

CAP. 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL A PROBLEMAS DE LA FISICA

1 MASA, MOMENTOS ESTATICOS Y DE INERCIA, Y CENTRO DE MASA

1.1 Caso I: Sistemas de puntos materiales

Dado un sistema de n puntos materiales de masas m_1, m_2, \dots, m_n , ubicados en un plano de la recta fija E , llamada **eje**, definimos

(a) la masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^n m_i ,$$

(b) el momento estático respecto del eje E

$$M_E = \sum_{i=1}^n d_i m_i ,$$

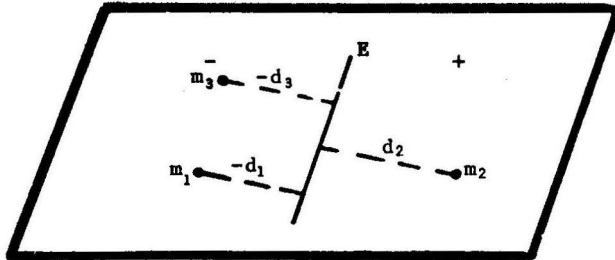
(c) el momento de inercia respecto del eje E

$$I_E = \sum_{i=1}^n d_i^2 m_i$$

(d) el centro de masa respecto del eje E

$$\bar{d} = \frac{M_E}{M}$$

en donde $d_i = \pm$ distancia del i -ésimo punto al eje E , debiendo elegirse el signo $+$ para aquellos puntos que se encuentran a un lado del eje E , y el signo $-$, para aquellos puntos que se encuentran al otro lado.



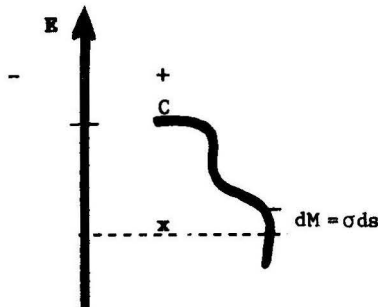
(e) radio de giro respecto del eje $E = R$, donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M}$$

, $R > 0$

1.2 Caso II: Curvas Planas

Sea un alambre delgado (o hilo) que tiene la forma de una curva C contenida en un plano de una recta fija E y supongamos que en cada punto de la curva es dada una densidad σ de masa por unidad de longitud. La masa de un arco elemental de longitud ds es $dM = \sigma ds$.



Sea $x = \pm$ distancia de dM al eje E , donde debe elegirse el signo $+$ según que dM se encuentra a un lado del eje E , y el signo $-$, si dM encuentra al otro lado.

El **momento estático de dM respecto de E** es $dM_E = x dM$, y el **momento de inercia de dM respecto de E** es $dI_E = x^2 dM$.

Damos entonces las siguientes definiciones para el alambre dado.

(a) **Masa total**

$$M = \int dM \quad ,$$

(b) **momento estático respecto del eje E**

$$M_E = \int x dM \quad ,$$

(c) **momento de inercia respecto del eje E**

$$I_E = \int x^2 dM \quad ,$$

(d) **radio de giro respecto del eje $E = R$** , donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M} \quad , \quad R > 0,$$

(e) si XY es un sistema de coordenadas rectangulares en el plano del alambre, se define

Centro de masa = (\bar{x}, \bar{y})

donde $\bar{x} = \frac{M_Y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_X}{M}$.

Nota

- (1) En las fórmulas (a), (b) y (c) los límites de integración se determinan de manera que el elemento de masa dM recorre toda la curva.
- (2) Si la densidad σ es constante decimos que la masa es **homogénea** o uniforme. En tal caso, el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) también se denomina **centroide**.
- (3) En general, cuando se **trata de figuras geométricas se asume** que $\sigma = 1$, resultando la masa del alambre numéricamente igual a la longitud.
- (4) Si la curva es simétrica respecto de E (y la masa es homogénea) entonces el centro de masa se encuentra en tal eje.

Ejemplo

Hallar el centro de masa de un arco del círculo de radio R que subtende un ángulo 2α .

Solución

Sea $C = (\bar{x}, \bar{y})$ el centro de masa del arco AB. Por simetría respecto del eje X, C se encuentra en el eje X; luego $y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Hagamos } x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t. \end{aligned}$$

Cuando t varía desde $t = -\alpha$ hasta $t = \alpha$ se obtiene el arco AB. Luego

$$ds = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$$

$$= R dt$$

$$dM_y = x ds = R^2 \cos t dt$$

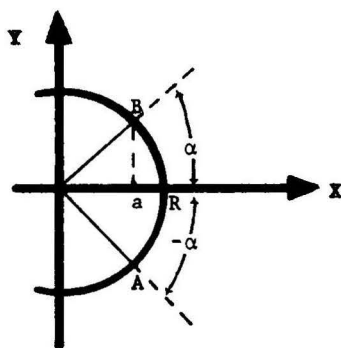
y por lo tanto

$$M = L = \int_{-\alpha}^{\alpha} ds = 2\alpha R,$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} dM_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos t dt = R^2 \sin t \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2R^2 \sin \alpha,$$

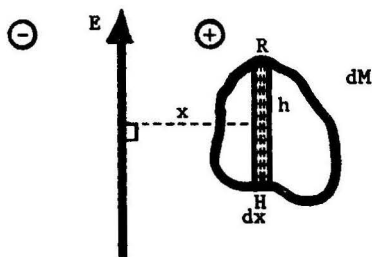
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

$$C = \left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right).$$



1.3 Caso III: Figuras Planas

Consideremos una "lámina fina" que tiene la forma de una región S contenida en un plano. Supongamos que la masa de la lámina es homogénea, esto es, que la densidad σ de masa por unidad de área es constante. Sea E una recta fija en dicho plano. La masa de un rectángulo elemental con dos lados paralelos al eje E (franjas paralelas al eje E) es $dM = \sigma h dx$, siendo h la altura y dx la base de dicho rectángulo.



Sea $x = \pm$ distancia de R al eje E , donde se mantiene la convención de signos establecida en 1.2.

El **momento estático de dM respecto de E** es $dM_E = x dM$, y su **momento de inercia respecto de E** es $DI_E = x^2 dM$.

Para la lámina damos entonces las siguientes definiciones

- (a) **Masa total**

$$M = \int dM$$

- (b) **momento estático respecto del eje E**

$$M_E = \int x dM$$

- (c) **momento de inercia respecto del eje E**

$$I_E = \int x^2 dM$$

- (d) **radio de giro respecto del eje $E = R$, donde**

$$R^2 = \frac{I_E}{M}, \quad R > 0;$$

(e) **centroide de S** = (\bar{x}, \bar{y})

donde $\bar{x} = \frac{M_Y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_X}{M}$, siendo XY un sistema de coordenadas rectangulares en el plano de la lámina,

(f) **momento de inercia relativa al origen (o momento polar)**

$$I_0 = \int (x^2 + y^2) dM = I_X + I_Y$$

(g) si R es la región del plano acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces se cumple

$$M_X = \frac{1}{2} \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx \quad (1)$$

$$M_Y = \int_a^b x [y_2 - y_1] dx \quad (2)$$

$$I_X = \frac{1}{3} \int_a^b [y_2^3 - y_1^3] dx \quad (3)$$

$$I_Y = \int_a^b x^2 [y_2 - y_1] dx \quad (4)$$

Las fórmulas (1) y (2) se prueban en el problema 7, de la sección 1.8. La fórmula (3) se establece en el ejemplo 3 que sigue.

Ejemplo 1 Encontrar las coordenadas del centro de masa de la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y los ejes de coordenadas ($x \geq 0, y \geq 0$).

Solución Tenemos

$$y = f_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y = f_1(x) = 0.$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

tenemos $dM = y dx = -ab \sin^2 t dt$

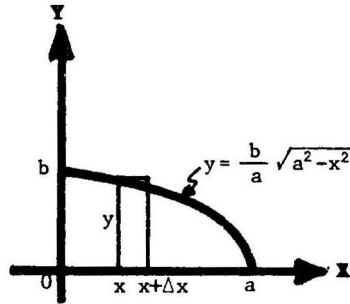
$$dM_x = \frac{1}{2} y^2 dx = -\frac{1}{2} ab^2 \sin^3 t dt$$

$$dM_y = xy dx = -a^2 b \sin^2 t \cos t dt,$$

e integrando respecto de t desde $\frac{\pi}{2}$ hasta 0 resulta

$$M = \frac{\pi ab}{4}, \quad M_x = \frac{ab^2}{3}, \quad M_y = \frac{a^2 b}{3}.$$

Luego $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}$



Ejemplo 2 Probar que los momentos estáticos y de inercia de un anillo circular plano de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) alrededor de un eje E perpendicular al plano del anillo y que pasa por el centro del mismo son dados por

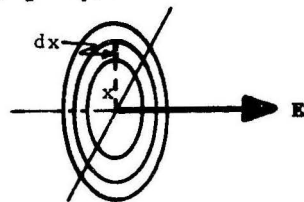
$$M_E = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \quad \text{y} \quad I_E = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Solución Para el anillo circular de radio x y espesor dx se tiene

$$dA = 2 \pi x dx,$$

$$dM_E = x dA = 2 \pi x^2 dx,$$

$$\text{y } dI_E = x^2 dA = 2 \pi x^3 dx.$$



Luego,
$$M_E = \int_{R_1}^{R_2} dM_E = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \quad \text{y} \quad I_E = \int_{R_1}^{R_2} dI_E = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Ejemplo 3 Probar que el momento de inercia respecto del eje X de una región R acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, y las curvas continuas

$$0 < y_1(x) < y_2(x), \quad \text{es} \quad I_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3) dx.$$

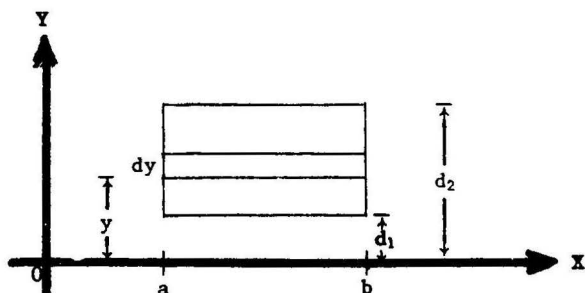
Solución

Caso 1: R es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

Sean $d_1 < d_2$ las distancias al eje X de los lados de R paralelos a este eje. Probaremos que

$$I_X = \frac{1}{3} (d_2^3 - d_1^3) \cdot B, \quad \text{donde } B = \text{base del rectángulo}$$

$$B = b - a.$$



El área del rectángulo elemental de la figura es $dA = (b-a)dy = B dy$ y por lo tanto

$$I_X = \int_{d_1}^{d_2} y^2 dA = B \int_{d_1}^{d_2} y^3 dy = \frac{B}{3} (d_2^3 - d_1^3).$$

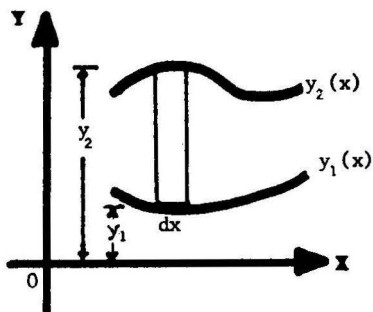
Caso 2: R es la región indicada en el enunciado del ejemplo.

Por el caso 1, el momento de inercia respecto del eje X del rectángulo elemental de la figura es

$$dI_X = \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx.$$

Luego

$$I_X = \int_a^b dI_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3) dx.$$



1.4 Caso IV: Superficies de Revolución Sea S una superficie obtenida por rotación alrededor del eje X de la curva

$$0 \leq y = y(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Se define

(1) **Area de S** = $2\pi \int_a^b y \, ds$;

(2) **Momento estático de S respecto del eje X**

$$M_X = 2\pi \int_a^b y^2 \, ds ,$$

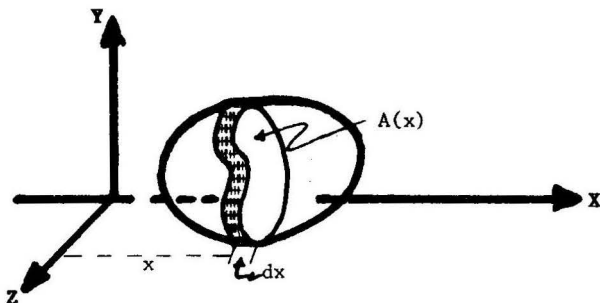
(3) **Momento de inercia de S respecto del eje X**

$$I_X = 2\pi \int_a^b y^3 \, ds ;$$

donde $ds =$ diferencial de longitud de arco = $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$.

1.5 Caso V: Sólidos

1.5.1 Sea S un sólido (o cuerpo) de densidad constante σ de masa por unidad de volumen en el espacio XYZ, comprendido entre los planos $x=a$ y $x=b$. Si $A(x)$ designa el área de la sección de S paralela al plano YZ en el punto x , $a \leq x \leq b$, entonces la masa del cilindro elemental de base $A(x)$ y altura dx es $dM = \sigma A(x) dx$. Se define



(a) masa de S

$$M = \int dM$$

(b) momento estático de S respecto del plano YZ.

$$M_{YZ} = \int x dM$$

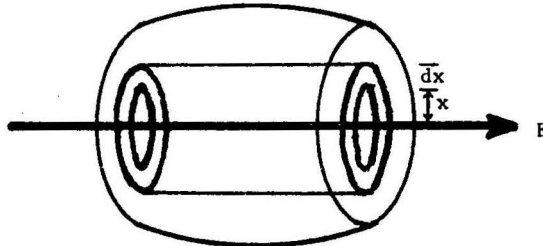
(c) centroide de S = $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\text{donde } \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Nota

Si una figura geométrica (curva, área o volumen) es simétrica respecto de E (eje o plano) entonces su centroide se encuentra en E. (Ver problema 4, sección 1.8, problemas resueltos pág 320).

1.5.2 Sea S un sólido generado por rotación de una figura plana R alrededor de un eje E. Designemos con dM la masa de un tubo cilíndrico cuyo eje es E.



Se define

(a) momento de inercia de S respecto de E

$$I_E = \int x^2 dM$$

(b) radio de giro de S respecto de E = R, donde

$$R^2 = \frac{I_E}{M}, \quad R \geq 0,$$

siendo M = masa total de S.

1.5.3 Nota Cuando se trata de calcular los momentos estáticos o de inercia es conveniente descomponer la masa del cuerpo dado en elementos de masa para los cuales se conocen estos momentos y a continuación se integran dichos elementos.

Ejemplo 1 Sea R el sólido generado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por $x = a$, $x = b$, la curva $y = y(x) \geq 0$ y el eje X. Probar que los momentos estáticos y de inercia de R respecto del eje de revolución son dados por

$$M_X = \frac{2}{3} \pi \int_a^b y^3 dx \quad \text{y} \quad I_X = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4 dx .$$

Solución Consideremos un disco circular perpendicular al eje X de radio $y = y(x)$ y espesor dx . Aplicando las fórmulas derivadas en el ejemplo 2, 1.3, pág. 312, se tiene

$$dM_X = \frac{2}{3} \pi y^3 dx \quad \text{y} \quad dI_X = \frac{\pi}{2} y^4 dx .$$

Finalmente, integrando respecto de la variable x desde $x = a$ hasta $x = b$ se obtienen las fórmulas indicadas.

Ejemplo 2 Calcular el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo, respecto a su eje, si el radio de la base es r y altura h .

Solución Sea la densidad constante de masa por unidad de volumen. El momento de inercia del tubo cilíndrico generado por rotación del rectángulo elemental R alrededor del eje Y es

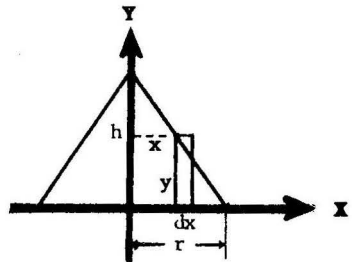
$$dI_y = x^2 \cdot \text{masa} = x^2 \sigma (2\pi xy dx) \\ = 2 \pi \sigma x^3 y dx$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{y}{r-x} = \frac{h}{r} \quad \text{o} \quad y = \frac{h}{r}(r-x)$$

$$\text{Luego} \quad I_y = \int_0^r 2 \pi \sigma x^3 \frac{h}{r}(r-x) dx = \frac{\pi h r^4 \sigma}{10} = \frac{3}{10} M r^2 ,$$

$$\text{donde} \quad M = \text{masa} = \sigma \frac{\pi r^2}{3} h .$$



1.6 TEOREMAS DE PAPPUS

TEOREMA 1

El área de la superficie obtenida al rotar un arco de una curva plana alrededor de un eje, que se encuentra en el plano de la curva, y que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masa - del arco de la curva

$$A = 2 \pi \bar{y} L$$

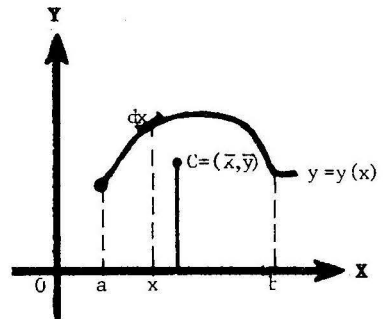
donde

L = longitud de la curva,

\bar{y} = distancia del centro de masa de la curva al eje,

A = área de la superficie generada por la curva.

En la figura se encuentra el arco de la curva $y = y(x) > 0$ entre $x = a$ y $x = b$; $C = (\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de masa, y se asume que la curva rota alrededor del eje X .



PRUEBA

Designemos con ds la diferencial de longitud de arco.

Tenemos

$$A = 2 \pi \int_a^b y \, ds \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b y \, ds}{L} \quad (2)$$

y substituyendo $\int_a^b y \, ds = \bar{y} L$ en (1) resulta

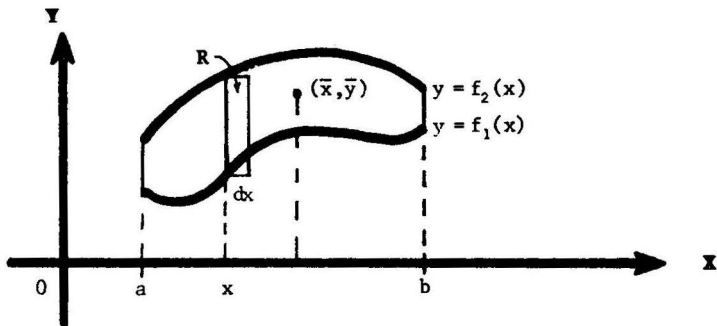
$$A = 2 \pi \bar{y} L .$$

TEOREMA 2

El volumen de un sólido obtenido al rotar una región del plano alrededor de un eje que se encuentra en el plano de la región y que no la corta, es igual al producto del área de la región por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masa de la región

$$V = 2 \pi \bar{y} A$$

donde A = área de la región,
 \bar{y} = distancia del centro de masa de la región al eje dado,
 V = volumen del sólido generado por la región.



En la figura se muestra una región contenida en el plano XY que rota alrededor del eje X y cuyo centroide es (\bar{x}, \bar{y}) .

PRUEBA

Vamos a suponer que la región dada está acotada por

- 1) las rectas $x = a, x = b, a < b$,
 - y 2) las curvas continuas $y = f_1(x), y = f_2(x)$,
- donde $0 < f_1(x) \leq f_2(x)$, en $a \leq x \leq b$.

Tenemos entonces

$$V = \pi \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx \tag{1}$$

$$y \quad \bar{y} A = M_X = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx \tag{2}$$

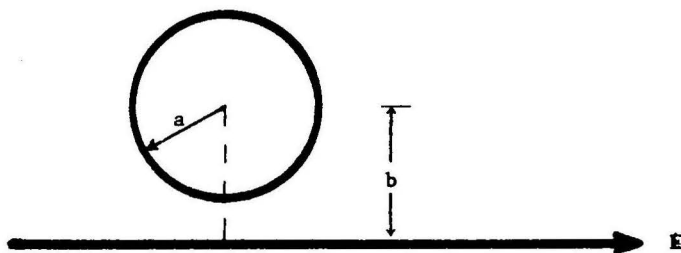
teniendo en cuenta (g), 1.3, pág 311.

Dividiendo miembro a miembro resulta

$$\frac{V}{\bar{y} A} = 2\pi \quad \text{o} \quad V = 2\pi \bar{y} A$$

Ejemplo

Encontrar el área de la superficie y el volumen de un toro obtenido por rotación de un círculo de radio a alrededor de un eje en el plano del círculo y a una distancia $b > a$ de su centro.

Solución

Consideremos un círculo como el que se muestra en la figura.

El centro de masa del círculo (y de la región acotada por el círculo) se encuentra a la distancia b del eje E .

Luego, por los teoremas 1 y 2 de Pappus, respectivamente, se tiene

$$A = 2 \pi b \cdot (\text{longitud de la curva})$$

$$= (2 \pi b)(2 \pi a)$$

$$= 4 \pi^2 ab$$

$$V = 2 \pi b \cdot (\text{área del círculo})$$

$$= (2 \pi b)(\pi a^2)$$

$$= 2 \pi^2 a^2 b .$$

1.7 TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

Sea un cuerpo con masa M y E un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo. Se cumple entonces

$$I_{E_1} = I_E + Ma^2,$$

donde E_1 es un eje paralelo al eje E ,
 a = distancia de E a E_1 ,
 I_E, I_{E_1} son los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes E y E_1 , respectivamente.

PRUEBA. Sea $x = \pm$ distancia del elemento de masa dM al eje E .

Entonces $x - a = \pm$ distancia de dM al eje E_1 ,

$$y \quad \bar{x} = \int x dM = 0, \quad \text{pues } E \text{ pasa por el centro de masa de } M.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_{E_1} &= \int (x-a)^2 dM = \int (x^2 - 2xa + a^2) dM \\ &= \int x^2 dM - 2a \int x dM + a^2 \int dM = I_E - 2a\bar{x} + a^2 M \\ &= I_E + Ma^2. \end{aligned}$$

1.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Un alambre tiene la forma de un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el primer cuadrante. Hallar su masa y su momento de inercia respecto de los ejes X e Y si la densidad ρ en el punto (x,y) es $(x+y)$.

SOLUCION Tenemos $x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad ds = r dt,$

$$\rho = x+y = r(\cos t + \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Tenemos } M = \int_0^{\pi/2} \rho ds = \int_0^{\pi/2} r(\cos t + \sin t)r dt = 2r^2$$

$$I_X = \int_0^{\pi/2} y^2 dM = \int_0^{\pi/2} (r^2 \sin^2 t)r(\cos t + \sin t)r dt$$

$$= r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t + \sin t) dt = r^4.$$

De igual modo $I_Y = r^4.$

PROBLEMA 2 Encontrar el centroide de un arco de la catenaria $y = 4 \cosh \frac{x}{4}$ desde $x = -4$ hasta $x = 4$.

SOLUCION

Tenemos $y' = \sinh \frac{x}{4}$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \cosh \frac{x}{4} dx$,

$$L = \text{longitud del arco indicado} = \int_{-4}^4 ds = 4 \sinh \frac{x}{4} \Big|_{-4}^4$$

$$= 4 [\sinh 1 - \sinh(-1)] = 8 \sinh 1,$$

ya que $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$.

$$M_X = \int_{-4}^4 y ds = 4 \int_{-4}^4 \cosh^2 \frac{x}{4} dx = 2 \int_{-4}^4 \left[\cosh \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right] dx$$

$$= 8 \sinh 2 + 16$$

$$M_Y = \int_{-4}^4 x ds = \int_{-4}^4 x \cosh \frac{x}{4} dx = 0$$

(integrando por partes y usando $\cosh(-x) = \cosh x$)

Luego $\bar{x} = \frac{M_Y}{L} = 0$,

$$\bar{y} = \frac{M_X}{L} = \frac{8 \sinh 2 + 16}{8 \sinh 1} = \frac{2 + \sinh 2}{\sinh 1}.$$

PROBLEMA 3 Calcular los momentos estáticos, respecto de los ejes X e Y, y las coordenadas del centro de masa del arco de la asteroide $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ que se encuentra en el primer cuadrante.

SOLUCION Por simetría $M_X = M_Y$, $\bar{x} = \bar{y}$, de manera que es suficiente calcular M_Y e \bar{y} .

Tenemos $y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx$,

$$L = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2} a, \quad M_Y = \int_0^a x dx = \int_0^a a^{1/3} x^{2/3} dx = \frac{3}{5} a^2,$$

$$\bar{y} = \frac{M_Y}{L} = \frac{2}{5} a.$$

Luego $M_X = M_Y = \frac{3}{5} a^2$, y $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5} a$.

PROBLEMA 4 Probar que si una figura plana (curva o área) es simétrica respecto de un eje E, entonces se cumple

- (1) $M_E =$ momento estático respecto de E = 0,
- (2) el centroide de la figura se encuentra en el eje E.

Nota La misma propiedad se cumple si un sólido es simétrico respecto de un plano E.

SOLUCION.

- (1) Sea $x = \pm$ distancia de un elemento de masa al eje E, $-a \leq x \leq a$,
y $\rho(x) =$ densidad lineal de masa respecto de la variable x .

Por simetría se tiene $\rho(-x) = \rho(x)$ y por lo tanto la función $f(x) = x\rho(x)$ es impar, esto es, $f(-x) = -f(x)$. Luego,

$$M_E = \int_{-a}^a x \rho(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (\text{prob.10, pág.128})$$

- (2) $\bar{x} = \frac{M_E}{M} = 0.$

PROBLEMA 5 Determinar las coordenadas del centro de masa de un arco completo de la cicloide

$$x = a(t - \text{sen } t)$$

$$y = a(1 - \text{cos } t)$$

SOLUCION Tenemos $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2a \text{sen} \frac{t}{2} dt$
(usando $2 \text{sen}^2 \frac{t}{2} = 1 - \text{cos } t$)

Luego $L = \int_0^{2\pi} ds = 8a,$

$$M_X = \int_0^{2\pi} y ds = \int_0^{2\pi} a(1 - \text{cos } t) 2a \text{sen} \frac{t}{2} dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^3 \frac{t}{2} dt = \frac{32a^2}{3},$$

e $\bar{y} = \frac{M_X}{L} = \frac{4a}{3}.$

Puesto que el arco es simétrico respecto de la recta $x = a\pi$, la abscisa \bar{x} del centro de masa se encuentra en esta recta (ver problema 4).

Luego, $\bar{x} = a\pi.$

PROBLEMA 6 Determinar el centroide de la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION Puesto que la curva es simétrica respecto del eje X se cumple $\bar{y} = 0$.

Por otra parte,

$$dr = -a \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Luego

$$L = 2 \int_0^\pi x ds = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a,$$

$$\begin{aligned} M_Y &= 2 \int_0^\pi x ds = 2 \int_0^\pi (r \cos \theta) ds = 4a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi \left(2 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\quad \left(\text{usando } \cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 8a^2 \int_0^\pi \left(1 - 3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5} a^2, \end{aligned}$$

$$y \quad \bar{x} = \frac{M_Y}{L} = \frac{4}{5} a.$$

PROBLEMA 7 Probar que si R es la región del plano acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces

$$(1) \quad M_Y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$

$$(2) \quad M_X = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

SOLUCION

$$(1) \quad \text{Por definición} \quad M_Y = \int_a^b x dA, \quad \text{donde } dA \text{ es el área de}$$

un rectángulo elemental de lados paralelos al eje Y (franjas verticales, de altura $y_2 - y_1$ y base dx).

$$\text{Luego } dA = (y_2 - y_1) dx \quad y \quad M_Y = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx.$$

(2) Tenemos $M_X = \int_a^b dM_X$, donde dM_X es el momento de un rectángulo elemental de lados paralelos al eje Y (franjas verticales), de altura $y_2 - y_1$ y base dx .

Por el problema 4, el centro de masa de tal rectángulo, por simetría, coincide con su centro geométrico y por lo tanto se encuentra a una distancia $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ del eje E. Luego

$$dM_X = ydA = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (y_2 - y_1) dx = \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{2} dx$$

$$y \quad M_X = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx .$$

PROBLEMA 8 Hallar el centroide del área acotada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION Los puntos de intersección de las curvas dadas se obtienen cuando $y = x^2 = \sqrt{x}$ o $x^4 = x$, esto es, cuando $x = 0, 1$.

Tenemos

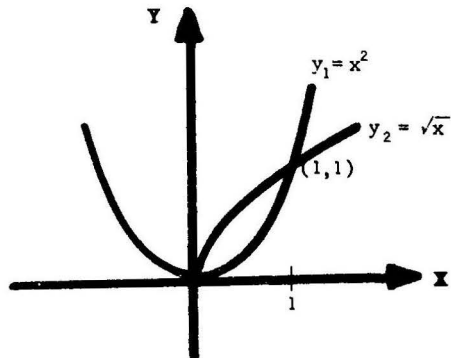
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3} ,$$

$$M_Y = \int_0^1 x [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{3}{20} ,$$

$$M_X = \int_0^1 \frac{1}{2} [y_2^2 - y_1^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{20} .$$

Luego, $\bar{x} = \frac{9}{20}$, $\bar{y} = \frac{9}{20}$.



Nota También puede calcularse M_X empleando rectángulos elementales horizontales:

$$M_X = \int_0^1 y(x_2 - x_1) dy , \quad \text{donde } x_1 = \sqrt{y} , \quad x_2 = y^2 .$$

PROBLEMA 9. (Teorema de Pappus). Sean R_1 y R_2 dos regiones disjuntas del plano con masas M_1 y M_2 y centroides (\bar{x}_1, \bar{y}_1) y (\bar{x}_2, \bar{y}_2) , respectivamente. Probar que el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la región R compuesta por las dos regiones R_1 y R_2 viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2}{M_1 + M_2}, \quad \bar{y} = \frac{M_1 \bar{y}_1 + M_2 \bar{y}_2}{M_1 + M_2}$$

SOLUCION. Tenemos

$$M = \text{masa de } R = M_1 + M_2$$

M_X = Momento estático de R respecto del eje X

$$\begin{aligned} &= \int x \, dm = \int x \, dM_1 + \int x \, dM_2 \quad (\text{pues las dos regiones } R_1 \\ &\quad \text{y } R_2 \text{ son disjuntas.}) \\ &= M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \bar{x} = \frac{M_X}{M} = \frac{M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2}{M_1 + M_2}.$$

En forma análoga se establece la otra fórmula.

PROBLEMA 10. Probar que el centroide de un triángulo coincide con el punto de intersección de las medianas.

SOLUCION. Bastará probar que el centroide de un triángulo de altura h se encuentra a una distancia $\frac{h}{3}$ medida desde la base.

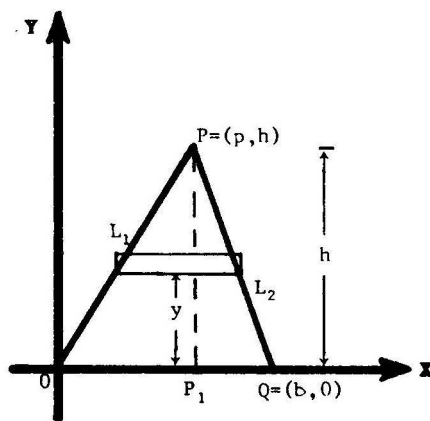
Dado el triángulo OPQ consideremos un sistema de coordenadas rectangulares como el que se muestra en la figura.

Debemos calcular

$$M_X = \int_0^h y(x_2 - x_1) \, dy.$$

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son respectivamente,

$$L_1: x_1 = \frac{p}{h} y, \quad L_2: x_2 = \frac{p-b}{h} y + b,$$



$$\text{y por lo tanto, } M_X = \int_0^h y \left(-\frac{b}{h} y + b \right) dy = \frac{bh^2}{6}. \text{ Así, } \bar{y} = \frac{M_X}{\text{Area}} = \frac{h}{3}.$$

OTRA SOLUCION. (Usando el Teorema 2 de Pappus). Si hacemos que el triángulo OPQ rote alrededor del eje, el volumen del sólido generado es

$$V = \text{Volumen generado por } OPP_1 + \text{Volumen generado por } PP_1Q$$

$$= \frac{1}{3} p (\pi h^2) + \frac{1}{3} (b-p) (\pi h^2) = \frac{1}{3} b \pi h^2 \quad (1)$$

Pero por el teorema de Pappus

$$V = 2\pi \bar{y} \cdot \text{Area de OPQ} = 2\pi \bar{y} \frac{bh}{2} = \pi \bar{y} bh \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\bar{y} = \frac{1}{3} h .$$

PROBLEMA 11. Encontrar el momento de inercia y el radio de giro respecto del eje X de la región acotada por la curva $y = x e^{-x}$ y el eje X en el primer cuadrante.

$$y = x e^{-x}$$

y el eje X en el primer cuadrante.

SOLUCION. Aplicamos la fórmula $I_X = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3 - y_1^3)$

dada en el ejemplo 2, 1.3, con $a=0$, $b=+\infty$, $y_2 = x e^{-x}$ y $y_1 = 0$.

Luego

$$I_X = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{27} (9x^3 + 9x^2 + 6x + 2) \Big|_0^{+\infty}$$

(integrando por partes)
(usando $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$)

$$= \frac{2}{27}$$

Por otra parte $A = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$.

Luego,

$$R^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{2}{27} ,$$

de donde $R = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

PROBLEMA 12 Probar que los momentos estáticos respecto de los ejes X e Y de una región R acotada por la curva $r = r(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, son dados por las fórmulas

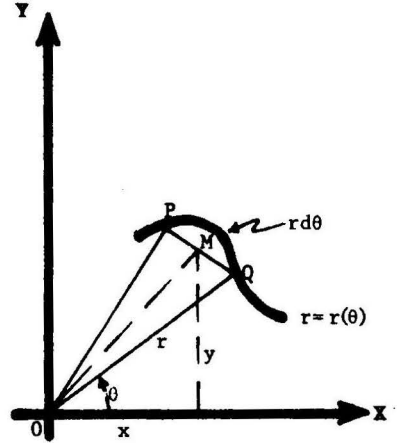
$$M_Y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta \quad \text{y} \quad M_X = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta \, d\theta.$$

SOLUCION Por el problema 10, el centro de masa $C = (\bar{x}, \bar{y})$ del triángulo elemental OPQ de la figura se encuentra en la mediana OM a $\frac{2}{3}$ de \overline{OM} del polo O. Luego $\bar{x} = \frac{2}{3}x$, $\bar{y} = \frac{2}{3}y$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } dM_X &= \bar{y} \cdot \text{Area de OPQ} = \frac{2}{3}y \cdot \frac{r^2 d\theta}{2} \\ &= \frac{2}{3}r \sin \theta \cdot \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{1}{3}r^3 \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

e integrando respecto de θ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ resulta

$$M_X = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta \, d\theta.$$



De igual manera se obtiene la fórmula correspondiente a M_Y .

PROBLEMA 13 Calcular el centroide del área encerrada por la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION Teniendo en cuenta que la región es simétrica respecto del eje X se obtiene $\bar{y} = 0$.

$$\text{Por otra parte} \quad dA = \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$dM_Y = \frac{1}{3} r^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{a^3}{3} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta,$$

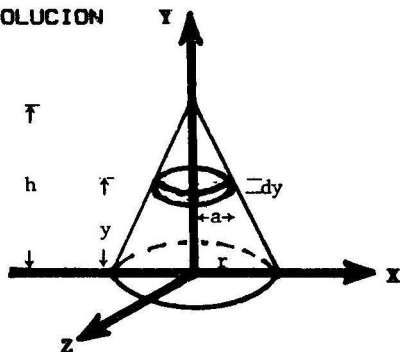
y por tanto

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

$$M_Y = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{4} \pi a^3. \quad \text{Así, } \bar{x} = \frac{M_Y}{A} = \frac{5}{6} a.$$

PROBLEMA 14 Hallar el centro de masa de un cono homogéneo circular recto de altura h y radio en la base r .

SOLUCION



Por simetría del centro de masa se encuentra en el eje Y . Luego $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$.

Calcularemos M_{XZ} = momento estático del cono respecto del plano XZ . El disco elemental de la figura (de bases paralelas al plano XZ) tiene volumen

$dV = \pi a^2 dy$,
donde el radio a cumple por semejanza de triángulos la relación

$$a = \frac{r}{h}(h-y).$$

Así tenemos que

$$M_{XZ} = \int_0^h y dV = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y(h-y)^2 dy = \frac{\pi r^2 h^2}{12}$$

$$y \quad \bar{y} = \frac{M_{XZ}}{V} = \frac{h}{4}, \quad \text{ya que} \quad V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Por lo tanto el centroide del cono se encuentra en el eje del cono a $\frac{h}{4}$ unidades de distancia respecto de la base.

PROBLEMA 15

- (1) Probar que el momento de inercia de la región encerrada por un círculo de radio r alrededor de uno de sus diámetros es $I = \pi r^4/4$.
- (2) Encontrar el momento de inercia de un cono circular recto de altura h y radio r en la base respecto de un diámetro de su base.

SOLUCION

- (1) Podemos asumir que la ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = r^2$ y que el diámetro está contenido en el eje Y . Luego

$$I = I_Y = 2 \int_{-r}^r x^2 y dx = -2r^4 \int_{\pi}^0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

(haciendo $x = r \cos \theta$, $y = \sin \theta$)

$$= -\frac{1}{2} r^4 \int_{\pi}^0 \sin^2 2\theta d\theta = -\frac{r^4}{4} \int_{\pi}^0 (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{4}.$$

- (2) Consideremos un disco circular R de radio a y espesor dy con bases paralelas al plano XZ.

Por la parte 1, el momento de inercia de R respecto de uno de sus diámetros D' es aproximadamente igual a

$$\frac{\pi}{4} a^4 dy.$$

Luego, por el teorema de Steiner (1.7) su momento de inercia respecto del eje X será

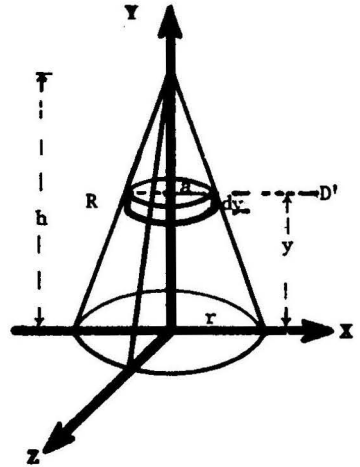
$$dI_X = \frac{\pi}{4} a^4 dy + (\text{volumen de R}) y^2 \\ = \left(\frac{\pi}{4} a^4 + \pi a^2 y^2 \right) dy \quad (\alpha)$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a}{r} = \frac{h-y}{h} \quad \text{o} \quad a = \frac{r}{h}(h-y) \quad (\beta)$$

Sustituyendo (β) en (α) e integrando respecto de la variable y desde $y=0$ hasta $y=h$ resulta

$$I_X = \int_0^h dI_X = \frac{\pi r^2 h}{60} (2h^2 + 3r^2).$$



PROBLEMA 16 Hallar el momento de inercia respecto del eje X de la superficie generada por rotación, alrededor del eje X, de un arco completo de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \text{cos } t)$.

SOLUCION El momento de inercia respecto del eje X de la superficie cilíndrica elemental de radio

$$y = a(1 - \text{cos } t) = 2a \text{sen}^2 \frac{t}{2} \quad \text{y altura} \quad ds = 2a \text{sen} \frac{t}{2} dt \quad \text{es}$$

$$dI_X = y^2 dA = y^2 (2\pi y ds) = 32\pi a^4 \text{sen}^7 \frac{t}{2} dt.$$

Integrando desde 0 hasta 2π resulta

$$I_X = \frac{2048}{35} \pi a^4.$$

PROBLEMA 17

Probar que el centro de masa de un hemisferio sólido de radio r se encuentra respecto de la base a la distancia

- (1) $\frac{3}{8} r$, si la masa es homogénea;
 (2) $\frac{8}{15} r$, si la densidad de cualquier punto P es proporcional a la distancia de P a la base del hemisferio.

SOLUCION

El volumen de un disco circular de espesor dx y radio $a = \sqrt{r^2 - x^2}$ con base paralela y a una distancia x de la base del hemisferio es

$$dV = \pi a^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx.$$

Por simetría, en ambos casos el centro de masa se encuentra en la perpendicular a la base levantada desde su centro.

- (1) **La masa es homogénea** En este caso $\rho = \text{densidad} = \text{cte.}$

$$y \quad M = \rho \int_0^r dV = \pi \rho \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2\pi r^3 \rho}{3},$$

$M_B =$ momento respecto al plano de la base del hemisferio

$$= \int_0^r x dM = \pi \rho \int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi r^4 \rho}{4}$$

Luego
$$\bar{x} = \frac{M_B}{M} = \frac{3r}{8} .$$

- (2) **La densidad $\rho(x)$ es proporcional a x** Sea $\rho(x) = Cx$ donde C es una constante de proporcionalidad. Entonces $dM = (x) dV$

$$dM = \rho(x) dV = c\pi x(r^2 - x^2) dx ,$$

$$M = C \pi \int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi r^4 C}{4}$$

$$M_B = \int_0^r x dM = C \pi \cdot \int_0^r x^2 (r^2 - x^2) dx = \frac{2\pi r^5}{15} C ,$$

$$\bar{x} = \frac{M_B}{M} = \frac{8}{15} r .$$

PROBLEMA 18 Encontrar el centroide de una cáscara hemisférica homogénea de radio interior R_1 y radio exterior R_2 .

SOLUCION El volumen de la cáscara es $V = \frac{2}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$, y el momento del hemisferio de radio R_1 respecto del plano de las bases es $M_1 = \frac{\pi R_1^4}{4}$ (por el problema 17 parte 1). Aplicando el teorema de Pappus (problema 9) se tiene $M_2 = \bar{x}V + M_1$,

$$\text{de donde } \bar{x} = \frac{M_2 - M_1}{V} = \frac{\frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)}{\frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Así el centroide de la cáscara se encuentra a \bar{x} de la base en la perpendicular que pasa por el centro de la base.

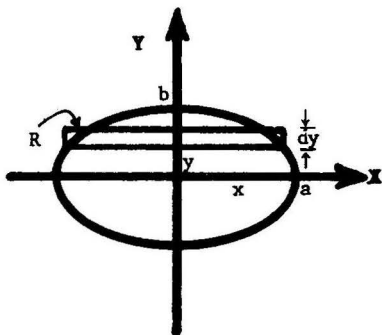
PROBLEMA 19 Calcular el momento de inercia con respecto al eje de revolución del sólido generado por rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje X.

SOLUCION El momento de inercia del tubo cilíndrico generado por rotación, alrededor del eje X, del rectángulo elemental R de la figura de base dy y altura 2x es

$$dI_X = y^2 dV = y^2 (2\pi y)(2x) dy = 4\pi y^3 x dy.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_X &= \int_0^b dI_X = 4\pi \int_0^b y^3 x dy \\ &= 4\pi ab^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^2 t dt \quad (\text{haciendo } x = a \cos t, y = b \sin t) \\ &= 4\pi ab^4 \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{8\pi ab^4}{15}. \end{aligned}$$



Nota. Si $a = b$, el sólido generado es una esfera de radio a y el momento de inercia es $I = \frac{8\pi a^5}{15} = \frac{2}{5} Va^2$, donde $V = \frac{4}{3} \pi a^3 =$ volumen de la esfera.

OTRA SOLUCION Empleando discos circulares al eje X, de espesor dx y radio y , se tiene, según la fórmula dada en el ejemplo 1, 1.5.3, que

$$I = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4 dx = \frac{\pi b^4}{2a^4} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{8\pi ab^4}{15}.$$

PROBLEMA 20 Calcular el momento de inercia de una superficie esférica de radio r respecto de un eje que pasa por el centro de la esfera encerrada por la superficie.

SOLUCION La superficie se obtiene por rotación, alrededor del eje X, del círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

Aplicamos la fórmula $I_X = 2\pi \int_a^b y^3 ds$ dada en (3), 1.4.

Tenemos $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $ds = r d\theta$, y por tanto

$$I_X = 2\pi \int_0^\pi r^4 \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} r^4.$$

1.9 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Encontrar el centroide del área acotada por las curvas $y = (x+1)^2$, $x+y = 5$, $y = 0$, $x = 2$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = \frac{39}{37}, \quad \bar{y} = \frac{281}{185}.$$

PROBLEMA 2 Calcular el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ de los centroides de las regiones acotadas por las curvas $y = x^n$, el eje X y $x = 1$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = 1, \quad \bar{y} = \frac{1}{4}$$

PROBLEMA 3 Determinar el momento del volumen comprendido en un octante y la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, respecto al plano XY.

$$\text{Rpta } \frac{\pi abc^2}{16}.$$

PROBLEMA 4 Hallar el momento de inercia de un

- a) triángulo con base b y altura h alrededor de su base;
 b) rectángulo con lados a y b alrededor de su diagonal.

$$\text{Rpta } \text{ a) } \frac{bh^3}{12}; \quad \text{ b) } \frac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)}.$$

PROBLEMA 5 Encontrar el centroide del sector hiperbólico acotado por la hipérbola equilátera $x = \frac{3}{2} \sec \theta$, $y = \frac{3}{2} \tan \theta$ y los radios vectores $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Rpta } \bar{x} = \frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}, \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}.$$

2 APLICACIONES A PROBLEMAS DE FISICA

2.1 Camino Recorrido por un Punto

Definición La longitud del camino recorrido por un punto P en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, cuando éste se mueve a lo largo de una curva, se define por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

donde $v(t)$ = (valor absoluto de la) velocidad.

Ejemplo Encontrar el camino recorrido por un punto desde que se inicia el movimiento hasta el instante en que se detiene, si su velocidad de movimiento es

$$v(t) = t e^{-0.2t} \text{ mt/seg.}$$

Solución Puesto que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$, el punto se irá deteniendo cuando el tiempo crezca indefinidamente. Luego, integrando por partes se tiene

$$s = \int_0^{+\infty} t e^{-0.2t} dt = 25 \text{ mts.}$$

2.2 Trabajo realizado por una fuerza

Definición El trabajo realizado sobre un intervalo $[x_1, x_2]$ por una fuerza $F = f(x)$, que actúa en la dirección del eje X, se define por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Ejemplo. Calcular el trabajo que debe realizarse para bombear el agua de un tanque cilíndrico vertical de altura H y radio R en la base, por encima del tanque.

Solución. El peso del agua contenida en un disco cilíndrico de espesor dx y de base horizontal a una distancia x de la base del tanque es

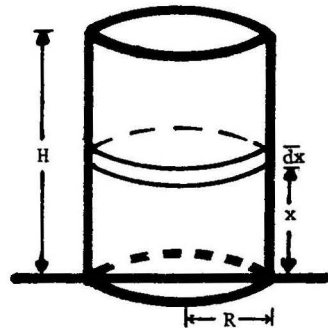
$$\rho \pi R^2 dx,$$

donde ρ = peso de una unidad de volumen de agua.

El trabajo requerido para levantar este disco desde x hasta H es

$$dW = (H-x) \rho \pi R^2 dx.$$

Luego,
$$W = \int_0^H dW = \rho \pi R^2 \int_0^H (H-x) dx = \frac{\rho \pi}{2} R^2 H^2.$$



2.3 Energía Cinética

Definición La energía cinética de un cuerpo se define mediante la fórmula

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

donde v es la velocidad de un elemento de masa dm.

Ejemplo Hallar la energía cinética de un disco de masa M y radio R cuando rota con velocidad angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro perpendicular al plano del disco.

Solución La energía cinética de un anillo circular de radio interior x y radio exterior $x+dx$ es $dK = \frac{1}{2} (\text{masa}) \cdot (\text{velocidad})^2 = \frac{\rho(2\pi x dx)}{2} (x\omega)^2$, donde $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ = densidad de masa por unidad de área. (Observemos que ρ (Observemos que cada punto del anillo rota con igual velocidad $v = x\omega$).

Luego

$$K = \int_0^R dK = \pi \rho \omega^2 \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi \rho \omega^2 R^4}{4} = \frac{MR^2 \omega^2}{4} .$$

2.4 Presión de un líquido

Deseamos calcular la presión de un líquido sobre una pared vertical.

Asumimos las siguientes hipótesis experimentales:

- 1) La fuerza de presión de un líquido sobre una superficie actúa normalmente a la superficie y su valor por unidad de área a una profundidad x de la superficie del líquido es igual a

$$p(x) = \gamma x$$

donde γ = peso de una unidad de volumen de líquido.

- 2) La fuerza de presión a una profundidad x es la misma en cada dirección.

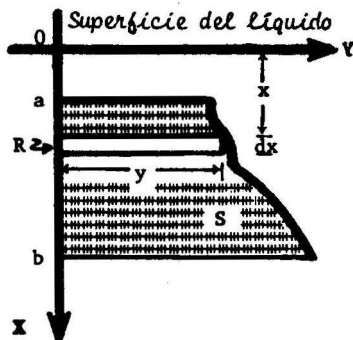
Sea S una superficie vertical sumergida en un líquido como se muestra en la figura. Dividimos S en franjas horizontales elementales R de base y , altura dx y a la profundidad x .

De acuerdo a (1) la fuerza de presión del líquido sobre R es aproximadamente

$$\begin{aligned} dP &= p(x) \cdot \text{Area de } R \\ &= \gamma y x dx \end{aligned}$$

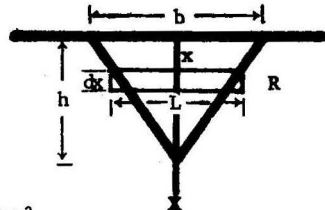
Luego, la fuerza de presión total del líquido sobre S es

$$P = \int_a^b dP = \gamma \int_a^b y x dx .$$



Ejemplo Hallar la fuerza de presión del agua sobre un triángulo vertical con base b y altura h sumergido con el vértice hacia abajo de manera que su base se encuentra en la superficie del agua.

Solución La presión del agua sobre el rectángulo elemental R de la figura de lados L y dx y a la profundidad x es $dP = \gamma x L dx$.



Por semejanza de triángulos $L = \frac{b}{h}(h-x)$

Luego

$$P = \int_0^h dP = \frac{\gamma b}{h} \int_0^h x(h-x) dx = \frac{\gamma b h^2}{6}, \text{ donde } \gamma = 1 \text{ para el agua.}$$

2.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Encontrar la altura alcanzada por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si su velocidad es dada por la fórmula

$$v = c \cdot \tan\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right),$$

siendo v_0 = velocidad inicial g = aceleración de la gravedad
 t = tiempo c = cte.

SOLUCION El cuerpo alcanza su máxima altura $h_{\text{máx}}$ cuando su velocidad es cero, esto es, en el instante t_1 tal que

$$-\frac{g}{c}t_1 + \arctan \frac{v_0}{c} = 0 \quad \text{o} \quad t_1 = \frac{c}{g} \arctan \frac{v_0}{c}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} h_{\text{máx}} &= \int_0^{t_1} v dt = c \int_0^{t_1} \tan\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right) dt \\ &= -\frac{c^2}{g} \ln \sec\left(-\frac{g}{c}t + \arctan \frac{v_0}{c}\right) \Bigg|_0^{t_1} \\ &= \frac{c^2}{g} \ln \sec\left(\arctan \frac{v_0}{c}\right) = \frac{c^2}{g} \ln \frac{\sqrt{c^2 + v_0^2}}{c} \\ &= \frac{c^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba es dada por $v = v_0 - gt$, donde t = tiempo, g = aceleración de la gravedad y v_0 = velocidad inicial. Hallar

- 1) la altura s del cuerpo desde su posición inicial después de t segundos.
- 2) la altura máxima que alcanza el cuerpo.

SOLUCION

$$1) \quad s = \int_0^t v \, dt = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Big|_0^t = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

- 2) La altura máxima que el cuerpo alcanza se obtiene cuando $v = 0$, o sea en el instante t_1 tal que $v_0 - g t_1 = 0$, o $t_1 = \frac{v_0}{g}$.

$$\text{Luego, } s_{\text{máx}} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} .$$

PROBLEMA 3 Un punto sobre el eje X ejecuta oscilaciones armónicas simples alrededor del origen de coordenadas, con velocidad $v = v_0 \cos \omega t$, donde t = tiempo, y v_0 y ω son constantes.

- 1) Hallar la posición x del punto si cuando $t = 0$, $x_0 = 0$.
- 2) Encontrar el valor medio del valor absoluto de la velocidad del punto durante una oscilación.
- 3) Probar que el promedio de la energía cinética respecto del tiempo durante un múltiplo de un cuarto de período es igual a la mitad de la energía cinética máxima.

SOLUCION

$$1) \quad \text{Tenemos } x - x_0 = \int_0^t v \, dt = \frac{v_0}{\omega} \text{ sen } \omega t .$$

$$\text{Luego } x = \frac{v_0}{\omega} \text{ sen } \omega t .$$

2) El punto efectúa una oscilación completa en el tiempo

$T = \text{período} = \frac{2\pi}{\omega}$. Luego, el promedio del valor absoluto de la velocidad en este intervalo de tiempo es

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{T} \int_0^T |v| dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v_0 |\cos \omega t| dt \\ &= \frac{v_0}{\omega T} \int_0^{2\pi} |\cos s| ds \quad (\text{haciendo } s = \omega t) \\ &= \frac{4v_0}{\omega T} \int_0^{\pi/2} \cos s ds = \frac{4v_0}{\omega T} = \frac{2v_0}{\pi}. \end{aligned}$$

3) La energía cinética del punto en el instante t es

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Así, $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2} m v_0^2$. (1)

El promedio \bar{K} de la energía cinética durante el intervalo de tiempo $\left[0, n\frac{T}{4}\right]$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y n entero ≥ 1 , es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{n\frac{T}{4}} \int_0^{nT/4} \frac{mv_0^2}{2} dt = \frac{2mv_0^2}{nT} \int_0^{n\pi/4} \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{2mv_0^2}{\omega nT} \int_0^{n\pi/2} \cos^2 s ds. \quad (\text{haciendo } s = \omega t) \\ &= \frac{mv_0^2}{\omega nT} \cdot \frac{n\pi}{2} = \frac{mv_0^2}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2), resulta $\bar{K} = \frac{K_{\text{máx}}}{2}$.

PROBLEMA 4 ¿Qué trabajo debe hacerse para estirar un resorte desde 3 cms. hasta 5 cms. si con una fuerza de 1 Kg-f se estira en 1 cm? Se sabe, por la ley de Hook, que la fuerza F requerida para estirar un resorte es proporcional a la longitud x de éste.

SOLUCION Tenemos $F = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad. Haciendo $x = 0.01$ mts y $F = 1$ Kg-f = $k(0.01)$ mts. o

$$k = 100 \frac{\text{Kg-f}}{\text{mts}}.$$

Luego, el trabajo requerido es

$$W = \int_{0,03}^{0,05} 100 x^2 dx = 50 x^2 \Big|_{0,03}^{0,05} = 0.08 \text{ Kg-f. mts.}$$

PROBLEMA 5 Encontrar el trabajo requerido para bombear el agua que llena un recipiente hemisférico de radio R , por encima del recipiente.

SOLUCION El peso del disco circular de espesor dx y base paralela a la base del recipiente es

$$F = \rho(\pi r^2) dx,$$

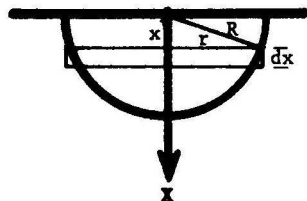
donde ρ = peso de una unidad de volumen de agua

$$\text{y } r^2 = R^2 - x^2.$$

El trabajo requerido para levantar este disco la altura x es por tanto

$$dW = F \cdot x = \rho \pi x(R^2 - x^2) dx.$$

$$\text{Así, } W = \rho \pi \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \frac{\rho \pi R^4}{4}.$$



PROBLEMA 6 Hallar la energía cinética de un cono circular recto de masa homogénea M que rota con velocidad angular constante ω alrededor de su eje. El radio de la base del cono es R y la altura es H .

SOLUCION Se sabe que la energía cinética es dada por $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, donde I es el momento de inercia del cono respecto de su eje (ver problema 9)

Por otra parte $I = \frac{3}{10} MR^2$ (ver ejemplo 2, sección 1.5, pág 316).

$$\text{Luego } K = \frac{3}{20} M^2 R^2 \omega^2.$$

PROBLEMA 7 ¿Qué trabajo debe hacerse para subir un cuerpo de masa m desde la superficie de la tierra (radio R) a una altura h ? ¿Cuál sería el trabajo requerido para llevar el cuerpo al infinito? (esto es, cuando $h \rightarrow +\infty$).

SOLUCION A la distancia x del centro de la tierra la fuerza de atracción sobre el cuerpo es $F = k \frac{Mm}{x^2}$.

Luego, el trabajo pedido se calcula según

$$W = \int_R^{R+h} F dx = k Mm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (1)$$

Puesto que para $x=R$ se tiene $F = \text{peso del cuerpo} = gm = K \frac{Mm}{R^2}$,

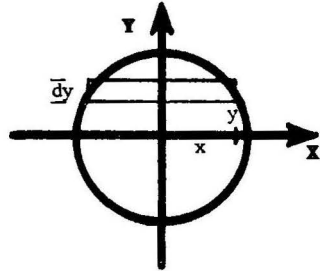
$$\text{obtenemos} \quad kMm = gmR^2, \quad (2)$$

y de (1) y (2), resulta $W = gmR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$, donde g es la aceleración de la gravedad.

Finalmente si $h \rightarrow +\infty$, se obtiene $W_\infty = gmR$.

PROBLEMA 8 ¿Qué trabajo debe hacerse para detener una esfera homogénea de radio R que rota con velocidad angular constante ω alrededor de su diámetro?

SOLUCION El trabajo requerido es igual a la energía cinética K de la esfera. El cilindro elemental generado por rotación alrededor del eje X del rectángulo de altura dy , y base $2x$ paralela al eje X tiene un volumen $(2x)(2\pi y)dy$ y su energía cinética es $dK = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{masa} \cdot (\text{velocidad})^2$
 $= 2\rho\pi\omega^2 x y^3 dy$, donde
 $\rho = \text{densidad de masa por unidad de volumen}$



$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{Luego} \quad K = 2\pi\omega^2 \int_0^R x y^3 dy = \frac{4}{15} \rho \pi \omega^2 R^5 = \frac{MR^2 \omega^2}{5}$$

OTRA SOLUCION Usando la fórmula $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, del problema 9 que sigue.

Gracias a la nota dada en el problema 19 de la sección 1.8 de problemas resueltos, el momento de inercia de una esfera alrededor de un diámetro es igual a

$$I = \frac{2}{5} MR^2. \text{ Luego } I = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) \omega^2 = \frac{MR^2 \omega^2}{5}$$

PROBLEMA 9 Probar que si un cuerpo sólido rota con velocidad angular constante ω alrededor de un eje E, entonces se cumple

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

donde K = energía cinética del cuerpo,

I = momento de inercia del cuerpo respecto del eje E.

SOLUCION Por definición $dK = \frac{1}{2}(dM)v^2$, donde v es la velocidad de un elemento de masa dM , a una distancia x del eje E. Luego

$$v = x \omega y$$

$$y \quad K = \int dK = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \int x^2 dM = \frac{1}{2} \omega^2 I,$$

que era lo que queríamos demostrar.

PROBLEMA 10 Encontrar el trabajo que debe hacerse para extraer el agua contenida en un recipiente cónico recto invertido de radio r en la base y altura h .

SOLUCION El peso de un disco cilíndrico elemental de base paralela a la base del cono, y a la distancia x de la base del cono, es

$$\rho \pi a^2 dx ,$$

donde a y dx designan el radio y altura del disco, respectivamente.

Por semejanza de triángulos $\frac{a}{r} = \frac{h-x}{h}$. Luego el trabajo requerido para levantar el disco es

$$dW = x(\rho \pi a^2 dx) = \frac{\pi a^2 r^2 \rho}{h^2} x (h-x)^2 dx, \text{ y por tanto}$$

$$W = \int_0^h dW = \frac{\pi a^2 r^2}{h^2} \rho \int_0^h x (h-x)^2 dx$$

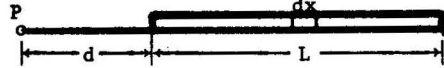
$$= \frac{\pi a^2 h^2 r^2}{12} \rho .$$

PROBLEMA 11 Encontrar la fuerza de atracción de una barra delgada homogénea de longitud L y masa M sobre un punto P de masa m situado en la recta de la barra y a una distancia d de uno de sus extremos.

SOLUCION Sea $\rho = \frac{M}{L}$ = densidad de masa por unidad de longitud.

La fuerza de atracción del elemento de la barra de masa ρdx a la distancia x de P es

$$dF = \frac{km\rho dx}{x^2}, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$



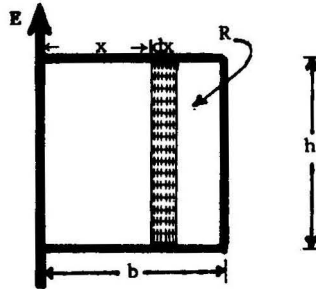
$$\text{Luego, } F = \int_d^{d+L} dF = km\rho \int_d^{d+L} \frac{dx}{x^2} = km\rho \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right) = k \frac{mM}{d(d+L)}.$$

PROBLEMA 12 El viento ejerce una presión uniforme p gr-f/cm² sobre una puerta de altura h cm y ancho b cm. Calcular el momento de la fuerza de presión con que el viento tiende a girar la puerta alrededor de uno de sus lados verticales.

SOLUCION Consideremos un rectángulo elemental R vertical de altura h y base dx . La fuerza con que el viento actúa sobre R es $p \cdot \text{área de } R = ph dx$ y el momento de esta fuerza alrededor del eje E es $xph dx$.

Luego, el momento total será

$$M_E = \int_0^b xph dx = \frac{phb}{2} \text{ gr-f.cm}$$



PROBLEMA 13 Un cable homogéneo de L metros de profundidad pesa ρ Kg-f por metro y tiene atado en su extremo inferior un peso de P Kg-f. ¿Qué trabajo total debe hacerse para subir el cable con el peso hasta la posición del extremo superior?

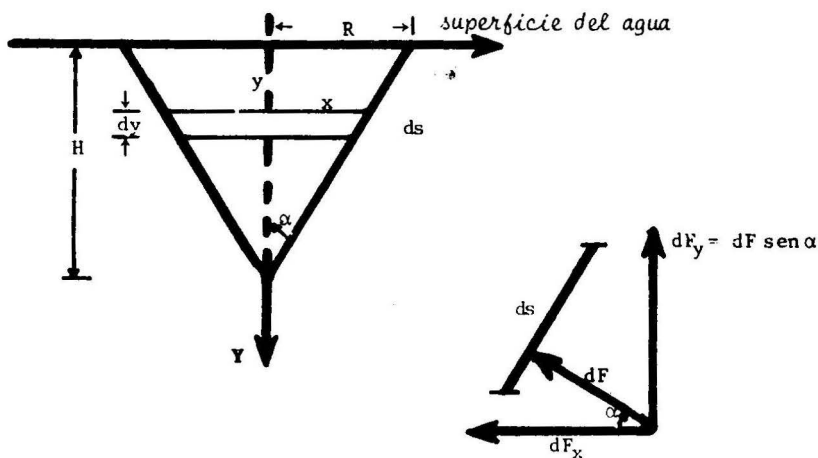
SOLUCION El trabajo de una porción de cable a una distancia x del extremo superior de longitud dx es $dW = x\rho dx$, siendo ρdx el peso del elemento de cable. Luego, el trabajo para levantar el cable es

$$W = \int_0^L x\rho dx = \rho \frac{L^2}{2}.$$

Finalmente el trabajo total requerido es $W_T = W + PL = \frac{L}{2}(\rho L + 2P)$.

PROBLEMA 14 Calcular la presión del agua sobre un cono circular vertical con radio R y altura H , sumergido en agua con su vértice hacia abajo de tal manera que su base se encuentra en la superficie del líquido.

SOLUCION La fuerza de presión del agua actúa normalmente a la superficie del cono, y su valor para una porción de superficie comprendida entre dos discos paralelos a la base del cono y a las distancias y , $y+dy$, respectivamente, es $dF = p \cdot \text{área} = \rho y (2\pi x ds)$, donde $\rho = 1$, x = radio del disco y ds = longitud de una arista entre dos discos.



Tenemos $x = (H-y)\tan \alpha$, $\alpha = \angle$ (eje Y y una arista),

$$ds = \sec \alpha dy .$$

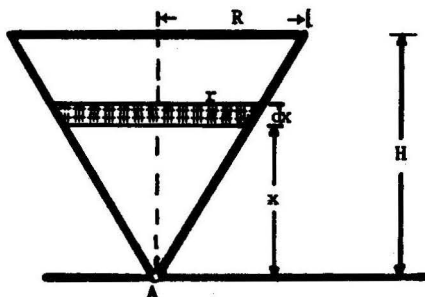
Luego $dF = 2\pi \tan \alpha \cdot \sec \alpha y(H-y)dy$.

La componente horizontal de la fuerza de presión es nula por simetría. La componente vertical está dirigida hacia arriba y vale

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^H \sin \alpha dF = 2\pi \tan^2 \alpha \int_0^H y(H-y)dy = 2\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{H^3}{6} \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{H^3}{6} = \frac{\pi R^2 H}{3} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 15 Un recipiente lleno de agua tiene la forma de un cono invertido recto circular de radio R en la base y altura H . Encontrar el tiempo que se requiere para vaciar el recipiente a través de un orificio de área A en el vértice.

SOLUCION



Se sabe que la velocidad de salida del agua es igual a la velocidad de un cuerpo en caída libre desde una altura x igual a la profundidad del agua. Así, la velocidad de salida es $v = \sqrt{2gx}$, donde g es la aceleración de la gravedad, y el volumen de agua que sale por el orificio durante un incremento de tiempo dt es

$$Q = Av dt = A\sqrt{2gx} dt \quad (1)$$

Este volumen puede ser calculado de otra manera. En efecto, si en el mismo intervalo de tiempo dt el nivel del agua ha descendido en una altura dx , el volumen perdido es igual a

$$Q = \text{volumen de un cilindro circular de radio } r \text{ y espesor } dx \\ = \pi r^2 dx,$$

donde, por semejanza de triángulos, $r = \frac{R}{H} x$.

Luego

$$Q = \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 dx. \quad (2)$$

Usando (1) y (2) resulta

$$dt = \frac{\pi R^2 x^2 dx}{AH^2 \sqrt{2gx}}$$

e integrando respecto de la variable x desde 0 hasta H se obtiene

$$t = \int_0^H dt = \frac{2\pi R^2}{5A} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

PROBLEMA 16 Una cisterna hemisférica de radio R está llena de agua. Dos hombres A y B deben vaciar el contenido de la cisterna de manera que cada uno haga la mitad del trabajo requerido. Si A empieza primero, ¿cuál será la profundidad h del agua cuando A ha terminado su trabajo?

SOLUCION

Por el problema 5, el trabajo requerido para levantar un disco desde la distancia x de la base del hemisferio es

$$dW = \rho \pi x(R^2 - x^2) dx,$$

y el trabajo total es $W = \frac{\rho \pi R^2}{4}$.

Buscamos h tal

$$\frac{W}{2} = \int_0^{R-h} dW.$$

Cancelando el factor $\rho \pi$ e integrando resulta la ecuación

$$2(R-h)^4 - 4(R-h)^2 R^2 + R^4 = 0$$

que resuelta para $(R-h)^2$ da $(R-h)^2 = R^2 \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right)$

Puesto que $(R-h) \leq R$, debemos descartar el signo +.

Luego

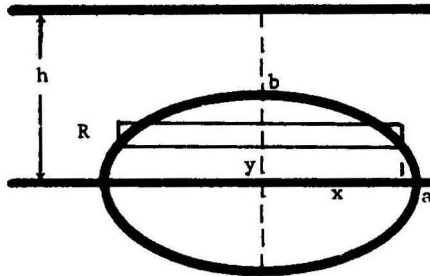
$$h = R \pm R \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

y por tanto

$$h = R \left(1 - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \right)$$

PROBLEMA 17 Una superficie tiene la forma de una elipse de semiejes a y b . Se sumerge verticalmente en un líquido con su eje mayor paralelo a la superficie del líquido hasta que el centro de la elipse se encuentra a una profundidad h . ¿Cuál es la presión del líquido sobre la superficie?

SOLUCION



La presión del líquido sobre un rectángulo elemental R , en la elipse, de lados x , dy , es igual a

$$dF = \rho(h-y)2x \, dy .$$

Luego,

$$\begin{aligned} F &= \int_{-b}^b dF = 2\rho \int_{-b}^b (h-y)x \, dy \\ &= 2\rho ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (h-b \operatorname{sen} t) \cos^2 t \, dt \\ &\quad \text{(haciendo } x = a \operatorname{cost} t, \, y = b \operatorname{sen} t \text{)} \\ &= \rho \pi a b h . \end{aligned}$$