ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ESTRUCTURAS DISCRETAS

Sergio Pavletich

2013

Índice

Capítulo 1: Sistemas de numeración. 1

Capítulo 2: Lógica proposicional. 15

Capítulo 3: Relaciones binarias. 33

Capítulo 4: Retículos. 45

Capítulo 5: Máquinas de estado finito. 60

Capítulo 6: Lenguajes formales. 65

Capítulo 7: Funciones iteradas. 81

Capítulo 1

- Sistemas de numeración
- Representación de números por el computador

Sistemas de Numeración

La base b es un entero mayor que uno.
($b \in Z$ y $b > 1$).
El sistema es :

Decimal	si	$b = 10$
Binario	si	$b = 2$
Hexadecimal	si	$b = 16$
Octal	si	$b = 8$

Conversión de una base b a base 10

El número N en base b se representa por: $N_{(b}$

Si $N_{(b} = d_n \ldots d_o . d_{-1} \ldots d_{-k}$, entonces:

$$N_{(b} = d_n{*}b^n+\ldots+d_1{*}b^1+d_o{*}b^0+d_{-1}{*}b^{-1}+\ldots+d_{-k}{*}b^{-k}$$

Ejemplo

Convertir $46.5_{(8}$ a base 10.

$$\begin{aligned} 46.5_{(8} &= 4x8^1 + 6x8^0 + 5x8^{-1} \\ &= 32 + 6 + 0.625 \\ &= 38.625 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $1010.01_{(2}$ a base 10.

$$\begin{aligned} 1010.01_{(2} &= 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 \\ &\quad + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} \\ &= 2^3 + 2^1 + 2^{-2} \\ &= 8 + 2 + 0.25 \\ &= 10.25 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $B8.4_{(16}$ a base 10.

$$\begin{aligned} B8.4_{(16} &= Bx16^1 + 8x16^0 + 4x16^{-1} \\ &= 11x16^1 + 8x16^0 + 4x16^{-1} \\ &= 176 + 8 + 0.25 \\ &= 184.25 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $11010.1\underline{01}_{(2}$ a base 10.

$11010 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 26$

$0.1\underline{01}_{(2} = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-9} \ldots = ?$

$0.1\underline{01}_{(2} = (101_{(2} - 1_{(2})/110_{(2}$

$= 100_{(2}/110_{(2}$

$= 4/6$

$= 0.\underline{6}$

Luego $11010.1\underline{01}_{(2} = 26.\underline{6}$

Conversión de base 10 a base b

Si N = NE + NF, donde

NE es la parte entera de N y

NF es la parte fraccionaria de N .

Se divide NE y cada cociente sucesivo por la base b, hasta obtener cero como cociente.
La sucesión de los residuos es la representación de NE en base b.

Se multiplica NF y la parte fraccionaria de cada producto sucesivo por la base b, hasta obtener una parte fraccionaria cero o repetida.
La sucesión de las partes enteras es la representación de NF en base b.

Ejemplo

Convertir 38.625 a base 8.

38.625 = 38 + 0.625

a) 38 DIV 8 = 4, R = 6

4 DIV 8 = 0, R = 4

entonces $38 = 46_{(8}$

b) 0.625 x 8 = 5.0

entonces $0.625 = 0.5_{(8}$

Luego $38.625 = 46.5_{(8}$

Ejemplo

Convertir 2245.65625 a base 16.

2245.65625 = 2245 + 0.65625

a) 2245 DIV 16 = 140, R = 5

140 DIV 16 = 8, R = 12

8 DIV 16 = 0, R = 8

entonces $2245 = 8C5_{(16}$

---

b) 0.65625 x 16 = 10.5

0.5 x 16 = 8.0

entonces $0.65625 = 0.A8_{(16}$

Luego $2245.65625 = 8C5.A\,8_{(16}$

Ejemplo

Convertir 14.7 a base 2.

14.7 = 14 + 0.7

a) 14 DIV 2 = 7, R = 0
7 DIV 2 = 3, R = 1
3 DIV 2 = 1, R = 1
1 DIV 2 = 0, R = 1

Entonces $14 = 1110_{(2}$

b) 0.7 x 2 = 1.4
0.4 x 2 = 0.8
0.8 x 2 = 1.6
0.6 x 2 = 1.2
0.2 x 2 = 0.4

entonces $0.7 = 0.1\underline{0110}_{(2}$

Luego $14.7 = 1110.1\underline{0110}_{(2}$

Ejemplo

Convertir $72.2\underline{7}$ a base 8.

$72.2\underline{7} = 72 + 0.2\underline{7}$

a) 72 DIV 8 = 9, R = 0
9 DIV 8 = 1, R = 1
1 DIV 8 = 0, R = 1

entonces $72 = 110_{(8}$

b) $0.2\underline{7} \times 8 = ?$

$0.2\underline{7} = (27-2)/90 = 25/90$

$(25/90) \times 8 = 200/90 = 2+20/90$

$(20/90) \times 8 = 160/90 = 1+70/90$

$(70/90) \times 8 = 560/90 = 6+20/90$

entonces $0.2\underline{7} = 0.2\underline{16}_{(8}$

Luego $72.2\underline{7} = 110.2\underline{16}_{(8}$

Conversiones Especiales

Si $b1 = (b2)^k$, entonces
cada cifra en base b1 se representa con k cifras en base b2.

Si $(b1)^k = b2$, entonces
cada grupo de k cifras en base b1 se representa con una cifra en base b2.

Ejemplo

Convertir $93A.65_{(16}$ a base 2.

	9	3	A	.	6	5	(16
=	1001	0011	1010	.	0110	0101	(2

Ejemplo

Convertir 1010010. $101111_{(2}$ a base 16.

$$\begin{array}{lcccccc} & 0101 & 0010 & . & 1011 & 1100 & _{(2} \\ = & 5 & 2 & . & B & C & _{(16} \end{array}$$

Complemento a la base

El complemento a la base es lo que le falta a un número N, expresado en base b, para ser la menor potencia de b que es mayor que N.
El complemento a la base se encuentra restando cada cifra del número, comenzando por la izquierda, de la base menos uno, hasta llegar a la última cifra distinta de cero la que se resta de la base y se completa con ceros a la derecha.

Ejemplo

Encontrar el complemento a 10 de 3700.

$C_{10}(3700) = 6300$

$$\begin{array}{r} 3700 + \\ \underline{6300} \\ 10000 \end{array}$$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 2 de $1010_{(2}$.

$C_2(1010_{(2)}) = 0110_{(2}$

$$\begin{array}{r} 1010_{(2} + \\ \underline{0110_{(2}} \\ 10000_{(2} \end{array}$$

Complemento a la base menos uno

El complemento a la base menos uno, es igual a el complemento a la base, menos uno.

El complemento a la base menos uno se obtiene restando cada cifra del número de la base menos uno.

Ejemplo

Encontrar el complemento a 9 de 3700.

$C_9(3700) = 6299$

$$\begin{array}{r} 3700+ \\ \underline{6299} \\ 9999 \end{array}$$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 1 de $1010_{(2}$

$C_1(1010_{(2}) = 0101_{(2}$

$$\begin{array}{r} 1010_{(2}+ \\ \underline{0101_{(2}} \\ 1111_{(2} \end{array}$$

Complementos

$$C_{b-1}(N) = C_b(N) - 1,$$

entonces $C_b(N) = C_{b-1}(N) + 1.$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 10 de 3700.

$C_9(3700) = 6299$

$$\begin{array}{r} 6299+ \\ \underline{1} \\ 6300 \end{array}$$

$C_{10}(3700) = 6300$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 2 de $1010_{(2}$.

$C_1(1010_{(2}) = 0101_{(2}$

$$\begin{array}{r} 0101_{(2}+ \\ \underline{1_{(2}} \\ 0110_{(2} \end{array}$$

$C_2(1010_{(2}) = 0110_{(2}$

Representación de Datos en el computador

- Datos
  - Numéricos
    - Enteros
      - Sin Signo
      - Con Signo
    - Reales
  - Alfanuméricos

Enteros sin Signo

Los enteros sin signo son representados como números en base dos.

Si se dispone de n bits se puede representar 2^n enteros sin signo.

Rango : $0 \leq N \leq 2^n - 1$.

Ejemplo

Como enteros sin signo, con 4 bits :
Rango : $0 \leq N \leq 2^4 - 1 = 15$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El 1 se representa por : 0 0 0 1
- El 14 se representa por : 1 1 1 0
- El 15 se representa por : 1 1 1 1

Como enteros sin signo, con 4 bits :

- 0 0 1 0 representa al : 2
- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 0 representa al : 12
- 1 1 0 1 representa al : 13

Enteros con signo

Los enteros con signo se pueden representar en:

1) Signo y magnitud.
2) Complemento a uno.
3) Complemento a dos.
4) Exceso.

Signo y Magnitud

Si se dispone de n bits:
Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1 para - .
El valor absoluto del número se representa en base dos en los (n-1) bits restantes.

Rango : $-(2^{n-1} - 1) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En signo y Magnitud, con 4 bits :
Rango : $-(2^{4-1} - 1) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$
$-7 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El -0 se representa por : 1 0 0 0
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 1 0 0

En signo y Magnitud, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 0 1 1 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 1 1 1 representa al : -7

Complemento a uno

Si se dispone de n bits :

Si $N \geq 0$, se lo representa como binario con un cero en el primer bit de la izquierda.

Si $N \leq 0$, se lo representa como el complemento a uno de la representación del valor absoluto de N.

Rango : $-(2^{n-1} - 1) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Complemento a uno, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1} - 1) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-7 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El -0 se representa por : 1 1 1 1
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 0 1 1

En Complemento a uno, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 0 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 0 0 0 representa al : -7

Complemento a dos

Si se dispone de n bits :

Si $N \geq 0$, se lo representa como binario con un cero en el primer bit de la izquierda.

Si $N < 0$, se lo representa como el complemento a dos de la representación del valor absoluto de N.

Rango : $-(2^{n-1}) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Complemento a dos, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1}) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-8 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El 1 se representa por : 0 0 0 1
- El -1 se representa por : 1 1 1 1
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 1 0 0

En Complemento a dos, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 1 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 0 0 1 representa al : -7
- 1 0 0 0 representa al : -8

Exceso

Si se dispone de n bits:

Se representa el número N como la representación binaria de: $(N + 2^{n-1})$.

Rango : $-(2^{n-1}) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Exceso, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1}) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-8 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 1 0 0 0
- El 1 se representa por : 1 0 0 1
- El -1 se representa por : 0 1 1 1
- El 4 se representa por : 1 1 0 0
- El -4 se representa por : 0 1 0 0

En Exceso, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : -5
- 1 1 0 1 representa al : 5
- 0 1 1 1 representa al : -1
- 1 0 0 1 representa al : 1
- 1 0 0 0 representa al : 0

Reales

Los reales se pueden representar en:

1) Punto fijo .
2) Notación Científica Decimal.
3) Notación Científica Binaria.
4) Notación Científica Binaria con mantisa normalizada.

Punto fijo

Se trabaja con un número fijo de decimales.
Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1para - .
Se tiene un número fijo de bits para representar la parte entera y un número fijo de bits para representar la parte decimal como enteros sin signo.

Ejemplo

En Punto fijo, con 32 bits (1 bit para el signo, 21 bits para la parte entera y 10 bits para la parte decimal), representar el número -38.32

Como se dispone de 10 bits para representar la parte decimal y como $999 \leq 2^{10} < 9999$, entonces se puede representar 3 decimales.

Ya que $38 = 100110_{(2}$ y $320 = 101000000_{(2}$

El -38.320 se representa por:

1 0000000000000000100110 0101000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en punto fijo (con 1 bit para el signo, 16 bits para la parte entera y 7 bits para la parte decimal).
Como se dispone de 7 bits para representar la parte decimal y como $99 \leq 2^7 < 999$, entonces se puede representar 2 decimales.

$CC0089_{(16}$
$= 1\ 1001100000000001\ 0001001_{(2}$

Como $1001100000000001_{(2} = 38913$
y $0001001_{(2} = 9$

El número representado es N = -38913.09

Notación Científica Decimal

Se expresa el valor absoluto del número en notación científica decimal, es decir de la forma :

$f \times 10^k$, donde $f \in [0.1\ ,1[$ y $K \in Z$.

Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1 para - .
Se tiene un número fijo de bits para representar el exponente en exceso y un número fijo de bits para representar la mantisa como entero sin signo.

Ejemplo

En Notación Científica Decimal, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -3.25
$-3.25 = -0.325 \times 10^1$
Como $325 = 101000101_{(2}$
y el 1 se representa en exceso por: 1000001
El -3.25 se representa por:
1 1000001 000000000000000101000101

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Decimal (con 1 bit para el signo, 6 bits para el exponente y 17 bits para la mantisa)

CC0089$_{(16}$
= 1 100110 0000000001000 1001$_{(2}$

Como 0000000001000 1001$_{(2}$ = 137
y 100110 representa en exceso al 6

El número representado es
N = -0.137 x 10^6 = -137000

Notación Científica Binaria

Se expresa el número en notación científica binaria .
Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1para - .
Se tiene un número fijo de bits para representar el exponente en exceso y un número fijo de bits para la mantisa.

Ejemplo

En Notación Científica Binaria, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -419.8125
-419.8125 = -110100011.1101$_{(2}$
= -0.1101000111101$_{(2}$ x 2^9
Como el 9 se representa en exceso por: 1001001
El -419.8125 se representa por:
1 1001001 110100011110100000000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número CC8089$_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Binaria (con1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 16 bits para la mantisa)

CC8089$_{(16}$
= 1 1001100 1000000010001001$_{(2}$

Como 1001100 representa en exceso al 12
El número representado es
N = -0.1000000010001001$_{(2}$ x 2^{12}
= -100000001000.1001$_{(2}$
= -2056.5625

Notación Científica Binaria con mantisa normalizada

En notación científica binaria con mantisa normalizada se representa la mantisa sin el primer bit de la izquierda, ya que este bit es siempre igual a uno.

Ejemplo

En Notación Científica Binaria con mantisa normalizada, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -419.8125

$-419.8125 = -110100011.1101_{(2}$

$= -0.1101000111101_{(2} \times 2^9$

Como el 9 se representa en exceso por: 1001001

El -419.8125 se representa por:

1 1001001 101000111101000000000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Binaria con mantisa normalizada (con 1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 16 bits para la mantisa)

$CC0089_{(16}$

$= 1\ 1001100\ 0000000010001001_{(2}$

Como 1001100 representa en exceso al 12

El número representado es

$N = -0.1000000010001001_{(2} \times 2^{12}$

$= -100000000100.01001_{(2}$

$= -2052.28125$

Alfanuméricos

Los caracteres alfanuméricos pueden ser dígitos, letras o caracteres especiales (como los signos de puntuación, de agrupamiento, matemáticos, gráficos o de control).

Los caracteres son representados por cadenas binarias iguales al código asociado a cada carácter.

La tablas de códigos más usadas son la tabla ASCII y la tabla EBCDIC.

Tabla ASCII

Carácter	Código Decimal	Código Binario
:	:	:
0	48	0011 0000
1	49	0011 0001
:	:	:
A	65	0100 0001
:	:	:
a	97	0110 0001
:	:	:

Circuito Sumador

El circuito sumador tiene 3 entradas y 2 salidas. Se implementa con compuertas lógicas.

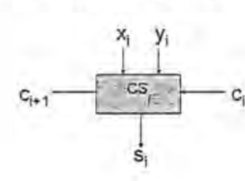
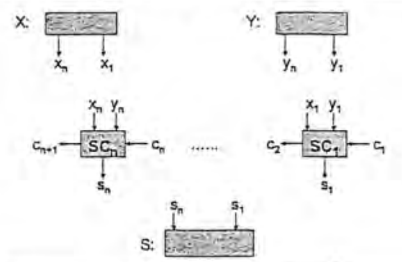


Tabla del Circuito Sumador

Entradas			Salidas	
x_i	y_i	c_i	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Sumador de n bits



Desbordamiento

Hay desbordamiento cuando el resultado, de una operación aritmética, no pertenece al rango de representación.

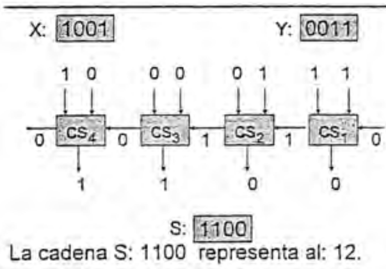
Suma de enteros sin signo

Al sumar dos enteros sin signo en un sumador de n bits, si no hay desbordamiento, el resultado es correcto.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar 9 y 3 representados como enteros sin signo.

El 9 se representa por: 1001.
El 3 se representa por: 0011.

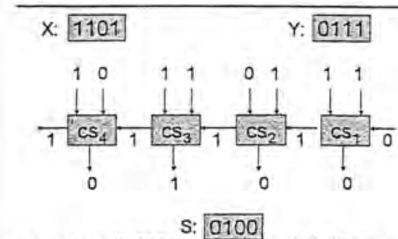


La cadena S: 1100 representa al: 12.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar 13 y 7 representados como enteros sin signo.

El 13 se representa por: 1101.
El 7 se representa por: 0111.



La cadena S: 0100 representa al: 4. (Desbordamiento)

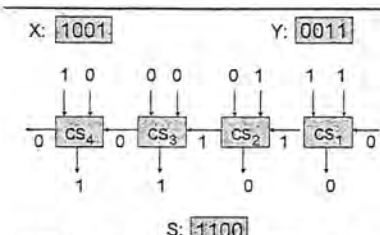
Suma de enteros con signo

Al sumar dos enteros con signo representados en complemento a dos en un sumador de n bits, si no hay desbordamiento, el resultado es correcto.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar -7 y 3 representados en complemento a dos.

El -7 se representa por: 1001.
El 3 se representa por: 0011.

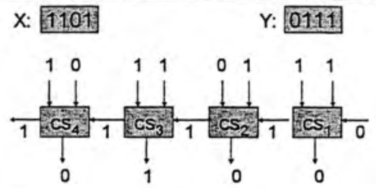


La cadena S: 1100 representa al: -4.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar -3 y 7 representados en complemento a dos.

El -3 se representa por: 1101.
El 7 se representa por: 0111.



S: 0100
La cadena S: 0100 representa al: 4.

Capítulo 2

- Lógica proposicional
- Lógica de predicados

Proposición

- Un enunciado es una expresión del lenguaje.
- Una proposición es un enunciado que puede ser calificado o de verdadero (V) o de Falso (F).
- Valores de verdad : L = {V,F} .

Operadores Lógicos

Operador	Símbolo	Compuesta
y	$\wedge$	Conjunción
o (y/o)	$\vee$	Disyunción (Inclusiva)
o (o..o)	Δ	Disyunción exclusiva
entonces	$\rightarrow$	Condicional
si y sólo si	$\leftrightarrow$	Bicondicional
no	$\sim$	Negación

Tablas de los operadores

p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Delta q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
V V	V	V	F	V	V	F
V F	F	V	V	F	F	F
F V	F	V	V	V	F	V
F F	F	F	F	V	V	V

La Condicional

En la condicional $p \rightarrow q$,
p es el antecedente y q es el consecuente.

($p \rightarrow q$, no es conmutativa)

La Condicional

La condicional $p \rightarrow q$ se puede leer:

- p entonces q .
- p sólo si q .
- q si p .

La Condicional

Si la condicional es $p \rightarrow q$:

- su recíproca es $q \rightarrow p$.
- su contraria es $\sim p \rightarrow \sim q$.
- su contrarecíproca es $\sim q \rightarrow \sim p$.

Tautología

Una tautología es una proposición compuesta que es **verdadera**, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes.

(Una tautología se representa por: **1**)

Ejemplo

$(p \vee \sim p)$ es una tautologia.

Demostración:

p	(p	∨	~p)
0	0	1	1
1	1	1	0

Contradicción

Una contradicción es una proposición compuesta que es **falsa**, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes.

(Una contradicción se representa por: **0**)

Ejemplo

$(p \wedge \sim p)$ es una contradicción.

Demostración:

p	(p	∧	~p)
0	0	0	1
1	1	0	0

Proposiciones Equivalentes

Dos proposiciones p y q son equivalentes, si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

(p es equivalente a q se representa por: $p \equiv q$)

Ejemplo

$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$

Demostración:

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
0	0	0 1 0 $\boxed{1}$ 1 1 1
0	1	0 1 1 $\boxed{1}$ 0 1 1
1	0	1 0 0 $\boxed{1}$ 1 0 0
1	1	1 1 1 $\boxed{1}$ 0 1 0

Entonces: $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p) \equiv 1$

Leyes Lógicas

1) Conmutativa: $p \wedge q \equiv q \wedge p$,
$p \vee q \equiv q \vee p$.

2) Identidad: $p \wedge 1 \equiv p$,
$p \vee 0 \equiv p$.

3) Complemento: $p \wedge \sim p \equiv 0$,
$p \vee \sim p \equiv 1$.

4) Distributiva: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Leyes Lógicas +

1) Idempotencia: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$.

2) Acotamiento: $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 1 \equiv 1$.

3) Absorción: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$,
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

4) Asociativa: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$,
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

5) Involución: $\sim(\sim p) \equiv p$.

6) Opuesto: $\sim 1 \equiv 0$, $\sim 0 \equiv 1$.

7) De Morgan: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$,
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

Leyes Lógicas ++

1) Condicional: $p \to q \equiv \sim p \vee q$.

2) Bicondicional: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$.

3) Disyunción Exclusiva: $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

4) Contraposición: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

5) Negación de la Condicional: $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$.

6) Negación de la Bicondicional: $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \,\Delta\, q$.

7) Absorción generalizada: $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$.

Ejemplo

Simplificar:

$(p \wedge (q \to q)) \wedge (\sim p \to (q \wedge \sim p)) \wedge (r \to p)$

Solución:

$(p \wedge (q \to q)) \wedge (\sim p \to (q \wedge \sim p)) \wedge (r \to p) \equiv$

$(p \wedge (\sim q \vee q)) \wedge (p \vee (q \wedge \sim p)) \wedge (\sim r \vee p) \equiv$

$(p \wedge 1) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim r \vee p) \equiv$

$p \wedge (p \vee (q \wedge \sim r)) \equiv$

p

La Implicación

La proposición p implica la proposición q, si la proposición $p \to q$ es una tautología.

(p implica q se representa por: $p \Rightarrow q$)

La Implicación

si p implica q , decimos que :

$\Rightarrow$ p es suficiente para q .

$\Leftarrow$ q es necesario para p .

Ejemplo

$(p \wedge q) \Rightarrow p$

Demostración 1:

p	q	(p $\wedge$ q)	$\rightarrow$	p
0	0	0 0 0	$\boxed{1}$	0
0	1	0 0 1	$\boxed{1}$	0
1	0	1 0 0	$\boxed{1}$	1
1	1	1 1 1	$\boxed{1}$	1

Demostración 2:

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \rightarrow p \equiv \\
&\sim(p \wedge q) \vee p \equiv \\
&(\sim p \vee \sim q) \vee p \equiv \\
&(\sim p \vee p) \vee \sim q \equiv \\
&\quad 1 \vee \sim q \equiv \\
&\quad 1
\end{aligned}
$$

Inferencias lógicas

1) Adición: $p \Rightarrow (p \vee q)$.
2) Simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
3) Modus ponens: $((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$.
4) Modus tollens: $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$.
5) Silogismo disyuntivo: $((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$.
6) Silogismo hipotético:

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

Consecuencia lógica

La proposición q es consecuencia lógica de la proposición p, si $p \Rightarrow q$.

(q es consecuencia lógica de p se representa por: $q \Leftarrow p$)

Ejemplo

$p \Leftarrow (p \wedge q)$

Ya que: $(p \wedge q) \Rightarrow p$

Teorema (Reducción al absurdo)

$q \Leftarrow p$ si y sólo si $(p \wedge \sim q) \equiv 0$.

(La proposición q es consecuencia lógica de la proposiciones p , si y sólo si la proposición $(p \wedge \sim q)$ es una contradicción)

Predicados

Sean $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos no vacíos y sea $D \subset X_1 \times \ldots \times X_n$.

Un predicado p definido en D es una función de D en $L = \{V, F\}$.

$(p : D \rightarrow L)$

Predicados

Si p es un predicado en D y $a \in D$, entonces p(a) es una proposición .

Ejemplo

Si $D = Z^+$ y p(x): x es par, entonces:

p(4) es V
p(3) es F

Ejemplo

Si $D = Z \times Z$ y p(x,y): $x < y$, entonces:

p(2,3) es V
p(3,2) es F

Operaciones con predicados

Dados los predicados p y q , se definen los predicados:

1) $(\sim p)(x) \equiv \sim p(x)$.
2) $(p \wedge q)(x) \equiv p(x) \wedge q(x)$.
3) $(p \vee q)(x) \equiv p(x) \vee q(x)$.
4) $(p \,\Delta\, q)(x) \equiv p(x) \,\Delta\, q(x)$.
5) $(p \rightarrow q)(x) \equiv p(x) \rightarrow q(x)$.
6) $(p \leftrightarrow q)(x) \equiv p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Cuantificador Universal

El cuantificador universal es la expresión "para todo" que se representa por $\forall$.

Si p(x) es un predicado definido en D , la expresión $\forall x \in D : p(x)$, es una proposición.

Cuantificador Existencial

El cuantificador existencial es la expresión "existe" que se representa por $\exists$.

Si p(x) es un predicado definido en D , la expresión $\exists x \in D : p(x)$, es una proposición.

Ejemplo

1) $\forall x \in Z^+ : x > 0$, es verdadera

2) $\forall x \in Z : x > 0$, es falsa

3) $\exists x \in Z : x + 2 = 2$, es verdadera

4) $\exists x \in Z^+ : x + 2 = 2$, es falsa

Leyes de Predicados

Sean p(x) y q(x) dos predicados:

1) $\sim(\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x)$.
2) $\sim(\exists x : p(x)) \equiv \forall x : \sim p(x)$.
3) $\forall x : (p(x) \wedge q(x)) \equiv (\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x))$.
4) $\exists x : (p(x) \vee q(x)) \equiv (\exists x : p(x)) \vee (\exists x : q(x))$.
5) $\exists x : (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x : p(x)) \wedge (\exists x : q(x))$.
6) $\forall x : (p(x) \vee q(x)) \Leftarrow (\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))$.

Ejemplo

1) $\sim(\forall x \in Z: x > 0) \equiv \exists x \in Z: x \leq 0$

2) $\sim(\exists x \in Z: x+2 = 2) \equiv \forall x \in Z: x+2 \neq 2$

3) $\sim(\exists x \in Z: x > 0 \wedge x+2 = 2) \equiv \forall x \in Z: x \leq 0 \vee x+2 \neq 2$

4) $\sim(\forall x \in Z: x > 0 \rightarrow x+2 = 2) \equiv \exists x \in Z: x > 0 \wedge x+2 \neq 2$

Teorema (Particularización)

Sea $p : D \rightarrow L$ un predicado y $a \in D$, entonces p(a) es una consecuencia lógica de $(\forall x \in D : p(x))$.

Teorema (Generalización)

Sea $p : D \to L$ un predicado y $a \in D$, entonces $(\exists x \in D : p(x))$ es una consecuencia lógica de $p(a)$.

Variables ligadas y variables libres

Si $p : D \to L$ es un predicado en las n variables $X_1, \dots, X_n$, entonces

$\forall X_k : p(X_1, \dots, X_n)$ y

$\exists X_k : p(X_1, \dots, X_n)$

son predicados en las (n-1) variables que no son X_k.

En estos casos se dice que la variable X_k está ligada y que las variables restantes son libres.

Ejemplo

Si $D = Z \times Z$:

1) $(x + y = 0)$ y $(x * y = 0)$, son predicados en las variables x e y.

2) $\forall x$: $x + y = 0$, es un predicado en la variable y, la variable x está ligada y la variable y está libre.

3) $\exists y$: $x + y = 0$, es un predicado en la variable x, la variable y está ligada y la variable x está libre.

4) $\forall x, \exists y$: $x + y = 0$, es una proposición verdadera.

5) $\exists y, \forall x$: $x + y = 0$, es una proposición falsa.

6) $\exists y, \forall x$: $x * y = 0$, es una proposición verdadera.

Números naturales (IN)

Axiomas :

1) IN es un conjunto totalmente ordenado.
2) Existe una función sucesor $S : IN \to IN$ donde $S(n)$ es el número que le sigue a n en el orden total.
3) Existe un único $0 \in IN$ tal que: $0 \notin S(IN)$, donde $S(IN) = \{ S(a) / a \in IN \}$.

Axioma de inducción

Si $A \subset IN$ es tal que:

1) $0 \in A$.
2) $n \in A \to (n+1) \in A$

Entonces $A = IN$.

Definiciones por inducción

Si n y $n_0 \in$ IN.

Para definir D(n) $\forall$ n $\geq n_0$:

1) Se define $D(n_0)$.
2) Supuesto definido D(n) $\forall$ n $\geq n_0$, se define D(n+1).

Ejemplo

Definir: n!, $\forall$ n $\geq$ 0.

1) 0! = 1

2) (n+1)! = (n+1).n!, n $\geq$ 0

Ejemplo

Definir: $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\forall n \geq 1$

1) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$

2) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$

Demostraciones por inducción

Si n y $n_0 \in$ IN.

Para demostrar P(n) $\forall$ n $\geq n_0$:

1) Se demuestra $P(n_0)$.
2) Supuesto demostrado P(n) $\forall$ n $\geq n_0$, se demuestra P(n+1).

Ejemplo

Demostrar: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n)(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

1) $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{(1)(1+1)}{2}$

---

2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n)(n+1)}{2} \rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{(n)(n+1)}{2} + (n+1) \rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

Programa lógico (P.L.)

Un hecho es una proposición no compuesta.
Una regla es una proposición de la forma

$$q \leftarrow (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) .$$

En los hechos y en las reglas las variables son cuantificadas universalmente.

Un programa lógico es un conjunto de hechos y reglas.

Consulta

Una consulta es una proposición.
En las consultas las variables son cuantificadas existencialmente.
Si se ingresa una consulta después de un programa lógico, la salida será "si" en caso de que la consulta sea una consecuencia lógica de programa, y la salida será "no" en caso contrario.
Si la consulta posee variables, la salida indicará todas las soluciones.

Ejemplo

```
/* Hecho: progenitor (x, y) ≡ x es progenitor de y */
 progenitor (josé, roberto) .
 progenitor (rosa, roberto) .
 progenitor (josé, juana) .
 progenitor (rosa, juana) .
 progenitor (roberto, ana) .
 progenitor (ana, jaime) .
```

```
/* Hecho:  varón (x)  ≡  x es varón */
 varón (josé) .
 varón (roberto) .
 varón (jaime) .
/* Hecho: mujer (x)  ≡  x es mujer */
 mujer (rosa).
 mujer (ana).
 mujer (juana).
```

```
/* Consultas y salidas */
 ?: progenitor (josé, juana).
 -: Si .
 ?: progenitor (josé, jaime).
 -: No .
 ?: progenitor (josé, x).
 -: Si .
      x = roberto .
      x = juana .
 ?: progenitor (josé, roberto), varón (josé) .
 -: Si .
```

```
/* Regla: padre (x, y) */
padre (x, y) ← progenitor (x, y), varón (x) .
?: padre (josé, roberto).
-: Si .
?: padre (josé, x).
-: Si .
     x = roberto.
     x = juana.
?: padre (rosa, roberto).
-: No .
```

/* más reglas: */

madre (x, y) ←
progenitor (x, y), mujer (x) .
hijo (x, y) ←
progenitor (y, x),
varón (x) .
hija (x, y) ←
progenitor (y, x), mujer (x) .

abuelo (x, y) ←
padre (x, z), progenitor (z, y) .
abuela (x, y) ←
madre (x, z), progenitor (z, y) .
nieto (x, y) ←
abuelo (y, x), varón (x) .
nieto (x,y) ←
abuela (y, x), varón (x) .

nieta (x, y) ←
abuelo (y, x), mujer (x) .
nieta (x,y) ←
abuela (y, x), mujer (x) .
hermanos (x, y) ←
progenitor (z, x), progenitor (z, y),
not (misma-persona (x, y)) .
misma-persona (x, x) .

tío (x, y) ←
progenitor (z, y), hermanos (x, z), varón (x).
tía (x, y) ←
progenitor (z, y), hermanos (x, z), mujer (x).
antepasado (x, y) ←
progenitor (x, z), antepasado (z, y).
antepasado (x, y) ←
progenitor (x, y).

P.L. natural

/* natural(x) ≡ x ∈IN */

natural(0).
natural(S(x)) ← natural(x).

Ejemplo

? natural(3).
Si.

? natural(0.5).
No.

P.L. igual y diferente

/* igual(x,y) ≡ x = y */

igual(x,x).

/* diferente(x,y) ≡ x ≠ y */

diferente(x,y) ← not(igual(x,y)) .

Ejemplo

? igual(3,3).
Si.
? igual(3,2).
No.
? igual(x,3).
Si
x = 3.
? diferente(3,3).
No.

P.L. menor y menor-igual

/* menor(x,y) ≡ x < y */

menor(S(x),S(y)) ← menor(x,y).
menor(0,S(x)).

/* menor-igual(x,y) ≡ x ≤ y */

menor-igual(S(x),S(y)) ← menor-igual(x,y).
menor-igual(0,x).

Ejemplo

? menor(2,4).
Si.

? menor(2,2).
No.

? menor-igual(2,2).
Si.

P.L. menor-igual2 y diferente2

/* menor-igual2(x,y) ≡ x ≤ y */

menor-igual2(x,y) ← menor(x,y).
menor-igual2(x,y) ← igual(x,y).

/* diferente2(x,y) ≡ x ≠ y */

diferente2(x,y) ← menor(x,y).
diferente2(x,y) ← menor(y,x).

P.L. mayor y mayor-igual

/* mayor(x,y) ≡ x > y */
mayor(x,y) ← menor(y,x).
/* mayor-igual(x,y) ≡ x ≥ y */
mayor-igual(x,y) ← menor-igual(y,x).
/* mayor2(x,y) ≡ x > y */
mayor2(x,y) ← not(menor-igual(x,y)).
/* mayor-igual2(x,y) ≡ x ≥ y */
mayor-igual2(x,y) ← not(menor(x,y)).

P.L. suma y resta

```
/* suma(x,y,z) ≡ z := x + y */

suma(S(x),y,S(z)) ← suma(x,y,z).
suma(0,x,x).

/* resta(x,y,z) ≡ z:= x - y */
resta(x,y,z) ← suma(z,y,x).
```

Ejemplo

```
? suma(2,3,5).
  Si.
? suma(2,3,6).
  No.
? suma(2,3,x).
  Si
  x = 5.
```

```
? suma(x,3,5).
  Si
  x = 2.

? Resta(5,3,x).
  Si
  x = 2.
```

P.L. producto

```
/* producto(x,y,z) ≡ z:= x * y */

producto(S(x),y,z) ← producto(x,y,t),
                     suma(t,y,z).
producto(0,x,0).
```

Ejemplo

```
? producto(2,3,6).
  Si.
? producto(2,3,7).
  No.
? producto(2,3,x).
  Si
  x = 6.
```

P.L. div

```
/* div(x,y,z) ≡ z :=(x DIV y) */

div(x,y,S(z)) ← resta(x,y,t),
                div(t,y,z).
div(x,y,0) ← menor(x,y).
```

Ejemplo

? div(17,5,3).
Si.

? div(17,5,x).
Si
x = 3.

P.L. mod

/* mod(x,y,z) ≡ z :=(x MOD y) */

mod(x,y,z) ← resta(x,y,t),
mod(t,y,z).
mod(x,y,x) ← menor(x,y).

Ejemplo

? mod(17,5,2).
Si.

? mod(17,5,x).
Si
x = 2.

P.L. potencia

/* potencia(x,y,z) ≡ z:= x^y */

potencia(x,S(y),z) ← potencia(x,y,t),
producto(x,t,z).
potencia(S(x),0,S(0)).
potencia(0,S(y),0).

Ejemplo

? potencia(2,4,16).
Si.

? potencia(2,4,x).
Si
x = 16.

P.L. factorial

/* factorial(x,y) ≡ y:=x! */

factorial(S(x),y) ← factorial(x,t),
producto(S(x),t,y).
factorial(0,S(0)).

Ejemplo

? factorial(4,24).
Si.

? factorial(4,x).
Si
x = 24.

Listas

Una lista es la lista vacía o
una lista es una colección ordenada de objetos donde se reconocen dos partes, la cabeza de la lista que es el primer elemento de la lista y la cola de la lista formada por el resto de los elementos.

Listas

Sea L una lista :

1) Si L es la lista vacía,
Representamos L = [ ] .

2) Si L no es la lista vacía,
representamos L = [x | xs] ,
donde x es la cabeza y xs la cola.

P.L. lista

lista ([ ]).
lista ([x | xs]) ← lista (xs).

/*
Una lista es la lista vacía o
una lista es un elemento seguido de una lista
*/

P.L. añade

/* añade(x,L1,L2) ≡ L2 = [x | L1] */

añade(x,xs,[x | xs]).

Ejemplo

? añade(5,[4,7,2],[5,4,7,2]).
Si.

? añade(5,[4,7,2],L).
Si
L = [5,4,7,2].

P.L. pertenece

/* pertenece(x,L) ≡ x ∈ L */

pertenece(x,[y | ys]) ← pertenece(x,ys).
pertenece(x,[x | xs]) .

Ejemplo

? pertenece(5,[3,7,5,4,2]).
Si.
? pertenece(5,[3,7,4,2]).
No.
? pertenece(x,[3,7,4]).
Si
x = 3
x = 7
x = 4.

P.L. longitud

/* longitud(L,n) ≡ n:= ||L|| ,
donde ||L|| es el número de elementos de L */

longitud([x | xs],S(n)) ← longitud (xs,n).
longitud([ ],0).

Ejemplo

? longitud([2,5,7],3).
Si.

? longitud([2,5,7],x).
Si
x = 3.

P.L. concatena

/* concatena(L1,L2,L3) ≡ L3 = L1L2 */

concatena([x | xs],L,[x | ys]) ← concatena(xs,L,ys).
concatena([ ],L ,L).

Ejemplo

? concatena([2,9,1],[5,2],[2,9,1,5,2]).
Si.

? concatena([2,9,1],[5,2],L).
Si
L = [2,9,1,5,2].

P.L. invierte

/* invierte(L1,L2) ≡ L2 es la lista L1 invertida */

```
invierte([x | xs],L) ← invierte(xs,ts),
                       concatena(ts,[x],L).
invierte([ ],[ ]).
```

Ejemplo

```
? invierte([3,4,7],[7,4,3]).
  Si.

? invierte([3,4,7],L).
  Si
  L = [7,4,3].
```

P.L. posición

/* posición(x,L,n) ≡ n:= la posición del elemento x en la lista L */

```
posición(x,[y | ys],S(n)) ← posición(x,ys,n).
posición(x,[x | xs],S(0)).
```

Ejemplo

```
? posición(5,[7,4,5,9,1],3).
  Si.

? posición(5,[7,4,5,9,1],x).
  Si
  x = 3.
```

```
? posición(5,[7,5,9,1,9,5,1],x).
  Si
  x = 2
  x = 6.

? posición(x,[7,4,5,9],3).
  Si
  x = 5.
```

P.L. menor-elemento

/* menor-elemento(L,x)   x := el menor elemento en la lista L */

```
menor-elemento([x | xs],x) ← menor-elemento(xs,y),
                             menor(x,y).
menor-elemento([x | xs],y) ← menor-elemento(xs,y),
                             not(menor (x,y)).
menor-elemento([ x ],x).
```

Ejemplo

? menor-elemento([5,3,7,2,8],2).
Si.

? menor-elemento([5,3,7,2,8],x).
Si
x = 2.

Matrices

Una matriz de dimensión m x n es una lista, de m listas, de longitud n cada una de ellas.

P.L suma-filas y suma-matrices

```
*/ suma-filas(L1,L2,L3) ≡ L3 := L1 + L2 */
suma-filas([x | xs],[y | ys],[z | zs]) ← suma(x, y, z ),
                                  suma-filas(xs,ys,zs).
suma-filas([ ],[ ],[ ]).
*/ suma-matrices(A,B,C) ≡ C := A + B */
suma-matrices([xs | As],[ys | Bs],[zs | Cs]) ←
                                  suma-filas(xs,ys,zs),
                                  suma-matrices(As,Bs,Cs).
suma-matrices([ ],[ ],[ ]).
```

Ejemplo

? suma-filas([2,5,3],[1,0,4],[3,5,7]).
Si.

? suma-filas([2,5,3],[1,0,4],L).
Si
L = [3,5,7].

? suma-matrices([[4,3],[2,0]],[[1,5],[1,3]],[[5,8],[3,3]]).
Si.

? suma-matrices([[4,3] , [2,0]] , [[1,5] , [1,3]] , L).
Si
L = [[5,8] , [3,3]].

P.L escalarxfila y escalarxmatriz

```
/* escalarxfila(x,L1,L2) ≡ L2 := x.L1 */
escalarxfila(x,[y | ys],[z | zs]) ← producto (x, y, z),
                                  escalarxfila(x,ys,zs).
escalarxfila(x,[ ],[ ]).
/* escalarxmatriz(x,A,B) ≡ B := x.A */
escalarxmatriz(x,[ys|A],[zs|B]) ←
                                  escalarxfila(x,ys,zs ),
                                  escalarxmatriz(x,A,B).
escalarxmatriz(x,[ ],[ ]).
```

Ejemplo

```
? escalarxfila(4,[3,8,2],[12,32,8]).
  Si.

? escalarxfila(4,[3,8,2],L).
  Si
  L = [12,32,8].
```

```
? escalarxmatriz(3, [ [4,3] , [2,0] ] , [ [12,9] , [6,0] ] ).
  Si.

? escalarxmatriz(3, [ [4,3] , [2,0] ] , L).
  Si
  L = [ [12,9] , [6,0] ].
```

Capítulo 3

- Relaciones binarias
- Grafos dirigidos

Relaciones binarias

Sean A y B dos conjuntos.
Una relación de A en B es un subconjunto del producto cartesiano de A y B.
Es decir, R es una relación de A en B si y sólo si

$$R \subset A \times B.$$

Decimos que R es una relación en A si R es una relación de A en A.
Si $(a,b) \in R$ decimos que "a está relacionado con b por la relación R" y escribimos: aRb.

Dominio y Rango

Sea R es una relación de A en B.

El dominio de R (Dom(R)), es el subconjunto de A de todos los primeros elementos de los pares que forman R.

El rango de R (Ran(R)), es el subconjunto de B de todos los segundos elementos de los pares que forman R.

Es decir:

$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in B : x\, R\, y\}$

$\mathrm{Ran}(R) = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A : x\, R\, y\}$

Ejemplo

Si A es el conjunto de los alumnos de la facultad y B es el conjunto de los cursos que se dictan en la facultad.

La relación: M = " . . . está matriculado en . . ." es una relación de A en B definida por:

xMy si y sólo si "x está matriculado en y".

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4\}$.
Son relaciones de A en B:

$R1 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x < y\}$
$\quad = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

$\mathrm{Dom}(R1) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{Ran}(R1) = \{2,4\}$.

$R2 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x = y\}$
$\quad = \{(2,2)\}$

$\mathrm{Dom}(R2) = \{2\}$, $\mathrm{Ran}(R2) = \{2\}$.

$R3 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x + y = 5\}$
$= \{(1,4), (3,2)\}$
Dom (R3) = {1,3} , Ran (R3) = {2,4} .

$R4 = \phi$
Dom (R4) = ϕ , Ran (R4) = ϕ .
$R5 = A \times B$
Dom (R5) = A , Ran (R5) = B .

Relación Inversa

Sea R una relación de A en B,
la relación inversa de R es una relación de B en A que se representa por R^{-1}
y se define por:

$xR^{-1}y$ si y sólo si yRx.

Ejemplo

Sea $R = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$ una relación en $A = \{1,2,3\}$,
entonces :
$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}$.

Operaciones Booleanas

Se definen las operaciones booleanas $\vee$ y $\wedge$ en el conjunto B = {0,1}, con las siguientes tablas:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Matrices Booleanas

Una matriz booleana es una matriz cuyas componentes son ceros o unos.

Operaciones con matrices booleanas

1) Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices booleanas de dimensión mxn, se definen:

$A \vee B = [c_{ij}]_{mxn}$, donde $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.

$A \wedge B = [d_{ij}]_{mxn}$, donde $d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$.

2) Sean $A = [a_{ij}]_{mxp}$ y $B = [b_{ij}]_{pxn}$ matrices booleanas, se define:

$A \bullet B = [e_{ij}]_{mxn}$, donde
$e_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})$

Ejemplo

Si $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces:

$A \vee B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A \wedge B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A \bullet B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz de una Relación

Si $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y
R es una relación de A en B,
entonces la matriz de R, que se representa por M(R), se define por:

$M(R) = [m_{ij}]_{mxn}$ donde:
$m_{ij} = 1 \leftrightarrow (a_i, b_j) \in R$ y
$m_{ij} = 0 \leftrightarrow (a_i, b_j) \notin R$.

Ejemplo

Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$ y
$R = \{(1,2),(2,2),(2,4),(3,4)\}$,
entonces:

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Si R y S son relaciones en un conjunto finito no vacío A, entonces:

1) $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$
2) $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$
3) $M(R^{-1}) = M(R)^T$

Grafo de una Relación

Si A es un conjunto finito y R es una relación en A, se dibuja un círculo, llamado vértice, para cada elemento de A
Se traza una línea dirigida, llamada arista, del vértice a al vértice b si y sólo si aRb.

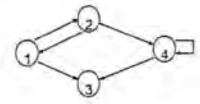
Ejemplo

Sea R = {(1,2),(1,3),(2,1)(2,4),(4,3),(4,4)} una relación en A = {1,2,3,4}.

Luego:

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y el grafo de R:



Trayectorias

Sea R una relación en A.

Una Trayectoria de longitud n de x a y en R es una sucesión finita $T = x, x_1, \dots, x_{n-1}, y$ que se inicia con x y termina con y tal que:

$$xRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_{n-1}Ry.$$

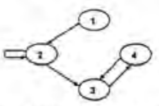
Un ciclo es una trayectoria que se inicia y termina en el mismo vértice.

Un lazo es un ciclo de longitud uno.

Ejemplo

Sea R = {(1,2),(2,2)(2,3),(3,4),(4,3)},una relación en A = { 1,2,3,4}

El grafo de R:



T1 = 1,2,3,4 es una trayectoria de longitud 3.

T2 = 3,4,3 es un ciclo de longitud 2.

T3 = 2,2 es un Lazo.

Potencia de una Relación

Se define la relación R^n en A por:

xR^ny si y sólo si existe una trayectoria de longitud n de x a y en R.

$(R^1 = R)$

La relación de conectividad

La relación de conectividad de R se representa por R^∞ y se define por:

$xR^\infty y$ si y sólo si existe una trayectoria de x a y en R.

Luego : $R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

La relación de accesibilidad

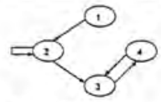
La relación de accesibilidad de R se representa por R^* y se define por: xR^*y si y sólo si $xR^\infty y \lor x = y$.

La relación de igualdad en A se representa por Δ_A y se define por: $\Delta_A = \{ (x,y) \in A \times A \,/\, x = y \}$.

Luego: $R^* = R^\infty \cup \Delta_A$

Ejemplo

Si el grafo de R es:



Entonces:

$R^1 = \{(1,2),(2,2)(2,3),(3,4),(4,3)\}$.

$R^2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

$R^3 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3)\}$.

$R^\infty = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

Potencia de una matriz

Si M(R) es la matriz de R,
se define recursivamente $M(R)^n$ por:

$M(R)^1 = M(R)$

$M(R)^n = M(R) \bullet M(R)^{n-1}$, $n > 1$.

Teorema

Sea R una relación en A y $n \geq 1$, entonces:

$M(R^n) = M(R)^n$

Composición de Relaciones

Sean A, B y C conjuntos.
Si R es una relación de A en B
y S es una relación de B en C,
la compuesta de R y S que se representa
por (R o S) es una relación de A en C
que se define por:

a(R o S)c si y sólo si existe un $b \in B$ tal que:
aRb y bSc.

Ejemplo

Sean $R = \{ (1,1),(2,3)\}$
y $S = \{(1,2),(1,3),(3,2),(3,1)\}$
relaciones en el conjunto $A = \{1,2,3\}$,
entonces:

$R \text{ o } S = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,1)\}$

y $S \text{ o } R = \{(1,3), (3,3), (3,1)\}$.

Teorema

Sean A, B y C conjuntos finitos no vacíos.
Si R es una relación de A en B
y S es una relación de B en C, entonces:

$M(R \text{ o } S) = M(R) \bullet M(S)$

Teorema

$R^2 = R \circ R$

$(M(R \circ R) = M(R) \bullet M(R) = M(R)^2 = M(R^2))$

Teorema

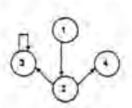
Si R es una relación en A y $n > 1$, entonces:

$R^n = R \circ R^{n-1}$.

Ejemplo

Dada la relación $R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,3)\}$.

Su grafo es:



$R^2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,3)\} = R \circ R$

Relaciones Reflexivas

Una relación R en el conjunto A es reflexiva, si

$xRx \quad \forall x \in A$

La matriz de una relación reflexiva tiene toda su diagonal principal formada por unos.

El digrafo de una relación reflexiva tiene un lazo en cada vértice.

Luego: R es una relación reflexiva en A si y sólo si

$\Delta_A \subset R$.

Relaciones Simétricas

Una relación R en el conjunto A es simétrica si cuando xRy entonces yRx.

La matriz de una relación simétrica es una matriz simétrica.

Si en el digrafo de una relación simétrica existe una arista del vértice a al vértice b, entonces existe una arista del vértice b al vértice a.

Luego: R es una relación simétrica en A si y sólo si

$R = R^{-1}$.

Relaciones Antisimétricas

Una relación R en el conjunto A es antisimétrica si cuando xRy y yRx entonces x=y.

La matriz $M(R) = [m_{ij}]$ de una relación antisimétrica es tal que si $i \neq j$, entonces $(m_{ij}) \wedge (m_{ji}) = 0$.

En el digrafo de una relación antisimétrica para vértices a y b distintos no puede haber una arista del vértice a al vértice b y una arista del vértice b al vértice a.

Luego: R es una relación antisimétrica en A si y sólo si $(R \cap R^{-1}) \subset \Delta_A$.

Relaciones Transitivas

Una relación R en el conjunto A es transitiva si cuando xRy y yRz entonces xRz.
La matriz $M(R) = [m_{ij}]$ de una relación transitiva es tal que si $m_{ik} = 1$ y $m_{kj} = 1$ entonces $m_{ij} = 1$.
Si en el digrafo de una relación transitiva existe una trayectoria del vértice a al vértice b, entonces existe una trayectoria de longitud uno del vértice a al vértice b.
Luego: R es una relación transitiva en A si y sólo si $R^n \subseteq R,\ \forall n \geq 1$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \Delta_A = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x = y\}$.

R es reflexiva, pues $x = x \quad \forall x \in A$.
R es simétrica, pues si $x = y$, entonces $y = x$.
R es antisimétrica, pues si $x = y$ y $y = x$, entonces $x = y$.
R es transitiva, pues si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x.y = 0\}$.

R no es reflexiva, ya que por ejemplo: $(1)(1) \neq 0$.
R es simétrica, pues si $x.y = 0$, entonces $y.x = 0$.
R no es antsimétrica, ya que por ejemplo:
$(2)(0) = 0$ y $(0)(2) = 0$, pero $2 \neq 0$.
R no es transitiva, ya que por ejemplo:
$(2)(0) = 0$ y $(0)(1) = 0$, pero $(2)(1) \neq 0$.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $R = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x \leq y\}$.

R es reflexiva, pues $x \leq x \quad \forall x \in A$.
R no es simétrica, ya que por ejemplo:
$1 \leq 2$, pero $2 \nleq 1$.
R es antsimétrica, pues si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.
R es transitiva, pues si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Relaciones de Equivalencia

Una relación R es de equivalencia, si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Clases de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en A.

Si $a \in A$, entonces $[a] = \{x \in A \,/\, xRa\}$ es la clase de equivalencia de a.

Conjunto cociente

Sea R una relación de equivalencia en A.

El conjunto cociente es el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de A, y se lo representa por A/R.

Luego: $A/R = \{ [a] / a \in A\}$.

Ejemplo

Sea $R = \{ (x,y) \in A \times A$ / 3 es divisor de $(x-y) \}$ una relación en $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Entonces R es una relación de equivalencia

$[0] = \{0,3,6\} = [3] = [6]$

$[1] = \{1,4\} = [4]$

$[2] = \{2,5\} = [5]$

Luego $A/R = \{ [0] , [1] , [2] \}$.

Teorema

Sea R una relación de equivalencia en A y $a , b \in A$, entonces:

1) $[a] = [b] \leftrightarrow aRb$.

2) $[a] \neq [b] \leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$.

Particiones

Una partición de un conjunto no vacío A es una colección $P = \{A_1, ..., A_n\}$ de subconjuntos no vacíos de A tales que:

I) $A_i \cap A_j = \varnothing$, si $i \neq j$.

II) $A_1 \cup ... \cup A_n = A$.

Los subconjuntos $A_i \in P$, son llamados celdas de la partición.

Teorema

1) Dada una relación de equivalencia R en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición de A

(Las celdas de la partición son las clases de equivalencia).

2) Dada una partición P de A, entonces la relación R definida por:

$xRy \leftrightarrow \exists A_i \in P: x \in A_i$ y $y \in A_i$,

es una relación de equivalencia.

(Las clases de equivalencia son las celdas de la partición).

Relaciones de Orden

Una relación R es de orden parcial, si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto A con la relación de orden parcial R es llamado un conjunto parcialmente ordenado, y se escribe: (A,R), o $(A,\leq)$, o sencillamente A.

Si a y b son elementos de un conjunto parcialmente ordenado $(A , \leq)$, se dice que:

$a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.

Orden dual

Si R es un orden parcial en el conjunto A, entonces R^{-1} es también un orden parcial en A llamado el dual del orden parcial R.

El conjunto parcialmente ordenado (A, R^{-1}) es llamado el dual del conjunto parcialmente ordenado (A,R).

Elementos comparables

Sea (A,$\leq$) es un conjunto parcialmente ordenado.

Los elementos a y b son comparables, si $a \leq b$ o $b \leq a$.

Orden total

Si cada par de elementos de un conjunto parcialmente ordenado A es comparable, se dice que A es un conjunto totalmente ordenado y al orden parcial se le llama orden total.

Ejemplo

Sea A la colección de todos los subconjuntos de un conjunto $S \neq \varnothing$.
La relación de inclusión $\subset$ es una relación de orden parcial en A.
Luego (A, $\subset$) es un conjunto parcialmente ordenado, pero no es un conjunto totalmente ordenado.

Ejemplo

Sea IR el conjunto de los números reales.

La relación $\leq$ donde $a \leq b \leftrightarrow (b-a) \in IR_0^+$, es un orden total en IR, como también lo es su dual $\geq$ donde $a \geq b \leftrightarrow (a-b) \in IR_0^+$.

Ejemplo

La relación de divisibilidad R definida por $aRb \leftrightarrow a \mid b$, donde $a \mid b \leftrightarrow$ a es divisor de b, es un orden parcial en Z^+, pero no es un orden total.
El dual de la relación "es divisor de" es "es múltiplo de" .

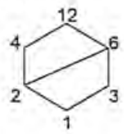
Diagramas de Hasse

Los diagramas de Hasse son diagramas para las relaciones de orden parcial, más sencillos que los grafos dirigidos correspondientes.

Para simplificar, se borrarán todos los lazos, al sobrentenderse que la relación es reflexiva. Asimismo, eliminamos las aristas que están implicadas por la propiedad transitiva.
Como la relación es antisimétrica, también convenimos en dibujar todas las aristas apuntando hacia arriba, pudiendo entonces omitirse las flechas en las aristas.
Finalmente, los círculos para representar los vértices se reemplazan por puntos.

Ejemplo

Sea D_{12} el conjunto de los divisores positivos de 12.
Si R es la relación de divisibilidad en D_{12},
el diagrama de Hasse de esta relación de orden parcial es:

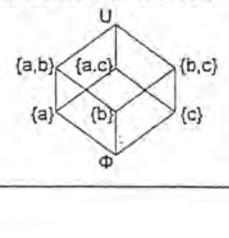


Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3,4\}$, si definimos la relación R en A por $aRb \leftrightarrow a \leq b$, donde $a \leq b \leftrightarrow (b-a) \in IR_0^+$, el diagrama de Hasse del orden total R es:

Ejemplo

Sea $U = \{a,b,c\}$ y sea $A = P(U)$, la colección de todos los subconjuntos de U. El diagrama de Hasse de la relación de inclusión $\subset$ en A es:



Orden Parcial Producto

Sean $(A_1, \leq_1)$ y $(A_2, \leq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados.
El conjunto $(A_1 \times A_2, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, si $\leq$ es el orden parcial producto que se define por:
$(a_1,a_2) \leq (b_1,b_2)$ si y sólo si $a_1 \leq_1 b_1$ y $a_2 \leq_2 b_2$.

Ejemplo

Sean $A_1 = \{0,1\}$ y $A_2 = \{O,I\}$
dos conjuntos parcialmente ordenados.
Si:

A_1: 1 — 0 A_2: I — O   entonces $(A_1 x A_2, \leq)$: (1,I), (0,I), (1,O), (0,O)

donde $\leq$ es el orden parcial producto.

Maximales y Minimales

Sea $(A, \leq)$ un cojunto parcialmente ordenado.

Un elemento $a \in A$ es un elemento maximal de A, si no existe un elemento $c \in A$ tal que $a < c$.

Un elemento $a \in A$ es un elemento minimal de A, si no existe un elemento $c \in A$ tal que $c < a$.

Teorema

Un conjunto parcialmente ordenado
no vacío y finito, tiene:
al menos un elemento maximal
y al menos un elemento minimal.

Máximos y Mínimos

Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.
Un elemento $a \in A$ es el elemento máximo de A, si $a \geq x$, $\forall x \in A$.
Un elemento $a \in A$ es un elemento mínimo de A, si $a \leq x$, $\forall x \in A$.

Teorema

Un conjunto parcialmente ordenado, tiene:
a lo más un elemento máximo
y a lo más un elemento mínimo.

Cotas superiores y cotas inferiores

Sean $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado
y B un subconjunto de A.

Un elemento $a \in A$ es una cota superior de B, si $a \geq x$, $\forall x \in B$.

Un elemento $a \in A$ es una cota inferior de B, si $a \leq x$, $\forall x \in B$.

Supremos e Ínfimos

Sean $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y B un subconjunto de A.

Un elemento $a \in A$ es el supremo (mínima cota superior) de B, si a es una cota superior de B y si c es también una cota superior de B entonces $a \leq c$.

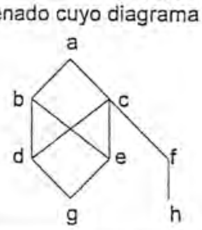
Un elemento $a \in A$ es el ínfimo (máxima cota inferior) de B, si a es cota inferior de B y si c es también una cota inferior de B entonces $a \geq c$.

Teorema

Sean A un conjunto parcialmente ordenado y B un subconjunto de A, entonces B tiene: a lo más un supremo y a lo más un ínfimo.

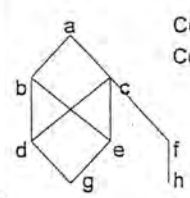
Ejemplo

Sea $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es:



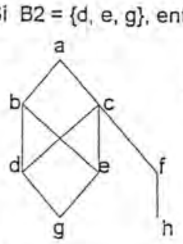
maximales de A: a.
minimales de A : g, h.
máximo de A: a
mínimo de A: no existe.

Si $B1 = \{e, f, g, h\}$, entonces :



Cotas Superiores de B1: a, c.
Cotas inferiores de B1: no existen.
Supremo de B1: c.
Ínfimo de B1: no existe.

Si $B2 = \{d, e, g\}$, entonces:



Cotas Superiores de B2: a, b, c.
Cotas inferiores de B2: g.
Supremo de B2: no existe.
Ínfimo de B2: g.

Capítulo 4

- Retículos
- Álgebras de Boole

Retículos

Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que cada subconjunto $\{a,b\}$, de dos elementos, tiene supremo e ínfimo.

Al supremo de $\{a,b\}$ se lo denota por: $a \vee b$,
y al ínfimo de $\{a,b\}$ se lo denota por: $a \wedge b$.

Ejemplo

Sea S un conjunto
y sea $L = P(S)$ el conjunto potencia de S.

Si A y B son elementos del conjunto parcialmente ordenado $(L, \subset)$, se tiene que:

$$A \vee B = A \cup B \in L$$

y $$A \wedge B = A \cap B \in L,$$

entonces $(L, \subset)$ es un retículo.

Ejemplo

Sea n un entero positivo,
y sea D_n el conjunto de todos los divisores positivos de n.
Entonces $(D_n, |)$, donde $a \mid b$ significa "a es divisor de b", es un retículo, ya que si a y b son elementos de D_n se tiene que:

$$a \vee b = \text{M.C.M.}(a,b) \in D_n,$$

y $$a \wedge b = \text{M.C.D.}(a,b) \in D_n.$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$.
El conjunto parcialmente ordenado $(A, |)$,
cuyo diagrama de Hasse es:

No es un retículo, ya que no existe $(2 \vee 3)$.

Sub-retículo

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sea S un subconjunto no vacío de L.

S es un sub-retículo de L si :

$$(a \vee b) \in S \text{ y } (a \wedge b) \in S,$$

para todo a y b que pertenecen a S.

Ejemplo

El conjunto D_n de todos los divisores positivos, de un entero positivo n, es un sub-retículo de Z^+ bajo la relación de divisibilidad.

Retículo producto

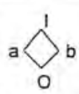
Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
El retículo producto de L_1 por L_2 es el retículo $(L_1 \times L_2, \leq)$, donde $\leq$ es el orden parcial producto.

En $(L_1 \times L_2, \leq)$, se verifica que:

$$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2) \in L_1 \times L_2$$
$$(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2) \in L_1 \times L_2$$

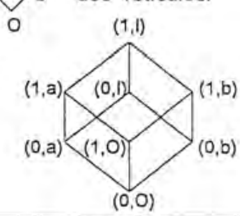
Ejemplo

Sean L_1: 

y L_2: 

dos retículos.

Entonces el retículo producto $L_1 \times L_2$ es:



isomorfismos

Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
Una función biyectiva f de L_1 en L_2 es un isomorfismo de L_1 en L_2 si:

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$$
y $$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$$

para todo a y b en L_1.

Retículos isomorfos

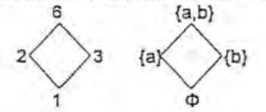
Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
Si existe un isomorfismo de L_1 en L_2, se dice que L_1 y L_2 son isomorfos.

Teorema

Si $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ son retículos isomorfos y f es un isomorfismo de L_1 en L_2, entonces:
$a \leq_1 b$ si y sólo si $f(a) \leq_2 f(b)$, $\forall\, a, b \in L_1$.

Ejemplo

Sea L_1 el retículo $(D_6, |)$ y sea L_2 el retículo $(P(\{a,b\}), \subset)$.
Los diagramas de Hasse de estos retículos son:



Entonces la función f de L_1 en L_2 definida por:
$f(1) = \varnothing$, $f(2) = \{a\}$, $f(3) = \{b\}$ y $f(6) = \{a,b\}$
es un isomorfismo de L_1 en L_2, luego L_1 y L_2 son isomorfos.

Ejemplo

Los retículos $(D_{12}, |)$ y $(D_{18}, |)$, cuyos diagramas son:

Son retículos isomorfos.

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a y b elementos de L, entonces:

(1) $a \vee b = b \leftrightarrow a \leq b$
(2) $a \wedge b = a \leftrightarrow a \leq b$
(3) $a \vee b = b \leftrightarrow a \wedge b = a$

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a, b y c elementos de L, entonces:
(1) (Propiedad de Idempotencia)
$a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$.
(2) (Propiedad Conmutativa)
$a \vee b = b \vee a$ y $a \wedge b = b \wedge a$.
(3) (Propiedad Asociativa)
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ y $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.
(4) (Propiedad de Absorción)
$a \vee (a \wedge b) = a$ y $a \wedge (a \vee b) = a$.

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a, b y c elementos de L, entonces:
(1) $(a \leq b)$ entonces $(a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c)$.
(2) $(a \leq c$ y $b \leq c)$ si y sólo si $(a \vee b \leq c)$.
(3) $(c \leq a$ y $c \leq b)$ si y sólo si $(c \leq a \wedge b)$.
(4) $(a \leq b$ y $c \leq d)$ entonces
$(a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d)$.

Retículos acotados

Un retículo es acotado,
si tiene un elemento máximo I
y un elemento mínimo O.

Teorema

Si L es un retículo acotado y $a \in L$, entonces:

(1) $O \leq a \leq I$
(2) $a \vee O = a$ y $a \wedge I = a$
(3) $a \vee I = I$ y $a \wedge O = O$

Teorema

Si L es un retículo finito, entonces L es acotado.

Complementos

Sea L un retículo acotado y sea $a \in L$.

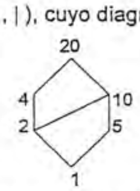
Un elemento $a' \in L$ es un complemento de a, si $a \vee a' = I$ y $a \wedge a' = O$.

Retículos Complementados

Un retículo L es complementado, si es acotado y cada elemento de L tiene complemento.

Ejemplo

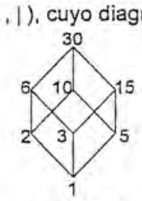
El retículo $(D_{20}, |)$, cuyo diagrama de Hasse es:



Es acotado, pero no es complementado ya que los elementos 2 y 10 no tienen complemento.

Ejemplo

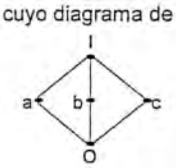
El retículo $(D_{30}, |)$, cuyo diagrama de Hasse es:



Si $a \in D_{30}$ entonces $a' = 30/a$, luego es un retículo complementado.

Ejemplo

El retículo cuyo diagrama de Hasse es:



es complementado.
El complemento de c no es único ya que a y b son complementos de c .

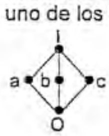
Retículos distributivos

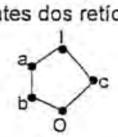
Un retículo L es distributivo si para todo a, b y c en L, se cumplen las leyes distributivas:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Teorema

Un retículo L es distributivo si y sólo si L no contiene un sub-retículo isomorfo con uno de los siguientes dos retículos:





Teorema

Sea L un retículo acotado y distributivo .

Si el complemento de $a \in L$ existe, entonces el complemento de a es único .

Teorema

Sea L un retículo complementado y distributivo.

Si $a \in L$, entonces el complemento de a existe y es único .

Retículos Booleanos

Un retículo es booleano, si es complementado, distributivo y con al menos dos elementos.

Ejemplo

El retículo (P(U), $\subset$) , donde P(U) es el conjunto potencia de un conjunto no vacío U y $\subset$ es la relación de inclusión, es booleano.

En este retículo: $O = \varnothing$, $I = U$
y si $A \in P(U)$ entonces $A' = A^c$.

Teorema

Todo retículo booleano finito es isomorfo con el retículo (P(U), $\subset$), para algún conjunto U.

Teorema

Todo retículo booleano finito tiene 2^n elementos, para algún entero positivo n.

Teorema

Sea L un retículo booleano y sean a y b elementos de L, entonces:

(1) (Propiedad de involución)
$(a')' = a$.

(2) (Leyes de De Morgan)
$(a \vee b)' = a' \wedge b'$
$(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Teorema

Sea $n = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_k^{r_k}$
donde $P_1, P_2, \dots, P_k$ son números primos distintos y $r_1, r_2, \dots, r_k$ son enteros positivos, entonces:
El retículo $(D_n, |)$ es booleano si y sólo si $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$.

Ejemplo

El retículo $(D_{20}, |)$ no es booleano,
ya que: $20 = 2^2 \cdot 5^1$

Ejemplo

El retículo (D_{30} , |) es booleano,
ya que: $30 = 2^1.3^1.5^1$.

Teorema

Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos booleanos, entonces $(L_1 \times L_2, \leq)$, donde $\leq$ es el orden parcial producto, es un retículo booleano.

Algebras Booleanas

Una álgebra booleana es un séxtuple (A, +, *, ', 0, 1)
Donde:
A es un conjunto,
0 y 1 son elementos de A ($0 \neq 1$),
\+ y * son operaciones binarias en A,
' es una operación unaria en A.

De manera que para todo a, b y c elementos de A se tiene:

(I) (Propiedad conmutativa)
$a + b = b + a$, $a * b = b * a$.

(II) (Propiedad de identidad)
$a + 0 = 0 + a = a$, $a * 1 = 1 * a = a$.

(III) (Propiedad del complemento)
$a + a' = 1$, $a * a' = 0$.

(IV) (Leyes distributivas)
$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$, $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$

Ejemplo

Sea P(U) la colección de subconjuntos de un conjunto no vacío U y sean A y B elementos de P(U).
Si definimos las operaciones +, * y ' por:

$A + B = A \cup B$
$A * B = A \cap B$
$A' = A^c$

y definimos los elementos 0 y 1 de P(U) por:
$0 = \varnothing$ y $1 = U$,
entonces P(U) es un álgebra booleana.

Ejemplo

Sea π el conjunto de las proposiciones lógicas y sean p y q elementos de π.
Si definimos las operaciones +, * y ' por:

p + q = p o q
p * q = p y q
$p' = \sim p$

y definimos los elementos 0 y 1 de π por:
0 = F y 1 = V,
entonces π es un álgebra booleana.

Ejemplo

Sea D_n el conjunto de todos los divisores positivos del entero positivo n, con $n = P_1 \dots P_k$ donde $P_1, \dots, P_k$ son números primos distintos y sean a y b elementos de D_n

Si definimos las operaciones + , * y ' por:

$a + b = MCM(a,b)$

$a * b = MCD(a,b)$

$a' = n / a$

y definimos los elementos 0 y 1 de D_n por:

$0 = 1$ y $1 = n$,

entonces D_n es un álgebra booleana.

Teorema

Sea A un álgebra booleana y sean a, b y c elementos de A, entonces:

(1) (Propiedad de idempotencia)
$a + a = a$, $a * a = a$.

(2) (Propiedad de acotamiento)
$a + 1 = 1$, $a * 0 = 0$.

(3) (Propiedad de absorción)
$a + (a * b) = a$, $a * (a + b) = a$.

---

(4) (Propiedad asociativa)
$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(5) (Unicidad del complemento)
Si $a + x = 1$ y $a * x = 0$, entonces $x = a'$.

(6) (Propiedad de involución)
$(a')' = a$.

(7) (Propiedad de los opuestos)
$0' = 1$, $1' = 0$.

(8) (Leyes de De Morgan)
$(a + b)' = a' * b'$, $(a * b)' = a' + b'$.

Teorema

(1) Dada un álgebra booleana $(A, +, *, ', 0, 1)$, es posible definir un retículo booleano $(A, \leq)$ donde para a y b elementos de A:

$a \leq b$ si y sólo si $a + b = b$.

---

(2) Dado un retículo booleano $(A, \leq)$, es posible definir un álgebra booleana $(A, +, *, ', 0, 1)$ donde para a y b elementos de A:

$a + b = a \vee b$

$a * b = a \wedge b$

$a' = a'$

$1 = I$

$0 = O$.

Ejemplo

Sea $L = P(U)$, donde U es un conjunto no vacío.

Si A y B son elementos de L, entonces:

$A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

$A + B = A \vee B = A \cup B$

$A * B = A \wedge B = A \cap B$

$A' = A^c$

$0 = O = \varnothing$

$1 = I = U$.

Ejemplo

Sea D_n el conjunto de los divisores positivos de n,
con $n = P_1 \dots P_k$,
donde $P_1, \dots, P_k$ son números primos distintos.
Si a y b son elementos de D_n, entonces:

$a \mid b$ si y sólo si MCM(a,b) = b.
$a + b = a \vee b$ = M. C. M. (a,b)
$a * b = a \wedge b$ = M. C. D. (a,b)
$a' = n / a$
$0 = O = 1$
$1 = I = n$.

Teorema

Sean $(A_1, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ y $(A_2, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ dos álgebras booleanas, entonces $(A_1 \times A_2, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ es un álgebra booleana si:

$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2)$
$(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2)$
$(a_1, a_2)' = (a'_1, a'_2)$
$0 = (0, 0)$
$1 = (1, 1)$.

Ejemplo

Sea $B = \{0, 1\}$, si definimos $\vee$, $\wedge$ y $'$ por:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$'$
0	1
1	0

entonces $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ es un álgebra booleana.

Si $B^1 = B$ y $B^n = B \times B^{n-1}$ para $n > 1$, entonces B^n es un álgebra booleana.

Expresiones booleanas

Sea A un álgebra booleana, una expresión booleana se define recursivamente por:

1) Cualquier elemento de A es una expresión booleana.
2) Cualquier variable que represente un elemento de A es una expresión booleana.
3) Si E_1 y E_2 son expresiones booleanas entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E'_1 son expresiones booleanas.

Expresiones equivalentes

Dos expresiones booleanas E_1 y E_2 son equivalentes, si es posible convertir una expresión en la otra usando un número finito de propiedades del álgebra boolena.

Ejemplo

Las expresiones booleanas:

$E_1(X, Y) = ((X \vee 0) \vee (Y' \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y)' \wedge 1)$
$E_2(X, Y) = X \wedge Y'$

son equivalentes .

Mintérminos y Maxtérminos

Sea $E(X_1, \dots, X_n)$ una expresión booleana.

- E es un mintérmino si es de la forma:
  $E(X_1, \dots, X_n) = \underline{X}_1 \wedge \dots \wedge \underline{X}_n$,
  donde $\underline{X}_i = X_i$ o $\underline{X}_i = X'_i$ $(i = 1, \dots, n)$
- E es un maxtérmino si es de la forma:
  $E(X_1, \dots, X_n) = \underline{X}_1 \vee \dots \vee \underline{X}_n$,
  donde $\underline{X}_i = X_i$ o $\underline{X}_i = X'_i$ $(i = 1, \dots, n)$

Formas Normales

Sea $E(X_1, \dots, X_n)$ una expresión booleana.

- E está en forma normal disyuntiva, si es una disyunción de mintérminos.
- E está en forma normal conjuntiva, si es una conjunción de maxtérminos.

Ejemplo

$E_1(X, Y, Z) = (X \wedge Y' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z') \vee (X' \wedge Y \wedge Z')$
está en forma normal disyuntiva.

$E_2(X, Y, Z) = (X \vee Y' \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee Z')$
está en forma normal conjuntiva.

Funciones booleanas en B^n

Dado el álgebra booleana $B = \{0,1\}$, una función booleana en B^n es una función $f : B^n \to B$.

Ejemplo

Dada la expresión booleana
$E(X, Y, Z) = (X' \vee Y) \wedge (X \vee (Y' \wedge Z))$.
Si $f(X, Y, Z)$ es la función boleana en B^3 definida por: $f(X, Y, Z) = E(X, Y, Z)$,
entonces la tabla de la función $f(X, Y, Z)$ es:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	1	0	0	0	0	1	1

Teorema

Toda función booleana en B^n puede definirse por una expresión booleana en forma normal disyuntiva y por una expresión booleana en forma normal conjuntiva.

Ejemplo

Sea $f: B^2 \to B$ una función booleana en B^2, definida por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	0	1	1	0

Entonces:

$f(X, Y) = (X' \wedge Y) \vee (X \wedge Y')$ (F.N.D.)

$f(X, Y) = (X \vee Y) \wedge (X' \vee Y')$ (F.N.C.)

Ejemplo

Sea $f: B^3 \to B$ una función booleana definida por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	1	0	1	0	0	1	0

Entonces:

- f puede expresarse en F.N.D.

  $f(X,Y,Z) = (X' \wedge Y' \wedge Z) \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z')$
- f puede expresarse en F.N.C.

  $f(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y' \vee Z) \wedge (X' \vee Y \vee Z) \wedge (X' \vee Y \vee Z') \wedge (X' \vee Y' \vee Z')$
- Una expresión equivalente para f es:

  $f(X,Y,Z) = (X' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z')$

Mapas de Karnaugh

Los mapas de Karnaugh se utilizan para simplificar las expresiones de las funciones boolenas.

- Se colocan los unos de la tabla de verdad en la tabla de mintérminos.
- Se cubren los unos de la tabla de mintérminos por el menor número de rectángulos de área 2^k con la mayor suma de áreas.

- Si un rectángulo tiene área 2^k su expresión tiene (n-k) variables.
- La expresión para f es la disyunción de las expresiones correspondientes a cada rectángulo

Tabla de mintérminos para n = 2

	y'	y
x'		
x		

Tabla de mintérminos para n = 3

	y'	y'	y	y
x'				
x				
	z'	z	z	z'

Tabla de mintérminos para n = 4

	z'	z'	z	z	
x'					y'
x'					y
x					y
x					y'
	w'	w	w	w'	

Ejemplo

Si f: $B^2 \rightarrow B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	0	1	0	0

El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y
x'	0	1
x	0	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (x' \wedge y)$.

Ejemplo

Si f: $B^2 \rightarrow B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	1	0	1	0

El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y
x'	1	0
x	1	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (y')$.

Ejemplo

Si f: $B^2 \rightarrow B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	1	1	1	0

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (x') \vee (y')$.

Ejemplo

Si f: $B^3 \rightarrow B$ se define por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	1	1	0	1	1	0	0	1

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y'	y	y
x'	1	1	1	0
x	1	0	1	0
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (Y' \wedge Z') \vee (X' \wedge Y') \vee (Y \wedge Z)$.

Ejemplo

Si $f: B^3 \to B$ se define por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	1	0	1	0	1	0	1	1

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y'	y	y
x'	1	0	0	1
x	1	0	1	1
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (Z') \vee (X \wedge Y)$.

Ejemplo

Dado el mapa de Karnaugh de una función $f: B^4 \to B$

	z'	z'	z	z	
x'	1	0	0	1	y'
x'	0	1	1	0	y
x	0	1	1	0	y
x	1	0	0	1	y'
	w'	w	w	w'	

La expresión para f es:

$f(X, Y, Z, W) = (Y \wedge W) \vee (Y' \wedge W')$.

Ejemplo

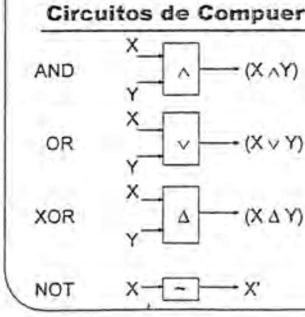
Dado el mapa de Karnaugh de una función $f: B^4 \to B$

	z'	z'	z	z	
x'	1	1	1	1	y'
x'	0	0	0	0	y
x	0	0	1	0	y
x	1	1	0	0	y'
	w'	w	w	w'	

La expresión para f es:

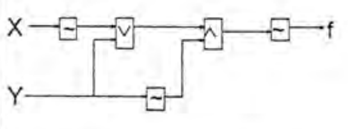
$f(X,Y,Z,W) = (X \wedge Y \wedge Z \wedge W) \vee (Y' \wedge Z') \vee (X' \wedge Y')$.

Circuitos de Compuertas



Ejemplo

Dado el circuito:



La expresión corrrespondiente es:

$f(X,Y) = [\,(X' \vee Y) \wedge Y'\,]'$

La tabla de f es:

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f(x,y)	0	1	1	1

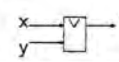
El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y
x'	0	1
x	1	1

Entonces una expresión más simple para f es:

$f(X,Y) = (X) \vee (Y)$

y el circuito correspondiente es:



Ejemplo

Si la tabla de f(X,Y,Z) es:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	0	0	1	0	1	1	1

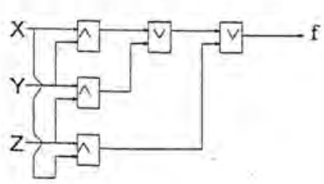
El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y'	y	y
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$

El circuito correspondiente es:



Ejemplo

Un circuito recibe como entrada un número entero representado en complemento a uno en tres bits, y entrega como salida el mismo número pero representado en signo y magnitud en tres bits.

a. Expresar cada bit de salida como una función de los bits de entrada, en forma normal disyuntiva.

b. Simplificar las funciones, usando mapas de Karnaugh.

X	Y	Z	N	A	B	C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	3	0	1	1
1	0	0	-3	1	1	1
1	0	1	-2	1	1	0
1	1	0	-1	1	0	1
1	1	1	-0	1	0	0

$A = (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z') \vee (X \wedge Y \wedge Z).$

	y'	y'	y	y
x'	0	0	0	0
x	1	1	1	1
	z'	z	z	z'

$A = (X).$

$B = (X' \wedge Y \wedge Z') \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y' \wedge Z).$

	y'	y'	y	y
x'	0	0	1	1
x	1	1	0	0
	z'	z	z	z'

$B = (X \wedge Y') \vee (X' \wedge Y).$

$C = (X' \wedge Y' \wedge Z) \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y \wedge Z').$

	y'	y'	y	y
x'	0	1	1	0
x	1	0	0	1
	z'	z	z	z'

$C = (X \wedge Z') \vee (X' \wedge Z).$

Capítulo 5

- Máquinas de estado finito.

Máquinas

Una máquina de estado finito M es un quíntuple M = (A, S, Z, F, G), donde:

- A es un conjunto finito de símbolos de entrada llamado alfabeto de entrada.
- S es un conjunto finito de estados llamado conjunto de estados.
- Z es un conjunto finito de símbolos de salida llamado alfabeto de salida.
- F : S x A $\rightarrow$ S es la función de estados.
- G : S x A $\rightarrow$ Z es la función de salida.

Ejemplo

Sea M = (A, S, Z, F, G) una máquina tal que:

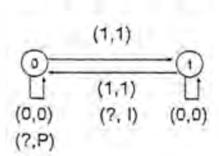
A = {0,1,?}, S = {0,1}, Z = {0,1,I,P },

F: S x A $\rightarrow$ S	y	G: S x A $\rightarrow$ Z
(0, 0) $\rightarrow$ 0		(0, 0) $\rightarrow$ 0
(0, 1) $\rightarrow$ 1		(0, 1) $\rightarrow$ 1
(0, ?) $\rightarrow$ 0		(0, ?) $\rightarrow$ P
(1, 0) $\rightarrow$ 1		(1, 0) $\rightarrow$ 0
(1, 1) $\rightarrow$ 0		(1, 1) $\rightarrow$ 1
(1, ?) $\rightarrow$ 0		(1, ?) $\rightarrow$ I

La tabla de estados de M es:

M	F			G		
S	0	1	?	0	1	?
0	0	1	0	0	1	P
1	1	0	0	0	1	I

El diagrama de estados de M es:



Funciones de estado y Salida para cadenas

Sea M = (A, S, Z, F, G)

dado un estado inicial: $s_o \in S$

y una cadena de entrada: $\underline{a} = a_1 \dots a_k \in A^k$.

M determina una cadena de salida: $\underline{z} = z_1 \dots z_k \in Z^k$

y una cadena de estados: $\underline{s} = s_1 \dots s_k \in S^k$,

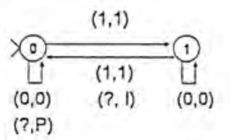
tales que: $F(s_{i-1}, a_i) = s_i$ y $G(s_{i-1}, a_i) = z_i$.

Definimos:

$$F_k: S \times A^k \rightarrow S^k \quad y \quad G_k: S \times A^k \rightarrow Z^k$$
$$(s_o, \underline{a}) \rightarrow \underline{s} \qquad\qquad (s_o, \underline{a}) \rightarrow \underline{z}$$

Ejemplo

Dada la máquina M:



Si la cadena de entrada es $\underline{a}$ = 0 1 1 0 ?,
entonces:

$F_5(0, \underline{a}) = \underline{s} = 0\ 1\ 0\ 0\ 0$,
$G_5(0, \underline{a}) = \underline{z} = 0\ 1\ 1\ 0\ P$.

Si la cadena de entrada es $\underline{a}$ = 1 1 1 0 ?,
entonces:

$F_5(0, \underline{a}) = \underline{s} = 1\ 0\ 1\ 1\ 0$,
$G_5(0, \underline{a}) = \underline{z} = 1\ 1\ 1\ 0\ I$.

Cubrimientos

Sean M = (A, S, Z, F, G) y M' = (A, S', Z, F', G') dos máquinas con los mismos alfabetos de entrada y los mismos alfabetos de salida.
M' cubre a M ($M' \geq M$),
si existe una función suryectiva
$\varphi: S \to S'$ tal que:
$G_k(s_i, \underline{a}) = G'_k(\varphi(s_i), \underline{a})$
$\forall K \in Z^+, \forall \underline{a} \in A^k, \forall s_i \in S$.

Teorema

La relación de cubrimiento de máquinas es reflexiva y transitiva.

Equivalencia de Máquinas

Dadas dos máquinas M y M'.

M es equivalente a M' ($M \equiv M'$),
Si M' cubre a M y M cubre a M'.

Teorema

La relación de equivalencia de máquinas es una relación de equivalencia.

Morfismos

Sean $M = (A, S, Z, F, G)$ y $M' = (A, S', Z, F', G')$ dos máquinas con los mismos alfabetos de entrada y los mismos alfabetos de salida.
Un morfismo de M a M' es una función

$\theta : S \to S'$ tal que:

$G(s_i, a_j) = G'(\theta(s_i), a_j)$,

$\theta(F(s_i, a_j)) = F'(\theta(s_i), a_j)$,

$\forall\, a_j \in A, \forall\, s_i \in S$.

Si θ es un morfismo de M a M:

- θ es un epimorfismo, si θ es suryectiva .
- θ es un monomorfismo, si θ es inyectiva .
- θ es un isomorfismo, si θ es biyectiva .

Isomorfismo de máquinas

M es isomorfa a M' ($M \approx M'$),
si existe un isomorfismo de M a M'.

Teorema

Todo epimorfismo de M a M' define un cubrimiento de M por M'.

Teorema

Si M es isomorfa a M',
entonces M es equivalente a M'.

Máquina Mínima

Dadas dos máquinas M y M'.

M' es una máquina mínima de M, si:
1) M' cubre a M
2) Si M'' cubre a M, entonces M' cubre a M''.

Estados equivalentes

Sea $M = (A, S, Z, F, G)$.
Un estado s_i es k-equivalente con un estado s_j ($s_i\ E_k\ s_j$), si $G_k(s_i, \underline{a}) = G_k(s_j, \underline{a})\ \forall\ \underline{a} \in A^k$.
Un estado s_i es equivalente con un estado s_j ($s_i\ E\ s_j$), si $s_i\ E_k\ s_j\ \forall\ k \geq 1$.

Teorema

E_k y E son relaciones de equivalencia en S.

Teorema

$E_k \subset E_{k-1}\ \forall\ k > 1$.

Minimización de Máquinas

1. Se halla E_1 y su correspondiente partición π_1.
2. Se halla E_2 y su correspondiente partición π_2.
3. Se sigue el proceso hasta que $E_k = E_{k-1}$ para algún k.
4. La última partición $\pi = \{ C_1, \dots, C_n \}$ es la correspondiente a la relación E.
5. Sea $s'_i \in C_i$ ($i = 1, \dots, n$). Se define $S' = \{s'_1, \dots, s'_n\}$.
6. Una máquina mínima de M es: $M' = (A, S', Z, F', G')$, donde F' y G' son respectivamente las restricciones de F y G a S'.

Ejemplo

Minimizar la màquina M definida por:

M	F			G		
S	a	b	c	a	b	c
1	2	4	5	1	0	0
2	1	4	4	0	1	1
3	2	2	5	1	0	0
4	3	2	2	0	1	1
5	6	4	3	1	0	0
6	8	9	6	0	1	1
7	6	2	8	1	0	0
8	4	4	7	1	0	0
9	7	9	7	0	1	1

1. $\pi_1 = \{ \{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4, 6, 9\} \}$

2.

	1	3	5	7	8
1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1
5			1	1	1
7				1	1
8					1

	2	4	6	9
2	1	1	1	0
4		1	1	0
6			1	0
9				1

$\pi_2 = \{ \{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4\ 6\}, \{9\} \}$

3.

	1	3	5	7	8
1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1
5			1	1	1
7				1	1
8					1

	2	4	6
2	1	1	0
4		1	0
6			1

$\pi_3 = \{ \{1, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4\}, \{6\}, \{9\} \}$

4.

	1	3	5	7	8
1	1	1	0	0	1
3		1	0	0	1
5			1	1	0
7				1	0
8					1

	2	4
2	1	1
4		1

$\pi_4 = \{ \{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\} \}$

5.

	1	3	8
1	1	1	1
3		1	1
5			1

	2	4
2	1	1
4		1

	5	7
5	1	1
7		1

$\pi_5 = \{ \{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\} \} = \pi_4$

Entonces:

$\pi = \{ \{1, 3, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{9\} \}$.

Sea φ: S $\rightarrow$ S' tal que:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ(s)	1	2	1	2	3	4	3	1	5

M' una máquina mínima de M es:

M'	F'			G'		
S'	a	b	c	a	b	c
1	2	2	3	1	0	0
2	1	2	2	0	1	1
3	4	2	1	1	0	0
4	1	5	4	0	1	1
5	3	5	3	0	1	1

Capítulo 6

- Lenguajes Formales.

Alfabetos y Cadenas

- Un alfabeto Σ es un conjunto finito no vacío.
- Una cadena w sobre Σ es una sucesión finita de elementos de Σ:

$$w = a_1 \ldots a_n,$$
$$a_i \in \Sigma \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Igualdad de cadenas

Si $w_1 = a_1 \ldots a_n$ y $w_2 = b_1 \ldots b_n$
son dos cadenas sobre Σ,

$$w_1 = w_2 \leftrightarrow a_i = b_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Longitud de una cadena

Sea $w = a_1 \ldots a_n$ una cadena Σ,
la longitud de la cadena w es: $| w | = n$.

Concatenación de cadenas

La concatenación de las cadenas

$$w_1 = a_1 \ldots a_n \quad y \quad w_2 = b_1 \ldots b_m$$

es la cadena: $w_1w_2 = a_1 \ldots a_nb_1 \ldots b_m$,
con $| w_1w_2 | = | w_1 | + | w_2 |$.

Definición de Σ^+

Se define Σ^+ por:
$\Sigma^+ = \{ w / w$ es una cadena sobre $\Sigma, | w | \geq 1 \}$.

Cadena nula

La cadena nula es la cadena ε tal que:

$\varepsilon w = w\varepsilon = w \quad \forall\, w \in \Sigma^+$,

con $|\,\varepsilon\,| = 0$.

Definición de Σ^*

Se define Σ^* por:

$\Sigma^* = \{\, w \,/\, w$ es una cadena sobre Σ, $|\,w\,| \geq 0\}$.

$(\, \Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\,\varepsilon\,\}\,)$

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces:

$\Sigma^+ = \{a, b, c, aa, cb, \ldots, aac, cbc, \ldots\}$.

Si $w_1 = abbc \in \Sigma^+$, con $|\,w_1\,| = 4$,

$w_2 = bacca \in \Sigma^+$, con $|\,w_2\,| = 5$, entonces:

$w_1w_2 = abbcbacca \in \Sigma^+$, con $|\,w_1w_2\,| = 9$,

$w_2w_1 = baccaabbc \in \Sigma^+$, con $|\,w_2w_1\,| = 9$,

pero $w_1w_2 \neq w_2w_1$.

Definición de a^n ($a \in \Sigma$ y $n \in Z^+$)

Si $a \in \Sigma$ y $n \in Z^+$, definimos:

$a^0 = \varepsilon$

$a^n = aa^{n-1}$, $n \geq 1$.

$(\ |\,a^n\,| = n\ )$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces:

$w_1 = a^2 = aa$

$w_2 = a^4 = aaaa$

$w_3 = a^2 a^4 = a^6 = aaaaaa$

$w_4 = a^4 a^2 = a^6 = aaaaaa$

$w_5 = ba^3cc = baaacc$

Teorema

Si Σ es un conjunto finito no vacío, entonces Σ^* es un conjunto infinito numerable.

Lenguajes Formales

Sea Σ es un conjunto finito no vacío.

L es un lenguaje formal sobre Σ,
si $L \subset \Sigma^*$.

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces son lenguajes sobre Σ los siguientes conjuntos:

$L_1 = \{ a, aa, ab, ac \}$,
$L_2 = \{ a^n c b^n \ / \ n \geq 0 \}$
$= \{ c, acb, aacbb, aaacbbb, \ldots \}$,
$L_3 = \varnothing$.

Ejemplo

Sea $L = \{ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \}$ un lenguaje sobre el alfabeto $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

$w_1 = 010 \in L$,
$w_2 = 100 \in L$,
pero $w_1 w_2 = 010100 \notin L$.

Operaciones con Lenguajes

Sean L_1 y L_2 dos lenguajes sobre el alfabeto Σ.

1) Intersección: $L_1 \cap L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \}$
2) Unión: $L_1 \cup L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ o } w \in L_2 \}$
3) Diferencia: $L_1 - L_2 = \{ w \ / \ w \in L_1 \text{ y } w \notin L_2 \}$
4) Concatenación: $L_1 L_2 = \{ w_1 w_2 \ / \ w_1 \in L_1 \text{ y } w_2 \in L_2 \}$
5) Clausura: $L^*_1 = \{ w_1 \ldots w_k \ / \ k \geq 1 \text{ y } w_i \in L_1, \ i = 1, \ldots, k \} \cup \{ \varepsilon \}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L_1 = \{ab, ac\}$ y $L_2 = \{ab, b\}$, entonces:

$L_1 \cap L_2 = \{ ab \}$
$L_1 \cup L_2 = \{ ab, ac, b \}$
$L_1 - L_2 = \{ ac \}$
$L_1 L_2 = \{ abab, abb, acab, acb \}$
$L_2 L_1 = \{ abab, abac, bab, bac \}$
$L^*_1 = \{ \varepsilon, ab, ac, abab, abac, acac, acab, ababab, \ldots \}$
$L^*_2 = \{ \varepsilon, ab, b, abab, abb, bb, bab, ababab, \ldots \}$

Expresiones Regulares

El conjunto de expresiones regulares (E.R.) sobre un alfabeto Σ es el conjunto de cadenas sobre el alfabeto: $\Sigma \cup \{ (,), \varnothing, |, ^* \}$

definido recursivamente por:

R1) $\varnothing$ es E.R.

R2) Si $a \in \Sigma$, entonces a es E.R.

R3) Si α y β son E.R., entonces $\alpha\beta$ es E.R.

R4) Si α y β son E.R., entonces $(\alpha \mid \beta)$ es E.R.

R5) Si α es E.R., entonces $(\alpha)^*$ es E.R.

Sea α una expresión regular sobre Σ.

Si $\alpha \in \Sigma$ o $\alpha = (\ldots)$,
entonces $(\alpha)^*$ se representa por: α^*

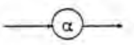
Ejemplo

Si $\Sigma = \{ a, b, c \}$,
entonces son expresiones regulares sobre Σ
las siguientes expresiones:

$\alpha_1 = a$
$\alpha_2 = abaac$
$\alpha_3 = (a \mid b)$
$\alpha_4 = a^*$
$\alpha_5 = (a \mid b)^*$
$\alpha_6 = ab(a \mid b)(ac)^*$

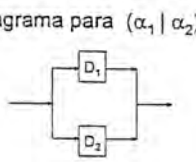
Diagramas sintácticos para expresiones regulares

Si $\alpha \in \Sigma$, el diagrama para α es:

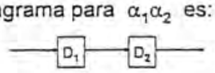


Si D_1 y D_2 son los diagramas
para las expresiones regulares α_1 y α_2, entonces:

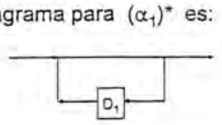
El diagrama para $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$ es:



El diagrama para $\alpha_1\alpha_2$ es:

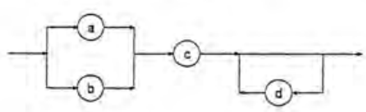


El diagrama para $(\alpha_1)^*$ es:



Ejemplo

El diagrama sintáctico para la expresión regular
$\alpha = (a \mid b) cd^*$ es:



Lenguaje generados por expresiones regulares

Dado el alfabeto Σ, se define recursivamente $L(\alpha)$, el lenguaje generado por la expresión regular α, por:

L1) $L(\emptyset) = \{\varepsilon\}$
L2) Si $a \in \Sigma$, $L(a) = \{a\}$
L3) Si α y β son E.R., $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
L4) Si α y β son E.R., $L((\alpha \mid \beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
L5) Si α es E.R., $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 00(0 \mid 1)^*11$,
el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* /$ w comienza con dos ceros y
w termina con dos unos $\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = (0^* \mid 1^*)$,
el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* /$ w sólo contiene ceros o
w sólo contiene unos o
w es la cadena nula $\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 0^*10^*10^*$,
el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* /$ w tiene dos unos $\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.

Dada la expresión regular $\alpha = 0^*(0^*10^*10^*)^*$,
el lenguaje generado por α, es:

$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* / w$ tiene un número par de unos $\}$

Ejemplo

Dada la expresiones regulares:
$\alpha_1 = (01)^*00$ y $\alpha_2 = 0(10)^*0$,

entonces:

$L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

Autómatas finitos

Un autómata finito A es un quíntuple $A = (\Sigma, S, T, i, M)$.
Donde:
Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada, llamado alfabeto de entrada.
S es un conjunto finito de estados, llamado conjunto de estados.
T es un subconjunto de S, llamado conjunto de estados de aceptación.
i es un elemento de S, llamado estado inicial.
M es una relación de $S \times \Sigma$ en S, llamada relación de estados.

Autómatas determinísticos y Autómatas no determinísticos

El autómata A es determinístico, si la relación de estados M es una función.

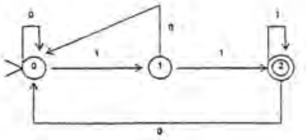
El autómata A es no determinístico, Si la relación de estados M no es una función.

Ejemplo

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito,
con $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, $S = \{ 0, 1, 2 \}$, $T = \{ 2 \}$, $i = 0$
y $M: S \times \Sigma \rightarrow S$ definida por:

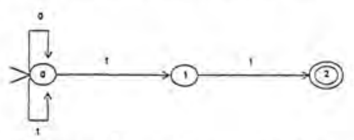
A	M	
S	0	1
0	0	1
1	0	2
2	0	2

A es un autómata determinístico,
y su diagrama es:



Ejemplo

Si el diagrama del autómata A es:



El autómata A es no determinístico.

Configuraciones

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito.

Una configuración es un par $(s_j, w) \in S \times \Sigma^*$

Paso de una configuración a otra

De la configuración (s, w) se pasa, en un paso, a la configuración (s', w') y se representa:

$$(s, w) \longrightarrow (s', w')$$

si y sólo si $w = aw'$ y $M(s,a) = s'$

De la configuración (s, w) se pasa, en cero o más pasos, a la configuración (s', w') y se representa:

$$(s, w) \xrightarrow{*} (s', w')$$

si y sólo si

$\xrightarrow{*}$ es la relación de accesibilidad, de la relación entre configuraciónes: $\longrightarrow$

Cadenas aceptadas por Autómatas

Sea $A = (\Sigma, S, T, i, M)$ un autómata finito.

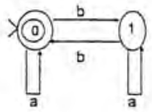
Una cadena $w \in \Sigma^*$ es aceptada por A, si existe $j \in T$ tal que: $(i, w) \xrightarrow{*} (j, \varepsilon)$

Lenguajes generados por autómatas

El lenguaje generado por el autómata A, es $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \,/\, w \text{ es aceptada por } A \}$

Ejemplo

Dado el autómata A:



Si w = aabba $\in \Sigma^*$:

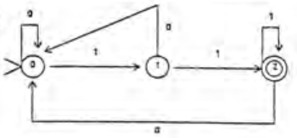
(0,aabba) $\rightarrow$ (0,abba) $\rightarrow$ (0,bba) $\rightarrow$ (1,ba) $\rightarrow$ (0,a) $\rightarrow$ (0,ε)

como $0 \in T$, entonces $w \in L(A)$.

L(A) = {w $\in$ {a,b}* / w tiene un número par de letras b}

Ejemplo

Dado el autómata A:



L(A) = { w $\in$ {0,1}* / w termina con dos unos }

Algoritmo de Thompson

Dada una expresión regular α,
el algoritmo de Thompson permite encontrar
un autómata finito determinístico A,
tal que L(A) = L (α).

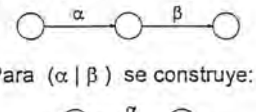
I) Dada la expresión regular α,
se encuentra
un autómata finito no determinístico AN,
tal que L(AN) = L(α).

1) Para la cadena nula ε se construye:

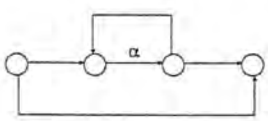
2) Para $a \in \Sigma$ se construye:

3) Para $\alpha\beta$ se construye:

4) Para (α | β) se construye:



5) Para α^* se construye:



II) Dado un autómata finito no determinístico AN, se encuentra un autómata finito determinístico A, tal que $L(A) = L(AN)$.

Dado un autómata finito no determinístico
$AN = (\Sigma, S, T, i, M)$.
Para $R \subset S$ y $a \in \Sigma$ definimos:

$cl(R) = \{ t \in S \; / \; \exists\, p \in R: \; p \xrightarrow{*} t \}$

$Mov(R, a) = \{ t \in S \; / \; \exists\, p \in R: \; p \xrightarrow{a} t \}$.

1) Se hace $DS = \{ s_o \}$, donde $s_o = cl(\{ i \})$.
2) Mientras hayan estados no "marcados" en DS hacer:
   a) Tomar un $s_i \in DS$ no "marcado" y "marcarlo".
   b) Para todo $a \in \Sigma$ hacer:
      i) $DM(s_i, a) = cl(Mov(s_i, a))$.
      ii) Si $DM(s_i, a) \notin DS$, entonces Incluir $s_{i+1} = DM(s_i, a)$ en DS.

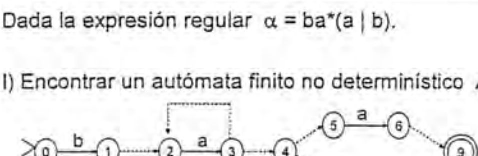
3) Se hace $DT = \{ s_i \; / \; s_i \cap T \neq \varnothing \}$.

4) Se hace $A = (\Sigma, DS, DT, s_o, DM)$.

Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = ba^*(a \mid b)$.

I) Encontrar un autómata finito no determinístico AN:



II) Encontrar un autómata finito determinístico A:
1) $s_o = cl(\{ 0 \}) = \{ 0 \}$.

2) $DM(s_o,a) = cl(\varnothing) = \varnothing = s_1$
$DM(s_o,b) = cl(\{1\}) = \{1, 2, 4, 5, 7\} = s_2$
$DM(s_1,a) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_1,b) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_2,a) = cl(\{3, 6\}) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} = s_3$
$DM(s_2,b) = cl(\{8\}) = \{8, 9\} = s_4$
$DM(s_3,a) = cl(\{3, 6\}) = s_3$
$DM(s_3,b) = cl(\{8\}) = s_4$
$DM(s_4,a) = cl(\varnothing) = s_1$
$DM(s_4,b) = cl(\varnothing) = s_1$

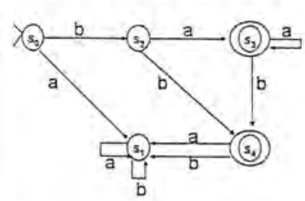
3) $DT = \{s_3, s_4\}$

4) $A = (\Sigma, DS, DT, s_o, DM)$
donde:
$\Sigma = \{a,b\}$
$DS = \{s_o,s_1,s_2,s_3,s_4\}$
$DT = \{s_3,s_4\}$
El estado inicial es s_o

DM está definida por

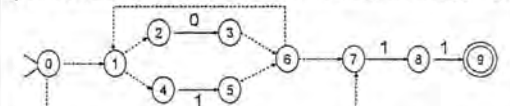
A / DS	DM: a	b
s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_1
s_2	s_3	s_4
s_3	s_3	s_4
s_4	s_1	s_1

El diagrama del autómata A es:



Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = (0 \mid 1)^*11$.
I) Encontrar un autómata finito no determinístico AN:



II) Encontrar un autómata finito determinístico A:
1) $s_o = cl(\{0\}) = \{0,1, 2, 4, 7\}$.

2) $DM(s_o, 0) = cl(\{3\}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} = s_1$
$DM(s_o, 1) = cl(\{5, 8\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} = s_2$
$DM(s_1, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_1, 1) = cl(\{5, 8\}) = s_2$
$DM(s_2, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_2, 1) = cl(\{5, 8, 9\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = s_3$
$DM(s_3, 0) = cl(\{3\}) = s_1$
$DM(s_3, 1) = cl(\{5, 8, 9\}) = s_3$

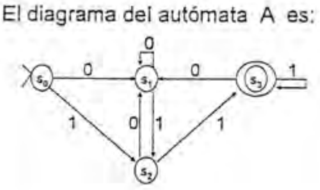
3) $DT = \{s_3\}$

4) $A = (\Sigma, DS, DT, s_o, DM)$
donde:
$\Sigma = \{0, 1\}$
$DS = \{s_o, s_1, s_2, s_3\}$
$DT = \{s_3\}$
El estado inicial es s_o

DM está definida por

A / DS	DM: 0	1
s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_1
s_2	s_1	s_3
s_3	s_1	s_3

El diagrama del autómata A es:



Gramáticas de Estructura de Frase

Una gramática de estructura de frase G
es un cuádruple G = (ST, SN, n_0, R).
Donde:
ST es un conjunto finito de símbolos terminales,
llamado conjunto de símbolos terminales.
SN es un conjunto de símbolos no terminales,
llamado conjunto de símbolos no terminales.
($ST \cap SN = \emptyset$ y $SI = ST \cup SN$)
n_0 es un elemento de SN, llamado símbolo inicial.

R es una relación en SI*,
llamada relación de producción.

Si w, w' $\in$ SI*, entonces w R w' se representa por:
$w \to w'$
$(R \equiv \to)$.
Si $w \to w'$, entonces r: $w \to w'$ es una producción.
(R = { r / r es una producción }).

Relación de sustitución

La relación de sustitución $\Rightarrow$ es una relación en SI*, definida por:
$x \Rightarrow y$ si y sólo si $\exists\, r_i$: $w \to w'$ tal que:
$x = l_1\, w\, l_2$, $y = l_1\, w'\, l_2$

Relación de derivación

La relación de derivación $\Rightarrow^*$ es una relación en SI*, definida por:
$x \Rightarrow^* y$ si y sólo si $\Rightarrow^*$ es la relación de accesibilidad de $\Rightarrow$.

Oraciones adecuadamente construidas

Dada una gramática G = (ST, SN, n_0, R).
Una cadena w $\in$ ST* es una oración adecuadamente construida,
si $n_0 \Rightarrow^* w$.

Lenguajes generados por gramáticas

El lenguaje generado por la gramática G,
es L(G) = { $w \in ST^*$ / w es una oración adecuadamente construida }

Ejemplo

Sea G = (ST, SN, n_0, R) una gramática,
donde:

ST = { Iván, Ana, corre, juega, rápidamente, frecuentemente },

SN = { Oración, sujeto, predicado, verbo, adverbio },

n_0 = Oración

y las producciones de R son:

r_1 : Oración → sujeto predicado .
r_2 : predicado → verbo adverbio .
r_3 : sujeto → Iván .
r_4 : sujeto → Ana .
r_5 : verbo → corre .
r_6 : verbo → juega .
r_7 : adverbio → frecuentemente .
r_8 : adverbio → rápidamente.

Como:

Oración ⇒ sujeto predicado
⇒ Ana predicado
⇒ Ana verbo adverbio
⇒ Ana juega adverbio
⇒ Ana juega frecuentemente

entonces:

$n_0 \Rightarrow^*$ Ana juega frecuentemente

Luego: Ana juega frecuentemente $\in$ L(G)

Gramáticas de Contexto libre

Una gramática es de contexto libre,
si sus producciones r_i son de la forma

r_i: $n_j \rightarrow x_1 \ldots x_p$,

donde $n_j \in SN$ y $x_k \in SI$ (k = 1, ... , p).

Ejemplo

La gramática del ejemplo anterior,
es una gramática de contexto libre.

Gramáticas Regulares

Sea G una gramática de contexto libre, con producciones de la forma

r_i: $n_j \rightarrow x_1 \dots x_p$,

donde $n_j \in SN$ y $x_k \in SI$ (k = 1, ... , p).

G es una gramática regular,

si $x_k \in ST$ (k = 1, ... , p - 1).

Ejemplo

La gramática del ejemplo anterior, es una gramática de contexto libre, pero no es una gramática regular.

Teorema

L = L(G), con G una gramática regular $\leftrightarrow$

L = L(α), con α una expresión regular $\leftrightarrow$

L = L(A), con A un autómata determinístico

Formas de Backus - Naur

Las formas de Backus - Naur son notaciones para las produciones de las gramáticas de contexto libre.

Si $n_j \in SN$ y $w, w_1, w_2 \in SI^*$, entonces:

$n_j \rightarrow w$ se representa por

< n_j > ::= w

$n_j \rightarrow w_1$ y $n_j \rightarrow w_2$ se representan por

< n_j > ::= w_1 | w_2

Si $w \in SN$ se representa por < w >.

Ejemplo

Sea G = (ST, SN, n_o, R) una gramática donde:

ST = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, . } ,

SN = { real, fracción, entero, dígito, signo } ,

n_o = real

y las producciones de R son:

r_1: < real > ::= < entero > < fracción > | < entero >
| < fracción > | < signo > < real >

r_2: < fracción > ::= . < entero > | .

r_3: < entero > ::= < dígito > | < dígito > < entero >

r_4: < dígito > ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

r_5: < signo > ::= + | -

como: real $\Rightarrow$ entero fracción
$\Rightarrow$ dígito entero fracción
$\Rightarrow$ dígito dígito fracción
$\Rightarrow$ dígito dígito . entero
$\Rightarrow$ dígito dígito . dígito entero
$\Rightarrow$ dígito dígito . dígito dígito
$\Rightarrow$ 5 dígito . dígito dígito
$\Rightarrow$ 5 3 . dígito dígito
$\Rightarrow$ 5 3 . 0 dígito
$\Rightarrow$ 5 3 . 0 4

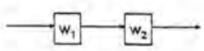
entonces: $n_o \Rightarrow^* 53.04$

luego: $53.04 \in L(G)$

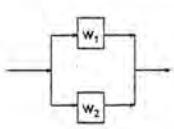
Diagramas sintácticos para las producciones en Formas de Backus - Naur

Si w, w_1, $w_2 \in$ SI:

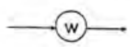
El diagrama para la producción:
< w > ::= < w_1 > < w_2 > es:



El diagrama para la producción:
< w > ::= < w_1> | < w_2 > es:

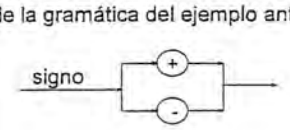


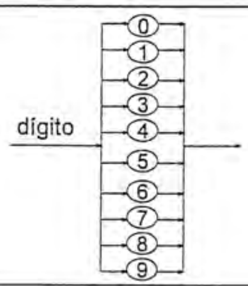
Si w $\in$ ST, el diagrama para w es:

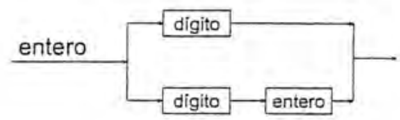


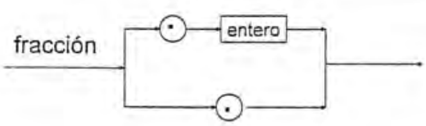
Ejemplo

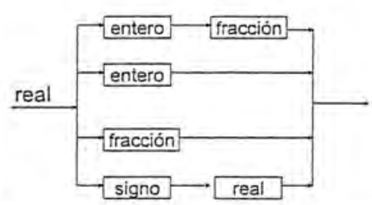
Los diagramas sintácticos, para las producciones de la gramática del ejemplo anterior, son:











Ejemplo

Dada la expresión regular $\alpha = (0 \mid 1)^{*}11$

Si $G = (ST, SN, n_o, R)$ es una gramática, donde:

$ST = \{ 0, 1 \}$, $SN = \{ V \}$, $n_o = V$

y las producciones de R son :

r_1: $V \rightarrow 0V$

r_2: $V \rightarrow 1V$

r_3: $V \rightarrow 11$

Entonces: $L(G) = L(\alpha)$.

Gramática regular generada por un autómata

El autómata $A = (\Sigma, S, T, i, M)$

genera la gramática $G = (ST, SN, n_o, R)$,

donde:

$ST = \Sigma$, $SN = S$, $n_o = i$

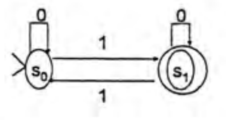
y las producciones de R son:

$s_i \rightarrow as_j$, si $M(s_i , a) = s_j$

$s_i \rightarrow a$, si $M(s_i , a) \in T$

Ejemplo

Dado el autómata A cuyo diagrama es:



El automáta A genera la gramática $G = (ST, SN, n_o, R)$
donde: $ST = \{0, 1\}$, $SN = \{s_0, s_1\}$, $n_o = s_0$
y las producciones de R son:

$s_0 \to 0\, s_0$

$s_0 \to 1\, s_1$

$s_1 \to 0\, s_1$

$s_1 \to 1\, s_0$

$s_0 \to 1$

$s_1 \to 0$

Capítulo 7

- Funciones iteradas

Funciones numéricas discretas

Una función numérica discreta (f.n.d.) es una función f de los números naturales a los números reales.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$t \to f(t) = y_t$$

$$f = (y_t) = (y_0, y_1, \dots)$$

Ejemplo

Sea $y_t = 3t^2 + 1$,

entonces

$$(y_t) = (1, 4, 13, 28, \dots)$$

Ejemplo

Sea y_t una f.n.d. tal que:

$$y_t = 2y_{t-1} + 3, \quad y_0 = 5,$$

entonces

$$(y_t) = (5, 13, 29, \dots)$$

Operaciones con funciones numéricas discretas

Si $f = (y_t)$ y $g = (x_t)$ son dos funciones numéricas discretas, se definen las operaciones:

1) Suma: $f + g = (y_t + x_t)$
2) Producto: $f \cdot g = (y_t \cdot x_t)$
3) Producto por escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$): $(\alpha f) = (\alpha y_t)$
4) Diferencia: $\Delta(y_t) = (y_{t+1} - y_t)$

Ejemplo

Si $y_t = t^2$ y $x_t = 2t - 1$, entonces:

$$(y_t) = (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$$
$$(x_t) = (-1, 1, 3, 5, 7, \dots)$$
$$(y_t + x_t) = (t^2 + 2t - 1) = (-1, 2, 7, 14, 23, \dots)$$
$$(y_t \cdot x_t) = (2t^3 - t^2) = (0, 1, 12, 45, \dots)$$
$$3(y_t) = (3t^2) = (0, 3, 12, 27, \dots)$$
$$2(x_t) = (4t - 2) = (-2, 2, 6, 10, \dots)$$

Ejemplo

Si $y_t = t^2$ y $x_t = 2t - 1$, entonces:

$$\Delta (y_t) = (y_{t+1} - y_t) = (((t+1)^2) - (t^2)) = (2t + 1) = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$$\Delta (x_t) = (x_{t+1} - x_t) = ((2(t + 1) - 1) - (2t - 1)) = (2) = (2, 2, 2, 2, \dots)$$

Diferencia finita de orden n

La diferencia finita de orden n de una función numérica discreta (y_t), se representa por: $\Delta^n (y_t)$ y se define por:

$$\Delta^0 (y_t) = (y_t)$$

$$\Delta^n (y_t) = \Delta (\Delta^{n-1} (y_t)), \quad n \geq 1$$

de donde:

$$\Delta^1 (y_t) = \Delta (y_t) = (y_{t+1} - y_t)$$

$$\Delta^2 (y_t) = \Delta ((y_{t+1} - y_t)) = ((y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)) = (y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t)$$

Ecuaciones en diferencias finitas

Una ecuación en diferencias finitas, es una ecuación funcional, que contiene diferencias finitas de una función numérica discreta.

Ejemplo

La ecuación en diferencias finitas:

$\Delta^2 (y_t) - 3 \Delta (y_t) = 4$,

es equivalente a:

$(y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) - 3 (y_{t+1} - y_t) = 4$,

es decir:

$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 4y_t = 4$,

donde la incógnita es la función (y_t).

Ecuación lineal en diferencias finitas

La ecuación lineal en diferencias finitas

$C_n y_{t+n} + C_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + C_1 y_{t+1} + C_o y_t = g (t)$,

donde: $\forall i : C_i \in \mathbb{R}$ $(C_n \neq 0, C_o \neq 0)$

y g es una f. n. d. ,

es equivalente a la ecuación:

$E (y_t) = b (t)$,

donde: $E (y_t) = y_{t+n} + A_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + A_o y$

$b (t) = (g (t) / C_n)$

y $\forall i : A_i = (C_i / C_n)$

Ecuación homogénea

La ecuación $E(y_t) = b(t)$ es homogénea, si $g(t) = 0$.

Teorema

Sea $E(y_t) = y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \ldots + A_o\, y_t$.

1) Si y^1_t y y^2_t son soluciones de $E(y_t) = 0$, entonces $\forall\, k_1, k_2 \in IR$: $(k_1 y^1_t + k_2 y^2_t)$ es solución de $E(y_t) = 0$.

2) Si y^h_t es la solución general de $E(y_t) = 0$ y y^p_t es una solución particular de $E(y_t) = b(t)$, entonces $(y^h_t + y^p_t)$ es la solución general de $E(y_t) = b(t)$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 8$,

donde: $E(y_t) = y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t$, $\quad b(t) = 8$.

Como $y^1_t = (2)^t$ y $y^2_t = (3)^t$

son soluciones de $E(y_t) = 0$,

entonces $y^h_t = k_1(2)^t + k_2(3)^t$

es la solución general de $E(y_t) = 0$,

y como $y^p_t = 4$

es una solución particular de $E(y_t) = b(t)$,

entonces $(k_1(2)^t + k_2(3)^t + 4)$

es la solución general de $E(y_t) = b(t)$.

Con las condiciones iniciales $y_o = 15$ y $y_1 = 32$

Se obtiene $k_1 = 5$ y $k_2 = 6$,

luego $y_t = 5(2)^t + 6(3)^t + 4$

es la solución de $E(y_t) = b(t)$.

Ecuación Homogénea y Ecuación Característica

Dada la ecuación lineal en diferencias finitas:

$$y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \ldots + A_o\, y_t = b(t),$$

su ecuación homogénea es:

$$y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \ldots + A_o\, y_t = 0,$$

su ecuación característica es:

$$X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots + A_1 X + A_o = 0.$$

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 8$,

su ecuación homogénea es:

$$y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 0,$$

su ecuación característica es:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

y las raíces de la ecuación característica son:

$$\lambda_1 = 2 \quad y \quad \lambda_2 = 3.$$

Solución de una ecuación lineal en diferencias finitas

Dada la ecuación lineal en diferencias finitas:

$E(y_t) = b(t)$,

donde $E(y_t) = y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \ldots + A_o\, y_t$.

---

1) Para cada raíz λ de multiplicidad m de la ecuación característica, y^h_t la solución general de la ecuación homogénea $E(y_t) = 0$ tiene un término de la forma:
$(k_1 t^{m-1} + k_2 t^{m-2} + \ldots + k_m)\, \lambda^t$.
Si $m = 1$, el término correspondiente en y^h_t es de la forma: $k_1 \lambda^t$.

---

2) Si $b(t) = p_s t^s + p_{s-1} t^{s-1} + \ldots + p_o$, y^p_t una solución particular de la ecuación $E(y_t) = b(t)$ tiene la forma:
$y^p_t = (q_s t^s + q_{s-1} t^{s-1} + \ldots + q_o)\, t^L$,
donde:
$L = 0$ si el 1 no es raíz de la ecuación característica y $L = m$ si el 1 es una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica.

Las constantes: $q_s, \ldots, q_o$ se obtienen reemplazando y^p_t en la ecuación $E(y_t) = b(t)$.

---

3) La solución general de la ecuación $E(y_t) = b(t)$ es $y_t = y^h_t + y^p_t$.

Las constantes: $k_1, \ldots, k_n$ se determinan usando las condiciones iniciales: $y_o, \ldots, y_{n-1}$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} - (1/2)\, y_t = 3$, con $y_o = 11$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} - (1/2)\, y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x - (1/2) = 0$.
La raíz de la ecuación característica es: $\lambda = (1/2)$.
Luego: $y^h_t = k_1 (1/2)^t$.

Como: $b(t) = 3$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - (1/2)\, q_o = 3$,
de donde $q_o = 6$.
Luego: $y^p_t = 6$.

La solución general es: $y_t = k_1 (1/2)^t + 6$.
Usando la condición inicial $y_o = 11$,
obtenemos $k_1 + 6 = 11$,
de donde $k_1 = 5$.
Luego: $y_t = 5 (1/2)^t + 6$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} - y_t = 2$, con $y_o = 3$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} - y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x - 1 = 0$.
La raíz la ecuación característica es: $\lambda = 1$.
Luego: $y^h_t = k_1 (1)^t = k_1$.

Como: $b(t) = 2$
y el 1 es raíz de multiplicidad $m = 1$
de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o t$.
Reemplazando $y^p_t = q_o t$ en la ecuación dada,
obtenemos $(q_o (t+1)) - (q_o t) = 2$,
de donde $q_o = 2$.
Luego: $y^p_t = 2t$.

La solución general es: $y_t = k_1 + 2t$.
Usando la condición inicial $y_o = 3$,
obtenemos $k_1 = 3$.
Luego: $y_t = 3 + 2t$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} + 2y_t = 12t + 22$, con $y_o = 9$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} + 2y_t = 0$.
La ecuación característica es es: $x + 2 = 0$
La raíz de la ecuación característica es: $\lambda = -2$.
Luego: $y^h_t = k_1 (-2)^t$.

Como: $b(t) = 12t + 22$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_1 t + q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_1 t + q_o$ en la ecuación dada, obtenemos
$(q_1(t+1)) + q_o) + 2(q_1 t + q_o) = 12t + 22$,
es decir $(3q_1)t + (q_1 + 3q_o) = 12t + 22$,
de donde $q_1 = 4$, $q_o = 6$.
Luego: $y^p_t = 4t + 6$.

La solución general es: $y_t = k_1(-2)^t + 4t + 6$.
Usando la condición inicial $y_o = 9$,
obtenemos $k_1 + 6 = 9$,
de donde $k_1 = 3$.
Luego: $y_t = 3(-2)^t + 4t + 6$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - y_{t+1} - 12y_t = -24$,
con $y_o = 14$, $y_1 = 1$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+2} - y_{t+1} - 12y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x^2 - x - 12 = 0$.
Las raices de la ecuación característica son:
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$.
Luego: $y^h_t = k_1(4)^t + k_2(-3)^t$.

Como: $b(t) = -24$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - q_o - 12q_o = -24$,
de donde $q_o = 2$.
Luego: $y^p_t = 2$.

La solución general es: $y_t = k_1(4)^t + k_2(-3)^t + 2$.
Usando las condiciones iniciales $y_o = 14$, $y_1 = 1$,
obtenemos $k_1 + k_2 + 2 = 14$ y $4k_1 - 3k_2 + 2 = 1$,
de donde $k_1 = 5$ y $k_2 = 7$.
Luego: $y_t = 5(4)^t + 7(-3)^t + 2$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 20$,
con $y_o = 9$, $y_1 = 23$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x^2 - 6x + 9 = 0$.
La raíz de la ecuación característica es:
$\lambda = 3$ con multiplicidad $m = 2$.
Luego: $y^h_t = (k_1 t + k_2)(3)^t$.

Como: $b(t) = 20$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - 6q_o + 9q_o = 20$,
de donde $q_o = 5$.
Luego: $y^p_t = 5$.

La solución general es: $y_t = (k_1 t + k_2)(3)^t + 5$.
Usando las condiciones iniciales $y_o = 9$, $y_1 = 23$,
obtenemos $k_2 + 5 = 9$ y $(k_1 + k_2)(3) + 5 = 23$,
de donde $k_1 = 2$ y $k_2 = 4$.
Luego: $y_t = (2t + 4)(3)^t + 5$.

Sistema de ecuaciones en diferencias finitas

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$y^1_{t+1} = a_{11} y^1_t + \ldots + a_{1n} y^n_t + b_1(t)$$

$$\vdots$$

$$y^n_{t+1} = a_{n1} y^1_t + \ldots + a_{nn} y^n_t + b_n(t)$$

Puede escribirse de la forma:

$$Y_{t+1} = A Y_t + B(t)$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} y^1_t \\ \vdots \\ y^n_t \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \qquad B_t = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

El sistema es homogéneo, si

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -2x_t + 5y_t - z_t \\ y_{t+1} &= x_t - 2y_t + 3z_t + 5t^2 \\ z_{t+1} &= 3x + z_t + 2t. \end{aligned}$$

Puede escribirse de la forma:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

Solución de un Sistema de ecuaciones en diferencias finitas

1) La solución general de la ecuación homogénea:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t$$

es: $Y^h_t = A^t k,$

donde: $A^o = I$

$A^t = A\,A^{t-1},\ t \geq 1$.

2) Si $B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{bmatrix}$

Una solución particular de la ecuación:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$$

es:

$$Y^p_t = \begin{bmatrix} p^1_t \\ . \\ . \\ p^n_t \end{bmatrix}$$

donde: p^i_t tiene la forma correspondiente a $b_i(t)$

Las constantes en Y^p_t se obtienen reemplazando Y^p_t en la ecuación $Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$

3) La solución general de la ecuación:

$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t),$

es: $Y_t = Y^h_t + Y^p_t$.

Las constantes: $k_1, \ldots, k_n$,

se determinan usando las condiciones iniciales:

$y^1_o, \ldots, y^n_o$.

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones:

$x_{t+1} = 4\,x_t - 2\,y_t - 2$

$y_{t+1} = 7\,x_t - 5\,y_t + 2$

Se puede escribir de la forma:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t),$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como $B(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces $Y^p{}_t = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

reemplazando en la ecuación dada obtenemos:

$q_1 = 4q_1 - 2q_2 - 2$ y $q_2 = 7q_1 - 5q_2 + 2$,

de donde: $q_1 = 4$, $q_2 = 5$

La solución general es: $Y_t = A^t \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Usando la condición inicial $Y_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

obtenemos $k_1 + 4 = 10$ y $k_2 + 5 = 12$,

de donde: $k_1 = 6$ y $k_2 = 7$.

Luego:

$$Y_t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Valores propios

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
$\lambda \in IR$ es un valor propio de A,
si existe $V \in IR^{n \times 1}$ ($V \neq 0$)
tal que: $A v = \lambda v$.

Vectores propios

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
$V \in IR^{n \times 1}$ ($V \neq 0$) es un vector propio de A
correspondiente al valor propio λ,
si $A v = \lambda v$.

Ecuación característica

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
La ecuación característica de A es:
$\det(\lambda I - A) = 0$.

Teorema

Sea $A \in IR^{n \times n}$.

1) λ es un valor propio de A si y sólo si λ es una raíz de la ecuación característica de A.

2) V es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ si y sólo si $(\lambda I - A) V = 0$, $(V \neq 0)$.

---

3) Si $V_1, \ldots, V_n$ son n vectores propios de A linealmente independientes, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, entonces $D = P^{-1} A P$,
donde $P = [V_1, \ldots, V_n]$
y $D = [\lambda_i]$ es una matriz diagonal.

Cálculo de A^t

Sea $A \in IR^{n \times n}$.

Si $D, P \in IR^{n \times n}$ son tales que $D = P^{-1} A P$, entonces $A^t = P D^t P^{-1}$.

Si $D = [\lambda_i]$ es una matriz diagonal, entonces $D^t = [\lambda_i^t]$.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

Su ecuación característica es: $\det(\lambda I - A) = 0$,
es decir: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
y sus raíces son: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$.

Sea $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $(\lambda I - A) V = 0$.

Si $\lambda = 2$,

entonces $x = y$

y un vector propio correspondiente es

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $\lambda = -3$,

entonces $7x = 2y$

y un vector propio correspondiente es

$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Luego $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

entonces

$$A^t = P\,D^t\,P^{-1} = (1/5)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2)^t & 0 \\ 0 & (-3)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $A^t = (1/5)\begin{bmatrix} 7(2)^t - 2(-3)^t & -2(2)^t + 2(-3)^t \\ 7(2)^t - 7(-3)^t & -2(2)^t + 7(-3)^t \end{bmatrix}$.