Capítulo 7

- Funciones iteradas

Funciones numéricas discretas

Una función numérica discreta (f.n.d.) es una función f de los números naturales a los números reales.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$t \to f(t) = y_t$$

$$f = (y_t) = (y_o, y_1, \dots)$$

Ejemplo

Sea $y_t = 3t^2 + 1$,

entonces

$$(y_t) = (1, 4, 13, 28, \dots)$$

Ejemplo

Sea y_t una f.n.d. tal que:

$$y_t = 2y_{t-1} + 3, \quad y_o = 5,$$

entonces

$$(y_t) = (5, 13, 29, \dots)$$

Operaciones con funciones numéricas discretas

Si $f = (y_t)$ y $g = (x_t)$ son dos funciones numéricas discretas, se definen las operaciones:

1) Suma: $f + g = (y_t + x_t)$
2) Producto: $f \,.\, g = (y_t \,.\, x_t)$
3) Producto por escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$): $(\alpha f) = (\alpha y_t)$
4) Diferencia: $\Delta (y_t) = (y_{t+1} - y_t)$

Ejemplo

Si $y_t = t^2$ y $x_t = 2t - 1$, entonces:

$$(y_t) = (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$$
$$(x_t) = (-1, 1, 3, 5, 7, \dots)$$
$$(y_t + x_t) = (t^2 + 2t - 1) = (-1, 2, 7, 14, 23, \dots)$$
$$(y_t \,.\, x_t) = (2t^3 - t^2) = (0, 1, 12, 45, \dots)$$
$$3(y_t) = (3t^2) = (0, 3, 12, 27, \dots)$$
$$2(x_t) = (4t - 2) = (-2, 2, 6, 10, \dots)$$

Ejemplo

Si $y_t = t^2$ y $x_t = 2t - 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\Delta(y_t) &= (y_{t+1} - y_t)\\ &= (((t+1)^2) - (t^2))\\ &= (2t+1) = (1, 3, 5, 7, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x_t) &= (x_{t+1} - x_t)\\ &= ((2(t+1) - 1) - (2t - 1))\\ &= (2) = (2, 2, 2, 2, \dots)\end{aligned}$$

Diferencia finita de orden n

La diferencia finita de orden n de una función numérica discreta (y_t), se representa por: $\Delta^n(y_t)$ y se define por:

$$\Delta^0(y_t) = (y_t)$$

$$\Delta^n(y_t) = \Delta(\Delta^{n-1}(y_t)),\quad n \geq 1$$

de donde:

$$\Delta^1(y_t) = \Delta(y_t) = (y_{t+1} - y_t)$$

$$\begin{aligned}\Delta^2(y_t) &= \Delta((y_{t+1} - y_t))\\ &= ((y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t))\\ &= (y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t)\end{aligned}$$

Ecuaciones en diferencias finitas

Una ecuación en diferencias finitas,
es una ecuación funcional,
que contiene diferencias finitas
de una función numérica discreta.

Ejemplo

La ecuación en diferencias finitas:

$$\Delta^2(y_t) - 3\,\Delta(y_t) = 4,$$

es equivalente a:

$$(y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) - 3\,(y_{t+1} - y_t) = 4,$$

es decir:

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 4y_t = 4,$$

donde la incógnita es la función (y_t).

Ecuación lineal en diferencias finitas

La ecuación lineal en diferencias finitas

$$C_n y_{t+n} + C_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + C_1 y_{t+1} + C_o y_t = g(t),$$

donde: $\forall i : C_i \in IR$ $(C_n \neq 0,\ C_o \neq 0)$

y g es una f. n. d.,

es equivalente a la ecuación:

$$E(y_t) = b(t),$$

donde: $E(y_t) = y_{t+n} + A_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + A_o y$

$b(t) = (g(t) / C_n)$

y $\forall i : A_i = (C_i / C_n)$

Ecuación homogénea

La ecuación $E(y_t) = b(t)$ es homogénea, si $g(t) = 0$.

Teorema

Sea $E(y_t) = y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \dots + A_o\, y_t$.

1) Si y^1_t y y^2_t son soluciones de $E(y_t) = 0$, entonces $\forall\, k_1, k_2 \in IR$: $(k_1 y^1_t + k_2 y^2_t)$ es solución de $E(y_t) = 0$.

2) Si y^h_t es la solución general de $E(y_t) = 0$ y y^p_t es una solución particular de $E(y_t) = b(t)$, entonces $(y^h_t + y^p_t)$ es la solución general de $E(y_t) = b(t)$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 8$,

donde: $E(y_t) = y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t$, $\quad b(t) = 8$.

Como $y^1_t = (2)^t$ y $y^2_t = (3)^t$

son soluciones de $E(y_t) = 0$,

entonces $y^h_t = k_1 (2)^t + k_2 (3)^t$

es la solución general de $E(y_t) = 0$,

---

y como $y^p_t = 4$

es una solución particular de $E(y_t) = b(t)$,

entonces $(k_1 (2)^t + k_2 (3)^t + 4)$

es la solución general de $E(y_t) = b(t)$.

Con las condiciones iniciales $y_o = 15$ y $y_1 = 32$

Se obtiene $k_1 = 5$ y $k_2 = 6$,

luego $y_t = 5(2)^t + 6(3)^t + 4$

es la solución de $E(y_t) = b(t)$.

Ecuación Homogénea y Ecuación Característica

Dada la ecuación lineal en diferencias finitas:

$$y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \dots + A_o\, y_t = b(t),$$

su ecuación homogénea es:

$$y_{t+n} + A_{n-1}\, y_{t+n-1} + \dots + A_o\, y_t = 0,$$

su ecuación característica es:

$$X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_o = 0.$$

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 8$,

su ecuación homogénea es:

$$y_{t+2} - 5\, y_{t+1} + 6\, y_t = 0,$$

su ecuación característica es:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

y las raices de la ecuación característica son:

$$\lambda_1 = 2 \quad y \quad \lambda_2 = 3.$$

Solución de una ecuación lineal en diferencias finitas

Dada la ecuación lineal en diferencias finitas:

$E(y_t) = b(t)$,

donde $E(y_t) = y_{t+n} + A_{n-1} y_{t+n-1} + \ldots + A_o y_t$.

1) Para cada raíz λ de multiplicidad m de la ecuación característica, y^h_t la solución general de la ecuación homogénea $E(y_t) = 0$ tiene un término de la forma: $(k_1 t^{m-1} + k_2 t^{m-2} + \ldots + k_m)\lambda^t$.
Si $m = 1$, el término correspondiente en y^h_t es de la forma: $k_1 \lambda^t$.

2) Si $b(t) = p_s t^s + p_{s-1} t^{s-1} + \ldots + p_o$, y^p_t una solución particular de la ecuación $E(y_t) = b(t)$ tiene la forma:
$y^p_t = (q_s t^s + q_{s-1} t^{s-1} + \ldots + q_o) t^L$,
donde:
$L = 0$ si el 1 no es raíz de la ecuación característica y $L = m$ si el 1 es una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica.

Las constantes: $q_s, \ldots, q_o$ se obtienen reemplazando y^p_t en la ecuación $E(y_t) = b(t)$.

3) La solución general de la ecuación $E(y_t) = b(t)$ es $y_t = y^h_t + y^p_t$.

Las constantes: $k_1, \ldots, k_n$ se determinan usando las condiciones iniciales: $y_o, \ldots, y_{n-1}$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} - (1/2)\,y_t = 3$, con $y_o = 11$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} - (1/2)\,y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x - (1/2) = 0$.
La raíz de la ecuación característica es: $\lambda = (1/2)$.
Luego: $y^h_t = k_1 (1/2)^t$.

Como: $b(t) = 3$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - (1/2)\, q_o = 3$,
de donde $q_o = 6$.
Luego: $y^p_t = 6$.

La solución general es: $y_t = k_1 (1/2)^t + 6$.
Usando la condición inicial $y_o = 11$,
obtenemos $k_1 + 6 = 11$,
de donde $k_1 = 5$.
Luego: $y_t = 5\,(1/2)^t + 6$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} - y_t = 2$, con $y_o = 3$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} - y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x - 1 = 0$.
La raíz la ecuación característica es: $\lambda = 1$.
Luego: $y^h_t = k_1 (1)^t = k_1$.

Como: $b(t) = 2$
y el 1 es raíz de multiplicidad $m = 1$
de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o t$.
Reemplazando $y^p_t = q_o t$ en la ecuación dada,
obtenemos $(q_o(t+1)) - (q_o t) = 2$,
de donde $q_o = 2$.
Luego: $y^p_t = 2t$.

La solución general es: $y_t = k_1 + 2t$.
Usando la condición inicial $y_o = 3$,
obtenemos $k_1 = 3$.
Luego: $y_t = 3 + 2t$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+1} + 2y_t = 12t + 22$, con $y_o = 9$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+1} + 2y_t = 0$.
La ecuación característica es es: $x + 2 = 0$
La raíz de la ecuación característica es: $\lambda = -2$.
Luego: $y^h_t = k_1 (-2)^t$.

Como: $b(t) = 12t + 22$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_1 t + q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_1 t + q_o$ en la ecuación dada, obtenemos
$(q_1(t+1)) + q_o) + 2(q_1 t + q_o) = 12t + 22$,
es decir $(3q_1)t + (q_1 + 3q_o) = 12t + 22$,
de donde $q_1 = 4$, $q_o = 6$.
Luego: $y^p_t = 4t + 6$.

La solución general es: $y_t = k_1(-2)^t + 4t + 6$.
Usando la condición inicial $y_o = 9$,
obtenemos $k_1 + 6 = 9$,
de donde $k_1 = 3$.
Luego: $y_t = 3(-2)^t + 4t + 6$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - y_{t+1} - 12y_t = -24$,
con $y_o = 14$, $y_1 = 1$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+2} - y_{t+1} - 12y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x^2 - x - 12 = 0$.
Las raices de la ecuación característica son:
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$.
Luego: $y^h_t = k_1(4)^t + k_2(-3)^t$.

Como: $b(t) = -24$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - q_o - 12q_o = -24$,
de donde $q_o = 2$.
Luego: $y^p_t = 2$.

La solución general es: $y_t = k_1(4)^t + k_2(-3)^t + 2$.
Usando las condiciones iniciales $y_o = 14$, $y_1 = 1$,
obtenemos $k_1 + k_2 + 2 = 14$ y $4k_1 - 3k_2 + 2 = 1$,
de donde $k_1 = 5$ y $k_2 = 7$.
Luego: $y_t = 5(4)^t + 7(-3)^t + 2$.

Ejemplo

Dada la ecuación: $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 20$,
con $y_o = 9$, $y_1 = 23$.
La ecuación homogénea es: $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$.
La ecuación característica es: $x^2 - 6x + 9 = 0$.
La raíz de la ecuación característica es:
$\lambda = 3$ con multiplicidad $m = 2$.
Luego: $y^h_t = (k_1 t + k_2)(3)^t$.

Como: $b(t) = 20$
y el 1 no es raíz de la ecuación característica,
entonces $y^p_t = q_o$.
Reemplazando $y^p_t = q_o$ en la ecuación dada,
obtenemos $q_o - 6q_o + 9q_o = 20$,
de donde $q_o = 5$.
Luego: $y^p_t = 5$.

La solución general es: $y_t = (k_1 t + k_2)(3)^t + 5$.
Usando las condiciones iniciales $y_o = 9$, $y_1 = 23$,
obtenemos $k_2 + 5 = 9$ y $(k_1 + k_2)(3) + 5 = 23$,
de donde $k_1 = 2$ y $k_2 = 4$.
Luego: $y_t = (2t + 4)(3)^t + 5$.

Sistema de ecuaciones en diferencias finitas

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$y^1_{t+1} = a_{11} y^1_t + \dots + a_{1n} y^n_t + b_1(t)$$

$$\vdots$$

$$y^n_{t+1} = a_{n1} y^1_t + \dots + a_{nn} y^n_t + b_n(t)$$

Puede escribirse de la forma:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} y^1_t \\ \vdots \\ y^n_t \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \qquad B_t = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

El sistema es homogéneo, si

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -2x_t + 5y_t - z_t \\ y_{t+1} &= x_t - 2y_t + 3z_t + 5t^2 \\ z_{t+1} &= 3x + z_t + 2t. \end{aligned}$$

Puede escribirse de la forma:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

Solución de un Sistema de ecuaciones en diferencias finitas

1) La solución general de la ecuación homogénea:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t$$

es: $Y^h{}_t = A^t k$,

donde: $A^o = I$

$A^t = A\,A^{t-1},\ t \geq 1$.

2) Si $B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{bmatrix}$

Una solución particular de la ecuación:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$$

es:

$$Y^p{}_t = \begin{bmatrix} p^1{}_t \\ . \\ . \\ p^n{}_t \end{bmatrix}$$

donde: $p^i{}_t$ tiene la forma correspondiente a $b_i(t)$

Las constantes en $Y^p{}_t$

se obtienen reemplazando $Y^p{}_t$

en la ecuación $Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$

3) La solución general de la ecuación:

$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)$,

es: $Y_t = Y^h{}_t + Y^p{}_t$.

Las constantes: $k_1, \dots, k_n$,

se determinan usando las condiciones iniciales:

$y^1{}_o, \dots, y^n{}_o$.

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones:

$x_{t+1} = 4\,x_t - 2\,y_t - 2$

$y_{t+1} = 7\,x_t - 5\,y_t + 2$

Se puede escribir de la forma:

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t),$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como $B(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces $Y^p{}_t = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

reemplazando en la ecuación dada obtenemos:

$q_1 = 4q_1 - 2q_2 - 2$ y $q_2 = 7q_1 - 5q_2 + 2$,

de donde: $q_1 = 4$, $q_2 = 5$

La solución general es: $Y_t = A^t \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Usando la condición inicial $Y_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

obtenemos $k_1 + 4 = 10$ y $k_2 + 5 = 12$,

de donde: $k_1 = 6$ y $k_2 = 7$.

Luego:

$$Y_t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Valores propios

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
$\lambda \in IR$ es un valor propio de A,
si existe $V \in IR^{n \times 1}$ $(V \neq 0)$
tal que: $A v = \lambda v$.

Vectores propios

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
$V \in IR^{n \times 1}$ $(V \neq 0)$ es un vector propio de A
correspondiente al valor propio λ,
si $A v = \lambda v$.

Ecuación característica

Sea $A \in IR^{n \times n}$.
La ecuación característica de A es:
$\det(\lambda I - A) = 0$.

Teorema

Sea $A \in IR^{n \times n}$.

1) λ es un valor propio de A si y sólo si
λ es una raíz de la ecuación característica de A.

2) V es un vector propio de A
correspondiente al valor propio λ si y sólo si
$(\lambda I - A) V = 0$, $(V \neq 0)$.

3) Si $V_1, \ldots, V_n$ son n vectores propios de A linealmente independientes, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A,
entonces $D = P^{-1} A P$,
donde $P = [V_1, \ldots, V_n]$
y $D = [\lambda_i]$ es una matriz diagonal.

Cálculo de A^t

Sea $A \in IR^{n \times n}$.

Si $D, P \in IR^{n \times n}$ son tales que $D = P^{-1} A P$,
entonces $A^t = P D^t P^{-1}$.

Si $D = [\lambda_i]$ es una matriz diagonal,
entonces $D^t = [\lambda_i^t]$.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

Su ecuación característica es: $\det(\lambda I - A) = 0$,
es decir: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
y sus raíces son: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$.

Sea $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $(\lambda I - A) V = 0$.

Si $\lambda = 2$,

entonces $x = y$

y un vector propio correspondiente es

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $\lambda = -3$,

entonces $7x = 2y$

y un vector propio correspondiente es

$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Luego $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

entonces

$$A^t = P D^t P^{-1} = (1/5)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2)^t & 0 \\ 0 & (-3)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $A^t = (1/5)\begin{bmatrix} 7(2)^t - 2(-3)^t & -2(2)^t + 2(-3)^t \\ 7(2)^t - 7(-3)^t & -2(2)^t + 7(-3)^t \end{bmatrix}$.