

## CAPITULO 1.- FLUJO PERMANENTE Y UNIFORME EN CANALES

### 1.1 Generalidades

#### 1.1.1 Flujo en canales y tuberías.

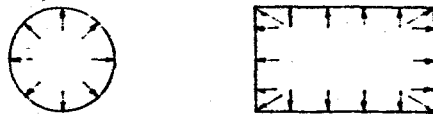
Las principales diferencias entre canales y tuberías son las siguientes:

- \* en el canal el líquido tiene una superficie libre que está en contacto con la atmósfera; en la tubería el líquido está confinado y sometido a una cierta presión (a veces esta presión es negativa).
- \* en el canal el conducto puede ser abierto o cerrado; en la tubería el conducto es siempre cerrado.
- \* en el canal el líquido escurre por gravedad; en la tubería el líquido escurre porque hay un gradiente de energía.

Cuando se dice "tubería" queda entendido que el conducto es circular. Las formas más comunes de canales son la trapezoidal, la rectangular, la triangular y la circular.



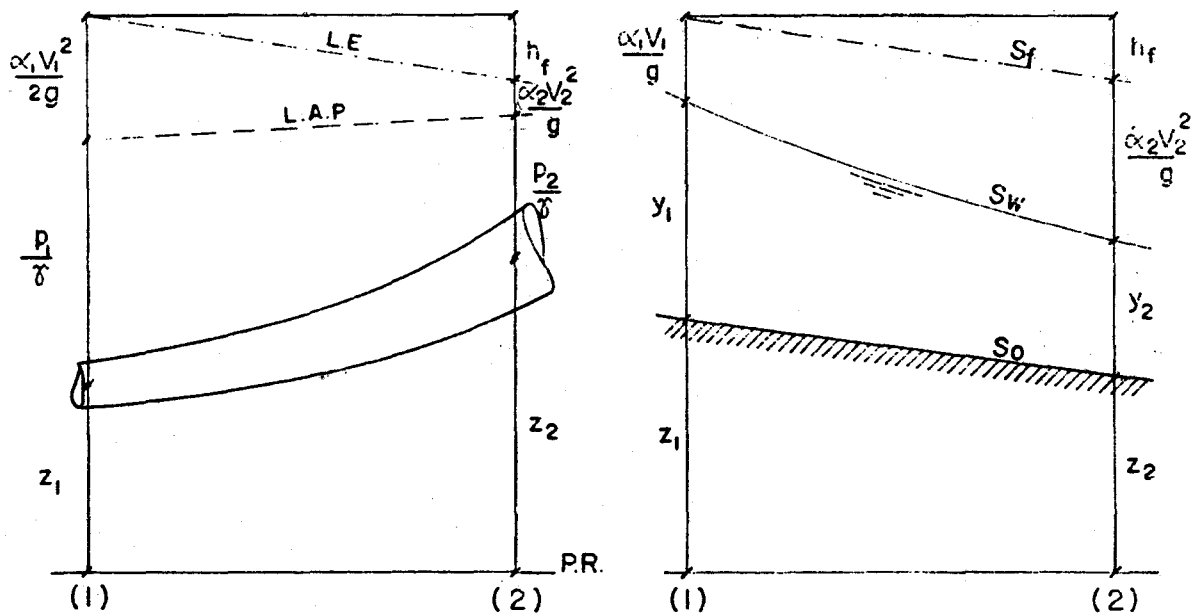
Ejemplos de canales



Ejemplos de tuberías

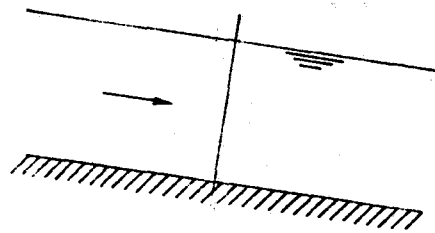
Comparación entre el flujo en una tubería y el flujo en un canal:

- $S_0$  ... pendiente del fondo
- $S_w$  ... pendiente de la superficie libre del agua
- $S_f$  ... pendiente de la línea de energía.



### 1.1.2 Tipos de escurrimiento en canales.

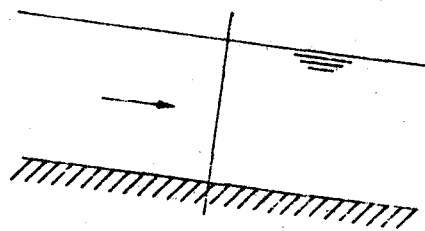
Flujo permanente y flujo no permanente. Cuando el flujo es de tipo permanente, en una sección del canal permanecen constantes con respecto al tiempo las características hidráulicas del flujo (caudal, velocidad media, tirante, etc).



Se simboliza:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Cuando el flujo es de tipo no permanente, en una sección del canal no permanecen constantes con respecto al tiempo las características hidráulicas del flujo (caudal, velocidad media, tirante, etc).

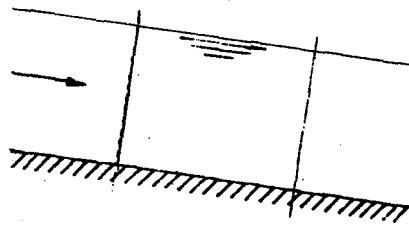


Se simboliza:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

Flujo uniforme y flujo variado. El flujo permanente puede ser uniforme o variado.

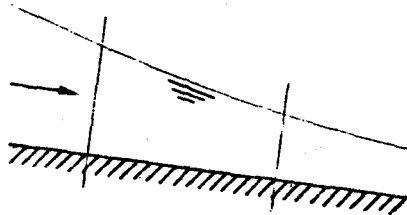
En el flujo uniforme, a lo largo del canal permanecen constantes las características hidráulicas del flujo.



Se simboliza:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

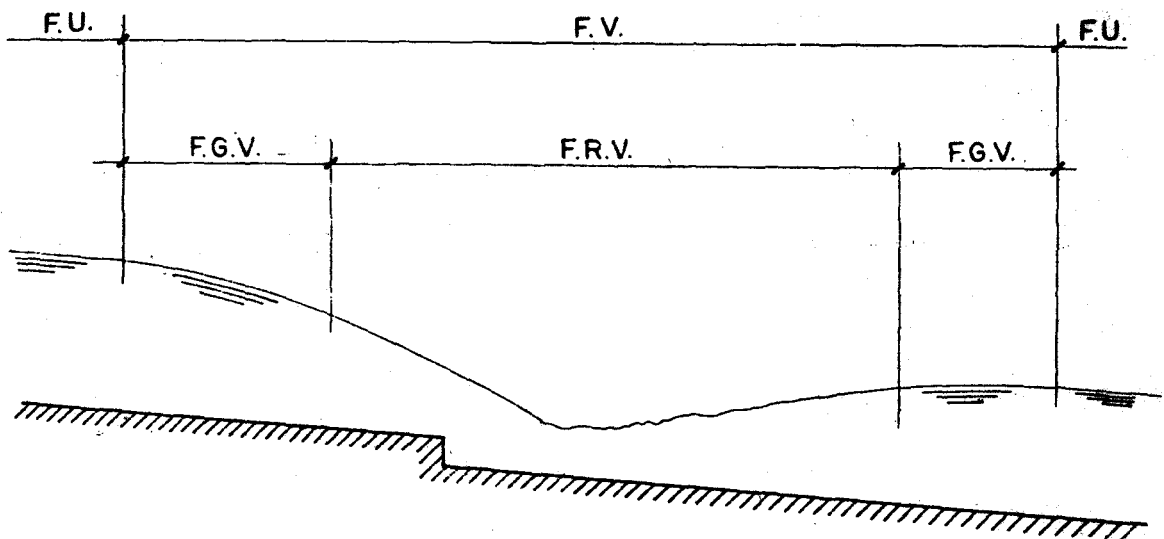
En el flujo variado, a lo largo del canal no permanecen constantes las características hidráulicas del flujo.



Se simboliza:

$$\frac{\partial V}{\partial s} \neq 0$$

En el flujo variado la variación puede ser gradual o brusca, dando lugar al flujo gradualmente variado y al flujo rápidamente variado, respectivamente, como puede apreciarse en el esquema que sigue.



NOTA: En el flujo no permanente también se presentan los flujos gradualmente variado y rápidamente variado.

Flujo laminar, turbulento y transicional. De manera similar a lo que ocurre en las tuberías, en los canales el flujo es de uno de estos tres tipos.

El flujo laminar tiene lugar si predominan las fuerzas viscosas sobre las

de inercia. Se presenta muy raramente, cuando la velocidad del agua en el canal es extremadamente pequeña. El número de Reynolds ( $R_e$ ) referido al radio hidráulico resulta menor que 500.

El flujo turbulento tiene lugar si predominan las fuerzas de inercia sobre las viscosas. El valor del  $R_e$  a partir del cual el flujo es decididamente turbulento no tiene un valor definido, pero si se toma como referencia el valor 4,000 que rige para tuberías el valor correspondiente en canales resulta 1,000.

Como consecuencia, el flujo es transicional si tiene lugar con valores de  $R_e$  comprendidos entre 500 y 1,000.

Flujo subcrítico, crítico y supercrítico. El efecto de la gravedad en los canales viene indicado por el valor que toma el número de Froude ( $F_r$ ) referido a la profundidad hidráulica.

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

$$D \text{ (profundidad hidráulica)} = \frac{\text{área mojada}}{\text{ancho superficial}} = \frac{A}{T}$$

El flujo se denomina crítico si tiene lugar con un  $F_r = 1$ , subcrítico con un valor  $F_r < 1$  y supercrítico con un valor  $F_r > 1$ . En el flujo subcrítico la gravedad juega un rol más importante que en los otros estados de flujo.

El estudio de las características físicas del flujo en los tres estados indicados no corresponde hacerlo ahora. Estos conceptos serán recién tratados en el capítulo 3.

### 1.1.3 Tipos de canales

Naturales y artificiales. Atendiendo a su origen los canales pueden ser naturales y artificiales. Los canales naturales incluyen todos los cursos de agua de la superficie terrestre, en toda su amplia gama de tamaños; es decir desde los arroyos más pequeños hasta los ríos más grandes. Su estudio corresponde a la rama de la hidráulica aplicada conocida como Hidráulica de Ríos o Ingeniería de Ríos.

Los canales artificiales son todos aquellos construidos por el hombre. Comprenden principalmente:

- \* los canales de conducción en los proyectos de irrigación, de centrales hidroeléctricas, de abastecimiento de agua potable, etc;
- \* los canales de navegación;
- \* los canales de alcantarillado y de drenaje (urbano, vial y agrícola);
- \* los canales de corriente construidos con fines de estudio experimental en laboratorios.

Abiertos y cerrados. Son canales cerrados:

- \* los canales de alcantarillado;
- \* los canales de drenaje urbano y algunos de drenaje agrícola;
- \* los tramos de los canales de conducción en túnel;
- \* algunos tramos de los canales de conducción con fines de protección.

Todos los demás canales son descubiertos.

Canal prismático y no prismático. Se llama canal prismático a aquél construido con sección transversal constante y pendiente de fondo también constante. De no ser así, el canal es no prismático. A menos que se especifique lo contrario, los canales estudiados en este texto son canales prismáticos.

#### 1.1.4 Geometría del canal

Se llama "sección del canal" a la sección tomada normalmente a la dirección del flujo y "sección vertical" del canal a la sección vertical que pasa por el fondo de la sección del canal.

Las secciones de los canales naturales son en general muy irregulares. Las secciones de los canales artificiales son de forma geométrica regular siendo las formas geométricas más utilizadas las siguientes:

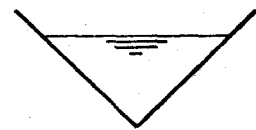
- \* trapezoidal, en los canales de conducción excavados (por razones de estabilidad de las paredes);
- \* rectangular, en los canales de concreto o de madera. También en los canales pequeños excavados en roca o revestidos de concreto o de albañilería de piedra;
- \* triangular, en los pequeños canales de drenaje vial (cunetas);
- \* circular, en los canales de alcantarillado y de drenaje urbano y agrícola de tamaño pequeño y mediano. También en los canales en túnel;
- \* ovoide, de herradura y similares, en los canales de alcantarillado de tamaño grande a fin de permitir el ingreso de un hombre.



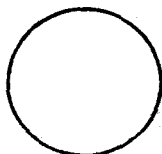
trapezoidal



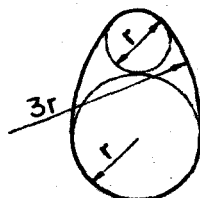
rectangular



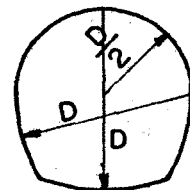
triangular



circular

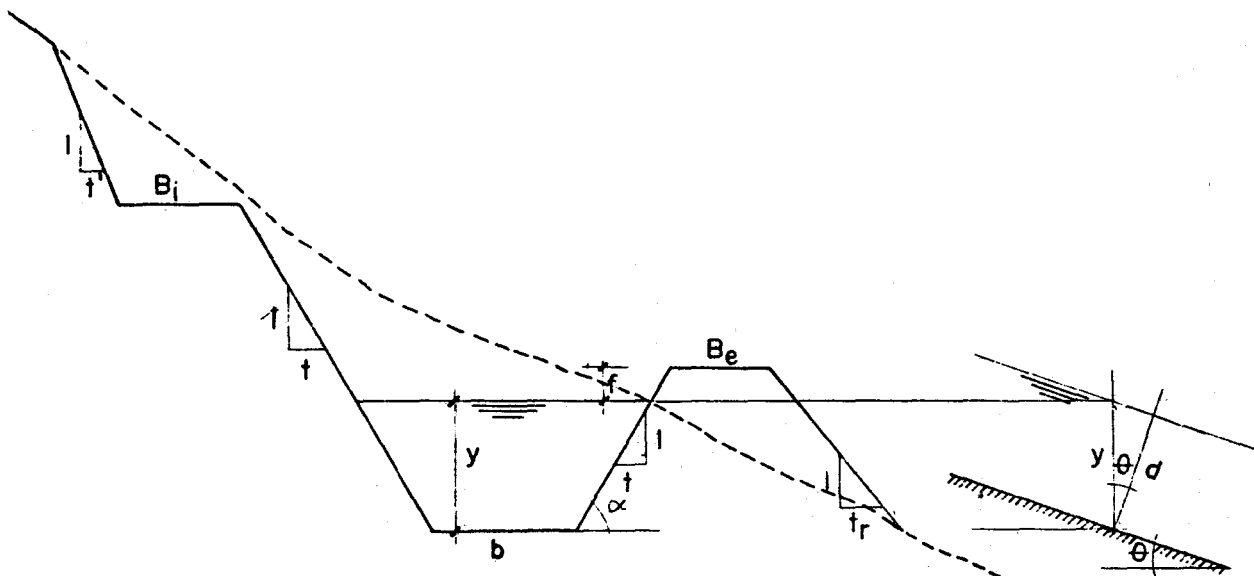


ovoide



herradura

La geometría de la sección del canal queda definida por varios elementos. La descripción será referida a la sección vertical de un canal trapezoidal.



- y ... profundidad del flujo
- d ... profundidad de la sección  
Se verifica  $d = y \cdot \cos \theta$   
 $d \approx y$  en los canales de pequeña pendiente.
- cota de la S.L. = cota del fondo + y
- b ... ancho del fondo
- t ... talud de la pared =  $\cotg \alpha = \frac{\Delta H}{\Delta V}$
- T ... ancho superficial =  $b + 2 ty$
- A ... área mojada =  $by + ty^2$
- P ... perímetro mojado =  $b + 2y \sqrt{1 + t^2}$
- R ... radio hidráulico =  $\frac{A}{P}$
- D ... profundidad hidráulica =  $\frac{A}{T}$
- f ... freeboard o margen libre
- Be ... ancho de la banqueta exterior
- Bi ... ancho de la banqueta interior

El freeboard es la distancia vertical medida entre la superficie libre del agua y el borde del canal. Las banquetas se construyen para facilitar las labores de operación y mantenimiento de los canales.

### 1.1.5 Valor de los coeficientes $\alpha$ y $\beta$

Como resultado de la distribución no uniforme de velocidades en la sección de un canal, los valores de  $\alpha$  (coeficiente de Coriolis) y  $\beta$  (coeficiente de Boussinesq) son mayores que la unidad. Para propósitos prácticos rigen los valores propuestos por Kolupaila (referencia 5):

	Valor de $\alpha$			Valor de $\beta$		
	mín.	prom.	máx.	mín.	prom.	máx.
Canales artificiales	1.10	1.15	1.20	1.03	1.05	1.07
Canales naturales	1.15	1.30	1.50	1.05	1.10	1.17
Ríos crecidos	1.50	1.75	2.00	1.17	1.25	1.33

Para canales artificiales de regular tamaño y alineamiento recto, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son sólo ligeramente mayores que la unidad, razón por la cual en el presente texto se supondrá  $\alpha = \beta = 1$  salvo indicación en contrario.

## 1.2 Fórmulas

### 1.2.1 Fórmula de Colebrook-White

La pérdida de energía por fricción en el flujo permanente y uniforme en tuberías y canales se determina con la fórmula de Darcy-Weisbach, que escrita en términos del radio hidráulico es:

$$h_f = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g}$$

$$(R = \text{radio hidráulico} = \frac{\text{área mojada}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{A}{P})$$

En canales con este tipo de flujo se cumple que la pendiente de la línea de energía ( $S_f$ ) es igual a la pendiente de la superficie libre ( $S_w$ ) y a la pendiente del fondo ( $S_0$ ), por lo que se acostumbra escribir  $S$ , sin subíndice:

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{f V^2}{8g R} \quad (1.1)$$

Para el flujo laminar se cumple la relación:

$$f = \frac{64}{Re}$$

$$(Re = \text{número de Reynolds} = \frac{V 4 R}{\nu})$$

Para el flujo turbulento se cumple la fórmula de Colebrook-White, que escrita en términos del radio hidráulico es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{K}{14.8 R} + \frac{2.51 \nu}{4 R V \sqrt{f}} \right) \quad (1.2)$$

Eliminando  $f$  de (1.1) y (1.2):

$$V = - \sqrt{32 g R S} \log \left| \frac{K}{14.8 R} + \frac{1.255 \nu}{R \sqrt{32 g R S}} \right| \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Fórmula de Chezy

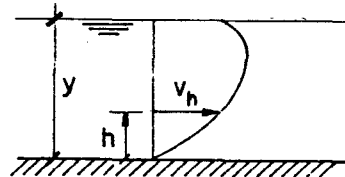
Rige para el flujo permanente y uniforme, turbulento, en tuberías y canales. Las siguientes relaciones han sido tomadas de la referencia 1 de la Bibliografía.

Para contornos hidráulicamente lisos

- en canales anchos:

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ell \frac{104 h}{\delta} \quad \dots \text{distribución de velocidades}$$

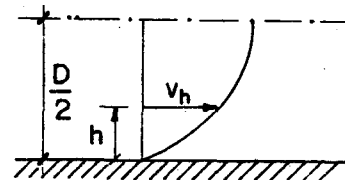
$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{38.3 R}{\delta} \quad \dots \text{velocidad media}$$



- en tuberías:

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ell \frac{104 h}{\delta} \quad \dots \text{distribución de velocidades}$$

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{46.4 R}{\delta} \quad \dots \text{velocidad media}$$



Tomando un valor medio del coeficiente numérico se puede obtener la fórmula única de velocidad media para canales anchos y tuberías:

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{42 R}{\delta} \quad (1.4)$$

Para contornos hidráulicamente rugosos

- en canales anchos:

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ell \frac{30 h}{K}$$

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{11.0 R}{K}$$

- en tuberías:

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ell \frac{30 h}{K}$$

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{13.4 R}{K}$$

y tomando un valor medio del coeficiente numérico se puede obtener la fórmula única de velocidad media para canales anchos y tuberías:

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{12 R}{K} \quad (1.5)$$

Para contornos en transición entre lisos y rugosos se emplea la fórmula que resulta de combinar (1.4) y (1.5):

$$V = \frac{v_*}{x} \ell \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \quad (1.6)$$

reemplazando  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R S}{\rho}} = \sqrt{g R S}$

se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{g R S}}{x} \ell \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}}$$

$$V = \frac{\sqrt{g}}{0.4} \ell \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \sqrt{R S}$$

$$V = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \sqrt{R S}$$

es decir:

$$V = C \sqrt{R S} \quad \dots \text{ecuación de Chezy} \quad (1.7)$$

$$C = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \dots \text{coeficiente de Chezy (L}^{1/2} \text{T}^{-1}) \quad (1.8)$$

V = velocidad media

R = radio hidráulico

S = pendiente de la línea de energía o pérdida de energía por unidad de longitud =  $\frac{h_f}{L}$

En la ecuación (1.8) se puede apreciar que si el contorno trabaja como liso la rugosidad pierde significación, se ignora el término  $\frac{K}{2}$  y resulta la ecuación (1.4); y que si el contorno trabaja como rugoso la subcapa laminar pierde significación, se ignora el término  $\frac{\delta}{7}$  y resulta la (1.5).

Coefficiente de rugosidad: Un contorno se comporta,

\* como hidráulicamente liso cuando:

$$K \leq 0.4 \delta$$

$$\text{o} \quad \frac{v_* K}{\nu} \leq 5$$

\* como hidráulicamente rugoso cuando:

$$K \geq 6 \delta$$

$$o \quad \frac{v_* K}{v} \geq 70$$

y en transición cuando:

$$0.4 \delta < K < 6 \delta$$

$$o \quad 5 < \frac{v_* K}{v} < 70$$

Los valores de K se obtienen del Apéndice A3 de la referencia 1.

Relación entre f y C.- Combinando la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g}$$

con la de Chezy:

$$V = C \sqrt{RS}$$

$$\text{se obtiene: } C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Fórmula de Manning

Es una fórmula empírica que rige para el flujo permanente y uniforme, turbulento, en tuberías y canales. Se obtiene a partir de la fórmula de Chezy reemplazando:

$$C = \frac{R^{1/6}}{n}$$

En unidades métricas se obtiene:

$$V = \frac{S^{1/2} R^{2/3}}{n} \quad (1.10)$$

(n ... coeficiente de rugosidad de Manning)

Se conviene en suponer que n es adimensional por lo que en la fórmula 1.10 habrá que aceptar la existencia de un coeficiente numérico de valor uno y unidades  $m^{1/3}/seg$ .

En efecto:

$$|V| = (L^{1/3} T^{-1}) L^{2/3}$$

$$|V| = L T^{-1} \quad \dots \text{BIEN.}$$

En unidades del sistema inglés la fórmula de Manning resulta:

$$V = \frac{3.28^{1/3} S^{1/2} R^{2/3}}{n}$$

$$V = \frac{1.486 S^{1/2} R^{2/3}}{n} \quad (1.11)$$

siendo las unidades del coeficiente numérico  $\text{pie}^{1/3}/\text{seg.}$

Desde el punto de vista práctico no debe haber ninguna duda. En unidades métricas la fórmula de Manning es la 1.10, en unidades del sistema inglés es la 1.11 y en ambos casos rige la tabla de valores  $n$  del apartado 2.1.

#### 1.2.4 Otras fórmulas

Sólo como información se presentan a continuación dos fórmulas empíricas que rigen también para el flujo permanente y uniforme, turbulento, en canales.

Fórmula de Ganguillet-Kutter. Sugiere para evaluar el coeficiente  $C$  de Chezy la siguiente expresión en unidades métricas:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{S}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{S}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}$$

( $n$  ... es el mismo coeficiente de rugosidad de Manning)

Fórmula de Bazin. Sugiere para evaluar el coeficiente  $C$  de Chezy la siguiente expresión en unidades métricas:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$$

( $m$  ... coeficiente de rugosidad de Bazin)

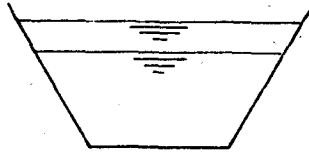
#### Comentarios

1) Para la solución de los diversos problemas de flujo permanente y uniforme, turbulento, en canales se dispone de tres fórmulas:

- \* Colebrook-White
- \* Chezy
- \* Manning

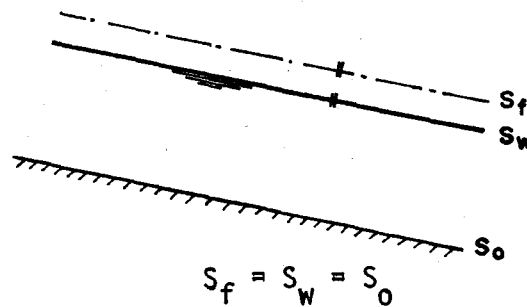
En el país las dos últimas son las que usualmente se aplican, por lo que en este texto serán utilizadas indistintamente.

2) Tanto el valor del coeficiente  $C$  de Chezy (1.8) como el del coeficiente  $n$  de Manning (1.10) varían con el valor del área mojada en la sección del canal:



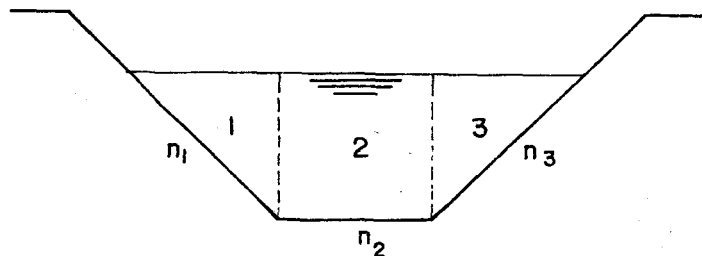
Sin embargo es práctica usual, debido a que dicha variación es muy pequeña, considerar constantes los valores  $C$  y  $n$  para una sección definida de canal dentro de una variación moderada de profundidades de agua.

- 3) Tratándose de flujo permanente y uniforme las líneas de energía, de superficie libre y de fondo son paralelas entre sí. Es decir:



por lo que se acostumbra prescindir del subíndice  $f$  y escribir  $S$  en las fórmulas de Chezy y de Manning, dejando  $S_f$  sólo para cuando sea necesario explicitar que se trata de la pendiente de la línea de energía.

### 1.3 Canales de rugosidad compuesta



En un canal de rugosidad compuesta es necesario calcular un valor equivalente  $n$  para el perímetro completo, y usar este valor equivalente para el cálculo del flujo en la sección total.

Método de las velocidades iguales. Consiste en suponer que cada parte del área mojada (1, 2, 3) tiene la misma velocidad media, la cual es al mismo tiempo igual a la velocidad media del área mojada total.

$$V_1 = V_2 = \dots = V_N = V$$

Bajo estas hipótesis se obtiene:

$$n = \frac{\left| \sum_{i=1}^N (P_i n_i^{1.5}) \right|^{2/3}}{P^{2/3}} \quad (1.12)$$

Método de la suma de fuerzas. Consiste en suponer que la fuerza total resistiendo el escurrimiento (es decir  $K V^2 P L$ , ver referencia 1) es igual a la suma de las fuerzas en las áreas parciales.

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_N$$

Bajo esta hipótesis se obtiene:

$$n = \frac{\left| \sum_1^N (P_i n_i^2) \right|^{1/2}}{P^{1/2}} \quad (1.13)$$

Método de la suma de caudales. Consiste en suponer que el gasto total es igual a la suma de los gastos de las áreas parciales.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

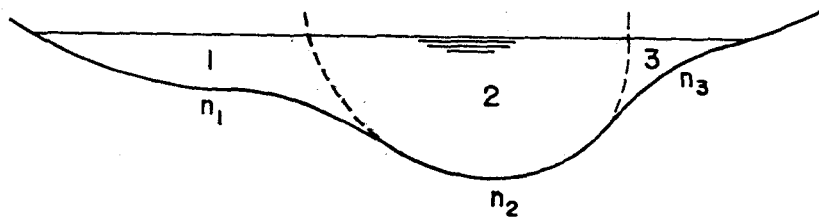
Bajo esta hipótesis se obtiene:

$$n = \frac{P R^{5/3}}{\sum_1^N \left( \frac{P_i R_i^{5/3}}{n_i} \right)} \quad (1.14)$$

Los  $R_i$  son los radios hidráulicos de las áreas parciales. Con fines prácticos se puede suponer:  $R_1 = R_2 = \dots = R_N = R$ .

#### 1.4 Canales de sección compuesta

Un ejemplo simple que ilustra esta situación es la de un río sujeto a crecidas estacionales.



El cauce completo consta de uno principal central y dos laterales. Los canales laterales son normalmente más rugosos que el caudal principal de modo que la velocidad media en el canal principal es mayor que la velocidad media en los laterales. La fórmula de Manning puede ser aplicada separadamente a cada subsección para determinar las descargas parciales. La descarga total es igual a la suma de estas descargas y la velocidad media para la sección total es igual a la descarga total dividida entre el área mojada total.

Cuestión previa:

$$Q = AV = A \frac{S^{1/2} R^{2/3}}{n} = \frac{A R^{2/3}}{n} S^{1/2} = K S^{1/2}$$

Supongamos que  $V_1, V_2, \dots, V_N$  son las velocidades medias en las secciones parciales de áreas mojadas respectivas  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_N$ , y digamos que  $V$  es la velocidad media en la sección total del área mojada  $A$ .

$$V_1 \cdot \Delta A_1 = K_1 S^{1/2}$$

$$V_2 \cdot \Delta A_2 = K_2 S^{1/2}$$

⋮

$$V_i \cdot \Delta A_i = K_i S^{1/2}$$

$$Q = V_1 \cdot \Delta A_1 + V_2 \cdot \Delta A_2 + \dots + V_i \cdot \Delta A_i$$

$$Q = (K_1 + K_2 + \dots + K_i) S^{1/2}$$

$$Q = \left( \sum_i^N K_i \right) \cdot S^{1/2}$$

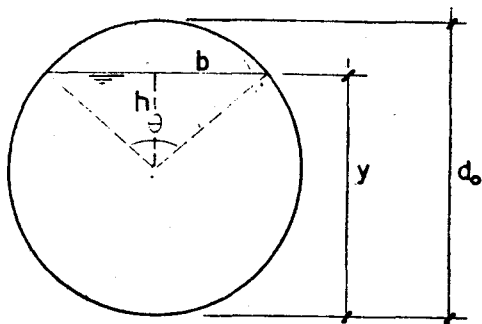
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left( \sum_i^N K_i \right) S^{1/2}}{A}$$

Los valores  $\alpha, \beta$  son también diferentes en las secciones parciales y en la sección total. Para esta última:

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\sum V^3 \cdot \Delta A}{V^3 A} = \frac{\sum \left( \frac{\alpha_i K_i^3}{\Delta A_i^2} \right)}{\frac{(\sum K_i)^3}{A^2}} \quad (1.15)$$

$$\beta = \frac{\int V^2 dA}{V^2 A} = \frac{\sum V^2 \cdot \Delta A}{V^2 A} = \frac{\sum \left( \frac{\beta_i K_i^2}{\Delta A_i} \right)}{\frac{(\sum K_i)^2}{A}} \quad (1.16)$$

### 1.5 Flujo en conductos circulares parcialmente llenos



En lo que sigue  $\theta$  está en radianes

$$A = \frac{\pi d_o^2}{4} - \text{sector} + \text{triángulo}$$

$$\frac{\text{sector}}{\theta} = \frac{\pi d_o^2}{2\pi} \rightarrow \text{sector} = \frac{\pi d_o^2}{8\pi} \theta = \frac{\theta}{8} d_o^2$$

$$\text{triángulo} = 2 \frac{b}{2} \cdot h = \frac{d_o}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d_o}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{d_o^2}{4} \text{sen } \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen } \theta}{8} d_o^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} d_o^2 - \frac{\theta}{8} d_o^2 + \frac{\text{sen } \theta}{8} d_o^2 = \frac{1}{4} \left( \pi - \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2} \right) d_o^2 = C_A d_o^2$$

$$P = \pi d_o - \text{arco}$$

$$\frac{\text{arco}}{\theta} = \frac{\pi d_o}{2\pi} \rightarrow \text{arco} = \frac{\theta}{2} d_o$$

$$P = \pi d_o - \frac{\theta}{2} d_o = \left( \pi - \frac{\theta}{2} \right) d_o = C_P d_o$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\frac{1}{4} \left( \pi - \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2} \right) d_o^2}{\left( \pi - \frac{\theta}{2} \right) d_o} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\text{sen } \theta}{2\pi - \theta} \right) d_o = C_R d_o$$

$$T = 2b = 2 \frac{d_o}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2} = \text{sen } \frac{\theta}{2} d_o = C_T d_o$$

$$Y = \frac{d_o}{2} + h = \frac{d_o}{2} + \frac{d_o}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2} \right) d_o = C_Y d_o$$

Cada coeficiente  $C$  depende sólo del ángulo  $\theta$ . Pero a cada valor de  $\theta$  co-

responde un valor de la relación  $Y/d_0$ . Por eso se acostumbra tabular según el formato adjunto.

$Y/d_0$	$C_A$	$C_R$	$C_T$	$\theta$ rad.	$Y/d_0$	$C_A$	$C_R$	$C_T$	$\theta$ rad.
0.00	0.0000	0.000	0.000	6.2832	0.50	0.393	0.250	1.000	3.1416
0.01	0.0013	0.007	0.199	5.8825	0.51	0.403	0.253	1.000	3.1016
0.02	0.0037	0.013	0.280	5.7156	0.52	0.413	0.256	0.999	3.0616
0.03	0.0069	0.020	0.341	5.5869	0.53	0.423	0.259	0.998	3.0215
0.04	0.0105	0.026	0.392	5.4778	0.54	0.433	0.262	0.997	2.9814
0.05	0.0147	0.033	0.436	5.3811	0.55	0.443	0.265	0.995	2.9413
0.06	0.0192	0.039	0.475	5.2933	0.56	0.453	0.268	0.993	2.9010
0.07	0.0242	0.045	0.510	5.2121	0.57	0.462	0.270	0.990	2.8607
0.08	0.0294	0.051	0.543	5.1362	0.58	0.472	0.273	0.987	2.8202
0.09	0.0350	0.057	0.572	5.0644	0.59	0.482	0.275	0.984	2.7796
0.10	0.0409	0.063	0.600	4.9962	0.60	0.492	0.278	0.980	2.7389
0.11	0.0470	0.070	0.626	4.9309	0.61	0.502	0.280	0.975	2.6980
0.12	0.0534	0.075	0.650	4.8682	0.62	0.512	0.282	0.971	2.6569
0.13	0.0600	0.081	0.673	4.8077	0.63	0.521	0.284	0.966	2.6155
0.14	0.0668	0.087	0.694	4.7492	0.64	0.531	0.286	0.960	2.574
0.15	0.0739	0.093	0.714	4.6924	0.65	0.540	0.288	0.954	2.5322
0.16	0.0811	0.099	0.733	4.6371	0.66	0.550	0.290	0.947	2.4901
0.17	0.0885	0.104	0.751	4.5832	0.67	0.559	0.292	0.940	2.4478
0.18	0.0961	0.110	0.768	4.5306	0.68	0.569	0.293	0.933	2.4051
0.19	0.1039	0.115	0.785	4.4791	0.69	0.578	0.295	0.925	2.3620
0.20	0.1118	0.121	0.800	4.4286	0.70	0.587	0.296	0.917	2.3186
0.21	0.1199	0.126	0.815	4.3791	0.71	0.596	0.298	0.908	2.2747
0.22	0.1281	0.131	0.828	4.3304	0.72	0.605	0.299	0.898	2.2304
0.23	0.1365	0.136	0.842	4.2825	0.73	0.614	0.300	0.888	2.1856
0.24	0.1449	0.142	0.854	4.2353	0.74	0.623	0.301	0.877	2.1403
0.25	0.1535	0.147	0.866	4.1888	0.75	0.632	0.302	0.866	2.0944
0.26	0.1623	0.152	0.877	4.1429	0.76	0.640	0.302	0.854	2.0479
0.27	0.1711	0.157	0.888	4.0976	0.77	0.649	0.303	0.842	2.0007
0.28	0.1800	0.161	0.898	4.0528	0.78	0.657	0.304	0.828	1.9528
0.29	0.1890	0.166	0.908	4.0085	0.79	0.666	0.304	0.815	1.9041
0.30	0.1982	0.171	0.917	3.9646	0.80	0.674	0.304	0.800	1.8546
0.31	0.2074	0.176	0.925	3.9212	0.81	0.681	0.304	0.785	1.8041
0.32	0.2167	0.180	0.933	3.8781	0.82	0.689	0.304	0.768	1.7526
0.33	0.2260	0.185	0.940	3.8354	0.83	0.697	0.304	0.751	1.7000
0.34	0.2355	0.189	0.947	3.7931	0.84	0.704	0.304	0.733	1.6461
0.35	0.2450	0.193	0.954	3.7510	0.85	0.712	0.303	0.714	1.5908
0.36	0.2546	0.198	0.960	3.7092	0.86	0.719	0.303	0.694	1.5340
0.37	0.2642	0.202	0.966	3.6676	0.87	0.725	0.302	0.673	1.4755
0.38	0.2739	0.206	0.971	3.6263	0.88	0.732	0.301	0.650	1.4150
0.39	0.2836	0.210	0.975	3.5852	0.89	0.738	0.299	0.626	1.3523
0.40	0.2934	0.214	0.980	3.5443	0.90	0.745	0.298	0.600	1.2870
0.41	0.3032	0.218	0.984	3.5036	0.91	0.750	0.296	0.572	1.2188
0.42	0.3130	0.222	0.987	3.4630	0.92	0.756	0.294	0.543	1.1470
0.43	0.3229	0.226	0.990	3.4225	0.93	0.761	0.292	0.510	1.0711
0.44	0.3328	0.229	0.993	3.3822	0.94	0.766	0.289	0.475	1.0000
0.45	0.3428	0.233	0.995	3.3419	0.95	0.771	0.286	0.436	0.9300
0.46	0.3527	0.236	0.997	3.3018	0.96	0.775	0.283	0.392	0.8600
0.47	0.3627	0.240	0.998	3.2617	0.97	0.779	0.279	0.341	0.7900
0.48	0.3727	0.243	0.999	3.2216	0.98	0.782	0.274	0.280	0.7200
0.49	0.3827	0.247	1.000	3.1816	0.99	0.784	0.267	0.199	0.6500

Variación de la velocidad con la profundidad. Si se supone que  $n$  permanece constante para las diferentes profundidades se puede escribir:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\frac{S^{1/2} R^{2/3}}{n}}{\frac{S^{1/2} R_0^{2/3}}{n}} = \frac{R^{2/3}}{R_0^{2/3}}$$

$V$  ... velocidad del flujo con una profundidad cualquiera  
 $V_0$  ... velocidad del flujo a tubo lleno

Conforme se acaba de ver,

$$R = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\text{sen } \theta}{2\pi - \theta} \right) d_0$$

$$\text{Por otro lado, } R_0 = \frac{A_0}{P_0} = \frac{\frac{\pi d_0^2}{4}}{\pi d_0} = \frac{\pi d_0^2}{4\pi d_0} = \frac{1}{4} d_0$$

de modo que:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{R^{2/3}}{R_0^{2/3}} = \left( 1 + \frac{\text{sen } \theta}{2\pi - \theta} \right)^{2/3} \quad (1.17)$$

Variación del caudal con la profundidad. De manera análoga:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{AV}{A_0 V_0} = \frac{A}{A_0} \cdot \frac{V}{V_0}$$

Como se acaba de ver.

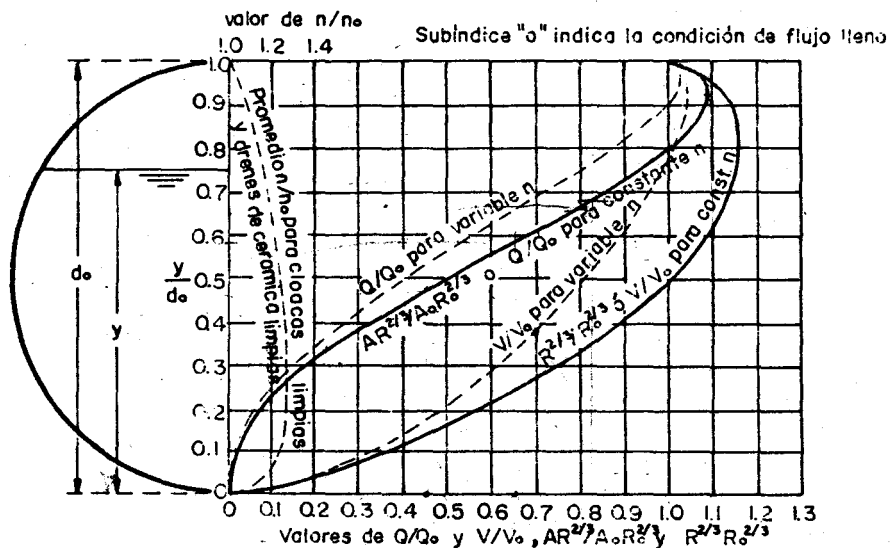
$$A = \frac{1}{4} \left( \pi - \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2} \right) d_0^2$$

$$\text{Por otro lado, } A_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2$$

de modo que:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{\pi} \left( \pi - \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\text{sen } \theta}{2\pi - \theta} \right)^{2/3} \quad (1.18)$$

Las expresiones 1.17 y 1.18 suelen graficarse del modo que se indica.



CARACTERISTICAS DEL FLUJO DE UNA SECCION CIRCULAR

### 1.6 Sección más eficiente

De un grupo de canales que tengan la misma pendiente ( $S$ ), el mismo coeficiente de rugosidad ( $n$ ) y la misma área mojada ( $A$ ), se dice que es de sección más eficiente aquél que deja pasar más agua.

En la ecuación

$$Q = \frac{A S^{1/2} R^{2/3}}{n}$$

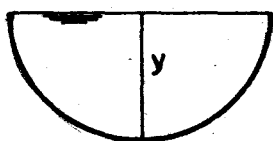
se puede ver que la sección más eficiente es la sección de mayor radio hidráulico, pero siendo

$$R = \frac{A}{P}$$

la sección de mejor radio hidráulico es la sección de menor perímetro mojado.

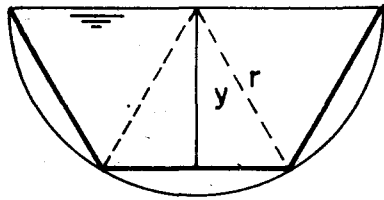
Por esta razón se dice indistintamente sección hidráulica óptima, sección más eficiente, sección de mejor radio hidráulico y sección de menor perímetro mojado.

De todas las formas posibles de sección, a igualdad de los valores  $A$ ,  $S$  y  $n$ , la sección más eficiente es el medio círculo.



$$R = \frac{A}{P} = \frac{\frac{\pi y^2}{2}}{\pi y} = \frac{\pi y^2}{2\pi y} = \frac{y}{2}$$

De todas las secciones trapezoidales, a igualdad siempre de los valores A, S y n, la SME es el medio exágono regular.

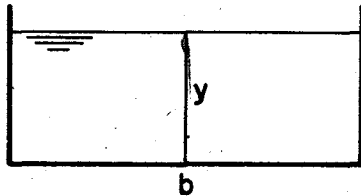


$$R = \frac{A}{P} = \frac{3 \cdot \frac{r^2}{4} \sqrt{3}}{3r} = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{12r} = \frac{r \sqrt{3}}{4} = \frac{y}{2}$$

(el talud resulta ser 60°).

Desde el punto de vista práctico las formas más comunes de sección son la rectangular y la trapezoidal con valor del talud (t) definido por el material de excavación. Resulta muy útil obtener para estos dos casos la relación fondo/tirante ( $\frac{b}{y}$ ), lo que se logra igualando a cero la primera derivada del perímetro mojado.

### Sección rectangular



$$P = b + 2y = \frac{A}{y} + 2y$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{A}{y^2} + 2 = 0$$

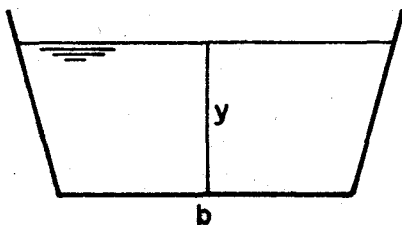
$$\frac{A}{y^2} = 2$$

$$\frac{by}{y^2} = 2$$

$$\frac{b}{y} = 2$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} = \frac{2y \cdot y}{2y + 2y} = \frac{2y^2}{4y} = \frac{y}{2}$$

### Sección trapezoidal (con un valor pre-asignado de t)



$$P = b + 2y \sqrt{1 + t^2}$$

$$P = \frac{A}{y} - ty + 2y \sqrt{1 + t^2}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{-A}{y^2} - t + 2 \sqrt{1+t^2} = 0$$

$$-\frac{A}{y^2} - t + 2 \sqrt{1+t^2} = 0$$

$$\frac{A}{y^2} = 2 \sqrt{1+t^2} - t$$

$$\frac{(b+ty)y}{y^2} = 2 \sqrt{1+t^2} - t$$

$$\frac{b}{y} + t = 2 \sqrt{1+t^2} - t$$

$$\frac{b}{y} = 2 (\sqrt{1+t^2} - t) \quad (1.19)$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{by + ty^2}{b + 2y\sqrt{1+t^2}} = \frac{2y^2\sqrt{1+t^2} - 2ty^2 + ty^2}{2y\sqrt{1+t^2} - 2ty + 2y\sqrt{1+t^2}}$$

$$= \frac{2y^2\sqrt{1+t^2} - ty^2}{4y\sqrt{1+t^2} - 2ty} = \frac{y^2(2\sqrt{1+t^2} - t)}{2y(2\sqrt{1+t^2} - t)} = \frac{y}{2}$$

NOTA. Se ha mostrado que en todos los casos de sección más eficiente se cumple que el radio hidráulico (R) resulta ser igual a medio tirante.