

DEMOSTRACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE MEUSNIER

Por *TEODORO E. HARMSSEN*
Alumno de la Universidad Católica

Sea el punto O de una superficie (Figura 1). Tracemos por él un plano tangente XOY , y un plano normal ZOT , que nos determina en la superficie la curva C , que llamaremos *sección normal*.

Por OT , trazamos un plano oblicuo, que nos determina en la superficie la curva C' , que llamaremos *sección oblicua*.

Vamos a demostrar que:

La normal principal, ON' , a la curva C' , es la proyección de la normal ON , sobre el plano de la sección oblicua, y el centro de curvatura de la sección oblicua, es la proyección del centro de curvatura de la sección normal, sobre el plano oblicuo $N'OT$.

Demostremos primero que la normal a la sección oblicua, es la proyección de la normal a la sección normal.

Para ello basta demostrar que el plano NON' es normal al plano de la sección normal y al plano de la sección oblicua. En efecto:

NO es perpendicular a la recta OT , y $N'O$, también es perpendicular a la recta OT . Por lo tanto el plano NON' es normal a la recta OT , y a todo plano que contenga a dicha recta, o sea es perpendicular a los planos de las secciones normal y oblicua, o sea que la recta $N'O$ es la proyección de la recta NO , en el plano de la sección oblicua.

Tenemos que demostrar ahora que el centro de curvatura de la sección oblicua es la proyección del centro de curvatura de la sección normal.

En el punto Q infinitamente próximo a O , levantamos una normal PQ , a OT , en el plano ZOT , y otra normal $P'Q$, también a OT , en el plano $N'OT$. Estas normales cortan a las curvas C y

C' en los puntos P y P' , respectivamente. Las rectas QP y QP' , forman un plano paralelo al NON' , por ser ambos perpendiculares a la recta OT . Este plano PQP' , cortará a la superficie según una curva tal como RS .

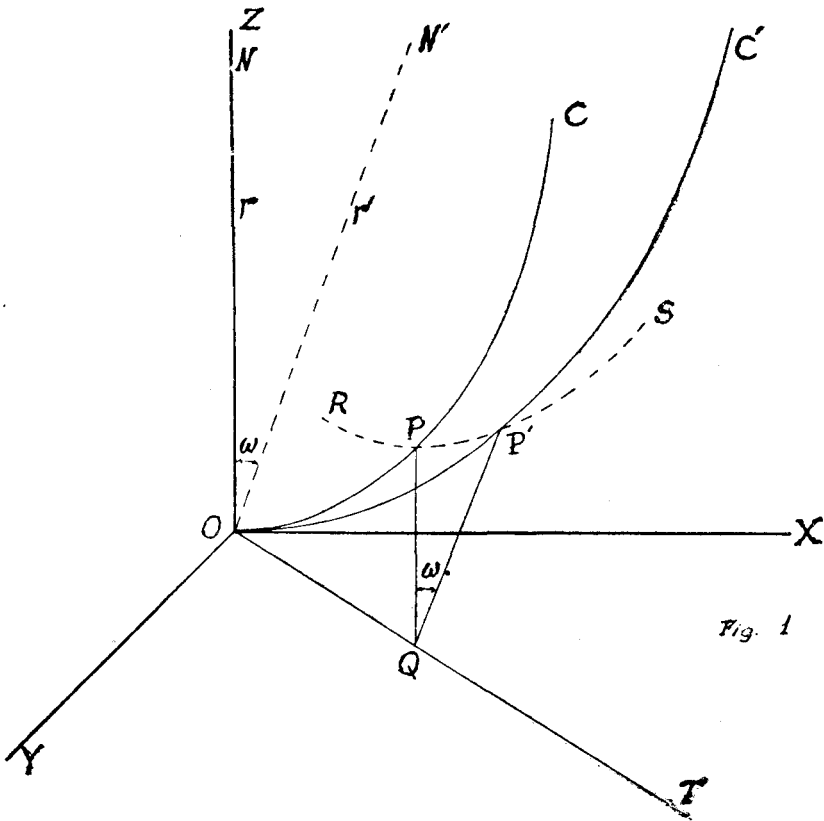


Fig. 1

Representemos el plano PQP' , en la figura 2, en la que vemos que:

$$QP'' = QP' \cos \omega \quad (1)$$

Vamos a ver que podemos tomar QP por QP'' . Para ello basta demostrar que PP'' es un infinitamente pequeño de segundo orden, por lo menos.

Tracemos las tangentes tt y $t't'$ a la curva RS en P y P' , respectivamente.

Tomaremos el punto Q infinitamente próximo a O para que la distancia PP' sea un infinitamente pequeño de primer orden.

Sabemos que las tangentes en puntos infinitamente próximos, forman entre sí un ángulo infinitamente pequeño, por lo que el ángulo β es un infinitamente pequeño de primer orden. Pero $\beta = \alpha + \epsilon$, por lo que α es también un infinitamente pequeño de primer orden. Vemos en la figura 2 que:

$$PP'' = PP' \operatorname{sen} \alpha$$

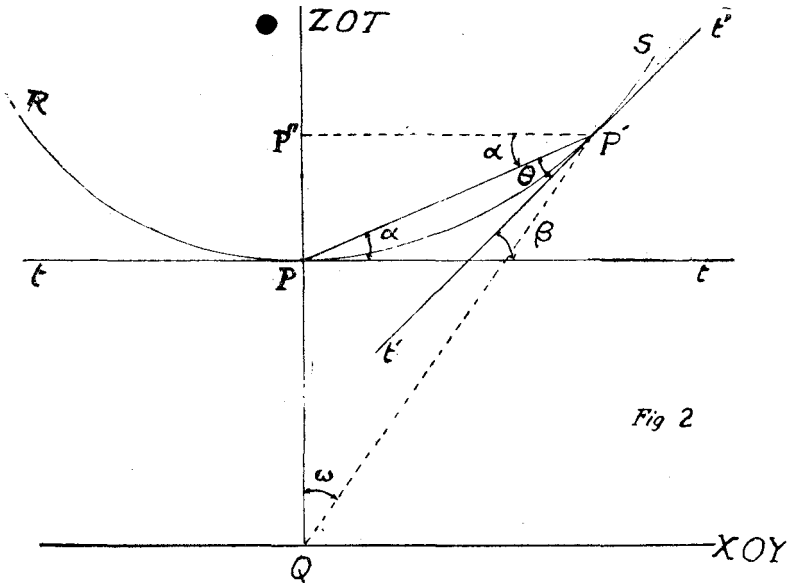


Fig 2

y como el producto de dos infinitamente pequeños de primer orden, da un infinitamente pequeño de segundo orden, PP'' es despreciable en comparación con PQ , y podremos poner en la expresión (1):

$$QP = QP' \cos \omega \quad (2)$$

Vamos a demostrar que en toda curva (figura 3), el limite de $\frac{OP}{OQ^2}$ cuando OQ tiende a cero, es $\frac{1}{2r}$, es decir que en el limite:

$$r = \frac{OQ^2}{2QP}$$

En efecto:

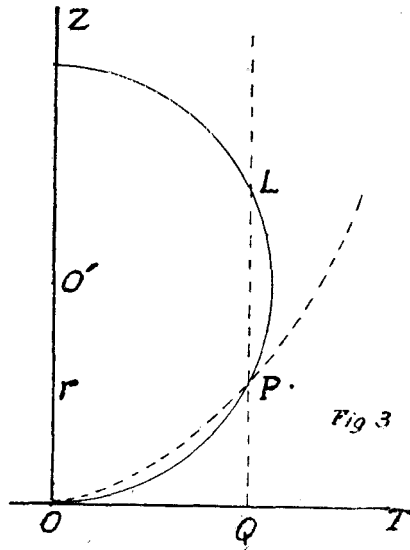
$$\overline{OQ}^2 = QP \times QL$$

o también

$$\frac{QP}{\overline{OQ}^2} = \frac{1}{QL}$$

Pero cuando Q se aproxima infinitamente a O, QL se convierte en 2r, luego reemplazando:

$$\limite \frac{QP}{\overline{OQ}^2} = \frac{1}{2r}$$



de donde, en el limite,

$$r = \frac{\overline{OQ}^2}{2QP} \quad (3)$$

y análogamente

$$r' = \frac{\overline{OQ'}^2}{2QP'} \quad (4)$$

estando r en el plano normal y r' en el plano oblicuo. Reemplazo en la ecuación número (3) el valor (2) de QP, y tengo:

$$r = \frac{\overline{OQ}^2}{2QP' \cos \omega}$$

de donde:

$$r \cos \omega = \frac{\overline{OQ}^2}{2QP'}$$

Pero el segundo miembro de esta igualdad, por la ecuación (4), es r' , por lo que reemplazando:

$$r' = r \cos \omega$$

Con lo que queda demostrado el teorema, o sea que el radio de curvatura de la sección oblicua es la proyección del radio de curvatura de la sección normal.

Lima, 1938.

Teodoro E. HARMSSEN.