CAPITULO 3. Movimiento en un plano y en el espacio

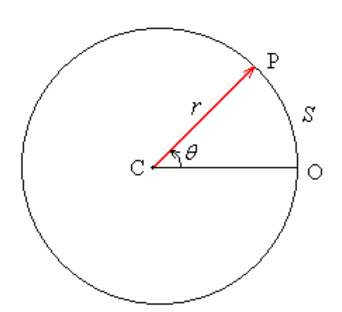
MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

Posición angular, θ

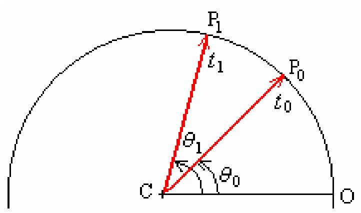
En el instante *t* el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco S y el radio de la circunferencia *r*, $\theta = S/r$. La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones.



Velocidad angular, ω

En el instante t_1 el móvil se encontrará en la posición P$_1$ dada por el ángulo θ_1. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina velocidad angular media al cociente entre le desplazamiento y el tiempo.

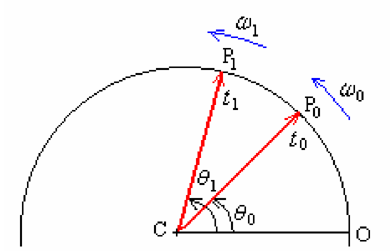
$\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, con las unidades en el SI de rad/s.

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, α

Si en el instante *t* la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t_1 la velocidad angular del móvil es ω_1. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

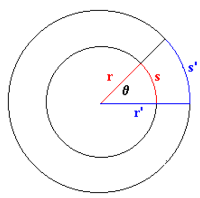
La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES ANGULARES Y LINEALES

De la definición de radián (unidad natural de medida de ángulos) obtenemos la relación entre el arco y el radio. Como vemos en la figura, el ángulo se obtiene dividiendo la longitud del arco entre su radio

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$



Derivando $s = r\theta$ respecto del tiempo obtenemos la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

La dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria circular, es decir, perpendicular a la dirección radial

Aceleración tangencial

Derivando esta última relación con respecto del tiempo obtenemos la relación entre la aceleración tangencial a_t y la aceleración angular.

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

Existe aceleración tangencial, siempre que el módulo de la velocidad cambie con el tiempo, es decir, en un movimiento circular no uniforme

Hallar el desplazamiento angular a partir de la velocidad angular.
Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta - \theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

Hallar el cambio de velocidad angular a partir de la aceleración angular.
Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular ω en función del tiempo t.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt \quad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

La posición angular θ del móvil en el instante *t* podemos calcularla integrando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

O gráficamente, en la representación de ω en función de *t*.
Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

$$\alpha = 0 \quad \omega = \text{constante} \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO
Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración α es constante.
Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante integración de la velocidad angular ω en función del tiempo

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0).$$

Siendo $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$, integrando obtenemos el desplazamiento $\theta - \theta_0$ del móvil entre los instantes t_0 y t:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \left[\omega_0 + \alpha(t - t_0)\right] dt \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

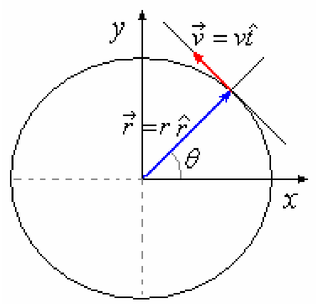
$$\alpha = \text{constante}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha\, t,$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento $\theta - \theta_0$.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN.
Cuando el sistema de referencia se sitúa sobre la partícula tal como se indica en la figura, pero no de cualquier modo. Uno de los ejes siempre está perpendicular a su trayectoria, y el otro siempre es tangente a la misma. Así pues,



El primero siempre pasará por el centro de la circunferencia. Al primer eje se le denomina eje normal, con vector unitario $(\hat{r} = \hat{n})$ y al segundo eje tangencial, con vector unitario $(\hat{t})$. Debemos estudiar ahora que componentes tienen la velocidad y la aceleración en este sistema de referencia.

Velocidad.
Con anterioridad se ha deducido que el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria descrita. Por tanto es fácil afirmar que en este movimiento la velocidad será de la forma $\vec{v} = v\hat{t}$

Aceleración.

No es tan obvio que la aceleración tenga una sola componente, de manera que adoptará la expresión general $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$

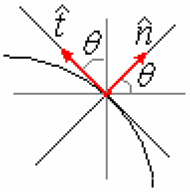
Sabemos por la definición de aceleración que

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, luego.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Estudiemos el último término de esta expresión $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$

Si se define el ángulo θ, como el ángulo formado por el eje normal con el eje de abscisas (eje *x*), tal como se muestra en la figura.



No es difícil darse cuenta que el vector $\hat{t}$ desde el sistema de referencia situado en el centro de la circunferencia tendrá la forma

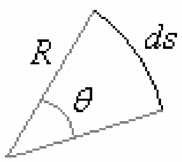
$\hat{t} = -\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$, mientras que $\hat{n}$ al ser perpendicular a este adoptará la expresión

$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$

Derivando $\hat{t} \Rightarrow$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} - \text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\,\hat{\imath} - \text{sen}\,\theta\hat{\jmath}\right)$$



Ahora bien, si tomamos un desplazamiento diminuto sobre la circunferencia, al que denominamos ds, teniendo en cuenta que arco = ángulo x radio, del esquema adjunto se deduce que $ds = Rd\theta$, y además el módulo de la velocidad instantánea lo podemos expresar como $v = \dfrac{ds}{dt}$, utilizando estos dos últimos llegamos a $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = \dfrac{v}{R}$,

reemplazando en $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$:

$\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\dfrac{v}{R}\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}\right)$, si observamos detenidamente esta ecuación, comprobaremos que el paréntesis es efectivamente $\hat{n}$, por lo que $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$ quedará como $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{n} = -\dfrac{v}{R}\hat{n}$.

Finalmente: $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} - \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$

Así, en esta expresión, se denomina aceleración tangencial (a_t) al término $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y aceleración normal (a_n) a la ecuación $a_n = -\dfrac{v^2}{R}$

De esta expresión para la aceleración pueden concluirse cosas sustancialmente importantes:

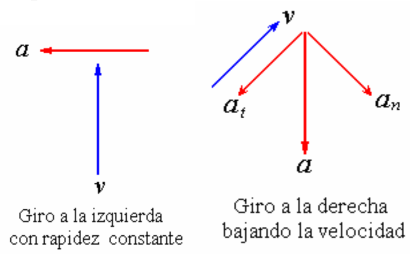
Existen dos componentes: Una tangente a la trayectoria y una perpendicular y orientada hacia el centro de la circunferencia.

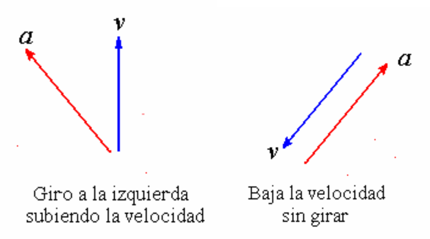
La aceleración tangencial sólo se dará en aquellos movimientos en los que el módulo de la velocidad varíe con el tiempo. Por tanto, en el caso particular del MCU, su aceleración tangencial será nula.

La aceleración normal siempre existirá, salvo que el radio de curvatura fuera muy grande, con lo cual tendería a cero, que es el caso extremo de los movimientos rectilíneos.

Concluyendo pues, en un MCU, la aceleración tendrá la expresión $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ es decir sólo presentará aceleración normal.

Un objeto puede experimentar la aceleración normal o centrípeta y la aceleración tangencial. En las figuras siguientes se muestran algunas combinaciones posibles para v y a para un auto en movimiento. Para entender la aceleración, descompóngala en las componentes paralela y perpendicular a v. Para decir si el auto está dando vuelta a la derecha o a la izquierda, imagínese que usted es el conductor que se sienta con el vector de la velocidad dirigido hacia adelante de usted. Un componente de la aceleración hacia adelante significa que la velocidad está aumentando.





Ejemplo 1. Un avión a chorro militar de combate volando a 180 m/s sale de una picada vertical dando la vuelta hacia arriba a lo largo de una trayectoria circular de 860 m de radio ¿cuál es la aceleración del avión? Exprese la aceleración como múltiplo de *g*.

Solución.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{180^2}{860} = 37,7\frac{m}{s^2}$$

$$a = 37,7\frac{g}{9,8} = 3,8g$$

Ejemplo 2. Una rueda de 75 cm de diámetro gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular de 1 rev/s. La aceleración es de 1,5 rev/s^2.

a) Calcúlese la velocidad angular al cabo de 6 segundos.

b) ¿Cuánto habrá girado la rueda en ese tiempo?

c) ¿Cuál es la velocidad tangencial en un punto de la periferia de la rueda en $t = 6$ s?

d) ¿Cuál es la aceleración resultante de un punto de la de la periferia para $t = 6$ s?

Solución.

$R =$ 37,5 cm , $\omega_0 = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\alpha = 3\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

a) $\omega_{(t)} = \omega_0 + \alpha\, t \Rightarrow$

$$\omega_{(6)} = 2\pi + 3\pi(6) = 20\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) $\theta_{(t)} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \Rightarrow$

$$\theta_{(6)} = 2\pi(6) + \frac{1}{2}(3\pi)(6^2) = 66\pi \text{ rad}$$

Habrá girado $\frac{66\pi}{2\pi}$ = 33 vueltas.

c) $v_{(t)} = R\omega_{(t)} \Rightarrow$

$$v_{(6)} = 37,5(20\pi) = 750\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) $a_n = \omega_{(6)}^2\, R \Rightarrow$

$a_n = (20\pi)^2(37,5)$ = 147894 cm/s^2.

$a_t = \alpha\, R \Rightarrow a_n = (3\pi)(37,5)$ = 353,25 cm/s^2.

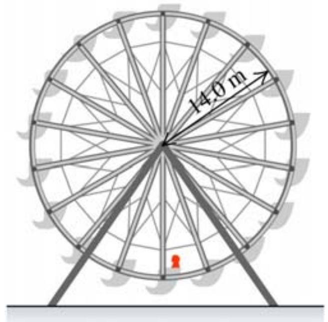
$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ = 147894,42 cm/s^2.

Ejemplo 3. Una rueda de la fortuna de 14,0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro. La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7,00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar

a) por el punto más bajo de su movimiento circular?

b) por el punto más alto?

c) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?



Solución.

a) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{7,00^2}{14,0} = 3,50\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. La aceleración el punto más bajo del círculo es hacia el centro, hacia arriba.

b) $a = 3,50\ \text{m/s}^2$, dirigida hacia abajo., hacia el centro.

c) Como $v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(14,0)}{7,00} = 12,6\ \text{s}$$

Ejemplo 4. La rueda de la figura del problema anterior, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3,00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0,500 m/s^2.

Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante.

Solución.

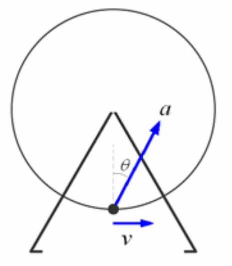
$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{3,00^2}{14,0} = 0,643\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, y $a_t = 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Luego:

$$\vec{a} = a_c\hat{n} + a_t\hat{t} = -0,643\hat{j} + 0,5\hat{i}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{0,643^2 + 0,5^2} = 0,814\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0,5}{0,643} = 37,9^{\text{o}}$$



Ejemplo 5. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio *R* con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza *n* vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.

Solución.

Aquí $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$

Entonces $2\pi n = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = 4\pi n$

Como $\theta = \frac{1}{2}(4\pi n)t^2 = 2\pi n t^2$,

Número de vueltas para $t = 1$

$$n(1)^2 = \frac{\theta_{(1)}}{2\pi}$$

Número de vueltas para $t = 2$

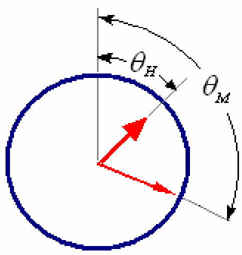
$$n(2)^2 = \frac{\theta_{(2)}}{2\pi}$$

Durante el siguiente segundo (dos) realiza

$$\frac{\theta_{(2)} - \theta_{(1)}}{2\pi} = n\left(2^2 - 1^2\right) = 3n \text{ vueltas.}$$

Ejemplo 6. En un reloj análogo el horario y el minutero coinciden a las 12:00:00 horas.
¿A qué hora minutero y horario formarán un ángulo de 90º?

Solución.



Como los movimientos del horario y minutero son circulares uniformes, encontramos para la posición angular del horario:

$\theta_H = \theta_{0H} + \omega_H t$. (1)

Análogamente para el minutero se tiene:

$\theta_M = \theta_{0M} + \omega_M t$. (2)

Como $\omega_H = \frac{2\pi}{T_H}, \omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ donde $T_H = 12$ h y $T_M = 1$ h y bajo la condición que estos formen un ángulo de 90º, es decir, $\theta_M - \theta_H = \frac{\pi}{2}$

De (2) - (1), con $\theta_{0H} = \theta_{0M} = 0$,

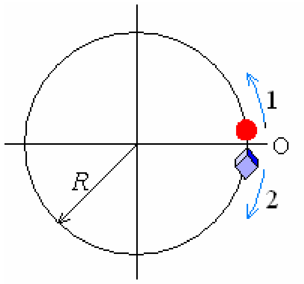
$\theta_M - \theta_H = (\omega_M - \omega_H)t$

Se encuentra para *t*:

$$t = \frac{\pi}{2(\omega_M - \omega_H)} = \frac{3}{11} \text{ h},$$

Es decir, en *t* = 16,36 min.
Por lo tanto forman 90º a las 12:16:22 h.

Ejemplo 7. Dos partículas describen movimientos circulares de radio *R* = 1m, como lo muestra la figura. El primero (1) parte de O con rapidez angular $\omega = 10$ rad/s constante en sentido antihorario y el segundo (2) parte del reposo del mismo punto en sentido horario con aceleración tangencial constante de 2 m/s^2. Determine cuando y donde se cruzan ambas partículas.



Solución.

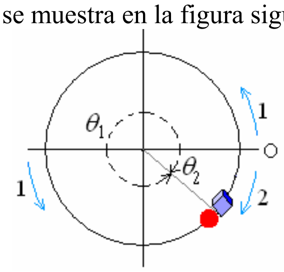
Como el cuerpo (1) se mueve con M.C.U., la posición angular de este será:

$\theta_1 = 0 + \omega_1 t = 10\,t$. (1)

El cuerpo (2) posee una aceleración tangencial constante y por lo tanto, se trata de un M.C.U.A.
Debido que $a_t = \alpha R = 2$ m/s^2, $\alpha = 2$rad/s^2. Por otro lado, como parte del reposo, $\omega_0 = 0$.

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}2\,t^2 = -t^2$$

El recorrido se muestra en la figura siguiente:



El encuentro se produce cuando:

$$|\theta_1| + |\theta_2| = 2\pi \Rightarrow$$

$$10t + t^2 = 2\pi$$

$t^2 + 10t - 2\pi = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 0{,}59\text{ s} \\ t_2 = -10{,}59\text{ s} \end{cases}$

La solución significativa es: $t = 0{,}59$ s

Reemplazando este valor de t en ecuación (1), se obtiene para el ángulo de encuentro:

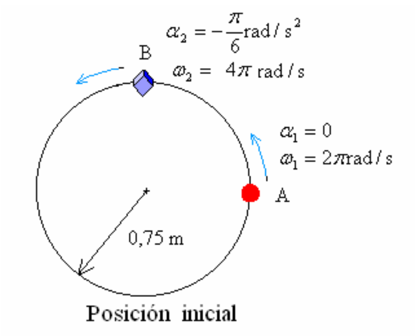
$\theta_{encuentro} = 5{,}9\text{ rad} = 338{,}04^\circ$.

Ejemplo 8. Dos vehículos describen la misma trayectoria circular de radio 0,75 m. El primero está animado de un movimiento uniforme cuya velocidad angular es de 60 rpm. y sale de la posición A cuando se empieza a contar el tiempo. El segundo móvil está animado de un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración angular vale - π/6 rad/s^2, pasa por B dos segundos más tarde llevando una velocidad angular de 120 rpm.

a) Escribir las ecuaciones del movimiento de cada uno de los móviles. Hallar el instante y la posición de encuentro por primera vez de ambos móviles.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

c) Realícese un esquema en el que se especifique los vectores velocidad, aceleración, en dicho instante de encuentro.



Solución.

a) Para t = 2 s el móvil 1 como su velocidad angular es 2π rad/s estará en el punto A, y podemos considerar ese instante como tiempo inicial, con lo que:

Móvil 1:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \omega_1 = 2\pi\text{rad/s} \\ \theta_1 = 2\pi t\text{rad} \end{cases}$$

Móvil 2:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{\pi}{6}\text{rad/s}^2 \\ \omega_2 = \left(4\pi - \frac{\pi}{6}t\right)\text{rad/s} \\ \theta_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2\right)\text{rad} \end{cases}$$

Los móviles se encontrarán cuando $\theta_1 = \theta_2$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}t^2 - 2\pi t - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 24t - 6 = 0$$

Resolviendo $\begin{cases} t = -0{,}25\text{ s} \\ t = 24{,}25\text{ s} \end{cases}$

La solución es 24,25 s.

El punto de encuentro es

$$\theta_1 = 2\pi(24{,}25) = 48{,}5\pi\text{ rad}$$

$$\theta_2 = 0{,}5\pi + 4\pi(24{,}25) - \frac{\pi}{12}(24{,}25)^2 = 48{,}5\pi\text{ rad}$$

Los valores son iguales, tal como esperábamos.

Como $\theta_1 = \theta_2 = 48{,}5\pi$ rad, equivalente a 24 vueltas mas 1/4 de vuelta, el encuentro es en punto B.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

Móvil 1

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi\text{rad/s} \\ v_1 = \omega_1 r = 1{,}5\pi\text{ m/s} \\ \alpha_1 = 0 \rightarrow a_{t1} = \alpha_1 r = 0 \\ a_{n1} = \omega_1^2 r = 3\pi^2\text{ m/s} \end{cases}$$

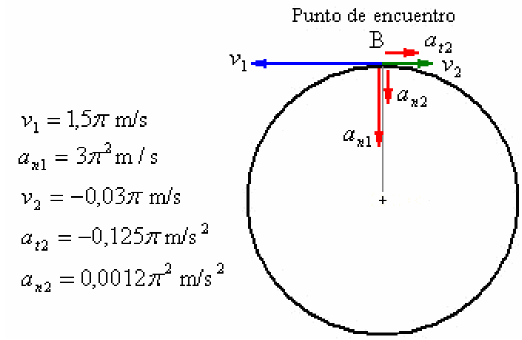
Móvil 2

$$\begin{cases} \omega_2 = 4\pi - \pi \dfrac{24{,}25}{6} = -0{,}04\pi \text{rad/s} \\ v_2 = \omega_2 r = -0{,}03\pi \text{ m/s} \\ a_{t2} = \alpha_2 r = -0{,}125\pi \text{ m/s}^2 \\ a_{n2} = \omega_2^2 r = 0{,}0012\pi^2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

El móvil 2 tiene velocidad negativa, porque a l tiempo t = 24 s su velocidad se hizo cero e inicia el retorno, al tiempo t = 24,25 s se produce el encuentro.

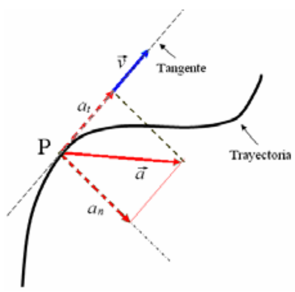
c) Esquema especificando los vectores velocidad, aceleración, en el instante de encuentro.

En el instante del encuentro el esquema sería el siguiente:

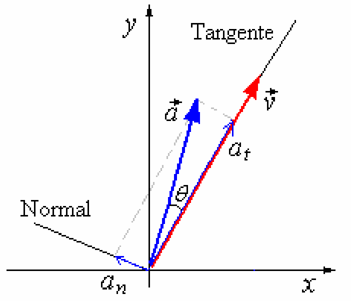


MOVIMIENTO CURVILÍNEO

El movimiento curvilíneo es aquel en el que pueden combinarse tramos rectos y/o curvos. La extensión de las ecuaciones en el sistema intrínseco es inmediata sufriendo sólo una ligera modificación respecto a la aceleración. Esta adopta la expresión $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ donde ρ es el denominado radio de curvatura y corresponde al radio de una hipotética circunferencia en cada uno de los puntos de la trayectoria. Es evidente que en el caso del movimiento circular éste no varía ya que coincide con el radio de la circunferencia en cada uno de esos puntos. $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$



La figura siguiente muestra la velocidad y la aceleración con las coordenadas x e y para un determinado instante.



Como $a_t = a\cos\theta$ m/s^2 y $a_n = a\text{sen}\theta$ m/s^2,

La aceleración tangencial en cualquier instante, se obtiene a partir del producto escalar del vector aceleración $\vec{a}$ y el vector velocidad $\vec{v}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = va\cos\theta = va_t$$

$$a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

La aceleración normal, se obtiene a partir del módulo de la aceleración a y de la aceleración tangencial a_t.

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$\Rightarrow a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - a_t^2$$

$$a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - \left(\frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right)^2$$

Finalmente $a_n = \dfrac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Ejemplo 9. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $\vec{v} = (3t-2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura en el instante t =2 s.

Solución.

$$v_x = (3t-2)\ \text{m/s} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\ \text{m/s}^2$$

$$v_y = (6t^2-5)\ \text{m/s} \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\ \text{m/s}^2$$

En el instante t = 2 s

$$\begin{cases} v_x = 4\ \text{m/s} & a_x = 3\,\text{m/s}^2 \\ v_y = 19\ \text{m/s} & a_y = 24\,\text{m/s}^2 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{4^2+19^2} = 19{,}49\,\text{m/s}$$

$$a = \sqrt{3^2+24^2} = 24{,}19\,\text{m/s}^2$$

La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{4(3)+19(24)}{19{,}49} = 24\ \text{m/s}^2$$

La aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{19(3)-4(24)}{19{,}49} = -2\ \text{m/s}^2$$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a = \sqrt{3^2+24^2} = 24{,}19\,\text{m/s}^2$$

$$v = \sqrt{4^2+19^2} = 19{,}49\,\text{m/s}$$

$v^2 = 377$, $a_n = -2\,\text{m/s}^2$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{377}{2} = 188{,}5\,\text{m}$$

Ejemplo 10. Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo

$x = 3t$, $y = 2t - 5t^2$

Determine

a) las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.

b) las componentes normal y tangencial de la velocidad y aceleración.

c) la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

Solución.

$x = 3t$, $y = 2t - 5t^2$

a) $v_x = 3$; $v_y = 2 - 10t$; $a_x = 0$; $a_y = -10$;

b) $\hat{t} = \dfrac{\vec{v}}{v} = \dfrac{3\hat{i} + (2-10t)\hat{j}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$,

$\hat{n} = \hat{t} \times \hat{k} = \dfrac{-3\hat{j} + (2-10t)\hat{i}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$ entonces

$$v_t = \vec{v}\cdot\hat{t} = v = \sqrt{9+(2-10t)^2}$$

$$v_n = 0$$

$$a_T = \vec{a}\,.\hat{t} = \frac{-10t(2-10t)}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

$$a_T = \vec{a}\,.\hat{t} = \frac{-10t(2-10t)}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

$$a_n = \vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{30}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

c) $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{9}x^2$

Ejemplo 11. Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con la ley $a_x = 0$, $ay = 4\cos(2t)$ m/s^2. En el instante $t = 0$, el móvil se encontraba en $x = 0$, $y = -1$ m, y tenía la velocidad $vx = 2$, $v_y = 0$ m/s.

a) Hallar las expresiones de r(t) y v(t).

b) Dibujar y calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

Solución.

a) En $t = 0$

$$a_x = 0,\ v_x = 2\frac{m}{s},\ x = 0$$

$$a_y = 4\cos(2t)\frac{m}{s^2},\ v_y = 0,\ y = -1\ \ \text{m}$$

En el eje x el movimiento es uniforme $v_x = 2\dfrac{\text{m}}{s}$,

$x = 2t$ m

Para encontrar el movimiento en *y* hay que integrar

$$\int_0^{v_y} v_y = \int_0^t 4\cos(2t)dt \Rightarrow v_y = 2\text{sen}(2t)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

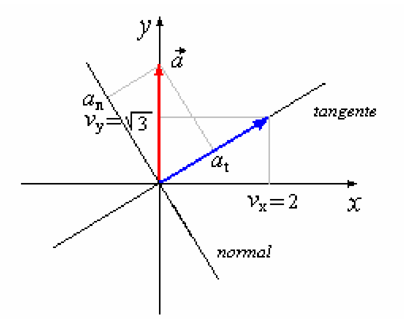
$$\int_{-1}^{y} dy = \int_0^t 2\text{sen}(2t)dt \Rightarrow y-(-1) = 1-\cos(2t)$$

$$\Rightarrow y = -\cos(2t)\,\text{m}$$

b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

$$v_x = 2,\ a_x = 0$$

$$v_y = \sqrt{3},\ a_y = 2$$



$$a_t = 2\cos\theta = 1{,}31\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_n = 2\text{sen}\theta = 1{,}51\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ \tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\theta = 49{,}1^\circ$$

Ejemplo 12. Un móvil se mueve en el plano *xy* con las siguientes aceleraciones: a_x=2 m/s^2, a_y=10 m/s^2. Si en el instante inicial parte del origen con velocidad inicial v_x = 0 y v_y =20 m/s.

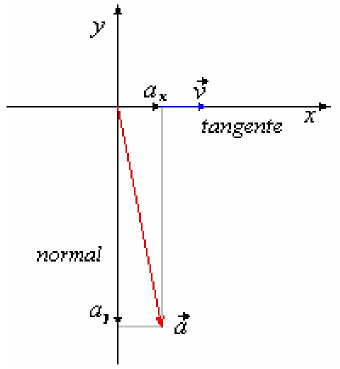
Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración, y el radio de curvatura en el instante t = 2 s.

Solución.

$$a_y = -10\frac{m}{s^2} \quad v_y = 20 + (-10)t$$

$$a_x = 2\frac{m}{s^2} \quad v_x = 2t$$

Para t = 2 s $\begin{cases} v_y = 0 \\ v_x = 4 \end{cases}$



$$a_t = a_x = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_n = a_y = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4^2}{10} = 1{,}6\text{m}$$

Ejemplo 13. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por

$\vec{v} = (3t-2)\hat{i} + (6t^2-5)\hat{j}$ m/s.

Si la posición del móvil en el instante t = 1 s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t = 2 s.

Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{m}{s^2}$$

Como $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$, integrando

$$\int_3^t dx = \int_1^t (3t-2)dt \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\frac{m}{s^2}$$

Como $v_y = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^t dy = \int_1^t (6t^2 - 5)dt \Rightarrow y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + 12t\hat{j}$

c) Para $t = 2$ s

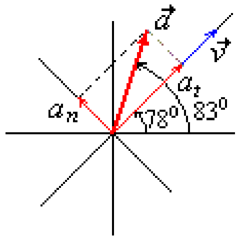
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\,\text{m/s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \Rightarrow \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \Rightarrow \theta = 83^o$$



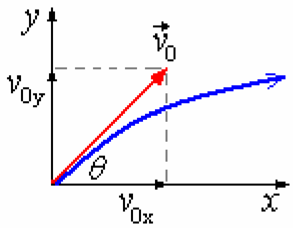
$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\,\text{m/s}^2$$

$$a_n = a(\text{sen}\,\theta - \varphi) = 2\text{m}$$

MOVIMIENTO PARABÓLICO.

Considere un objeto que se desplaza en el aire sin ninguna fuerza con excepción de la gravedad y de la resistencia del aire. La fuerza de la gravedad produce una aceleración constante hacia abajo de magnitud 9,80 m/s^2. Como primera aproximación, no tomemos los efectos del aire y de variaciones en g. Asumiremos que la tierra es plana para el rango horizontal de los proyectiles. A pesar de estas simplificaciones, podemos aún obtener una descripción bastante buena del movimiento del proyectil. El recorrido de un proyectil se llama su trayectoria.

Si se desprecia la resistencia del aire, no hay entonces aceleración en la dirección horizontal, y $a_x = 0$. La aceleración en la dirección de y es debido a la gravedad. Es constante y dirigida hacia abajo, así que $a_y = -g$. Es conveniente elegir $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ (es decir, poner el origen en el punto donde el proyectil comienza su movimiento). Además, nos referimos típicamente a v_0 como la rapidez inicial del proyectil. Si el proyectil es lanzado con un ángulo θ sobre la horizontal, la velocidad inicial en la dirección x y la velocidad inicial en la dirección y se pueden expresar en términos de g y de y θ usando la trigonometría.



$$v_{0x} = v_0\cos\theta,\ v_{0y} = v_0\text{sen}\,\theta$$

$$a_x = 0,\ a_y = -g$$

Con esto:

$$v_x = v_0\cos\theta = \text{constante},\ v_y = v_0\text{sen}\,\theta - gt$$

$$x = (v_0\cos\theta)t,\ y = (v_0\text{sen}\,\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

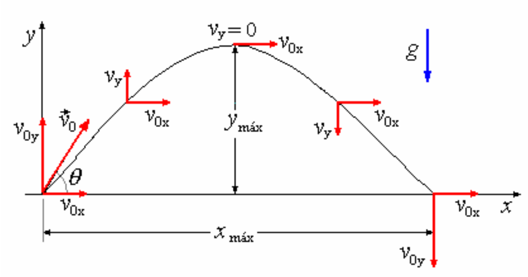
Ecuación de la trayectoria.

De la ecuación para x obtenemos $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$.

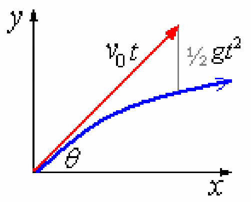
Sustituyendo en la ecuación para y

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

Corresponde a la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Una característica dominante del movimiento del proyectil es que el movimiento horizontal es independiente del movimiento vertical. Así un proyectil se mueve a una velocidad constante en la dirección horizontal, independiente de su movimiento vertical. Esto se ilustra en la figura.



Podemos entender mejor el significado de la ecuación $y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ viendo el movimiento del proyectil de esta manera: Primero, si no hubiera fuerza de la gravedad y aceleración hacia abajo, en el tiempo t el proyectil movería una distancia $v_0 t$ en una línea inclinada recta. Si ahora imaginamos con la gravedad el efecto sería hacer que el proyectil se aleje de la trayectoria recta por una distancia ½ gt^2. De la superposición de estos dos efectos resulta la trayectoria parabólica como se muestra en la figura.



Tiempo de vuelo. Poniendo $y = 0$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$, despejando *t*,

$$t^2 - \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}t = 0$$

Resolviendo obtenemos dos soluciones $t = 0$, que corresponde al disparo del proyectil y

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

El valor máximo de t se obtiene para $\theta = 90^\circ$. Cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba, describiendo una trayectoria rectilínea a lo largo del eje *y*.

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para $y = 0$.

$$x_{máx} = (v_0 \cos\theta)t = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con $v_y = 0$.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt = 0$$, despejando *t*.

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$, como vemos es igual a la mitad del tiempo de vuelo.

$$y_{máx} = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

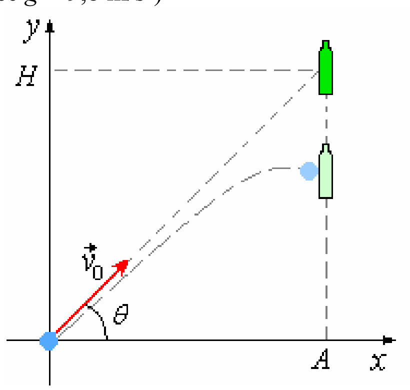
$$= (v_0 \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)^2$$

Finalmente:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo $\theta = 90^\circ$.

Ejemplo 14. UN BLANCO EN CAÍDA LIBRE (Tiro al mono)
Se deja caer una botella desde el reposo en el instante en que una piedra es lanzada desde el origen. Determinar los valores del ángulo y de la velocidad de disparo para que la piedra rompa la botella. (Tómese $g = 9{,}8$ m/s^2)



Solución.
Movimiento de la piedra: El movimiento curvilíneo de la piedra se realiza bajo la aceleración constante de la gravedad, es decir, es la composición de dos movimientos
- Uniforme a lo largo del eje horizontal

$$\text{Horizontal}\begin{cases} a_{px} = 0 \\ v_{px} = v_0 \cos\theta \\ x_p = v_0 \cos\theta\, t \end{cases}$$

- Uniformemente acelerado a lo largo del eje vertical.

$$\text{Vertical}\begin{cases} a_{px} = -g \\ v_{px} = v_0 \text{sen}\theta - gt \\ y_p = v_0 \text{sen}\theta\, t - gt^2/2 \end{cases}$$

Movimiento de la botella: La botella se mueve verticalmente bajo la aceleración constante de la gravedad.

$$a_{bx} = -g$$
$$v_{bx} = -gt$$
$$y_b = H - gt^2/2$$

Choque de la piedra con la botella: Cuando se produce el choque, la posición de la piedra y de la botella coincide.

$$A = v_0 \cos\theta\, t$$
$$H - gt^2/2 = v_0\text{sen}\theta\, t - gt^2/2$$
$$\Rightarrow H = v_0 \text{sen}\theta\, t$$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera.

$$\tan\theta = \frac{H}{A}$$

Para romper la botella debemos de apuntarla directamente y en el instante en el que se deja caer, se debe lanzar la piedra. La velocidad debe tener un valor mínimo para hacer el recorrido A, mientras la botella esté en el aire.

Esto sucede para el tiempo $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, y el recorrido horizontal de la piedra debe cumplir:

$$v_0 \cos\theta\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right) \geq A \Rightarrow v_0 \geq \frac{A}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Ejemplo 15. Una bolsa de arena cae del reposo de un globo de aire caliente desde una altura de 124 m está soplando un viento horizontal, y el viento da a bolsa de arena una aceleración horizontal constante de 1,10 m/s^2.

a) Demuestre que la trayectoria de la bolsa de arena es una línea recta.
b) ¿Cuanto tiempo toma para llegar la tierra?
c) ¿Con qué velocidad llega a la tierra?

Solución.

a) $x = \dfrac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{2x}{a_x}$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = -\frac{2y}{g}$$

De estas ecuaciones, obtenemos:

$\dfrac{2x}{a_x} = -\dfrac{2y}{g} \Rightarrow y = -\dfrac{g}{a_x}x$ Ecuación de una línea recta.

b) En tierra, $y = -124$, tal que

$$t^2 = -\frac{2(-124)}{9{,}8} \Rightarrow t = 5{,}03\text{ s}$$

c) $v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9{,}8)(5{,}03)$

$$= -49{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 0 + (1{,}10)(5{,}03)$$

$$= 5{,}53\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

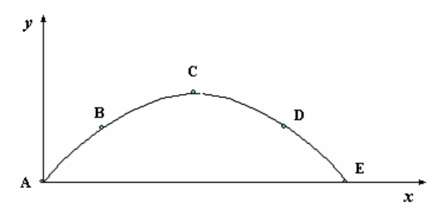
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(5{,}53)^2 + (-49{,}3)^2}$$

$$= 49{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 16. Disparamos un proyectil desde el origen y éste describe una trayectoria parabólica como la de la figura. Despreciamos la resistencia del aire.

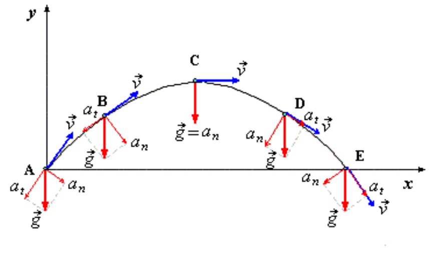
Dibuja en las posiciones A, B, C, D y E el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes normal y tangencial de la aceleración. (No se trata de dar el valor numérico de ninguna de las variables, sólo la dirección y el sentido de las mismas)

¿Qué efecto producen a_n y a_t sobre la velocidad?



Solución.

$\vec{v}$ es tangente a la trayectoria



Cuando sube

a_t y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos.

Cuando baja

a_t y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido

a_t modifica el módulo de la velocidad con el tiempo.

a_n modifica la dirección de $\vec{v}$

Ejemplo 17. Una bala del rifle se dispara con una velocidad de 280 m/s hacia arriba de una superficie plana inclinada 30° sobre la horizontal. La bala se dispara con un ángulo de elevación inicial de 45° sobre la horizontal (es decir, 15° sobre la superficie plana). ¿Cuál es el alcance de la bala sobre el plano?

Solución.

La ecuación del plano inclinado es

$$\frac{y}{x} = \tan 30° \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la trayectoria parabólica.

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

La intersección de la parábola y la línea recta ocurre cuando

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Para $\theta = 45°$: $x = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Para un triángulo 30°, 60°, 90° vemos que

$$x = S\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}S.$$

De aquí $S = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{v_0^2}{g} = 0{,}49\frac{v_0^2}{g}$, arriba del plano.

Con y_0 = 280 m/s, S = 3,90 km.

Ejemplo 18. Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 (m) de altura con una rapidez de 180 (m/s) y formando un ángulo de 30º con la horizontal. Calcule:

(a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil.

(b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo.

(c) Las componentes normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.

Solución:

$x = 180(\cos \pi/6)t$

$y = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2$

a) Punto de caída

$150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2 = 0$,

$t = 19{,}5$ s

$x = 180(\cos \pi/6)(19{,}5) = 3039{,}8$m

b) Tiempo para la altura máxima

$180(\text{sen } \pi/6) - 10t = 0$, $t = 9{,}0$ s

entonces

$y_{max} = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)(9) - 5(9)^2$
$= 555{,}0$m

El vector unitario tangente es

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\cos\frac{\pi}{6} + \hat{j}\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\vec{a} = -10\hat{j}$$

Entonces

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{t} = -10\text{sen}\frac{\pi}{6} = -5 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 19. Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 (m/s). El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 (m) detrás de un cerro, cuya altura es de 1000 (m) ubicado a 1200 (m) del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

Solución.

Supondremos que damos en el blanco entonces

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0$$

$$8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha} = 0$$

Tiene dos raíces reales

$\alpha_1 = 53{,}03$º

$\alpha_2 = 36{,}97$º

Debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y_{(1200)}$

$y_{1\,(1200)} = 1373{,}0$ m

$y_{2\,(1200)} = 777{,}95$ m

La altura del cerro es excedida en el primer caso.

Ejemplo 20. Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.

Solución.

Sabemos que

$$x_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}2\alpha}{g}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}^2\alpha}{2g}$$

Entonces

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33{,}69^{\circ}$$

Ejemplo 21. Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 m. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 m del lanza granadas. Determine:

a) La altura mínima que debe subirse el lanza granadas.

b) La rapidez de lanzamiento.

c) El ángulo de lanzamiento,

Solución.

La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x_{(0)} = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x_{(h)} = \sqrt{\left(v_0^2 + 2hg\right)}\frac{v_0}{g} = 400\text{m}$$

de la primera

b)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54{,}77\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y de $\sqrt{\left(54{,}77\right)^2 + 2h(10)}\dfrac{54{,}77}{10} = 400$

a)

$h = 116{,}701\text{m}$

c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad es

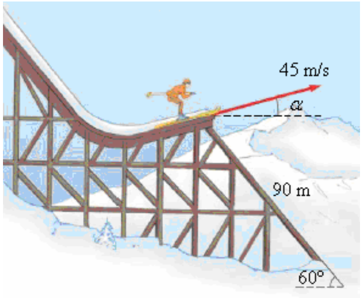
$\tan\alpha = \dfrac{v_0^2}{gx}$ entonces $\alpha = 36{,}87^{\circ}$

Ejemplo 22. Un patinador desciende por una pista helada, alcanzando al finalizar la pista una velocidad de 45 m/s. En una competición de salto, debería alcanzar 90 m a lo largo de una pista inclinada 60º respecto de la horizontal.

a) ¿Cuál será el ángulo (o los ángulos) α que debe formar su vector velocidad inicial con la horizontal?.

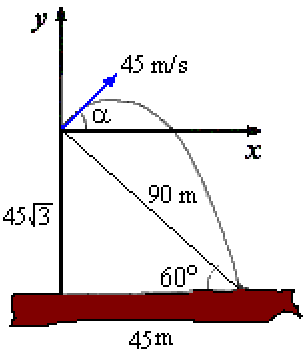
b) ¿Cuánto tiempo tarda en aterrizar?

c) Calcular y dibujar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t/2$. Siendo t el tiempo de vuelo. Tomar $g = 10$ m/s^2



Solución.

a) y b)



$a_x = 0 \qquad v_x = 45\cos\alpha$

$a_y = -10 \qquad v_y = 45\operatorname{sen}\alpha - 10t$

$x = 45\cos\alpha . t$

$$y = 45\operatorname{sen}\alpha . t - \frac{1}{2}10t^2$$

Punto de impacto $x = 45$, $y = -45\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{r} 45 = 45\cos\alpha . t \\ -45\sqrt{3} = 45\operatorname{sen}\alpha . t - 5t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-45\sqrt{3} = 45\operatorname{sen}\alpha . \frac{1}{\cos\alpha} - 5\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan^2\alpha - 9\tan\alpha + 1 - 9\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$\alpha_1 = 84{,}5^{o} \qquad t_1 = 10{,}45s$

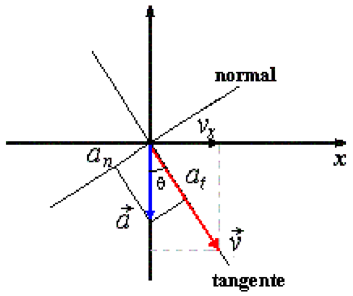
$\alpha_2 = -54{,}5^{o} \qquad t_2 = 1{,}72s$

c) Para $t = \dfrac{t_1}{2}$ $\begin{cases} v_x = 4{,}31 & a_x = 0 \\ v_y = -7{,}46 & a_y = -10 \end{cases}$

$$\tan\theta = \frac{v_x}{\left|v_y\right|} \Rightarrow \theta = 30^{o}$$

$$a_t = g\cos 30^{o} = 5\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$$

$$a_n = g\operatorname{sen} 30^{o} = 5\,\text{m/s}^2$$



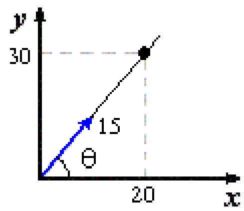
Ejemplo 23. Se deja caer una botella desde el reposo en la posición x =20 m e y =30 m. Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de 15 m/s.

a) Determinar el ángulo con el que tenemos que lanzar la piedra para que rompa la botella, calcular la altura a la que ha ocurrido el choque.

b) Dibujar en la misma gráfica la trayectoria de la piedra y de la botella. (Tomar g = 9,8 m/s^2).

Solución:

a)



Movimiento de la botella

$$a_x = 0 \qquad v_x = 0 \qquad x = 20$$
$$a_y = -9{,}8 \qquad v_y = -9{,}8t \qquad y = 30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

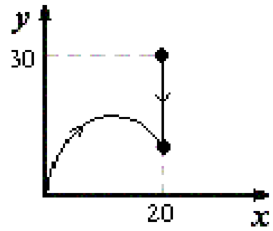
Movimiento de la piedra

$$a_x = 0 \qquad v_x = 15\cos\theta$$
$$a_y = -9{,}8 \qquad v_y = 15\operatorname{sen}\theta - 9{,}8t$$
$$x = 15\cos\theta t$$
$$y = 15\operatorname{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

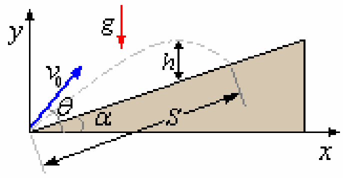
Punto de encuentro

$$20015\cos\theta.t$$
$$30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2 = 15\operatorname{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$
$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{30}{20} & \begin{matrix}\theta = 56{,}3^o \\ y = 1{,}69\text{m}\end{matrix} \end{cases}$$

b)



Ejemplo 24. Desde un cañón que está sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal se dispara un proyectil. Este sale con una velocidad v_0 formando un ángulo θ con el plano horizontal.
Encontrar.
a) El punto más alto al que llega el proyectil.
b) El alcance del proyectil.
Solución.



a) $v_{0x} = v_0\cos\theta$ $v_{0y} = v_0\operatorname{sen}\theta$

$v_y = v_0 sen\theta - gt$

La altura máxima se produce cuando $v_y = 0$

$$y_{máx} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Con ese valor,

$$x = v_0\cos\theta\left(\frac{v_0\operatorname{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta$$

$$y = x\tan\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta\tan\alpha$$

$$h = y_{máx} - y = \frac{v_0^2}{2g}\left(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}2\theta\tan\alpha\right)$$

b) El alcance máximo S.

$x = v_0\cos\theta\, t$ $y = v_0\operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Ecuación del plano en función de t $y = x\tan\alpha$

Dividiendo y/x:

$$\frac{y}{x}=\frac{v_0\text{sen}\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2}{v_0\cos\theta\, t}=\tan\alpha \Rightarrow$$

$$v_0\text{sen}\theta\, t-\tfrac{1}{2}gt^2=\tan\alpha\, v_0\cos\theta\, t$$

Resolviendo encontramos el tiempo para el que el proyectil toca tierra:

$$t=\frac{2v_0}{g}(\text{sen}\theta-\cos\theta\tan\alpha)$$

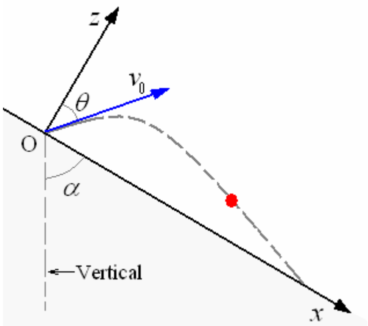
El valor de x cuando el proyectil toca tierra es:

$$x=v_0\cos\theta\, t=\frac{2v_0^2}{g}\cos\theta(\text{sen}\theta-\cos\theta\tan\alpha)$$

Y el alcance S es:

$$S=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}(\text{sen}\theta-\cos\theta\tan\alpha)$$

Ejemplo 25. La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen O con una velocidad inicial de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.
a) Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.
b) Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.
c) Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si $\theta=\alpha/2$.



Solución.

a) $a_x=g\cos\alpha$, $v_x=g\cos\alpha\, t+v_0\text{sen}\theta$,

$$x=\frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2+v_0\text{sen}\theta\, t$$

$a_z=-g\text{sen}\alpha$, $v_z=-g\text{sen}\alpha\, t+v_0\cos\theta$,

$$z=-\frac{1}{2}g\text{sen}\alpha\, t^2+v_0\cos\theta\, t$$

b) La máxima separación ocurre para $v_z=0$ y vale

$$z=\frac{v_0^2}{2g}\frac{\cos^2\theta}{2\text{sen}\alpha}$$

c) El punto de caída ocurre para $z=0$ y la distancia vale $x_{(\theta)}=\dfrac{v_0^2}{g\text{sen}\alpha}\left[\dfrac{1+\cos 2\theta}{\tan\alpha}+\text{sen}2\theta\right]$

La distancia máxima ocurre para $\dfrac{dx_{(\theta)}}{d\theta}=0$.

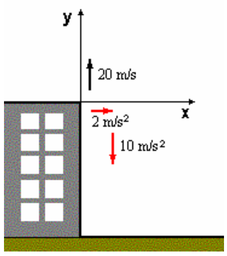
Ejemplo 26. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. La pelota además es empujada por el viento, produciendo un movimiento horizontal con aceleración de 2 m/s^2. Calcular:

a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y de impacto.

b) La altura máxima

c) El valor de las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando la pelota se encuentra a 60 m de altura sobre el suelo.

Tómese g =10 m/s^2.



Solución.

$$a_x=2,\quad v_x=2t,\quad x=\frac{1}{2}2t^2$$

$$a_y=-10,\quad v_y=20+(-10)t,$$

$$y=20t+\frac{1}{2}(-10)t^2$$

a) Punto de impacto

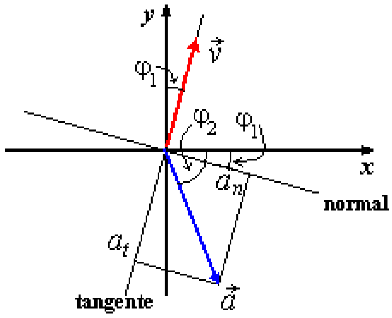
y = -50 $\Rightarrow$ t = 5,74 s $\Rightarrow$ x = 32,97 m

b) altura máxima

$v_y=0 \Rightarrow t$ = 2 s $\Rightarrow y$ = 20 m

$h_{\text{máxima}}$ = 70 m sobre el suelo.

c) $h = 60 \Rightarrow y = 10$ m $\Rightarrow t_1 = 0{,}59$ s $t_2 = 3{,}41$ s



$$t_1 = 0{,}59s\begin{cases} v_x = 1{,}17 \\ v_y = 14{,}14 \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

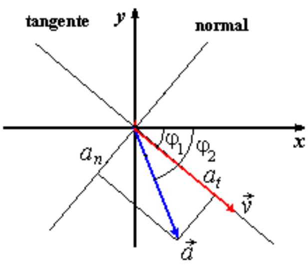
$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1{,}17}{14{,}14} = 0{,}08 \Rightarrow \varphi_1 = 4{,}7^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 73^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 2{,}81 \text{ m}/s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 9{,}80 \text{ m}/s^2 \end{cases}$$



$$t_2 = 3{,}41s\begin{cases} v_x = 6{,}83 \text{ m/s} \\ v_y = -14{,}14 \text{ m/s} \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{14{,}14}{6{,}83} = 2{,}07 \Rightarrow \varphi_1 = 64{,}2^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

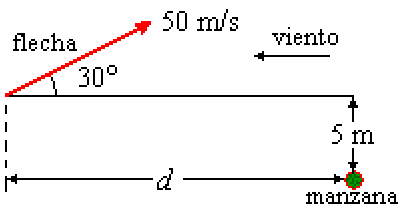
$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 14{,}5^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 9{,}87 \text{ m,}/s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 2{,}55 \text{ m}/s^2 \end{cases}$$

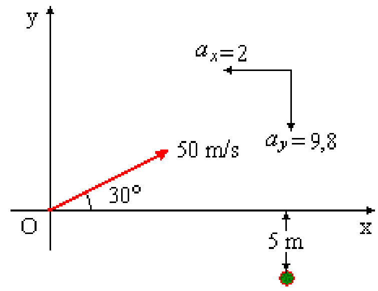
Ejemplo 27. Nos encontramos en la antigua Suiza, donde Guillermo Tell va a intentar ensartar con una flecha una manzana dispuesta en la cabeza de su hijo a cierta distancia *d* del punto de disparo (la manzana está 5 m por debajo del punto de lanzamiento de la flecha). La flecha sale con una velocidad inicial de 50 m/s haciendo una inclinación de 30º con la horizontal y el viento produce una aceleración horizontal opuesta a su velocidad de 2 m/s^2.

a) Calcular la distancia horizontal *d* a la que deberá estar el hijo para que pueda ensartar la manzana.

b) Hállese la altura máxima que alcanza la flecha medida desde el punto de lanzamiento. ($g = 9{,}8$ m/s^2)



Solución.



$a_x = -2$, $v_x = 50\cos 30^o - 2t$,

$$x = 50\cos 30^o - \frac{1}{2}2t^2$$

$a_y = -9{,}8$, $v_y = 50\text{sen}30^o - 9{,}8t$,

$$y = 50\text{sen}30^o - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

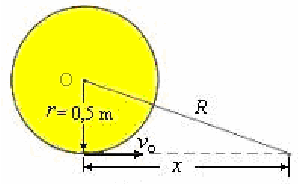
Punto de impacto $x = d$, $y = -5$

$-5 = 25t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 5{,}29$ s $\Rightarrow x = 201{,}23$ m

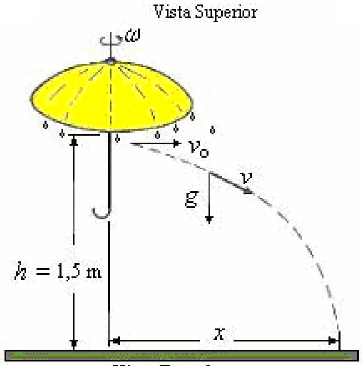
Máxima altura $v_y = 0$

50sen30º - 9,8t = 0 $\Rightarrow$ $t = 2{,}55$ s $\Rightarrow$ $y = 31{,}89$ m

Ejemplo 28. Un paraguas abierto mojado se sostiene hacia arriba como se muestra en la figura y se gira sobre la manija a razón uniforme de 21 revoluciones en 44 s. Si el borde del paraguas es un círculo 1 m de diámetro, y la altura del borde sobre el piso es 1,5 m, hallar donde las gotas del agua al hacer girar del borde tocan el piso.



Vista Superior



Vista Fontal

Solución.
La velocidad angular del paraguas es

$$\omega = \frac{21 \times 2\pi \text{rad}}{44 s} = 3 \text{rad/s}$$

La velocidad tangencial de las gotas de agua que salen del borde del paraguas es

$$v_0 = r\omega = (0{,}5)(3) = 1{,}5 \text{m/s}$$

Para calcular el tiempo en que la gota llega al piso usamos $h = \frac{1}{2} g t^2$

$$\Rightarrow\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(1{,}5)}{9{,}8}} = 0{,}553 \text{m}$$

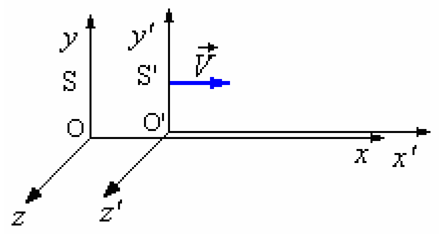
El alcance horizontal de la gota es
$x = v_0 t = (1{,}5)(0{,}55) = 0{,}83$ m;
y el locus de las gotas es un círculo de radio

$$R = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}83)^2} = 0{,}97 \text{ m.}$$

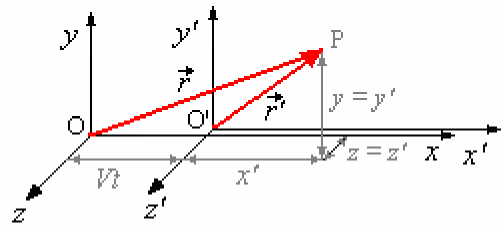
VELOCIDAD Y ACELERACIÓN RELATIVAS.

Movimiento Relativo de Traslación Uniforme. La Relatividad de Galileo

Consideramos dos sistemas de referencia S y S', S' tiene un movimiento de traslación rectilíneo uniforme con respecto a S; S' se aleja de S con una velocidad $\vec{V} = v\hat{i}$



Sea un objeto P determinado por un observador en el sistema S por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y por un observador en el sistema S' por $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ como se muestra en la figura.



Las ecuaciones de transformación de Galileo que relacionan las observaciones desde los sistemas S y S' son

$x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$ $t = t'$

Aquí se supone que puede establecerse una escala de tiempo absoluta aplicable a ambos marcos de referencia de manera que $t = t'$. Esto sucedería si la velocidad de la luz fuera infinita (Debemos reconocer que las escalas de tiempo asociadas a dos marcos de referencia no son los mismos si existe movimiento relativo entre ellos es uno de los principios fundamentales de la teoría especial de la relatividad propuesta por Einstein en 1905).
Vectorialmente podemos representar la transformación de Galileo como

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t$.

Derivando las relaciones anteriores podemos obtener la relación de la velocidad.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \Rightarrow v_x = v'_{x'} + V$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \Rightarrow v_y = v'_{y'}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \Rightarrow v_z = v'_{z'}$$

Vectorialmente $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$

Derivando nuevamente obtenemos la relación de la aceleración

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv'_{x'}}{dt} + \frac{dV}{dt} \Rightarrow a_x = a'_{x'} + \frac{dV}{dt}$$

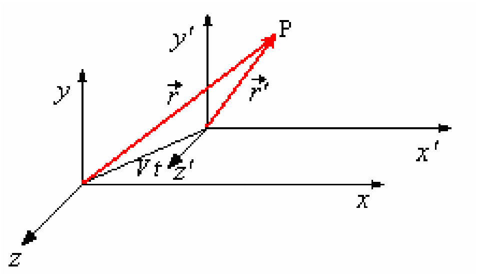
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv'_{y'}}{dt} \Rightarrow a_y = a'_{y'}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv'_{z'}}{dt} \Rightarrow a_z = a'_{z'}$$

Si la velocidad $\vec{V}$ del sistema S' es constante,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \text{ y } \vec{a} = \vec{a}'$$

Estas relaciones encontradas son de aplicación general si S y S' están animadas por un movimiento relativo cualquiera, como se muestra en la figura siguiente



Las ecuaciones son:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t\ ,\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Ejemplo 29. Desde la plataforma de un camión en movimiento horizontal $\vec{V}$ constante se lanza un proyectil directamente hacia arriba con una velocidad $\vec{v}_0$. ¿Cómo será visto el movimiento del proyectil por:

a) un observador situado en el camión (sistema S')?

b) un observador situado en el suelo (sistema S)?

Solución.

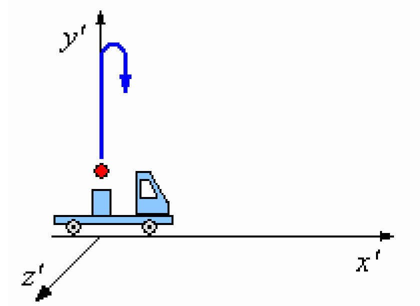
a) El tiempo se mide desde el momento del lanzamiento $t_0 = 0$, cuando el proyectil se eleva con velocidad v_0. La componente horizontal de la velocidad coincide con la velocidad V del camión. El observador O' en el camión verá únicamente la componente vertical $v'_{y'0}$, la componente horizontal será $v'_{x'0} = 0$.

Para un instante *t* cualquiera

$$x' = 0 \qquad y' = v'_{y'0}t - ½gt^2$$

$$v'_{x'} = 0 \qquad v'_{y'} = v'_{y'0} - gt$$

$$a'_{x'} = 0 \qquad a'_{y} = -g$$

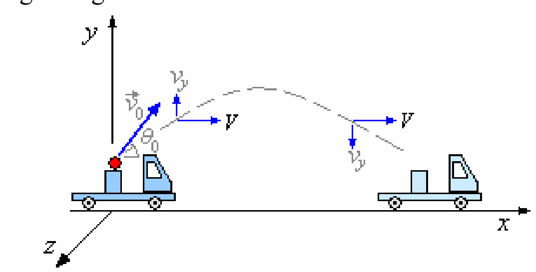


b) Si se observa el mismo proyectil desde un sistema de referencia situado en el suelo S con un origen en el lugar de lanzamiento (para $t_0 = 0$, O = O'), entonces las posiciones, las velocidades y las aceleraciones respecto de O estarán dadas por la transformación de Galileo. En este caso la velocidad inicial v_0 vista desde el suelo será

$$\vec{v}_0 = V\hat{i} + v_{y0}\hat{j} \quad v_0 = \sqrt{V^2 + v_{y0}^2}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{v_{y0}}{V}$$

La trayectoria será una parábola tal como se ve en la figura siguiente



La componente horizontal del movimiento del proyectil es igual al movimiento del cañón, de modo que cuando cae el proyectil coincidirá con el cañón.

Ejemplo 30. El observador O suelta una piedra del trigésimo piso de un rascacielos. El observador O', descendiendo en un ascensor a velocidad constante de V = 5,0 m/s, pasa el trigésimo piso justo cuando se suelta la piedra. Al tiempo t = 3,0 s después de que se suelta la piedra, hallar:

a) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O.

b) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O'.

Solución.

a) Para O, la posición de la piedra está dada por:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Donde x = 0 en el trigésimo piso con la dirección hacia abajo como la dirección positiva de x. Así, en t = 3,0 s,

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}(9,8)(3,0)^2 = +\ 44 \text{ m/s}$$

También, $v = v_0 + at$ da

v = 0 + 9,8 m/s^2 x 3,0 s = +29 m/s.

La aceleración de un cuerpo en caída libre, según el observador O que está inmóvil con respecto a la tierra, se sabe que la aceleración gravitacional es constante.
(De hecho, esto es la base de la validez de los dos cálculos anteriores.)
Así tenemos:

$a = +g = +9,8\ m/s^2$.

b) O' mide la posición x', relativa a x por medio de la ecuación $x' = x - Vt$.
Luego, después de 3,0 s,

$x' = 44\ m - 5,0\ m/s \times 3,0\ s = +29\ m$.

Es decir, la piedra se localiza 29 m debajo del observador O' después de 3,0 s.
La velocidad de la piedra relativa a O' es $v' = v - V$; de aquí, en $t = 3,0s$,

$v' = 29\ m/s - 5,0\ m/s = +24\ m/s$

Puesto que V es constante, $a' = a$, y $a' = +g = +9,8\ m/s^2$.
El observador O' ve la piedra con la misma aceleración vista por O. (en general, las aceleraciones son iguales en todos los sistemas inerciales.)

Ejemplo 31. Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Interestatal 80 a 80 km/h y es seguido por un auto patrulla que viaja a 95 km/h.
a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla?
b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?
Solución.
Si el Oeste indica el sentido positivo entonces
a) 80 - 95 = -15 km/h
b) 95 - 80 = 15 km/h

Ejemplo 32. Un río tiene una rapidez uniforme de 0,5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1,2 m/s en agua tranquila, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.
Solución.
La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es 1,2 – 0,5 = 0,7 y cuando nada corriente abajo es 1,2 + 0,5 = 1,7 entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$t = \frac{1000}{0,7} + \frac{1000}{1,7} = 2016,81\ s = 0,56\ h$$

Ejemplo 33. Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador en reposo sobre la orilla del río determina sus rapideces que resultan ser de V_1 y V_2 respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.
Solución.
Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces
$V_1 = u - W$
$V_2 = u + W$
de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

Ejemplo 34. Un bote cruza un río que mide de ancho a en el cual la corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v m/s con respecto al agua. De acuerdo a los datos
(a) ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla?
(b) ¿Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?
Solución.
a)

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a $t = \frac{a}{v}$
Por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}a$$

Ejemplo 35. Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica, funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.
Solución.
Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

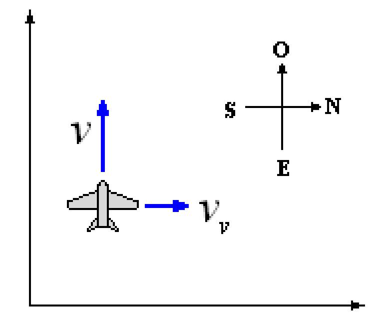
$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

$$v = v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{L}{t}$$

de donde el tiempo será
$t = 12$ s

Ejemplo 36. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.



Solución.
La velocidad del viento es v_v = 30 km/h y la rapidez del avión respecto al aire es v' = 150 km/h.
Pero

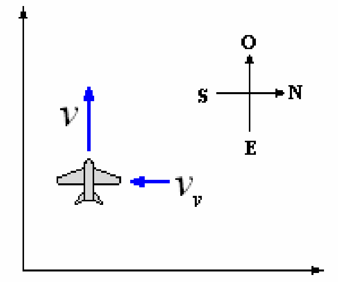
$$\vec{v} = v\hat{j} = 30\hat{i} + \vec{v}'$$

De donde $\vec{v}' = v\hat{j} - 30\hat{i}$
y si tomamos magnitudes

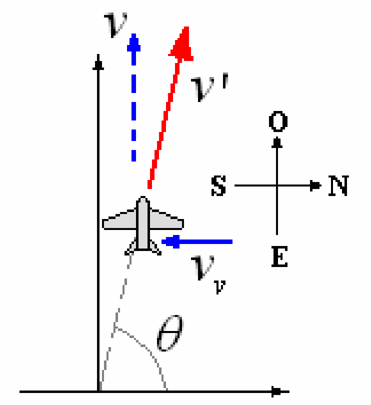
$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2} \Rightarrow$$

v = 146,969 km/h

Ejemplo 37. El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a 50 km/h. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km/h,
a) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión?
b) ¿cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?



Solución.
La velocidad del viento es v_v = 50 km/h hacia el sur y la rapidez del avión respecto al aire es v' = 200 km/h.
Para poder volar directamente hacia el oeste con respecto a tierra debe compensar el arrastre producido por el viento, tal como se muestra en la figura siguiente.



a) La dirección en la que debe dirigirse el avión está dada por el ángulo θ.

$$\cos\theta = \frac{v_v}{v} = \frac{50}{200} = 0{,}25 \Rightarrow \theta = 75{,}5^{\circ}$$

Debe dirigirse 75,5º dirección N-O.
b) Su velocidad respecto a la Tierra es:

$$\vec{v} = \vec{v}' - 50\hat{i}$$

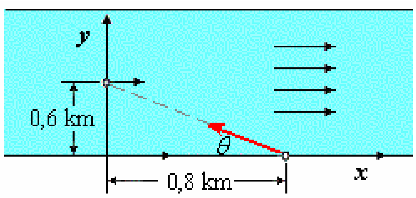
Y su rapidez respecto a tierra es:

$$v = \sqrt{v'^2 - 50^2} = \sqrt{200^2 - 50^2}$$

= 193,6 km/h

Ejemplo 38. Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de 2,5 km/h. El niño está a 0,6 km de la orilla y a 0,8 km corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.
a) si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km/h con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?
b) ¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad, v, del bote con respecto a la orilla?
c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?
Solución.
a) Considerando al bote y al niño dentro del río se encuentran en un sistema inercial S'.
En este sistema el niño esta en reposo y el bote se mueve con su velocidad, para poder alcanzar en el menor tiempo el bote de enfilar con un ángulo relativo a la orilla dado por:

$$\tan\theta = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 1{,}5 \Rightarrow \theta = 37^{\circ}$$



b) La velocidad del bote v, con respecto a la orilla

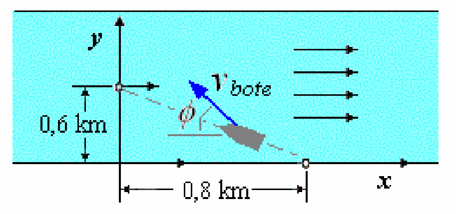
$$v_x = -20\cos 37^{\circ} + 2{,}5 = -13{,}5 \quad (1)$$

$v_y = 20 \text{sen} 37^o = 12$ (2)

Dividiendo (2) : (1)

$$\frac{v_x}{v_y} = \tan\phi = \frac{12}{-13,5} = -0,89$$

$\Rightarrow \phi = -41^o$



c) El tiempo que le tomará al bote para alcanzar al niño:

$$d = vt \Rightarrow t = \frac{d}{v}$$

Siendo v = 20 km/h y

$d = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2}$ = 1,0 km

$t = \dfrac{1}{20}$ = 0,05 h = 3 min

Ejemplo 39. Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de 2,5 m/s^2 se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a:

a) el carro del tren?

b) la estación?

Solución:

Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, entonces

a)

$\vec{a}' = -2,5\hat{\imath} - 9,8\hat{\jmath}$.

b)

$\vec{a} = -9,8\hat{\jmath}$

Ejemplo 40. Un estudiante de la Facultad de Ingeniería pasea sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de V m/s. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de $\alpha°$ con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?

Solución.

Si V' es la rapidez inicial de lanzamiento relativa al tren, entonces en la dirección x tenemos:

$V_x = V' \cos\alpha \;\; V = 0$

Porque el profesor observa que sale verticalmente.

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

Luego

$V_y = V'_y = V'\sin\alpha = V \cot\alpha$

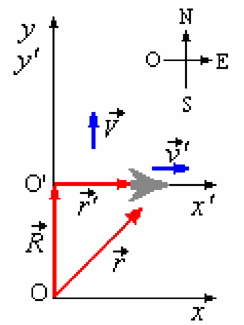
Subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2 \cot^2\alpha}{2g}$$

Ejemplo 41. La brújula de un avión indica que se está dirigiendo hacia el este con una velocidad de 400 km/h. La información de tierra indica que el viento sopla hacia el norte con una velocidad de 300 km/h. ¿cuál es la velocidad del avión con respecto a tierra?

Solución.

En este caso tenemos dos sistemas, el sistema tierra (S) y el sistema aire (S') que se mueve con una velocidad de 300 km/h respecto a tierra.



$\vec{V} = 300\hat{\jmath}$

$\vec{v}' = -400\hat{\imath}$

$\vec{R} = \vec{V} t$

$\vec{r}' = \vec{v}' t$

La posición del avión visto desde O es

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \vec{V} t + \vec{r}'$

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}'$$

Luego $\vec{v} = 300\hat{\jmath} + 400\hat{\imath}$

Su magnitud

$$v = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \frac{km}{h}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{300}{400} = 37^o$$

El avión se dirige hacia el NE formando un ángulo de 37° con la dirección este, el módulo de la velocidad es 500 km/h.

Ejemplo 42. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse e al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre 20 m en 1 minuto. Calcular el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

Solución.

La velocidad del nadador es:

$$v_n = \frac{s}{t} = \frac{100}{2} = 50\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

La velocidad del agua del río es: $v_r = 20\dfrac{\text{m}}{\text{min}}$

La velocidad nadando a favor de la corriente es:

$v_1 = v_n + v_r$ = 50 + 20 = 70 m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{100}{70} = 1 \text{ min } \ 26 \text{ s}$$

La velocidad nadando en contra de la corriente es:

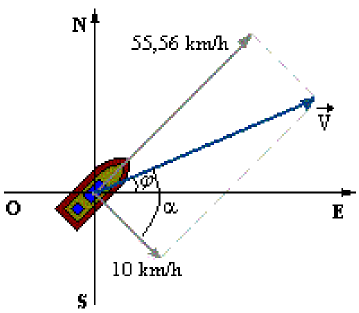
$v_2 = v_n - v_r$ = 50 - 20 = 30 m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{100}{30} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Ejemplo 43. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 50,56 km/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km /h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.

Solución.



$$v_A = 55{,}56\frac{\text{km}}{\text{h}}, \ v_T = 10\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V = \sqrt{55{,}56^2 + 10^2} = 56{,}45 \text{ km/h}$$

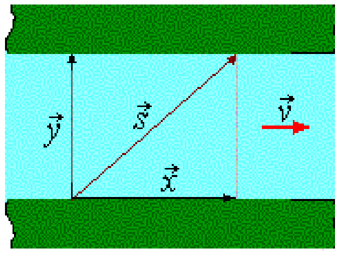
$$\tan\alpha = \frac{55{,}56}{10} \Rightarrow \alpha = 79{,}8$$

$$\varphi = 79{,}8 - 45 = 34{,}8 = 34^\circ\ 47'\ 49''$$

La dirección será 90º - φ = 55º 12’ 11’’

Ejemplo 44. Una pequeña lancha atraviesa un río de 50 m de. Anchura, al mismo tiempo la corriente lo arrastra 60 m aguas abajo. ¿Qué camino ha recorrido?

Solución.



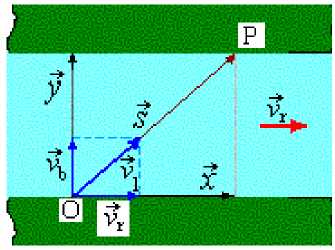
Si en la figura *y* es el ancho del río y *x* el avance producido por la corriente, el camino recorrido por la lancha es *s*.

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2}$$

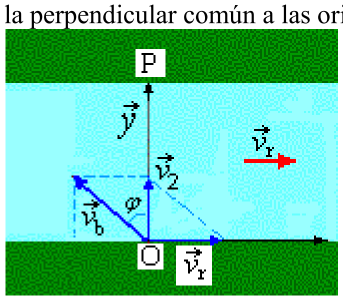
= 78,1 m

Ejemplo 45. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h, La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y el ancho de tal río 100 m.

a) Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente.



b) ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas),



c) ¿Qué velocidad, respecto a la tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados?

d) ¿Cuánto tarda en atravesar el río?.

Solución.

a) $v_x = v_r$ = 6 km/h, $v_y = v_b$ = 8 km/h

$$y = v_y t \Rightarrow t = \frac{y}{v_y} = \frac{0{,}1}{8}\text{h} = 45 \text{ s}$$

La distancia a que es arrastrada por la corriente:

$$x = v_x t = 6\times\frac{0{,}1}{8}\text{Km} = 75 \text{ m}$$

b) Para que la barca vaya en la dirección de v_2 la componente horizontal de v_b ha de ser igual a 6 km/h.

$$v_b \operatorname{sen}\varphi = v_r \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{6}{8}$$

$$\Rightarrow \varphi = 48^\circ\ 35'$$

c) En el primer caso

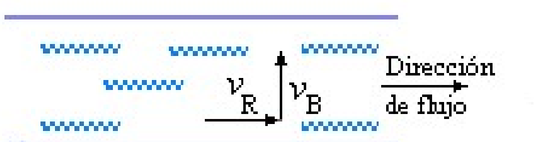
$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$
= 10 km/h
En el segundo caso:
$v_2 = v_b \cos\varphi$ = 8cos 48º 35'
= 5,3 km/h
d) En el primer caso son 45 s ya calculados.
En el segundo caso:
$t = \dfrac{y}{v_2} = \dfrac{0{,}1}{5{,}3}$h = 68 s

Ejemplo 46. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.
a) Calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.
b) Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 minuto según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.
Solución .
a) La proa de la canoa debe recorrer un espacio en dirección perpendicular al río:
y = 100 – 2,5 = 97,5 m
siendo $y = v_c t$ = 97,5 m
el río arrastra a la canoa x = 23,4 m = $v_r\, t$
dividiendo las dos anteriores

$$\frac{97{,}5}{23{,}4} = \frac{5}{v_r} \Rightarrow v_r = 1{,}2 \text{m/s}$$

b) $v_1 = v_c + v_r$ = 5 + 1,2 = 6,2 m/s
$\Rightarrow x_1$ = 6,2 x 60 =372 m
$v_2 = v_c - v_r$ = 5 - 1,2 = 3,8 m/s
$\Rightarrow x_2$ = 3,8 x 60 =228 m

Ejemplo 47. Un bote de remos se dirige perpendicular a la orilla de un río. Los remos pueden propulsar el bote con una velocidad de 3,0 m/s con respecto al agua. El río tiene una corriente de 4,0 m/s.
(a) Construya un diagrama en el cual las dos velocidades se representen como vectores.
(b) Encuentre el vector que representa la velocidad del bote con respecto a la orilla.
(c) ¿Qué ángulo forma este vector con la dirección en la cual el bote está señalando?
(d) Si el río tiene 100 m de ancho, determínese cuan lejos río abajo del punto del lanzamiento el bote llega al orilla opuesta.
Solución.
Solución:
a) Diagrama.



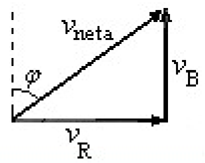
b y c) La velocidad del bote con respecto a la orilla es $\vec{v}_{neta} = \vec{v}_B + \vec{v}_R$.
Como $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_R$ son perpendiculares, tenemos

$v_{neta} = \sqrt{v_B^2 + v_R^2}$
$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{m/s}$.

El ángulo φ mostrado en la figura se determina por

$$\tan\varphi = \frac{v_R}{v_B}.$$

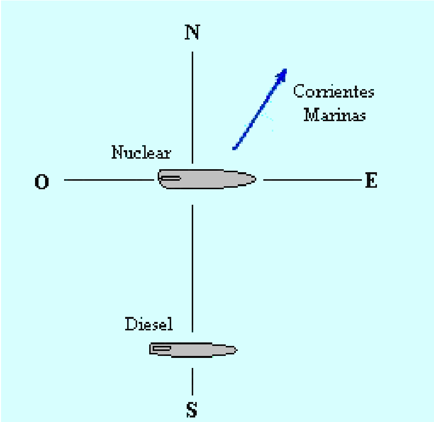
Para las velocidades dadas encontramos $\varphi = 53{,}1^o$.
El bote se mueve a lo largo de una línea dirigida 53,1º río abajo.



d) Haciendo D = distancia río abajo, tenemos

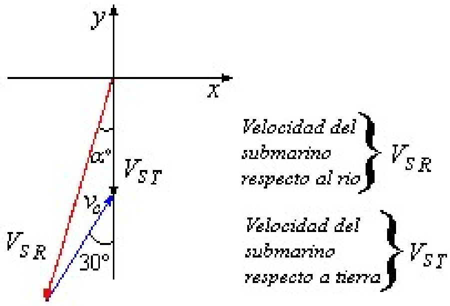
$\dfrac{D}{100} = \dfrac{v_R}{v_B} = \dfrac{4}{3}$, tal que D = 133 m.

Ejemplo 48. Un submarino de propulsión convencional (Diesel) sufrió un incendio en el Atlántico norte después de salir de Inglaterra. Debido a un huracán no era posible enviar barcos ni aviones para ayudar al submarino diesel. La marina decidió enviar un submarino de propulsión nuclear para ayudar al de propulsión Diesel. El submarino diesel se encuentra al Sur a 500 km de distancia del submarino nuclear (ver figura). La rapidez del submarino nuclear respecto al agua es de 54 km/h. Además, hay una corriente marina de 36 km/h que se mueve al NE formando un ángulo de 30° respecto al norte. (Asuma que el eje x es el eje DE, y el eje y es el NS).
a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas x -y, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.
b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.
c) Calcule el módulo de la velocidad V.
d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.



Solución.

a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas x-y, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.



b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.

$$\vec{V}_{sR} = -54\ \text{sen}\ \alpha\hat{i} - 54\ \cos\ \alpha\hat{j}\ ,$$

$$\vec{v}_c = 36\text{sen}30^\circ\hat{i} + 36\cos 30^\circ\hat{j} = 18\hat{i} + 31{,}18\hat{j}$$

$$-54\text{sen}\alpha + 18 = 0\ \Rightarrow\ \text{sen}\alpha = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha = 0{,}94$$

$$\vec{V}_{sT} = (-54\cos\alpha + 31{,}18)\hat{j}$$
$$= (-50{,}76 + 31{,}18)\hat{j}$$
$$= 19{,}18\hat{j}$$

c) Calcule el módulo de la velocidad V.

19,18 km/hora

d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.

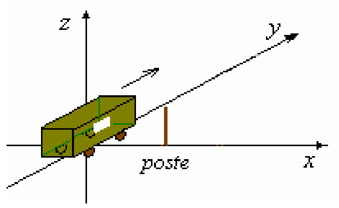
$$t = \frac{d}{V} = \frac{500}{19{,}18}$$
= 26 horas

Ejemplo 49. Desde el interior de un tren que viaja a 108 km/h, un niño lanza un objeto por una ventana con una velocidad de 36 km/h, horizontalmente y perpendicularmente a la marcha del tren, justo en el momento en que pasa en frente de un poste indicador.

a) ¿A qué distancia del poste contada a lo largo de la vía, y a qué distancia de esta chocará el cuerpo con el suelo?

b) Realícese un esquema de la trayectoria seguida por el cuerpo

Dato: la altura inicial del objeto sobre el suelo es de 2,45 m



Solución.

Velocidad del tren $v_y = 108\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 30\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

Velocidad de la piedra $v_x = 36\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$$g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a) El movimiento de la piedra lanzada está dada por las ecuaciones:

$$x = 10t,\ \ y = 30t,\ \ z = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2$$

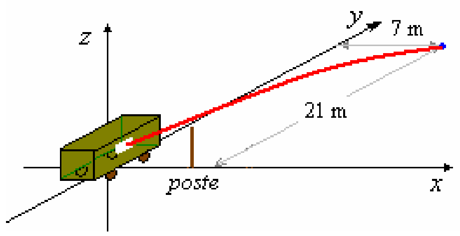
Cuando la piedra llega al suelo z = 0

$$z = 0 = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2\ \Rightarrow\ t = 0{,}7s$$

Distancia del poste medida desde la vía:
$y = 30t = 30(0{,}7) = 21\text{m}$

Distancia de la vía al punto de caída:
$x = 10t = 10(0{,}7) = 7\text{m}$

b)



PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La velocidad de la corriente de un río aumenta en proporción a la distancia de la orilla y alcanza su valor máximo v_0 en el medio. Cerca de la orilla la velocidad es cero. Un bote que navega en el río tiene una velocidad *u* relativa al agua, constante y perpendicular a la corriente.
a) Encontrar la distancia que fue arrastrando el bote al cruzar el río de ancho C.
b) Determinar la trayectoria del bote

Respuesta. a) $d = C\dfrac{v_0}{2u}$

2. Un automovilista entra en una curva de 150 m de radio, una velocidad de 72 km/h. Accionando los frenos hace disminuir su velocidad de modo uniforme a razón de 1,5 m/s^2.
Determinar el módulo de la aceleración del automóvil cuando su velocidad es de 63 km/h.
Respuesta: 2,53 m/s^2

3. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son $x = R\cos\omega t$, $y = R\operatorname{sen}\omega t$, $z = vt$. *R*, *ω*, *v* son constantes.
Probar que se trata de un movimiento uniforme, dibujar la trayectoria.

Respuesta: Movimiento helicoidal con velocidad angular ω y subiendo con velocidad *v*.

4. Dadas las ecuaciones paramétricas de un movimiento $x = A\operatorname{sen}\omega t$, $y = A\cos\omega t$,
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) La ley horaria
c) La trayectoria

Respuesta. a) $\vec{r} = A\operatorname{sen}\omega t\,\hat{i} + A\cos\omega t\,\hat{j}$, b) $s = \omega A t$, c) $x^2 + y^2 = A^2$

5. Dos objetos se mueven en el plano *xy* de acuerdo a $\vec{r}_1 = (4t^2 + 3t + 228)\hat{i} + (2t + 12)\hat{j}$ y $\vec{r}_2 = (8t^2 + 11t - 444)\hat{i} + (5t - 24)\hat{j}$ respectivamente.
a) ¿Cuales son la velocidad y aceleración de cada objeto?
b) ¿Dónde y cuando chocan?
Respuesta.
a) $\vec{v}_1 = (8t + 3)\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 8\hat{i}$
$\vec{v}_2 = (16t + 11)\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 16\hat{i}$
b) $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = 840\hat{i} + 36\hat{j}$, $t = 12$

6. Las posiciones de dos partículas P_1 y P_2 están dadas por $\vec{r}_1 = (5 + 3t + 2t^2)\hat{i}$,
$\vec{r}_2 = (t + 5t^2)\hat{i}$.
a) ¿En qué instante chocarán las dos partículas?
b) ¿Cuál es la diferencia de velocidades en ese instante?
Respuesta: a) $t = 2$ b) 8

7. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = R\operatorname{sen}bt\,\hat{i} + Ct\,\hat{j} + R\cos bt\,\hat{k}$. Determinar.
a) La velocidad y aceleración de la partícula.
b) La trayectoria de la partícula.
c) El radio de curvatura.

Respuesta. a) $v = \sqrt{C^2 + R^2b^2}$, $a = Rb^2$,
b) Helicoide, c) $\rho = R + \dfrac{C^2}{Rb^2}$

8. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = 0{,}1\operatorname{sen}\pi t\,\hat{i} + 0{,}25\cos 2\pi t\,\hat{j}$, *r* en metros y *t* en segundos:
a) Determinar la velocidad y aceleración para *t* = l s.
b) Demostrar que la trayectoria de la partícula es una parábola.

Respuesta. a) $\vec{v} = -0{,}1\pi\,\hat{i}$ m/s, $\vec{a} = 0$
b) $y = 0{,}025 - 5x^2$

9. La aceleración de un cuerpo es:
$\vec{a} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\text{cm/s}^2$
a) Si el cuerpo parte del reposo ¿Cuál es su velocidad después de 3 segundos?
b) ¿Cuál es su posición después de 10 segundos?
c) ¿Cuál es su rapidez media durante los primeros 10 segundos?
Respuesta. a) $(9\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})$cm/s
b) $(150\hat{i} + 100\hat{j} + 50\hat{k})$cm
c) 18,71 cm/s

10. Si una partícula que se mueve sobre una trayectoria curva tiene una aceleración total en un momento dado $\vec{a} = (3\hat{t} + 2\hat{n})\text{cm/s}^2$. Hallar:

a) La aceleración tangencial.
b) La aceleración centrípeta.
c) El módulo de la aceleración total.
d) El ángulo φ que la aceleración total forma con la tangente a la curva.

Respuesta: a) $a_t = 3\,\text{cm/s}^2$

b) $a_c = -4\,\text{cm/s}^2$

c) $a = 5\text{cm/s}^2$

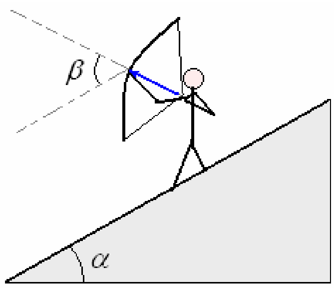
d) $\varphi = 53{,}1^{\circ}$

11. Dos cuerpos se lanzan simultáneamente desde un mismo punto con la misma rapidez inicial pero en distintas direcciones, uno verticalmente hacia arriba y el otro formando un ángulo θ = 60° con la horizontal. Conociendo que la rapidez inicial de ambos cuerpos es v_0 = 25 m/s, ¿a qué distancia se encontrarán cuando hayan pasado 1,7 s?

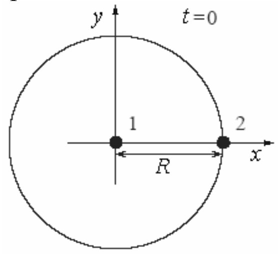
12. Una partícula se mueve en un plano de tal suerte que su radio vector con respecto a un punto fijo barre ángulos iguales en tiempos iguales mientras que la distancia al punto fijo es variable con el tiempo. Escriba las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula mostrando explícitamente cualquier cantidad que se mantenga constante durante el movimiento.

13. Un tren pasa por una estación con una velocidad de 30 km/h. En el instante en que la locomotora pasa junto al guardagujas este lanza una bolsa a uno de los ingenieros de maquinas. Sabiendo que la rapidez inicial con que el guardagujas lanzó la bolsa fue de 45 km/h
a) ¿Cuál tendrá que ser el ángulo de lanzamiento para lograr el objetivo?.
b) Describa la trayectoria de la bolsa en el sistema de referencia del maquinista.

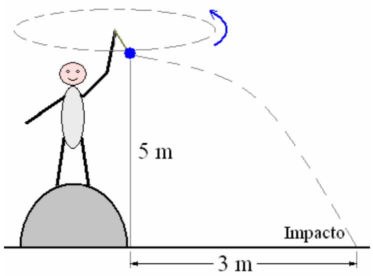
14. Un arquero está en una colina cuya pendiente forma un ángulo α con la horizontal. Si el arquero dispara la flecha según una dirección β respecto a la colina y con velocidad v_0, encontrar la distancia, medida a lo largo de la colina, a la cual caerá la flecha.



15. Dos partículas se encuentran inicialmente en reposo en las posiciones que muestra la figura. Ambas comienzan a moverse al mismo tiempo, la partícula 1 con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{j}$, y la partícula 2 con aceleración angular constante α, en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, describiendo una circunferencia de radio *R*, como se muestra en la figura. Determine en función de *a* y *R*:
a) El tiempo que tardan en encontrarse, suponiendo que lo hacen sobre el eje de las ordenadas, antes que la partícula 2 complete una vuelta completa. Encuentre el valor de α que hace esto posible.
b) Halle los vectores velocidad y aceleración de las dos partículas para el instante del encuentro.



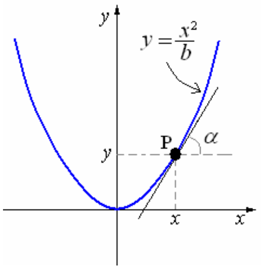
16. Un niño hace girar uniformemente una piedra en un círculo horizontal por medio de una cuerda de 1 *m* de longitud. El niño se encuentra sobre un montículo de tal forma que el plano del movimiento se encuentra a 5 *m* de altura sobre el suelo. La cuerda se rompe y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 3 *m* de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?



17. Desde un sistema de referencia situado en el suelo, con eje horizontal *x* y vertical *y*, se observa el movimiento de un objeto sometido a una aceleración $a = -2\hat{i} - 6\hat{j}$ (*m/s*). Si en el instante inicial el objeto se encontraba en el punto P = (-3, 2) (m), moviéndose con una velocidad $v_{(t=0)} = 3\hat{j}$ (m/s):
a) Obtenga la ecuación explícita de la trayectoria del objeto.
b) Determine el instante en el que la velocidad y la aceleración son perpendiculares.
c) Calcule las coordenadas del punto más alto de la trayectoria.
d) Calcule el tiempo que tardó el móvil desde que salió del punto P hasta que llegó al suelo.

18. La figura muestra una cuenta p que desliza por un alambre plano en forma de parábola. La ecuación de la parábola es $y = x^2/b$, donde b es una constante positiva con dimensiones de longitud. Llamaremos a

al ángulo entre la tangente a la curva y el eje x. en el punto donde se encuentra la cuenta.
a) Halle $\tan\alpha$ en función de la coordenada *x* de P.
b) Suponga que la cuenta tiene rapidez *v* y se mueve hacia la derecha. Halle las componentes *x* e *y* de la velocidad de la cuenta en función de *y* y de la coordenada *x* de P.
Ayuda: recuerde que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.



Respuesta.

a) $\tan\alpha = \dfrac{2x}{b}$

b) $v_x = \dfrac{bv}{\sqrt{b^2 + 4x^2}}$, $v_y = \dfrac{2xv}{\sqrt{b^2 + 4x^2}}$

19. Un ascensor parte del reposo y desciende con aceleración constante de 1 m/s^2 respecto a Tierra. Dos segundos después de iniciarse el descenso se cae la lámpara del techo del ascensor. La distancia del techo al piso del ascensor es de 2 m. Definimos el referencial del ascensor como aquél con origen en su techo y dirección y positiva apuntando hacia abajo.
a) Halle los vectores aceleración, velocidad y posición de la lámpara respecto al ascensor.
b) Determine el tiempo que tarda la lámpara en caer.
c) Encuentre la distancia recorrida por el ascensor mientras cae la lámpara.

Respuesta.
Todas las unidades están expresadas en el sistema MKS. L indica lámpara, A ascensor y T Tierra.
a) Tomaremos como $t = 0$ el instante para el cual se desprende la lámpara.

$\vec{a}_{LA} = \vec{a}_{LT} - \vec{a}_{AT} = 9\hat{j}$, $\vec{v}_{LA} = 9t\hat{j}$,

$\vec{r}_{LA} = \dfrac{9}{2}t^2\hat{j}$

b) $y_{LA} = \dfrac{9}{2}t^2 = 2 \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$

c) $D = \dfrac{14}{9}$

20. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.

Respuesta.
Llamaremos $\hat{E}$ y $\hat{N}$ a los vectores unitarios en dirección Este y Norte respectivamente.

$\vec{v} = \left(300\hat{E} + 60\hat{N}\right)$ km/h, $v = 60\sqrt{26}$ km/h.

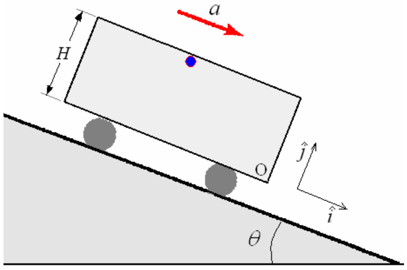
21. Un hombre guía su automóvil bajo lluvia a una velocidad constante respecto a Tierra de módulo y dirección. Mientras conduce el hombre observa que la trayectoria de cada gota es una línea recta que se aparta un ángulo α de la vertical y al detenerse observa que la lluvia cae verticalmente y prácticamente con velocidad constante. Halle el vector velocidad de las gotas de lluvia respecto al auto en movimiento y respecto a Tierra (tome vertical hacia arriba).

Respuesta.

$\vec{v}_{gota,Tierra} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j}$,

$\vec{v}_{gota,Auto} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j} - v\hat{i}$

22. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es *H* y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\vec{a} = a\hat{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto O (en el extremo inferior del vagón).
a) Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
b) Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Torne el origen en el punto o solidario al vagón y llame *L* a la longitud del vagón.
c) Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.
d) Determine la ecuación de la trayectoria de la lámpara, $y = y(x)$, según el pasajero. ¿Qué clase de curva es la trayectoria de la lámpara vista por el pasajero y vista desde Tierra?



Respuesta.
Los subíndices *L*, *P* y *T* hacen referencia a la lámpara, al pasajero y al referencial inercial de Tierra respectivamente.

a) $\vec{a}_{LT} = g(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$,

$\vec{a}_{LP} = (g\operatorname{sen}\theta - a)\hat{i} - g\cos\theta\,\hat{j}$

b) $v_x = (g\operatorname{sen}\theta - a)t$, $v_y = -g\cos\theta\, t$

$x = \frac{1}{2}(g\operatorname{sen}\theta - a)t^2 - \frac{L}{2}$,

$y = -\frac{1}{2}g\cos\theta\, t^2 + H$

c) $t = \sqrt{\frac{2H}{g\cos\theta}}$, $L = \frac{2H(g\operatorname{sen}\theta - a)}{g\cos\theta}$

d) Vista por el pasajero la trayectoria es una línea recta de ecuación

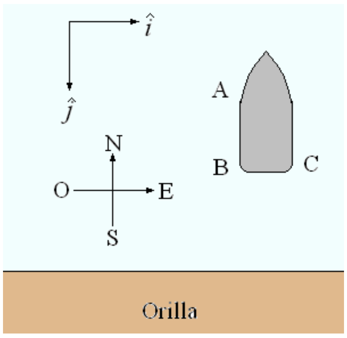
$y = -\frac{g\cos\theta}{g\operatorname{sen}\theta - a}x$

Vista desde Tierra la trayectoria es una parábola.

23. La corriente de un río fluye de Este a Oeste con rapidez constante v = 2 m/s respecto a Tierra. Un bote atraviesa el río y de acuerdo a sus instrumentos de a bordo se mueve respecto al río dirigiéndose al Norte con rapidez constante = 10 m/s. Respecto al bote un pasajero se desplaza sobre la cubierta en línea recta desde el punto A hasta el punto G con una rapidez constante v_1 = 10 m/s. Suponga que BA = 4 m y apunta hacia el Norte y BC = 3 m y apunta hacia el Este.

a) Halle el vector unitario $\hat{u}$ que apunta de A a C y las velocidades del bote y del pasajero respecto a Tierra.

b) Halle el tiempo que tarda el pasajero en ir de A hasta C. ¿Qué distancia recorre el bote en ese tiempo según un observador en Tierra?



Respuesta.

Las letras *b*, *p* y *T* designarán respectivamente el bote, pasajero y Tierra.

a) $\hat{u} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{}$, $\vec{v}_{b,T} = (-2\hat{i} - 10\hat{j})$ m/s,

$\vec{v}_{p,T} = (4\hat{i} - 2\hat{j})$ m/s.

b) $t = \frac{1}{2}s$, $d = \sqrt{26}$m

24. El aro de la figura tiene radio *R* y rueda sobre una superficie horizontal fija a Tierra.

El aro gira en sentido horario mientras su centro e se mueve hacia la derecha con rapidez

V respecto a la superficie. Considere un observador con origen en C (se traslada con el aro)

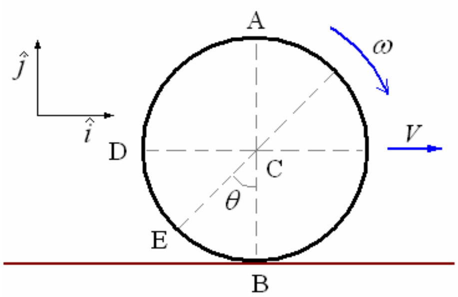
y que no rota respecto a Tierra. Suponga que todos los plintos del aro tienen rapidez *V* respecto al observador (se dice entonces que el aro rueda sin deslizar).

En la figura se han marcado cuatro puntos para un cierto instante. El punto A es el punto más alto del aro, el B el más bajo, el D el punto del extremo izquierdo y el E con un radio vector que forma un ángulo θ con la vertical.

a) Halle la velocidad angular w del aro.

b) Halle los vectores velocidad de los puntos A, B y D respecto a la superficie.

c) Halle el vector velocidad del punto E respecto a la superficie y diga para qué ángulo θ su módulo es igual a *V*.



Respuesta.

a) La rapidez de cualquier punto del aro respecto a C es $V = R\omega$, luego $\omega = V / R$.

b) $\vec{V}_A = 2V\hat{i}$, $\vec{V}_B = 0$, $\vec{V}_D = V\hat{i} + V\hat{j}$

c) $\vec{V}_E = V(1 - \cos\theta)\hat{i} + V\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$, $|\vec{V}_E| = V$

$\Rightarrow \theta = \pm 60°$

25. Para conocer la rapidez de un avión es necesario determinar cuanto tiempo toma volar en un rizo cerrado de longitud conocida. ¿Cuánto tiempo tomará al avión volar alrededor de un cuadrado de lado *a*, con el viento soplando con una velocidad *u*?, en dos casos:

a) la dirección del viento coincide con uno de los lados del cuadrado;

b) la dirección del viento coincide con la diagonal del cuadrado?

Sin viento la rapidez del avión es *v*, mayor que *u*.

Respuesta,

a) $t_1 = \frac{2a\left(v + \sqrt{v^2 - u^2}\right)}{\left(v^2 - u^2\right)}$, b)

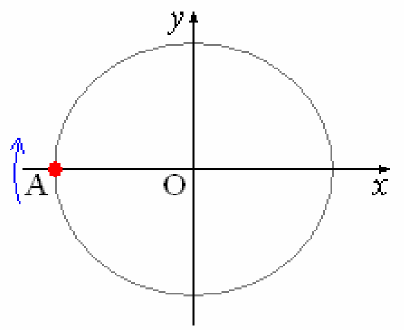
$t_2 = \frac{4a\sqrt{v^2 - u^2/2}}{\left(v^2 - u^2\right)}$

26. Un hombre que viaja en un camión intenta golpear un poste con una piedra, y cuando pasa

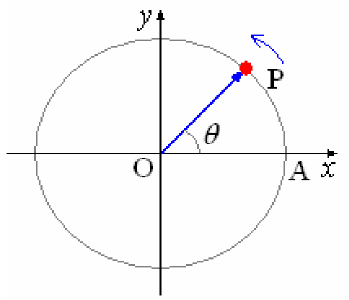
frente a él arroja la piedra con una velocidad horizontal de 20 m/s respecto al camión. Sabiendo que la velocidad del camión es de 40 km/h, Calcular:
a) la dirección en que debe lanzar la piedra.
b) la velocidad horizontal de la piedra respecto al suelo.
Respuesta. a) 56,3º con relación a la dirección trasera del camión
b) 16,63 m/s

27. El piloto A está volando con un avión con una velocidad de 150 km/h, sobrevolando al piloto B, cuyo avión vuela a 135 km/h, 300 m por debajo Con el mismo rumbo. El piloto A para mandar un mensaje a B lo sujeta a una piedra y la arroja a la cabina de B. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire.
a) ¿Con qué velocidad deberá lanzarla respecto a su avión cuando B está directamente debajo de él?
b) ¿Cuándo B está todavía a 300 metros delante de l?
Respuesta, a) v = 15 km/h hacia atrás; b) v = 128 km/h hacia adelante.

28. Una partícula describe una circunferencia de radio $R =$ 0,5 m con una frecuencia de 10 r pm. Si en t_0= 0 la partícula está en la posición A moviéndose en el sentido horario, calcular:
a) El período T y la rapidez del movimiento
b) La velocidad media y aceleración media en el intervalo (0; 0,75T).
c) La aceleración en $t = T / 2$



29. Una partícula P se mueve con aceleración angular constante sobre una circunferencia de radio R =3m. Parte desde el reposo del punto A y completa la primera vuelta en un tiempo t = 2s. Calcular:
a) El módulo de la aceleración angular
b) La ecuación $\vec{r} = \vec{r}_{(t)}$.
c) El tiempo que emplea para llegar a la posición definida por $\theta = 3\pi/2$.
d) La velocidad lineal en $\theta = \pi$



30. Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50 km/h. Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60° con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto a:
a) el automóvil y
b) la Tierra.

31. La distancia de A a B es ℓ . Un aeroplano vuela desde A hasta B y vuelve otra vez con una velocidad constante V relativa al aire. Calcular el tiempo, total que empleará en realizar el recorrido si el viento sopla con una velocidad v en las siguientes direcciones:
a) Sobre la línea que une A y B.
b) Perpendicular a esta línea.
c) Formando un ángulo θ con esta línea.
Demostrar que la duración del trayecto siempre aumenta con la existencia del viento.
Respuesta.

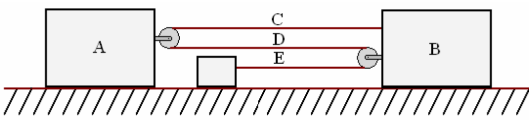
Poniendo $T_0 = \dfrac{2\ell}{V}$, los resultados son:

a) $$\frac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$$

b) $$\frac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)^{1/2}}$$

c) $$T_0 \frac{\left[1 - \left(\dfrac{v\operatorname{sen}\theta}{V}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$$

32. El bloque deslizante A se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante de $0{,}3\hat{i}$ m/s, Determinar:
a) La velocidad del bloque B;
b) las velocidades de los tramos de cable C y D;
e) la velocidad relativa de A respecto a D;
d) La velocidad relativa del tramo de cable C respecto al tramo D.



Respuesta.
a) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, b) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, $-0{,}4\hat{i}$ m/s,
c) $-0{,}1\hat{i}$ m/s, d) $2\hat{i}$ m/s,