría de la relatividad general suministra suficiente información para conocer la geometría del espacio-tiempo, pero las ecuaciones de Einstein que relacionan la curvatura con la materia son de naturaleza puramente local y, para conocer la estructura global de nuestro espacio, necesitamos no solo conocer la curvatura, sino también tener información sobre la topología del universo. En un artículo reciente, Cornish y Weeks establecen de modo claro la situación actual de nuestro conocimiento del problema, aceptando como es habitual las hipótesis de homogeneidad e isotropía del universo.

Esta aceptación no es gratuita. En 1965, Penzias y Wilson descubrieron un resto de la «gran explosión» que dio origen a nuestro universo: una radiación de microondas a aproximadamente tres grados Kelvin a la que se denomina por sus siglas CMB. La isotropía de esta radiación permite suponer, a gran escala, que el universo admite secciones espaciales tridimensionales de curvatura constante; es decir que el continuo espacio-temporal es  $\mathbb{R} \times M$ , donde  $M$  es una de tres variedades de curvatura constante. La métrica en la sección  $M_t$  correspondiente a un instante  $t$  es producto de un factor de escala por la métrica estándar de curvatura constante.

Debemos pues describir las variedades de dimensión 3 de curvatura constante: 0 (modelo euclídeo), 1 (modelo elíptico) y  $-1$  (modelo hiperbólico). Con estas hipótesis, en los casos elíptico e hiperbólico, la topología determina completamente la geometría; es decir, al suponerse la curvatura constante, dos variedades elípticas o hiperbólicas homeomorfas son también isométricas, lo que no sucede con las euclídeas.

Volvamos por última vez al mundo plano, pero ahora a uno más parecido al nuestro: un universo bidimensional con un mundo circular en cuya superficie, la circunferencia, vive una planaria. El mundo está iluminado por un sol y el universo es un toro; por ejemplo, es el cociente del plano euclídeo por el grupo de traslaciones generado por las traslaciones de vectores  $(1; 0)$  y  $(0; 1)$ . Si el universo es lo suficientemente pequeño, la planaria vería su cielo tachonado de estrellas, todas ellas imágenes ilusorias de su sol, resultado de dar la luz vueltas alrededor del universo. La diferencia de las distancias aparentes a las estrellas produciría variaciones en su brillo que haría creer a la planaria que se trata realmente de estrellas distintas (claro está que un espectrómetro la podría sacar de su error).

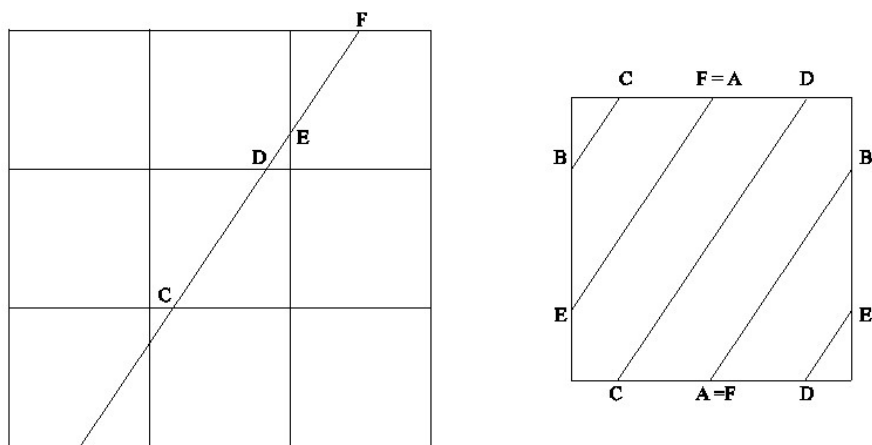


Figura 1.13. Un segmento en el toro.

Nuestro universo podría ser similar con una dimensión más; por ejemplo, en el caso de curvatura cero, podría ser un toro espacial resultado de identificar caras opuestas en un paralelepípedo. En un caso así y al igual que le pasaba a la planaria, cabría la posibilidad de que alguna de las galaxias que observamos fuera la nuestra, pero eso es

difícil de averiguar. Hay un experimento más fácil y que está ya en marcha basado en la CMB. En cierto sentido, la CMB contiene registros de la gran explosión: los fotones de la CMB se originan, según el modelo cosmológico que usamos, aproximadamente a los 300 000 años de la explosión: en un momento en que el universo completo está lleno de plasma que se condensa a gas. Así, esos fotones se originan en todos los puntos del universo y viajan isotrópicamente en todas direcciones. De este modo, los que llegan a nosotros en cada momento se han originado en una esfera que nos tiene por centro: la esfera de última emisión. Y lo mismo sucede para cualquier otro observador del universo.

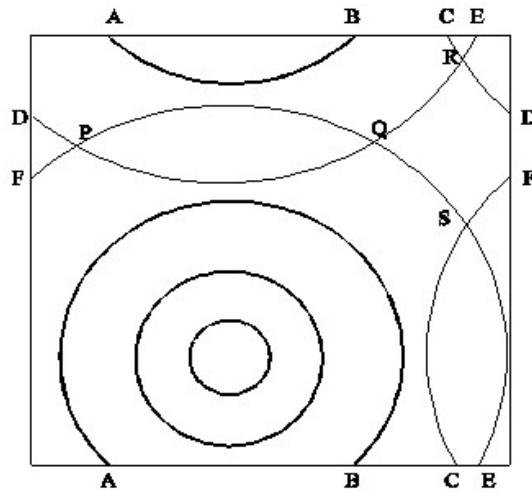


Figura 1.14. Universo bidimensional toroidal.

En un universo bidimensional toroidal, las circunferencias de última emisión se cortan en puntos, pero si les añadimos una dimensión más se cortarían en círculos. Actualmente se intenta detectar esos círculos, que de encontrarse determinarían la topología del universo.

Desde nuestro punto de vista, el mapa de la CMB presenta ligeras variaciones de temperatura de microondas. El mapa de la CMB correspondiente a otro punto del universo sería diferente; pero, a lo largo de la circunferencia intersección de las esferas de última emisión, ambos mapas serían iguales. Ahora bien, si el universo es finito, nosotros lo vemos como si ocupásemos distintas posiciones a la vez, solo que los fotones que nos alcanzan corresponden a esferas de emisión de distintas épocas, lo que motivaría la aparición de circunferencias en la CMB que serían identificables y nos darían una idea de la forma real de nuestro universo.

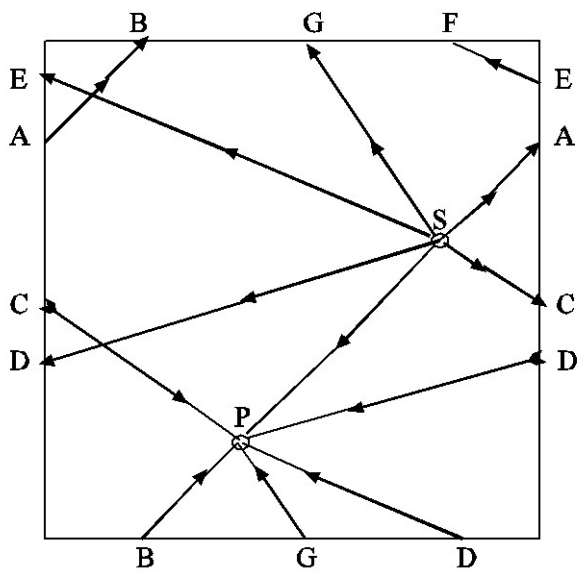


Figura 1.15. Los rayos solare llegan a la planaria  $P$  desde muchas direcciones.

## Capítulo 2

# Medida de la Tierra y geometría en los siglos XV y XVI

*A Luciano para que se anime a continuarlo*

[...] Pero de nuestro trabajo, del trabajo de nuestra orden y en particular del trabajo de este monasterio, es parte, incluso esencial, el estudio y la custodia del saber. La custodia, digo, no la búsqueda, porque lo propio del saber, cosa divina, es estar completo y fijado desde el comienzo en la perfección del verbo que se expresa a sí mismo. La custodia, digo, no la búsqueda, porque lo propio del saber, cosa humana, es haber sido fijado y completado en los años que se sucedieron entre la predicación de los profetas y la interpretación de los padres de la iglesia. No hay progreso, no hay revolución de las épocas en las vicisitudes del saber sino, a lo sumo, permanente y sublime recapitulación.

(Umberto Eco, *El nombre de la rosa*)

El objetivo de nuestro trabajo es presentar un panorama del estado de la Geometría y en particular de la geometría de la esfera, la más aplicable a la Geografía y la Astronomía, en la segunda mitad del siglo XV y en los albores del siglo XVI, restringiéndonos al ámbito europeo. El autor de estas líneas no es historiador, sino matemático profesional, y no espera que su punto de vista aporte resultados novedosos desde lo histórico, sino que su especialización profesional le permita entrar en terrenos que quedan fuera de las investigaciones historiográficas al uso.

Hemos procurado utilizar las fuentes originales, para lo cual contamos con el magnífico trabajo de instituciones como la Biblioteca Nacional Francesa (vía Gallica), la Biblioteca Universitaria de Sevilla o la fundación histórica Tavera, que, en una labor digna de encomio, proporcionan a la comunidad científica la posibilidad de acceso a sus fondos antiguos digitalizados.

## 2.1. Introducción

Nuestro estudio se sitúa en uno de los momentos históricos más importantes de la vida europea, el momento en que los horizontes del continente se abren de modo espectacular: por un lado, el geográfico con Colón; por otro, el cultural y científico con Gutenberg. El almirante nos dio un nuevo mundo físico, el impresor nos dio un nuevo mundo intelectual y las matemáticas experimentan gracias a ambos un impulso decisivo que, a partir de ese momento y durante seiscientos años, las convierten, en frase de Eric Temple Bell [11], en «reina y sierva de las ciencias».

Durante la Edad Media las matemáticas se hacían en China, India y los países árabes; además, hasta la primera mitad del siglo XV, no aparece el primer matemático europeo moderno, Regiomontano, del que hablaremos más adelante. Pero desde ese momento las matemáticas pasan a hacerse en Europa y crecen y se difunden a una velocidad muy superior, incluso a la de la época griega clásica.

A nuestro entender, la causa esencial de esta inflexión hay que situarla, además de en la confección del calendario, en el comercio, que hace imprescindible la Aritmética, así como la navegación, para la cual la Geometría es la ciencia primera.

La carencia de conocimientos geométricos del periodo medieval fue una enorme traba para el progreso de la navegación. Según escribía Fernández de Navarrete [43] refiriéndose al estado de la ciencia náutica en este periodo:

Es preciso confesar que las aplicaciones (de las matemáticas) fueron tan escasas y de tan corta consideración que no bastaron a inspirar la confianza necesaria para abandonar el método ordinario del cabotaje, que con frecuentes escalas o descansos en los puertos hacia sumamente lentas aventuradas y molestas las navegaciones. De lo cual nos ofrece muchos y lastimosos ejemplos la historia de la marina y del comercio marítimo de los españoles, y de otras naciones en estos siglos.

A continuación, cita algunos ejemplos, como el de una flota papal que sale de Puerto Pisano con rumbo a Mallorca y arriba en Blanes. Pero no se produce una geometría suficiente para resolver este problema, sino que es la difusión de las traducciones de los tratados griegos de geografía y astronomía lo que colabora de modo fundamental en el proyecto y los éxitos de los grandes viajes de exploración de los siglos XIV y XV.

Ciertamente también la imprenta juega un papel trascendental y lo hace por dos vías. Por un lado, una directa como medio de transmisión, porque aunque el tráfico de manuscritos en los siglos XIV y XV era enorme y circulaban numerosas copias y traducciones de los textos más interesantes, es precisamente la imprenta la que pone al alcance de todo el mundo las obras clásicas griegas, en una tarea de difusión que, según algunos autores, hace que el saco de Maguncia (1462) que desperdiga a los impresores por Europa sea en cierto sentido comparable, por sus efectos sobre la ciencia y la filosofía, con la caída de Constantinopla y la consiguiente dispersión de sus científicos y filósofos por el mundo.

Por otra parte y de modo indirecto, la imprenta impulsa la aparición de nuevos resultados. Se puede trazar perfectamente la línea que lleva desde el editor o traductor al comentarista del texto editado y de allí a la elaboración de aportaciones personales.

También tiene un papel de primer orden la aparición de las universidades. Durante la Edad Media, la Aritmética y la Geometría, como parte del *cuadrivium*, eran fundamentales entre las siete artes liberales que debían estar presentes en la formación de un hombre culto; pero en las nacientes instituciones universitarias comienzan a exigirse, cada vez en mayor cantidad, como requisito imprescindible para la obtención del título universitario, e incluso aparecen en ellas cátedras específicas de matemáticas.

Por ejemplo, en Oxford, en 1405, se exige para la graduación solo unas nociones de aritmética; pero, en una reforma de sus estudios de 1431, los niveles de exigencia de matemáticas necesarios para la concesión del grado eran ya considerables (Smith [108]), exigiéndose, por ejemplo, un dominio razonable de los *Elementos* de Euclides. Incidentalmente queremos señalar que el profesor Atiyah (premio Abél de 2002) explicaba que para su graduación en Oxford todavía se le exigió el conocimiento de los *Elementos*, en griego naturalmente.

Quizás deberíamos tomar ejemplo de este modelo de persistencia, cuyos resultados son obviamente mejores que los de nuestro sistema de perpetuos cambios de planes de estudio.

En París las matemáticas eran necesarias para la obtención del grado desde 1336, sin que se hiciera una mención explícita a la Geometría, pero una reorganización del currículo por un legado papal de 1458 exigía también el completo conocimiento de los seis primeros libros de Euclides e incluso requería de los candidatos a la maestría la presentación de un juramento solemne de que siguieron los cursos sobre los *Elementos* (Heath [59]). Euclides era lectura obligatoria en Viena (1365), Heidelberg (1386) y Colonia (1388). En Praga (1348) se exigía el tratado de la esfera de Sacrobosco, del que hablaremos más adelante. En Leipzig (1409) se dictaban cursos sobre los *Elementos*, aunque no eran obligatorios y no parecían ser muy populares, ya que cuando Regiomontano estudió allí era el único asistente a tales cursos.

En Salamanca, que se mantuvo siempre a la altura de las mejores universidades europeas, las primeras cátedras de la universidad correspondieron a las materias del *cuadrivium* y, como explica Fernández de Navarrete, a finales del siglo XVI se leía a Copérnico, Tolomeo, Peurbach, Regiomontano, Apiano, etc. Hay datos de que ya a mediados del siglo XV dictaba allí clases de matemáticas un tal Apolonio, maestro de Nebrija.

Pero no había solo factores favorables para el desarrollo de la ciencia. Por diferentes razones los científicos debían combatir con un ambiente no muy propicio al desarrollo de su tarea. Por ejemplo, D. Juan II mandó quemar en el claustro de Santo Domingo el Real los libros de matemáticas de su tío el Marques de Villena por ser «mágicos é de artes no cumplideras de leer». Comentando este episodio, escribe el padre Feijoo [42] en su *Teatro Crítico Universal*:

A un mero teólogo lo mismo es ponerle un libro matemático en la mano que el Alcorán escrito en la mano a un rústico. No es esto lo peor sino que a veces sin entender siquiera de que se trata, juzga que lo entiende. En el siglo en que vivió Enrique de Villena, apenas había un teólogo que abriendo un libro, donde hubiese algunas figuras geométricas, no las juzgase caracteres mágicos y sin más examen los entregase al fuego.

Se habla de la persecución a Galileo, pero se olvidan otros como Roger Bacon, condenado por brujería en la Inglaterra del siglo XIII, o Checo D'Ascoli, quemado por mago y hereje en 1328 a causa de un libro de comentarios sobre el *Tratado de la Esfera* de Sacrobosco.

Posteriormente, ya en 1589 y según cita Fernández de Navarrete [43], Pedro Simón Abril [2] achaca el atraso de la enseñanza de las ciencias a una serie de vicios de comportamiento, que explican las principales dificultades que se presentaban para el desarrollo de las matemáticas en la España y toda Europa en los siglos XV y XVI. Los más destacados de estos vicios, cuya presencia tendremos ocasión más adelante de poner de manifiesto en los textos de la época, eran los siguientes:

- Los científicos desdeñan comunicar sus doctrinas al público en la lengua vulgar, pareciéndoles más decoroso, más sublime y universal hacerlo en latín, siendo la latina, «lengua que leen pocos y menos la entienden».
- Los maestros no se contentan con lo propio y peculiar de cada ciencia; sino que, por una ostentación ridícula y mostrarse doctos en ciencias diferentes, mezclan las cosa de unas con las otras.
- «El desordenado deseo de adquirir con celeridad las insignias y grados escolásticos» lleva al estudio de compendios superficiales y al abandono de los textos clásicos de difícil comprensión.
- Las matemáticas dejan de estudiarse «por no ser doctrinas para ganar dinero, sino para ennoblecer el entendimiento: de lo que se sigue gran daño para la causa pública, ya que de su ignorancia se sigue mucha falta de ingenieros para las operaciones de guerra, de pilotos para las navegaciones y de arquitectos para los edificios civiles y de fortificación».

Las carreras más lucrativas y por tanto más seguidas en la época eran la teología, la jurisprudencia y la medicina, mientras que las matemáticas ya se miraban como un estudio abstracto y de pocas aplicaciones, aunque según Abril [2]:

Las matemáticas entre otros bienes habitúan el entendimiento de los hombres a buscar en las cosas la verdad firme y segura, sin dejarse bambolear de la inconstancia de las opiniones. Solo por esto no se habría de permitir á los hombres estudiar ninguna ciencia sin que antes aprendiesen las matemáticas.

Así, como señalábamos al principio de esta introducción, hasta el siglo XIV hay una decadencia progresiva en las matemáticas europeas, entendiéndose por tales a las hechas en la Europa «oficial», porque existen bastiones aislados donde esta decadencia

no se observa en absoluto, donde se traducen las obras clásicas griegas e incluso se producen nuevos avances científicos. Esta es la opinión de Becquer [10]:

La labor de los árabes y de los hebreos en España, no solo llena esa laguna que se advierte desde la publicación de las Tablas Alfonsíes, sino que permite afirmar que el final del siglo XIII y todo el siglo XIV lejos de constituir, como generalmente se ha creído, un periodo de decadencia de la labor geográfica, es el origen y el fundamento de toda la obra del siglo XV.

Queda fuera de toda duda la presencia de importantes aportaciones a la geometría aplicada hechas por los judíos, tanto teóricas (Ibn Verga, Zacuto, Poël) como de construcción de instrumentos, algunos de ellos utilizados por Colón. Recordemos, por ejemplo, el cuadrante judaico de Jacob ben Machir ibn Tibbon (Prophatius) (1236-1307) o el báculo de Jacob (ballestilla) de Leví ben Gershon (1288-1344). La invención de esta última algunos autores la atribuyen a Regiomontano o a Martín Behaim, pero este instrumento está descrito en un tratado de Ben Gershon traducido al latín por Pedro de Alejandría y dedicado al papa Clemente VI en 1342; además, es difícil pensar también que los judíos portugueses no conocían este tratado y que el introductor de la ballestilla en Portugal fue Martín Behaim.

Sin embargo, la tarea más reconocida de los científicos judíos de la época es la de puente entre la ciencia griega, asimilada y acrecentada por los árabes, y la sociedad cristiana mediante un enorme trabajo de traducción. Excluidos de muchas profesiones, aislados y perseguidos, los judíos buscaron refugio en el estudio, aunque muchas de sus obras perecieron en las hogueras de la Inquisición, no cabe duda de que sin ellos la ciencia europea de la época no habría sido viable.

Para hacernos una idea, señalemos que, solo en la obra de Zacuto [124] y en sus distintas versiones, se citan, según Becker [10]:

- 8 autores de traducciones y comentarios del *Almagesto*.
- 15 autores de estudios y comentarios sobre la esfera.
- 21 autores de estudios sobre los instrumentos de astronomía.
- 18 autores de tablas astronómicas.

Además, diversos estudiosos cifran el número de autores y traductores judíos de obras significativas en los siglos XIII y XIV en más de un centenar.

El trabajo de traducción sistemática de los tratados griegos y árabes no se limita a España, aunque casi siempre está conectado con este país, pues los traductores extranjeros más prolíficos y conocidos, como los ingleses Roberto de Chester y Adelardo de Bath, el italiano Gerardo de Cremona o el holandés Wilhelm de Moerbeke, se formaron en España. Dicho trabajo hace que haya que considerar, como piezas matemáticas de importancia en el periodo que nos proponemos estudiar, algunas de las obras clásicas de la geometría griega, sin las cuales resultaría imposible entender el punto de partida de la matemática europea del renacimiento. Ello motiva que la próxima sección de nuestro trabajo se centre especialmente en el *Almagesto* de Ptolomeo, que vivió en el siglo XV un redescubrimiento, en su verdadera dimensión

de tratado de Geometría, que permite considerarlo como la primera piedra de la geometría europea moderna.

## 2.2. Las traducciones: el *Almagesto* y los *Elementos*

No pretendemos extendernos en un estudio histórico de la matemática griega, ya que nuestro objetivo es estudiar su reaparición en el siglo XV, a veces por traducción directa de manuscritos griego más o menos bien conservados y a veces por traducción de traducciones árabes. De este modo, los libros no se publican en el siglo XV en el mismo orden cronológico en que vieron la luz más de mil años antes. Unas traducciones adquieren más popularidad y por tanto más difusión que otras, e incluso algunos de los textos fundamentales de la matemática griega no se publicaron en Europa hasta el siglo XVII. En esta sección nos ocuparemos simplemente de los dos textos griegos más influyentes en nuestra ciencia, los *Elementos* de Euclides y el *Almagesto* de Ptolomeo.

La matemática griega en sus dos exponentes fundamentales —Euclides o la geometría pura y Ptolomeo o la geometría aplicada— tiene un carácter atemporal. En nuestro tiempo, los *Elementos* o el *Almagesto*, pese a sus dos mil años de antigüedad, se pueden leer a la perfección, ya que están escritos en un lenguaje que la matemática de hoy sigue usando. Posiblemente, las matemáticas son la única rama del saber humano en la que esto sucede; lo que creemos que no pasa en ninguna otra «ciencia», en el sentido más amplio de la palabra. Smith [108], en pleno siglo XX, hubiera comparado ventajosamente los *Elementos* de Euclides, texto con veintidós siglos de antigüedad, con la geometría de los años treinta:

Euclides difiere solamente de nuestros modernos geómetras en la seriedad de sus objetivos, su deseo de ser riguroso y en detalles de tratamiento, como son: no usar la intuición como base de su lógica, no usar el álgebra como lenguaje, demostrar la corrección de sus construcciones antes de utilizarlas, no temer el uso de cantidades inconmensurables y no tener ejercicios en absoluto.

Tanto Euclides como Ptolomeo son grandes recopiladores y sistematizadores que acompañan resultados propios con los más interesantes de los matemáticos que los precedieron. El mayor interés de su obra no radica en este o aquel resultado, sino en la obra completa, en la integración en un todo armónico del conocimiento geométrico anterior, elevándolo a la categoría de ciencia.

La Geometría empieza con Euclides, la Astronomía teórica, con Ptolomeo. La estructura de sus obras esenciales es autocontenida, ambas comienzan con una axiomática que describe de modo indudable, por la enumeración de sus propiedades esenciales, sus sujetos de estudio y luego analizan, de modo exhaustivo y por aplicación de métodos lógicos simples, las propiedades derivadas de los objetos estudiados y las relaciones entre ellos.

El camino que lleva a la aparición de una nueva ciencia se aprecia claramente en estas dos obras. Hace falta contar con un número suficiente de observaciones que permitan abstraer resultados; a continuación, y este es un proceso de siglos, hay que

ordenarlos para, al admitir el mínimo de ellos como axiomas, deducir los restantes por aplicación de un razonamiento lógico.

Para que haya suficientes observaciones y datos sobre una categoría de objetos, hace falta que estos sean de uso o interés común y que haya medios adecuados de observación. Probablemente la insuficiencia de observaciones es la razón por la cual los *Elementos* dice muy poco sobre la esfera, aunque hay tratados cronológicamente anteriores que la estudian; por ejemplo, el de Autólýco e incluso el propio Euclides, al parecer, le dedica una de sus obras.

Lo que los *Elementos* contiene sobre la esfera está en los libros XI al XIII y se ciñe casi exclusivamente a intentar generalizar a poliedros regulares los resultados conocidos sobre polígonos regulares. Euclides define la esfera de dos formas: como el conjunto de todos los puntos del espacio situados a igual distancia de uno fijo (centro de la esfera), o como la superficie que se obtiene al girar una semicircunferencia en torno a la recta que la limita. Define los círculos máximos como las secciones de la esfera por planos que pasan por su centro; los diámetros, como los segmentos con extremos sobre la esfera y que pasan por su centro; y los polos de un círculo máximo, como los extremos del diámetro ortogonal al plano que lo contiene. Con estas definiciones prueba que:

- Dados dos puntos de una esfera no contenidos en un mismo diámetro, por ellos pasa un único círculo máximo.
- Un círculo máximo que pasa por los polos de otro lo corta en ángulo recto y el segundo también contiene los polos del primero.
- Dos círculos máximos se cortan siempre.

Pero Euclides no entra en el estudio de los triángulos esféricos —es decir, los triángulos definidos sobre una esfera por tres arcos de círculo máximo— y serán necesarios más de cuatrocientos años para que Menelao y luego Ptolomeo se interesen por este tipo de triángulos, fundamentales para la Astronomía y la Geometría.

Aunque la *Esférica* de Menelao fue traducida en el siglo XII del árabe al latín por Gerardo de Cremona, no tuvo ni la difusión ni la popularidad del *Almagesto*. Además, la *Esférica* no tiene en absoluto el carácter fundacional de la obra de Ptolomeo, que ya desde un principio fue objeto de comentarios y añadidos, como los también muy citados de Theon de Alejandría [115], que desde el punto de vista geométrico no aportan mucho a la obra original.

En el *Almagesto*, Ptolomeo [95] sigue el modelo de los *Elementos* de Euclides; pero, al contrario que este, no pretende hacer ciencia pura. Su geometría es aplicada y tiene sentido solo como instrumento; es decir, en cuanto es un modelo para la Astronomía. Así, y esto se lo reprochan algunos historiadores, renuncia a veces a probar un teorema general aplicable a varios casos particulares y prefiere estudiar uno a uno esos casos aunque sean prácticamente idénticos.

Como hemos señalado, Ptolomeo siente la necesidad de axiomatizar la Astronomía, siguiendo el ejemplo de Euclides; es decir, de describir un sistema formal que encuadre el modelo del cielo utilizado por sus antecesores. De este modo rompe con toda la obra

anterior en la que la Astronomía se mezclaba con la poesía y la mitología y escribe un tratado esencialmente matemático, preciso y riguroso que por estas características se convierte en un texto esencial, el más traducido y comentado, así como el menos comprendido, sobre todo en la época que estudiamos. A modo de ejemplo, citamos los axiomas primeros de Ptolomeo:

- El cielo es esférico y se mueve como una esfera girando en torno a un eje que pasa por su centro.
- La Tierra es sensiblemente esférica.
- La Tierra está situada en el centro del cielo.
- La magnitud de la Tierra es como la de un punto respecto a la esfera de las estrellas fijas.
- La Tierra, al contrario de los planetas, no tiene ningún movimiento de traslación.

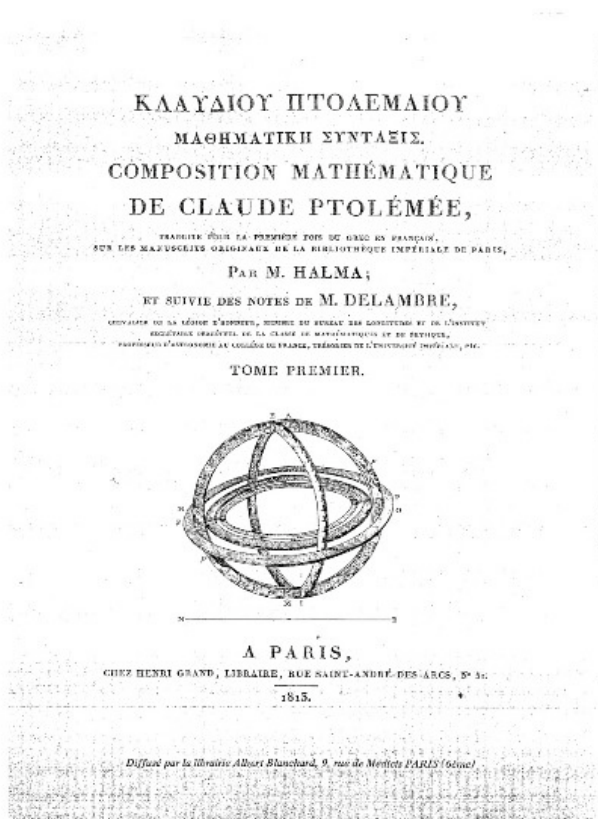


Figura 2.1. Portada de la traducción francesa del *Almagesto* por el abate Halma en 1813.

Partiendo de estos axiomas, Ptolomeo trata de integrar todas las observaciones antiguas, de las que disponía en enormes cantidades, en un modelo coherente. Para ello

debe desarrollar una nueva geometría: la geometría de la esfera. Aunque Ptolomeo disponía de resultados anteriores (Autólyco, Hiparco, Menelao e incluso el propio Euclides), al igual que pasó con Euclides y la geometría plana, resulta indudable que es el padre de la geometría esférica y el *Almagesto* su texto fundacional.

Tanto las referencias anteriores al *Almagesto*, como las que siguen, las tomamos de una traducción del griego hecha en 1816 por el abate Halma a sugerencia del matemático y astrónomo Delambre, que escribe unas esplendidas notas al final de cada uno de los dos volúmenes que conforman la traducción. Ambos, traductor y anotador, muestran por la obra de Ptolomeo un entusiasmo que hemos encontrado fácil de compartir, el cual se centra especialmente en los capítulos de geometría: «No podemos evitar reconocer una gran diferencia entre las demostraciones geométricas y las explicaciones que se le adjunta. Mientras que las primeras son claras y elegantes, las otras son oscuras y retorcidas».

Precisamente esas explicaciones son las que atraen a los matemáticos medievales y renacentistas, quienes las complican aún más y les añaden interpretaciones de su cosecha, atribuyendo a Ptolomeo lo que nunca escribió. Por ejemplo, ha quedado como idea comúnmente aceptada que Ptolomeo fija los astros a esferas sólidas y transparentes que giran con distintos ejes, pero como Halma observa:

Jamás Ptolomeo enseña una física tan grosera, la idea ridícula de estos orbes no es suya, son los astrónomos de los siglos de barbarie, físicos bastos y sin genio, los que llevan al cielo este absurdo físico. Los cristianos, judíos y mahometanos adoptaron como artículo de fe la opinión de Aristóteles de que las esferas celestes eran sólidas, opinión que fue rechazada absolutamente por Ptolomeo, que el capítulo 12 del libro XII del *Almagesto* dice expresamente que los astros nadan en un fluido perfecto que no opone ninguna resistencia a su movimiento.

El espíritu de la geometría de Ptolomeo es de una increíble modernidad. Hace falta llegar hasta el siglo XIX para que la geometría se independice de la medida y se descubra que hay una enorme cantidad de propiedades geométricas que se pueden probar reduciéndolas a enunciados simples por medio de proyecciones y secciones.

Ptolomeo se enfrenta al problema de trabajar sobre una superficie curva. Su método es reducir sus enunciados a enunciados planos mediante proyección; es decir, descubre la idea central de la geometría proyectiva dieciséis siglos antes que Desargues y aún hace más: se da cuenta que el invariante principal de las proyecciones es la razón doble y la usa sistemáticamente.

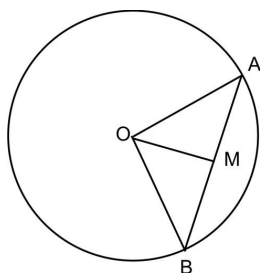


Figura 2.2

Para trabajar con arcos de círculo máximo en la esfera, Ptolomeo sustituye los arcos por sus cuerdas. En lenguaje actual (ver la figura 2.2), cambia cada arco por el doble del seno de la mitad del ángulo correspondiente. Desde el punto de vista teórico y para las demostraciones esto no es problema, pero Ptolomeo necesita cuantificar sus resultados, para lo cual precisa de unas tablas de cuerdas, es decir, unas tablas trigonométricas de la función seno.

Para la elaboración de esta tabla, los *Elementos* proporciona un punto de partida. Euclides da un método de construcción de los lados del pentágono y el decágono; es decir, las cuerdas de los ángulos de 72 y 36 grados. La figura 2.3 reproduce un fragmento de la traducción de Halma en la que, además del texto bilingüe, aparece el dibujo de esta construcción.

**COMPOSITION MATHÉMATIQUE, LIVRE I. 27**

ζωίας ἴχθω ἡ ΔΒ, καὶ τμηθῶσιν δὲ ἵσα ἡ ΔΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω εἰς ΕΒ, καὶ κείσθω αὐτῆ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω εἰς ΖΒ, λίγω ὅτι ἡ μὲν ΖΔ δικοσμοῦ ἴση πλιυρά, ἡ δὲ ΒΖ σιτακοῦ. Ἐπει γὰρ ἴσ-

AG, le rayon DB; soit DG coupée en son milieu au point E; joignez EB, et prenez EZ égale à EB; enfin, joignez ZB; je dis que ZD est le côté d'un décagone, et BZ celui d'un pentagone. En effet. puisqu'on a

Figura 2.3. Construcción de los lados del decágono y pentágono. C es el punto medio de DG, EB es igual a EZ, BZ es el lado del pentágono y DZ el del decágono.

La otra herramienta que necesita Ptolomeo es un teorema de adición que relacione las cuerdas de un arco suma de dos con las cuerdas de los arcos sumandos y este es el teorema conocido hoy por teorema de Ptolomeo: «En un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos».

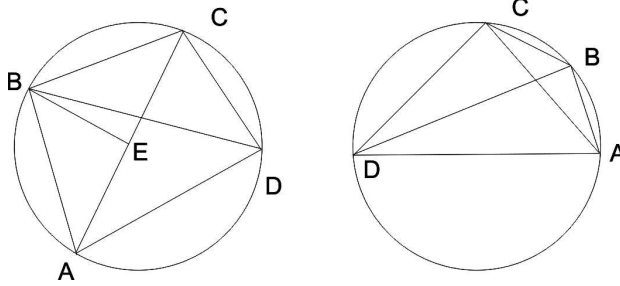


Figura 2.4. El teorema de Ptolomeo aplicado a un cuadrilátero que tiene por lado un diámetro permite calcular la cuerda del arco suma de dos.

Cuando el teorema se aplica a un cuadrilátero que tiene a un diámetro por lado (ver figura 2.4) se obtiene una fórmula para la cuerda del arco suma, que no es sino la que actualmente se usa para el seno de la suma de dos ángulos. En particular esta fórmula permite calcular las cuerdas del arco diferencia de dos y la del arco mitad de un arco dado; entonces, conociendo las cuerdas de los arcos de 72 y 60 grados, se calcula la del de 12 y de esta las de los arcos de 6, 3, 1.5 y 0.75. De estas dos últimas y por interpolación lineal, Ptolomeo calcula la cuerda del arco de un grado y, de nuevo por la fórmula de adición, las de todos los arcos de medio en medio grado.

Como la longitud de la cuerda es proporcional al radio, Ptolomeo usa un radio de 60 unidades y trabaja en base 60, de este modo tiene una base muy cómoda (60 es divisible por 2, 3, 4, 5 y 6) y obtiene cifras coherentes y comparables para arcos y cuerdas. En la figura 2.5 aparece una de las páginas de estas tablas en la versión bilingüe del abate Halma.

Una vez que dispone de las tablas de arcos, Ptolomeo tiene que usar diversos instrumentos teóricos para trabajar sobre la esfera. El más destacado de entre ellos es la llamada «regla de las seis cantidades», comúnmente atribuida a los astrónomos árabes, pero que no es sino el teorema de Menelao sobre la esfera.

38 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.							ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΕΥΡΑΩ ΕΓΓΡΑΦΩΝ.						
ARCS.		CORDS.			FRATTIONES DEI DIFFERENC.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΙΡΚΟΤΩΝ.			
Septis.	Min.	Part. du nom.	Part.	Seces.	Part.	Seces.	Septis.	Min.	Part.	U.	U.	U.	T.
0	30	0	51	25	0	1	3	50	δ	ε	ζ	η	θ
1	30	0	1	2	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
2	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
3	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
4	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
5	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
6	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
7	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
8	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
9	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
10	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
11	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε
12	30	0	1	3	0	1	3	50	α	β	γ	δ	ε

Figura 2.5. Tabla de cuerdas de Ptolomeo.

Este resultado ya aparecía en la *Esférica*, pero su prueba era incompleta y establece (ver figura 2.6) que, si se toma un cuadrilátero que tenga vértices *A, E, Z, D* y puntos diagonales *G* y *B* o, si se prefiere, si se cortan los tres lados del triángulo *ADG* por la recta, situado *EZB* y usando longitudes no orientadas, es:

$$BA \cdot ZD \cdot EG = BD \cdot ZG \cdot EA.$$

En el caso de un triángulo esférico, siempre limitado por arcos de círculo máximo y usando *Crd(2XY)* para designar la cuerda el arco doble del *XY*, la fórmula que se obtiene es:

$$Crd(2BA) \cdot Crd(2ZD) \cdot Crd(2EG) = Crd(2BD) \cdot Crd(2ZG) \cdot Crd(2EA)$$

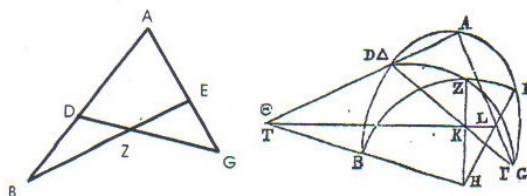


Figura 2.6. El teorema de Menelao en su versiones plana y esférica.

La razón de la aparición de los dobles de los arcos, vista desde nuestros conocimientos geométricos, es clara: se debe al hecho de que los arcos dependen de los senos de las mitades de los ángulos correspondientes. Pero Ptolomeo lo muestra geoméricamente de un modo impecable.

Considera dos círculos máximos sobre la esfera, los corta por otros cuatro con los mismos polos y trata de buscar una magnitud, en función de los cuatro puntos de intersección, que permanezca invariante. Es decir, tiene una situación análoga a la de cuatro rectas de un haz plano cortadas por otras dos que no pasan por el vértice del haz (figura 2.7). En este segundo caso, la razón doble de los cuatro puntos sección permanece invariante, es decir:

$$(AC/AD).(BD/BC) = (EG/EH).(FH/FG)$$

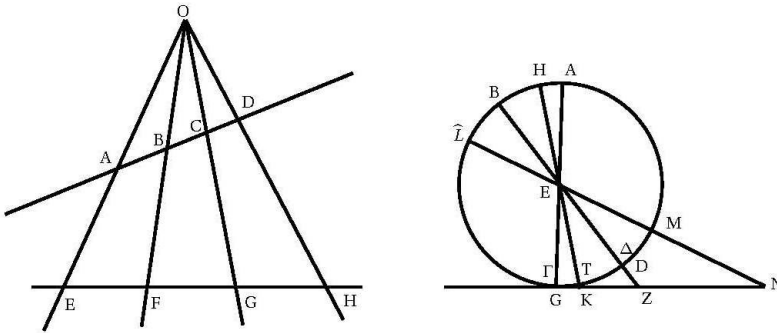


Figura 2.7. Invariabilidad de la razón doble por proyección y razón doble de puntos concíclicos según Ptolomeo.

Entonces, si como se ve en la figura 2.7, hay cuatro puntos  $A, H, B, \hat{L}$  sobre un círculo máximo, podemos definir su razón doble sin más que construir los  $G, K, Z, N$ —que son sus proyecciones desde el centro de la esfera sobre una recta cualquiera contenida en el plano del círculo— y calcular la razón doble de estos cuatro puntos. Esta razón doble es independiente de la recta elegida y es estable por proyección mediante círculos máximos con los mismos polos sobre otro círculo máximo, ya que proyectar así equivale a hacerlo usando un haz de planos con arista en el diámetro común a los círculos proyectantes.

De este modo, la razón doble de los cuatro puntos se calcula en función de los senos de los arcos limitados por ellos, que son las mitades de las cuerdas de los dobles de dichos arcos. Así, para Ptolomeo, el invariante fundamental de su geometría es la razón doble de cuatro puntos concíclicos, computable en términos de las cuerdas por la fórmula:

$$\text{Razón doble de } A, H, B, L = \left( \frac{\text{Crd}(2AB)}{\text{Crd}(2AL)} \right) \cdot \left( \frac{\text{Crd}(2HL)}{\text{Crd}(2HB)} \right)$$

Esta fórmula, junto con la invariabilidad de la razón doble por proyección, justifica el teorema de Menelao sobre la esfera, el cual es central en el trabajo de Ptolomeo, ya que le permite, por ejemplo, escribir la tabla de declinaciones del sol y calcular las ascensiones rectas y oblicuas (Febrer & Cabal [41]).

Creemos que lo mostrado de la geometría ptolemaica justifica sobradamente nuestro juicio sobre la increíble modernidad del *Almagesto*. El trabajo siguiente de

Ptolomeo consiste en usar estas fórmulas para resolver triángulos esféricos, es decir para, conocidos una cantidad de elementos (lado y ángulos) suficiente para determinar un triángulo, calcular en función de ellos los restantes.

En la resolución de este tipo de problemas, Ptolomeo no establece resultados generales, sino que va caso por caso resolviendo los problemas concretos necesarios para sus cálculos astronómicos, mezclando a menudo cálculos numéricos con teoremas y explicaciones reiterativas. El *Epítome* de Regiomontano [86] limpia estas demostraciones, pero en cambio hace perder a Ptolomeo su sabor a matemático aplicado, que a veces afirma que un resultado es aproximadamente cierto, con lo cual se adelanta de nuevo a su tiempo.

Debido a la extensión limitada de este trabajo, no podemos continuar escribiendo sobre Ptolomeo, por lo que abandonaremos aquí el *Almagesto* para pasar a comentar lo que dijeron de él sus exégetas medievales y renacentistas. Solo añadiremos dos cosas: primero, que el lector interesado tiene una buena descripción elemental de la obra de Ptolomeo en un reciente libro de C. Dorce [37]; y segundo, que no debemos pensar que el sistema geocéntrico fue complejo y poco práctico, condenado a la desaparición por el modelo copernicano. Sobre él hay que tener siempre presente lo que escribió Hoyle [60] en 1973, con motivo del quinto centenario del nacimiento de Copérnico:

Antes de Copérnico la teoría geocéntrica de Ptolomeo había cosechado más éxitos que la teoría heliocéntrica de Aristarco. Hasta Copérnico la experiencia fue justamente al revés. De hecho Copérnico tuvo que luchar muchos años antes de igualar a Ptolomeo, y al final su teoría no sobrepasó en mucho la de éste. Y lo digo sin intención de disminuir los logros de Copérnico, sino con el deseo de que el quinto centenario de su nacimiento proporcione una oportunidad al mundo moderno de rendir también tributo a la grandeza de Ptolomeo.

### 2.3. Los tratados de la *Esfera* de Sacrobosco a Regiomontano

El principal competidor de Ptolomeo durante toda la alta Edad Media y el renacimiento, así como fuente e inspiración de todos los restantes, es el inglés Johannes de Sacrobosco (1200-1256). Nacido en Halifax, su nombre, asociado a su lugar de origen (como era habitual), presenta varias versiones inglesas: John de Halifax, de Holyfax o de Holywood, además de latinas: Johannes de Sacrobosco, de Sacro Bosco o de Sacrobusto.

Sacrobosco estudió filosofía y matemáticas en París, donde se doctoró en 1230. Junto con su tratado sobre la *Esfera*, escribió otro sobre algoritmos y ambos gozaron de un enorme éxito que hizo que se multiplicaran sus versiones y traducciones, las cuales volvieron libro de texto en las universidades europeas hasta el siglo XVII.

Teniendo en cuenta el ambiente de su época, Sacrobosco, lo mismo que sus comentaristas posteriores, tiene un enorme mérito, ya que antes la Geometría y la Astronomía se consideraban próximas a la brujería.

Este hecho venía de de mucho antes. Los griegos establecían una diferencia, según explica Tannery [112], entre astrónomo (observador) y astrólogo (matemático); pero,

en el transcurrir del tiempo, la astrología-matemática deriva hacia lo que se llamaba en la Edad Media «astrología judiciaria» y que se conoce hoy simplemente por astrología (la adivinación en función de las posiciones de los planetas).

Algunos autores, como el célebre maestro Ciruelo [27], autor también de una edición comentada de la *Esfera* de Sacrobosco, defienden como plausible la astrología judiciaria [26]:

Por la influencia de los cielos y las estrellas, en los climas estaciones y mudanzas atmosféricas; y estas en las complexiones y humores de los hombres y animales, y en los árboles y plantas, los pronósticos de si un niño recién nacido, será de bueno ó de rudo siempre ciertos, son válidos. No lo es la presunción de que por los cielos y estrellas se juzguen cosas que no pueden ser efecto de ellas, como el acaecimiento de ciertos casos de fortuna o los secretos del corazón.

Pero el resultado es que las matemáticas quedan próximas a la brujería, con los efectos ya señalados, y que no se limitaban solo a acciones de gente sin cultura. Por ejemplo, a Michel Scot [107], coetáneo de Sacrobosco y autor de un tratado sobre la esfera en el que se limita a colocar frases unas a continuación de otras de autores griegos y romanos, Dante lo coloca en el infierno.

Paradójicamente, los verdaderos matemáticos quedaban más cerca de la herejía que los autores de horóscopos, lo que hace escribir a Raimundo Lulio [78]: «Heretge es aquell qui ha major temor de Geminis y Cancer que de Deu». Esto confiere, como señalamos, un valor complementario, casi el único, a los autores de los numerosos tratados sobre la *Esfera*.

Señalemos que hay un catálogo de más de doscientas versiones del *ubicuo Sacrobosco* (Boyer, [16]) y que la Biblioteca de la Universidad de Sevilla cuenta con una veintena de ellas. Aquí hemos elegido dos, las de Chaves [25] y Vineti [119], cuyas portadas aparecen en la figura 2.8. Ambas presentan el texto original acompañado de escolios o comentarios que lo aclaran convenientemente. Espigamos algunos de los enunciados de Sacrobosco y algunos de los comentarios, recordando que estos están escritos a mediados del siglo XVI, para que puedan compararse a lo que hemos dejado dicho sobre el *Almagesto*, teóricamente bien conocido en esa época.

El tratado de Sacrobosco consta de cuatro libros cuyos contenidos son los siguientes:

- El primero trata de la forma del mundo.
- El segundo, de los diez círculos que componen la esfera material, por la cual consideramos y entendemos la espiritual.
- El tercero, del orto, el ocaso, así como de los signos y la virtualidad de los días y de las noches, además de todas aquellas cosas que acontecen a los que habitan en diversos lugares de la Tierra y de la división de los climas.
- El cuarto, trata de los círculos excéntricos y epiciclos de los planetas, de sus propios movimientos y juntamente los de la octava y novena esfera, asimismo de las causas de los eclipses.



Figura 2.8. Portadas de dos versiones comentadas de la *Esfera* de Sacrobosco: una a favor por Jerónimo de Chaves (1545) y otra en contra, por Elias Vineti (1561).

Se puede apreciar, en el contenido del tratado, una clara pretensión de utilidad práctica. Samsó [102] señala que, en la Edad Media, la Astrología judiciaria y el calendario eran las razones de la utilidad de la astronomía para el poder político. Ambos extremos se recogen en este tratado que, al pretender explicar y adaptar el *Almagesto*, olvida toda la parte teórica, más difícil de entender, y se limita a dar una colección de afirmaciones más o menos gratuitas, escritas de modo confuso y enormemente premioso.

Para explicar la forma de la Tierra, Sacrobosco empieza definiendo una esfera, pero ni se reduce a la experiencia del lector, ni adopta una de las definiciones de Euclides, ambas escuetas y sobre todo precisas: «La esfera según los geómetras es un cuerpo de perfecta redondez, cuyos diámetros son todos iguales, así como es un globo hecho de piedra, de palo o hierro». No satisfecho con la claridad de la definición, intenta hacerla más comprensible:

Todo cuerpo perfectamente redondo, y que sea sólido, llaman los geómetras esfera: y para que sea perfectamente redondo requiérese que todos los diámetros, que se imaginan en el tal cuerpo sólido, sean iguales; porque de la manera que va el círculo en las figuras planas, así se va el cuerpo esférico en las figuras sólidas; y para que sea perfectamente círculo redondo se requiere que todas las líneas que se trazaren del centro a la circunferencia, sean iguales. Por lo cual en la esfera todos los diámetros deben ser iguales.

Como todo puede mejorarse, Chaves, en su primer escolio, complementa la definición con algunos toques eruditos:

Theodosio en un libro suyo de Esfera da una tal definición cual aquí aparece allegada por Johannes de Sacrobosco; cuya aclaración es tal. La esfera es un cuerpo sólido (es a saber pleno de unas mismas dimensiones) en el cual se da longitud, latitud y profundidad: porque de otra manera no sería cuerpo. Por lo cual consta evidentemente que en la definición de Euclides se ha de entender, que la circunferencia, juntamente con el arco causen esfera. Dice el texto, que este sólido ha de ser contenido debajo de una sola superficie: para dar a entender que ha de ser, y es, cuerpo perfectamente redondo, y no llano ni de otra forma, pues no tiene más que una sola superficie en cuyo medio está. Esto dice porque se dan muchos cuerpos redondos que no tienen más de una sola superficie; y decimos que los tales no son esferas, porque las líneas trazadas del centro a la circunferencia, no son iguales, según parece en los cuerpos ovals y en los que tienen forma de lenteja. Pues hablando propiamente; Esfera se ha de llamar aquella, que teniendo una sola superficie, y siendo perfectamente redonda, las líneas que se trazaren del centro a la circunferencia sean iguales todas.

Sacrobosco corre la misma suerte con sus enmendantes, cuando escribe: «Sphaera est tale rotundum et solidum, quod describitur ab arco semicirculi circonducto»<sup>3</sup>. Vinieti le aclara amablemente que no ha entendido a Euclides: «Quam autem ponit auctor, corruperant graecorum interpretes»<sup>4</sup> y que, al girar en torno al diámetro un arco de semicírculo, se esta girando una línea, de modo que se describe una superficie y no un cuerpo sólido.

Queda claro que Sacrobosco conocía la obra de Ptolomeo, probablemente a través de la traducción de Gerardo de Cremona de 1175; pues, aunque esta traducción no fue impresa hasta 1515, circulaba como manuscrito, lo mismo que otra posterior de Boecio. Esta última, según Montucla [84], usa los mismos caracteres para los números que aparecen luego en la obra de Sacrobosco. Pero no solo hay pruebas indirectas, Sacrobosco cita de manera directa a Ptolomeo cuando estudia las esferas necesarias para explicar los movimientos celestes, en especial la octava y su movimiento de trepidación, incompatible con un giro y que hace precisa la inclusión de una novena y hasta una décima esfera.

<sup>3</sup>«Una esfera es tan redonda y sólida que se describe girando un arco de semicírculo».

<sup>4</sup>«Pero lo que el autor escribió, lo corrompieron los intérpretes griegos».

Las razones de esta inclusión de nuevas esferas son confusas en Sacrobosco, que las adoba con datos sobre la composición de las mismas, lo que satisface a Chaves, quien añade otras consideraciones literarias:

Después que el autor trató de la región elemental, trata luego inmediatamente de la región etérea, en la cual nota cinco excelentes propiedades, las cuales son en ella muy de loar. La primera que como cosa más noble posee y tiene el más noble lugar que es el supremo según es parecer y sentencia de todos los filósofos. La segunda que es lúcida, en os cual excede a los cuatro elementos; pues no hay cosa tan preciada como la luz, la cual carece de contrario. La tercera que es ajena de toda variedad, corrupción, generación y alteración. La cuarta que siempre se mueve circularmente, a cuyo movimiento no hay otro que le sea contrario. La quinta propiedad y excelencia es ser de una inmixta substancia, la cual como a cosa excelente los filósofos llaman quinta esencia o quinto elemento.

Además, disgusta a Vineti que, con Aristóteles, niega rotundamente la existencia de ese quinto elemento.

Así son esencialmente todos estos tratados. Sus autores no han entendido nada de los métodos de Ptolomeo, pero usan algunos de sus resultados con una dialéctica escolástica metafísica y semibárbara, en palabras de Fernández Navarrete.



Figura 2.9. Razones de Sacrobosco para la esferidad de la Tierra.

Aún más, al leer los tratados citados, se comprende perfectamente la indignación del Brocense [103], que en la carta dedicatoria al marqués de Portocarrero de su tratado de la *Esfera* de 1579, escribe:

Sacro Bosco á cada paso se sale del propósito fuera de tiempo, yo ordeno con claridad y buen latín cuanto pertenece al arte: él parece que se propuso oscurecer los versos de los poetas, principalmente de Lucano. Yo he publicado esta obrita en obsequio de los poetas, tanto para que puedan entenderse con más facilidad los antiguos, como para preparar a los venideros el camino por donde puedan penetrar los arcanos del universo.

Hacen mal los que en la gramática tratan de filosofía y los que en la dialéctica y retórica introducen cosas insustanciales. Las artes se aprenderían con más facilidad y en menos tiempo si en la enseñanza de sus preceptos nada se ingiriese fuera de propósito y ajeno a ellas. Aquí presento la esfera reducida a arte y método, la que si un discípulo medianamente atento y activo no penetrase bien en unas ocho o diez lecciones, créame, habría nacido más bien para pastor que para hombre de letras.

Realmente el Brocense tiene razón. Su tratado contiene, en una treintena de páginas, lo sustancial de Sacrobosco, que no es mucho, y muestra que jamás debió pensarse en él como alternativa a Ptolomeo y su *Almagesto*. Aunque, al contrario de Sacrobosco, el Brocense parece pensar que el único interés de la Astronomía es de carácter literario.

Pasaremos ahora a hablar brevemente de lo que nos gustaría, del que sin duda fue el geómetra más importante de la época: Johann Müller (1436-1476) nacido en Königsberg y conocido por Montereio, Regiomontanus o Montano, que estudió en la universidad de Leipzig (desde los doce años) y luego en la de Viena bajo la dirección de Peurbach.

Para entender a Regiomontano hay que decir algo de su maestro: Georg Peurbach (1423-1469), cuya obra tuvo una influencia enorme en la suya. Peurbach fue autor de una buena versión de la parte astronómica del *Almagesto*, mucho mejor que las existentes inspiradas por Sacrobosco. La universidad de Sevilla cuenta entre sus fondos digitalizados con una edición de 1553 de esta obra [93], aunque en un inicio fue impresa por el propio Regiomontano en 1472. En la figura 2.10 presentamos la portada y una de las figuras de esta obra, en la que se presenta el movimiento excéntrico de un planeta que gira en torno a un punto  $A$ , mientras que la Tierra se encuentra en el punto  $B$ .



Figura 2.10. Portada del libro de Peurbach y una de las figuras iniciales de la teoría de circunferencias excéntricas.

Peurbach inició la tarea de dar una traducción latina completa y sin fallos del *Almagesto*, tarea en la que le sorprendió la muerte. Regiomontano completa el trabajo de su maestro y al hacerlo se da cuenta de la necesidad de sistematizar las matemáticas que utiliza Ptolomeo, librándolas al mismo tiempo de comentarios astronómicos. Para eso escribe su excelente *Epítome del Almagesto* [86] y sobre todo su obra maestra, que es el origen de la trigonometría actual, el *De Triangulis omnimodis* [87].

Estas dos obras están pensadas simplemente para ser una introducción al estudio del *Almagesto*. Hughes [61] cita una de las frases iniciales de la segunda: «Tú, que deseas estudiar grandes y maravillosas cosas y asombrarte con el movimiento de las estrellas, debes leer estos teoremas sobre los triángulos. El conocimiento de estas ideas te abrirá las puertas de toda la astronomía».

Lamentablemente, Regiomontano murió antes de ver la publicación de sus obras. *De Triangulis*, por ejemplo, no se publicó hasta 1533. Pero esta circunstancia no limitó en exceso su difusión, ya que circularon manuscritas y tuvieron una considerable influencia incluso antes de ser impresas (ver, por ejemplo, Zimmer & Brown [126]).

La biblioteca universitaria de Sevilla cuenta con una de las raras excepciones, fuera de Regiomontano, de un texto de la época que aporta algo adicional al contenido del *Almagesto*. Luca del Burgo (fra Luca Pacioli) [20], en un libro publicado en 1494, calcula una tabla de cuerdas; pero, en vez de utilizar el teorema de Ptolomeo para el cálculo de la cuerda del ángulo mitad, emplea otro método que creemos es de su cosecha. En la figura 2.11, aparecen su dibujo y su razonamiento, que él hace solo

en un caso particular: arco con cuerda de ocho unidades en una circunferencia cuyo radio es de cinco unidades. El método Del Burgo es el siguiente:

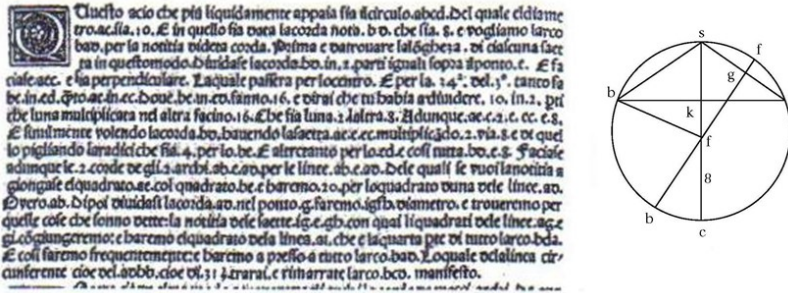


Figura 2.11. El método Del Burgo para el cálculo de la cuerda del arco mitad de un arco dado en función de la cuerda de este.

Dado un arco  $bsa$ , con cuerda  $ba$ , se trazan el radio  $fs$  ortogonal mediatriz de la cuerda  $ba$  y el radio  $fb$ , llamando  $k$  al punto de corte de  $ab$  y  $fs$ . Como el triángulo  $fk b$  es rectángulo en  $k$ , el teorema de Pitágoras proporciona el cateto  $fk$ . La diferencia entre el radio  $fs$  y  $fk$  da la sagita  $ks$  del arco  $bsa$ . Al aplicar de nuevo Pitágoras ahora al triángulo  $bks$ , del que conocemos dos catetos, nos da la hipotenusa  $bs$  que es la cuerda del arco mitad de  $bsg$ .

Este resultado tiene claras influencias del *Epítome*, en el que se encuentran proposiciones probadas por métodos similares. Aunque, al adoptar Regiomontano el teorema de Ptolomeo para la determinación de la cuerda del arco mitad, no aparece esta proposición concreta.



Figura 2.12. Teorema de Regiomontano sobre la partición de un arco en dos, cuyas cuerdas están en una proporción dada.

Por ejemplo, reproducimos uno de los teoremas de Regiomontano (figura 2.12), el que establece la relación entre dos arcos resultantes de dividir en dos partes un arco, cuya cuerda se conoce, de modo que las cuerdas correspondientes a esos dos arcos sean doble una de otra.

Rey Pastor [97] olvida a Regiomontano y cita elogiosamente a Del Burgo como codificador de la nueva matemática, frente a sus coetáneos que «brillan en la ciencia medieval y se encuadran, por tanto, perfectamente en el ambiente escolástico de la Universidad de París». Concordamos con él en esta afirmación, pero no en el papel que atribuye a Del Burgo que, desde nuestro punto de vista, es secundario respecto al de Regiomontano.

En su *De Triangulis*, Regiomontano parte, al modo de Euclides, de un sistema de axiomas y utilizando resultados de *Euclides* cuando los necesita, por lo que desarrolla su propia geometría del triángulo y una trigonometría basada en la función seno (el seno de un ángulo es la mitad de la cuerda del ángulo doble).

En otra de sus obras —una recopilación de tablas astronómicas de 1467—, incluye también una tabla de la función tangente, que fue una de las aportaciones de los matemáticos árabes (Nasir Eddin) a la geometría de Ptolomeo. En todos sus cálculos usa, para obtener la mayor precisión —ya que en ese momento no se manejaban los decimales como hoy en día—, radios enormes de 600 000 o incluso 600 000 000 unidades. La memoria de Zeller [125], el libro de Zimmer y Brown [126] y la traducción al inglés del *De Triangulis* (Hughes [61]) contienen comentarios interesantes sobre las repercusiones de la obra de Regiomontano que justifican sobradamente que muchos historiadores lo consideren el primer matemático europeo de la era moderna.

## 2.4. Jaume Ferrer y el Tratado de Tordesillas

Como final de este trabajo, quiero revisar un texto que escribí hace cierto tiempo sobre Ferrer [7], a la luz de la lectura que hemos hecho aquí de la obra de Ptolomeo y partiendo de la base de que tanto el *Almagesto* como la *Geografía* debían ser familiares para quien, como Ferrer, era un experto y reconocido geómetra y cartógrafo.

Leyendo el artículo sobre el tratado de Tordesillas del profesor Varela [117], podemos apreciar tanto la fama de la cual Ferrer gozaba en su época como el proceso seguido para el trazado efectivo de la raya de Tordesillas. En efecto, dicho artículo justifica, con las fuentes correspondientes, lo siguiente:

- La existencia de una carta del Arzobispo Mendoza a Ferrer del 26 de agosto de 1493, invitándolo, por encargo de los reyes, a dejar Italia y volver a Barcelona para tratar ciertos asuntos de cosmografía. Y Varela añade: «con la finalidad de disponer de otra opinión de persona reconocida dentro del campo de los investigadores y sabios de estas materias como, al parecer, era la de Jaime Ferrer».
- La convocatoria, en agosto de 1496, de un congreso en Segovia, con la participación de «conocedores en astrología y cosmografía», alumnos del maestro salmantino Gutierrez de Toledo y expertos ya presentes con los reyes, presumiblemente Ferrer.
- El envío de copias del tratado a diversos «hombres de ciencia», entre los que se citan a mosén Jordi Sanç, canónigo de Barcelona, y a los maestros Gererx y Casadevol, que emiten por carta opiniones sobre la realización práctica del tratado.

- El hecho de que, tras escuchar todas las opiniones, los reyes se dirigen exclusivamente a Ferrer, que en enero de 1495 les envía su propuesta de solución.

- La propuesta de Ferrer [46] que comentamos aborda el problema del trazado de la raya por dos métodos: el primero de carácter geométrico y el segundo basado exclusivamente en la experiencia de los hombres de la mar. El primero, que es el que nos interesa, aborda el problema de trazar un meridiano a 370 leguas, medidas sobre el paralelo correspondiente, al oeste de Cabo Verde de la forma siguiente:

- o Primero, reduce a grados en el paralelo 15 (y aquí ya hay un error porque debe ser el 16) las trescientas setenta leguas, resultado que luego no utiliza.
- o Segundo, rectifica el problema reduciéndolo a uno plano, resuelve el problema plano y traslada el resultado a la esfera.

Pero en ambas operaciones Ferrer manifiesta un desconocimiento total de la geometría de Ptolomeo, incompatible con su reputación de hombre de ciencia; aunque también revela un ingenio notable para obtener, de forma elemental y comprensible para los reyes, una solución aproximada al problema planteado, bien consciente de que, si era cierta la afirmación de Colón sobre la longitud de las tierras descubiertas, treinta leguas más o menos no tendrían ninguna importancia (de hecho, el posterior desplazamiento de la raya le dio la razón).

La propuesta de Ferrer contiene una prolija descripción de las unidades en uso en la época; es decir, las de Ptolomeo y las de los otros doctores: Strabo, Alfragrano, Ambrosi, Macrobi, Theodosi et Euristhenes, provocada por la diferente medida asignada al radio de la Tierra por Eratóstenes y Ptolomeo:

Tholomeos octauo libro «De situs orbis» dicit, Capitulo V. Que la recta circumferencia de la Tierra por el equinoccio es 180.000 stadios a razón de 500 stadios por grado, según su cuenta, y contando 8 estadio por milla son 22.500 millas que son 5.625 leguas a razón de 4 millas por legua, a cuenta de Castilla, viene por grado 15 leguas y 225 partes de 360 (5/8). Y en el mismo libro, Capitulo V dice que el cercle de los trópicos es 164.672 stadios que son 20.584 millas y leguas 5.146, viene por grado 14 leguas y 106 partes de 360. Preterea es la dicha circumferencia de la tierra 252.000 stadios según Strabo, Alfragrano, Ambrosi, Macrobi, Theodosi et Euristhenes, los cuales todos dan por cada un grado 700 stadios, los cuales 252.000 stadios a razón de 8 stadios por milla son 31.500 millas, y a 4 millas por legua son 7.875. Item por el cercle de los trópicos es la circumferencia 7.204 leguas y 82 partes de 180.

El comportamiento de los stadios, ahonque sea diuerso número del que pone Tholemeo, según lo que ponen los susodichos doctores Strabo, Alfragrano, Ambrosi, Macrobi, Theodosi et Eurísthene in essencia todo acude a un fin, porque el Tholomeo pone los stadios mas grandes, de manera que los suyos 180.000 stadios, son de los dichos doctores 252.000 por linea equinoccial como susodicho es.

Es decir, su idea, completamente acertada, es que la diferencia entre los resultados de Ptolomeo y Estrabón (o Eratóstenes) se puede considerar como un simple cambio de unidades y, para resolver su primer problema, aplica este; es decir, una regla de tres, en lugar de repetir el cálculo de Ptolomeo para determinar la longitud del trópico conocida la del ecuador: «Y fállase con la regla de tres diziendo, si 22.500 millas por el equinoccio, según Tholomeo, me dan 7.875 leguas por el dicho equinoccio, que me darán 20.584 millas que son por el cercle de los trópicos, y en esta forma fallaras las susodichas 7.204 leguas y media fere, según los dichos doctores».

Por otra parte, este último cálculo es, desde el punto de vista de Ptolomeo, un ejercicio trivial de trigonometría (el factor corrector entre las longitudes de los arcos de ángulos iguales del ecuador y de un paralelo de una cierta latitud es el coseno de la latitud; es decir, el seno de la colatitud, que es la mitad de la cuerda del arco doble de la colatitud), de modo que todo se reduce a buscar el dato en la tabla de cuerdas de Ptolomeo y multiplicar.

Sin embargo, Ferrer no lo hace así y, al calcular tanto la longitud en millas de un grado del trópico como de un grado el paralelo quince, comete errores, imputables posiblemente a los de su copia de Ptolomeo, porque parece tener claro lo que es una regla de tres. Una razón para pensar que su error se debe a los datos de partida —es decir, a los cálculos de Ptolomeo—, es la falta de coherencia entre los resultados de Ferrer para el trópico y el paralelo 15. Así, por la forma esférica de la Tierra, la velocidad de disminución de la longitud en leguas de un grado de paralelo es más lenta en las proximidades del ecuador; es decir, si Cabo Verde tiene una latitud de 15 grados y el trópico de 23 grados 30', los 8 grados 30' de diferencia de latitud entre ambos se deben reflejar en una pérdida de tamaño del grado entre los dos puntos mayor que la mitad de la pérdida de tamaño entre el ecuador y Cabo Verde.

Así sucede de hecho si se hacen correctamente los cálculos. Si el grado del ecuador mide 21,625 leguas (de las de Ferrer), el del paralelo de Cabo Verde debe medir 20,888 y del trópico, 19,83. Para Ferrer, estos valores son 21,625 en el ecuador, 20,625 en Cabo Verde y 20,01 en los trópicos, mientras que aquellos que atribuye a Ptolomeo son 15,66, 14,66 y 14,33.

Observemos que, si derivamos por proporcionalidad las medidas de Ferrer de las de Ptolomeo, el factor corrector motivado por la diferente longitud del estadio es de  $7/5$  (700 estadios de Ferrer por 500 de Ptolomeo para un grado del ecuador). Así, las 15 leguas  $2/3$  se transforman en 21,93; las 14 leguas  $2/3$  de Cabo Verde, en 20,53; y las 14 y  $1/3$  de los trópicos, en 20,06.

Estos errores pueden achacarse a que Ferrer hace primero el cambio de escala a toda la circunferencia, luego cambia varias veces de unidades y por último se reduce a un grado, despreciando decimales en todo el trayecto en lugar de trabajar con un grado de forma directa. De todos modos y teniendo en cuenta los medios de su época y la imprecisión de las técnicas de ayuda a la navegación, indudablemente compensadas por la experiencia y el conocimiento del medio, estos errores no pasan de ser una curiosidad.

En cuanto al procedimiento de determinación de la raya, se puede encontrar descrito en términos modernos en el artículo de Varela ya citado, así como en otro de Cerezo [23]. Obviamente, Ferrer no conocía las razones trigonométricas, por lo cual ese no pudo ser el procedimiento que siguió, pero como él mismo nos indica:

Y por mayor declaration de la regla susodicha, es de saber que la cuarta de viento que por su camino tomara la naue, partiendo de Cabo Verde al fin de las 370 leguas será distante del paralelo o línea occidental 74 leguas a razón de veynte por ciento, y porque la dicha quarta declina versus septeitrión nauegando por ella, manifesto parece la diferente eleuación del Polus mundi, y las dichas 74 leguas comprenden en latitud tres grados y un tercio fere.

Por tanto, el método de Ferrer no requiere razonamientos matemáticos, ya que es un hecho experimental fácilmente comprobable que, al caminar en línea recta en una dirección que forme un ángulo de una cuarta (11 grados, 25') con una recta dada, por cada cinco unidades recorridas, hay una unidad de desviación perpendicular a la recta que se recorre, de este modo se produce un aumento de latitud de 20 leguas por cada cien medidas sobre el paralelo; con ello, al final de las 370, estaremos a 74 leguas del paralelo de partida, que traducidas a grados son los tres y un tercio citados por Ferrer. La latitud del punto de arribada al meridiano deseado será entonces de 18 grados y un tercio; es decir, al alcanzar esta latitud, estaremos exactamente sobre el meridiano buscado.

El procedimiento de Ferrer se aparta absolutamente del que debía haber usado un conocedor del *Almagesto*: la resolución de un triángulo esférico rectángulo con un cateto sobre el arco de círculo máximo que pasa por dos puntos del paralelo 15 situado a 370 leguas uno de otro (medida sobre el paralelo) y el otro sobre un meridiano y con un ángulo de una cuarta es fácil; además, se puede calcular el segundo cateto —es decir, el incremento de latitud en el meridiano buscado— de forma inmediata. Aquí la substitución en la hipotenusa de la loxodromia por un arco de círculo máximo no supone salir de la geometría de Ptolomeo, puesto que hasta que la loxodromias o líneas de rumbo no fueron descritas en 1537 por Pedro Nunes, se la substituía por arcos de círculo máximo.

Ferrer supone plana la Tierra y resuelve un triángulo rectángulo con un cateto de 370 leguas y ángulo de una cuarta simplemente con una regla de tres. Con ello tiene también un error adicional; pero, en cambio, su método se puede explicar sin ninguna dificultad a cualquier profano, lo cual hizo que fuera preferido a una propuesta más precisa y geométrica como seguramente era la contenida en una carta del maestro Gererx, que no conocemos.

Estas observaciones, como hemos indicado anteriormente, no pretenden quitar mérito al método de Ferrer, sino por el contrario poner de manifiesto su enorme ingenio, que le permitió soslayar de modo extremadamente simple y muy preciso las dificultades de la determinación de la longitud, al menos en distancias cortas, creando además un método comprensible para cualquiera.

Continuando con los documentos de Ferrer[45], pasemos ahora a tratar de explicar sus aportaciones geográficas relativas al tratado de Tordesillas, con las cuales se le puede considerar un precursor de los trabajos cartográficos de Santa Cruz, Mercátor o Wright, al percibir que los arcos de igual amplitud de distintos paralelos comprendidos entre dos meridianos son diferentes y, por tanto, los meridianos deberían ser concurrentes en una representación cartográfica.

En una carta, titulada «D. Ferrando y Dona Isabel per Mossen Jaume Ferrer Letra feta als molt catolichs Reis de Espanva acerca lo compartiment que sas reals Altezas feren ab lo Rey de Portugal en lo mar Oceano» (Ferrer [45]), Ferrer no se refiere a la determinación de la raya, sino a las repercusiones territoriales de su desplazamiento. En la carta aparece el dibujo de la derecha de la figura 2.13, interpretado —a nuestro juicio acertadamente por Varela— como una representación esquemática del mapa descrito en el texto. Dicho mapa, hoy desaparecido, resultaba ser:

Una forma mundi en figura extensa en que podrán ver los dos hemisferios: conviene saber el nuestro Ártico y el oposito Antártico; y así mismo verán el circolo equinoccial y los dos trópicos de la declinación del Sol, y los siete climas, y cada uno de estos circolos puestos en su propio lugar según el tratado de la esfera, y en el situs orbis, los dotores mandan y comparten por grados: y porque mas claramente sea visto, la distancia de las dichas trescientas setenta leguas quanto se extiende por linea occidental, partiendo del dicho Cabo Verde, por eso yo he intersecado de Polo a Polo la dicha distancia con lineas coloradas, que en el equinoccio distan veinte y tres grados, y con ángulos agudos las dichas lineas corresponden a los Polos del mundo en esa figura: y todo el que será travesado de líneas amarillas será el que pertenece al Ilustrísimo Rey de Portugal la vuelta del polo Antártico: y esta distancia de mar termina las dichas trescientas setenta leguas que son veintitrés grados, como suso dicho es, partiendo del cabo Verde por línea occidental.

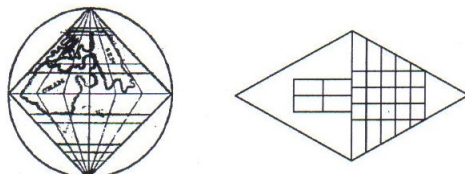


Figura 2.13. Dibujo de la Geografía de Ptolomeo y dibujo de Ferrer.

Se habla pues de los dos hemisferios Norte y Sur y no parece descabellado suponer que Ferrer podría utilizar para cada uno de ellos una proyección cónica, al estilo de Ptolomeo, como la que se presenta a la izquierda de la figura 2.12, tomada de la *Geografía* [96] en versión del abate Halma (1828). De hecho, el mapa de Contarini de 1506 utiliza esta representación desde el Polo Norte. Si Ferrer pretendía representar la Tierra para legos en la materia, no podía llevar una representación en la cual un punto (el Polo Sur) aparece transformado en una circunferencia y cosas muy próximas se presentan muy alejadas. Una razón más para pensar que este tipo de mapas no le eran ajenos es su afirmación en el segundo documento:

Y porque la carta de nauegar no sirve del todo ni abasta en la demostración mathematica de la regla susodicha es menester una forma mundi en figura espherica y en dos emisferios compartida por sus lineas e grados y el situ de la tierra, isla y mar cada cosa puesta en su lugar, la cual figura mundi yo dexo junto con estos capítulos de mi intension y parecer porque mas clara sea vista la verdad.

De modo que en el mapa deben figurar los dos hemisferios, los meridianos son líneas rectas que se intersecan en los polos y ambos hemisferios comparten sus líneas y grados. La que proponemos es la de la figura 2.14, en la cual se rectifica un trozo de ecuador y aparecen los climas tal como indica Ferrer. La parte interior del rombo limitado por los meridianos rectificados es lo que incrementa los territorios del rey de Portugal y el entramado de rayas puede tener otra función diferente que la de marcar el territorio.

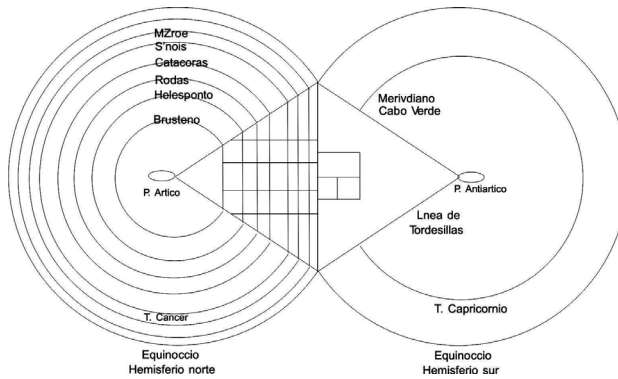


Figura 2.14. Interpretación posible de la carta descrita por Ferrer.

La distribución de estas líneas sugiere que pueden servir para justificar cómo varía con la latitud la longitud de un arco de un grado. Colón recurre a un artificio semejante en el mapa que envía a los reyes en su segundo viaje.

Creemos que las líneas anteriores justifican el interés de dedicar un tiempo a un trabajo más profundo sobre la repercusión real del *Almagesto* en los tratados de la *Esfera*, que a lo largo de cuatro siglos fueron la única expresión autóctona de la geometría europea, y a analizar las razones por las cuales se consideraban estos tratados como similares al *Almagesto*, fenómeno que no se produjo en las matemáticas árabes. Pero eso es otra historia.



## Capítulo 3

### Arte y matemáticas

*¿Hay matemáticas en el arte?  
¿Hay arte en las matemáticas?  
¿Hay arte?  
¿Hay matemáticas?  
¿Hay?  
¡Ay!*

Como inicio de este ensayo, en el que intentamos mostrar algunos puntos de cercanía entre dos zonas de la cultura tan aparentemente alejadas una de otra como el arte y las matemáticas, permítasenos mostrar con un ejemplo lo que a nuestro juicio más las distancia: las matemáticas se subordinan a la lógica, mientras que el arte crea su propia lógica, que se subordina a él.

Un periodista pidió en una ocasión a Albert Einstein que le explicara la razón por la cual uno y uno suman dos. ¿Por qué no uno más uno es igual a tres? Einstein le respondió: «Si se admite que uno más uno es tres, se puede demostrar cualquier cosa»; entonces lo desafió el periodista a que «pruebe que Mac Taggart es Dios». «Es fácil», dijo Einstein: «Si  $1 + 1 = 3$ , cómo obviamente  $1 + 1 = 2$ , es  $2 = 3$ , y restando una unidad a ambos miembros de la igualdad es  $1 = 2$ , luego Dios y Mac Taggart que son dos coinciden con Mac Taggart que es uno y Dios y Mac Taggart son necesariamente una sola persona».

La sujeción a la lógica es lo que hace que para las matemáticas decir que Dios y Mac Taggart son la misma persona es algo absurdo, tan como decir que uno y uno son tres; mientras que, para el arte, el que Mac Taggart sea Dios, o que uno más uno sea igual a tres, no solo no son afirmaciones absurdas, sino que probablemente son un punto de partida interesante para una manifestación artística.

Sin embargo, la necesaria subordinación a la lógica de las matemáticas les deja más libertad de la que puede parecer y el arte no es tan absolutamente libre como opinan los artistas.

A priori y antes de entrar en más detalles, no parece aventurado afirmar que:

- Siendo arte y matemáticas producción humana, deben reflejar en mayor o menor medida la naturaleza del hombre.

- Matemáticas y arte se producen en y para una sociedad y un tiempo determinados, luego la sociedad y el momento deben poder percibirse en ambas a un tiempo.
- Arte y matemáticas van dirigidas a un espectador que necesita de una preparación formal para apreciarlas y ambas desean ser apreciadas, luego su contenido está también determinado por el público común al que van dirigidas.

Para que se pueda entender bien lo que queremos decir con las frases anteriores, parece conveniente que expliquemos qué entendemos por arte y qué entendemos por matemáticas. Ahora bien, como matemático profesional, tengo una idea perfectamente clara sobre las matemáticas y, por tanto, no siento necesidad de explicar, o explicarme a mí mismo, en qué consiste esa compleja ciencia. Por el contrario, dado que en materia de arte soy un simple aficionado, he sentido la necesidad de saber qué es lo que entienden por arte los especialistas.

He dedicado muchas horas a tratar de averiguarlo y no es que con ello haya aclarado mucho mis ideas; por el contrario, he alcanzado un estado de asombrosa perplejidad y me gustaría hacer partícipes del mismo a mis lectores, con la idea de que puedan admitir que, si todo vale en arte, incluso las matemáticas tienen una pequeña posibilidad de aparecer allí.

### 3.1. En donde el autor intenta averiguar qué es el arte

No cabe duda que en la sociedad en la que vivimos las matemáticas son una garantía de seriedad para cualquier rama del saber, lo cual se traduce en una tendencia cada vez más acusada a la formalización, que hace que cualquier texto comience con una serie de definiciones y plantee sus resultados a modo de teoremas. Alguna vez hemos recordado la definición de ladrillo sacada de uno de los textos de uso, hace bastantes años, en la Escuela de Arquitectura de Madrid: «Un ladrillo es un ente cerámico, prismático, de barro cocido susceptible de ser manejado con una sola mano».

Dicha definición es tan surrealista como innecesaria porque todos sabemos lo que es un ladrillo. Pero, ¿sabemos todos lo que es el arte? y no me refiero a si podemos dar una definición que caracterice el arte, sino a algo más simple: si es posible dar condiciones suficientes para decir «esto es arte». Porque, si no es posible, malamente podemos averiguar si en el arte hay matemáticas.

Por la misma razón, debemos precisar si el arte está en el artista, en el objeto que este produce (si dicho objeto es perceptible) o en los observadores. La respuesta a esta pregunta condicionará todo nuestro trabajo. Como sería exceso de atrevimiento por nuestra parte el tomar decisiones en tan espinoso tema, vamos a remitirnos a las autoridades competentes y para ello pasaremos, en forma breve y forzosamente imprecisa, sobre algunas de las definiciones, explícitas o implícitas, de arte que pueden encontrarse en la literatura sobre estética.

Uno de los libros más citados en este campo y que, leído en mi juventud, fue probablemente una de las razones que hizo que me decantara por dedicarme a las matemáticas, es el *Breviario de estética* de Benedetto Croce [29]. Hablaremos después de la idea de arte como intuición que defiende este autor en su libro; pero antes, para justificar la perplejidad de que hablaba en la introducción y comenzar esta sección de

manera adecuada, citaremos la respuesta de Croce a la pregunta de si el arte es un fenómeno físico:

Si se nos pregunta la razón por la cual el arte no puede ser un fenómeno físico responderemos en primer lugar que los hechos físicos no tienen realidad, mientras que el arte, al cual tantas personas consagran por entero su vida y que a todos nos llena de una alegría divina es sumamente real, de modo que el arte no puede ser un fenómeno físico porque todo fenómeno físico es irreal.

No hay que interpretar literalmente este texto. Croce, desde un punto de vista neoplatónico, considera los fenómenos físicos como construcciones de nuestro intelecto y producto de principios que escapan de nuestra experiencia, pero en cambio disiente de Platón al considerar el arte como real.

Precisamente es a Platón a quien los teóricos del arte adjudican la primera definición formal del mismo: «El arte es imitación». Esta condición necesaria, aunque no suficiente, para caracterizar la obra artística hace que el arte sea aun menos real que los fenómenos físicos, que no son sino objetos del mundo de los sentidos sujetos a cambio permanente y meros reflejos de las formas del reino ideal eternas e inmutables. Como escribe Borges [15]: «Por ejemplo la Mesidad, o Mesa Inteligible que está en los cielos: arquetipo cuadrúpedo que persiguen condenados a ensueño y frustración todos los ebanistas del mundo».

De este modo, para Platón, un dibujo de una mesa es menos real que la mesa misma, ya que es una imitación de esta, que a su vez es un reflejo de la mesa ideal. Sin embargo, Dickie [35] propone, dentro de la línea platónica, un camino más directo: el arte es una imitación de la «forma del arte». Así, el arte es tan real como los objetos físicos. Sin embargo, probablemente por falta de conocimiento por mi parte, no he podido encontrar referencia a que el arte cree nuevos arquetipos. A mi entender, la *Paloma* de Picasso es tan arquetípica como la forma: Paloma.

Kant [69], lo mismo que luego Croce, define arte en su *Crítica del juicio*, explicando lo que no es o precisamente en qué se distingue el arte de la naturaleza, la ciencia y el oficio:

Arte se distingue de naturaleza como hacer de obrar o producir en general, y el producto a consecuencia del primero, como obra, de la segunda, como efecto. Según derecho debiera llamarse arte sólo a la producción por medio de la libertad, es decir, mediante una voluntad que pone razón a la base de su actividad. Arte, como habilidad del hombre, distínguese también de ciencia, como facultad práctica de facultad teórica, como técnica de teoría; y entonces lo que se puede hacer, en cuanto sólo se sabe qué es lo que se debe hacer y así sólo se conoce suficientemente el efecto deseado, no se llama precisamente arte. Cuando, a pesar de conocer algo lo más completamente posible, no se tiene la habilidad de hacerlo, entonces, y en tanto que ello es así, pertenece eso al arte. También se distingue el arte de oficio; el primero llámase libre, el segundo puede llamarse arte mercenario. El primero no puede alcanzar su finalidad más que como juego, es decir, como ocupación que es en sí misma agradable, y el segundo se considera como trabajo, ocupación que es en sí misma fatigosa y solo es agradable en cuanto a su efecto (la ganancia esperada).

Esta última distinción kantiana parece estar reñida con el arte actual. No creo que la idea de ganancia en una u otra forma este lejos de los artistas. Así, por ejemplo, recuérdese el célebre anagrama *Avida dolars* o que no parece probable que Salvador Dalí sea el único que ha cometido el «pecado» de interesarse sobre todo por el precio de su obra.

No entraremos en las ideas de Hegel y sus seguidores durante la segunda mitad del siglo XIX, para quienes el arte es una manifestación sensible de la idea, una realidad específicamente humana, un producto individual, pero siempre en conexión con la realidad. Al idealismo de Hegel y la escuela de Viena se opone el formalismo de Herbart, que casi convierte el arte en una teoría matemática. Su seguidor H. Taine [110], cambia el punto de vista clásico, centrado en el binomio autor-obra, para considerar la obra de arte no como un hecho aislado, sino como una parte de la producción íntegra de su autor, que no actúa por sí solo, sino integrado en una escuela o grupo de aristas de un tiempo y país determinados. Así, el arte es, en cierto sentido, consecuencia natural e inevitable de la situación geográfica y social, mientras que el artista genial es paradójicamente el que sabe situarse más cerca de la media, ya que es el mejor representante de su escuela. De esta forma, las circunstancias sociales tienen un papel clave en la producción de la obra de arte, pero este papel no se reconoce en su interpretación y valoración. El arte lo es por sí mismo, no por el espectador.

Volviendo a Croce, el arte para él es intuición y el significado de intuición es la negación del concepto. El conocimiento intuitivo y sensible se contraponen al conceptual o inteligible. En esta definición sigue directamente a Kant [69], que afirma: «Bello es lo que agrada universalmente sin concepto». Para Croce: «El arte es visión o intuición. El artista produce una imagen o fantasma, y el que gusta del arte dirige la vista al sitio que el artista le ha señalado con los dedos, ve por la mirilla que éste le ha abierto, y reproduce la imagen dentro de sí mismo».

A la manera de Kant, pero con más detalles, dedica treinta páginas a explicar lo que no es el arte. Para nuestro trabajo, son especialmente interesantes las páginas que dedica a matemáticas y arte. Para Croce, «el artista no cree ni deja de creer en su

obra, la produce simplemente». En eso, y al contrario de lo que él opina, la actitud del matemático hacia su obra es esencialmente la misma. Al contrario que Taine, quien pretende aplicar el lenguaje científico a un arte en que ve especies y categorías, para Croce matemáticas y arte son incompatibles y reniega de la célebre frase de Leibniz (1698), quien define la música como «un ejercicio inconsciente de aritmética»:

El concepto de arte como intuición excluye la concepción de arte como producción de clases, de tipos, de especies y de géneros y también excluye la concepción del arte, como hubo de decir un gran matemático y filósofo, como ejercicio de aritmética inconsciente, o, lo que es igual distingue el arte de las ciencias positivas y matemáticas, porque en éstas se da la forma conceptual, aunque privada del carácter realista, como mera representación general o mera abstracción.

Los matemáticos renuncian al pensamiento concreto mediante una generalización o una abstracción, que son decisiones volitivas, actos prácticos y, como tales, extraños al mundo del arte y adversarios de él. Croce no alcanzó a ver que, en nuestra época, se ha perdido el espíritu práctico en muchas partes de la matemática y que, si bien podría interpretarse que el matemático trata de «hacer por algo» (la ganancia económica de la que hablaba Kant en la distinción entre arte y artesanía), en la mayor parte de los casos su obra es un «hacer por hacer» más próximo al juego y por tanto al arte.

En resumen, para Croce el arte es intuición sin concepto y no hay nada más alejado que poesía y matemáticas, ya que ambas son cosas tan poco de acuerdo como el fuego y el agua: «el esprit mathématique es el enemigo declarado del esprit poétique». Pero, de la misma forma que Croce ataca el «formalismo herbartiano», Adorno [3] ataca la propuesta de Kant hecha suya por Croce:

El arte se opone al concepto, pero para esa oposición necesita, (igual que la filosofía) a los conceptos. Su presunta intuitividad es una construcción aporética: con un golpe de varita mágica (Kant) intenta convertir en identidad los elementos dispares que se pelean entre sí en las obras de arte, y por eso rechaza las obras de arte, que no conducen a esa identidad.

La intuitividad no es una característica universalis del arte. Es intermitente. Los estéticos apenas se han dado cuenta de esto; una de las pocas excepciones es el olvidado Theodor Meyer, que demostró que a los poemas no les corresponde una intuición sensible de lo que dicen y que la concreción de los poemas consiste en su figura lingüística y no en la impresión óptica que han de causar.

En la próxima sección exhibiremos algunas obras de poetas que no están muy de acuerdo con Meyer. En todo caso, y en nuestra opinión, no está tan claro que el arte esté lejos de las matemáticas y no nos referimos a su uso en la obra, sino a su presencia, no necesariamente consciente, en ella. Para Gombrich [51], por ejemplo, la tarea del artista no consiste en copiar, sino en traducir lo que percibe. Así, el pintor no pinta lo que ve, sino como mira y una vez terminado el cuadro puede compararlo con su percepción. De este modo, conceptos de contenido matemático —como la simetría, entendida en su sentido más amplio, o las sucesiones de Fibonacci— están presentes en muchas obras de arte sin que su autor las haya usado intencionadamente.

Hablaremos después de la controversia sobre el carácter fractal de la pintura de Pollock (curiosamente anterior al descubrimiento de las estructuras fractales).

Al igual que para Whithead, para quien «geometría es lo que dicen los geómetras que es geometría», para Gombrich [52] el arte es lo que hacen los artistas:

No existe, realmente, el arte, tan solo hay artistas. Estos eran en otros tiempos hombres que cogían tierras coloreadas y dibujaban toscamente la forma de un bisonte sobre la pared de una cueva, hoy compran sus colores y trazan carteles para las estaciones del metro. Entre todos, unos y otros, han hecho muchas cosas, no hay mal en llamar arte a todas estas actividades.

Hasta ahora no nos hemos movido del binomio autor-obra admitiendo, en mayor o menor medida, el influjo de la circunstancia del autor en la obra que produce. Son los teóricos del arte americanos de los últimos años los que hacen intervenir la circunstancia directamente en la obra e incluso hacen depender el carácter artístico o no artístico de una producción solo de su repercusión en el medio. Haremos referencia a dos de ellos: Arthur Danto y George Dickie, autores respectivamente de la «teoría de los indiscernibles» y la «teoría institucional del arte».

La teoría de los indiscernibles [30] se basa en el experimento siguiente. Consideramos cuatro objetos visualmente indistinguibles: cuatro corbatas idénticas pintadas de verde con la misma pintura:

- La primera es una corbata pintada de verde por Picasso.
- La segunda una corbata pintada de verde por un imitador de Picasso.
- La tercera una corbata pintada de verde por un niño.
- La cuarta una corbata pintada de verde por Cézanne.

Para Danto, solo la primera corbata es una obra de arte: «Porque supone una declaración, en parte acerca de la realidad y en parte acerca del arte, lo suficientemente penetrante para permitir su propia emancipación en el mundo del arte». Las otras tres son simplemente objetos reales, corbatas pintadas de verde pero no obras de arte. La del imitador es una simple cita de la declaración de Picasso, el niño no tiene la suficiente entidad intelectual para hacer una declaración de este tipo y, en las circunstancias espaciales y temporales de Cézanne, la declaración que supondría la corbata verde está absolutamente fuera de contexto.

Este experimento de Danto, que hace ver que la diferencia entre un objeto y una obra de arte puede ser no perceptible, no es completamente nueva. Al leerla viene a la memoria el espléndido cuento-ensayo de Borges [14], «Pierre Menard, autor del Quijote», uno de cuyos párrafos no me resisto a reproducir:

Es una revelación cotejar el Don Quijote de Menard con el de Cervantes. Este, por ejemplo, escribió: .... la verdad, cuya madre es la historia, émula del tiempo, depósito de las acciones, testigo de lo pasado, ejemplo y aviso de lo presente, advertencia de lo por venir

Redactada en el siglo XVII, redactada por el «ingenio lego» Cervantes, esta enumeración es un mero elogio retorico de la historia. Menard en cambio escribe: ... la verdad, cuya madre es la historia, émula del tiempo, depósito de las acciones, testigo de lo pasado, ejemplo y aviso de lo presente, advertencia de lo por venir.

La historia, madre de la verdad; la idea es asombrosa. Menard contemporáneo de William James, no define la historia como una indagación de la realidad, sino como su origen. La verdad histórica para él, no es lo que sucedió; es lo que juzgamos que sucedió. Las cláusulas finales —ejemplo y aviso de lo presente, advertencia de lo por venir— son descaradamente pragmáticas.

Independientemente de su idea del arte como declaración, que presupone que la obra de arte debe referirse a algo —afirmación de aplicación bastante discutible para mucho de lo que hoy se considera arte—, en el experimento de Danto se pone de relieve el hecho, ahora comúnmente aceptado, de que el carácter de obra de arte depende de circunstancias ajenas a la obra, que pueden o no tener algo que ver con su autor.

Dickie [34] va aún más lejos en su teoría institucional del arte, buscando una autentica definición de arte; es decir, condiciones necesarias y suficientes para que algo sea arte, en lugar de las condiciones solamente suficientes de todos los autores anteriores: «Una obra de arte es un artefacto y un conjunto de aspectos suyos que le han conferido el estatus de ser candidato para la apreciación de una persona o grupo de personas que actúan de parte de una institución social».

Esta definición fue objeto de numerosas críticas, algunas refutadas y otras aceptadas en parte por Dickie, que en su libro *El círculo del arte*, da una versión más refinada, si bien bastante sorprendente desde el punto de vista lógico, de la definición anterior:

- Un artista es una persona que participa con entendimiento en la elaboración de una obra de arte.
- Una obra de arte es un artefacto de un tipo creado para ser presentarse a un público del mundo del arte.
- Un público es un conjunto de personas cuyos miembros están hasta cierto punto preparados para comprender un objeto que les es presentado.
- El mundo del arte es la totalidad de los sistemas del mundo del arte.
- Un sistema del mundo del arte es un marco para la presentación de una obra de arte por parte de un artista a un público del mundo del arte.

A continuación, el propio Dickie admite la absoluta inconsistencia de su definición y afirma que de todas maneras no necesitamos ser informados sobre el arte porque ya tenemos una comprensión fundamental del mismo. Solo cabe parafrasear la frase clásica: «Definición, definición cuantas tropelías se cometen en tu nombre».

Volvamos al principio. Tras mucho trabajo llegamos a la conclusión de que realmente no merece la pena preocuparse. Todos sabemos lo que es un ladrillo y lo que es arte, ¿o no?

De toda esta primera sección, al menos parece quedar claro que, para buscar las matemáticas en el arte, hay que buscarlas en tres sitios:

- En la obra en sí.
- En la intención del artista que la compone.
- En el público que la contempla.

Eso es lo que nos proponemos hacer en lo que resta de nuestro trabajo, presentando algunos ejemplos de la presencia de las matemáticas en varias de las artes clásicas.

### 3.2. De la finitud y el arte aleatorio

Hay una teoría clásica, redescubierta muchas veces a lo largo de la historia, que a partir de que el número de átomos (en su sentido literal de partes indivisibles) del universo es finito, establece que hay una cierta probabilidad (obviamente infinitesimal) de que se repitan dos estados del universo y que, si admitimos la infinitud del tiempo, la historia necesariamente debe repetirse hasta su último detalle. No vamos a discutir la validez de esta teoría, pero podemos entrar en su repercusión en algunas facetas de la actividad artística, ya que proporciona un nuevo punto de vista a esta actividad.

Por ejemplo, pensemos en la «Biblioteca de Babel» de Borges, en la cual se encuentran todos los libros posibles de cuatrocientas diez páginas con cuarenta renglones de ochenta letras en cada página. Esta biblioteca, de existencia física muy improbable, si no imposible, puede estar almacenada en la memoria de un ordenador. Pero, puesto que nunca podemos consultar todos los libros de manera simultánea, sino solo sacarlos uno a uno de los estantes, no necesitamos escribirla toda. De hecho es fácil escribir un programa que nos proporcione libros con ese formato de manera aleatoria, de la misma forma en que tomamos libros de los anaqueles de una biblioteca normal. De este modo podemos considerar que todos los libros están presentes en el ordenador, el problema es encontrarlos. Como dijo Mozart, «toda la música está ya compuesta, sólo queda escribirla».

1.									2.								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	31	2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura 3.1. Las dos tablas con los 176 compases del juego de dados musical de Mozart.

Precisamente en el siglo XVIII se practicaba un juego consistente en escribir una serie de compases, de modo que, al seleccionar aleatoriamente un grupo de ellos, resultara siempre a una composición musical aceptable. Uno de los mejores ejemplos, atribuido a Mozart (K. 294 Ahn. C), es el juego de dados musical, para escribir valeses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición.

El juego consta de 176 compases numerados y distribuidos en dos tablas. Cada una de estas tiene 11 filas numeradas del 2 al 12 y ocho columnas numeradas del I al VIII, por lo que contiene 88 compases. La tabla 1 permite escribir la primera sección del vals y la tabla 2, la segunda. Para obtener cada compás, se tiran dos dados y se suman las puntuaciones, con lo cual se obtiene un número del 2 al 12. Si hacemos eso ocho veces, se seleccionan ocho compases, uno en cada columna, el último se repite y se procede igual con la segunda tabla. Se obtiene así un vals de 17 compases. El número de piezas diferentes que pueden construirse con este juego es de  $10^{11}$  cantidad difícil de asimilar. Para comprenderla un poco, basta pensar que, si la interpretación de cada pieza dura treinta segundos, para tocarlas todas se necesitan unos quinientos millones de años aproximadamente. Resulta fácil calcular el tiempo que se necesitaría para escribir todo los minuetos y se comprende plenamente la afirmación de Mozart: esos minuetos están compuestos, pero escribirlos es imposible.



Figura 3.2. Una de las partituras del juego de dados musical.

Observemos el mérito de la obra de Mozart. Su juego de dados no es la biblioteca de Babilonia, no se trata de volúmenes de una biblioteca compuestos, en su práctica totalidad, por concatenaciones de letras sin sentido. El resultado de su algoritmo es un conjunto de composiciones aceptables musicalmente.

La música aleatoria gozó de una gran popularidad entre los compositores durante la segunda mitad del siglo XX. El recientemente fallecido K. Stockhausen o el compositor griego Iannis Xenakis usaron sistemáticamente procedimientos aleatorios para la composición musical. En lugar de buscar la armonía tonal como instrumento de cohesión de su obra, basaron su composición en especificar la evolución general de los sonidos por medio de distribuciones de probabilidad. Xenakis impulsó lo que se conoce como «música estocástica»: masas de sonido formadas por elementos tan numerosos que resulta imposible determinar la conducta de un elemento individual, aunque de hecho sí la del conjunto, que tiende hacia una meta definida. Su obra *Metástasis*, basada en el desplazamiento de una línea recta, que se representa en música a través de un glissando continuo, sirvió como modelo a Le Corbusier para el diseño de un pabellón para la Exposición Internacional de Bruselas de 1958, en cuya estructura no hay ninguna superficie plana.

**Es, ist, wenn, aber, doch, nicht; es ist, es doch,  
es aber, wenn es, wenn ist, es nicht, aber ist, doch  
ist, wenn doch, wenn aber, nicht ist, aber doch,  
doch nicht, wenn nicht, aber nicht; wenn es ist,  
es aber ist, ist es doch, wenn es aber, wenn es doch,  
es aber doch, we nicht ist, es doch nicht, wenn doch  
wenn es nicht, doch nicht ist, wenn aber doch, wenn  
nicht ist, ist aber nicht, wenn doch nicht, wenn aber  
nicht, aber doch nicht; wenn es aber ist, es aber  
doch is, wenn es doch ist, wenn es aber doch, es  
doch nicht ist, wenn es nicht ist, wenn aber nicht ist,  
nicht, wenn es doch nicht, wenn doch nicht ist, aber  
doch nicht ist, wenn aber nicht ist, wenn aber doch  
nicht; wenn es doch nicht ist, we aber doch nicht ist,  
wenn es aber doch nicht, wenn aber doch nicht ist;  
wenn es aber doch nicht ist.**

Figura 3.3. Poema de Max Bense.

La idea de seleccionar de modo aleatorio un grupo de símbolos de entre un conjunto finito no se presenta solo en música. También se hace con conjuntos de palabras en muchos ejemplos de lo que se llama «poesía concreta». A diferencia de la música, no se trata de seleccionar palabras que produzcan poemas coherentes, sino de escribir poesía considerando sus herramientas lingüísticas, sonidos, sílabas, palabras y sucesiones de palabras como una representación del mundo lingüístico, independiente y no representativa de ningún objeto o suceso exterior al lenguaje. El resultado se considera poesía en clara contradicción con la opinión de Meyer recogida por Adorno. Un ejemplo de poesía concreta de este tipo es el poema de Max Bense que se recoge en la figura 3.3.

Pero la poesía concreta va más allá. En una primera etapa se prescinde del contenido de la obra para convertirla en un proceso lingüístico, pero no se detiene

aquí. El poeta no tiene que ser esclavo de las palabras. El auténtico poema concreto se puede reducir a una estructura geométrico-lingüística que cada uno puede llenar con las palabras que desee. Así surge, por ejemplo, un poema genérico de Graham, que proporciona un esquema de multipoema para ser cumplimentado por el editor o por el lector (figura 3.4). Basta que el esquema especifique desde la calidad del papel o el tipo de letra, al número de adjetivos o de mayúsculas y, de este modo, tenemos una enorme colección de poemas. Como dice su autor, solo con la ayuda de un computador y el programa adecuado es posible escribir todas las variantes.

Schema		Poem
<i>(number of)</i> adjectives	35	adjectives
<i>(number of)</i> adverbs	7	adverbs
<i>(percentage of)</i> area not occupied by type	35.52%	area not occupied by type
<i>(percentage of)</i> area occupied by type	64.48%	area occupied by type
<i>(number of)</i> columns	1	columns
<i>(number of)</i> conjunctions	1	conjunctions
<i>(number of)</i> depression of type into surface of page	0 mms.	depression of type into surface of page
<i>(number of)</i> gerunds	0	gerunds
<i>(number of)</i> infinitives	0	infinitives
<i>(number of)</i> letters of alphabet	247	letters of alphabet
<i>(number of)</i> lines	28	lines
<i>(number of)</i> mathematical symbols	6	mathematical symbols
<i>(number of)</i> nouns	51	nouns
<i>(number of)</i> numbers	29	numbers
<i>(number of)</i> participles	6	participles
<i>(perimeter of)</i> page	8" x 8"	page
<i>(weight of)</i> paper sheet	80 lb.	paper sheet
<i>(type)</i> paper stock	dull coated	paper stock
<i>(thinness of)</i> paper stock	.007"	paper stock
<i>(number of)</i> prepositions	3	prepositions
<i>(number of)</i> pronouns	0	pronouns
<i>(number of point)</i> size type	10	size
<i>(name of)</i> typeface	Universe55	typeface
<i>(number of)</i> words	61	words
<i>(number of)</i> words capitalized	3	words capitalized
<i>(number of)</i> words italicized	0	words italicized
<i>(number of)</i> words not capitalized	58	words not capitalized
<i>(number of)</i> words not italicized	61	words not italicized

Figura 3.4. Poema concreto de F. Graham.

Hay muchos más ejemplos de poesía concreta de tipo aleatorio, pero estas dos muestras son bastante significativas. Más adelante veremos otros poemas con implicaciones matemáticas de otro tipo, alguno de los cuales ha sido escrito por poetas más conocidos (no precisamente por esos poemas).

Para terminar esta sección, presentaremos otra variante de los métodos aleatorios de construcción, ahora en escultura. Se trata del proyecto serial número 1 presentado por Sol Lewitt en 1966.

Se llaman composiciones seriales a conjuntos de piezas sujetos a reglas específicas que se fijan a priori. Las diferencias entre esas composiciones son precisamente el sujeto de la obra. El autor no debe tener, al realizarla, ninguna intención concreta, sino que es un simple notario que cataloga los resultados.

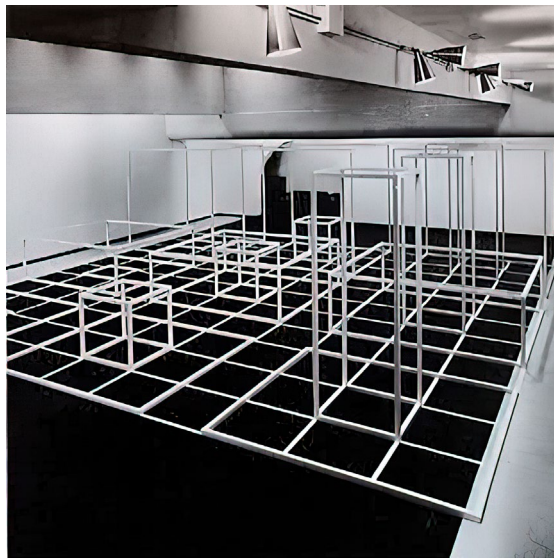


Figura 3.5. Proyecto serial número 1 Sol Lewitt.

Para la colección a la que pertenece la obra, la premisa de Lewitt consistía en introducir formas dentro de formas, incluyendo todas las posibilidades esencialmente diferentes en dos y tres dimensiones, de forma lo más sucinta posible y con el menor número significativo de elementos. Lewitt usa como sintaxis el cuadrado y el cubo, ya que estas dos figuras son «eficientes y simétricas, y formas más complejas podrían ser interesantes por sí mismas y distraer de la contemplación del todo».

Para introducir un cuadrado en otro, se divide el primero en nueve cuadrados iguales y se toma como segundo el cuadrado central, equidistante de los cuatro lados del primero. La base de la estructura está formada por dieciséis cuadrados divididos a su vez cada uno de ellos en otros nueve. Hay nueve variaciones o figuras básicas que aparecen a la izquierda, que se distribuyen sobre los cuadrados atendiendo a unas reglas detalladas que no especificaremos y que coartan el carácter aleatorio de la obra, en aras de la visibilidad de la estructura, de la misma forma que en la poesía concreta no se utilizan letras al azar sino palabras y en la música se exige una cierta concordancia básica. El proyecto exige realizar todas las esculturas que se atienen a las reglas y a veces, cuando se trabaja con un número grande de variaciones, encontrar todas las estructuras posibles es un problema matemático no trivial.

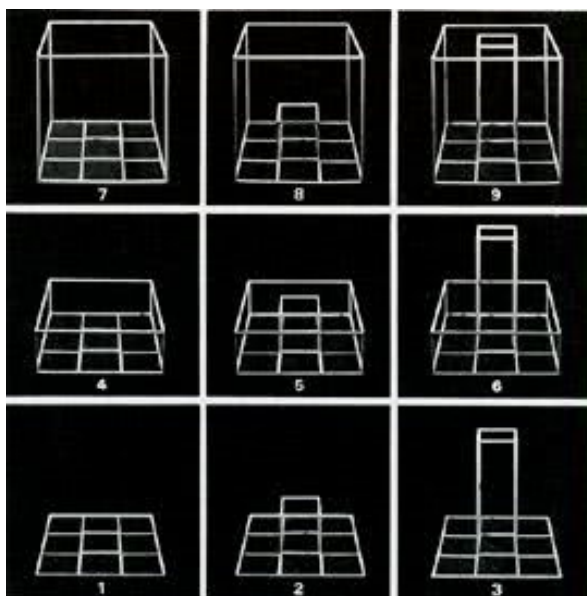


Figura 3.6. Modelos de inmersión.

### 3.3. Las matemáticas cómo objeto del arte

Las matemáticas proporcionan a veces objetos, en sentido amplio, que pueden ser utilizados o representados en una obra de arte. Por ejemplo, algunas veces el vocabulario matemático es parte esencial de la obra, aunque esta no se refiera explícitamente a las matemáticas. Así, podemos citar el poema «Ecuación Blake» de Francisco Pino, en la cual el término ecuación se enfatiza en el título y el poema se estructura como una verdadera ecuación de la teoría de conjuntos. La mayoría de los que escriben sobre matemáticas en la poesía citan a Blake como el más matemático de los poetas de lengua inglesa. Este hecho fue conocido probablemente por Pino y de ahí el título del poema.

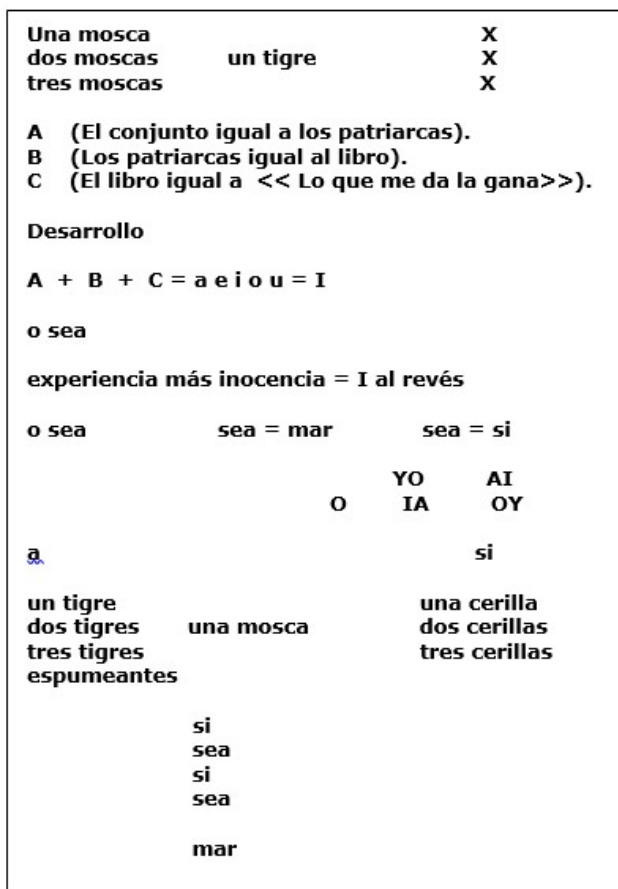


Figura 3.7. Francisco Pino. Ecuación Blake.

Las propias ecuaciones han sido objeto de arte en formas distintas, bien por sí mismas o por el objeto matemático que definen. Un ejemplo de la primera forma de uso lo encontramos en las fórmulas que se reproducen sobre las camisetas de algunas instituciones o colectivos de estudiantes. Recientemente Justin Mullins [22] presentó una exposición de cuadros en los que se recogen solo algunas fórmulas matemáticas que el autor considera interesantes, acompañadas de una explicación de su significado. La fórmula adquiere así interés por sí misma, cambiando su sentido por completo.

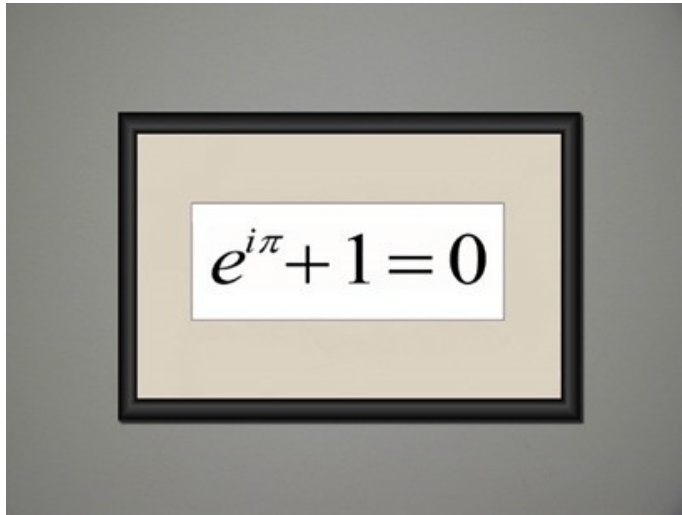


Figura 3.8. *Belleza* de Justin Mullins.

La exposición completa de Mullins se puede encontrar en la página web del Centro Virtual de Divulgación Matemática [22]. El cuadro que acompaña estas líneas (figura 3.8) se titula *Beauty* (*Belleza*) y es de 1998. La explicación, que es parte de la obra, es la que sigue:

**Relación de Euler:** El filósofo y lógico británico Bertrand Russell escribió una vez: “Las matemáticas, vistas correctamente, poseen no sólo la verdad, sino la suprema belleza —una belleza fría y austera— como una escultura.” Russell bien pudo haber tenido en mente la “Relación de Euler” cuando escribía estas palabras.

Una de las más grandes maravillas del mundo matemático, la relación de Euler, es comparable al Gran Cañón, el Monte Everest y las Cataratas del Niágara juntas —lo que ves depende de cómo lo mires.

Seguramente estés familiarizado con la famosa ilusión óptica de una pintura de una vieja bruja que de pronto se transforma en una bella joven. Ambas imágenes están contenidas en la pintura —son diferentes aspectos del mismo patrón de líneas de una página. Todo lo que tienes que hacer es cambiar tu punto de vista para ver la diferencia. La relación de Euler es un poco como esta famosa ilusión óptica, pero en una escala mucho más grandiosa. Imagínate caminando a través de un paisaje poco interesante y tropezando con la cruda belleza natural del Monte Everest. Tienes una buena razón para estar complacido con tu descubrimiento. Pero si continúas tu viaje, llegarás a la impresionante extensión del Gran Cañón. Y más allá, a la estruendosa majestad de las Cataratas del Niágara.

La Relación de Euler une cinco conceptos matemáticos fundamentales en una fórmula sencilla y elegante. De su observación se concluye que los conceptos de **uno** y **cero** se hermanan gracias a la fuerza de la exponencial  $e$ , con el número imaginario  $i$  y el número irracional  $\pi$ . Pero la Relación de Euler es aún más poderosa. La ecuación, descrita de este modo, proporciona en realidad una relación más amplia entre dos campos absolutamente diferentes de las matemáticas: la geometría, el estudio del espacio, con el álgebra, el estudio de la estructura y la cantidad. Quizá por esto el físico Premio Nobel Richard Feynman la denominó “la fórmula más extraordinaria de las matemáticas”

Una fórmula también puede interpretarse como una ecuación; por ejemplo, un polinomio en tres variables igualado a cero, cuyas soluciones pueden tener una estructura geométrica que puede ser esculpida o pintada.

Hay muchos ejemplos de superficies, conjuntos de ceros de una ecuación en tres variables, presentes en arquitectura o en escultura. Por ser más fáciles de construir, son frecuentes en arquitectura las llamadas superficies regladas, que se definen por una curva (la directriz) en la cual se apoya una familia de rectas (las generatrices), que forman la superficie. Conos y cilindros son los ejemplos conocidos de superficies regladas.



Figura 3.9. *Sagrada familia* de Gaudí.

También los hiperboloides hiperbólicos o los helicoides son superficies de uso corriente. En la figura 3.9, se presenta un hiperboloide construido con la técnica del ladrillo tabicado en la *Sagrada Família* de Gaudí. Las decoraciones de mosaico veneciano siguen las directrices del hiperboloide. La estructura de hiperboloide es tan común debido a su propiedad de admitir una doble generación reglada; es decir, estar formadas por dos familias de rectas que se entrecruzan. Por ello, su construcción en hormigón es más sencilla.



Figura 3.10. Iglesia de Santa María en Morella.

La figura 3.10 corresponde a la iglesia de Santa María de Morella (escalera del coro alto) y representa la estructura helicoidal que se ve por lo general en las llamadas escaleras de caracol. Podemos presentar así multitud de ejemplos, pues estas superficies son muy comunes en arquitectura.

También se usan las superficies no regladas como motivos escultóricos. Además, no solo se representan las superficies algebraicas de segundo grado, sino que se eligen superficies más complejas, incluso no algebraicas.

Por ejemplo, hay una «epidemia» de bandas de Möbius y sus variantes e incluso hay escultores especializados en la «banda de Möbius como espectáculo». Este es el caso del japonés Keizo Ushio, que durante el International Congress of Mathematics (ICM) de Madrid esculpió una banda de Möbius en un *happening* muy concurrido.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.11. Bandas de Möbius.

La figura 3.11 presenta tres bandas de Möbius: la (a) es de Ushio, está situada en Mure (Japón) y fue realizada en 1988; la (b) es la *Banda sin fin* de Max Hill y data de los años sesenta; y la (c), titulada *Coloso de Frankfurt*, es de Max Bill y se esculpió en 1921.

Son también muy populares: la superficie de Boy, representación del plano proyectivo real, la superficie romana de Steiner y algunas superficies cúbicas.

Recientemente han comenzado a aparecer representaciones de otros objetos topológicos, como nudos y entrelazamientos como el de la figura 3.12. Estas corresponden en general a proyecciones estereográficas sobre el espacio tridimensional, resultado de cortar el modelo real en el espacio de dimensión 4 de una curva algebraica plana compleja por una esfera de dimensión 3.

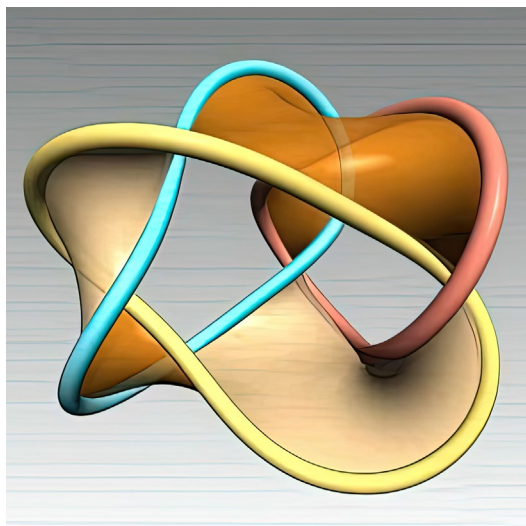


Figura 3.12. *Cadena de tres entrelazamientos* de J. Van Wijk.

No son las superficies los únicos objetos matemáticos que han sido representados en arte. Hay figuras más simples, como los polígonos y poliedros, que también han sido muy utilizados y no solo en pintura o escultura. Por ejemplo, los poetas a veces disponen sus versos siguiendo estructuras poligonales, como la colección de hexágonos, parte fundamental del poema *Escarcha plateada* de V. Brontis, que se reproduce en la figura 3.13.

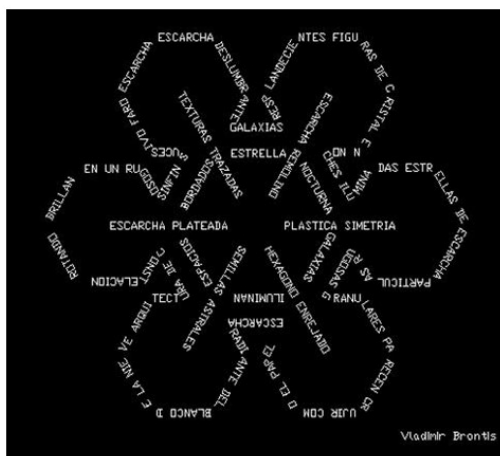


Figura 3.13. *Escarcha plateada* de V. Brontis.

Alberto Durero fue autor de varios estudios de naturaleza gráfica sobre los polígonos regulares, interesándose en especial por el pentágono. Un tratado de Cataldi

del siglo XVI, que recoge las construcciones de Durerro, tuvo una gran influencia en matemáticos como Cardano o Tartaglia (ver Pedoe [91]), así como en los constructores de fortificaciones hasta el siglo XIX.

En la figura 3.14 vemos un dibujo de la planta de una fortaleza, basado completamente en el pentágono, obra del capitán de ingenieros del rey de Francia A. Bachot [9] en 1598.

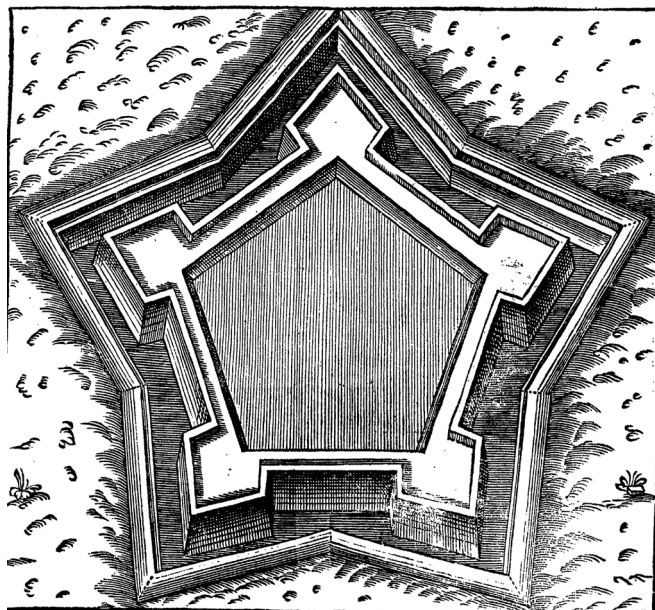


Figura 3.14. Plano de una fortaleza de Bachot.

Desde Platón, cuatro de los poliedros regulares o sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro) se identificaron con los elementos fuego, tierra, aire y agua, mientras que el dodecaedro (poliedro perfecto) se consideró una representación del universo. Los poliedros se usaron en Astronomía y Astrología y adquirieron un aura de magia y misterio que despertó la imaginación de los artistas, especialmente los del renacimiento. Estos no se limitaron a los poliedros regulares y en esta época son muy comunes los diseños de poliedros irregulares y poliedros truncados. En la figura 3.15 aparecen dos de ellos: a la izquierda, uno truncado que figura en la *Melancolía* de Durerro y, a la derecha, un poliedro irregular de caras triangulares y trapezoidales dibujado por Leonardo da Vinci en su tratado *De divina proportione*.



Figura 3.15. Poliedros de Durer y Leonardo da Vinci.

Pero la pintura no se limita a las tres dimensiones. En 1888, el matemático inglés C. H. Hinton, en una obra llamada *A New Era of Thought*, utilizó el término «teseracto» para designar al cubo del espacio de cuatro dimensiones, también conocido como «hipercubo».

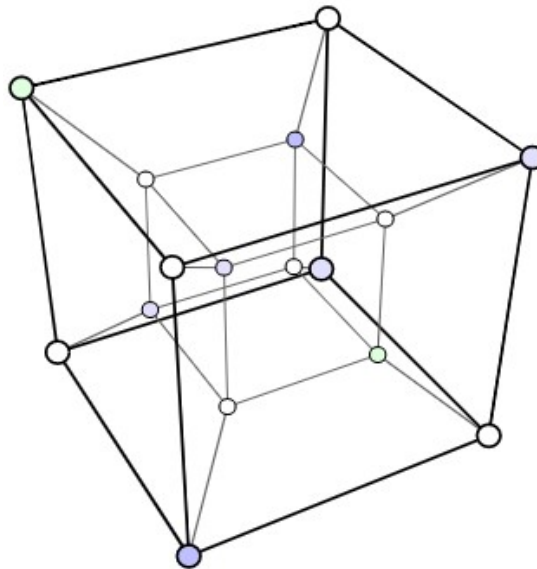


Figura 3.16. Hipercubo

Sabemos bien que el cubo ordinario es un poliedro compuesto por seis caras cuadradas, ocho aristas y ocho vértices. En cambio, el teseracto está compuesto por

ocho caras tridimensionales cúbicas, 24 caras cuadradas, 32 aristas y 16 vértices.

Si cortamos un cubo a lo largo de siete de sus aristas, convenientemente elegidas, tenemos un desarrollo plano del cubo, como el que se recoge en la figura 3.17. La operación equivalente en dimensión 4 es cortar el tesseracto a lo largo de diecisiete caras cuadradas, con lo que se obtiene un desarrollo en dimensión 3 compuesto por ocho cubos. Una manera, no muy precisa, de comprender la forma de un cuerpo es cortarlo en rodajas; es decir, cortarlo por una familia de planos paralelos. Si cortamos el cubo de forma conveniente, una de las secciones planas que se obtienen es un hexágono. Para hacer la misma construcción en dimensión 4, habría que cortar la figura por una familia de espacios paralelos de dimensión 3. Si hacemos esto con el tesseracto, se obtiene una sección que es un dodecaedro.

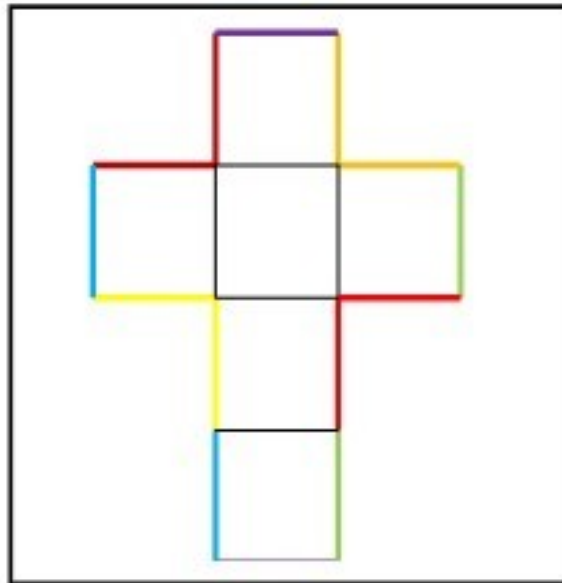


Figura 3.17. Desarrollo plano de un cubo.

Este hecho es difícil de imaginar, pero Thomas Banchoff, especialista en geometría de baja dimensión, es autor de una película sobre el tesseracto, en la que se hace visible esta propiedad. En la figura 3.18 incluimos el desarrollo de un tesseracto en un cuadro de Salvador Dalí.

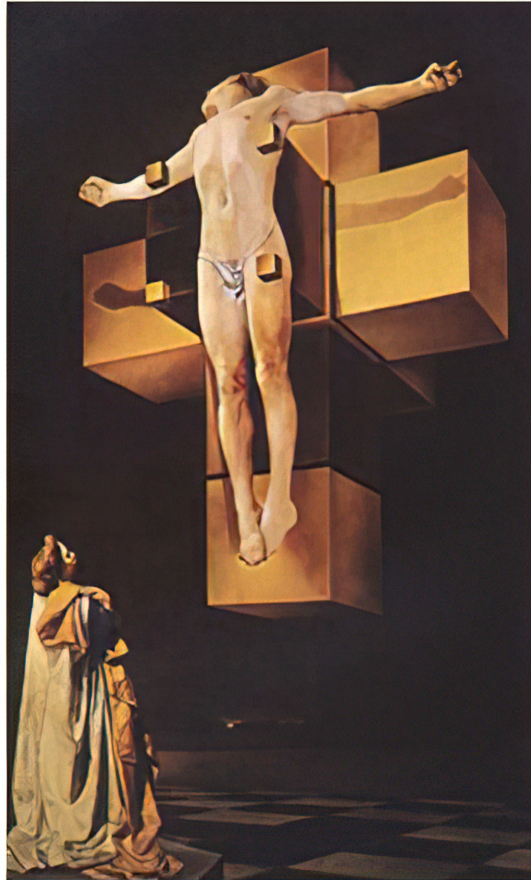


Figura 3.18. *Corpus hypercubicus* de Salvador Dalí.

Dalí siempre estuvo interesado por algunos aspectos poco comunes de la ciencia. En particular le interesaba la obra de Raimundo Lulio (Ramon Llull) y en su obra hay mucha referencias a la alquimia. No tenemos datos sobre el origen de su interés por el espacio de dimensión 4; ya que, aunque es bien conocida su amistad con el antes citado Thomas Banchoff, esta se inició casi veinte años después que Dalí pintara su *Corpus hypercubicus*.

En esta sección hemos presentado unos pocos ejemplos de cómo objetos de naturaleza matemática pueden ser sujetos de obras artísticas, elegidos conscientemente para ello por los autores de las mismas.

Las matemáticas pueden usarse también como herramienta y ello puede hacerse de manera consciente o inconsciente. En nuestra opinión, hay un proceso claro. Los artistas comienzan empleando de modo inconsciente recursos matemáticos y el análisis de su obra lleva a otros a descubrir que se emplean estos recursos y se perfecciona su uso. Un buen ejemplo es el uso en pintura de la perspectiva (de la cual no hablaremos

aquí) y otro, del que hablaremos aunque sea muy conocido, es el uso de la «razón áurea» o «proporción divina».

### 3.4. *De Divina Proportione*

Hay varias formas de definir el número áureo o número de oro. Daremos tres de ellas.

La primera, de naturaleza algebraica, es la siguiente: el número áureo es un número positivo que excede a su inverso en una unidad. Si llamamos  $x$  a ese número, la definición dice que:

$$x = \frac{1}{x} + 1$$

Y, en consecuencia:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De las dos soluciones, la positiva es por definición el número áureo:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$

Y la aproximación decimal negativa es:

$$-\frac{1}{\Phi} = -0.61803$$

La segunda definición es en términos de medidas de segmentos: un punto  $C$  de un segmento  $AB$  define su sección áurea si lo divide en dos partes, de modo que:

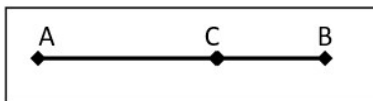


Figura 3.19. Sección áurea.

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

Así:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB| - |AC|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|} - 1$$

Y, si llamamos  $x = \frac{|AB|}{|AC|}$ , debe ser de nuevo  $x - \frac{1}{x} = 1$ ; en consecuencia,  $\frac{|AB|}{|AC|} = \Phi$

La tercera definición es puramente geométrica. Recordemos que dos rectángulos se llaman semejantes cuando el cociente del lado mayor por el lado menor es el mismo para ambos. Esto significa que difieren solo en la escala en que están dibujados. Entonces: un rectángulo se dice que es áureo cuando, al cortarle un cuadrado, se obtiene un rectángulo semejante a él. De este modo, en un rectángulo áureo de lados  $a$  y  $b$  (figura 3.20) debe ser:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

En consecuencia, la razón del lado mayor al menor es de nuevo el número áureo.

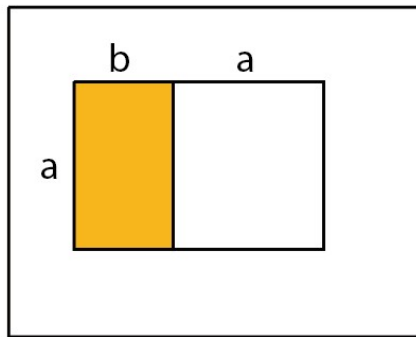
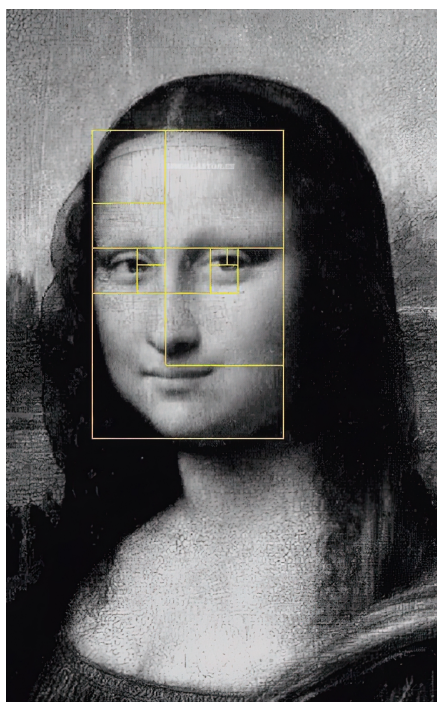


Figura 3.20. Rectángulo áureo.

El número áureo aparece muy a menudo en el arte, aunque a veces esas apariciones sean un poco forzadas. En arquitectura, son bien conocidas sus múltiples usos en el Partenón, la basílica de Santa María dei Fiore o la Torre Eiffel.

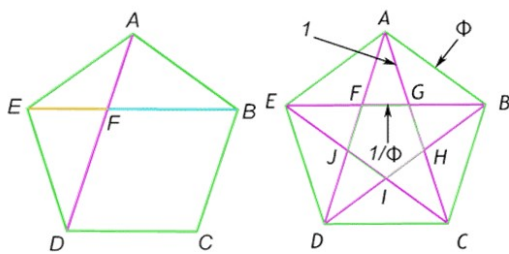
Aunque no es precisamente arte, el documento nacional de identidad español es un rectángulo áureo. En la figura 3.21 presentamos una serie de rectángulos áureos fácilmente localizables en la cara de *La Gioconda*, dos pentágonos: el convexo (usual), en el cual una diagonal divide a la otra en dos segmentos en proporción áurea, y el estrellado, en el cual están presentes tanto el número áureo como su inverso. Al mismo tiempo, en la imagen (c), se aprecia el uso del pentágono estrellado por Salvador Dalí para encuadrar su *Leda atómica*. No obstante, el uso del número áureo en la pintura, sobre todo en retratos, no significa necesariamente que el pintor trace rectángulos áureos o calcule razones áureas para componer la figura humana. El número áureo aparece de modo natural como acompañante de los fenómenos de crecimiento; pero, para comprender la razón, debemos continuar un poco más con matemática elemental.



(a) Entramado áureo en la cara de *La Gioconda*.

A ti, maravillosa disciplina,  
 media, extrema razón de la hermosura,  
 que claramente acata la clausura  
 viva en la malla de tu ley divina.  
 A ti, cárcel feliz de la retina,  
 áurea sección, celeste cuadratura,  
 misteriosa fontana de mesura  
 que el Universo armónico origina.  
 A ti, mar de los sueños angulares,  
 flor de las cinco formas regulares,  
 dodecaedro azul, arco sonoro.  
 Luces por alas, un compás ardiente,  
 tu canto es una esfera transparente.  
 A ti, divina proporción de oro.

(b) Poema *A la divina proporción* (R. Alberti).



(c) El pentágono estrellado, la razón áurea.



(d) Entramado áureo en *Leda atómica* (S. Dalí).

Figura 3.21. La razón área en expresiones artísticas.

A mediados del siglo XIII, Leonardo Fibonacci, también conocido como Leonardo de Pisa, calculó el número de conejos que se podrían obtener a partir de una pareja con las hipótesis siguientes:

- Una pareja de conejos produce cada mes una nueva pareja.
- Una pareja de conejos tarda un mes en llegar a ser fértil.
- El periodo de gestación dura un mes.

De este modo (ver figura 3.22), partimos de una pareja que, al cabo de un mes, pasa a ser fértil (en rojo) y, un mes más tarde, es pareja continua (en azul) y hay una nueva no fértil, etc.

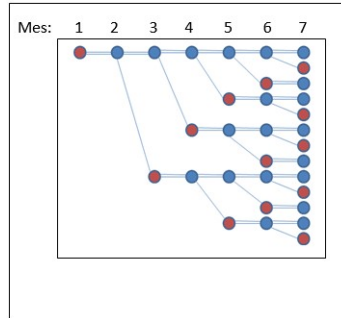


Figura 3.22. Diagrama de Fibonacci.

Así, el número de conejos va creciendo en una sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... la cual se conoce con el nombre de sucesión de Fibonacci y tiene la propiedad de que cada término es suma de los dos anteriores.

Fibonacci solo describió esa sucesión y fue Kepler el primero que estudió, ya de modo general, las sucesiones definidas por la mencionada propiedad.

Si, para la sucesión de Fibonacci clásica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... se van dividiendo entre sí los pares de términos sucesivos, se obtienen números:

$$r_1 = \frac{a_2}{a_1} = 1, r_2 = \frac{a_3}{a_2} = 2, r_3 = \frac{a_4}{a_3} = 1, 5,$$

$$r_4 = \frac{a_5}{a_4} = 1.66 \dots, r_5 = \frac{a_6}{a_5} = 1, 6, r_6 = \frac{a_7}{a_6} = 1, 625, \dots$$

Estos se van aproximando por exceso y por defecto el número áureo.

Este hecho no depende de la sucesión elegida. Por ejemplo, si la sucesión es: 2, 100, 102, 202, 304, 506, 810, 1316, 2126, 3442, 5568, ... la sucesión de cocientes de pares de términos consecutivos es: 50, 1.02, 1.98, 1.50, 1.66, 1.60, 1.62, 1.615, 1.619, 1.617, ... que, aunque tiene los primeros términos alejados del número áureo, enseguida llega a valores muy próximos al mismo.

Teniendo en cuenta ahora la ecuación que verifica el número áureo y substituyendo sucesivamente, se tiene que:

$$\Phi^2 = \Phi + 1, \Phi^3 = \Phi \cdot \Phi^2 = 2\Phi + 1, \Phi^4 = \Phi \cdot \Phi^3 = 3\Phi + 2, \dots$$

Entonces la sucesión de Fibonacci que empieza por 1 y el número áureo es:

$$1, \Phi, \Phi + 1, 2\Phi + 1, 3\Phi + 2, \dots$$

Lo que resulta ser la progresión geométrica de razón  $\Phi$ :

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots, \Phi^n, \dots$$

Esta sucesión tiene la propiedad de que el área del cuadrado cuyo lado es igual a un término de la sucesión coincide con el área del rectángulo cuyos lados son de longitudes iguales a los términos anterior y siguiente del elegido. A esta sucesión se le llama la sucesión áurea. Una sucesión similar se obtiene para la segunda solución,  $-\Phi^{-1}$ , de la ecuación que define  $\Phi$ .

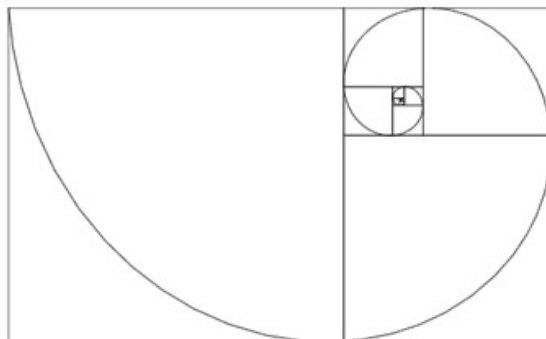


Figura 3.23. Rectángulos de Fibonacci en progresión.

En la figura 3.23 están dibujados una serie de rectángulos, los que difieren cada uno del anterior en un cuadrado y cuyos lados definen esta última sucesión. La espiral trazada en la figura también está ligada al número áureo, pero no hablaremos aquí de ella, por no hacer excesivamente técnico el trabajo.

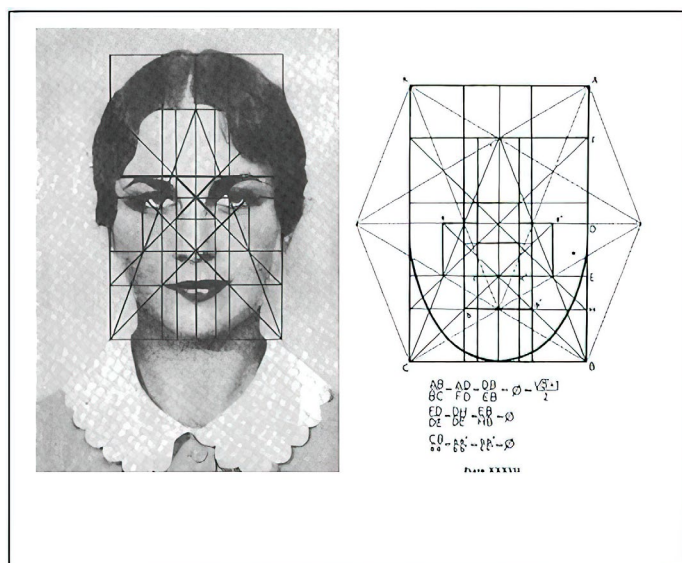


Figura 3.24. Entramado áureo superpuesto a un rostro humano especialmente regular.

El número  $\sqrt{\Phi} = 1.27202$  tiene también propiedades interesantes y, en función de él, el número áureo y el opuesto de su inverso, se construyen entramados como los de la figura 3.24, que reciben el nombre de entramados áureos. Las sucesiones áureas y sus derivadas se usan, de modo consciente, en muchos cuadros renacentistas. Por ejemplo, en el retrato de *La Mona Lisa*, la cara está inscrita en un rectángulo áureo y en su figura aparecen muchos más rectángulos áureos (figura 3.24).

Pero eso no sucede solo en los cuadros renacentistas. El puntillista Seurat también utiliza entramados áureos en sus cuadros y, como él, muchos otros pintores. Sin embargo, hay un caso especial: un pintor que representa entramados desnudos, no asociados a ninguna figura. Se trata de Pieter Mondrian.

Siempre se ha dicho que, en buena parte de la obra de Mondrian, tanto el número áureo como las sucesiones de Fibonacci juegan un papel esencial. Ello se debe posiblemente a la influencia del teósofo y matemático Schoenmaekers, en cuyos escritos también pueden encontrarse otros de los elementos básicos de la estética del pintor, como la importancia de la ortogonalidad o el uso exclusivo de los colores primarios.

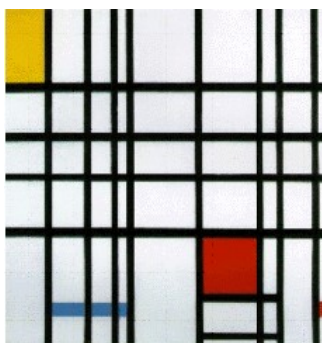


Figura 3.25. *Composición en rojo, amarillo y azul* (1942) de Mondrian.

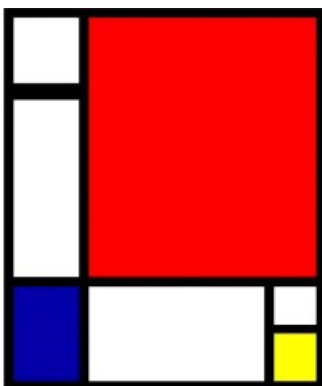


Figura 3.26. *Composición en rojo, amarillo y azul* (1926) de Mondrian.

Por ejemplo, en los dos cuadros de 1926 y 1942, titulados ambos *Composición en rojo, amarillo y azul* (ver figuras 3.25 y 3.26), hay entramados áureos como el de la figura 3.24 y es un ejercicio fácil para el lector utilizar una regla para descubrir la estructura del entramado.

Estas evidencias pueden ser casuales y M. Livio [73], en un libro publicado en 2002, asegura que las líneas de los cuadros de Mondrian no están puestas de acuerdo con sucesiones de Fibonacci, ni a distancias relacionadas con el número áureo. Sin embargo, Richard Taylor, en un artículo de *Nature* de ese mismo año, concluye, tras someter a un estudio estadístico veintidós cuadros de Mondrian, que efectivamente, como se afirmó siempre, las líneas de su obra están dispuestas según entramados áureos. La cuestión es si el trabajo que se tomó Mondrian para trazar esas líneas de acuerdo con las formulas anteriores merece la pena desde el punto de vista estético. J. Lee (2001), uno de los alumnos de Taylor, produjo ocho cuadros tipo Mondrian con distribución de líneas aleatoria y los presentó junto con otros cuatro auténticos, a un panel de diez expertos y cien no expertos en la obra de Mondrian. La conclusión fue que visualmente no había forma de distinguir unos de otros.

Un ejemplo curioso de cómo las estructuras áureas se pueden trasladar a la poesía, aunque sea de modo indirecto, lo constituye el poema de Francisco Pino titulado *Composición. Homenaje a Mondrian* (ver figura 3.27), que refleja en su espíritu y, si se tiene cuidado con el tamaño de las fuentes, en sus medidas una serie de números áureos.

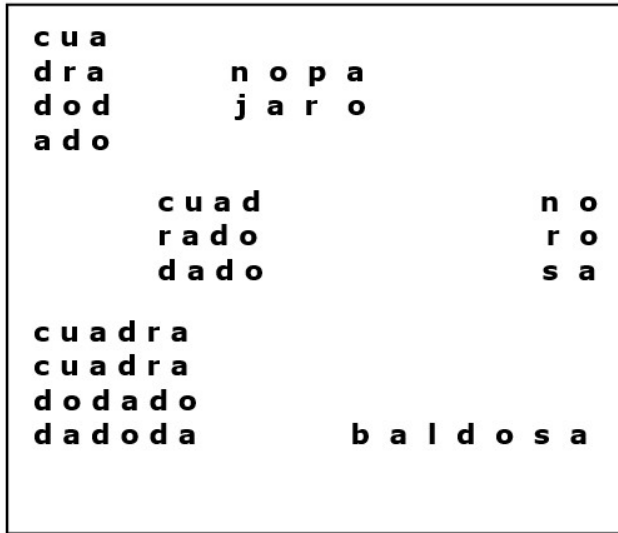


Figura 3.27. *Homenaje a Mondrian* de Francisco Pino.

También aparecen las sucesiones de Fibonacci y el número áureo en muchas piezas musicales. No es de extrañar la presencia de matemáticas en la música. Se dice que esta es la más matemática de las artes y de eso es buena prueba el hecho de que ya desde el principio, desde la misma escritura musical, se precisa un cierto nivel de matemáticas para comprender sus fundamentos.

Sin entrar a fondo en la cuestión, señalemos que hay una discrepancia en los intervalos de separación de las notas en cada octava, debido a la dificultad de los griegos para usar números irracionales. La frecuencia del *do* de una octava es la mitad que en la octava siguiente y entre ambos hay una diferencia de 12 semitonos, ya que cada par de notas difieren en un tono menos *mi - fa* y *si - do*, que lo hacen en un semitono. Entonces hay que repartir multiplicativamente, puesto que se trata de cocientes de frecuencias: 2 en 12 intervalos. En la notación clásica (Pitágoras) se resuelve el problema de modo aproximado al asignar a los cocientes de las frecuencias los valores:

do	1	mi	$81/64=1,265$	sol	$3/2=1,5$	si	$243/128=1,898$
re	$9/8=1,125$	fa	$4/3=1,333$	la	$27/16=1,687$	do	2

Esta irregularidad en la distribución de los cocientes de frecuencias fue corregida por Mersenne, matemático a la vez que músico, en su *Harmonie Universelle* (1636), quien asigna a cada semitono el mismo valor. Así, al distribuir el cociente 2 en los 12

intervalos, se asigna a cada uno un valor de  $\sqrt[12]{2}$  que aproximadamente es 1.1224. De este modo, en la escala bien temperada de Mersenne, los cocientes de frecuencias son aproximadamente:

do	1	mi	1,2599	sol	1,4983	si	1,8877
re	1,1224	fa	1,3348	la	1,6817	do	2

Bach utiliza la escala bien temperada en su colección de preludios y fugas conocidas precisamente por *El clavecín bien temperado*. Asimismo, en otros músicos posteriores, como Haydn, Bethoven o Chopin, hay en su obra un uso consciente, aunque no sistemático, del número áureo y las sucesiones de Fibonacci.

El primer músico que desarrolla un método de composición basado en elementos áureos es Bela Bartok. Como ejemplo, explicaremos someramente la estructura de la fuga (primer movimiento) de su *Música para cuerdas, percusión y celesta*, tal y como está estudiado por Solomon [109] y recogido por Lendvai [72] y Lluís-Puebla [74].

El movimiento consta de 89 compases divididos en dos secciones de 55 y 34 compases, respectivamente (recordemos que la sucesión de Fibonacci es 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... y que  $55/34 = 1.6109$  es muy próximo al número áureo).

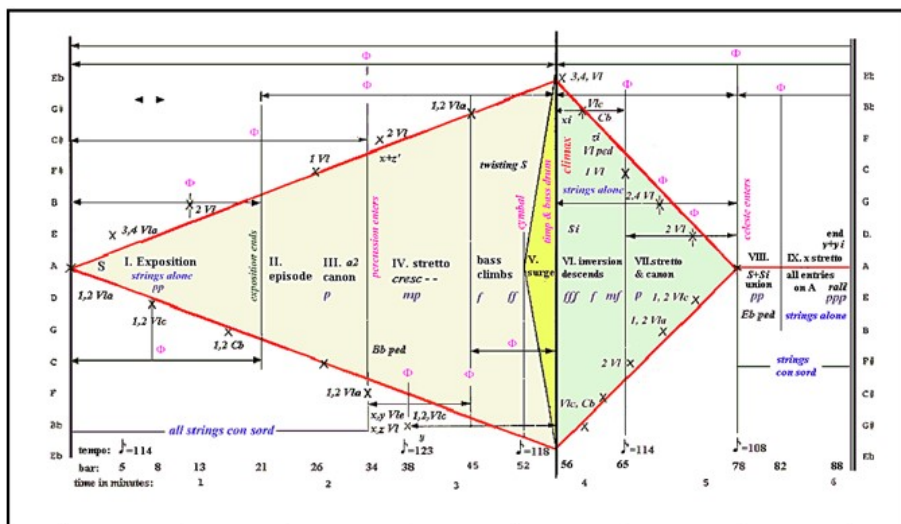


Figura 3.28. *Música para cuerdas, percusión y celesta* (Fuga) de Bela Bartok, plano de organización.

Estas secciones se subdividen en subsecciones de 34 y 21 compases y de 21 y 13, respectivamente. El clímax se alcanza en el compás 55, la exposición finaliza en el 21 y los últimos 21 compases están divididos en secciones de 13 y 8. Es decir, la sucesión de Fibonacci está por toda la pieza.

Según el buen matemático y pianista Emilio Lluis Puebla:

Bartok seguía a la naturaleza en la composición y fue guiado por fenómenos naturales para descubrir este tipo de regularidades. Constantemente aumentaba su colección de plantas, insectos y especímenes minerales. El girasol era su planta favorita (sus pétalos están en espiral de acuerdo con una sucesión de Fibonacci). Consideraba que la música folclórica también es un fenómeno de la naturaleza y que su estructura se desarrolla tan espontáneamente como la de las flores y otros organismos vivos de acuerdo con patrones áureos.

En resumen, es evidente el uso de patrones numéricos ligados a la razón áurea en la obra de muchos artistas; pero no es claro que su uso sea esencial en el proceso de creación, ni que aporte mejoras que puedan ser apreciadas por el público.

### 3.5. La simetría está en todas partes

Vamos a entrar en la parte más técnica de nuestro trabajo para tratar de explicar el papel de la simetría en el arte. Al hablar de esta no nos referimos solo a las nociones habituales de simetría especular o central, sino a una noción de simetría más general usada de modo consciente por muchos artistas.

En primer lugar, cuando hablamos de simetría pensamos en una de naturaleza puramente geométrica. No obstante, desde ese punto de vista, las semicorcheas de la figura 3.29 no son simétricas respecto al eje marcado; sin embargo, no lo son respecto de ese eje desde un punto de vista musical. En consecuencia, debemos olvidar las connotaciones geométricas de las palabras y hablar de las simetrías como transformaciones, definidas por su actuación sobre un conjunto.

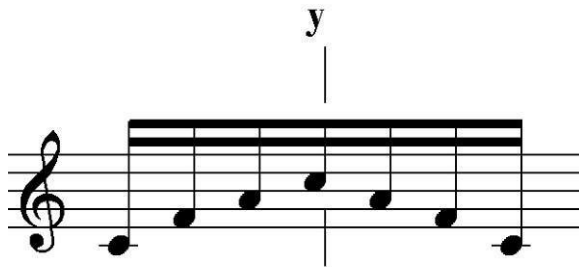


Figura 3.29. Semicorcheas simétricas.

En términos matemáticos, para hablar de simetría necesitamos hablar de un grupo que actúa sobre un conjunto  $y$ , puesto que este texto está destinado también a no matemáticos, conviene que precisemos el significado de esa expresión.

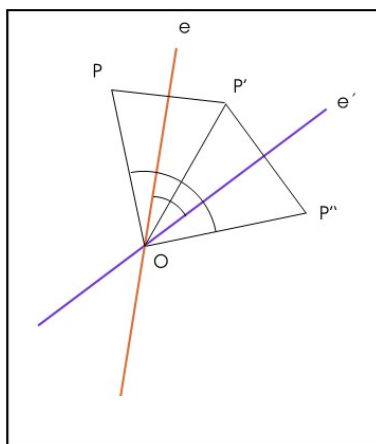


Figura 3.30. La simetría de eje  $e$  y  $e'$ .

La simetría del eje  $e$  transforma  $P$  en  $P'$ ; la del eje  $e'$ , transforma  $P'$  en  $P''$ ; la composición de ambas, transforma  $P$  en  $P''$ ; y cualquiera que sea el punto  $P$ , el ángulo  $POP''$  es doble que el de los ejes  $e$  y  $e'$ .

Partimos de un conjunto  $C$ , que puede ser el conjunto de todos los puntos del plano o del espacio de dimensión 3, el conjunto de puntos de un polígono, el de notas musicales de una partitura, las palabras que forman un poema, una serie de frases, etc., y consideramos un conjunto  $G$  de transformaciones de  $C$ . Una transformación de uno de esos conjuntos es una función que asocia, a cada punto del conjunto, otro no necesariamente distinto de él y que además es biunívoca; es decir, no podemos asignar a dos puntos distintos el mismo punto y todo punto del conjunto está asignado a otro.

Por ejemplo, una simetría axial o central en el plano, una traslación o un giro son transformaciones biunívocas. La actuación de dos de estas transformaciones sucesivamente produce una nueva transformación, del mismo modo que la suma de dos números produce un nuevo número. A esta transformación se le llama composición de las transformaciones dadas. Por ejemplo, la composición de dos giros centrados en el mismo punto es un giro centrado en ese punto de ángulo igual a la suma de los ángulos de los giros dados, mientras que la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan en un punto es un giro con centro en ese punto y ángulo igual al doble del de los ejes de las simetrías (figura 3.30).

La transformación de identidad —es decir, la correspondencia que asocia a cada punto el propio punto— es una transformación y la inversa de una transformación también lo es. Por ejemplo, la inversa de una simetría axial es ella misma, mientras que la inversa de un giro con centro en un punto es otro giro con centro en el mismo punto y con el mismo ángulo, pero en sentido contrario.

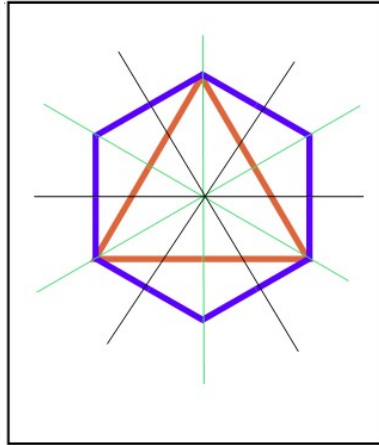


Figura 3.31. Simetrías del hexágono y el triángulo.

Si exigimos que la composición de dos transformaciones de  $G$  esté en  $G$ , que la identidad esté en  $G$  y que la inversa de toda transformación de  $G$  esté también en  $G$ , tenemos en  $G$  una estructura algebraica que recibe el nombre de estructura de grupo.

Si  $G$  es un grupo de transformaciones de  $C$  y  $S$  es un subconjunto de  $C$ , las transformaciones de  $G$  que transforman los puntos de  $S$  en puntos de  $S$  forman otro grupo llamado de simetría de  $S$ . Por ejemplo (ver figura 3.31), si  $C$  es el conjunto de puntos bordeado por el hexágono azul, las siguientes transformaciones forman un grupo de transformaciones de  $C$ :

- Giros de 60, 120, 180, 240 y 300 grados con centro en el centro del hexágono.
- Simetrías respecto a los seis ejes marcados en la figura (tres negros y tres verdes).
- Identidad.

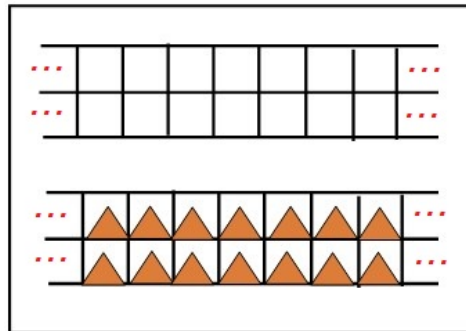


Figura 3.32. Las dos bandas tienen grupos de simetría diferentes.

Si  $S$  es el conjunto bordeado por el triángulo rojo, el grupo de simetría de  $S$  está formado por:

- Los giros de 120 y 240 grados con centro en el centro del hexágono.
- Las tres simetrías respecto de los ejes verdes.
- La identidad.

Si consideramos como conjunto  $C$  todo el plano y como grupo  $G$  el de sus movimientos (todas las simetrías, giros, traslaciones y simetrías con deslizamiento), el grupo de simetría de una banda cuadrículada que se extiende hasta el infinito a izquierda y derecha, como la de la parte superior de la figura 3.32, está compuesto por la identidad y por:

1. Las traslaciones en la dirección longitudinal de la banda en uno u otro sentido y de magnitud igual a un número entero de veces el lado de uno de los cuadrados.
2. Las simetrías con ejes, las líneas de división verticales de la cuadrícula y las simetrías respecto a los ejes verticales que dividen cada cuadrado en dos partes iguales.
3. La simetría respecto al eje central y las composiciones de esta simetría con las traslaciones antes descritas (simetrías con deslizamiento).
4. Los giros con centro en los puntos de la cuadrícula situados en su eje central y ángulos de 180 grados.

En cambio, para la banda decorada con triángulos, las transformaciones de los tipos 1 y 2 están en su grupo de simetría, pero no las de los tipos 3 y 4. Observemos también que en ambos casos, tomando uno de los cuadrados y haciendo actuar sobre él todos los elementos del grupo de simetría, se obtiene la banda completa. En general, dado el conjunto  $S$ , el mínimo subconjunto de  $S$ , tal que a partir de él y por acción de todos los elementos del grupo de simetría de  $S$  se puede reconstruir todo  $S$ , se llama dominio fundamental.

Un grupo de transformaciones se dice generado por un subconjunto de ellas si toda transformación del grupo se obtiene como producto de transformaciones del subconjunto y sus inversas (que pueden repetirse cuantas veces se quiera). Así, el grupo de simetría del hexágono (figura 3.31) está generado por dos de las simetrías con ejes negro y verde consecutivos; mientras que los de las bandas de la figura 3.32, por las simetrías respecto a una línea vertical, a la línea vertical que divide en dos una de los cuadrados anexos a esa línea y la simetría respecto al eje horizontal, para la primera banda, y las dos primeras simetrías citadas, para la segunda.

Si nos preguntamos de cuántas formas distintas se puede cubrir una banda ilimitada o todo el plano con losetas iguales, se puede dar una respuesta a esta pregunta describiendo, dentro del grupo de movimientos del plano, los subgrupos que son grupos de simetrías de los enlosados correspondientes. Hay siete grupos distintos para las bandas y diecisiete para el plano, teorema demostrado por Fodorov en 1891.



Figura 3.33. Banda decorada periódica.

Por ejemplo, para la banda decorada de la figura 3.33, el dominio fundamental es aparentemente el rectángulo marcado que contiene dos de las flores, mientras que el grupo de simetría que genera la figura es el generado por la traslación de dos veces la longitud de la loseta en la dirección de la banda. Pero hay un movimiento más que deja invariante la figura y es la composición de la simetría respecto al eje central de la banda y una traslación, en la dirección de la banda, de la mitad del rectángulo marcado; entonces, el dominio fundamental es el cuadrado mitad del rectángulo marcado y el grupo de simetría es el generado por el movimiento anterior y la traslación, en la dirección de la banda, del lado del rectángulo.

Como se observa, las bandas decoradas periódicas y los enlosados periódicos tienen una geometría muy simple que permite clasificarlas y describirlas con facilidad. Por ejemplo, J. M. Montesinos [83] ha comprobado que todos los grupos de simetría descritos por Fodorov aparecen en las decoraciones de la Alhambra.

Podemos usar transformaciones que no conservan las distancias, al menos no las de la geometría usual, y obtenemos enlosados más complejos o figuras más complicadas de naturaleza caótica que, según nuestra definición, serían simétricas, con lo cual se podrá apreciar la diferencia entre la idea común de geometría y la más formal que hemos introducido aquí.

El dibujante holandés Maurits Escher utilizó en algunos de sus dibujos unas transformaciones geométricas que no son los movimientos que hemos usado hasta ahora.

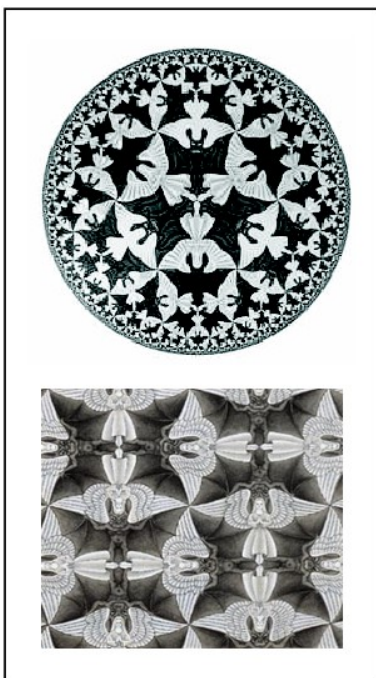


Figura 3.34. Dos grabados de Escher con distinta geometría.

En la figura 3.34 hay dos grabados compuestos por ángeles y demonios complementarios, pero que son completamente distintas. En el de la parte superior, hay un círculo cubierto por las figuras y, en el de la parte inferior, un cuadrado, que se entiende es una parte de un enlosado infinito que cubriría todo el plano.

En el grabado inferior de la figura 3.34, hay ejes de simetría evidentes, los que dividen por la mitad a los demonios, que forman un reticulado. Estas simetrías, junto con un giro de 90 grados con centro en uno cualquiera de los puntos en que convergen las alas de cuatro ángeles, genera un grupo para el cual el dominio fundamental es la mitad de un par cualquiera ángel-demonio unidos por la cabeza.

En el grabado superior de la figura 3.34, hay un grupo evidente de simetría compuesto por transformaciones que conservan las distancias. Los giros de 120 grados con centro en el centro de la circunferencia dejan la figura invariante y hay en ella seis eje de simetría; a saber, los que unen el centro de la circunferencia con los centros de las cabezas de los ángeles o demonios de mayor tamaño, de modo que podría interpretarse que hay un dominio fundamental, un sector de amplitud de 60 grados y que, al mover este sector, se cubre el círculo.

Pero hay algo más en la misma figura. Podemos imaginar una geometría distinta del interior del círculo, en la cual medimos con una regla que se hace más pequeña al alejarnos del centro del mismo y en dirección al borde, de modo que todos los ángeles y todos los demonios sean iguales. Eso es posible con un tipo de geometría llamado geometría hiperbólica, con la cual todos los demonios son resultado de trasladar o

girar convenientemente uno de ellos, obteniéndose un dominio fundamental como el de la figura de la parte inferior, pero ahora el grupo de simetría está compuesto por unas transformaciones hiperbólicas que no son los movimientos habituales.

La geometría hiperbólica no es tan extraña como parece. Imaginemos el círculo y en su centro una criatura plana, a la que podemos llamar  $U$  y cuyo diámetro es la centésima parte del diámetro del círculo. Así, desde nuestro punto de vista exterior, le queda una distancia igual a cien veces su diámetro para llegar al borde. Imaginemos también que, cada vez que  $U$  avanza hacia el borde, su tamaño disminuye, de modo que siguen quedándole, siempre desde nuestro punto de vista, cien veces su diámetro para llegar al borde. El círculo, para nosotros acotado, es infinito para esa criatura.

Esta diferencia entre la visión del universo desde dentro y desde fuera, de modo que para un observador exterior un cambio de posición lleva aparejado un cambio de forma o tamaño imperceptible para el que lo padece, es contraria a nuestra percepción cotidiana del espacio que, siendo esencialmente táctil, hace que nos resulte difícil dudar de la inmutabilidad de los objetos sólidos. Pero desde el punto de vista matemático, es fácil construir este tipo de geometrías. La descrita corresponde aproximadamente al modelo de Poincaré del plano hiperbólico, mientras que las rectas de ella son los arcos de circunferencia ortogonales al borde del círculo y los diámetros de la circunferencia. Los giros con centro en el centro del círculo no tienen un comportamiento extraño, pero las homotecias con el mismo centro producen la disminución de tamaño a la que aludíamos antes.

Se puede definir una distancia en el interior del círculo con la cual esas rectas anómalas (los arcos intersecados por el círculo en las circunferencias ortogonales a su borde) son efectivamente las líneas de mínima distancia (rectas) y la geometría del círculo tiene las propiedades de la geometría euclídea, salvo las derivadas del célebre «quinto postulado» (por un punto exterior a una recta se puede trazar un única paralela a ella), que obviamente no es válido en este espacio.

Pues bien, para esta geometría los ángeles y demonios son todos iguales en tamaño, el dominio fundamental de la figura es media loseta ángel-demonios y hay simplemente que añadir a los generadores del grupo una traslación hiperbólica.

Esta geometría tiene mucho que ver con la «forma del espacio». Imaginemos dos rectas paralelas en el plano situadas a igual distancia a uno y otro lado de una recta  $r$  y tracemos una curva asintótica a ambas rectas y simétrica respecto a  $r$ . A continuación, giremos la figura en torno a  $r$ , construyendo así un cilindro de revolución con una superficie en su interior asintótica al cilindro. Supongamos que la superficie es transparente e iluminémosla con un foco en el infinito para que se proyecte en una pantalla ortogonal al eje del cilindro (figura 3.35).

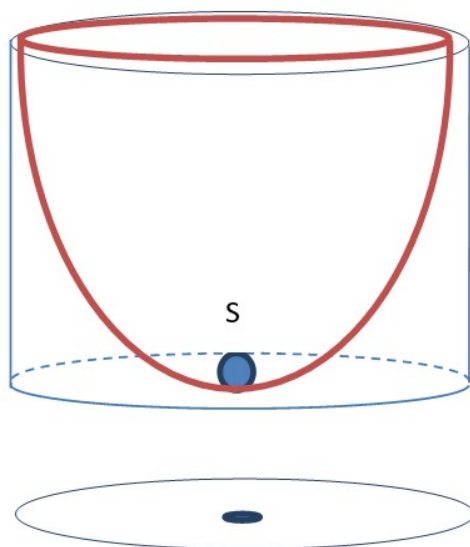


Figura 3.35

Coloquemos ahora a  $S$  en el vértice de la superficie: en la pantalla veremos un círculo con  $S$  en su centro. Si ahora  $S$  se mueve en la superficie, su sombra se desplazará por el círculo, pero nunca llegará al borde, porque ahora  $S$  deberá recorrer una distancia verdaderamente infinita para que esto suceda. El hábitat de  $S$  tiene ahora nuestra métrica, pero tiene forma y el efecto es el mismo; es decir, la forma de la superficie no es sino una manera de medir diferente.

M. Escher conocía bien la geometría subyacente a sus diseños y esta no es la única geometría extraña presente en su trabajo.

Vamos a presentar ahora otro tipo de simetría: la de cambio de escala, que ha disfrutado en los últimos años de más popularidad incluso que la banda de Möbius. Hablamos de los fractales y en particular del llamado «conjunto de Mandelbrot». Aquí no tenemos más remedio que suponer que los lectores saben lo que es un número complejo (sin entrar en detalles, un complejo es una expresión de la forma  $z = a + ib$ , con  $i^2 = -1$ ).

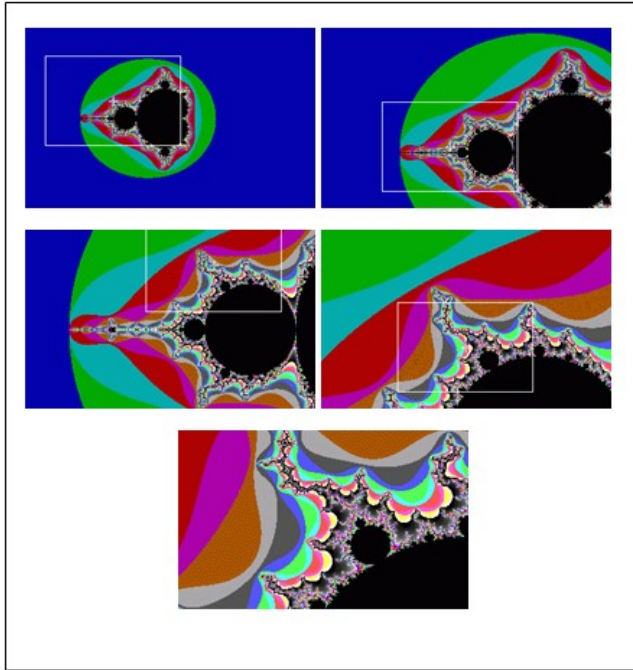


Figura 3.36. Ampliaciones sucesivas del conjunto de Mandelbrot.

Cada número complejo  $a + ib$  se representa en el plano, respecto a un sistema cartesiano de coordenadas, por su «afijo», que es el punto de coordenadas  $(a; b)$ .

Entonces, para cada número complejo  $c$  se puede considerar la transformación del plano  $f_c$ , definida al asignar a cada punto  $(a; b)$  del plano el punto  $f_c(a; b)$ , afijo del complejo  $(a + ib)^2 + c$ . Si ahora aplicamos iteradamente la transformación  $f_c$  a un punto, obtenemos una sucesión de puntos, que puede estar acotada o alejarse del origen tanto como queramos:

$$(a; b), f_c(a; b), f_c^2(a; b), f_c^3(a; b), \dots$$

Por ejemplo, si empezamos con el punto  $(0; 0)$ , afijo del complejo 0, obtenemos la sucesión de complejos:

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots$$

Si tomamos ahora  $c = i$ , se obtiene la sucesión:

$$0, i, -1 + i, -i, -1 + i, -i, -1 + i, \dots$$

Esta corresponde a la sucesión oscilante (y acotada) de puntos:

$$(0; 0), (0; 1), (-1; 1), (0; -1), (-1; -1), (0; -1), \dots$$

Sin embargo, si tomamos  $c = 1$ , se obtiene la sucesión no acotada:

$$(0; 0), (1; 0), (2; 0), (5; 0), (26; 0), (677; 0), \dots$$

Esta es una sucesión no acotada.

Así, si para un complejo  $c$  existe algún punto tal que la sucesión antes construida está acotada, entonces se dice que  $c$  pertenece al conjunto de Mandelbrot. Por ejemplo,  $i$  está en el conjunto de Mandelbrot y, aunque solo hemos visto un punto que da lugar a una sucesión no acotada, se puede probar que 1 no está en ese conjunto.

En el conjunto de Mandelbrot, se asignan colores a sus puntos según la rapidez con que se acumulan las sucesiones de puntos asociados a ellos y algunas de sus ampliaciones se presentan en la figura 3.36. En esas ampliaciones regionales, se aprecia la propiedad de estabilidad por cambios de escala que nos permite afirmar que tiene una estructura fractal. Pero, para hablar de fractales con propiedad, necesitamos un poco más de matemáticas.

En matemáticas llamamos «línea poligonal» a una línea compuesta por segmentos concatenados que no se corta a sí misma. En la figura 3.37, presentamos un proceso de construcción, inacabable, de una línea poligonal interesante llamada «curva de Koch». La construcción comienza con los cuatro segmentos de la etapa 1, pasamos a la etapa siguiente y sustituimos cada uno de los cuatro segmentos por otros cuatro como los de la etapa 1; así tenemos la poligonal de 16 segmentos de la etapa 2, en la que sustituimos cada segmento por cuatro como los de la etapa 1 y tenemos la poligonal de 64 segmentos de la etapa 3. Si continuamos el proceso indefinidamente (en matemáticas es posible), tenemos en el límite la curva de Koch que se pinta en rojo. Esta curva tiene la misma propiedad de estabilidad por cambio de escala; es decir, es igual que cualquiera de sus trozos convenientemente ampliado que tenía el conjunto de Mandelbrot.

Visto este ejemplo, vamos a preguntarnos por la posibilidad de medir una poligonal. En principio parece sencillo: basta medir la longitud de cada segmento y sumar los números obtenidos. Es fácil entender que, si fijamos dos puntos dentro de un rectángulo, las longitudes de las poligonales con extremos en esos puntos y contenidas en el rectángulo son muy variables. En la figura 3.37 podemos ver, por ejemplo, lo que sucede con la curva de Koch.

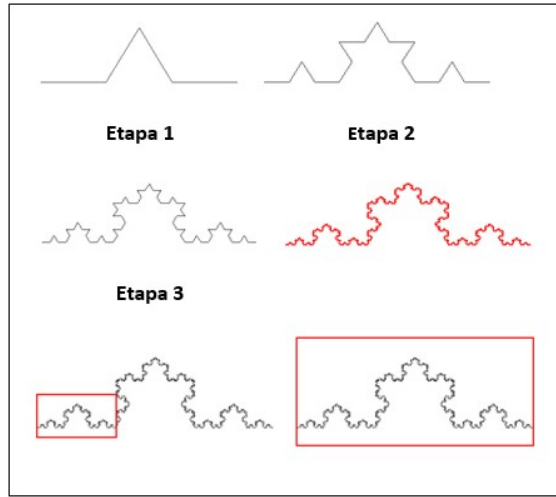


Figura 3.37. Etapas de la construcción de la curva de Koch y estabilidad por ampliaciones.

Si en la etapa 1 cada segmento mide una unidad, la distancia entre los extremos de la poligonal es de 3 unidades y la longitud de la poligonal es 4; por tanto, cada etapa en la construcción da una poligonal cuya longitud es  $\frac{4}{3}$  de la anterior. Como  $\frac{4}{3}$  es mayor que 1, la poligonal aumentaría indefinidamente su longitud. Por ello, la longitud de la curva de Koch sería infinita, lo cual choca con la intuición, porque la curva esta acotada en un rectángulo. Lo que haremos para hacer desaparecer esta paradoja es observar mejor el significado de medir y tratar de dar una definición de medida que no presente este tipo de problemas. Ello nos llevará a modificar el concepto de dimensión.

Tenemos una idea intuitiva de dimensión que nos permite afirmar que un segmento tiene dimensión 1, un cuadrado tiene dimensión 2 y un cubo tiene dimensión 3. También parece razonable admitir que un subconjunto del plano tiene dimensión menor o igual que 2, que es la dimensión del plano entero.

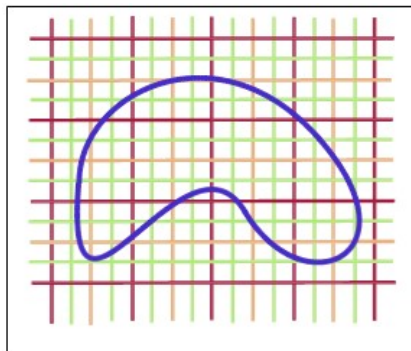


Figura 3.38. Área de una figura plana.

La noción de dimensión está ligada a la de medida. Supongamos que tenemos un subconjunto del plano (figura 3.38), si queremos calcular su área( $S$ ), basta tomar una cuadrícula del plano formada por cuadrados de lado  $r$  y cubrir con ellos la figura. Si tomamos todos los cuadrados que toquen a la figura, esta quedará cubierta por esos cuadrados y su área será menor o igual que la suma de las áreas de estos; en cambio, si tomamos los cuadrados contenidos completamente en la figura, la suma de sus áreas será menor que la de esta.

Entonces, si el total de los cuadrados que tocan a la figura se representa por  $N(r)$  y el de cuadrados contenidos en ella, por  $n(r)$ , el área de la figura estará entre  $s(r) = n(r) \cdot r^2$  y  $S(r) = N(r) \cdot r^2$ .

Si ahora dividimos en 4 cuadrados de la misma área cada uno de los utilizados y hacemos las mismas elecciones:

- El lado de cada nuevo cuadrado será  $r/2$  y en consecuencia su área será  $(r/2)^2$ .
- Habrá  $N(r/2)$  cuadrados de la nueva cuadrícula que corten a la figura; pero, en general, no todos los cuadrados pequeños en que hemos dividido cada cuadrado que corta a la figura, la corta a su vez. Por tanto,  $N(r/2)$  será menor o igual que  $4 \cdot N(r)$ .
- Del mismo modo, habrá  $n(r/2)$  cuadrados de la nueva cuadrícula que estén contenidos en la figura; además, todos los cuadrados pequeños en que hemos dividido cada cuadrado contenido a la figura también estarán contenidos en ella y pueden aparecer más cuadrados pequeños. Por tanto,  $n(r/2)$  será mayor o igual que  $4 \cdot n(r)$ .

Si repetimos el proceso, llegaremos a encerrar la figura entre dos sucesiones de familias de cuadrados: una creciente, contenida en ella; y otra decreciente, que la contiene. Sus áreas serían:

$$\begin{aligned} n(r)r^2 &\leq n\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2 \leq n\left(\frac{r}{4}\right)\left(\frac{r}{4}\right)^2 \leq \dots \leq S \leq \dots \\ &\leq N\left(\frac{r}{4}\right)\left(\frac{r}{4}\right)^2 \leq N\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2 \leq N(r)r^2 \end{aligned}$$

Y se demuestra, lo que es claro por la construcción, que así aproximamos el área de la figura tanto como queramos.

Por ejemplo, en la figura 3.38 hay tres divisiones de la cuadrícula. Si tomamos como unidad el lado de la más grande,  $r = 1$  y, cómo la figura azul corta a los doce cuadros y no contiene a ninguno, es:

$$\begin{aligned} S(1) &= 12 \cdot 1^2 = 12 \\ s(1) &= 0 \end{aligned}$$

Para la segunda cuadrícula,  $r = 1/2$  y la figura azul corta a 33 cuadros y contiene a 10, entonces:

$$S(1/2) = 33 \cdot (1/2)^2 = 8,25$$

$$s(1/2) = 10 \cdot (1/2)^2 = 2,5$$

Para la tercera,  $r = 1/4$  y los números son 99 y 62, luego:

$$S(1/4) = 99 \cdot (1/4)^2 = 6,18$$

$$s(1/4) = 62 \cdot (1/4)^2 = 3,875$$

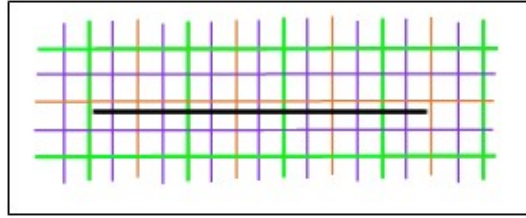


Figura 3.39. Cuadrícula y longitud.

Vemos que las diferencias se van haciendo más pequeñas y que repitiendo más veces llegaríamos a un número tan aproximado al área de la figura como queramos. En cambio, si hacemos lo mismo con el segmento de la figura 3.39, obtenemos:

$$S(1) = 4 \cdot 1^2 = 4$$

$$S(1/2) = 7 \cdot (1/2)^2 = 1,75$$

$$S(1/4) = 14 \cdot (1/4)^2 = 0,87$$

El número se hace tan próximo a cero como queramos, porque el segmento no contiene a ningún cuadrado. En cambio, si en lugar de  $S(r)$  calculamos:

$$L(r) = n(r) \cdot r$$

Es decir, medimos la longitud de la familia de cuadrados que cubren la línea en lugar de su área y al disminuir  $r$  nos aproximamos tanto como queramos a la longitud real del segmento:

$$L(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$L(1/2) = 7 \cdot (1/2) = 3,5$$

$$L(1/4) = 14 \cdot (1/4) = 3,25$$

Si tomamos una curva fractal y le aplicamos ambos procesos, encontramos que para ella  $S(r)$  se aproxima a cero y  $L(r)$  se hace tan grande como queramos y tiende al infinito, pero observamos que:

- Para el segmento que tiene dimensión 1, la fórmula que sirve es  $L(r) = n(r) \cdot r^1$
- Para una figura de dimensión 2, la fórmula que sirve es  $S(r) = n(r) \cdot r^2$

Podemos tratar de encontrar el menor número  $d$  entre uno y dos, tal que  $F(r) = n(r) \cdot r^d$  tienda a un número distinto de cero, cuando hacemos decrecer la talla de la cuadrícula. Ese número se llama «dimensión fractal de la figura». Se dice que un subconjunto del plano se dice que es un fractal si su dimensión fractal no es ni uno ni dos. Por ejemplo, para la curva de Koch se tiene una dimensión fractal de 1,2618, luego esta curva es un fractal.



Figura 3.40. *Sin título* de Jason Pollock, 1950.

Con independencia de la belleza de los conjuntos fractales que, según todos los criterios, nos permitiría llamar arte a la habilidad de diseñar programas informáticos que los dibujen y colorean, la geometría puede haber encontrado en ellos una nueva vía de entrada al mundo artístico. Muchos de los cuadros modernos se producen acumulando pintura de un modo prácticamente caótico, por lo que cabe preguntarse si hay en ellos una estructura fractal, todo ello con independencia de si el pintor era o no consciente de la existencia de este tipo de estructuras cuando realizaba su obra. La dimensión fractal del cuadro daría una idea de la complejidad del mismo y en algún caso podría servir como medio de autenticación.

Esta idea es la base de un trabajo de Richard Taylor y sus colaboradores [114], publicado en la prestigiosa revista *Nature* en 1999. Estos autores, tras un análisis estadístico de los cuadros de Pollock, concluyeron la existencia en los mismos de una estructura fractal. Además, observaron que la dimensión fractal de dichos cuadros aumentaba con los años hasta llegar a ser de 1,9 en el titulado: *Sin título* (1950) (figura 3.40).



Figura 3.41. Dibujo con estructura fractal «a la Pollock».

El trabajo de Taylor dio origen a una polémica importante, sobre todo respecto a su afirmación acerca de la posibilidad de autenticar presuntos cuadros de Pollock por medio de la teoría de fractales. El último (por el momento) acto de esa polémica consistió en la publicación, también en *Nature*, en 2006, de un trabajo de K. Jones-Smith y H. Mathur [66] que refuta los resultados de Taylor basándose en dos razones:

- El estudio de Taylor es muy parcial y se limita a 1 de los 180 cuadros reconocidos de Pollock.
- La textura de la tela no permite las suficientes reducciones de escala para que las medidas sean significativas.

Para poner de manifiesto este último punto, los autores citados demuestran que, de acuerdo con las técnicas de Taylor, un dibujo cómo el de la figura 3.41 es un Pollock auténtico.

La simetría en sus diversas formas está presente, según hemos mostrado, en muchas manifestaciones artísticas. Pero —y nuestras últimas observaciones sobre los análisis de la obra de Pollock son buena prueba de ello— los autores no buscan esa simetría de forma consciente, salvo en el caso de las bandas decoradas donde se usan como un simple método para propagar un dibujo de forma periódica a lo largo de una superficie.

### 3.6. ¿Una teoría matemática del arte?

Una de las facetas más interesantes de las matemáticas es la posibilidad de utilizarlas como herramienta de análisis y a lo largo de la historia se han usado algunas veces con el laudable propósito de analizar el arte. Al hablar de este tema

es inevitable recordar el fragmento del libro *Understanding Poetry* del Dr. J. Evans Pritchard<sup>5</sup> recogido en la novela *El club de los poetas muertos* de Nancy H. Kleinbaum [70] y en la película del mismo título de Peter Weir:

Para comprender la poesía, en primer lugar hay que familiarizarse con la métrica, el ritmo y las figuras estilísticas. A continuación hay que hacerse dos preguntas. En primer lugar: ¿el tema del poema está tratado con arte? En segundo lugar: ¿cuál es la importancia y el interés de este tema? La primera pregunta atañe a la perfección formal del poema; la segunda, a su interés. Cuando se hayan contestado estas dos preguntas, resultará relativamente fácil determinar la calidad global del poema. Si se anota la perfección del poema en la línea horizontal de un gráfico y su importancia en la vertical, el área conseguida de esta manera por el poema nos da la medida de su valor.

Así, un soneto de Byron podrá obtener una nota alta en la vertical, pero una nota mediocre en la horizontal. Por el contrario, un soneto de Shakespeare recibirá una puntuación muy alta tanto en la vertical como en la horizontal, cubriendo entonces una amplia superficie, lo que demostrará la alta calidad de la obra en cuestión...

En lo que sabemos, la primera teoría matemática de la estética se debe al excelente matemático George D. Birkhoff [12] y está muy en la onda del Dr. Evans Pritchard.

Birkhoff considera la obra de arte en función de sí misma y del espectador. Desde el punto de vista de este último, la obra presenta una dificultad para ser entendida a la que llama «complejidad». Las obras más complejas precisan un mayor esfuerzo del espectador para apreciarlas.

Además, en la obra hay un «orden», donde esta palabra se usa en sentido amplio de organización interna y, cuanto mayor sea el orden de la obra, más fácil será apreciarla.

En un plano estrictamente formal, Birkhoff define la «medida estética» ( $M$ ) de una obra cómo el cociente de su orden ( $O$ ) por su complejidad ( $C$ ); es decir,  $M = O/C$ . Pero con esta definición no se resuelve nada, hay que explicar cómo se cuantifican orden y complejidad, además de darse cuenta que no es posible comparar por su medida estética manifestaciones artísticas diferentes.

Veamos dos ejemplos de cómo se procede para aplicar el método de evaluación del valor estético relativo de Birkhoff [12]. Comenzamos con un caso sencillo, pero que está en la base de la evaluación de la pintura: los polígonos. Para un polígono, la complejidad  $C$  viene dada por el número de rectas distintas que contienen lados del polígono; ya que, al no suponerse que el polígono es convexo, puede haber varios lados sobre la misma recta. En cambio, el orden viene dado por una fórmula, cuyos elementos enumeraremos sin mucha precisión para no alargarnos demasiado:

$$O = V + E + R + HV - F$$

---

<sup>5</sup>J. Evans Pritchard es una invención del guionista, pero la cita corresponde a la página 191 de la quinta edición del libro del Dr. Laurence Perrine, *Sound and Sense an introduction to Poetry* (Harcourt Brace Jovanich, 1977). Aunque al parecer en las ediciones posteriores a 2002 ha sido borrada.

Donde:

- $V$  mide la simetría vertical.
- $E$  mide el equilibrio.
- $R$  mide la estabilidad por giros.
- $HV$  mide la relación del polígono con una cuadrícula horizontal-vertical.
- $F$  es un factor negativo que mide la falta de satisfacción con la forma.

En la figura 3.42 damos una relación de los valores estéticos que resultan de aplicar la fórmula a algunos polígonos:

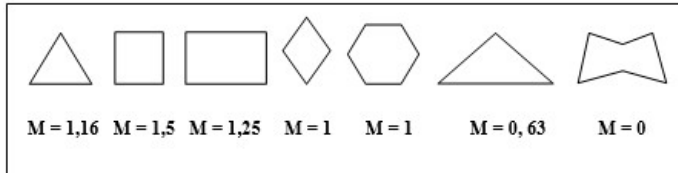


Figura 3.42. Medida del valor estético relativo de algunos polígonos.

Para estudiar un cuadro, Birkhoff traza un sistema de rectas siguiendo las líneas principales de la composición, para lo cual busca un eje principal (por lo general, el eje del cuadro) y ejes secundarios; luego tiene en cuenta los objetos representados y otra serie de elementos que es más largo describir. Así define una poligonal a la que aplicar la fórmula anterior; después, con fórmulas complementarias, se tienen en cuenta los colores. Esto, reconociendo siempre la enorme dificultad de hacer una valoración global, confiere a su trabajo un carácter pionero y casi meramente indicativo de un camino que le parecía interesante explorar.

El trabajo de Birkhoff [12] tuvo bastante repercusión mediática y, a solicitud de los editores, Van de Water [118] publicó *Science News Letter*, dirigido al gran público y dedicado sobre todo a la valoración de la poesía. En el la medida del orden de  $e$ , un poema se determinaba por la fórmula:

$$O = aa + 2r + 2m - 2ae - 2ce$$

Donde:

- $aa$  mide las asonancias.
- $r$  mide la rima.
- $n$  mide la musicalidad.
- $ae$  mide el exceso de aliteraciones.
- $ce$  mide el exceso de rimas consonantes.

R. C. Davis [32], en 1936, encontró inadecuados algunos de los postulados de Birkhoff y constató experimentalmente la existencia de bastantes divergencias entre el valor relativo concedido a un objeto por los espectadores y el valor predicho por las fórmulas. Pero, como ya señalamos, el propio Birkhoff consideraba que una apreciación intuitiva es mejor que cualquier intento de analizar el origen del placer que produce un objeto, aunque siempre mantuvo que este se produce (de modo inconsciente) como consecuencia de determinadas proporciones computables matemáticamente.

La obra de Birkhoff ha tenido más seguidores y competidores. Por el ejemplo el biólogo y matemático Joseph Schilinger [106], quien aborda el problema de clasificar numéricamente las obras de arte, teniendo en cuenta también proporciones, simetrías, sucesiones numéricas etc., tal como las que hemos descrito en las secciones anteriores, todo ello en el espíritu de Birkhoff, pero limitándose a clasificar, sin pretender dar valores estéticos.

Citemos también la última ramificación del trabajo de Birkhoff. Acaba de aparecer un artículo escrito por los autores españoles Jaume Rigau, Miquel Feixas y Mateu Sbert [98], en el que, en la línea marcada por Max Bense de analizar las medidas de Birkhoff desde el punto de vista de la teoría de la información, se substituyen las nociones difusas de complejidad y orden de Birkhoff por las nociones más precisas de complejidad de Kolmogoroff y entropía de Shanon.

Por último, hablemos del sistema de clasificación matemática de las obras musicales propuesto por Mazzola. Al contrario que en la obra de Birkhoff y sus seguidores, en los que la herramienta matemática utilizada es muy modesta, en el trabajo de Mazzola se utilizan los resultados más recientes y complejos de álgebra homológica y geometría algebraica. En palabras de Mazzola [80]:

La música es una creación central en la vida y el pensamiento del ser humano, que actúa en una vía de la realidad diferente de la de la física. Creemos que el intento de comprender o componer una obra musical es tan importante y difícil como el de unificar las interacciones fuertes y débiles.

Mazzola clasifica las estructuras musicales presentando sus clases como puntos racionales de un esquema algebraico con valores en un cierto cuerpo. Pero resulta casi imposible explicar el contenido de su trabajo de modo comprensible, no ya para los no matemáticos, sino incluso para la mayoría de los profesionales de esta ciencia.

En el sentido opuesto, de hacer del arte una teoría matemática sistemática, hay ejemplos más próximas a la técnica, como la arquitectura (pensemos en Le Corbusier o en Leoz); pero hay también un ejemplo en la pintura: Vasili Kandinsky. En su libro *Punto y línea sobre el plano* [68] y en un ensayo que lo continúa titulado *Análisis de los elementos primarios de la pintura* (1928), [67], Kandinsky propone la transformación de la pintura en una ciencia exacta. Ya en 1912 escribía:

El número tiene mucha importancia en la búsqueda actual de relaciones abstractas. Toda fórmula numérica es fría como la cumbre helada de una montaña y, en su regularidad absoluta, firme como un bloque de mármol. Es fría y firme como toda necesidad.

El intento de representar lo compositivo en una fórmula es la causa de la aparición del llamado cubismo. Esa construcción “matemática”, si se la aplica consecuentemente, es una forma que conduce por necesidad al mayor grado de aniquilación de la cohesión material entre los elementos del objeto (por ejemplo, Picasso). Lo generalmente censurable es que el número se aplique de una manera demasiado limitada.

Todas las cosas pueden representarse en una fórmula matemática o simplemente como número. Sin embargo, hay diferentes tipos de números: 1 y 0,3333... son entes equiparables, igual de vivos y dotados de sonido interno. ¿Por qué me voy a conformar con 1? ¿Por qué voy a excluir 0,3333...?

Para Kandinsky, la teoría de la pintura abstracta está destinada a sistematizar y completar la tarea iniciada por los teóricos del impresionismo y del cubismo, ya que «hoy en día hay motivos para suponer que la teoría de la pintura sigue un camino científico que la transformará en doctrina exacta».

Los objetivos de Kandinsky son: crear un vocabulario eficaz que dote de su verdadero sentido a palabras que hoy en día han perdido su significado; es decir, dotar a la teoría de una axiomática y crear una gramática con sus reglas de construcción. Esta es la lógica del razonamiento matemático.

Los objetos primitivos de la teoría son los puntos y las líneas. Las líneas comienzan y terminan en puntos y pueden ser rectas, horizontales, verticales, diagonales o en posición arbitraria, mientras que las curvas pueden ser geométricas o arbitrarias. En el caso de las figuras planas, estas pueden ser polígonos, círculos o figuras arbitrarias.

Las reglas de composición incluirían las nueve representadas en la figura 3.43, que son:

1. Repetición de una recta.
2. Repetición de un ángulo.
3. La repetición invertida de un ángulo genera una figura plana.
4. Repetición de una curva.
5. La repetición de curvas opuestas genera una nueva figura plana.
6. Repetición rítmica de una recta en torno a un punto.
7. Repetición rítmica de una curva en torno a un punto.
8. Repetición de una curva dividida por una curva acompañante.
9. Repetición opuesta de una curva.

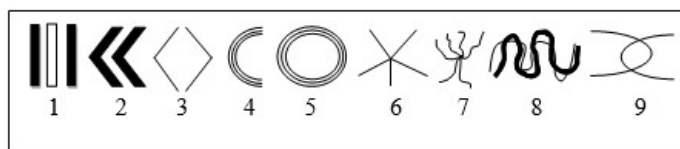


Figura 3.43. Leyes de construcción de la pintura de Kandinsky.

A cada figura se le asocia un valor relativo y se dan las reglas de variación de dicho valor por las operaciones permitidas, a su vez se incluye el color también en el valor relativo. La teoría es apenas un esbozo y muchos de sus aspectos son poco claros, pero constituye un avance interesante hacia una descripción matemática del arte, lo que resulta aún más interesante por provenir de un pintor y no de un matemático.

### 3.7. Matemáticas y arte, ¿algo en común?

Terminaremos este trabajo con una sección políticamente incorrecta en la que expondremos nuestro punto de vista sobre las matemáticas y el arte de hoy. Hace muchos años leí en *Ilusión y realidad* de Pío Baroja una frase con la cual no estuve muy de acuerdo:

Muchas de las teorías basadas en la experiencia, que parecen lógicas y claras, fallan. Solamente la matemática antigua queda en la práctica, porque es, más que un conocimiento de lo exterior, una medida de la manera de juzgar y de pensar del hombre.

En aquel momento, mi opinión respecto a la respuesta a la pregunta: ¿las matemáticas se inventan o se descubren?, se decantaba en forma decidida por el descubrimiento. Hoy, cuarenta años después, no estoy tan seguro. Creo que hay una matemática que se inventa (la mala matemática) y que hay otra que o se descubre, o nos descubre algo de nuestra naturaleza (la buena matemática).

El arte está en las mismas circunstancias y, si bien no hay un uso importante de la matemática en él, ambas tienen mucho en común. De igual manera como Thomas de Quincey considera el asesinato como una de las bellas artes, cabe también hablar, sin exageración, de las matemáticas como una de ellas.

Primero veamos la definición de Kant, quien define el arte en sí y no en relación con el ambiente. Obviamente, una construcción matemática no es fruto de la naturaleza, «se produce mediante una voluntad que pone razón a la base de su actividad». Así, el que las matemáticas no son una ciencia es aún más claro. Para Kant la ciencia se distingue del arte como técnica de teoría y cita un ejemplo: «como agrimensura de geometría, e insiste: Cuando a pesar de conocer algo lo más completamente posible, no por eso se tiene en seguida la habilidad de hacerlo, y en tanto que ello es así, pertenece eso al arte».

Podemos estudiar y reproducir una demostración o enunciar un teorema conocido, como podemos copiar hasta en sus menores detalles un cuadro. ¿Qué museo puede

asegurar que todas sus obras son del pintor a que se atribuyen? Pero, para enunciar un nuevo teorema o hacer una nueva demostración, hace falta ser un verdadero artista. El hecho de que las matemáticas no constituyen un oficio es más discutible, pero también la afirmación de que el arte actual no es un oficio. Es cierto que, para la mayoría de los (verdaderos) matemáticos, la matemática es una ocupación agradable por sí misma y, si bien los hay que la consideran fatigosa, desagradable y solo atractiva por su efecto (por ejemplo, la ganancia, no necesariamente económica), ¿es que no hay artistas reconocidos que tienen la misma idea del arte que cultivan?

Cuando Kant describe las bellas artes, asigna el primer puesto a la poesía y ello porque:

Extiende el espíritu, poniendo la imaginación en libertad, y, dentro de los límites de un concepto dado, entre la ilimitada diversidad de posibles formas que con él concuerdan, ofrece la que enlaza la exposición del mismo con una abundancia de pensamientos a la cual ninguna expresión verbal es enteramente adecuada, elevándose así, estéticamente, hasta ideas.

Creo que muchas construcciones matemáticas se adaptan perfectamente a lo descrito en estas líneas. Se me puede objetar que es precisa una cierta preparación para apreciarlo; pero, ¿no hace falta una gran preparación para apreciar muchos poemas?

Cualquiera que lea con espíritu abierto la *Crítica del juicio*, convendrá conmigo en que, según las definiciones de Kant, la matemática es una de las bellas artes, situada entre la poesía y la música, pero más cerca de la primera; ya que, al contrario que la segunda no precisa de reglas matemáticas para su exposición.

Se puede argumentar en contra de esta afirmación alegando la dependencia del razonamiento lógico que tiene la matemática y que le confiere una previsibilidad, incluso un carácter de inevitable, que la alejan del arte. Sobre este argumento, hubo una célebre polémica a fines del siglo XIX entre el biólogo Thomas Henry Huxley y el matemático James J. Sylvester [89]. Huxley afirmaba que:

El razonamiento matemático es casi puramente deductivo. El matemático parte de unas pocas proposiciones simples, cuya demostración es tan obvia que se llaman evidentes, y el resto de su trabajo consiste en sutiles deducciones a partir de ellas.

Sylvester responde a esta y otras afirmaciones similares con un texto en el que —y probablemente esto le habría horrorizado más que las afirmaciones que pretendía refutar— prueba que la matemática encaja perfectamente con la definición de Kant de poesía:

Esto [se refiere a las afirmaciones de Huxley] es como juzgar a la arquitectura por solo un poco de ladrillos y mortero, o por un bloque de piedra en un edificio público, o la pintura por sólo los colores mezclados en la paleta, o la música por los sonidos débiles y desgarrados producidos por un arco que se pasa al azar por las cuerdas de un violín. El mundo de las ideas que descubre o ilumina, la contemplación de la divina belleza y el divino orden que suscita, la armoniosa conexión de sus partes, la infinita jerarquía y la evidencia absoluta de las verdades de que se ocupa, este y otros parecidos son los más sólidos motivos del título que da derecho a la matemática al respeto humano, y esos motivos seguirán siendo inatacables e inigualables aunque el plan del universo se desplegara como un mapa ante nuestros pies y se permitiera a la mente del hombre captar de una mirada todo el esquema de la creación.

Las matemáticas tienen ciertamente un carácter de inevitables; pero, ¿no lo tienen también los buenos dramas? ¿Podría alguien, salvo un cineasta de la época dorada de Hollywood, hacer que Romeo y Julieta terminasen en boda?

Es obvio que las matemáticas tienen capacidad de sorpresa. Piénsese en alguna de las demostraciones del teorema de Pitágoras y su capacidad de asombro está fuera de toda duda, incluso a niveles muy elementales: ¿de verdad hay tantos números pares como naturales?

Hay otras características esenciales de las matemáticas que las alejan de las ciencias y las aproximan al arte. Von Bertalanffy [120] observa que tanto las formas de expresión artística como la ciencia llevan consigo una traducción a un sistema de signos que dependen de la cultura, época y personalidad de los actores. El arte no es una representación de la realidad, de lo contrario la mejor pintura sería una fotografía. El arte es una interpretación de ella, un reflejo en la realidad de la personalidad del artista. Así, no tiene sentido la noción de verdad o falsedad en arte.

La ciencia no alcanza nunca a ser una representación de la realidad, sino solo una sucesión de modelos simbólicos más o menos aproximados. Tampoco hay una noción de verdad, pero sí de capacidad de predicción de los modelos y de adaptación de estos a los fenómenos conocidos. Aquí está la diferencia fundamental entre arte y ciencia para Von Bertalanffy:

En arte no existen sistemas simbólicos superiores o predominantes, de modo que el arte viejo no puede verse nunca superado por la “vanguardia”. En ciencia no sucede así, ya que nos es posible liberarnos paulatinamente de la especificidad de nuestra organización biológica.

En matemáticas como en arte hay modas y una teoría determinada puede pasar de moda durante un cierto tiempo, pero todas las teorías matemáticas siguen vigentes. ¿Quién aceptaría hoy la física o la química griegas? Sin embargo, Euclides sigue plenamente vigente. Luego, al hablar de ciencia y arte, Von Bertalanffy coloca, desde la óptica de la teoría de sistemas, las matemáticas del lado del arte.

Si miramos ahora matemáticas y arte desde el punto de vista de la sociedad, hay también otros puntos de contacto. El concepto de espacio cambiante en geometría es asimismo cambiante en pintura. Spengler usa términos geométricos para caracterizar las civilizaciones, pero sus términos no pasan de mero nominalismo.

Ya hemos dicho que no pretendemos tratar aquí el uso de la perspectiva en la pintura, pero debemos remarcar que, a partir del siglo XV, su uso se generaliza. Sin embargo, no hay una teoría coherente. Los pintores tratan de ser geómetras, pero no son capaces de levantar un edificio consistente como el de Euclides. Su geometría es experimental, más artesanía que matemáticas. Recordemos que Alberti se pregunta por la existencia de algún invariante para la perspectiva (Alberti no conocía el *Almagesto* en el que Ptolomeo usa la invariancia por proyección de la razón doble). Hasta un siglo más tarde, no hay una publicación dedicada a la sistematización de la geometría de las proyecciones, escrita por Desargues y que no tuvo repercusiones hasta su redescubrimiento, siglo y medio más tarde.

Pasemos a otro momento de cambio. La pintura va, a fines del siglo XIX y principios del siglo XX, cambiando su concepto de espacio y al final incluso su concepto de forma. Aquí la matemática ya no va con retraso, sino a la altura de la pintura. La noción de distancia, base de la geometría clásica, pierde interés e incluso lo pierde la noción de forma, con la aparición de la topología. Aquí cabe achacar al ambiente social la aparición simultánea de ambos cambios.

La influencia de la sociedad también produjo, por un proceso de mercantilización, cambios simultáneos en arte y matemáticas. En la figura 3.44 aparecen dos cuadros de autores muy significativos. El primero de ellos, Malevich, fue fundador de la tendencia pictórica llamada Suprematismo, nuevo lenguaje plástico que pretende ser «un sistema completo de construcción del mundo». Según él mismo escribió de otro de sus famosos cuadros (*Cuadrado Negro*), este, más que un reto a un público que había perdido interés por el arte, era una forma nueva de búsqueda de Dios, el símbolo de una nueva religión.

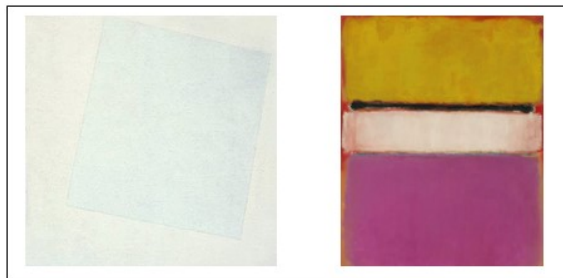


Figura 3.44. *Blanco sobre fondo blanco* de Malevich (1916) y *Centro blanco* de Rothko (1950), vendido en subasta por 54 millones de euros.

En la figura 3.44 está su obra *Blanco sobre fondo blanco*, en la cual llega al extremo de su teoría. Obviamente el trabajo de Malevich no es solo una declaración, sino un tratado completo; pero, una vez que esta declaración se ha hecho, los demás pintores que pintan rectángulos con diversos colores hacen citas de la obra de Malevich y, si volvemos a la definición de Kant: «Cuando al conocer algo lo más completamente posible, no por eso se tiene enseguida la habilidad de hacerlo, entonces, *y en tanto que ello es así*, pertenece eso al arte». Es claro que difícilmente puede llamarse arte a ese trabajo.

Posiblemente habría que hacer una excepción con el segundo autor de la figura 3.44, Rothko, pintor estadounidense de origen lituano, quien emigró a Estados Unidos cuando todavía era un niño. Cursó estudios universitarios y su formación artística fue sobre todo autodidacta. Tras unos inicios en que se acercó al surrealismo y al expresionismo, llegó a un estilo absolutamente personal que lo convirtió en una de las figuras más destacadas del expresionismo abstracto. Sus obras, por lo general de grandes dimensiones y agrupadas en series, presentan muy poca variación compositiva y consisten básicamente en rectángulos de varios colores que se suceden en paralelo de arriba abajo, con bordes irregulares en las zonas de separación tonal. La intención del artista fue siempre aprehender el absoluto por medio de una aproximación contemplativa y sensibilista.

Según algunos de sus comentaristas, Rothko llegó a sus «rectángulos de varios colores», como final de una evolución artística. Además, su convicción de que no había ya nada que hacer en pintura le produjo una depresión que lo llevó al suicidio. En este caso, su obra encierra una declaración de carácter muy distinto de la de Malevich y no es una simple cita de la obra de este.

Como ejemplo, recogemos de un catálogo una serie de cuadros de varios autores, separados entre sí casi cincuenta años (figura 3.45), y en la doble página siguiente aparecen algunos de los comentarios que distintos críticos dedican a las obras correspondientes.



Figura 3.45. Algunos cuadros de las colecciones Guggenheim.

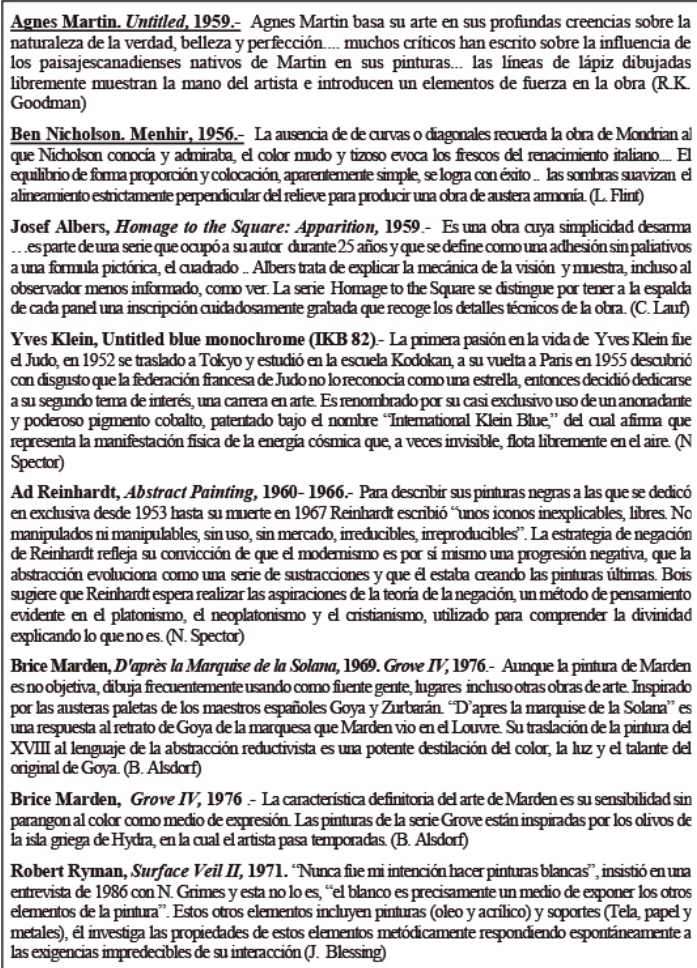


Figura 3.46. Comentarios de catálogo de los cuadros de la figura 3.45.

Aquí aparece de nuevo un punto más de contacto entre arte y matemáticas. Hay una buena parte del arte moderno que, en nuestra opinión, fruto probablemente de la ignorancia, no se puede considerar arte, sino negocio de galerías, críticos y artistas. Asimismo, hay una buena parte de la matemática actual —y aquí al menos no se nos puede acusar de falta de conocimientos— que puede que sea actual, pero no es matemática, sino parte de un sistema: publicar o perecer, que es también un negocio, aunque a menor escala, de evaluadores y profesores universitarios. Volviendo de nuevo a Kant, no se trata de matemática ni arte, porque en esa forma ambas se transforman en oficio, en artesanía.

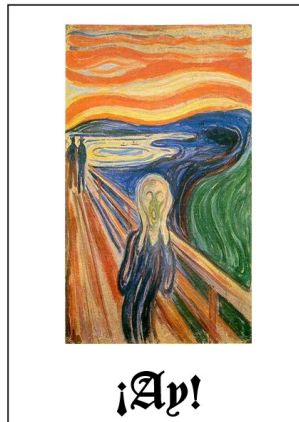
No es arte la repetición de rectángulos en distintos tonos ni es matemático el proceso de rebajar una hipótesis en un enunciado y adaptar la demostración existente, aunque los cuadros entren en un museo o los resultados se publiquen en una revista,

de modo que tengamos que decir como Unamuno [116]: «Desconfía del arte, desconfía de la ciencia, por lo menos de eso que llaman arte y ciencia y no son sino mezquinos remedos del arte y la ciencia verdaderos». O podemos llegar al extremo repetir las líneas de T. White [122] que, junto con el cuento del traje del emperador, deberían ser de aprendizaje obligatorio en todas las escuelas del mundo:

Actualmente la raza humana se divide desde el punto de vista político de la siguiente forma: de cada cien hombres hay uno que es sabio, nueve bribones y noventa tontos. Este es un cálculo optimista. Los nueve bribones se reúnen bajo el estandarte del más bribón de todos ellos y se convierten en políticos. El sabio se queda a un lado y se dedica a la poesía, las matemáticas o la filosofía. Los noventa tontos, por su parte, avanzan pesadamente tras los estandartes de los nueve bribones que, según las modas, los conducen a los laberintos de la superchería, la malicia y la guerra.

Mandar es agradable, observa Sancho Panza, aunque solo mandes un rebaño de corderos; y este es el motivo por el que los políticos levantan sus estandartes.

Con la democracia los nueve bribones se convierten en diputados; con el fascismo se hacen líderes del partido y con el comunismo comisarios, lo único que cambia es el nombre. Por lo que respecta al sabio, su suerte será aproximadamente la misma en cualquiera de los sistemas. Si vive en una democracia, lo animarán a que se muera de hambre en una buhardilla; si lo hace en un país fascista, lo meterán en un campo de concentración, mientras que en uno comunista lo liquidarán.



Pero esta historia, para ser una buena historia, tiene que terminar como todas las buenas historias que en el mundo han sido:

**D** vivieron felices



# Créditos de imágenes

## Capítulo 1

Figura 1.1 en página 20: s.f. (2013) *Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater* [Imagen]. Flickr.

<https://acortar.link/1fekob>

Figura 1.2 en página 21: s.f. (2011) *Napoleon Bonaparte Napoleon I - Emperor* [Dibujo]. Flickr.

<https://acortar.link/0hpkM6>

Figura 1.6 en página 28: s.f. (2011) *Pierre.de.Fermat* [Imagen]. Flickr.

<https://acortar.link/IdSrwQ>

Figura 1.7 en página 36: Doran, D. (1922) *Page 88, no. 1: Edward Abbott reading* [Fotografía]. Flickr.

<https://acortar.link/q1CB1k>

Figura 1.9 en página 40: Frajndlich, A. (2012) *William Paul Thurston* [Fotografía]. La ciencia de la mula Francis.

<https://acortar.link/zGDmDs>

## Capítulo 2

Figura 2.1 en página 56: Halma, H. (1813) *Portada de la traducción francesa del Almagesto* [Fotografía]. Gallica B.N.F.

<https://acortar.link/S5aDtG>

Figura 2.3 en página 58: Ptolémée, C. (1813-1816) *Composition mathématique de Claude Ptolémée* [Imagen]. Bibliothèque municipale de Lyon.

<https://acortar.link/kGkCWh>

Figura 2.5 en página 60: Ptolémée, C. (1813-1816) *Composition mathématique de Claude Ptolémée* [Imagen]. Bibliothèque municipale de Lyon.

<https://acortar.link/BTvXOB>

Figura 2.6 en página 60: Ptolémée, C. (1813-1816) *Composition mathématique de Claude Ptolémée* [Imagen]. Bibliothèque municipale de Lyon.

<https://acortar.link/6y0CQx>

Figura 2.6 en página 60: Ptolémée, C. (1813-1816) *Composition mathématique de Claude Ptolémée* [Imagen]. Bibliothèque municipale de Lyon.

<https://acortar.link/P7IFvZ>

Figura 2.8 en página 64: Vineti, E. (1556) *Sphaera Ioannis de Sacro Bosco emendata* [Portada]. Internet archive.

<https://acortar.link/Ko8fzm>

Figura 2.8 en página 64: Chaves, J. (1545) *Tractado de la Sphaera que compuso el doctor Ioannis de Sacro Bosco* [Imagen]. Universidad de Salamanca.

<https://acortar.link/s6cfgv>

Figura 2.9 en página 66: Chaves, J. (1545) *Tractado de la Sphaera que compuso el doctor Ioannis de Sacro Bosco* [Imagen]. Universidad de Salamanca.

<https://acortar.link/K20tbb>

Figura 2.10 en página 68: Peurbach, G. (1557) *Theoricae nouae planetarum* [Imagen]. Internet archive.

<https://acortar.link/cGVsj4>

Figura 2.10 en página 68: Peurbach, G. (1557) *Theoricae nouae planetarum* [Imagen]. Internet archive.

<https://acortar.link/DIn820>

Figura 2.11 en página 69: Burgo, L. & Pacioli, L. (1494) *Summa de Arithmetica, proportioni et proportionalitá* [Imagen]. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes.

<https://acortar.link/tgWsBZ>

Figura 2.12 en página 69: Burgo, L. & Pacioli, L. (1494) *Summa de Arithmetica, proportioni et proportionalitá* [Imagen]. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes.

<https://acortar.link/tgWsBZ>

Figura 2.13 en página 74: Ptolémée, C. (1828) *Traité de géographie* [Imagen]. Gallica B.N.F.

<https://acortar.link/6A23iV>

Figura 2.13 en página 74: Ferrer, J. (1545) *Letra feta als molt Cathòlics Reys de Spanya, don Ferrando y dona Ysabel, per mossèn Jaume Ferrer, acerca lo compartiment que sas reals altezas feren ab lo rey de Portugal en lo mar Oceano* [Imagen]. UDG.

<https://acortar.link/tfkyLs>

## Capítulo 3

Figura 3.1 en página 84: García, V. (2015) *Ejemplos históricos de las Matemáticas en la Música* [Imagen]. Relaciones entre la Música y las Matemáticas.

<https://acortar.link/GN65Nh>

Figura 3.2 en página 85: O'Reilly, F. & Ortega, H. (2003) *Juego de dados musical de Mozart* [Imagen]. Departamento de Matemática y Probabilidad IIMAS, UNAM.

<https://acortar.link/kLx8hd>

Figura 3.5 en página 88: Lewitt, S. (1967) *Serial Project #1* [Fotografía]. Dwan gallery, los Angeles.

<https://acortar.link/GKyjeN>

Figura 3.6 en página 89: Lewitt, S. (1966) *Serial Project #1* [Imagen].

<https://acortar.link/GKyjeN>

Figura 3.8 en página 91: Mullins, J. (1998) *Beauty* [Imagen]. The Art of Justin Mullins.

<https://acortar.link/FpihXP>

Figura 3.9 en página 92: Gaudí, A. (2004) *Sagrada familia* [Fotografía]. Gaudiclub.

<https://acortar.link/NhNGka>

Figura 3.10 en página 93: s.f. (2014) *Coro y escalera de la Iglesia de Santa María la Mayor de Morella* [Fotografía]. Flickr.

<https://acortar.link/XKttKW>

Figura 3.11 (a) en página 94: Ushio, K. (1988) *Banda de Möbius* [Fotografía]. Memenet.

<https://acortar.link/40gR0g>

Figura 3.11 (b) en página 94: Hill, M. (1953) *Endless Ribbon* [Fotografía]. Pinterest.

<https://acortar.link/GBSrTU>

Figura 3.11 (c) en página 94: Bill, M. (1986) *Coloso de Frankfurt* [Fotografía]. Flickr.

<https://acortar.link/CQ7Rgu>

Figura 3.12 en página 95: van Wijk, J. (2006) *Three Link Chain* [Imagen]. AMS.

<https://acortar.link/hmKkb4>

Figura 3.13 en página 95: Brontis, V. (2006) *Generación geométrica* [Imagen]. Vladimir Brontis.

<https://acortar.link/Pb1H58>

Figura 3.14 en página 96: Bachot, A. (1598) *Le gouvernail* [Dibujo]. Gallica B.N.F.

<https://acortar.link/RyF03R>

Figura 3.15 en página 97: Durero, A. (1514) *Melencolia I* [Dibujo]. Metropolitan Museum of Art, New York.

<https://acortar.link/1YiQRD>

Figura 3.15 en página 97: da Vinci, L. (1496) *Septuaginta duarum basium vacuum* [Dibujo]. Humandrama.

<https://acortar.link/EIQTD0>

Figura 3.16 en página 97: Coxeter, M. (1973) *Hipercubo* [Imagen]. Techno-science.net.

<https://acortar.link/K06Let>

Figura 3.18 en página 99: Dalí, S. (1955) *Salvador Dalí's Crucifixion, Corpus Hypercubus* [Pintura]. Flickr.

<https://acortar.link/IY00z1>

Figura 3.21 (a) en página 102: da Vinci, L. (1503) *La Gioconda* [Imagen]. Creer para crear.

<https://acortar.link/Cf3raB>

Figura 3.21 (b) en página 102: Alberti, R. (1946) *A la divina proporción* [Imagen]. Docplayer.

<https://acortar.link/MJnoPu>

Figura 3.21 (c) en página 102: [Imagen del pentágono y las relaciones con el número  $\Phi$ ]. Todacultura.

<https://acortar.link/tWriyF>

Figura 3.21 (d) en página 102: Dalí, S. (1949) *Leda atómica* [Imagen]. Historia-arte.

<https://acortar.link/AJcRMZ>

Figura 3.23 en página 104: s.f. (2010) *Divine Proportions, Golden Ratio set dressing!* [Imagen]. Predella.

<https://acortar.link/IvAzOF>

Figura 3.24 en página 105: Wills, H. & Ghyka, M. (1946) *Harmonic Analysis of a Face and The Geometry of Art and Life* [Imágenes]. Avec l'architecture.

<https://acortar.link/xB8yBg>

Figura 3.25 en página 106: Mondrian, P. (1942) *Composición con amarillo, azul y rojo* [Imagen]. De plata y exacto.

<https://acortar.link/ZoqdeL>

Figura 3.26 en página 106: Mondrian, P. (1926) *Composición con amarillo, azul y rojo* [Imagen]. Pinterest.

<https://acortar.link/Nt63TT>

Figura 3.28 en página 108: Bartok, B. (1936) *Música para cuerdas, percusión y celesta* [Imagen]. Pop sheet music.

<https://acortar.link/0U1G64>

Figura 3.29 en página 109: s.f. (2015) *Matemáticos revelan secretos sobre el arte de la simetría* [Imagen]. Espacio-ciencia.

<https://acortar.link/mwqm58>

Figura 3.34 en página 114: Escher, M. (1960) *Infierno y cielo* [Imagen]. Pinterest.

<https://acortar.link/5Gz2SD>

Figura 3.34 en página 114: Escher, M. (1941) *Ángeles y demonios* [Imagen]. Brewminate.

<https://acortar.link/JW1T1Y>

Figura 3.36 en página 117: Mandelbrot, B. (1979) *El conjunto de Mandelbrot* [Imagen]. Rickmckeon.

<https://acortar.link/EdBu8g>

Figura 3.37 en página 119: [Imagen de las etapas de la construcción de la curva de Koch y estabilidad por ampliaciones]. Masscience.

<https://acortar.link/VKpTtY>

Figura 3.40 en página 122: Pollock, J. (1950) *Untitled* [Imagen]. Oneartymminute.

<https://acortar.link/X1BfuX>

Figura 3.41 en página 123: [Imagen de Dibujo con estructura fractal a la Pollock]. Neverendingbooks.

<https://acortar.link/xlNVyU>

Figura 3.44 en página 131: Malévich, K. (1918) *Suprematismo: blanco sobre blanco* [Imagen]. Universidad Francisco Marroquín, Departamento de Educación.

<https://acortar.link/vCwPDN>

Figura 3.44 en página 131: Rothko, M. (1950) *Centro blanco* [Imagen]. Universidad Francisco Marroquín, Departamento de Educación.

<https://acortar.link/pYTdhv>

Figura 3.45 en página 133: Ellsworth, K. (1966) *Blue Green Yellow Orange Red* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/e5fLSk>

Figura 3.45 en página 133: Martin, A. (1959) *Untitled* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/79RSsA>

Figura 3.45 en página 133: Nicholson, B. (1956) *February 1956 (menhir)* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/tIyPQ9>

Figura 3.45 en página 133: Klein, Y. (1956) *Untitled Blue Monochrome (IKB 181)* [Imagen]. Yves Klein.

<https://acortar.link/B4ETRD>

Figura 3.45 en página 133: Reinhardt, Ad. (1961) *Abstract Painting no. 4* [Imagen]. American art.

<https://acortar.link/YnSBex>

Figura 3.45 en página 133: Albers, J. (1959) *Homage to the Square: Apparition* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/nV338W>

Figura 3.45 en página 133: Ryman, R. (1971) *Surface Veil II* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/JR7FvV>

Figura 3.45 en página 133: Marden, B. (1976) *Grove IV* [Imagen]. Guggenheim.

<https://acortar.link/D0awnh>

Figura en página 135: Munch, E. (1910) *El grito* [Imagen]. Historia-arte.

<https://acortar.link/0kBfx9>



## Bibliografía

- [1] ABBOT, E. (1999). *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones*. Palma de Mallorca: J. J. Olañeta.
- [2] ABRIL, P. S. ([1589]1953). *Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas y la manera de enseñarlas*. Libros escogidos de Filósofos. Madrid: R. A. E.
- [3] ADORNO, TH. W. (2004). *Teoría estética*. Obras completas, volumen 7. Madrid: Akal.
- [4] ALEXANDER, J. W. (1923). A Lemma on Systems of Knotted Curves. *Proc. Nat. Acad. USA* 9, 93-95.
- [5] ALEXANDER, J. W. (1928). Topological Invariants of Knots and Links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2), 275-306.
- [6] ARANA, J. (2000). ¿Es la naturaleza un libro escrito en caracteres matemáticos? *Anuario Filosófico*, 33, 43-66.
- [7] AROCA, J. M. (1996). J. Ferrer y el tratado de Tordesillas. *Revista del Sem. de Historia de los Descubrimientos y Cartografía*, 1, 23-32.
- [8] ARTIN, E. (1926). Theorie der Zöpfe. *Abri. Math. Seri. Univ. Horhura* 4, 47-72.
- [9] BACHOT, A. (1598). *Le gouvernail*. Melun.
- [10] BECKER, J. (1918). Trabajos geográfico-astronómicos de lo hebreos peninsulares durante la alta edad media. *Bol. Soc. Geográfica*, LX, 89-114.
- [11] BELL, E. T. (1987). *Mathematics, Queen and Servant of Science*. Washington: Mathematical Association of America.
- [12] BIRKHOFF, G. (1933). *Aesthetic Measure*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- [13] BLASTLAND, M. & DILNOT, A. (2009). *El tigre que no está*. Madrid: Turner Pub.
- [14] BORGES, J. L. (2005). *El jardín de los senderos que se bifurcan*. Obras completas, volumen 1. Barcelona: RBA editores.
- [15] BORGES, J. L. (2005). *Historia de la eternidad*. Obras completas, volumen 1. Barcelona: RBA editores.

- [16] BOYER, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza universidad.
- [17] BRAUNER, K. (1928). Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6, 1-55.
- [18] BRÖCKER, TH. (1975). *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Note 17, traducción de L. Lander. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] BURAU, W. (1933). *Kennzeichnung der Schlauchknoten*. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 9, 125-133.
- [20] BURGO, L. & PACIOLI, L. (1494). *Summa de Arithmetica, proportioni et proportionalitá*. Digitalizado por la Universidad de Sevilla. Venecia: Reproducción anastática.
- [21] CARROLL, L. (2002). *Alicia en el país de las maravillas. Alicia a través del espejo*. Madrid: Edhasa.
- [22] CENTRO VIRTUAL DE DIVULGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.; *Publicacions Editorial Graó*. Recuperado el 13 de septiembre de 2021, de <https://www.grao.com/es/producto/divulgamat-centro-virtual-de-divulgacion-de-las-matematicas-18071>
- [23] CEREZO, R. (1994). La geografía, la náutica y la cartografía. *Revista Madrid*, LIV(202), 509-543.
- [24] CERVANTES, M. (2005). *Don Quijote de la Mancha*. Edición del Instituto Cervantes (1605-2005). Madrid: Gaaxia Gutenberg.
- [25] CHAVES, I. (1545). *Tractado de la Sphera*. Digitalizado por Clásicos Tavera. Sevilla: s.e.
- [26] CIRUELO, P. S. (1498). *Dialogus disputatorius in additiones opus de sphaera mundi Johannis de Sacrobosco*. París: Guidone Mercatoris.
- [27] CIRUELO, P. S. (1538). *Reprovacion de las supersticiones y hechizarias*. Salamanca: Pedro de Castro.
- [28] COMTE, A. (1830). *Cours de philosophie positive. Tome 1 Les préliminaires généraux et la philosophie mathématique*. París: Rouen Frères.
- [29] CROCE, B. (1932). *Breviario de estética (1913)*. Col. Austral 41, tercera edición. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- [30] DANTO, A. (1973). Artworks and real things. *Theoria*, 1-3, 1-17.
- [31] DANTO, A. (1981). *The Transfiguration of the Commonplace*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
- [32] DAVIS, R. C. (1936). An Evaluation and Test of Birkhoff's Aesthetic Measure Formula. *The Journal of General Psychology*, 15, 231-240.

- [33] DESCARTES, R. (1996). *Discurso del método*. Madrid: Alfaguara.
- [34] DICKIE, G. (1974). *Art and the Aesthetic*. Nueva York: Ithaca.
- [35] DICKIE, G. (2005). *El círculo del arte (1984)*. Barcelona: Paidós.
- [36] DIRAC, P. (1968). The Evolution of the Physicist's Picture of the Nature. M. Kline (ed.), *Mathematics in the modern World* (pp. 239-249). San Francisco: Freeman and Co.
- [37] DORCE, C. (2006). *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*. Madrid: Nivola.
- [38] ECO, H. (1986). *El nombre de la rosa*. Barcelona: Lumen.
- [39] EMMER, M. (2004). *Mathematics and culture*. Berlín: Springer.
- [40] FALTINGS, G. (1983). Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Inventiones Mathematicae*, 73(3), 349-366.
- [41] FEBRER, J. & CABAL, E. (1947). *Lecciones de astronomía elemental*. Barcelona: Reverté.
- [42] FEIJOO, B. (1749). *Teatro crítico universal*. Volumen 2. Madrid: Joaquin Ibarra.
- [43] FERNÁNDEZ DE NAVARRETE, M. (1846). *Disertación sobre la historia de la náutica y de las ciencias matemáticas*. Madrid: Real Academia de la Historia.
- [44] FERNÁNDEZ PÉREZ, J. L. (2001). Breve historia de las matemáticas en los mercados financieros. *Monografías de la real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 19, 87-95.
- [45] FERRER, J. (1545). *Carta als molt Catholichs Reis de Espanya*. En Rafael Ferrer y Coll, *Sentencias Catholics del divi Poeta Dant Floren* (vol. II, doc 312). Barcelona: CDD.
- [46] FERRER, J. (1545). Informe de Jaume Ferrer proponiendo dos métodos. En Rafael Ferrer y Coll. *Sentencias Catholics del divi Poeta Dant* (vol. II, doc. 68). Barcelona: CDD.
- [47] FLORES DE LEMUS, A. I. (1933). Über  $n$ -dimensionales Komplexe die im  $R^{2m+1}$  Absolute selbstverschlungen sind. *Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquium*, 5, 17-24.
- [48] FREYD, P. Y OTROS (1985). A New Polynomial Invariant of Knots and Links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(2), 239-246.
- [49] GALILEI, G. (1981) *El ensayador*. Buenos Aires: Aguilar.
- [50] GHYKA, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. Nueva York: Dover.
- [51] GOMBRICH, E. H. (1996). *Art and Illusion. A Study in the Psychology of Pictorial Representation*. Londres: Phaidon.

- [52] GOMBRICH, E. H. (2006). *Historia del arte*. Madrid: Debate.
- [53] GOPPA, V. D. (1983). Algebraic-Geometric Codes. *Math. USSR Izv.*, 21, 75-91.
- [54] GORDON, C. & LUECKE, J. (1989). Knots are determined by their complements. *The Journal of the American Mathematical Society*, 2(2), 371-415.
- [55] GRIFFITHS, P. A. (2000). Mathematics at the Turn of the Millennium. *The American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.
- [56] GUZMÁN, M. (2002). Caminos de la Matemática hacia el futuro. En José Manuel Sánchez Ron (coord.), *La tecnología y la ciencia en el tercer milenio* (pp. 83-92). Madrid: Sociedad Estatal España Nuevo Milenio.
- [57] HAHN, R. (2013). *Correspondence de Pierre Simon Laplace*. Tomo 2, 1803-1827, Lettre 777, Brepolis Pub.
- [58] HAMMING, R. W. (1950). Error Detecting and Error Correcting Codes. *The Bell System Technical Journal*, XXIX(2), 147-163.
- [59] HEATH, T. (1921). *A History of the Greek Mathematics*. Nueva York: Dover.
- [60] HOYLE, F. (1976). Nicolás Copérnico. *Un ensayo sobre su vida y su obra*. Madrid: Alianza Editorial.
- [61] HUGHES, B. (1967). *Regiomontanus on Triangles*. Madison: University of Wisconsin Press.
- [62] HUNTLEY, H. E. (1970). *The Divine Proportion*. Nueva York: Dover.
- [63] HUXLEY, T. H. ([1869]2011). *Scientific Education: Notes of an After-Dinner Speech*. Collected Essays III. Londres: Cambridge University Press.
- [64] JONES, V. F. R. (1985). A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society (N. S.)*, 12, 103-111.
- [65] JONES, V. F. R. (1987). Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials. *Annals of Mathematics*, 126, 335-388.
- [66] JONES-SMITH, K. Y MATHUR, H. (1996). Revisiting Pollock's Drip Paintings. *Nature*, 444, E09.
- [67] KANDINSKY, V. (2003). *Escritos sobre arte y artistas*. Madrid: Síntesis.
- [68] KANDINSKY, V. (1979). *Point and Line to Plane*. Nueva York: Dover.
- [69] KANT, E. (1991). *Crítica del juicio (1790)*. Col. Austral, núm. A167, quinta edición. Madrid: Espasa Calpe.
- [70] KLEINBAUM, N. (1997). *El club de los poetas muertos*. Barcelona: Plaza & Janés.

- [71] KNOBLOCH, E. & MAI, B. (1998). Korrespondenz Adrin-Marie Legendre – Carl Gustav Jacob Jacobi. *Teubner Archiv zur Mathematik, Band 19*, 89-170.
- [72] LENDVAI, E. (1979). *Bela Bartok: An Analysis of His Music*. Londres: Kahn and Averill.
- [73] LIVIO, M. (2002). *The Golden Ratio*. Nueva York: Broadway Books.
- [74] LLUIS-PUEBLA, E. (1980). Música y matemática: dos bellas artes. *Promathematica, XVI(3)*.
- [75] LLUIS-PUEBLA, E. “La matemática es una de las bellas artes, la más pura de ella, la que tiene el don de ser la más precisa de las ciencias”. Texto de una conferencia no publicada.
- [76] LLUIS RIERA, E. (1955). Sur l’immersion des variétés algébriques. *Annals of Mathematics, 62(2)*, 120-127.
- [77] LOOMIS, E. H. (1927). *The Pythagorean Proposition*. Berea, Ohio: Mohler.
- [78] LULIO, R. (1296). *El árbol de la ciencia*. Roma.
- [79] MAZZOLA, G. (1985). *Gruppen und Kategorien in der Musik*. Berlín: Helderemann.
- [80] MAZZOLA, G. (1998). *Towards big Science: Geometric Logic of Music and its Technology*. Symposiumsband zur klangart 1995. Osnäbruck: B. Enders.
- [81] MEAVILLA, V. (2007). *Las matemáticas del arte (Inspiración ma(r)temática)*. Córdoba: Almuzara.
- [82] MENGER, K. (1927). Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae, 10*, 96-115.
- [83] MONTESINOS, J. M. (1987). *Classical Tessellations and Three-Manifolds*. Berlín: Springer.
- [84] MONTUCLA, J. E. (1960). *Histoire des mathématiques (1799-1802)*. París: Blanchard.
- [85] MORDELL, J. L. (1922). *On the Rational Solutions of the Indeterminate Equation of the Third and Fourth Degrees*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 21*, 179-192.
- [86] MÜLLER, J. (1496). *Epytoma Joannis de Monte Regio in Almagestum Ptolomei*. Digitalizado en Gallica, Basilea: S. Roemer.
- [87] MÜLLER, J. (1533). *De Triangulis omnimodis*. Basilea: D. Santbech.
- [88] NEWMANN, J. R. (1956). *The World of Mathematics*. Volumen 6. Nueva York: Simon and Schuster.
- [89] NEWMAN, J. R. (1974). *La forma del pensamiento matemático*. Barcelona: Grijalbo.

- [90] NÖBELING, G. (1931). Eine Verschärfung des  $n$ -Beinsatzes. *Fundamenta Mathematicae* 18, 23-38.
- [91] PEDOE, D. (1979). *La geometría en el arte*. Barcelona: G. Gil.
- [92] PEDOE, D. (1983). *Geometry and the Visual Arts (1976)*. Nueva York: Dover.
- [93] PEURBACH, G. (1553). *Theoricae novae planetarum*. Digitalizado por la Universidad de Sevilla, París.
- [94] PINO, F. (1990). *Distinto y junto. Poesía completa*. Valladolid: Junta de Castilla y León.
- [95] PTOLOMEO, C. (1813-1816). *Compositioo Mathematicque (siglo II)*. Traducción francesa en dos volúmenes del abate Halma. Versión digital Gallica, París: College Royal de France Paris.
- [96] PTOLOMEO, C. (1828). *Traité de Géographie*. Traducción francesa de la *Geografía*, abate Halma. París: College Royal de France.
- [97] REY PASTOR, J. (1947). *La ciencia y la técnica en el descubrimiento de América*. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- [98] RIGAU, J.; FEIXAS, M. & SBERT, M. (2007). Conceptualizing Birkhoff's Aesthetic Measure Using Shannon Entropy and Kolmogorov Complexity. D. W. Cunningham, G. Meyer & L. Neumann (eds.), *Computational Aesthetics in Graphics, Visualization, and Imaging*. Alberta, Canadá: Eurographics Association.
- [99] ROANES MACIAS, E. & ROANES LOZANO, E. (1990). Generación constructiva de los 17 grupos de simetría el plano. *Boletín de la Sociedad Puig Adam*, 27, 53-76.
- [100] RUSSELL, B. (1901). Recent Work on the Principles of Mathematics. *International Monthly*, 4, 84-96.
- [101] RUSSELL, B. (2016). The Study of Mathematics. *Philosophical Essays* (1910), 73-74. Reed. Philadelphia: The Great Library Collection.
- [102] SAMSÓ, J. (2003). Abraham Zacuto y la astronomía europea en el mundo islámico. *Inv. y Ciencia*, julio, 68-75.
- [103] SÁNCHEZ DE LAS BROZAS, F. (1579). *Sphaera mundi, ex variis autoribus concinnata*. I. Salamanca: Terranova.
- [104] SCHLÄFLI, L. (1873). Nota alla Memoria del signor Beltrami, Sugli spazi di curvatura costante. *Annali di Mattematica Pura ed Applicada*, 2(5), 178-193.
- [105] SCHATTSCHNEIDER, D. Y EMMER, M. (2003). *M. C. Escher's legacy*. Berlín: Springer.
- [106] SCHILLINGER, J. (1948). *The Mathematical Basis of the Arts*. Nueva York: Philosophical Library.

- [107] SCOT, M. (1495). *Michaelis Scoti super auctorem sphaerae cum questionibus*. Bolonia: Justiniano de Ruberia.
- [108] SMITH, D. E. (1951). *History of Mathematics*. Nueva York: Dover.
- [109] SOLOMON, L. (2002). *Simmety as a Compositional Determinant*. Merlot.
- [110] TAINE, H. ([1869]1946). *Filosofía del arte*. Col. Austral, núm. 505. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- [111] TAIT, P. G. (1876-7). On knots. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 9(97), 306-317.
- [112] TANNERY, P. (1893). *Recherche sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne*. París: Gauthier Villars.
- [113] TAYLOR, R. & WILES A. (1995). Moular Elliptitic Curves and Fermat Last Thorem. *Annals of Mathematics*, 3(141), 443-551.
- [114] TAYLOR, R. P., MICOLICH, P. & JONAS, D. (1999). Fractal Analysis of Pollock's Drip Paintings. *Nature*, 399, 432-433.
- [115] THEON DE ALEJANDRÍA (1822-1823). *Comentaire sur l'Almagesto*. Trad. de Francesa del abate Halma. Versión digital Gallica. París: Bobèe.
- [116] UNAMUNO, M. (1966). *Vida de don Quijote y Sancho (1903)*. Madrid: Espasa Calpe.
- [117] VARELA, J. (1996). El tratado de Tordesillas, su origen, solución y aplicación. *Revista del Sem. de Historia de los descubrimientos y Cartografía*, 1, 33-58.
- [118] VAN DE WATER, M. (1934). Mathematical Measure for Art. *The Science News-Letter*, 25(675), 170-172.
- [119] VINETI, E. (1561). *Sphaera Ioannis de Sacro Bosco enmendata*. Versión digital Gallica. París: Guielmun Cauellar.
- [120] VON BERTALANFFY, L. (1992). *Perspectivas en la teoría general de sistemas*. Madrid: Alianza Univesidad.
- [121] WEEKS, J. (2001). *The Shape of Space*. Chapman-Hall.
- [122] WHITE, T. H. (1996). *El libro de Merlín (1958)*. Madrid: Debate.
- [123] WITTEN, E. (1989). Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Commun. Math. Phys.* 121, 351-399.
- [124] ZACUTO, A. (2004). *Almanaque perpetuo (1502)*. Trad. de M. Carrera de la Red. Valladolid: Sem. Hispano-Americano de Descubrimientos y Cartografía.
- [125] ZELLER, M. C. (1944). "The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus". Tesis de PhD., Ann Arbor Michigan (accesible en Gallica).
- [126] ZINNER, E. & BROWN, E. (1991). *Regiomontanus his Life and Works*. Ámsterdam: North Holland.



## Índice alfabético

- átomos, 84
  
- abate Halma, 57, 59, 74
- Abbot, 36
- Adelardo de Bath, 53
- Adorno, 81, 86
- Adriano Celentano, 25
- Albert Einstein, 20, 45, 77
- Alexander, 34, 35
- Almagesto de Ptolomeo, 53–55, 57, 61–64, 67, 68, 70, 73, 75
- Apiano, 51
- Apolonio, 51
- Aristarco, 62
- Aristóteles, 57
- Aritmética, 24, 30, 33, 50, 51
- Arthur Danto, 82, 83
- Artin, 35
- Autólyco, 55, 57
  
- Batalla de Vitebsk, 21
- BBC, 32
- Becquer, 53
- Ben Gershon, 53
- Benedetto Croce, 78, 79, 81
- Bertrand Russel, 19
- Boileau, 40
- Brauner, 34
- Brocense, 66, 67
- Bureau, 34
- Báculo de Jacob, 53
  
- C. Dorce, 62
- C. H. Hinton, 97
- C. T. C. Wall, 40
- Cardano, 96
- Cartan, 45
- Caída de constantinopla, 50
- Chaves, 63
  
- Checo D’Ascoli, 52
- Ciruelo, 63
- CMB, 46, 47
- Complejo abstracto, 41, 42
- Comte, 24
- Conjetura, 27, 29, 34, 39, 45
  - de poincaré, 40
- Conjunto de Mandelbrot, 116–118
- Copérnico, 51, 62
- Cornish, 45
- Cristóbal Colón, 50, 75
- Cuadrivium, 51
- Curva de Koch, 118, 119, 122
- Curvas algebraicas, 28, 29
  - no singular, 28, 30, 34
  - proyectivas, 30
- Curvas analíticas, 34
- Curvas de Shimura, 30
- Curvas elípticas, 29
- Cézanne, 82
- Círculo, 19, 37, 39, 43, 44, 61, 63, 65
  - excéntricos, 63
  - máximo, 55, 58, 60, 61, 73
  - semicírculo, 65
- Código de paridad, 29
  - tasa de transmisión del código, 29
- Códigos de Goppa, 29
  
- D. Juan II, 51
- Dante, 63
- De Triangulis, 68, 70
- Delambre, 57
- Desargues, 57, 131
- Descartes, 23
- Dirac, 19
- Divisor, 30
  
- E. Lluis, 43
- E. Witten, 35

Ecuación Blake, 89  
 Elementos de Euclides, 51, 54, 55, 58  
 Enólogos, 22  
     enología, 22  
 Eratóstenes, 71  
 Eric Temple Bell, 18, 50  
 Esfera, 28, 33–35, 37–40, 47, 65–67,  
     71, 74, 75  
 Esférica de Menelao, 55, 60  
 Espacio euclídeo, 41  
 Espacios tangentes, 45  
 Euclides, 51, 54, 55, 57, 58, 64, 65, 70  
 Evans Pritchard, 124  
  
 F. Graham, 87  
 Fermat, 27, 30  
     ecuación de Fermat, 27  
 Fernández de Navarrete, 50–52  
 Fernández Navarrete, 66  
 Ferrer, 70–75  
     método, 73  
 Fibonacci, 81, 102–108  
 Flores de Lemus, 43  
 Fotonos, 47  
 Fourier, 18  
 Fractal, 82, 116, 118, 121–123  
 Francisco Pino, 89, 107  
 Frechet, 41  
 Freedman, 39  
  
 Galileo, 19, 52  
 Gaudí, 92  
 Geometría, 24, 40, 44–46, 49–51, 54,  
     57, 61, 62, 70, 75  
     algebraica, 30, 34  
     aplicada, 53, 55  
     clásica, 43  
     de la esfera, 57  
     esférica, 49, 57  
     euclídea, 44  
     europea, 54  
     griega, 53  
     plana, 57  
     proyectiva, 57  
     ptolemaica, 61, 70, 71, 73  
 George D. Birkhoff, 124–126  
 George Dickie, 79, 82, 83  
 Gerardo de Cremona, 53, 55, 65  
  
 Gerd Faltings, 29  
 Gombrich, 81, 82  
 Gordon, 35  
 Grassi, 19  
     Sarsi, 19  
 Grupo de Poincare, 38  
 Grupo fundamental, 38, 39  
  
 H. Taine, 80, 81  
 Hamming, 29  
     distancia de Hamming, 30  
 Hegel, 80  
 Hiparco, 57  
 Homeomorfa, 33, 37–39, 46  
 Homologación de títulos, 22  
 Hoyle, 62  
 Huxley, 24  
  
 Iannis Xenakis, 86  
 Inmersión, 41, 43, 45  
 Inquisición, 53  
 Integrales de Feynman, 35  
  
 J. M. Montesinos, 40  
 Jacob ben Machir ibn Tibbon, 53  
 Jacobi, 18  
 James Abram Garfield, 25  
 James Roy Newman, 24  
 Janet, 45  
 Johann Müller, 67  
 Johannes de Sacrobosco, 51, 52, 62–67  
 Johannes Gutenberg, 50  
 Juan Arana, 19  
 Justin Mullins, 90, 91  
  
 Kant, 79–81, 128–130, 132, 134  
 Kuratowski, 43  
  
 Laplace, 21  
 Le Corbussier, 86  
 Legendre, 18  
 Leibniz, 81  
 Leipzig, 51  
 Leonardo da Vinci, 96  
 Leví ben Gershon, 53  
 Lewis Carroll, 23  
     Alicia, 23  
 Loomis, 25

Lord Kelvin, 34  
 Luca del Burgo, 68  
 Luecke, 35  
  
 Maguncia, 50  
 Mandelbrot, 118  
 Martín Behaim, 53  
 Max Bense, 86, 126  
 Max Hill, 94  
 Mazzola, 126  
 Mecánica cuántica, 35  
 Menelao, 55, 57  
 Menger, 42, 43  
 Michael Atiyah, 22, 35, 51  
 Michel Scot, 63  
 Miguel de Cervantes, 82, 83  
 Miguel de Guzman, 17  
 Modelo, 46  
     cosmológico, 47  
     de Beltrami, 44  
     elíptico, 46  
     euclídeo, 46  
 Mordell, 29  
 Mozart, 84, 85  
 Método del Burgo, 69, 70  
 Métrica de Riemann, 45  
 Möbius, 93, 94  
  
 Napoleón Bonaparte, 21  
 Naponeon Bonaparte, 21  
 Nasir Eddin, 70  
 Nöbeling, 42, 43  
  
 Padre Feijoo, 51  
 Papa Clemente VI, 53  
 Pedoe, 96  
 Pedro de Alejandría, 53  
 Pedro Simón Abril, 52  
 Penzias, 46  
 Perelman, 40  
 Peurbach, 51  
 Phillip Griffiths, 19  
 Picasso, 79, 82, 127  
 Pierre Menard, 82, 83  
 Pitágoras, 107, 130  
 Plan Bolonia, 22  
 Planaria, 36, 37, 43, 46  
 Platón, 79, 96  
  
 Poël, 53  
 Poincaré, 39  
 Polinomios invariantes, 34, 35  
 Pollock, 82, 122, 123  
 Porcentaje, 33  
 Porcentajes, 30–32  
 Prophatius, 53  
 Proyección estereográfica, 26, 34, 38  
 Ptolomeo, 54–62, 65–74  
 Puiseux, 34  
 Puntos racionales, 27–30  
  
 Quinto postulado, 115  
  
 Rafael Alberti, 131  
 Regiomontano, 50, 51, 53, 62, 67–70  
 René Thom, 22  
 Rey Pastor, 70  
 Roberto de Chester, 53  
 Roger Bacon, 52  
  
 Sagrada familia, 92  
 Samsó, 64  
 Schläfli, 45  
 Smale, 39  
 Smith, 54  
 Sol Lewitt, 87  
 Stallings, 39  
 Sylvester, 24  
 Símplices, 41, 42  
  
 T. White, 135  
 Tait, 34  
 Tannery, 62  
 Tanto por ciento, 30  
 Tartaglia, 96  
 Taylor, 28, 30  
 Teorema clásico de Riemann-Roch, 30  
 Teorema de Menelao, 59, 61  
 Teorema de Pitágoras, 25  
     rock de Pitágoras, 25  
     ternas de números Pitagóricos, 27  
 Teoría de nudos, 33, 34  
     clasificación de Tait, 34  
     exponentes característicos, 34  
     link, 34  
     nudos equivalentes, 33  
     nudos isotópos, 33, 34

Teseracto, 97, 98  
 Theodor Meyer, 81, 86  
 Theon de Alejandría, 55  
 Thurston, 35, 40  
 Tolomeo, 51, 72  
 Topología, 28, 40, 41, 45, 46, 131  
 Toro, 34, 37, 46  
     anudado, 34  
     hueco, 34  
 Tratado de la esfera, 51, 52  
 Tratados griegos, 50, 53  
 Trenza, 35  
 Trigonometría, 68, 70, 72  
  
 Umberto Eco, 49  
 Unamuno, 135  
  
 V. Jones, 35  
 Valery Denisovich Goppa, 30  
     código geométrico de Goppa, 30  
 Variedades, 35, 39–41, 43, 46  
     algebraicas, 43  
     de Haken, 41  
     diferenciables, 45  
     diferenciales, 40, 41  
     elípticas, 46  
     hiperbólicas, 46  
     subvariedades, 45  
     topológicas, 38, 40  
 Vasili Kandinsky, 126–128  
 Verga, 53  
 Vineti, 63  
 Von Bertalanffy, 130, 131  
 Von Neumann, 35  
  
 Waldhausen, 40  
 Weeks, 36, 45  
 Whithead, 82  
 Whitney, 43  
 Wiles, 28, 30  
 Wilhelm de Moerbeke, 53  
 Wilson, 46  
  
 Zacuto, 53  
 Zariski, 34  
 Zeeman, 39  
 Zeller, 70  
 Zieschgang, 40



Se terminó de imprimir en  
los talleres gráficos de  
ALEPH IMPRESIONES S.R.L  
Jr. Riso 580 Lince  
correo: [ventas@alephimpresiones.net](mailto:ventas@alephimpresiones.net)  
Teléfono : 6345000  
Se utilizaron caracteres  
CMR10 en 10 puntos  
para el cuerpo del texto  
mayo 2022 Lima - Perú

## Otras publicaciones del Fondo Editorial PUCP

*Resolución de problemas de regularidad,  
equivalencia y cambio*

*Desarrollo didáctico de la competencia*

Cecilia Gaita, Cintya Gonzales, Francisco Ugarte y  
Miguel R. Wilhelmi

*Aprendizaje automático. Introducción al aprendizaje  
profundo*

Carlos Véliz Capuñay

*Matemáticas para arquitectos, volumen 1*

Francisco Ugarte Guerra y Janet Yucra Núñez

*Álgebra matricial y geometría analítica*

Cecilia Gaita, Elton Barrantes, José Flores y  
Roy Sánchez

*Cálculo diferencial*

Nancy Saravia, Cecilia Gaita, Diana Bances  
y Jack Arce

*Investigaciones en educación matemática*

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, eds.

*Iteración de polinomios y funciones racionales*

Alfredo Poirier

*Introducción a la teoría de sistemas complejos*

John Earls

*Logística de la A a la Z*

Adolfo Carreño Solís

*Resolución de problemas usando Visual Basic  
for Applications en Excel*

Layla Hirsh Martínez

SERIE Matemáticas y sociedad  
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

La importancia de las matemáticas en nuestra sociedad actual es indiscutible, sin embargo, no se comprende, es como poesía leída en un idioma que no hablamos, como música que apenas alcanzamos a escuchar. Este libro nos ayudará a comprender la importancia de las matemáticas y despertará nuestra fascinación por ella.

... *y matemáticas* inaugura la serie Matemáticas y Sociedad del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), creada con el objetivo de evidenciar el lugar que ocupa esta ciencia en el desarrollo de nuestra civilización y, al mismo tiempo, mostrar que las ideas matemáticas pueden ser comprendidas por todos y, con ello, acercarnos a entender los fundamentos del desarrollo de nuestras sociedades.



**FONDO  
EDITORIAL  
PUCP**

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
**SOBRE LA ENSEÑANZA DE  
LAS MATEMÁTICAS**



**PUCP**