DEPARTAMENTO
DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

REPORTE DE INVESTIGACIÓN

Nro. 28
Serie A

Sistema de Bona-Smith Generalizado

Jenniel Ruiz Herrera

Lima, noviembre de 2012

Nro. 28

Serie A

Sistema de Bona-Smith Generalizado

Jenniel Ruiz Herrera

Lima, noviembre de 2012

Jenniel Ruiz
Departamento de Ciencias
Sección Matemática
Pontificia Universidad Católica del Perú
Apartado 1761
Lima-Perú

Índice general

Introducción

Se entiende por onda, a la propagación de una perturbación de alguna propiedad en un medio, por ejemplo, el campo eléctrico o campo magnético, que se propagan a través del espacio transportando energía. El medio perturbado puede ser de naturaleza diversa como aire, agua, un trozo de metal o el vacío.

Tradicionalmente, hablamos de dos tipos de ondas. Las primeras, las ondas lineales, como las ondas de luz o las de sonido, y las ondas no lineales, como una ola en el mar aproximándose hacia la orilla. La amplitud, la longitud de onda y la velocidad, varían según avanza la ola en el caso de las ondas no lineales, mientras que en las ondas lineales éstas son constantes.

La historia del tipo de ecuaciones de interés para este trabajo comienza con el reporte del científico escocés Russell, quien escribió:
"Creo que sería mejor presentar este fenómeno describiendo las circunstancias de mi primer encuentro con éste. Estaba observando el movimiento de un bote el cual era jalado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, pero no así la masa de agua en el canal justo adelante de la proa del bote, la cual, se había puesto en movimiento en un estado de violenta agitación; repentinamente esta masa en agitación empezó a salir hacia adelante con gran velocidad, tomando la forma de una grande elevación solitaria, redonda, suave y bien definida de una masa de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. La seguí montado en un caballo y aún la vi pasar a una razón de ocho o nueve millas

por hora, conservando su forma original de unos treinta pies de largo y entre un pie y un pie y medio de altura. Pasado un tiempo, su altura gradualmente disminuyó, y después de seguirla una distancia de dos millas, la perdí en unos recodos del canal. Así, en el mes de agosto de 1834, fue mi primera oportunidad de encontrarme con ese singular y hermoso fenómeno, el cual he llamado Onda de Translación ...”

Este descubrimiento originó el despertar de un nuevo y enorme interés por las olas de esta clase. Pero no fue hasta 1895, cuando los científicos Korteweg y De Vries presentaron la ecuación en derivadas parciales no lineal

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{I.1}$$

que captura la esencia del fenómeno observado por Russell, donde el segundo término es el de dispersión y el tercero es el no lineal. Rodríguez [24], presenta con bastante detalle, una deducción de la ecuación (I.1), utilizando para ello la teoría del flujo de fluidos incompresibles e irrotacionales y no viscosos.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) describe el comportamiento de olas en aguas poco profundas y puede usarse para demostrar matemáticamente el fenómeno que Russell describió, pues una solución de la ecuación de KdV es

$$u(x,t) = -12\ a^2\ \text{sech}^2[a(x - 4a^2t - x_0)],$$

donde a y x_0 son constantes arbitrarias.

El fenómeno observado por Russell fue considerado una curiosidad hasta 1960, cuando diferentes experimentos numéricos sobre la propagación de excitaciones en medios no lineales revelaron la existencia de ondas solitarias en una variedad de sistemas.

En 1971, Benjamin, Bona y Mahony [6], presentaron un modelo alternativo para el estudio de la ecuación de KdV, la ecuación de onda regularizada, hoy llamada también ecuación de BBM

$$\left(1 - \partial_x^2\right) \partial_t u + \partial_x u + u\partial_x u = 0, , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{I.2}$$

en donde demostraron la buena formulación local y global del problema de valor inicial asociado con la ecuación de BBM en $\mathcal{C}_{\infty}^{2,\infty}$ con dato inicial en $C^2(\mathbb{R})$, y analizaron diversas propiedades que presentan las ecuaciones de KdV y BBM. Ellos consideran el espacio $\mathcal{C}_{\infty}^{2,\infty}$ como el espacio de las funciones reales tales que ellas y todas sus derivadas con respecto al tiempo viven en C_b^2 para todo valor de tiempo positivo y donde C_b^s es el espacio de las funciones reales que tienen s derivadas continuas y acotadas.

Bona y Smith [11], en 1974 demuestran la buena formulación global en $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}_T^3) \times (\mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{C}_T^2)$ para cada $T > 0$ y con dato inicial en $(H^1 \cap C_b^3) \times (L^2 \cap C_b^2)$, del problema de valor inicial del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1 - \partial_x^2)\, \partial_t u + \partial_x v + \partial_x (vu) = 0, \\ (1 - \partial_x^2)\, \partial_t v + \partial_x u + v \partial_x v - \frac{1}{3} \partial_x^3 u = 0 \end{cases} \tag{I.3}$$

y probaron la invarianza del funcional no lineal

$$E(t) = E(u, v, t) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ (1 + u) v^2 + u^2 + \frac{1}{3} (\partial_x u)^2 \right\}.$$

y donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty &= \big\{ u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : u(\cdot, t) \in H^1 \ \forall t, \\ &\qquad \text{con } t \longmapsto u(\cdot, t) \text{ continua de } \mathbb{R} \text{ en } H^1 \big\}. \\ \mathcal{C}_T^s &= \{ u : \mathbb{R} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : u(\cdot, t) \in C_b^s \text{ para cada } t \in [0, T] \text{ tal que} \\ &\qquad \text{la aplicación } t \longmapsto u(\cdot, t) \text{ es continua de } [0, T] \text{ en } C_b^s \}. \\ \mathcal{L}_\infty &= \big\{ u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : u(\cdot, t) \in L^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \\ &\qquad \text{con la aplicación } t \longmapsto u(\cdot, t) \text{ continua de } \mathbb{R} \text{ en } L^2 \big\}. \end{aligned}$$

El comportamiento asintótico de la solución global del sistema acoplado de ecuaciones del tipo BBM

$$\begin{cases} (1 - \partial_x^2)\, \partial_t u - a_1 \partial_x^2 \partial_t v + a_2 \partial_x u + a_3 v^p \partial_x v + u^p \partial_x u + a_4 \partial_x (u^p v) = 0, \\ (1 - \partial_x^2)\, \partial_t v - a_1 \partial_x^2 \partial_t u + a_2 \partial_x v + a_3 u^p \partial_x u + v^p \partial_x v + a_4 \partial_x (u v^p) = 0, \end{cases} \tag{I.5}$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 son constantes reales con $a_2 > 0$, $0 < a_1 < 1$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y p es un entero tal que $p > 4$, fue estudiado por Bisognin [5], quien prueba que si (u, v) es la solución global del sistema (I.5) con información inicial $(u_0, v_0) \in (H^5 \cap W^{1,1}) \times (H^5 \cap W^{1,1})$ y $p > 4$, entonces, cuando $t \to +\infty$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} &\leq C\,(1+t)^{-1/3} \\ \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty} &\leq C\,(1+t)^{-1/3} \end{aligned}$$

siempre que el tamaño de los datos iniciales sea suficientemente pequeño.

Bona, Chen y Saut [10], mejoran los resultados locales obtenidos por Bona y Smith. El sistema que estudiaron involucra cuatro parámetros:

$$\begin{cases} (1 - b\,\partial_x^2)\,\partial_t u + \partial_x v + \partial_x(vu) + a\,\partial_x^3 v = 0, \\ (1 - d\,\partial_x^2)\,\partial_t v + \partial_x u + v\partial_x v + c\,\partial_x^3 u = 0, \end{cases} \tag{I.6}$$

donde nos interesa el caso en el que $b > 0$, $d > 0$, $c < 0$ y $a = 0$, y para el cual demuestran la buena formulación local del problema de valor inicial asociado a éstas ecuaciones en $C([0, T] : H^{s+1}) \times C([0, T] : H^s)$, con $s \geq 0$ y con datos iniciales $(u_0, v_0) \in H^{s+1} \times H^s$. Notemos que para este caso, cuando $b = d = -c = \frac{1}{3}$ se obtiene el sistema (I.3), derivado por Bona y Smith.

En el trabajo estudiamos el problema de valor inicial de Bona-Smith generalizado

$$\begin{cases} (1 - \partial_x^2)\partial_t u + \partial_x v + u^p \partial_x u - \alpha \partial_x^3 v = 0 \\ (1 - \partial_x^2)\partial_t v + \partial_x u + \partial_x\,(uv^p) = 0 \\ u\,(0) = u_0 \\ v\,(0) = v_0 \end{cases} \tag{I.7}$$

donde $0 < \alpha < 1/2$, $u = u\,(x, t)$ y $v = v\,(x, t)$ son funciones de valor real con $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y $p \geq 1$ es un número entero. Este sistema tiene la misma justificación de un modelo que describe la propagación de ondas largas de pequeña pero finita amplitud en un canal de agua de profundidad constante como otras versiones de las ecuaciones de Boussinesq.

Nuestros objetivos consisten en demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua respecto del dato inicial de la solución local del problema de valor inicial (I.7) en los espacios de Sobolev $H^s \times H^{s+1}$ para $s > 1$, mostrar como tal solución local puede ser extendida a una única solución global en $H^s \times H^{s+1}$ para $s \geq 2$, analizar el comportamiento asintótico de la solución global del problema (I.7) con $p > 4$ cuando $t \to +\infty$ y mejorar los resultados locales de existencia y unicidad del problema de valor inicial (I.7) en $H^s \times H^{s+1}$ cuando $s \geq 0$ y $p = 1$.

Para lograr tales objetivos, el trabajo ha sido dividido en cinco capítulos. En el primero, tomando como referencia los artículos [5] y [10] se estudia el problema lineal del sistema de Bona-Smith generalizado.

En el segundo y tercer capítulo se prueban la buena formulación local y la existencia y unicidad de la solución global, respectivamente, del problema de valor inicial (I.7). Para la teoría local seguimos las ideas de Benjamin, Bona y Mahony y usamos el teorema del punto fijo para mostrar que la ecuación integral asociada a (I.7) tiene solución si el dato inicial $U_0 \in Y^s$, con $s > 1$. Iniciamos la teoría global demostrando que la solución local se puede extender a una solución global siempre que $U_0 \in Y^s$, con $s \geq 2$ y para esto mostramos que $\|U(\cdot)\|_{Y^s}$ es acotada. Para el desarrollo de estos dos capítulos nos guiamos de los artículos [5], [10] y [11] y del libro [15].

Una vez probada la existencia y unicidad de la solución global del problema de valor inicial (I.7), analizamos el comportamiento asintótico de tal solución y de la solución del problema lineal asociado a (I.7) y el artículo [5] nos sirve de guía para lograr tal propósito.

En el último capítulo obtenemos mejores resultados locales para el problema (I.7) con $p = 1$, esto es, probamos la existencia y unicidad de la solución mild del problema (I.7) en $H^s \times H^{s+1}$ para $s \geq 0$ con $p = 1$; para ello, usamos algunas desigualdades que "generalizan" de alguna manera la propiedad de que los espacios de Sobolev H^s son un álgebra de Banach para $s > 1/2$. Este capítulo se desarrolla siguiendo la ideas planteadas en el artículo [10]. Algunas definiciones, teoremas y desigualdades necesarias para el desarrollo del trabajo son enunciadas en el apéndice.

Notaciones

- $\mathcal{D}(A)$ dominio del operador lineal A.
- $\mathcal{R}(A)$ rango del operador lineal A.
- $\widehat{u}$ transformada de Fourier de u.
- $\check{u}$ transformada inversa de Fourier de u.
- $C([0,T]:X)$ espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X.
- $C^1([0,T]:X)$ espacio de funciones continuamente diferenciables de $[0,T]$ en X.
- $C^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones reales continuas diferenciables de orden k sobre $\mathbb{R}^n$.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{k\geq 0} C^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones reales infinitamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$.
- $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones de clase C^k tales que ellas y sus derivadas hasta el orden k tienden a cero en el infinito, con norma definida por

$$\|u\|_{C^k_\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ espacio de Schwartz sobre $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ espacio de las distribuciones temperadas sobre $\mathbb{R}^n$.

- $L^p(\mathbb{R}^n)$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ de orden p, $1 \leq p \leq \infty$.

- $\|\cdot\|_{L^p}$ norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \int_K |f| < \infty \ \forall \text{ compacto } K \text{ en } \mathbb{R}^n \right\}$.

- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas en $\mathbb{R}^n$.

- $\|\cdot\|_{L^\infty}$ norma en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

- $Y \hookrightarrow X$, Y está continua y densamente incluido en X.

- J^s potencial de Bessel de orden s, $\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \ \widehat{u}(\xi)$.

- $H^s(\mathbb{R}^n) = J^{-s}L^2(\mathbb{R}^n)$ espacio de Sobolev de orden s con base en L^2.

- $\|\cdot\|_s = \|J^s(\cdot)\|_{L^2}$ norma en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ producto interno en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

- $Y^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^{s+1}(\mathbb{R})$ espacio producto de $H^s(\mathbb{R})$ por $H^{s+1}(\mathbb{R})$.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y^s} = \langle \cdot, \cdot \rangle_s + \langle \cdot, \cdot \rangle_{s+1}$ producto interno en Y^s.

- $\|\cdot\|_{Y^s} = \left(\|\cdot\|_s^2 + \|\cdot\|_{s+1}^2\right)^{1/2}$ norma en Y^s.

- $[A, B] = AB - BA$ conmutador de los operadores A y B. Así, $[J^s, f]g = J^s(fg) - fJ^sg$, en donde f es considerado como un operador de multiplicación.

Observación. Cuando $n = 1$ escribiremos C^k, C^k_∞, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, L^p, H^s, etc, en vez de $C^k(\mathbb{R})$, $C^k_\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$, $H^s(\mathbb{R})$, etc.

Capítulo 1

El problema lineal

Consideremos el problema lineal asociado a (I.7),

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x v - \alpha\partial_x^3 v = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v + \partial_x u = 0 \\ u\,(0) = u_0 \\ v\,(0) = v_0\ , \end{cases}$$

el cual escribiremos en la forma

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) = 0 \\ U(0) = (u_0, v_0) = \Phi \end{cases} \tag{1.1}$$

donde L es el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = Y^s, \quad s \in \mathbb{R} \\ LU = (u - \partial_x^2 u, v - \partial_x^2 v)\,, \quad U = (u,v) \in Y^s. \end{cases} \tag{1.2}$$

Despejando $\partial_t U(t)$ formalmente en la ecuación dada en (1.1), se tiene

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) \\ U(0) = \Phi \end{cases}$$

cuya solución formal es

$$U(t) = e^{-tL^{-1}M}\Phi.$$

Para justificar la última igualdad, debemos analizar el operador $L^{-1}M$.

Teorema 1.1. *Si $s \in \mathbb{R}$, entonces $L : Y^s \longrightarrow Y^{s-2}$ es un operador lineal biyectivo y para todo $V \in Y^{s-2}$*

$$L^{-1}V(x) = \left(J^{-2}u, J^{-2}v\right)(x) \tag{1.3}$$

donde

$$J^{-2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(K * \varphi)(x) \text{ para cualquier } \varphi \in H^{s-2}$$

y

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\,\xi\,x}}{1+\xi^2}\, d\xi.$$

Además, $K \in L^1 \cap L^\infty$.

Demostración. La linealidad del operador L es inmediata. Probemos que $LU \in Y^{s-2}$. En efecto, sea $U = (u, v) \in Y^s$ con $s \in \mathbb{R}$. Como $Y^s \hookrightarrow Y^{s-2}$ y el operador $\partial_x : Y^{s-1} \longrightarrow Y^{s-2}$ es acotado, tenemos

$$\|LU\|^2_{Y^{s-2}} = \left\|J^2 u\right\|^2_{s-2} + \left\|J^2 v\right\|^2_{s-1} = \|u\|^2_s + \|v\|^2_{s+1} = \|U\|^2_{Y^s} < \infty,$$

entonces $\mathcal{R}(L) \subseteq Y^{s-2}$ y el operador L es inyectivo por tratarse de un operador isométrico.

Probemos que dado $V = (u, v) \in Y^{s-2}$ existe $U = (u_1, v_1) \in Y^s$ tal que $LU = V$. En efecto, de $(J^2u_1, J^2v_1) = (u, v)$, se tiene que $J^2u_1 = u$ y $J^2v_1 = v$. Como J^s es un operador biyectivo, $U = (u_1, v_1) = (J^{-2}u, J^{-2}v)$.

Luego, aplicando la transformada de Fourier respecto de la variable espacial, se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{L^{-1}V}(\xi) &= \left(\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{u}(\xi), \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{v}(\xi)\right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^{\vee\wedge}\widehat{u}(\xi), \left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^{\vee\wedge}\widehat{v}(\xi)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\widehat{K * u}, \widehat{K * v}\right)(\xi). \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Veamos que $U \in Y^s$. Por la definición de norma en Y^s tenemos

$$\|U\|^2_{Y^s} = \left\|J^{-2}u\right\|^2_s + \left\|J^{-2}v\right\|^2_{s+1} = \|u\|^2_{s-2} + \|v\|^2_{s-1} = \|(u,v)\|^2_{Y^{s-2}} < \infty.$$

Usando la definición de K, es claro que

$$|K(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Ahora,

$$\int_{\mathbb{R}} |K(x)|\; dx = \int_{|x|\leq 1} |K(x)|\; dx + \int_{|x|>1} |K(x)|\; dx$$

donde la primera integral del segundo miembro existe.

De la definición de K se tiene que para $x=0$, $K(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Luego, para un $x \neq 0$, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} K(x) &= \lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\,\xi\,x}}{ix\,(1+\xi^2)} - \frac{2\xi\, e^{i\,\xi\,x}}{x^2\,(1+\xi^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x} \left(\frac{2-6\xi^2}{(1+\xi^2)^3} \right) d\xi\ , \end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} u(\xi)v(\xi)$ se define como

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} u(\xi)v(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} [u(\xi)v(\xi) - u(-\xi)v(-\xi)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |K(x)| &\leq \lim_{|\xi|\to+\infty} \left[\frac{C}{|x|\,(1+\xi^2)} + \frac{2C\,|\xi|}{x^2\,(1+\xi^2)^2} \right] + \frac{C}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{2-6\xi^2}{(1+\xi^2)^3} \right| d\xi \\ &= \frac{C}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{2-6\xi^2}{(1+\xi^2)^3} \right| d\xi \\ &\leq \frac{C}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)^2}\, d\xi < \frac{C}{x^2} < +\infty. \end{aligned}$$

De donde,

$$\int_{|x|>1} |K(x)|\; dx \leq C \int_{|x|>1} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

Por consiguiente, $K \in L^1 \cap L^\infty$.

En conclusión, existe $L^{-1} : Y^{s-2} \longrightarrow Y^s$ tal que

$$L^{-1}V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(K * u, K * v\right)(x)$$

con $V=(u,v) \in Y^{s-2}$ y $\widehat{K}(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$. □

Teorema 1.2. *Si $s \in \mathbb{R}$, el operador lineal $L^{-1}\partial_x : Y^s \longrightarrow Y^{s+1}$ es acotado, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|L^{-1}\partial_x U\|_{Y^{s+1}} \leq C\,\|U\|_{Y^s}$ para todo $U \in Y^s$.*

Demostración. Si $U = (u, v) \in Y^s$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|L^{-1}\partial_x U\right\|^2_{Y^{s+1}} &= \left\|\left(J^{-2}\partial_x u, J^{-2}\partial_x v\right)\right\|^2_{Y^{s+1}} \\
&= \left\|J^{-2}\partial_x u\right\|^2_{s+1} + \left\|J^{-2}\partial_x v\right\|^2_{s+2} \\
&\leq \|u\|^2_s + \|v\|^2_{s+1} \;=\; \|U\|^2_{Y^s}\,.
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Consideremos ahora el operador M definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(M) = Y^s, \;\; s \in \mathbb{R} \\ MU = \left(\partial_x v - \alpha\partial_x^3 v, \partial_x u\right), \;\; U = (u, v) \in Y^s. \end{cases} \tag{1.5}$$

Notemos que el rango del operador lineal M esta contenido en Y^{s-2}.

Teorema 1.3. *El operador $-L^{-1}M : Y^s \longrightarrow Y^s$ con $s \in \mathbb{R}$, genera un grupo fuertemente continuo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Y^s tal que para todo $t \geq 0$ y para todo $U = (u, v) \in Y^s$,*

$$\widehat{W(t)U}(\xi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S^+(t) + S^-(t) & -\beta(\xi)\left[S^+(t) - S^-(t)\right] \\ \frac{-1}{\beta(\xi)}\left[S^+(t) - S^-(t)\right] & S^+(t) + S^-(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u}(\xi) \\ \widehat{v}(\xi) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

en donde $\beta(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$ y $S^{\pm}(t)$ se definen como

$$S^{\pm}(t)v(\xi) = e^{i\,t\,\lambda^{\pm}(\xi)}\,v(\xi) \;\; con \;\; \lambda^{\pm}(\xi) = \frac{\pm\xi}{1+\xi^2}\beta(\xi).$$

Además, cualquiera sea $U(0) = \Phi \in Y^s$ la función $W(\cdot)\Phi : [0, \infty[\longrightarrow Y^s$ es la única solución del problema de valor inicial (1.1), esto es, $U(x, t) = W(t)\Phi(x)$ y

$$\|W(t)\|_{L(Y^s)} \leq M_\alpha$$

con $M_\alpha = 2\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}}\,,\;\; 0 < \alpha < 1/2.$

Demostración. Sea $U = (u, v) \in Y^s$, entonces por la definición del operador M y el teorema (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \left\| L^{-1} M U \right\|_{Y^s}^2 &= \left\| L^{-1} \partial_x \left(v - \alpha \partial_x^2 v, u \right) \right\|_{Y^s}^2 \\ &\leq \left\| \left(v - \alpha \partial_x^2 v, u \right) \right\|_{Y^{s-1}}^2 \end{aligned}$$

De la definición de norma en Y^{s-1} y sus propiedades obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| L^{-1} M U \right\|_{Y^s}^2 &\leq \left\| v - \alpha \partial_x^2 v \right\|_{s-1}^2 + \|u\|_s^2 \\ &\leq \|v\|_{s-1}^2 + \alpha^2 \|v\|_{s+1}^2 + 2\alpha \|\partial_x v\|_{s-1}^2 + \|u\|_s^2 \\ &\leq \|v\|_{s+1}^2 + \alpha^2 \|v\|_{s+1}^2 + 2\alpha \|v\|_{s+1}^2 + \|u\|_s^2 \\ &\leq (1+\alpha)^2 \left(\|u\|_s^2 + \|v\|_{s+1}^2 \right) \; = \; C_\alpha \|U\|_{Y^s}^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador $L^{-1}M$ es acotado, entonces es el generador de un grupo fuertemente continuo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ sobre Y^s.

Definido $L^{-1}M$, nuestro problema lineal (1.1) queda como

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = -L^{-1} M U(t) = -L^{-1} \left(\partial_x v - \alpha \partial_x^3 v, \partial_x u \right) \\ U(0) = \Phi \, . \end{cases} \tag{PL}$$

Para resolver este problema de valor inicial usaremos la definición del operador (1.3) y tomaremos la transformada de Fourier en la variable espacial, obteniendo así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en t,

$$\begin{cases} \partial_t \left(\widehat{u}(\xi, t), \widehat{v}(\xi, t) \right) = -\dfrac{1}{1+\xi^2} \left(\partial_x \widehat{v - \alpha \partial_x^3} v, \widehat{\partial_x u} \right) (\xi, t) \\ \widehat{U}(\xi, 0) = \widehat{\Phi}(\xi). \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{U}(\xi, t) = i \, A(\xi) \widehat{U}(\xi, t) \\ \widehat{U}(\xi, 0) = \widehat{\Phi}(\xi) \end{cases} \tag{1.7}$$

donde

$$A(\xi) = \frac{-\xi}{1+\xi^2} \begin{pmatrix} 0 & \beta^2(\xi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \widehat{U}(\xi, t) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{v}(\xi, t) \end{pmatrix} \; \text{y}$$

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix}$$

Los valores propios de $iA(\xi)$ son $i\lambda^{\pm}(\xi)$ con

$$\lambda^{\pm}(\xi) = \frac{\pm\xi}{1+\xi^2}\beta(\xi)$$

y los vectores propios asociados son

$$v^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} \beta(\xi) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^{-}(\xi) = \begin{pmatrix} \beta(\xi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Luego, la solución del sistema (1.7) es

$$\widehat{U}(\xi,t) = e^{i\,t\,A(\xi)}\,\widehat{\Phi}(\xi) = P\,e^{J\,t}\,P^{-1}\,\widehat{\Phi}(\xi)$$

donde P es la matriz de los vectores propios y $e^{J\,t}$ es la matriz diagonal que tiene por elementos las funciones $e^{i\,t\,\lambda^{\pm}}$ con $i\,\lambda^{\pm}$ los autovalores de iA. De este modo $\widehat{U}(\xi,t)$ es igual a

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it\lambda^{+}(\xi)} + e^{it\lambda^{-}(\xi)} & -\beta(\xi)\left(e^{it\lambda^{+}(\xi)} - e^{it\lambda^{-}(\xi)}\right) \\ \frac{-1}{\beta(\xi)}\left(e^{it\lambda^{+}(\xi)} - e^{it\lambda^{-}(\xi)}\right) & e^{it\lambda^{+}(\xi)} + e^{it\lambda^{-}(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Definiendo $S^{\pm}(t)v(\xi) = e^{i\,t\,\lambda^{\pm}(\xi)}\,v(\xi)$, obtenemos el grupo fuertemente continuo dado por (1.6). Ahora, analicemos de que tipo es el grupo

$$\begin{aligned} \|W(t)\Phi\|_{Y^s}^2 &= \|U(t)\|_{Y^s}^2 = \|u(t)\|_s^2 + \|v(t)\|_{s+1}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left(2\,|\widehat{u_0}(\xi)| + 2\beta(\xi)\,|\widehat{v_0}(\xi)|\,\right)^2 d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+1} \left(\frac{2}{\beta(\xi)}\,|\widehat{u_0}(\xi)| + 2\,|\widehat{v_0}(\xi)|\right)^2 d\xi \end{aligned}$$

Como $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|W(t)\Phi\|_{Y^s}^2 &\leq 2\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left(2\,|\widehat{u_0}(\xi)|^2 + 2\beta^2(\xi)\,|\widehat{v_0}(\xi)|^2\right) d\xi \\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+1} \left(\frac{2}{\beta^2(\xi)}\,|\widehat{u_0}(\xi)|^2 + 2\,|\widehat{v_0}(\xi)|^2\right) d\xi \\ &\leq 4\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{u_0}(\xi)|^2 \left(1 + \frac{1+\xi^2}{1+\alpha\xi^2}\right) d\xi \\ &\quad + 4\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+1} |\widehat{v_0}(\xi)|^2 \left(\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2} + 1\right) d\xi. \end{aligned}$$

Como el valor de α es un número real positivo fijo,

$$1 + \frac{1+\xi^2}{1+\alpha\xi^2} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}$$

y

$$1 + \frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2} \leq 2.$$

Luego,

$$\|W(t)\Phi\|_{Y^s} \leq M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}$$

con $M_\alpha = 2\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}$. $\square$

Capítulo 2

El problema local

En este capítulo demostraremos la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución local en Y^s para $s > 1$ del problema de valor inicial (2.1)

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x v + u^p \partial_x u - \alpha \partial_x^3 v = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v + \partial_x u + \partial_x \left(uv^p\right) = 0 \\ u\left(0\right) = u_0 \\ v\left(0\right) = v_0 \end{cases}$$

el cual escribimos

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U(0) = (u_0, v_0) = \Phi, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde L y M son los operadores definidos en (1.2) y (1.5) respectivamente, y

$$F(U(t)) = \left(\frac{u^{p+1}(t)}{p+1}, u(t)v^p(t)\right).$$

Seguiremos las ideas de Benjamin, Bona y Mahony y usaremos el teorema del punto fijo para mostrar que la ecuación integral asociada a (2.1) tiene solución si el dato inicial $U_0 \in Y^s$, con $s > 1$

Diremos que un problema de valor inicial esta localmente bien formulado en el siguiente sentido [15]

Definición 2.1. *Sean X, Y espacios de Banach con $Y \hookrightarrow X$, $T_0 \in \left]0, +\infty\right[$ y $F : [0, T_0] \times Y \longrightarrow X$ una función. Diremos que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X, \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{2.2}$$

es localmente bien formulado en Y si

a) Existe $\overline{T} \in \,]0, T_0]$ y una función $U \in C\left([0, \overline{T}] : Y\right)$ tal que $u(0) = \phi$ y la ecuación diferencial satisface

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0,$$

donde las derivadas en $t = 0$ y $t = \overline{T}$ se calculan a la derecha y izquierda respectivamente.

b) El problema (2.2) tiene solución única en $C\left([0, \overline{T}] : Y\right)$,

c) La aplicación $\phi \longmapsto u$ es continua. Más precisamente, sean $\phi_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ y $\phi_\infty \in Y$, tales que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi_\infty$ y $u_n \in C\left([0, \overline{T}_n] : Y\right)$ las correspondientes soluciones del problema (2.2). Sea $\overline{T} \in \,]0, \overline{T}_\infty[$. Entonces la soluciones u_n pueden ser extendidas al intervalo $[0, \overline{T}]$ para todo n suficientemente grande y

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0, \overline{T}]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Notemos que en nuestra definición de buena formulación local:

1. $Y \hookrightarrow X$, esto es, Y está continua y densamente incluido en X, de donde se tiene que existe una constante C tal que

$$\|v\|_X \leq C \;\|v\|_Y \quad \text{para todo } v \in Y.$$

2. La solución del problema (2.2) debe permanecer en Y para todo valor de $t \in [0, T]$.

2.1. La ecuación integral asociada

Notemos que si U es solución de (2.1), definiendo

$$G(\tau) = W(t - \tau) U(\tau)$$

donde $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es el grupo fuertemente continuo generado por $-L^{-1}M$. Derivando respecto de τ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{d\tau}(\tau) &= -\partial_\tau W(t-\tau)U(\tau) + W(t-\tau)\partial_\tau U(\tau) \\
&= W(t-\tau)L^{-1}MU(\tau) \\
&\quad + W(t-\tau)\left[-L^{-1}MU(\tau) - L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right] \\
&= -W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau)),
\end{aligned}$$

integrando desde 0 hasta t, tenemos

$$G(t) - G(0) = -\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\ .$$

Como $G(0) = W(t)\Phi$ y $G(t) = U(t)$, entonces U es solución de la ecuación integral

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau. \tag{EI}$$

Por lo tanto, toda solución del problema (2.1) es solución de la ecuación (EI). Nos interesa saber si toda solución de (EI) es solución de (2.1); para responder esta pregunta aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 2.2. *Sea $\Phi \in Y^s$ con $s > 1$, entonces existen $\overline{T} = \overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) > 0$ y $U \in C\left(\left[0,\overline{T}\right] : Y^s\right)$ única solución real de la ecuación integral (EI).*

Demostración. Sea $\Phi \in Y^s$ dado, con $s > 1$, $\Phi \neq 0$ y $T \geq 0$. Definimos el espacio métrico

$$\mathcal{E}(T) = \left\{ V \in C\left([0,T] : Y^s\right) : \sup_{t\in[0,T]} \|V(t) - W(t)\Phi\|_{Y^s} \leq \|\Phi\|_{Y^s} \right\}$$

con la métrica

$$d(U,V) = \sup_{t\in[0,T]} \|U(t) - V(t)\|_{Y^s}\ .$$

Se prueba que $(\mathcal{E}(T), d)$ es un espacio métrico completo. Para $U \in \mathcal{E}(T)$, definimos la aplicación Θ por

$$(\Theta U)(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Definido el espacio $(\mathcal{E}(T), d)$ y la aplicación Θ, tenemos las siguientes propiedades de la aplicación Θ definida sobre $\mathcal{E}(T)$.

1. *Cualesquiera sea $T > 0$, la aplicación ΘU tiene rango $\mathcal{R}(\Theta U)$ contenido en Y^s.*

   En efecto, si $\Phi \in Y^s$ entonces $W(t)\Phi \in Y^s$ pues Y^s es el dominio del operador $-L^{-1}M$. Por otro lado, como $(u(t), v(t)) \in Y^s$ y H^s es un álgebra de Banach para $s > 1$, tenemos que $F(U(\tau)) \in Y^{s-1}$ y $L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \in Y^s$; por lo tanto, $W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \in Y^s$. De ahí que $\displaystyle\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \in Y^s$ y por lo tanto $\Theta U(t) \in Y^s$ cualquiera sea $t \in [0, T]$.

2. *Cualesquiera sea $T > 0$, $\Theta U \in C\left([0,T] : Y^s\right)$ para todo $U \in \mathcal{E}(T)$.* En efecto, para $t_0 \in]0, T]$, supongamos que $t < t_0$

$$\begin{aligned}\|\Theta U(t) - \Theta U(t_0)\|_{Y^s} \;\leq\; & \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{Y^s} \\ & + \int_0^t \left\| \Big[W(t-\tau) - W(t_0-\tau)\Big] L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{Y^s} d\tau \\ & + |t - t_0| \sup_{t\leq\tau\leq t_0} \left\|W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{Y^s}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por la continuidad de la aplicación $W(\cdot)\Phi : [0, \infty[\longrightarrow Y^s$, el primer sumando del segundo miembro de (2.4) converge a cero cuando $t \to t_0^-$.

Para el segundo sumando de (2.4) hagamos

$$h = -t + t_0 \;\text{ y }\; f_h(\tau) = \Big[W(-h + t_0 - \tau) - W(t_0 - \tau)\Big] L^{-1}\partial_x F(U(\tau)).$$

Si $t \to t_0^-$ entonces $h \to 0^+$ y por la continuidad fuerte del grupo $f_h \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ con f_h medibles. Además,

$$\|f_h(\tau)\|_{Y^s} \leq 2M_\alpha \left\|L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{Y^s} = g(\tau),$$

donde $M_\alpha > 1$ y $g(\tau)$ es integrable, pues $s > 1/2$ y $H^s \hookrightarrow C_\infty^0$. Luego, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ([14], pag. 54) el segundo sumando de (2.4) converge a cero cuando $t \to t_0^-$.

El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto nos demuestra la continuidad de ΘU a la izquierda de t_0.

La continuidad de ΘU a la derecha de t_0 se prueba de forma similar.

3. *Existe $T_0 \in]0,T]$ con $T_0 = T_0\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) > 0$ tal que la aplicación Θ definida sobre $\mathcal{E}(T_0)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Theta)$ contenido en $\mathcal{E}(T_0)$.*

Sea $U \in \mathcal{E}(T)$, entonces para $0 \leq t \leq T$ y por el teorema 1.2

$$\begin{aligned} \|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{Y^s} &\leq \int_0^t \left\|W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{Y^s} \, d\tau \\ &\leq M_\alpha \int_0^t \|F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}} \, d\tau. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como H^s es un álgebra de Banach para $s > \frac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|FU(\tau)\|_{Y^{s-1}} &\leq \frac{1}{p+1}\left\|u^{p+1}(\tau)\right\|_s + \|u(\tau)v^p(\tau)\|_s \\ &\leq \frac{C_{s,p}}{p+1}\left[\|u(\tau)\|_s^{p+1} + (p+1)\|u(\tau)\|_s \|v(\tau)\|_s^p\right], \end{aligned}$$

y por la definición del espacio $\mathcal{E}(T)$

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_s \leq \|U(\tau)\|_{Y^s} &\leq \|U(\tau) - W(\tau)\Phi\|_{Y^s} + \|W(\tau)\Phi\|_{Y^s} \\ &\leq 2M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}, \ \forall \tau \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Del mismo modo

$$\|v(\tau)\|_s \leq 2M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}, \ \forall \tau \in [0,T], \tag{2.7}$$

entonces

$$\|FU(\tau)\|_{Y^{s-1}} \leq C_{s,p}\left(\frac{p+2}{p+1}\right)\left(2M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}\right)^{p+1}.$$

Luego, en (2.5) resulta que para todo $t \in [0,T]$

$$\|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{Y^s} \leq C_{s,p}\left(\frac{p+2}{p+1}\right) 2^{p+1} M_\alpha^{p+2} \|\Phi\|_{Y^s}^p \ T \|\Phi\|_{Y^s}$$

Como

$$C_{s,p}\left(\frac{p+2}{p+1}\right) 2^{p+1} M_\alpha^{p+2} \|\Phi\|_{Y^s}^p T \to 0 \text{ cuando } T \to 0^+.$$

Por la definición de límite, se sigue la existencia de algún $T_0 = T_0\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right)$ tal que

$$0 < T_0 \leq T < \delta_1 = \delta_1\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) \tag{2.8}$$

donde la función $\delta_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\delta_1(x) = \frac{p+1}{C_{s,p}\ (p+2)\ M_\alpha^{p+2}\ 2^{p+1}\ x^p}\ .$$

De ahí que,

$$\sup_{0\leq t\leq T_0} \|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{Y^s} \leq \|\Phi\|_{Y^s}$$

De donde $\mathcal{R}(\Theta) \subseteq \mathcal{E}(T_0)$.

4. *Existe* $\overline{T} \in [0, T_0]$ *con* $\overline{T} = \overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) > 0$ *tal que la aplicación* $\Theta : \mathcal{E}\left(\overline{T}\right) \longrightarrow \mathcal{E}\left(\overline{T}\right)$ *es una contracción.*

Para $U = (u_1, v_1)$ y $V = (u_2, v_2) \in \mathcal{E}(T_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|(\Theta U)(t) - (\Theta V)(t)\|_{Y^s} \\
&\qquad\leq\ M_\alpha \int_0^t \left\|L^{-1}\partial_x\big[F(V(\tau)) - F(U(\tau))\big]\right\|_{Y^s} d\tau \\
&\qquad\leq\ M_\alpha \int_0^t \|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&\|F(V(\tau))-F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}} \\
&\qquad\leq \tfrac{1}{p+1}\left\|u_1^{p+1}(\tau)-u_2^{p+1}(\tau)\right\|_{s-1} + \|u_1(\tau)v_1^p(\tau)-u_2(\tau)v_2^p(\tau)\|_s
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Considerando las estimaciones dadas por (2.6) y (2.7), se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|u_1^{p+1}(\tau) - u_2^{p+1}(\tau)\right\|_{s-1} &\leq \left\|u_1^{p+1}(\tau) - u_2^{p+1}(\tau)\right\|_s \\
&\leq\ C_{s,p}\, \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_s \sum_{j=0}^{p} \|u_1(\tau)\|_s^{p-j}\, \|u_2(\tau)\|_s^j \\
&\leq\ C_{s,p}\, \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_s \sum_{j=0}^{p} \left(2M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}\right)^p \\
&\leq\ C_{s,p}(p+1)\left(2M_\alpha \|\Phi\|_{Y^s}\right)^p \|U(\tau) - V(\tau)\|_{Y^s}\ .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

y calculando el segundo sumando de (2.9),

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_1(\tau)v_1^p(\tau)-u_2(\tau)v_2^p(\tau)\right\|_s\\
&\quad = \left\|u_1(\tau)v_1^p(\tau)-u_2(\tau)v_2^p(\tau)+v_2^p(\tau)u_1(\tau)-v_2^p(\tau)u_1(\tau)\right\|_s\\
&\quad \le C_{s,p}\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left\|v_1(\tau)\right\|_s^{p-1-j}\left\|v_2(\tau)\right\|_s^{j}\left\|u_1(\tau)\right\|_s\\
&\qquad + C_{s,p}\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_s\left\|v_2(\tau)\right\|_s^{p}\\
&\quad \le C_{s,p}\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left(2M_\alpha\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p\\
&\qquad + C_{s,p}\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_s\left(2M_\alpha\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p\\
&\quad \le C_{s,p}\, p\left(2M_\alpha\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p\left\|U(\tau)-V(\tau)\right\|_{Y^s}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.10) y (2.11) en (2.9), obtenemos que para todo $\tau\in[0,T_0]$

$$\left\|F(V(\tau))-F(U(\tau))\right\|_{Y^{s-1}}\le C_{s,p}\,(p+1)\left(2M_\alpha\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p d(U,V) \qquad (2.12)$$

de donde, para todo $\tau\in[0,T_0]$

$$\left\|\Theta U(t)-\Theta V(t)\right\|_{Y^s}\le C_{s,p}\,M_\alpha^{p+1}(p+1)\left(2\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p t\,d(U,V).$$

Por consiguiente,

$$d(\Theta U,\Theta V)\le C_{s,p}\,M_\alpha^{p+1}(p+1)\left(2\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p\,T_0\,d(U,V).$$

Como

$$C_{s,p}(p+1)M_\alpha^{p+1}\left(2\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)^p\,T_0\to 0 \text{ cuando } T_0\to 0^+$$

de la definición de límite, se sigue que existe $\overline{T}=\overline{T}\left(\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right)$ tal que

$$0<\overline{T}\le T_0<\delta_2=\delta_2\left(\left\|\Phi\right\|_{Y^s}\right) \qquad (2.13)$$

donde la función $\delta_2:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ se define como

$$\delta_2(x)=\frac{1}{C_{s,p}\,(p+1)\,M_\alpha^{p+1}\,2^p\,x^p}\,.$$

De (2.8) y (2.13) notamos que los valores $\delta_1\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right)$ y $\delta_2\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right)$ son cotas para T_0 con $\overline{T} \leq T_0$. Por tanto, para probar la existencia de algún $\overline{T} > 0$ tal que Θ sea una contracción en $\mathcal{E}\left(\overline{T}\right)$ basta tomar

$$0 < \overline{T} < \widetilde{T} = \widetilde{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right),$$

donde la función $\widetilde{T} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\widetilde{T}(x) = \text{mín}\left\{\delta_1(x), \delta_2(x)\right\} \tag{2.14}$$

5. *Existencia de la solución de la ecuación integral (EI) en* $C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$.

   Por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $U \in \mathcal{E}\left(\overline{T}\right) \subset C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$ tal que $\Theta U = U$, es decir,

   $$W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau = U(t) \quad \forall\, t \in \left[0, \overline{T}\right].$$

   Es claro que la unicidad vale solamente en $\mathcal{E}\left(\overline{T}\right)$ y no en $C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$.

6. *Unicidad de la solución de la ecuación integral (EI) en* $C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$.

   Sean $U = (u_1, v_1)$ y $V = (u_2, v_2)$ soluciones de la ecuación integral (EI) en $C\left(\left[0,\overline{T}_U\right] : Y^s\right)$ y $C\left(\left[0,\overline{T}_V\right] : Y^s\right)$ respectivamente. Con $\overline{T} = \text{mín}\left\{\overline{T}_U, \overline{T}_V\right\}$ se tiene que U, $V \in C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$ y

   $$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \ ,$$

   $$V(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau \ ,$$

   para todo $t \in \left[0, \overline{T}\right]$. De la propiedad del operador $L^{-1}\partial_x$ dada por el teorema 1.2 y como el grupo $W(t)$ es de tipo $(M_\alpha, 0)$, tenemos

   $$\|U(t) - V(t)\|_{Y^s} \leq M_\alpha \int_0^t \|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}}\ d\tau. \tag{2.15}$$

   Ahora, como H^s es un álgebra de Banach,

$$
\begin{aligned}
&\|F(V(\tau))-F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}}\\
&\qquad \le \tfrac{1}{p+1}\left\|u_1^{p+1}(\tau)-u_2^{p+1}(\tau)\right\|_s\\
&\qquad\quad + \|u_1(\tau)v_1^p(\tau)-u_2(\tau)v_2^p(\tau)+v_2^p(\tau)u_1(\tau)-v_2^p(\tau)u_1(\tau)\|_s\\
&\qquad \le \tfrac{C_{s,p}}{p+1}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_s\sum_{j=0}^{p}\|u_1(\tau)\|_s^{p-j}\|u_2(\tau)\|_s^{j}\\
&\qquad\quad + C_s\|v_1^p(\tau)-v_2^p(\tau)\|_s\|u_1(\tau)\|_s\\
&\qquad\quad + C_s\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_s\|v_2^p(\tau)\|_s\\
&\\
&\qquad \le \tfrac{C_{s,p}}{p+1}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_s\sum_{j=0}^{p}\|u_1(\tau)\|_s^{p-j}\|u_2(\tau)\|_s^{j}\\
&\qquad\quad + C_{s,p}\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\|v_1(\tau)\|_s^{p-1-j}\|v_2(\tau)\|_s^{j}\|u_1(\tau)\|_s\\
&\qquad\quad + C_{s,p}\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\|_s\|v_2(\tau)\|_s^{p}
\end{aligned}
$$

Como $(u_1(\tau),v_1(\tau))$, $(u_2(\tau),v_2(\tau))\in Y^s$ para todo $\tau\in\left[0,\overline{T}\right]$ consideremos

$$
N=\text{máx}\left\{\sup_{[0,\overline{T}]}\|u_i(\tau)\|_s\,,\sup_{[0,\overline{T}]}\|v_i(\tau)\|_s\right\}\quad\text{para } i=1,2,
$$

de donde, para todo $\tau\in\left[0,\overline{T}\right]$ tenemos

$$
\|F(V(\tau))-F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}}\le C_{s,p}(p+2)\;N^p\;\;\|U(\tau)-V(\tau)\|_{Y^s} \tag{2.16}
$$

Luego, sustituyendo la desigualdad anterior en (2.15),

$$
\|U(t)-V(t)\|_{Y^s}\le C_{s,p}\;M_\alpha\;(p+2)\;N^p\int_0^t\|U(\tau)-V(\tau)\|_{Y^s}\;d\tau
$$

y usando la desigualdad de Gronwall se tiene

$$
\|U(t)-V(t)\|_{Y^s}\le 0\;e^{C_{s,p}M_\alpha(p+2)N^p\,t},\quad\forall\,t\in\left[0,\overline{T}\right].
$$

Entonces $U(t)=V(t)$ para todo $t\in\left[0,\overline{T}\right]$.

Por lo tanto el teorema queda demostrado. □

2.2. Existencia y unicidad de la solución local

Probada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación integral (EI), mostraremos que tal solución es también solución del problema de valor inicial (2.1).

Teorema 2.3. *Sea $\Phi \in Y^s$ con $s > 1$. Entonces, existen $\overline{T} = \overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) > 0$ y una función $U \in C^1\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$ solución del problema (2.1).*

Demostración. Dado $\Phi \in Y^s$, consideremos

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau.$$

Hagamos $U_L(t) = W(t)\Phi$ y $U_P(t) = \displaystyle\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau$. Luego, por el teorema 1.3, $U_L(t)$ es solución del problema lineal

$$\begin{cases} L\partial_t U_L(t) + MU_L(t) = 0 \\ U_L(0) = \Phi. \end{cases}$$

y demostraremos que $U_P(t)$ es solución de

$$\begin{cases} L\partial_t U_P(t) + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U_P(0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

En efecto, es claro que $U_P(0) = 0$. Sea $h > 0$, entonces

$$\begin{aligned} &\frac{U_P(t+h) - U_P(t)}{h} \\ &\qquad = \frac{1}{h}\int_0^t \big[W(t+h-\tau) - W(t-\tau)\big]L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \\ &\qquad\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \end{aligned}$$

Usando la definición de grupo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{U_P(t+h) - U_P(t)}{h} &= \frac{W(h) - I}{h}\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau. \end{aligned}$$

Tomando el limite cuando $h \to 0^+$, usando la definición de generador de un grupo y el teorema del valor medio para integrales de Bochner [13] en el intervalo $[t, t+h]$ con $c_h \in [t, t+h]$, resulta

$$\begin{aligned} \partial_t^+ U_P(t) &= -L^{-1}M \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau + L^{-1}\partial_x F(U(t)) \\ &= -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)). \end{aligned}$$

Para $h < 0$, procediendo de manera similar, se obtiene que

$$\partial_t^- U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Entonces, $\partial_t^- U_P(t) = \partial_t^+ U_P(t)$, así que

$$\partial_t U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Por lo tanto, U_P es solución de la ecuación

$$L\partial_t U_P(t) + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) = 0.$$

Ahora, probaremos que $U = U_L - U_P$ es solución de (2.1). En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} L\partial_t U(t) &= L\partial_t U_L(t) - L\partial_t U_P(t) \\ &= -MU_L(t) + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) \\ &= -MU(t) - \partial_x F(U(t)). \end{aligned}$$

Además $U(0) = U_L(0) - U_P(0) = \Phi$.

Veamos que $U \in C\left([0, \overline{T}] : Y^s\right)$ con $\partial_t U \in C\left([0, \overline{T}] : Y^s\right)$. En efecto, por lo mostrado en el item 2 de la prueba del teorema 2.2 y la forma como se define la aplicación $\Theta U = U$, tenemos que $U \in C\left([0, \overline{T}] : Y^s\right)$. Por otro lado, dado que U es solución de la ecuación diferencial en (2.1), tenemos

$$\partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) - L^{-1}\partial_x F(U(t))$$

y hemos mostrado en el item 1 de la prueba del teorema 2.2 que $-L^{-1}MU(t) \in Y^s(\mathbb{R})$ y $-L^{-1}\partial_x F(U(t)) \in Y^s$, lo cual nos indica que $\partial_t U(t) \in Y^s$. Por el Teorema de Inmersión de Sobolev, se cumple $Y^s \hookrightarrow C_\infty$, de ahí que $\partial_t U \in C\left([0, \overline{T}] : Y^s\right)$. $\square$

La unicidad de la solución local del problema (2.1) será una consecuencia inmediata de la unicidad de la solución de la ecuación integral (EI).

Teorema 2.4. *Sea $\Phi \in Y^s$, con $s > 1$. Entonces existen $\overline{T} = \overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) > 0$ y $U \in C^1\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$, solución única de (2.1).*

Demostración. Por el Teorema 2.3 se tiene que la solución única de la ecuación integral (EI) en $C\left([0,\overline{T}_U] : Y^s\right)$ es también solución del problema (2.1) en $C\left([0,\overline{T}_U] : Y^s\right)$. Ahora, sea V otra solución de (2.1) en $C\left([0,\overline{T}_V] : Y^s\right)$ tal que $U(0) = \Phi = V(0)$. Luego,

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \quad \forall\, t \in [0,\overline{T}_U]$$

$$V(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau \quad \forall\, t \in [0,\overline{T}_V]$$

y por el item 6 del teorema 2.2, tenemos que la solución del problema de valor inicial (2.1) es única en $C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$, donde $\overline{T} = \overline{T}_U = \overline{T}_V$. Esto es,

$$U(t) = V(t) \quad \text{para todo } t \in [0,\overline{T}]$$

□

2.3. Dependencia continua de la solución local respecto del dato inicial

En general, las soluciones a problemas que surgen de la física, ingenierías, biología, etc. se obtienen haciendo pruebas en laboratorio o haciendo uso del cálculo numérico, lo cual nos conlleva a una solución aproximada del problema que se esta modelando. Entonces, es natural preguntarse si pequeñas perturbaciones en el dato inicial ocasionan también pequeñas variaciones en la solución del problema de valor inicial.

Teorema 2.5. *Sean* $\Phi, \Psi \in Y^s$ *con* $s > 1$. *Entonces, existen* $T > 0$ *y* $U, V \in C([0,T] : Y^s)$ *soluciones de (2.1) tales que* $U(0) = \Phi$, $V(0) = \Psi$ *y*

$$\|U(t) - V(t)\|_{Y^s} \leq \|\Phi - \Psi\|_{Y^s}\; e^{C\,t} \quad \textit{para todo } t \in [0,T]. \tag{2.17}$$

Demostración. Debido al teorema 2.3, existen $\overline{T}_\Phi > 0$ y $\overline{T}_\Psi > 0$ tales que $U \in C\left([0, \overline{T}_\Phi] : Y^s\right)$ y $V \in C\left([0, \overline{T}_\Psi] : Y^s\right)$ satisfacen

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau$$

y

$$V(t) = W(t)\Psi - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau$$

para todo $t \in [0,T]$, siendo $T = \text{mín}\left\{\overline{T}_\Phi, \overline{T}_\Psi\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\|U(t) - V(t)\|_{Y^s} \\ &\leq M_\alpha \|\Phi - \Psi\|_{Y^s} + M_\alpha \int_0^t \|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}}\, d\tau \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $(u_1(\tau), v_1(\tau))$, $(u_2(\tau), v_2(\tau)) \in Y^s$ para todo $\tau \in \left[0, \overline{T}\right]$ consideremos

$$N = \text{máx}\left\{\sup_{[0,\overline{T}]} \|u_i(\tau)\|_s\,, \sup_{[0,\overline{T}]} \|v_i(\tau)\|_s\right\} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Luego, procediendo como en (2.16) se tiene que para todo $\tau \in \left[0, \overline{T}\right]$

$$\|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{Y^{s-1}} \leq C_{s,p}(p+2)\; N^p\; \|U(\tau) - V(\tau)\|_{Y^s}$$

Luego, sustituyendo la desigualdad anterior en (2.18),

$$\begin{aligned} \|U(t) - V(t)\|_{Y^s} \;\; &\leq \;\; M_\alpha \|\Phi - \Psi\|_{Y^s} \\ &\quad + C_{s,p}\; M_\alpha\; (p+2)\; N^p \int_0^t \|U(\tau) - V(\tau)\|_{Y^s}\; d\tau \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Gronwall se tiene (2.17). □

Teorema 2.6. *La aplicación* $\Phi \in Y^s \longmapsto U \in C\left([0,\widetilde{T}] : Y^s\right)$ *con* $s > 1$ *es continua, esto es, si* $U \in C\left([0,\widetilde{T}] : Y^s\right)$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in C\left([0,\widetilde{T}_n] : Y^s\right)$ *son soluciones de (2.1) con* $U(0) = \Phi$, *y* $U_n(0) = \Phi_n$ *respectivamente, y si* $\Phi_n \stackrel{Y^s}{\longrightarrow} \Phi$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\overline{T} \in]0,\widetilde{T}[$. *Entonces las soluciones* U_n *están definidas en* $\left[0,\overline{T}\right]$ *para todo* n *suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U(t)\|_{Y^s} = 0. \tag{2.19}$$

Demostración. Ya que la función $\widetilde{T}$ dada por (2.17) es una función continua de $\|\Phi\|_{Y^s}$ y $\Phi_n \stackrel{Y^s}{\longrightarrow} \Phi$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para cualquier $n > N$

$$\left|\widetilde{T}\left(\|\Phi_n\|_{Y^s}\right) - \widetilde{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right)\right| < \varepsilon,$$

esto es,

$$\widetilde{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) - \varepsilon < \widetilde{T}\left(\|\Phi_n\|_{Y^s}\right) < \widetilde{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) + \varepsilon.$$

De ahí que,

$$\overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) < \widetilde{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) < \widetilde{T}\left(\|\Phi_n\|_{Y^s}\right) + \varepsilon\,, \quad \forall\, n > N.$$

Luego, $\overline{T}\left(\|\Phi\|_{Y^s}\right) < \widetilde{T}\left(\|\Phi_n\|_{Y^s}\right)$ para cualquier $n > N$. Por lo tanto, U_n esta definida en $[0,\overline{T}]$ para todo $n > N$.

Como U_n y U están definidas en $[0,\overline{T}]$ para n suficientemente grande, es decir, para todo $n > N$, $U_n \in C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)$ podemos aplicar el teorema (2.5) y obtener

$$\|U_n(t) - U(t)\|_{Y^s} \leq \|\Phi_n - \Phi\|_{Y^s}\; e^{C\overline{T}}, \quad \forall\, n > N \quad \forall\, t \in [0,\overline{T}].$$

de donde se sigue que

$$\sup_{[0;\overline{T}]} \|U_n(t) - U(t)\|_{Y^s} \leq \|\Phi_n - \Phi\|_{Y^s}\; e^{C\overline{T}}, \quad \forall\, n > N$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos (2.19). □

Capítulo 3

El problema global

En este capítulo, demostraremos que la solución hallada en el capítulo anterior puede extenderse a una solución global única $U \in C\left([0,+\infty[: Y^s\right)$ con $s \geq 2$ y para ello seguimos las ideas de Bisognin y Perla Menzala [8] con las de Iorio [15].

Diremos que un problema tiene solución global única, en el siguiente sentido.

Definición 3.1. *Sean X, Y espacios de Banach con $Y \hookrightarrow X$ y $F : Y \longrightarrow X$ una función. Diremos que el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(u(t)) \in X, \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{3.1}$$

tiene solución global única $u \in C\left([0,+\infty[: Y\right)$ si $u(0) = \phi$ y

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - F(u(t)) \right\|_X = 0 \;\; \forall t \in [0,+\infty[,$$

donde las derivada en $t = 0$ se calcula por la derecha.

La existencia de la solución local del problema

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x v + u^p \partial_x u - \alpha \partial_x^3 v = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v + \partial_x u + \partial_x \left(u v^p\right) = 0 \\ u\,(0) = u_0 \\ v\,(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

nos garantiza la existencia de un intervalo maximal $[0, T^*_\Phi[$ donde la solución $U(x,t) = (u(x,t), v(x,t))$ existe y es única. La existencia de la solución global del problema de valor inicial (3.2) será el resultado de combinar un estimado *a priori* para $\|U(t)\|_{Y^s}$ con el siguiente principio.

Principio de extensión

Sean $\Phi \in Y^s$ y

$$T^*_\Phi = \sup\left\{T > 0 : \text{ existe } U : [0, T] \longrightarrow Y^s \text{ solución única de (3.2) } \right\}.$$

Entonces,

i. $T^*_\Phi = \infty$ ó

ii. $T^*_\Phi < \infty$ y por lo tanto $\lim_{t \to T^{*-}_\Phi} \|U(t)\|_{Y^s} = +\infty$. En este caso, decimos que la solución de (3.2) explota en tiempo finito.

3.1. Estimado a priori

Probaremos que ii. no puede suceder, es decir, vamos a probar que $T^*_\Phi = \infty$ y para ello necesitamos de la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sean $U_0 = \Phi \in Y^s$ con $s \geq 2$ y $U : [0, T^*_\Phi[\longrightarrow Y^s$ la solución única del problema de valor inicial (3.2) obtenida en el teorema 2.4. Si $p \geq 1$, entonces*

$$\|U(t)\|_{Y^s} \leq C \ \|U_0\|_{Y^s} \, exp\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right) \quad \forall\, t \in [0, T^*_\Phi[\tag{3.3}$$

donde, para $U = (u, v)$ tenemos

$$\begin{aligned} g(\tau) \ &= \ 4 + p\, \|v\|^{p-1}_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|v\|^p_{L^\infty} + \left(1 + \frac{p}{2}\right) \|u\|^{p-1}_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty} \|v\|^{p-1}_{L^\infty} . \end{aligned}$$

Demostración. En efecto, aplicando el operador $J^{-2} = \left(1 - \partial_x^2\right)^{-1}$, el sistema (3.2) puede ser escrito como

$$\begin{cases} \partial_t u + J^{-2}\partial_x v + J^{-2}\left(u^p \partial_x u\right) - \alpha J^{-2} \partial_x^3 v = 0 \\ \partial_t v + J^{-2}\partial_x u + J^{-2}\partial_x\left(u v^p\right) = 0 \, . \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \|U(t)\|_{Y^s}^2 &= \langle U(t), \partial_t U(t)\rangle_{Y^s} = \langle u, \partial_t u\rangle_s + \langle v, \partial_t v\rangle_{s+1} \\
&= -\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\left(u^p\partial_x u\right)\right\rangle_{L^2} \\
&\quad + \alpha\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} + \langle J^s\partial_x v, J^s u\rangle_{L^2} + \langle J^s\partial_x v, J^s\left(uv^p\right)\rangle_{L^2} \\
&= -\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2} - \tfrac{1}{p+1}\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x u^{p+1}\right\rangle_{L^2} \\
&\quad -\alpha\left\langle J^{s-1}\partial_x u, J^{s-1}\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} - \langle J^s\partial_x v, J^s u\rangle_{L^2} \\
&\quad + \langle J^s\partial_x v, J^s\left(uv^p\right)\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

Usando la siguiente igualdad sobre conmutadores

$$J^s(f^p\partial_x f) = \left[J^s, f^p\right]\partial_x f + f^p J^s\partial_x f$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\partial_t \|U(t)\|_{Y^s}^2 &= -\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^{s-1}u, \left[J^{s-1}, u^p\right]\partial_x u\right\rangle_{L^2} \\
&\quad - \left\langle J^{s-1}u, u^p J^{s-1}\partial_x u\right\rangle_{L^2} - \alpha\left\langle J^{s-1}\partial_x u, J^{s-1}\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} \\
&\quad - \langle J^s\partial_x v, J^s u\rangle_{L^2} + \langle J^s\partial_x v, J^s\left(uv^p\right)\rangle_{L^2}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Ahora estimaremos cada término del segundo miembro de (3.4). Usando los resultados sobre conmutadores de la proposición A.10, la desigualdad de Hölder, integración por partes, $\|J^{s-1}\partial_x u\|_{L^2} \leq \|u\|_s$, $\|J^s u^p\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_s$ y $\|\partial_x u^p\|_{L^\infty} \leq p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle J^{s-1}u, J^{s-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2}\right| &\leq \left\|J^{s-1}u\right\|_{L^2}\left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} \\
&= \|u\|_{s-1}\|v\|_s \leq \|u\|_s\|v\|_{s+1}, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle J^{s-1}u,\left[J^{s-1},u^{p}\right]\partial_{x}u\right\rangle_{L^{2}}\right| &\le \left\|J^{s-1}u\right\|_{L^{2}}\left\|\left[J^{s-1},u^{p}\right]\partial_{x}u\right\|_{L^{2}} \\
&\le \|u\|_{s-1}\left(\|\partial_{x}u^{p}\|_{L^{\infty}}\left\|J^{s-2}\partial_{x}u\right\|_{L^{2}}+\left\|J^{s-1}u^{p}\right\|_{L^{2}}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\right) \\
&\le \|u\|_{s-1}\left(p\ \|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\|u\|_{s-1}+\|u^{p}\|_{s-1}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\right) \\
&\le C\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\|u\|_{s-1}^{2}\ , \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle J^{s-1}u,u^{p}J^{s-1}\partial_{x}u\right\rangle_{L^{2}}\right| &= \left|\left\langle u^{p},J^{s-1}u\partial_{x}\left(J^{s-1}u\right)\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left\langle u^{p},\partial_{x}\left(J^{s-1}u\right)^{2}\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&\le \frac{p}{2}\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\left\|J^{s-1}u\right\|_{L^{2}}^{2} \\
&= \frac{p}{2}\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|\partial_{x}u\|_{L^{\infty}}\|u\|_{s-1}^{2}\ , \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\alpha\left\langle J^{s-1}\partial_{x}u,-J^{s-1}\partial_{x}^{2}v\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&\quad\le \left|\alpha\left\langle\partial_{x}u,v-\partial_{x}^{2}v\right\rangle_{s-1}\right|+\left|\alpha\left\langle\partial_{x}u,v\right\rangle_{s-1}\right| \\
&\quad= \left|\alpha\left\langle\partial_{x}u,J^{2}v\right\rangle_{s-1}\right|+\left|\alpha\left\langle u,\partial_{x}v\right\rangle_{s-1}\right| \\
&\quad= \left|\alpha\left\langle u,\partial_{x}v\right\rangle_{s}\right|+\left|\alpha\left\langle u,\partial_{x}v\right\rangle_{s-1}\right| \\
&\quad\le \alpha\|u\|_{s}\|v\|_{s+1}+\alpha\|u\|_{s-1}\|v\|_{s}\ , \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$$
\left|\left\langle J^{s}\partial_{x}v,J^{s}u\right\rangle_{L^{2}}\right| \le \|\partial_{x}v\|_{s}\|u\|_{s} \le \|u\|_{s}\|v\|_{s+1}\ , \qquad (3.9)
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle J^{s}\partial_{x}v,J^{s}\left(uv^{p}\right)\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&\quad= \left|\left\langle J^{s}\partial_{x}v,\left[J^{s},v^{p}\right]u\right\rangle_{L^{2}}\right|+\left|\left\langle J^{s}\partial_{x}v,v^{p}J^{s}u\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&\quad\le \left\|J^{s}\partial_{x}v\right\|_{L^{2}}\left\|\left[J^{s},v^{p}\right]u\right\|_{L^{2}}+\left|\left\langle J^{s}u,v^{p}J^{s}\partial_{x}v\right\rangle_{L^{2}}\right| \\
&\quad\le \|v\|_{s+1}\left(\|\partial_{x}v^{p}\|_{L^{\infty}}\left\|J^{s-1}u\right\|_{L^{2}}+\left\|J^{s}v^{p}\right\|_{L^{2}}\|u\|_{L^{\infty}}\right) \\
&\qquad+\left|\left\langle J^{s}u,v^{p}J^{s}\partial_{x}v\right\rangle_{L^{2}}\right|\ ,
\end{aligned}
$$

pero usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle J^{s}u,v^{p}J^{s}\partial_{x}v\right\rangle_{L^{2}}\right| &= \left|\left\langle v^{p},J^{s}uJ^{s}\partial_{x}v\right\rangle_{L^{2}}\right| \le \|v^{p}\|_{L^{\infty}}\left\|J^{s}uJ^{s}\partial_{x}v\right\|_{L^{1}} \\
&\le \|v^{p}\|_{L^{\infty}}\left\|J^{s}\partial_{x}v\right\|_{L^{2}}\left\|J^{s}u\right\|_{L^{2}} \\
&\le \|v^{p}\|_{L^{\infty}}\|v\|_{s+1}\|u\|_{s}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
&\left|\langle J^s\partial_x v, J^s\left(uv^p\right)\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad \leq \|v\|_{s+1}\left(p\ \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{s-1}+\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_s\|u\|_{L^\infty}\right)\\
&\qquad\quad +\|v^p\|_{L^\infty}\|v\|_{s+1}\|u\|_s\\
&\qquad \leq p\ \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{s-1}\|v\|_{s+1}+\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{s+1}^2\\
&\qquad\quad +\|v\|_{L^\infty}^{p}\|u\|_s\|v\|_{s+1}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Luego, usando todos los estimados obtenidos en (3.5) al (3.10) se tiene que (3.4) es equivalente a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t\|U(t)\|_{Y^s}^2 \leq\ & C\Big[\|u\|_s\|v\|_{s+1}+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_{s-1}^2\\
&+\frac{p}{2}\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_s^2+3\ \|u\|_s\|v\|_{s+1}\\
&+p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{s-1}\|v\|_{s+1}\\
&+\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{s+1}^2+\|v\|_{L^\infty}^{p}\|u\|_s\|v\|_{s+1}\Big]\\
\leq\ & C\Big[\left(4+p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty}^{p}\right)\|u\|_s\|v\|_{s+1}\\
&+\left(1+\frac{p}{2}\right)\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_s^2\\
&+\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{s+1}^2\Big]
\end{aligned}
$$

Esto es,

$$
\frac{1}{2}\partial_t\|U(t)\|_{Y^s}\leq C\ g(t)\,\|U(t)\|_{Y^s}
\tag{3.11}
$$

donde g esta definida como en la proposición 3.2.

Finalmente, integrando a (3.11) desde 0 hasta $t<T_\Phi^*$ se tiene que

$$
\|U(t)\|_{Y^s}\leq\|U_0\|_{Y^s}+C\int_0^t g(\tau)\,\|U(\tau)\|_{Y^s}\ d\tau
$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene (3.3). □

3.2. Extensión de la solución

Ahora supongamos que $T_\Phi^*<\infty$. Por la proposición anterior, $\|U(t)\|_{Y^s}$ es acotada sobre $[0,T_\Phi^*[$.

Afirmamos que existe $\Psi \in Y^s$ tal que $\lim\limits_{t\to T_\Phi^{*-}} U(t) = \Psi$. En efecto, sean t y h tales que $t,\ t+h \in [0, T_\Phi^*[$, entonces

$$\begin{aligned}
\|U(t+h) - U(t)\|_{Y^s} \leq & \left\| \left[W(t+h) - W(t)\right]\Phi\right\|_{Y^s} \\
& + \int_t^{t+h} \left\|W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{Y^s}\, d\tau \\
& + \left\|[W(h) - I]\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\right\|_{Y^s}
\end{aligned}$$

Luego, $\|U(t+h) - U(t)\|_{Y^s} \to 0$, cuando $h \to 0$, para cualquier $t \in [0, T_\Phi^*[$. En consecuencia, la aplicación $t \in [0, T_\Phi^*[\longmapsto U(t) \in Y^s$ es continua uniformemente en $[0, T_\Phi^*[$, además, por el criterio de Cauchy ([25], Cap. VII, teorema 1.2) existe $\lim\limits_{t\to T_\Phi^{*-}} U(t)$, y por lo tanto la aplicación puede ser extendida continuamente al intervalo $[0, T_\Phi^*]$.

Ahora consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} L\partial_t V(t) + MV(t) + \partial_x F(V(t)) = 0 \\ V(0) = U(T_\Phi^*) = \Psi\ . \end{cases} \tag{3.12}$$

Por el teorema (2.5), existe $\overline{T} > 0$ y $V \in C\left([0, \overline{T}] : Y^s\right)$ única solución de (3.12). Definimos

$$\widetilde{U}(x,t) = \begin{cases} U(x,t)\ , & 0 \leq t \leq T_\Phi^* \\ V(x, t - T_\Phi^*)\ , & T_\Phi^* \leq t \leq T_\Phi^* + \overline{T} \end{cases}$$

Notemos que $\widetilde{U}(0) = \Phi$ y $\widetilde{U}(T_\Phi^*) = V(0) = U(T_\Phi^*)$. Además, cuando $0 < t < T_\Phi^*$

$$L\partial_t\widetilde{U}(t) + M\widetilde{U}(t) + \partial_x F(\widetilde{U}(t)) = 0.$$

y para $T_\Phi^* < t < T_\Phi^* + \overline{T}$

$$\begin{aligned}
& L\partial_t\widetilde{U}(t) + M\widetilde{U}(t) + \partial_x F(\widetilde{U}(t)) \\
&\quad = L\partial_t V(t - T_\Phi^*) + MV(t - T_\Phi^*) + \partial_x F(V(t - T_\Phi^*)) \\
&\quad = L\partial_t V(r) + M\ V(r) + \partial_x F(V(r)) = 0
\end{aligned}$$

pues $r = t - T^*_\Phi \in [0, \overline{T}]$. Ahora analicemos la diferenciabilidad de $\widetilde{U}$ en T^*_Φ. Para $h > 0$ tal que $T^*_\Phi - h \in [0, T^*_\Phi[$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{U}(T^*_\Phi) - \widetilde{U}(T^*_\Phi - h)}{h} &= \frac{U(T^*_\Phi) - U(T^*_\Phi - h)}{h} \\
&= \left(\frac{W(h) - I}{h}\right) W(T^*_\Phi - h)\Phi \\
&\quad - \frac{1}{h}\int_{T^*_\Phi - h}^{T^*_\Phi} W(T^*_\Phi - \tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\
&\quad - \frac{1}{h}\int_0^{T^*_\Phi - h} \big[W(T^*_\Phi - \tau) - W(T^*_\Phi - h - \tau)\big] L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\
&= \left(\frac{W(h) - I}{h}\right) W(T^*_\Phi - h)\Phi - \frac{hW(T^*_\Phi - c)L^{-1}\partial_x F(U(c))}{h} \\
&\quad - \frac{W(h) - I}{h}\int_0^{T^*_\Phi - h} W(T^*_\Phi - h - \tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau
\end{aligned}$$

en donde $c = c(h) \in [T^*_\Phi - h, T^*_\Phi]$. Así

$$\begin{aligned}
\frac{d^-}{dt}\widetilde{U}(T^*_\Phi) = \lim_{h \to 0^+} &\frac{\widetilde{U}(T^*_\Phi) - \widetilde{U}(T^*_\Phi - h)}{h} \\
&= -L^{-1}MW(T^*_\Phi)\Phi - L^{-1}\partial_x F(U(T^*_\Phi)) \\
&\quad + L^{-1}M\int_0^{T^*_\Phi} W(T^*_\Phi - \tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\
&= -L^{-1}M\widetilde{U}(T^*_\Phi) - L^{-1}\partial_x F(\widetilde{U}(T^*_\Phi)).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Sigue que $\partial_t^- \widetilde{U}(T^*_\Phi)$ existe y que

$$L\partial_t^- \widetilde{U}(T^*_\Phi) + M\widetilde{U}(T^*_\Phi) + \partial_x F(\widetilde{U}(T^*_\Phi)) = 0.$$

De manera análoga, para $h > 0$ tal que $T^*_\Phi + h \in]T^*_\Phi, T^*_\Phi + \overline{T}]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{U}(T^*_\Phi + h) - \widetilde{U}(T^*_\Phi)}{h} &= \frac{V(h) - V(0)}{h} \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h W(h - \tau)L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau + \frac{W(h)U(T^*_\Phi) - U(T^*_\Phi)}{h} \\
&= -W(h - d)L^{-1}\partial_x F(V(d)) + \left(\frac{W(h) - I}{h}\right) U(T^*_\Phi)
\end{aligned}$$

en donde $d = d(h) \in [0, h]$. Así

$$\frac{d^+}{dt}\widetilde{U}(T_\Phi^*) = -L^{-1}\partial_x F(\widetilde{U}(T_\Phi^*)) - L^{-1}M\widetilde{U}(T_\Phi^*) \tag{3.14}$$

lo que muestra que $\partial_t^+\widetilde{U}(T_\Phi^*)$ existe y que

$$L\partial_t^+\widetilde{U}(T_\Phi^*) + M\widetilde{U}(T_\Phi^*) + \partial_x F(\widetilde{U}(T_\Phi^*)) = 0.$$

Por tanto, de (3.13) y (3.14) tenemos que $\widetilde{U}$ es diferenciable en T_Φ^* y

$$L\partial_t\widetilde{U}(T_\Phi^*) + M\widetilde{U}(T_\Phi^*) + \partial_x F(\widetilde{U}(T_\Phi^*)) = 0.$$

Esto prueba que U puede ser extendida como solución de (3.2) al intervalo $[0, T_\Phi^* + \overline{T}]$ lo que contradice la definición de T_Φ^*. Procediendo de manera similar, podemos extender la solución del problema (3.2) a cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$ en un número finito de pasos.

Teorema 3.3. *Sea $U_0 = \Phi \in Y^s$ con $s \geq 2$. Entonces, existe $U \in C^1\left([0, +\infty] : Y^s\right)$ solución única del problema (3.2).*

Capítulo 4

Comportamiento asintótico de la solución global

Demostrada la existencia global de la solución $(u(x,t), v(x,t))$ del problema

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U(0) = (u_0, v_0) = \Phi \end{cases}, \tag{4.1}$$

mostraremos como en norma L^∞, $u(x,t)$ y $v(x,t)$ varían con el tiempo y el teorema 4.6 establece que la solución de (4.1) con dato inicial pequeño, decaen en el infinito para ciertos valores de p, para ello, seguimos la ideas del trabajo de Bisognin [5] y por ende las proposiciones A.11 y A.12 son muy importantes para lograr nuestro objetivo.

4.1. Comportamiento asintótico de la solución del problema lineal

Consideremos el problema lineal

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x v - \alpha\partial_x^3 v = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v + \partial_x u = 0 \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $0 < \alpha < 1/2$, $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

Por el teorema 1.3 se tiene que $U(x,t) = W(t)U_0(x)$. Esto es, vía transformada de Fourier, $\begin{pmatrix} \widehat{u}(\xi,t) \\ \widehat{v}(\xi,t) \end{pmatrix}$ esta dada por

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it\lambda^+(\xi)} + e^{it\lambda^-(\xi)} & -\beta(\xi)\left(e^{it\lambda^+(\xi)} - e^{it\lambda^-(\xi)}\right) \\ \frac{-1}{\beta(\xi)}\left(e^{it\lambda^+(\xi)} - e^{it\lambda^-(\xi)}\right) & e^{it\lambda^+(\xi)} + e^{it\lambda^-(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix}$$

donde

$$\beta(\xi) = \sqrt{1+\alpha\xi^2} \quad \text{y} \quad \lambda^{\pm}(\xi) = \frac{\pm\xi}{1+\xi^2}\beta(\xi) \tag{4.3}$$

son los autovalores de la matriz

$$A(\xi) = \frac{-\xi}{1+\xi^2}\begin{pmatrix} 0 & \beta^2(\xi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, podemos escribir la solución del problema (4.2) como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x+it\lambda^+(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x+it\lambda^-(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi)\ e^{i\xi x+it\lambda^+(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi)\ e^{i\xi x+it\lambda^-(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

y

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{\beta(\xi)}e^{i\xi x+it\lambda^+(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right. \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta(\xi)}e^{i\xi x+it\lambda^-(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x+it\lambda^+(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x+it\lambda^-(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tenemos las siguientes propiedades para los autovalores $\lambda^{\pm}$.

Proposición 4.1.

1. $\lambda^{\pm}$ *son funciones de clase* C^{∞} *para todo* ξ *y* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
2. $\lambda^{\pm}$ *tiene* 3 *puntos de inflexión no degenerados.*

Demostración. En efecto, como $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, es fácil probar que $\lambda^{\pm} \in C^{\infty}$. Calculando la segunda derivada de $\lambda^{\pm}$ tenemos

$$(\lambda^{\pm})''(\xi) = \frac{\pm\xi\left[3\alpha(1-2\alpha)\xi^4 + 2((\alpha-5/2)^2 - 21/4)\xi^2 + 3(\alpha-2)\right]}{(1+\xi^2)^3(1+\alpha\xi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y hallando los valores de ξ para los cuales la segunda derivada se hace cero o no existe, obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 0\\
\xi_2 &= \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{\alpha^2-5\alpha+1-\sqrt{(\alpha^2+10\alpha+1)(\alpha-1)^2}}{\alpha(-1+2\alpha)}}\\
\xi_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{\alpha^2-5\alpha+1-\sqrt{(\alpha^2+10\alpha+1)(\alpha-1)^2}}{\alpha(-1+2\alpha)}}
\end{aligned}$$

Calculando la tercera derivada

$$\begin{aligned}
(\lambda^{\pm})'''(\xi) &= \frac{\pm 24\alpha^3\xi^6(-1+\xi^2) - 6(1-6\xi^2+\xi^4)}{(1+\xi^2)^4(1+\alpha\xi^2)^{\frac{5}{2}}}\\
&\quad \pm\frac{-12\alpha^2\xi^4(5-6\xi^2+\xi^4) + 3\alpha(1-11\xi^2+31\xi^4-5\xi^6)}{(1+\xi^2)^4(1+\alpha\xi^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

y evaluándola en ξ_i tenemos que $(\lambda^{\pm})'''(\xi_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son puntos de inflexión no degenerados para $\lambda^{\pm}$. □

Proposición 4.2. *Existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\left|(\lambda^{\pm})''(\xi)\right| \geq C\,|\xi|^{-4} \quad \textit{para valores grandes de } \xi$$

Demostración. En efecto, sea g una función definida por

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi^4(\lambda^{\pm})''(\xi)} = \frac{\pm(1+\xi^2)^3(1+\alpha\xi^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi^5\left[3\alpha(1-2\alpha)\xi^4 + 2(\alpha^2-5\alpha+1)\xi^2 + 3(\alpha-2)\right]}$$

Como $\lim\limits_{\xi\to\infty} g(\xi) = L = \dfrac{1}{3(1-2\alpha)}$, se tiene que

$$\text{para } \varepsilon = L > 0, \text{ existe } M > 0 \text{ tal que } |g(\xi) - L| < \varepsilon \text{ para } \xi > M$$

de donde $|g(\xi)| < 2L$. Luego, existe $C > 0$ tal que

$$C\,|\xi|^{-4} < |(\lambda^{\pm})''(\xi)| \quad \text{para} \quad |\xi| > M. \qquad \square$$

Los siguientes lemas serán de mucha utilidad en la demostración del comportamiento asintótico de la solución del problema lineal.

Lema 4.3 (de Van der Corput). *Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ una función cóncava o convexa en el intervalo $[a,b]$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, entonces*

$$\left| \int_a^b e^{i\,f(s)}\,ds \right| \leq 4 \left\{ \min_{[a,b]} |f''(s)| \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \textit{si} \;\; f''(s) \neq 0 \;\; \textit{en} \; [a,b]$$

Demostración. Ver [?] $\square$

Lema 4.4. *Sea $\lambda^{\pm}$ definido como en (4.3) y $\eta > 0$. Entonces para r suficientemente grande tenemos*

$$\sup_{-\infty \leq \theta \leq \infty} \left| \int_{-r}^{r} e^{i\,t[\lambda^{\pm}(\xi)+\theta\xi]}\,d\xi \right| \leq C \left(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r^2 \right)$$

donde C es una constante positiva (independiente de r y θ).

Demostración. Sean ξ_1, ξ_2 y ξ_3 los puntos de inflexión de $\lambda = \lambda^+$. Para $j = 1,2,3$, sea $r > 0$ suficientemente grande tal que $\xi_j \in]-r, r[$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $]\xi_j - \varepsilon, \xi_j + \varepsilon[\subseteq]-r, r[$.

Consideremos el conjunto

$$B_\varepsilon = \Big\{ \xi \in]-r, r[\text{ tal que } |\xi - \xi_j| \geq \varepsilon \text{ para } j = 1,2,3 \Big\}.$$

Calculemos la integral

$$I = \int_{-r}^{r} e^{i\,t[\lambda(\xi)+\theta\,\xi]}\,d\xi = \int_{B_\varepsilon} + \int_{]-r,r[-B_\varepsilon} = I_1 + I_2. \tag{4.6}$$

Sea $f(\xi) = \lambda(\xi) + \theta\xi$, entonces $f''(\xi) = \lambda''(\xi)$. De la definición de punto de inflexión, en cada intervalo de B_ε tenemos que $f''(\xi) \neq 0$ y que f es cóncava o convexa.

Estimaremos I_1 usando el lema de Van der Corput.

$$\begin{aligned}|I_1| \;\leq\; & 4\left\{t \min_{[-r,\xi_1-\varepsilon]} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}} + 4\left\{t \min_{[\xi_1+\varepsilon,\xi_2-\varepsilon]} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}} + \\ & 4\left\{t \min_{[\xi_2+\varepsilon,\xi_3-\varepsilon]} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}} + 4\left\{t \min_{[\xi_3+\varepsilon,r]} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Calculemos el primer sumando de (4.7). Como $f \in C^\infty$, $f''(-r) \neq 0$, $f''(\xi_1) = 0$ y eligiendo ε lo suficientemente pequeño, se tiene que el mínimo de f'' en $[-r, \xi_1 - \varepsilon]$ ocurre en uno de los extremos del intervalo. Por lo tanto, usando (4.2) y eligiendo r lo suficientemente grande se tiene

$$t \min_{[-r,\xi_1-\varepsilon]} |f''(\xi)| = t \min\left\{|f''(-r)|\,, |f''(\xi_1-\varepsilon)|\right\} \geq C\, t\, r^{-4}.$$

Luego,

$$4\left\{t \min_{[-r,\xi_1-\varepsilon]} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}} \leq C\, t^{-\frac{1}{2}}\, r^2.$$

Como $|\xi|^{-4} > r^{-4}$ para todo $\xi \in]-r, r[$, la prueba para los demás sumandos es análoga. Por consiguiente, se sigue que

$$|I_1| \leq C\, t^{-\frac{1}{2}}\, r^2. \tag{4.8}$$

Ahora, estimemos I_2 en (4.6), donde

$$I_2 = \int_{]-r,r[-B_\varepsilon} e^{i\,t\,f(\xi)}\, d\xi = \sum_{j=1}^{3} \int_{|\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{i\,t\,f(\xi)}\, d\xi = \sum_{j=1}^{3} I_j$$

Estimemos I_j, $j = 1, 2, 3$. Para t suficientemente grande, esto es, para $t \geq T$ separemos la integral

$$I_j = \int_{|\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{i\,t\,f(\xi)}\, d\xi = \int_{|\xi-\xi_j|<t^{-\eta}} + \int_{t^{-\eta}\leq|\xi-\xi_j|<\varepsilon} = I_{j3} + I_{j4} \tag{4.9}$$

Hagamos $\xi - \xi_j = s$ en I_{j3} para obtener

$$|I_{j3}| = \left|\int_{|s|<t^{-\eta}} e^{i\,t\,f(s+\xi_j)}\, ds\right| \leq 2t^{-\eta} \tag{4.10}$$

Usando el lema (4.3) estimemos I_4 como sigue

$$|I_{j4}| \leq 4\left\{t \min_{t^{-\eta}\leq|\xi-\xi_j|<\varepsilon} |f''(\xi)|\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.11}$$

En la vecindad de cada punto ξ_j para $j = 1, 2, 3$, la función $f''(\xi)$ tiene una expansión en serie de Taylor

$$f''(\xi) = f'''(\xi_j)(\xi - \xi_j) + R(\xi)$$

donde $R(\xi) = \dfrac{1}{2} f^{(4)}(\theta_j)(\xi - \xi_j)^2$ para algún θ_j entre ξ_j y ξ. Por consiguiente, en la misma vecindad

$$|f''(\xi)| \geq \left(|f'''(\xi_j)| - \frac{1}{2} \left| f^{(4)}(\theta_j)(\xi - \xi_j) \right| \right) |\xi - \xi_j| \tag{4.12}$$

Como $\displaystyle\lim_{\xi \to \xi_j} \frac{R(\xi)}{\xi - \xi_j} = 0$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $|\xi - \xi_j| < \delta_1$ se tiene

$$\left| \frac{1}{2} f^{(4)}(\theta_j) \right| |\xi - \xi_j| < \delta$$

Luego, en (4.12)

$$|f''(\xi)| \geq \Big(|f'''(\xi_j)| - \delta \Big) |\xi - \xi_j|$$

Tomando $0 < \delta < \displaystyle\min_{1 \leq j \leq 3} |f'''(\xi_j)|$, obtenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|f'''(\xi_j)| \geq C\, |\xi - \xi_j| \ \text{ para } \xi \text{ tan cerca a } \xi_j.$$

Se sigue que,

$$\min_{t^{-\eta} \leq |\xi - \xi_j| \leq \varepsilon} |f''(\xi)| \geq C\, t^{-\eta} \text{ para } j = 1, 2, 3. \tag{4.13}$$

Combinando (4.13) con (4.11),

$$|I_4| \leq 4\, C\, t^{-\frac{1}{2}}\, t^{\frac{\eta}{2}} \tag{4.14}$$

Reemplazando y operando (4.8), (4.10) y (4.14) en (4.6) obtenemos,

$$|I| = \left| \int_{-r}^{r} e^{i\, t[\lambda(\xi) + \theta\, \xi]}\, d\xi \right| \leq C\, \left(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta - 1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r^2 \right)$$

Se sabe que $\lambda^+ = -\lambda^-$, por lo tanto, λ^+ y λ^- tienen los mismos puntos de inflexión. Luego, el resultado anterior también es válido si consideramos $f(\xi) = \lambda^-(\xi) + \theta\, \xi$. Por tanto, el lema 4.4 queda probado. $\square$

Teorema 4.5. *Sea* $(u_0, v_0) \in Y^s \cap (L^1 \times L^1)$. *Entonces, la solución* $(u(x,t), v(x,t)) = W(t)U_0(x)$ *del problema lineal (4.2) satisface:*

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^\infty} &\leq C \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right)(1+t)^{\frac{1-2s}{6s+6}} \\
\|v(t)\|_{L^\infty} &\leq C \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right)(1+t)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}
\end{aligned}$$

para todo t *suficientemente grande, donde* C *es una constante positiva independiente de* x *y* t.

Demostración. De (4.4) y (4.5) tenemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \widehat{u_0}(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \widehat{u_0}(\xi) d\xi \right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi)\, e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \widehat{v_0}(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi)\, e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \widehat{v_0}(\xi) d\xi \right] \tag{4.15}$$

y

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{\beta(\xi)} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right. \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta(\xi)} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $\theta = \frac{x}{t}$

Ahora, sean $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ los cuales serán elegidos más tarde y separemos las integrales dadas en(4.15) en 2 partes, tal que

$$
\begin{aligned}
&|u(x,t)| \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\left|\int_{|\xi|\leq r_1} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right| + \left|\int_{|\xi|>r_1} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right|\right. \\
&\quad + \left|\int_{|\xi|\leq r_2} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right| + \left|\int_{|\xi|>r_2} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi\right| \\
&\quad + \left|\int_{|\xi|\leq r_1} \beta(\xi)e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right| + \left|\int_{|\xi|>r_1} \beta(\xi)e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right| \\
&\quad \left. + \left|\int_{|\xi|\leq r_2} \beta(\xi)e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right| + \left|\int_{|\xi|>r_2} \beta(\xi)e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi\right|\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8\right) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Estimemos la integral I_2 en (4.17)

$$I_2 \leq C\int_{|\xi|>r_1} |\widehat{u_0}(\xi)|\ d\xi = C\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^s(1+|\xi|)^{-s}\,|\widehat{u_0}(\xi)|\ d\xi$$

Usando la desigualdad de Holder tenemos

$$I_2 \leq C\left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s}\,|\widehat{u_0}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^{-2s}\,d\xi\right)^{1/2}$$

Como existe C tal que $(1+|\xi|)^{2s} \leq C(1+|\xi|^2)^s$ y para $s>1/2$ la integral

$$\int_{r_1}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi)^{2s}} = \int_{1+r_1}^{\infty}\frac{du}{u^{2s}} \text{ converge,}$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C\,\|u_0\|_s\left[\frac{2}{2s-1}(1+r_1)^{-2s+1}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(1+r_1)^{\frac{-2s+1}{2}}\,\|u_0\|_s \leq C\,r_1^{\frac{-2s+1}{2}}\,\|u_0\|_s\ . \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

De igual manera,

$$I_4 \leq C\,r_2^{\frac{-2s+1}{2}}\,\|u_0\|_s\,. \qquad (4.19)$$

Estimemos la integral I_6 en (4.17)

$$
\begin{aligned}
I_6 &\leq C\int_{|\xi|>r_1}\sqrt{1+\alpha\xi^2}\,(1+|\xi|)^{s+1}(1+|\xi|)^{-s-1}\,|\widehat{v_0}(\xi)|\ d\xi \\
&\leq C\,\|v_0\|_{s+1}\left[\int_{|\xi|>r_1}(1+\alpha\xi^2)(1+|\xi|)^{-2s-2}\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Como $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, entonces $1 + \alpha\,\xi^2 < (1 + |\xi|)^2$ y para $s > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I_6 &\leq C\,\|v_0\|_{s+1}\left(\int_{|\xi|>r_1}(1+|\xi|)^{-2s}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\,\|v_0\|_{s+1}\left[\tfrac{2}{2s-1}(1+r_1)^{1-2s}\right]^{\frac{1}{2}} \leq C r_1^{\frac{-2s+1}{2}}\,\|v_0\|_{s+1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

De igual manera,

$$I_8 \leq C r_2^{\frac{-2s+1}{2}}\,\|v_0\|_{s+1}\,. \tag{4.21}$$

Ahora estimemos I_1. Como $\displaystyle\int_0^{r_1}\frac{1}{x^m}dx$ diverge para $m \geq 1$, no podemos proceder de la forma anterior. Sea $h(\xi,t) = e^{it\lambda^+(\xi)} = e^{it\left(\frac{\xi\sqrt{1+\alpha\xi^2}}{1+\xi^2}\right)}$, entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= C\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\,x\,\xi}\chi_M(\xi)h(\xi,t)\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right| \\ &= C\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\,x\,\xi}\left[(\chi_M h)^\vee(\cdot,t) * u_0\right]^\wedge(\xi)\,d\xi\right| \\ &= C\left|\left[(\chi_M h)^\vee(\cdot,t) * u_0\right](x)\right| \end{aligned}$$

donde χ_M es la función característica del conjunto $M = \{\xi : |\xi| \leq r_1\}$. Como $(\chi_M h)^\vee \in L^\infty$ pues $r_1 < \infty$ y $u_0 \in L^1$, por la desigualdad de Young deducimos que

$$I_1 \leq C\,\left\|(\chi_M h)^\vee * u_0\right\|_{L^\infty} \leq C\,\left\|(\chi_M h)^\vee(\cdot,t)\right\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1} \tag{4.22}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left|(\chi_M h)^\vee(x,t)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\,x\,\xi}\chi_M(\xi)h(\xi,t)\,d\xi\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\,t[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\chi_M(\xi)\,d\xi\right| \end{aligned}$$

donde $\theta = \frac{x}{t}$. Usando el lema 4.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \left|(\chi_M h)^\vee(x,t)\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{-\infty\leq\theta\leq\infty}\left|\int_{-r_1}^{r_1} e^{i\,t[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\,d\xi\right| \\ &\leq C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_1^2\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, usando (4.22) deducimos que

$$I_1 \leq C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_1^2\right)\|u_0\|_{L^1}\,. \tag{4.23}$$

Similarmente,

$$I_3 \leq C\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_2^2\right)\|u_0\|_{L^1}. \tag{4.24}$$

Por último, estimemos la integral I_5

$$\begin{aligned} I_5 &= C\left|\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\sqrt{1+\alpha\xi^2}\,\chi_M(\xi)h(\xi,t)\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\right| \\ &= C\left|\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left[\left(\beta(\cdot)\,\chi_M(\cdot)h(\cdot,t)\right)^{\vee} * v_0\right]^{\wedge}(\xi)\,d\xi\right| \\ &= C\left|\left[\left(\beta(\cdot)\,\chi_M(\cdot)h(\cdot,t)\right)^{\vee} * v_0\right](x)\right| \end{aligned} \tag{4.25}$$

Como

$$\left|\left(\beta(\cdot)\,\chi_M(\cdot)h(\cdot,t)\right)^{\vee}(x)\right| \leq C\int_{-r_1}^{r_1}\sqrt{1+\alpha\xi^2}\,d\xi < \infty$$

pues $r_1 < \infty$, se tiene que $\left(\beta(\cdot)\,\chi_M h\right)^{\vee} \in L^\infty$. Aplicando la desigualdad de Young en (4.25),

$$I_5 \leq C\left\|\left(\beta(\cdot)\,\chi_M(\cdot)h(\cdot,t)\right)^{\vee}\right\|_{L^\infty}\|v_0\|_{L^1}. \tag{4.26}$$

Además, usando el lema 4.4

$$\begin{aligned} \left|\left(\beta(\cdot)\,\chi_M h\right)^{\vee}(x,t)\right| &\leq C\sqrt{1+r_1^2}\left|\int_{-r_1}^{r_1} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\,d\xi\right| \\ &\leq C\sqrt{1+r_1^2}\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_1^2\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, usando (4.26) deducimos que

$$I_5 \leq C\,(1+r_1)\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_1^2\right)\|v_0\|_{L^1}. \tag{4.27}$$

Similarmente,

$$I_7 \leq C\,(1+r_2)\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}r_2^2\right)\|v_0\|_{L^1}. \tag{4.28}$$

De (4.18),(4.19),(4.20),(4.21),(4.23),(4.24),(4.27) y (4.28) se concluye que para r_1 y r_2 grandes

$$
\begin{aligned}
&|u(x,t)| \\
&\leq \; C\, r_1 \left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1 - 1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^2\right) \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}\right) \\
&\quad + C\, r_2 \left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2 - 1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^2\right) \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}\right) \\
&\quad + C\, r_1^{\frac{-2s+1}{2}} \left(\|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right) + C\, r_2^{\frac{-2s+1}{2}} \left(\|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right) \\
&\leq \; C \left(r_1 t^{-\eta_1} + r_1 t^{\frac{\eta_1 - 1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^3 + r_1^{\frac{-2s+1}{2}}\right) \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \\
&\quad + C \left(r_2 t^{-\eta_2} + r_2 t^{\frac{\eta_2 - 1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^3 + r_2^{\frac{-2s+1}{2}}\right) \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, elijamos $r_1 = t^{\frac{1}{3s+3}}$, $\eta_1 = \frac{1}{3}$ para que el lema 4.4 sea válido para $t \geq T_1$ y $r_2 = t^{\frac{1}{3s+3}}$, $\eta_2 = \frac{1}{3}$ para que el mismo lema sea válido para $t \geq T_2$. Tomando $T = \text{máx}\{T_1, T_2\}$ y para $t \geq T$ tenemos

$$
|u(x,t)| \leq C \left(t^{\frac{-s}{3s+3}} + t^{\frac{1-s}{2s+2}} + t^{\frac{1-2s}{6s+6}}\right) \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right)
$$

De donde

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C \left(t^{\frac{1-2s}{6s+6}}\right) \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \text{ para } s \geq 2
$$

De las desigualdad anterior también se tiene que para $t \geq T$

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right).
$$

Luego,

$$
\left(1 + t^{\frac{-1+2s}{6s+6}}\right) \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \tag{4.29}
$$

Como para $a > 0$, existe $C_a > 0$ tal que para todo $t \geq 0$ se tiene $(1+t)^a \leq C_a(1+t^a)$, la desigualdad (4.29) prueba que para todo $t \geq T$

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C \left(\|U_0\|_{L^1 \times L^1} + \|U_0\|_{Y^s} \right)(1+t)^{\frac{1-2s}{6s+6}} \tag{4.30}
$$

Ahora, estimemos la norma $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty}$. Separemos la integrales dadas en(4.16) en 2 partes, tal que

$$
\begin{aligned}
&|v(x,t)| \\
&\leq \; C \left[\left| \int_{|\xi|\leq r_1} \frac{e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}}{\beta(\xi)} \, \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| + \left| \int_{|\xi|> r_1} \frac{e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}}{\beta(\xi)} \, \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| \right. \\
&\quad + \left| \int_{|\xi|\leq r_2} \frac{e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}}{\beta(\xi)} \, \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| + \left| \int_{|\xi|> r_2} \frac{e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}}{\beta(\xi)} \, \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| \\
&\quad + \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \, \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \right| + \left| \int_{|\xi|> r_1} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \, \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \right| \\
&\quad \left. + \left| \int_{|\xi|\leq r_2} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \, \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \right| + \left| \int_{|\xi|> r_2} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \, \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi \right| \right] \\
&= \; C\left(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 + \overline{I}_4 + \overline{I}_5 + \overline{I}_6 + \overline{I}_7 + \overline{I}_8\right) \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Por (4.23), (4.24) y procediendo como en (4.18) y (4.19), con $s > -1/2$, se tiene

$$\overline{I}_5 \;\leq\; C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^2\right) \|v_0\|_{L^1} \qquad (4.32)$$

$$\overline{I}_7 \;\leq\; C\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^2\right) \|v_0\|_{L^1} \qquad (4.33)$$

$$\overline{I}_6 \;\leq\; C\, r_1^{\frac{-2s-1}{2}} \|v_0\|_{s+1} \qquad (4.34)$$

$$\overline{I}_8 \;\leq\; C\, r_2^{\frac{-2s-1}{2}} \|v_0\|_{s+1} \qquad (4.35)$$

respectivamente.

Luego, para la estimación de las integrales $\overline{I}_1$ y $\overline{I}_3$, considerando que $(1 + \alpha\xi^2)^{-\frac{1}{2}} < 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y procediendo de manera similar como en la estimación de I_5, tenemos

$$\overline{I}_1 \leq C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^2\right) \|u_0\|_{L^1} \qquad (4.36)$$

$$\overline{I}_3 \leq C\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^2\right) \|u_0\|_{L^1} \qquad (4.37)$$

Ahora, estimemos $\overline{I}_2$

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_2 \;&\leq\; C \int_{|\xi|>r_1} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\xi^2}} (1+|\xi|)^{-s} (1+|\xi|)^{s} \left|\widehat{u_0}(\xi)\right| \, d\xi \\
&\leq\; C\, \|u_0\|_s \left[\int_{|\xi|>r_1} \frac{1}{1+\alpha\xi^2} (1+|\xi|)^{-2s} \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Como existe $C_\alpha > 0$ tal que $(1+\alpha\xi^2)^{-1} < C_\alpha(1+|\xi|)^{-2}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, dado que $s \geq 2$

$$\begin{aligned}
\overline{I}_2 &\leq C\ \|u_0\|_s \left(\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^{-2-2s}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ \|u_0\|_s \left[\frac{2}{2s+1}(1+r_1)^{-1-2s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ (1+r_1)^{\frac{-2s-1}{2}}\, \|u_0\|_s \ \leq\ C\ r_1^{\frac{-2s-1}{2}}\, \|u_0\|_s \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\overline{I}_4 \leq C\ r_2^{\frac{-2s-1}{2}}\, \|u_0\|_s \qquad (4.39)$$

Desde las expresiones (4.32) hasta (4.39) se concluye que para r_1 y r_2 grandes

$$\begin{aligned}
|v(x,t)| &\leq C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^2\right)\left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}\right) \\
&\quad + C\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^2\right)\left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}\right) \\
&\quad + C\ r_1^{\frac{-2s-1}{2}}\left(\|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right) + C\ r_2^{\frac{-2s-1}{2}}\left(\|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\right) \\
&\leq C\left(t^{-\eta_1} + t^{\frac{\eta_1-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_1^2 + r_1^{\frac{-2s-1}{2}}\right)\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \\
&\quad + C\left(t^{-\eta_2} + t^{\frac{\eta_2-1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} r_2^2 + r_2^{\frac{-2s-1}{2}}\right)\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, eligiendo $r_1 = r_2 = t^{\frac{1}{3s+3}}$, $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{3}$ para que el lema 4.4 sea válido para $t \geq T$, tenemos

$$|v(x,t)| \leq C\left(t^{-\frac{1}{3}} + t^{\frac{1-3s}{6s+6}} + t^{\frac{-2s-1}{6s+6}}\right)\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right)$$

De donde

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\left(t^{\frac{-2s-1}{6s+6}}\right)\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \text{ para } s \geq 2$$

De la desigualdad anterior también se tiene que para $t \geq T$ y $s > -1/2$

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right)$$

Luego,

$$\left(1 + t^{\frac{1+2s}{6s+6}}\right)\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s}\right) \qquad (4.40)$$

Por lo tanto, para todo $t \geq T$

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\,(\|U_0\|_{L^1\times L^1} + \|U_0\|_{Y^s})(1+t)^{\frac{-1-2s}{6s+6}} \tag{4.41}$$

Considerando que la buena formulación global del problema (4.1) se obtuvo para $s \geq 2$, la prueba del teorema se sigue de (4.30) y (4.41). □

4.2. Comportamiento asintótico de la solución del problema no lineal

Teorema 4.6. *Sea $(u_0, v_0) \in Y^s \cap (L^1 \times L^1)$ y p un entero positivo, $p > \rho(s)$ donde la función ρ se define como*

$$\rho(s) = 1 + \frac{6s+6}{2s-1}$$

Entonces, si $\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}$ es suficientemente pequeño, la solución global $(u(x,t), v(x,t))$ del problema (4.1) satisface:

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{\frac{1-2s}{6s+6}}$$

$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{\frac{-2s-1}{6s+6}}$$

para todo t suficientemente grande, donde C es una constante positiva independiente de x y t.

Demostración. En la sección anterior, $U(x,t) = W(t)U_0(x)$ denotó la solución del problema lineal (4.2) donde $W(t)$ es el semigrupo generado por $-L^{-1}M$. Además, en el capítulo 2 se probó que la solución de la ecuación no homogénea

$$\partial_t U(t) + L^{-1}MU(t) = -L^{-1}\partial_x F(U(t))$$

satisface la ecuación integral

$$U(x,t) = W(t)U_0(x) - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \tag{4.42}$$

donde

$$F(U(\tau)) = \left(\frac{u^{p+1}(\tau)}{p+1}, u(\tau)v^p(\tau) \right).$$

Del teorema 1.1 se tiene que

$$L^{-1}\widehat{\partial_x F(U}(\tau)) = \frac{1}{1+\xi^2}\partial_x \widehat{F(U(}\tau)) = \frac{1}{1+\xi^2}\left(\widehat{g_1}(\xi,t), \widehat{g_2}(\xi,t)\right)$$

donde

$$g_1(x,t) = u^p \partial_x u \quad \text{y} \quad g_2(x,t) = \partial_x(uv^p).$$

Luego, haciendo uso del teorema 1.3, se tiene que la solución $U = (u, v)$ del problema no lineal se puede escribir como

$$\begin{aligned}
u(x,t) \quad = \quad & \tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Bigg[\int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \\
& - \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi) e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi) e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi \\
& - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_1}(\xi,t)d\xi \; d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_1}(\xi,t)d\xi \; d\tau \\
& - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi) e^{i(t-\tau)[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_2}(\xi,t)d\xi \; d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \beta(\xi) e^{i(t-\tau)[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_2}(\xi)d\xi \; d\tau \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

y

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{\beta(\xi)} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \right.\\ &+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta(\xi)} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{it[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]}\widehat{v_0}(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta(\xi)} e^{i(t-\tau)[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_1}(\xi,t)d\xi\, d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta(\xi)} e^{i(t-\tau)[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_1}(\xi,t)d\xi\, d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)[\lambda^+(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_2}(\xi)d\xi\, d\tau \\ &\left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)[\lambda^-(\xi)+\theta\xi]} \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_2}(\xi)d\xi\, d\tau \right] \end{aligned} \tag{4.44}$$

donde $\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{g_i}(\xi,t) = \widehat{K * g_i}(x,t) \;\; i = 1,2.$

Afirmamos que $g_i(\cdot,t) \in L^2$ para cada $t \geq 0$, $i = 1,2$. En efecto, para $g_1(\cdot,t)$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |g_1(x,t)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u^p \partial_x u|^2\, dx \leq \|u\|_{L^\infty}^{2p} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 < +\infty$$

y para $g_2(\cdot,t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g_2(x,t)|^2\, dx &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}} \left|uv^{p-1}\partial_x v\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |v^p \partial_x u|^2\, dx\right) \\ &\leq C\left(\|v\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \|u\|_{L^\infty}^2 \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{2p} \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación queda probada y con ello garantizamos la existencia de la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa en L^2 de g_1 y g_2.

Ahora, definamos

$$q(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} \left\{ \left(\|u(\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\tau)\|_{L^\infty}\right)(1+\tau)^{\frac{2s-1}{6s+6}} + \|u(\tau)\|_s + \|v(\tau)\|_{s+1} \right\}.$$

Afirmamos que existe $C > 0$ tal que

$$q(t) \leq C\Big(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1} + q^{p+1}(t)\Big). \tag{4.45}$$

En efecto, para probar la afirmación, estimaremos cada término de la definición de $q(t)$. Por el teorema 4.5, en (4.43) se tiene

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_{L^\infty} \;\le\; & C\Big(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\Big)(1+\tau)^{\frac{1-2s}{6s+6}} \\ & + \int_0^\tau \Big(\|K*g_1\|_{L^1} + \|K*g_2\|_{L^1} + \|K*g_1\|_s \\ & \quad + \|K*g_2\|_{s+1}\Big)(1+\tau-\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}}\, d\omega \end{aligned} \tag{4.46}$$

siempre que $K*g_1 \in L^1 \cap H^s$ y $K*g_2 \in L^1 \cap H^{s+1}$. En efecto, por el teorema 1.1 se tiene que $K \in L^1 \cap L^\infty$ y haciendo uso de la desigualdad de Young tenemos

$$\|K*g_1(\omega)\|_{L^1} \le \|K\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2} = \|K\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_1^2 .$$

Ya que $s \ge 2$, de la definición de $q(t)$ obtenemos

$$\|K*g_1(\omega)\|_{L^1} \le C\,(1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)} q^{p+1}(t). \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} \|K*g_1(\omega)\|_s &= \left\| J^s\widehat{(K*g_1)}(\omega)\right\|_{L^2} \\ &= \left\|(1+(\cdot)^2)^{s/2}\left(\frac{1}{1+(\cdot)^2}\right)\widehat{g_1}(\omega)\right\|_{L^2} \\ &= \|g_1(\omega)\|_{s-2} \;\le\; \left\|u^{p+1}\right\|_{s-1}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Como $s-1 \ge 1$, aplicando varias veces la proposición A.10 y el teorema de inmersión de Sobolev

$$\begin{aligned} \left\|u^{p+1}\right\|_{s-1} &= \left\|J^{s-1}u^{p+1}\right\|_{L^2} \;\le\; C\,\|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{s-1} \\ &= C\,\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_1 \|u\|_{s-1}, \end{aligned}$$

de donde

$$\|K*g_1(\omega)\|_s \le C\,(1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)} q^{p+1}(t). \tag{4.49}$$

$\|K*g_2(\omega)\|_{L^1}$

$$\begin{aligned} &\le \|K\|_{L^1} \|\partial_x(uv^p)\|_{L^1} \\ &\le \|K\|_{L^1}\left(\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|\partial_x u\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\right) \\ &\le C\,\left(\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|u\|_1 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_1\|u\|_{L^2}\right). \end{aligned}$$

Ya que $s \geq 2$, de la definición de $q(t)$ obtenemos

$$\|K * g_2(\omega)\|_{L^1} \leq C\ (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)} q^{p+1}(t). \tag{4.50}$$

Procediendo como en (4.48), teniendo en cuenta la proposición A.10 y el teorema de inmersión de Sobolev

$$\begin{aligned} \|K * g_2(\omega)\|_{s+1} &\leq C\,\|uv^p\|_s = \|J^s\,(uv^p)\|_{L^2} \\ &\leq C\,(\|u\|_{L^\infty}\,\|J^s v^p\|_{L^2} + \|J^s u\|_{L^2}\,\|v^p\|_{L^\infty}) \\ &\leq C\,\left(\|u\|_1\,\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|v\|_s + \|u\|_s\,\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|v\|_1\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\|K * g_2(\omega)\|_{s+1} \leq C\ (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)} q^{p+1}(t). \tag{4.51}$$

De (4.47), (4.49), (4.50) y (4.51), (4.46) queda como

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_{L^\infty} \ &\leq\ C\Big(\ \|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\Big)(1+\tau)^{\frac{1-2s}{6s+6}} \\ &\quad + Cq^{p+1}(t)\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}(1+\tau-\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}}\ d\omega. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Notemos que para $s \geq 2$, el rango de la función ρ definida por $\rho(s) = 4 + \frac{9}{2s-1}$ es el intervalo $]4,7]$. Luego, como $p > \rho(s)$ y usando la proposición A.12 con $\beta_1 = \alpha_0 = \frac{2s-1}{6s+6}$, $\alpha_1 = \frac{2s-1}{6s+6}(p-1)$, tenemos

$$\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}(1+\tau-\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}}\ d\omega \leq C\ (1+\tau)^{\frac{1-2s}{6s+6}}.$$

Por lo tanto, de la desigualdad (4.52), se sigue que

$$(1+\tau)^{\frac{2s-1}{6s+6}}\,\|u(\tau)\|_{L^\infty} \leq C\Big(\ \|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1} + q^{p+1}(t)\Big). \tag{4.53}$$

Ahora, estimemos $\|v\|_{L^\infty}$. Por el teorema 4.5, en (4.44) se tiene

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{L^\infty} \ &\leq\ C\Big(\ \|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\Big)(1+\tau)^{\frac{-1-2s}{6s+6}} \\ &\quad + \int_0^\tau \Big(\ \|K * g_1\|_{L^1} + \|K * g_2\|_{L^1} + \|K * g_1\|_s \\ &\qquad + \ \|K * g_2\|_{s+1}\Big)(1+\tau-\omega)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}\ d\omega \end{aligned}$$

y por las desigualdades (4.47), (4.49), (4.50) y (4.51), la desigualdad anterior queda como

$$\begin{aligned}\|v(\tau)\|_{L^\infty} &\leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_s+\|v_0\|_{s+1}\right)(1+\tau)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}\\ &\quad + C\,q^{p+1}(t)\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}(1+\tau-\omega)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}\,d\omega. \qquad (4.54)\end{aligned}$$

Como $p>\rho(s)$, usando la proposición A.12 con $\beta_1=\alpha_0=\frac{1+2s}{6s+6}$ y $\alpha_1=\frac{2s-1}{6s+6}(p-1)$, tenemos

$$\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}(1+\tau-\omega)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}\,d\omega \leq C\,(1+\tau)^{\frac{-1-2s}{6s+6}}.$$

Por lo tanto, de (4.54) se sigue que

$$(1+\tau)^{\frac{2s+1}{6s+6}}\,\|v(\tau)\|_{L^\infty} \leq C\Big(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_s+\|v_0\|_{s+1}+q^{p+1}(t)\Big). \qquad (4.55)$$

Ahora, estimemos $\|u(\tau)\|_s$. En efecto, de (4.43) se tiene

$$\|u(\tau)\|_s \leq C\left(\|u_0\|_s+\|v_0\|_{s+1}\right)+\int_0^\tau \left(\|K*g_1(\omega)\|_s+\|K*g_2(\omega)\|_{s+1}\right)d\omega.$$

Considerando (4.49) y (4.51), la desigualdad anterior queda como

$$\|u(\tau)\|_s \leq C\left(\|u_0\|_s+\|v_0\|_{s+1}\right)+C\left(\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}\,d\omega\right)q^{p+1}(t).$$

Como $p>\rho(s)$, se tiene que $\frac{2s-1}{6s+6}(p-1)>1$ y por lo tanto, la integral

$$\int_0^\tau (1+\omega)^{\frac{1-2s}{6s+6}(p-1)}\,d\omega$$

es convergente. Luego,

$$\|u(\tau)\|_s \leq C\left(\|u_0\|_s+\|u_0\|_{s+1}+q^{p+1}(t)\right). \qquad (4.56)$$

Por último, estimemos $\|v(\tau)\|_{s+1}$. En efecto, de (4.44) se tiene

$$\begin{aligned}\|v(\tau)\|_{s+1} &\leq C\left(\|u_0\|_s+\|v_0\|_{s+1}\right)\\ &\quad+\int_0^\tau \left(\|K*g_1(\omega)\|_s+\|K*g_2(\omega)\|_{s+1}\right)d\omega\end{aligned}$$

y por consiguiente, la estimación de $\|v(\tau)\|_{s+1}$ es la misma que la de $\|u(\tau)\|_s$, esto es,

$$\|v(\tau)\|_{s+1} \leq C\Big(\|u_0\|_s + \|u_0\|_{s+1} + q^{p+1}(t)\Big) \tag{4.57}$$

Teniendo en cuenta que $2s-1 < 2s+1$, sumamos desigualdades (4.53), (4.55), (4.56) y (4.57), obteniendo

$$\begin{aligned}(1+\tau)^{\frac{2s-1}{6s+6}} \left(\|u(\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\tau)\|_{L^\infty}\right) + \|u(\tau)\|_s + \|v(\tau)\|_{s+1} \\ \leq C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1} + q^{p+1}(t)\right).\end{aligned}$$

Tomando el supremo en $[0,t]$, la afirmación dada por (4.45) queda probada.

Finalmente, la prueba del teorema se sigue inmediatamente de ésta afirmación, para ello debemos verificar las hipótesis de la proposición A.11. En efecto,

$$\begin{aligned} q(0) &= \|u_0\|_{L^\infty} + \|v_0\|_{L^\infty} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1} \\ &\leq 2\ \left(\|u_0\|_s + \|u_0\|_{s+1}\right) \\ &\leq 2\Big(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\Big) \end{aligned}$$

Tomando $\alpha_0 = 2\Big(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1}\Big)$, $\alpha_1 = C$, $\beta_1 = p+1$ y $\delta = \frac{p}{C^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{p+1}{p}}}$ tal que

$$\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_s + \|v_0\|_{s+1} < \delta$$

se tiene que las hipótesis de la proposición A.11 se verifican y de ahí se sigue que $q(t)$ es acotado y

$$q(t) \leq \alpha_0\left(\frac{p}{p+1}\right)$$

y por lo tanto

$$(1+t)^{\frac{2s-1}{6s+6}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq q(t) \leq C$$

$$(1+t)^{\frac{2s+1}{6s+6}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq q(t) \leq C$$

como queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 5

El problema local revisado

En este capítulo consideramos el problema (I.7) con $p = 1$, es decir:

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t f + \partial_x g + f\partial_x f - \alpha\partial_x^3 g = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t g + \partial_x f + \partial_x (fg) = 0 \\ f(0) = f_0 \\ g(0) = g_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $f = f(x,t)$ y $g = g(x,t)$ son funciones de valor real con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Notemos que en este caso el sistema del problema de valor inicial (5.1) es el sistema de Bona-Smith. Además, demostraremos la existencia y unicidad de la solución mild en Y^s para $s \geq 0$ del problema de valor inicial dado por (5.1).

Diremos que un problema de valor inicial tiene solución mild en el siguiente sentido [23].

Definición 5.1. *Sea $-L^{-1}M$ el generador del grupo fuertemente continuo $W(t)$. Sea $U_0 = (u_0, v_0) \in Y^s$ y $L^{-1}\partial_x F(U) \in Y^s$. La función $U \in C([0,T] : Y^s)$ dada por*

$$U(t) = W(t)U_0 - \int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau. \qquad 0 \leq t \leq T,$$

es la solución mild del problema de valor inicial no homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) - L^{-1}\partial_x F(U(t)) \quad t > 0 \\ U(0) = (u_0, v_0) \end{cases}$$

en [0,T] y donde $L^{-1}\partial_x F(U) : [0,T] \longrightarrow Y^s$.

5.1. El problema equivalente

Tomando la transformada de Fourier con respecto a x, las ecuaciones del sistema (5.1) pueden ser escritas como

$$\partial_t \begin{pmatrix} \widehat{f}(\xi) \\ \widehat{g}(\xi) \end{pmatrix} + i\mathcal{A}(\xi) \begin{pmatrix} \widehat{f}(\xi) \\ \widehat{g}(\xi) \end{pmatrix} (\xi) + \frac{i\xi}{1+\xi^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\widehat{f^2}(\xi) \\ \widehat{fg}(\xi) \end{pmatrix} (\xi) = 0$$

donde $\mathcal{A}(\xi) = \dfrac{\xi}{1+\xi^2} \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha\xi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En base a los vectores propios hallados en el teorema 1.3 del capítulo 1, consideremos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha\partial_x^2)^{1/2} & (1-\alpha\partial_x^2)^{1/2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$f = J_\alpha(u+v) \quad \text{y} \quad g = u - v \tag{5.2}$$

donde $J_\alpha = (1-\alpha\partial_x^2)^{1/2}$ o $\widehat{J_\alpha f}(\xi) = \beta(\xi)\widehat{f}(\xi)$ con $\beta(\xi) = \sqrt{1+\alpha\xi^2}$.

Con este cambio, trabajamos las ecuaciones dadas en (5.1)

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t J_\alpha(u+v) + \partial_x(u-v) - \alpha\partial_x^3(u-v) + \frac{1}{2}\partial_x f^2 = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t(u-v) + \partial_x J_\alpha(u+v) + \partial_x(fg) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Aplicando el operador J_α a la segunda ecuación, sumando y restando las ecuaciones que resultan, obtenemos

$$\begin{cases} 2(1-\partial_x^2)\partial_t J_\alpha u + \partial_x(u-v) - \alpha\partial_x^3(u-v) + \partial_x J_\alpha^2(u+v) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\partial_x f^2 + J_\alpha[\partial_x(fg)] = 0 \\ 2(1-\partial_x^2)\partial_t J_\alpha v + \partial_x(u-v) - \alpha\partial_x^3(u-v) - \partial_x J_\alpha^2(u+v) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\partial_x f^2 - J_\alpha[\partial_x(fg)] = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Pero,

$$\partial_x(u-v) - \alpha\partial_x^3(u-v) + \partial_x J_\alpha^2(u+v) = 2\partial_x J_\alpha^2 u$$

y del mismo modo

$$\partial_x(u-v) - \alpha\partial_x^3(u-v) - \partial_x J_\alpha^2(u+v) = -2\partial_x J_\alpha^2 v.$$

Luego, en (5.4) resulta

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t J_\alpha u + \partial_x J_\alpha^2 u + \frac{1}{4}\partial_x f^2 + \frac{1}{2}J_\alpha[\partial_x(fg)] = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t J_\alpha v - \partial_x J_\alpha^2 v + \frac{1}{4}\partial_x f^2 - \frac{1}{2}J_\alpha[\partial_x(fg)] = 0 \ , \end{cases}$$

Por lo tanto, el problema de valor inicial equivalente con (5.1) con el cambio de variables dado en (5.2) es

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + F_1(u,v) = 0 \\ \partial_t v - Av + F_2(u,v) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

en donde los operadores A, F_1 y F_2 se definen como

$$\begin{aligned} Au &= (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x J_\alpha u \\ F_1(u,v) &= \tfrac{1}{4}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\Big\{J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 + 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)\Big\} \\ F_2(u,v) &= \tfrac{1}{4}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\Big\{J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 - 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)\Big\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Proposición 5.2. $(f_0, g_0) \in H^s \times H^{s+1}$ *si y solo sí* $(u_0, v_0) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$

Demostración. De (5.2) se tiene que $u_0 = \frac{1}{2}(J_\alpha^{-1}f_0 + g_0)$ y $v_0 = \frac{1}{2}(J_\alpha^{-1}f_0 - g_0)$. Luego,

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{s+1} &= \frac{1}{2}\left\|J_\alpha^{-1}f_0 + g_0\right\|_{s+1} \leq \frac{1}{2}\left\|J_\alpha^{-1}f_0\right\|_{s+1} + \frac{1}{2}\|g_0\|_{s+1} \\ &\leq C_\alpha\|f_0\|_s + \frac{1}{2}\|g_0\|_{s+1} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_0 \in H^{s+1}$. Del mismo modo, $v_0 \in H^{s+1}$.

Para el recíproco,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_s &= \|J_\alpha(u_0+v_0)\|_s \leq C_\alpha\|u_0+v_0\|_{s+1} \\ &\leq C_\alpha(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}) < \infty. \end{aligned}$$

y

$$\|g_0\|_{s+1} = \|u_0 - v_0\|_{s+1} \leq \|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1} < \infty. \qquad \square$$

La importancia de la proposición anterior radica en que si el problema (5.5) es localmente bien formulado en $H^{s+1} \times H^{s+1}$ para $s \geq 0$, entonces el problema (5.1) es localmente bien formulado en $H^s \times H^{s+1}$ para $s \geq 0$.

Teorema 5.3. *El operador $A : H^{s+1} \longrightarrow H^{s+1}$ con $s \in \mathbb{R}$ genera un grupo fuertemente continuo $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores unitarios sobre H^{s+1}, y para cada $u \in H^{s+1}$,*

$$\widehat{e^{tA}u}(\xi) = e^{i\xi(1+\xi^2)^{-1}(1+\alpha\xi^2)^{1/2}t}\ \widehat{u}(\xi) \tag{5.7}$$

Además, cualquiera sea $u(0) = u_0 \in H^{s+1}$ la función $e^{(\cdot)A}u_0 : [0, \infty[\longrightarrow H^{s+1}$ es la solución única del problema de valor inicial lineal asociado a (5.5)

Demostración. Demostraremos que el operador A es acotado. Sea $u \in H^{s+1}$, entonces

$$\|Au\|_{s+1}^2 = \left\|J^{s+1}J^{-2}\partial_x J_\alpha u\right\|_0^2 = \left\|(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}\xi(1+\alpha\xi^2)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}\right\|_0^2$$

Como $\xi < (1+\xi^2)^{1/2}$ y existe $C_\alpha > 0$ tal que $(1+\alpha\xi^2) < C_\alpha(1+\xi^2)$, tenemos que

$$\|Au\|_{s+1}^2 \ < \ C_\alpha \left\|(1+\xi^2)^{\frac{s+1}{2}}\widehat{u}\right\|_0^2 \ = \ C_\alpha \|u\|_{s+1}^2 \ < \ +\infty$$

Luego, A es un operador acotado. Por lo tanto, A es el generador de un grupo fuertemente continuo $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre H^{s+1}.
Para demostrar (5.7), procedemos como en el capítulo 1, obteniendo

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{i\xi(1+\xi^2)^{-1}(1+\alpha\xi^2)^{1/2}t}\ \widehat{u_0}(\xi)\ .$$

Definiendo

$$\widehat{e^{tA}u}(\xi) = e^{i\xi(1+\xi^2)^{-1}(1+\alpha\xi^2)^{1/2}t}\ \widehat{u}(\xi)$$

obtenemos el grupo fuertemente continuo dado por (5.7).

Ahora, probemos que el semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es unitario. En efecto,

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA}u(t)\right\|_{s+1} &= \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s+1}\left|e^{i\xi(1+\xi^2)^{-1}(1+\alpha\xi^2)^{1/2}t}\ \widehat{u}(\xi,t)\right|^2\ d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s+1}\left|\widehat{u}(\xi,t)\right|^2\ d\xi \ = \ \|u(t)\|_{s+1}\ .\end{aligned}$$

y por consiguiente, el teorema queda probado. □

Las proposiciones siguientes son de mucha ayuda para mejorar los resultados locales obtenidos en el capítulo 2.

Proposición 5.4. *Sea $f \in H^s$ y $g \in H^r$ con $s \geq 0$ y $r > 1/2$. Entonces $fg \in H^s$ y*

$$\|fg\|_s \leq C_{r,s} \|f\|_s \|g\|_r$$

Demostración. En efecto, por la desigualdad de Young

$$\|fg\|_s = \left\| \widehat{J^s f} * \widehat{g} \right\|_{L^2} \leq \left\| \widehat{J^s f} \right\|_{L^2} \|\widehat{g}\|_{L^1} \leq \left\| \widehat{f} \right\|_s \|\widehat{g}\|_{L^1} \tag{5.8}$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|\widehat{g}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)|\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{r/2} |\widehat{g}(\xi)| \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{r/2}} \\ &\leq \|g\|_r \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)^r} d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

y como $r > 1/2$, la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)^r} d\xi$$

es convergente. Entonces

$$\|\widehat{g}\|_{L^1} \leq C \|g\|_r$$

Reemplazando esta última desigualdad en (5.8), se tiene lo que queríamos demostrar.

□

Proposición 5.5. *Existe una constante C tal que se tienen las siguientes desigualdades:*

1. $\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_0 \|g\|_0$, *si* $-1 \leq s < -1/2$,
2. $\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_{(2s+1)/4} \|g\|_{(2s+1)/4}$, *si* $-1/2 \leq s < 0$,
3. $\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1}$, *si* $0 \leq s \leq 1/2$.
4. $\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_s \|g\|_s$, *si* $s > 1/2$,

Demostración.

1. Lo probaremos por dualidad. Ya que el dual de H^s es isométricamente isomorfo a H^{-s} para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$\|fg\|_s = \sup_{\|\varphi\|_{-s}\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} fg\varphi \, dx \right|.$$

Como $1/2 < -s \leq 1$ y por el teorema de inmersión de Sobolev, H^{-s} está contenido continuamente en L^∞. Luego

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg\varphi \, dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_0 \|g\|_0 \leq \|\varphi\|_{-s} \|f\|_0 \|g\|_0 \leq C \|f\|_0 \|g\|_0 .$$

de donde, $\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_0 \|g\|_0$.

2. De igual forma,

$$\|fg\|_s = \sup_{\|\varphi\|_{-s}\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} fg\varphi \, dx \right|$$

Como $0 < -s \leq 1/2$. Para $-s = 1/2$, se sabe que $H^{1/2} \subseteq L^q$ para $q \in [2, +\infty[$ y para $0 < -s < 1/2$, por el teorema A.6 tenemos que $H^{-s} \hookrightarrow L^{\frac{2}{1+2s}}$. Además, $\frac{1-2s}{2}$ y $\frac{1+2s}{2}$ son números conjugados, esto es, $\left(\frac{2}{1-2s}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{1+2s}\right)^{-1} = 1$, y por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} fg\varphi \, dx \right| &\leq C \|fg\|_{L^{\frac{2}{1-2s}}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2}{1+2s}}} \\ &\leq C \left(\left\| f^{\frac{2}{1-2s}} \right\|_{L^2} \left\| g^{\frac{2}{1-2s}} \right\|_{L^2} \right)^{\frac{1-2s}{2}} \|\varphi\|_{-s} \\ &\leq C \ \|f\|_{L^{\frac{4}{1-2s}}} \|g\|_{L^{\frac{4}{1-2s}}} \|\varphi\|_{-s} . \end{aligned}$$

Luego, usando otra vez el teorema A.6, se tiene que $H^{(2s+1)/4} \hookrightarrow L^{4/(1-2s)}$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg\varphi \, dx \right| \leq C \ \|f\|_{\frac{2s+1}{4}} \|g\|_{\frac{2s+1}{4}} \|\varphi\|_{-s}$$

y por lo tanto la prueba queda completa.

3. Considerando $p_2 = p_3 = p = 2$ y $p_1 = p_4 = +\infty$ en la proposición A.10

$$\begin{aligned} \|fg\|_s &\leq C \left(\|f\|_{L^\infty} \|J^s g\|_{L^2} + \|J^s f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_{L^\infty} \right) \end{aligned}$$

y por el teorema de inmersión de Sobolev

$$\begin{aligned} \|fg\|_s &\leq C\left(\|f\|_1 \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_1\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1} + \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1}\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1}\right) \end{aligned}$$

4. Es un resultado clásico ya que $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach para $s > n/2$ respecto a la operación multiplicación y aquí $n = 1$.

□

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene

Proposición 5.6. *Para* $s \geq -1$ *se tiene*

$$\|fg\|_s \leq C \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1}$$

Demostración. Si $-1 \leq s < -1/2$, entonces $0 \leq s+1 < 1/2$ y

$$\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_0 \|g\|_0 \leq C \ \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1} .$$

Si $-1/2 \leq s < 0$, entonces $1/2 \leq s+1 < 1$, $0 \leq \frac{2s+1}{4} < \frac{1}{4}$ y

$$\|fg\|_s \leq C \ \|f\|_{(2s+1)/4} \|g\|_{(2s+1)/4} \leq C \ \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1} .$$

Para $0 \leq s \leq 1/2$, ya se tiene el resultado deseado y para $s > 1/2$, la desigualdad dada por la proposición es consecuencia de que los espacios de Sobolev son un álgebra de Banach y de la inclusión continua de los espacios de Sobolev, es decir,

$$\|fg\|_s \leq C \|f\|_s \|g\|_s \leq C \|f\|_{s+1} \|g\|_{s+1}$$

□

5.2. Las ecuaciones integrales asociadas

Notemos que si (u,v) es solución de (5.5), como en el capítulo 2, (u,v) es solución del sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{cases} u(t) = e^{-tA}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\,d\tau \\ \\ v(t) = e^{tA}v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}F_2(u,v)(\tau)\,d\tau \ , \end{cases} \tag{5.9}$$

donde F_1 y F_2 se definen como en (5.6):

$$\begin{aligned} F_1(u,v) &= \frac{1}{4}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\Big\{J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 + 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)\Big\} \\ F_2(u,v) &= \frac{1}{4}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\Big\{J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 - 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)\Big\} \end{aligned}$$

Nos interesará saber si (5.9) tiene solución, pues ella será solución mild de (5.5). Para esto, aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Dado $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$ representamos

$$X_T^{s+1} = C\left([0,T] : H^{s+1}\right)^2$$

y definimos el espacio

$$\mathcal{E}(T) = \Big\{(u,v) \in X_T^{s+1} : \|(u,v)\|_{X_T^{s+1}} \leq 2\left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right)\Big\}$$

con norma definida por

$$\|(u,v)\|_{X_T^{s+1}}^2 = \left(\sup_{t\in[0,T]}\left\{\|u(t)\|_{s+1}\right\}\right)^2 + \left(\sup_{t\in[0,T]}\left\{\|v(t)\|_{s+1}\right\}\right)^2$$

o cualquier norma equivalente según convenga y con métrica

$$d\left((u_1,v_1),(u_2,v_2)\right) = \|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{X_T^{s+1}}$$

$(\mathcal{E}(T), d)$ es un espacio métrico completo. Para $(u,v) \in \mathcal{E}(T)$, definimos la aplicación $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2$ por

$$\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v))$$

con

$$\begin{cases} \Psi_1(u,v)(t) = e^{-tA}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\,d\tau \\ \\ \Psi_2(u,v)(t) = e^{tA}v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}F_2(u,v)(\tau)\,d\tau \end{cases} \qquad t \in [0,T] \tag{5.10}$$

Notemos que $F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0$

Probaremos que se tienen las hipótesis necesarias para aplicar el teorema del punto fijo.

Proposición 5.7. *Cualesquiera sean $T > 0$ y $s \geq 0$, la aplicación $\Psi(u,v)$ tiene rango $\mathcal{R}\left(\Psi(u,v)\right)$ contenido en $H^{s+1} \times H^{s+1}$.*

Demostración. Si $(u_0, v_0) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ entonces $\left(e^{-tA}u_0, e^{tA}v_0\right) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ pues H^{s+1} es el dominio del operador $\pm A$. Por otro lado, como $(u(t), v(t)) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ y teniendo en cuenta las definiciones de F_1 y F_2 dadas por (5.6), se tiene que

$$J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2,\ 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v) \in H^s \ \text{ para } \ s > \frac{1}{2}$$

donde se usa el hecho de que H^r es un álgebra de Banach para $r > \frac{1}{2}$.
Para $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ y por las proposiciones 5.4 y 5.5 se tiene que

$$J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 \in H^s,\ 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v) \in H^s,$$

respectivamente.
Luego, para $s \geq 0$, $F_i(u,v) \in H^{s+1}$ $i = 1,2$. De aquí que, $e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau) \in H^{s+1}$, con lo cual $\displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\,d\tau \in H^{s+1}$ y por lo tanto, $\Psi_1(u,v)(t) \in H^{s+1}$ cualquiera sea $t \in [0,T]$.
De igual manera, $\Psi_2(u,v)(t) \in H^{s+1}$ cualquiera sea $t \in [0,T]$. $\square$

Proposición 5.8. *Cualesquiera sean $T > 0$ y $s \geq 0$, $\Psi(u,v) \in X_T^{s+1}$ para todo $(u,v) \in \mathcal{E}(T)$.*

Demostración. Probaremos que $\Psi_1(u,v) \in C([0,T]:H^{s+1})$. La prueba para $\Psi_2(u,v)$ es análoga. En efecto, para $t_0 \in]0,T]$ supongamos que $t<t_0$

$$\begin{aligned}\|\Psi_1(u,v)(t)-\Psi_1(u,v)(t_0)\|_{s+1} \leq & \left\|e^{-tA}u_0 - e^{-t_0A}u_0\right\|_{s+1} \\ & + \int_0^t \left\|\left[e^{-(t-\tau)A} - e^{-(t_0-\tau)A}\right]F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} d\tau \\ & + \int_t^{t_0} \left\|e^{-(t_0-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} d\tau \end{aligned} \tag{5.11}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|\Psi_1(u,v)(t)-\Psi_1(u,v)(t_0)\|_{s+1} \leq & \left\|e^{-tA}u_0 - e^{-t_0A}u_0\right\|_{s+1} \\ & + \int_0^t \left\|\left[e^{-(t-\tau)A} - e^{-(t_0-\tau)A}\right]F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} d\tau \\ & + |t-t_0| \sup_{t\leq\tau\leq t_0} \left\|e^{-(t_0-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Por la continuidad de la aplicación $e^{-(\cdot)A}u_0 : [0,\infty[\longrightarrow H^{s+1}$, el primer sumando del segundo miembro de (5.12) converge a cero cuando $t \to t_0^-$.

En el teorema 5.3 se probó que el operador $\pm A$ es acotado y que genera el semigrupo de operadores lineales y acotados $\{e^{\pm tA}\}_{t\geq 0}$ sobre H^{s+1} y que para para $f \in H^{s+1}$

$$\left\|e^{\pm tA}f\right\|_{s+1} = \|f\|_{s+1} .$$

Entonces, para el segundo sumando de (5.12),

$$\begin{aligned}&\left\|\left[e^{-(t-\tau)A} - e^{-(t_0-\tau)A}\right]F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} \\ &\qquad \leq \left\|\left[e^{-(t-\tau)A} - e^{-(t_0-\tau)A}\right]\right\|_{\mathcal{L}(H^{s+1})} \|F_1(u,v)(\tau)\|_{s+1}\end{aligned}$$

Ahora, sean

$$h = -t + t_0 \ \text{ y } \ f_h(\tau) = \left[e^{-(-h+t_0-\tau)A} - e^{-(t_0-\tau)A}\right]F_1(u,v)(\tau).$$

Si $t \to t_0^-$ entonces $h \to 0^+$ y por la continuidad fuerte del semigrupo $f_h \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ con f_h medibles. Además,

$$\|f_h(\tau)\|_{s+1} \leq 2\,\|F_1(u,v)(\tau)\|_{s+1} = g(\tau)$$

donde $g(\tau)$ es integrable, pues $s+1 > 1/2$ y $H^{s+1} \hookrightarrow C_\infty^k$. Luego, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, el segundo sumando de (5.12) converge a cero cuando $t \to t_0^-$. El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto nos demuestra la continuidad de $\Psi_1(u,v)$ a la izquierda de t_0. La continuidad a la derecha de t_0 se prueba de manera similar. $\square$

Proposición 5.9. *Existe $T_0 \in]0,T]$ con $T_0 = T_0\left(\|u_0\|_{s+1}, \|v_0\|_{s+1}\right)$ tal que la aplicación Ψ definida sobre $\mathcal{E}(T_0)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Psi)$ contenido en $\mathcal{E}(T_0)$.*

Demostración. Sea $(u,v) \in \mathcal{E}(T)$, entonces para $0 \leq t \leq T$

$$\|\Psi(u,v)\|_{X_T{}^{s+1}} \leq \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \|\Psi_1(u,v)(t)\|_{s+1} + \|\Psi_2(u,v)(t)\|_{s+1} \Big\} \tag{5.13}$$

Luego, usando (5.10)

$$\begin{aligned}
\|\Psi_1(u,v)(t)\|_{s+1} &\leq \left\|e^{-tA}u_0\right\|_{s+1} + \int_0^t \left\|e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} d\tau \\
&= \|u_0\|_{s+1} + \int_0^t \|F_1(u,v)(\tau)\|_{s+1}\, d\tau
\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u,v)(\tau)\|_{s+1} \\
&\qquad = \frac{1}{4}\left\|\partial_x\left\{J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2 + 2(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)\right\}(\tau)\right\|_{s-1} \\
&\qquad \leq \frac{1}{4}\left\|J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u+v)]^2(\tau)\right\|_s + \frac{1}{2}\|[(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)](\tau)\|_s \\
&\qquad \leq C_\alpha\left\|[J_\alpha(u+v)]^2(\tau)\right\|_{s-1} + \frac{1}{2}\|[(u-v)\cdot J_\alpha(u+v)](\tau)\|_s
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las proposiciones 5.4 y 5.6

$$
\begin{aligned}
&\left\|F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} \\
&\quad \leq \; C_\alpha \left\|J_\alpha(u+v)(\tau)\right\|_s^2 + C_s \left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_{s+1} \left\|J_\alpha(u+v)(\tau)\right\|_s \\
&\quad \leq \; C_\alpha \left\|u(\tau)+v(\tau)\right\|_{s+1}^2 + C_{s,\alpha} \left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_{s+1} \left\|u(\tau)+v(\tau)\right\|_{s+1} \\
&\quad \leq \; C_{s,\alpha} \left(\left\|u(\tau)\right\|_{s+1} + \left\|v(\tau)\right\|_{s+1}\right)^2 \leq C_{s,\alpha} \left(\left\|u(\tau)\right\|_{s+1}^2 + \left\|v(\tau)\right\|_{s+1}^2\right)
\end{aligned}
$$

y como $(u,v) \in \mathcal{E}(T)$, por la definición del espacio $\mathcal{E}(T)$, se tiene

$$
\left\|F_1(u,v)(\tau)\right\|_{s+1} \leq C_{s,\alpha} \left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right)^2 \quad \forall\, \tau \in [0,T] \tag{5.15}
$$

Luego, en (5.14) resulta

$$
\left\|\Psi_1(u,v)(t)\right\|_{s+1} \leq \left\|u_0\right\|_{s+1} + C_{s,\alpha} \left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right)^2 T \;\; \forall\, t \in [0,T].
$$

De igual modo,

$$
\left\|\Psi_2(u,v)(t)\right\|_{s+1} \leq \left\|u_0\right\|_{s+1} + C_{s,\alpha} \left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right)^2 T \;\; \forall\, t \in [0,T].
$$

De ahí que, para todo $t \in [0,T]$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\Psi_1(u,v)(t)\right\|_{s+1} + \left\|\Psi_2(u,v)(t)\right\|_{s+1} \;\; \leq \;\; & \left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1} \\
& + C_{s,\alpha} \left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right)^2 T.
\end{aligned}
$$

Como

$$
C_{s,\alpha} \left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right) T \to 0 \text{ cuando } T \to 0^+
$$

tomando en la definición de límite, $\varepsilon = 1$, se sigue la existencia de algún $T_0 = T_0\left(\left\|u_0\right\|_{s+1}, \left\|v_0\right\|_{s+1}\right)$ tal que

$$
0 < T_0 \leq T < \delta_1 = \delta_1\left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right) \tag{5.16}
$$

donde la función $\delta_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$
\delta_1(x) = \frac{1}{C_{s,\alpha} x}
$$

De donde,

$$
\left\|\Psi_1(u,v)(t)\right\|_{s+1} + \left\|\Psi_2(u,v)(t)\right\|_{s+1} \leq 2\left(\left\|u_0\right\|_{s+1} + \left\|v_0\right\|_{s+1}\right) \;\; \forall\, t \in [0,T_0].
$$

Por lo tanto,

$$\sup_{t\in[0,T_0]}\left\{\|\Psi_1(u,v)(t)\|_{s+1}+\|\Psi_2(u,v)(t)\|_{s+1}\right\}\leq 2\left(\|u_0\|_{s+1}+\|v_0\|_{s+1}\right).$$

Estos es, $\mathcal{R}(\Psi)\subseteq\mathcal{E}(T_0)$. □

Proposición 5.10. *Existe* $\overline{T}\in[0,T_0]$ *con* $\overline{T}=\overline{T}\left(\|u_0\|_{s+1},\|v_0\|_{s+1}\right)$ *tal que la aplicación* $\Psi:\mathcal{E}(\overline{T})\longrightarrow\mathcal{E}(\overline{T})$ *es una contracción.*

Demostración. Sean (u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in\mathcal{E}(T_0)$

$$\begin{aligned}&\|\Psi(u_1,v_1)-\Psi(u_2,v_2)\|_{X_{T_0}^{s+1}}\\ &\qquad=\left\|\Big(\Psi_1(u_1,v_1)-\Psi_1(u_2,v_2),\Psi_2(u_1,v_1)-\Psi_2(u_2,v_2)\Big)\right\|_{X_{T_0}^{s+1}}\end{aligned}\tag{5.17}$$

Luego, usando (5.10)

$$\begin{aligned}&\|\Psi_1(u_1,v_1)(t)-\Psi_1(u_2,v_2)(t)\|_{s+1}\\ &\qquad\leq\int_0^t\|F_1(u_1,v_1)(\tau)-F_1(u_2,v_2)(\tau)\|_{s+1}\,d\tau\end{aligned}\tag{5.18}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}&\|F_1(u_1,v_1)(\tau)-F_1(u_2,v_2)(\tau)\|_{s+1}\\ &\leq\frac{1}{4}\Big\|\Big(J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u_1+v_1)]^2-J_\alpha^{-1}[J_\alpha(u_2+v_2)]^2\\ &\qquad+2(u_1-v_1)\cdot J_\alpha(u_1+v_1)-2(u_2-v_2)\cdot J_\alpha(u_2+v_2)\Big)(\tau)\Big\|_s\\ &\leq\frac{1}{4}\Big(\left\|[J_\alpha(u_1+v_1)]^2(\tau)-[J_\alpha(u_2+v_2)]^2(\tau)\right\|_{s-1}\\ &\quad+2\left\|[(u_1-u_2+v_2-v_1)\cdot J_\alpha(u_1+v_1)](\tau)\right\|_s\\ &\quad+2\left\|[(u_2-v_2)\cdot J_\alpha(u_1+v_1)-(u_2-v_2)\cdot J_\alpha(u_2+v_2)](\tau)\right\|_s\Big)\end{aligned}$$

Usando la identidad de diferencia de cuadrados y las proposiciones 5.4 y 5.6 pues $s-1\geq-1$

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u_1,v_1)(\tau)-F_1(u_2,v_2)(\tau)\|_{s+1}\\
&\quad\le \frac{1}{4}\left(\|(u_1-u_2)(\tau)\|_{s+1}+\|(v_1-v_2)(\tau)\|_{s+1}\right)\|(u_1+v_1+u_2+v_2)(\tau)\|_{s+1}\\
&\quad\quad+\frac{1}{2}\Big(\|(u_1-u_2)(\tau)\|_{s+1}+\|(v_2-v_1)(\tau)\|_{s+1}\Big)\|(u_1+v_1)(\tau)\|_{s+1}\\
&\quad\quad+\frac{1}{2}\|(u_2-v_2)(\tau)\|_{s+1}\Big(\|(u_1-u_2)(\tau)\|_{s+1}+\|(v_1-v_2)(\tau)\|_{s+1}\Big)
\end{aligned}$$

Como (u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in\mathcal{E}(T_0)$, por la definición del espacio $\mathcal{E}(T_0)$ y para todo $\tau\in[0,T_0]$

$$\begin{aligned}
\|u_i(\tau)+v_i(\tau)\|_{s+1} &\le \sqrt{2}\left(\|u_i(\tau)\|_{s+1}^2+\|v_i(\tau)\|_{s+1}^2\right)^{1/2}\\
&\le \sqrt{2}\,\|(u_i(\tau),v_i(\tau))\|_{X_{T_0}^{s+1}}\\
&\le 2\sqrt{2}\left(\|u_0\|_{s+1}+\|v_0\|_{s+1}\right)\ \text{para } i=1,2
\end{aligned}$$

y

$$\|(u_1-u_2)(\tau)\|_{s+1}+\|(v_1-v_2)(\tau)\|_{s+1}\le d\Big((u_1,v_1),(u_2,v_2)\Big)$$

Luego, para todo $\tau\in[0,T_0]$

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u_1,v_1)(\tau)-F_1(u_2,v_2)(\tau)\|_{s+1}\\
&\qquad\le C\left(\|u_0\|_{s+1}+\|v_0\|_{s+1}\right)d\Big((u_1,v_1),(u_2,v_2)\Big)
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, para todo $t\in[0,T_0]$, (5.18) queda como

$$\begin{aligned}
&\|\Psi_1(u_1,v_1)(t)-\Psi_1(u_2,v_2)(t)\|_{s+1}\\
&\qquad\le C\left(\|u_0\|_{s+1}+\|v_0\|_{s+1}\right)t\,d\Big((u_1,v_1),(u_2,v_2)\Big) \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

De igual forma, para todo $t\in[0,T_0]$

$$\begin{aligned}
&\|\Psi_2(u_1,v_1)(t)-\Psi_2(u_2,v_2)(t)\|_{s+1}\\
&\qquad\le C\left(\|u_0\|_{s+1}+\|v_0\|_{s+1}\right)t\,d\Big((u_1,v_1),(u_2,v_2)\Big) \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre $[0, T_0]$ en (5.19) y (5.20), (5.17) queda como

$$d\Big(\Psi(u_1, v_1), \Psi(u_2, v_2)\Big) \leq C \left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right) T_0 \; d\Big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\Big)$$

Ya que

$$C \left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right) T_0 \to 0 \text{ cuando } T_0 \to 0^+$$

tomando, $\varepsilon = 1$, en la definición de límite, se tiene la existencia de $\overline{T} = \overline{T}\left(\|u_0\|_{s+1}, \|v_0\|_{s+1}\right)$ tal que

$$0 < \overline{T} \leq T_0 < \delta_2 = \delta_2\left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right) \tag{5.21}$$

donde la función $\delta_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\delta_2(x) = \frac{1}{Cx}$$

De (5.16) y (5.21), notemos que los valores $\delta_1\left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right)$ y $\delta_2\left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right)$ son cotas para T_0 con $\overline{T} < T_0$. Por tanto, para probar la existencia de algún $\overline{T} > 0$ tal que Ψ sea una contracción en $\mathcal{E}(\overline{T})$, basta tomar

$$0 < \overline{T} < \widetilde{T} = \widetilde{T}\left(\|u_0\|_{s+1} + \|v_0\|_{s+1}\right)$$

donde la función $\widetilde{T} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como $\widetilde{T}(x) = \text{mín}\left\{\delta_1(x), \delta_2(x)\right\}$. □

Proposición 5.11. *Sea* $(u_0, v_0) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ *con* $s \geq 0$*. Entonces, existen* $\overline{T} = \overline{T}\left(\|u_0\|_{s+1}, \|v_0\|_{s+1}\right) > 0$ *y* $(u, v) \in C\left([0, \overline{T}] : H^{s+1}\right)^2$ *tal que* (u, v) *es solución única real del sistema de ecuaciones integrales (5.9).*

Demostración. De la proposición (5.10) y por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $(u, v) \in \mathcal{E}(\overline{T}) \subseteq C\left([0, \overline{T}] : H^{s+1}\right)^2$ tal que $\Psi(u, v) = (u, v)$, es decir,

$$\begin{cases} u(t) = e^{-tA}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A} F_1(u, v)(\tau)\, d\tau \\[2ex] v(t) = e^{tA}v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A} F_2(u, v)(\tau)\, d\tau \qquad \forall\, t \in [0, \overline{T}]. \end{cases}$$

Es claro que obtenemos solo existencia local de la solución del sistema de ecuaciones integrales (5.9), pues la unicidad vale solamente en $\mathcal{E}(\overline{T})$ y no en $C\left([0,\overline{T}]:H^{s+1}\right)^2$. Ahora, probemos la unicidad. Supongamos que (u_1,v_1) también es solución del sistema de ecuaciones integrales (5.9) en $C\left([0,\overline{T}_1]:H^{s+1}\right)^2$. Así, (u,v) y $(u_1,v_1)\in C\left([0,\overline{T}_2]:H^{s+1}\right)^2$ con $\overline{T}_2=\text{mín}\left\{\overline{T},\overline{T}_1\right\}$ y para todo $t\in[0,\overline{T}_2]$

$$\begin{cases} u(t)=e^{-tA}u_0-\displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F_1(u,v)(\tau)\,d\tau \\ v(t)=e^{tA}v_0-\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}F_2(u,v)(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u_1(t)=e^{-tA}u_0-\displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F_1(u_1,v_1)(\tau)\,d\tau \\ v_1(t)=e^{tA}v_0-\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}F_2(u_1,v_1)(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

Entonces, para todo $t\in[0,\overline{T}_2]$

$$\begin{cases} \|u(t)-u_1(t)\|_{s+1}\le\displaystyle\int_0^t \|F_1(u,v)(\tau)-F_1(u_1,v_1)(\tau)\|_{s+1}\,d\tau \\ \|v(t)-v_1(t)\|_{s+1}\le\displaystyle\int_0^t \|F_1(u,v)(\tau)-F_1(u_1,v_1)(\tau)\|_{s+1}\,d\tau \end{cases} \tag{5.22}$$

donde hemos usado el hecho de que el semigrupo $e^{\pm tA}$ es unitario.

En la prueba de la proposición anterior se probó que

$$\begin{aligned} &\|F_1(u,v)(\tau)-F_1(u_1,v_1)(\tau)\|_{s+1} \\ &\quad\le \frac{1}{4}\Big(\|(u-u_1)(\tau)\|_{s+1}+\|(v-v_1)(\tau)\|_{s+1}\Big) \\ &\qquad\Big(\|(u+v+u_1+v_1)(\tau)\|_{s+1}+2\,\|(u+v)(\tau)\|_{s+1}+2\,\|(u_1-v_1)(\tau)\|_{s+1}\Big) \end{aligned}$$

Como $(u(\tau),v(\tau))$ y $(u_1(\tau),v_1(\tau))\in H^{s+1}\times H^{s+1}$ para todo $\tau\in[0,\overline{T}_2]$, consideremos

$$N=\sup_{t\in[0,\overline{T}_2]}\left\{\|u(\tau)\|_{s+1},\|v(\tau)\|_{s+1},\|u_1(\tau)\|_{s+1},\|v_1(\tau)\|_{s+1}\right\}$$

Luego, para todo $\tau\in[0,\overline{T}_2]$ tenemos

$$\begin{aligned} &\|F_1(u,v)(\tau) - F_1(u_1,v_1)(\tau)\|_{s+1} \\ &\qquad \leq 3N\Big(\|(u-u_1)(\tau)\|_{s+1} + \|(v-v_1)(\tau)\|_{s+1} \Big) \end{aligned} \tag{5.23}$$

De igual forma, para todo $\tau \in [0, \overline{T}_2]$

$$\begin{aligned} &\|F_2(u,v)(\tau) - F_2(u_1,v_1)(\tau)\|_{s+1} \\ &\qquad \leq 3N\Big(\|(u-u_1)(\tau)\|_{s+1} + \|(v-v_1)(\tau)\|_{s+1} \Big) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Haciendo uso de las desigualdades (5.23) y (5.24) en (5.22), se tiene

$$\begin{aligned} &\|u(t) - u_1(t)\|_{s+1} + \|v(t) - v_1(t)\|_{s+1} \\ &\qquad \leq 6N \int_0^t (\|u(\tau) - u_1(\tau)\|_{s+1} + \|v(\tau) - v_1(\tau)\|_{s+1})\, d\tau \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Gronwall

$$\|u(t) - u_1(t)\|_{s+1} + \|v(t) - v_1(t)\|_{s+1} \leq 0 \ \ \forall\, t \in [0, \overline{T}_2].$$

Entonces, para todo $t \in [0, \overline{T}_2]$, $u(t) = u_1(t)$ y $(v(t) = v_1(t)$ con $\overline{T}_2 = \overline{T}_1 = \overline{T}$ $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior y de la proposición 5.2 tenemos

Teorema 5.12. *Sea* $(f_0, g_0) \in Y^s$ *con* $s \geq 0$. *Entonces, existen* $\overline{T} = \overline{T}\left(\|(f_0,g_0)\|_{Y^s}\right) > 0$ *y una función* $(f,g) \in C\left([0,\overline{T}] : Y^s\right)^2$ *tal que* (f,g) *es solución mild del problema (5.1).*

Apéndice A

Resultados Preliminares

Para introducirse en el mundo de las ecuaciones en derivadas parciales de evolución no lineales se necesita de conocimientos previos de transformada de Fourier, distribuciones temperadas, espacios de Sobolev, etc. Abarcar todos estos temas no es el objetivo de este trabajo, por ello sólo enunciaremos algunas definiciones y propiedades básicas de estos temas.

Teorema A.1 (Desigualdad de Young generalizada)**.** *Sean* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Si* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q} .$$

Demostración. Ver [14], pag. 241. □

Definición A.2. *El espacio de Sobolev de orden* $s \in \mathbb{R}$ *de tipo* L^2 *es el conjunto* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

con la norma $\|\cdot\|_s$ *definida como*

$$\|u\|_s = \|J^s u\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}.$$

Además, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.3.

i) *Si* $0 \leq s_1 \leq s_2$ *entonces* $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *continua y densamente. Además*

$$\forall u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{s_1} \leq \|u\|_{s_2} .$$

En particular, los elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ *para* $s \geq 0$ *son funciones medibles, más precisamente, son distribuciones temperadas que provienen de funciones en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.*

ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Hilbert separable con el producto interno definido para todo* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\langle u, v\rangle_s = \langle J^s, J^v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi.$$

Es decir, vía la transformada de Fourier

$$H^s(\mathbb{R}^n) = L^2\left(\mathbb{R}^n : \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi\right).$$

iii) *Para todo* $s \in \mathbb{R}$ *el espacio* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $H^s(\mathbb{R}^n)$*.*

iv) *Si* $s_1 \leq s \leq s_2$ *con* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ *y* $\theta \in [0, 1]$*, entonces*

$$\|u\|_s \leq \|u\|_{s_1}^{1-\theta} \|u\|_{s_2}^{\theta} .$$

Demostración. Ver [16], pag. 337. □

Teorema A.4 (de Inmersión de Sobolev). *Si* $s > \frac{n}{2} + k$ *entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está contenido continuamente en el espacio* $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ *de las funciones con* k *derivadas continuas que se anulan en el infinito, y*

$$\|u\|_{C^k_\infty} \leq C_s \|u\|_s .$$

en donde

$$\|u\|_{C^k_\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} .$$

Demostración. Ver [18], pag. 45. □

En consecuencia, si $n = 1$ y $s > \frac{1}{2} + k$,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_s \,, \quad \|\partial_x u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_s \,, \quad \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_s \,, \quad \cdots$$

Proposición A.5. *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado, y*

$$\|\partial^\alpha u\|_{s-|\alpha|} \leq \|u\|_s \,.$$

Teorema A.6. *Si $s \in]0, \frac{n}{2}[$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p = \dfrac{2n}{n-2s}$, es decir, $s = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right)$. Además, para $f \in H^s(\mathbb{R}^n), s \in]0, \frac{n}{2}[$,*

$$\|f\|_{L^p} \leq C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leq C \|f\|_s \,.$$

donde

$$D^s f = (-\,\triangle)^{s/2} f = \left((|\xi|)^s \widehat{f}\right)^\vee .$$

Demostración. Ver [18], pag. 47. □

Teorema A.7 (Álgebra de Banach)**.** *Si $s > \frac{n}{2}$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un* **álgebra** *respecto al producto de funciones, es decir, $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ siempre que $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y*

$$\|uv\|_s \leq C_s \|u\|_s \|v\|_s \,.$$

Demostración. Ver [18], pag. 48. □

Proposición A.8. *El dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ para cada $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Ver [14], pag. 302. □

Proposición A.9 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sean $k \in L^1([a,b])$, $k \geq 0$ y $f, g \in C([a,b])$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(\tau)k(\tau)\; e^{\int_\tau^t k(r)dr}\; d\tau, \;\; a \leq t \leq b.$$

En particular, si g es creciente, entonces se tiene

$$f(t) \leq g(t)\; e^{\int_a^t k(\tau)\; d\tau}, \;\; a \leq t \leq b.$$

Proposición A.10. *Sea $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ y $1 < p < \infty$. Entonces, existe $C = C(s, n, p) > 0$ tal que*

$$\|J^s(fg)\|_{L^p} \leq C\left(\|f\|_{L^{p_1}} \|J^s g\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}}\right)$$

y

$$\|[J^s, f]g\|_{L^p} \leq C\left(\|\partial f\|_{L^{p_1}} \left\|J^{s-1}g\right\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}}\right)$$

donde $p_2, p_3 \in]1, \infty[$ y p_1, p_4 son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$.

Demostración. Ver [?]. □

Proposición A.11. *Sean $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ que satisfacen*

$$\alpha_0 + \alpha_1 - \beta_1 \geq 1\;,\; \alpha_0 \geq \beta_1 \text{ ó } \alpha_1 \geq \beta_1$$

y

$$\alpha_0 \geq \beta_1 \text{ si } \alpha_1 = 1, \;\; \alpha_1 \geq \beta_1 \text{ si } \alpha_0 = 1.$$

Entonces, tenemos

$$\sup_{0 \leq t \leq +\infty} \int_0^t (1+t)^{\beta_1}(1+t-s)^{-\alpha_0}(1+s)^{-\alpha_1}\; ds < +\infty.$$

Demostración. Ver [?]. □

Proposición A.12. *Sea q una función continua de valor real y no negativa tal que existen constantes positivas α_0, α_1 y β_1 tales que*

$$q(t) \leq \alpha_0 + \alpha_1 q^{\beta_1}(t)$$

para cualquier t en un intervalo que contiene a $t = 0$, donde $\beta_1 > 1$. Si $q(0) \leq \alpha_0$ y

$$\alpha_0 \alpha_1^{(\beta_1 - 1)^{-1}} < \left(1 - \beta_1^{-1}\right) \beta_1^{-(\beta_1 - 1)^{-1}}$$

entonces q es acotado en el mismo intervalo y

$$q(t) < \alpha_0 \left(1 - \beta_1^{-1}\right).$$

Demostración. Ver [26]. □

Definición A.13. *Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X es una familia $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ tal que*

i) $\forall t \geq 0 : W(t) \in \mathcal{L}(X)$,

ii) $W(0) = I$, *el operador identidad sobre X,*

iii) $\forall s, t \geq 0 : W(s + t) = W(s)W(t)$, *y*

iv) para cada $x \in X$ fijo, $W(\cdot)x : [0, +\infty[\longrightarrow X$ es continua.

Teorema A.14. *Si $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo sobre X, existen $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que*

$$\forall t \geq 0 : \|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}.$$

Demostración. Ver [23], pag. 4. □

Definición A.15. *El generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X es la aplicación $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ definida por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{W(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

y

$$Ax = \partial_t^+ W(t)x|_{t=0}.$$

Teorema A.16. *Si A es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X, entonces para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ tenemos que $W(t)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \geq 0$, y*

$$\partial_t W(t)x = AW(t)x = W(t)Ax.$$

Demostración. Ver [23], pag. 4. □

Teorema A.17. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Si $A : Y \subseteq X \longrightarrow X$ es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $u_0 \in Y$ la función*

$$u : [0, +\infty[\longrightarrow Y,$$

definida por

$$u(t) = W(t)u_0,$$

es la única solución del problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además,

$$u \in C\left([0, +\infty[: Y\right) \cap C^1\left([0, +\infty[: X\right).$$

Demostración. Ver [23], pag. 104. □

Observación. Si en la definición A.13, i) y iii) se verifican para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y en iv), el dominio de la aplicación $W(\cdot)x$ es el conjunto de los números reales, la familia $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ define un grupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X. En este caso decimos que el grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es de tipo (M, w) si existen $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \; Me^{w|t|}.$$

Por otro lado, en la definición A.15, el límite se toma cuando $t \to 0$ y los teoremas A.16 y A.17 son válidos para todo $t \in \mathbb{R}$.

Bibliografía

[1] A. Adams. y F. Fournier. *Sobolev Spaces.* Volume 140, Second Edition. Pure and Applied Mathematics series, (2003)

[2] T. Arbogast, J. Bona. *Method of Applied Mathematics.* Department of Mathematics the University of Texas at Austin Fall and Spring Semesters, (2001).

[3] M. Agüero, J. Fujioka, L. Ceciliano. *La antisoledad de la onda solitaria.* Ciencia Ergo Sum, julio, volumen 9, pp. 197-201, Universidad Autónoma del Estado de México, (2002).

[4] J. Bergh, J. Löfström. *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, N. York, (1970), 139-142.

[5] V. Bisognin. *On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of a Nonlinear Dispersive System of Benjamin-Bona-Mahony's Type.* Bollettino U.M.I., 10-B, 99-128, (1996).

[6] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Royal Soc. London, series A, 272, 47-48, (1972).

[7] V. Bisognin y G. P. Menzala. *Decay rates of the solutions of dispersive equations.* Proccedings of the Royal Society of Edinburgh, 124A, 1231-1246, (1994).

[8] E. Bisognin, V. Bisognin y G. P. Menzala. *On the asymptotic Behaviour in the time of the solutions of a coupled system of kdV Equations.* Laboratorio Nacional de Computación científica, N°09/95.

[9] J. Bona, H. Chen. *Solitary waves in nonlinear dispersive systems.* Discrete and continuous dynamical systems B, 2 (2002).

[10] J. Bona, M. Chen, J. C. Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II. The nonlinear theory.* Institute of Physics Publishing, Nonlinearity 17, 925-952, (2004).

[11] J. Bona, R. Smith. *A model for the two-way propagation of water waves in a channel.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79-15,167-182, (1976).

[12] T. Cazenave, A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford University Press, New York (1998).

[13] J. Diestel, J.J. Uhl jr. *Vector measures.* Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc. (1977).

[14] G. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* A Wiley-Interscience Publication, U.S.A, (1984).

[15] R. J. Iório, V. Iório. *Fourier analysis and partial diferential equations.* Cambridge University Press, New York, (2001).

[16] R. J. Iório, V. Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, (1988).

[17] R.J. Iório Jr., W.L.V. Nunes. *Introdução à Equações de Evolução Não Lineares.* 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1991).

[18] F. Linares y G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer, (2009).

[19] Jan Mikusinski. *The Bochner integral.* Academic Press, New York, 233 pag. (1978).

[20] W. Nunes. *O problema de Cauchy global para equações dispersivas com coeficientes dependentes do tempo.* Tesis de Doctorado, IMPA, (1991).

[21] J. Montealegre, S. Petrozzi. *Operadores dispativos maximales.* Informe de investigación, N°2 Serie B, PUCP, (1998).

[22] J. Montealegre, S. Petrozzi. *Semigrupos de operadores lineales y ecuaciones de evolución semi-lineales.* Informe de investigación, N°6 Serie B, PUCP, (1999).

[23] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematica Sciences, 44. Springer - Verlag, New York, 1983. 279 pp. ISBN:0-387-90845-5.

[24] C. Rodríguez. *Deducción de la Ecuación de Korteweg-de Vries.* Pro Mathematica, vol. XXIII, N° 45-46, pp. 79-104, PUCP, (2009).

[25] Serge Lang. *Introducción al Análisis Matemático.* Addison-Wesley. Ibeoroamericana S.A. Wilmington, Delaware, E.U.A., (1990).

[26] W. Strauss. *Decay and asymptotics for* $Du = F(u)$. J. Functional Analysis, 2 (1968) 409-457.

[27] M. E. Taylor. *Partial differential equations III. Non Linear equations.* Springer-Verlag, N. York, (1996).

[28] L. Vega G. *La ola solitaria.* La Gaceta de la RSME: Volumen 4, Número 3, pp. 528-566, (2001).

Jenniel Ruiz Herrera
jenniel.ruiz@pucp.edu.pe