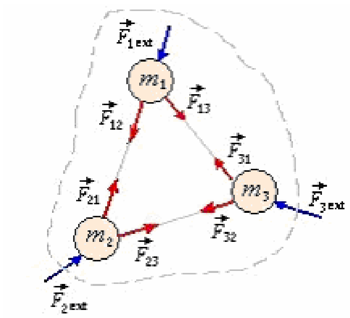
CAPÍTULO 6. SISTEMA DE PARTÍCULAS

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estado estudiando el movimiento de los objetos cualquiera que sea sin considerar su estructura. Ahora demostraremos que lo estuvimos haciendo bien considerando al objeto sin tomar en cuenta las fuerzas que actúan sobre sus partes. Introduciremos el concepto de centro de masa de un sistema de partículas, también se introducirá el concepto de cantidad de movimiento y se demostrará que este se conserva cuando el sistema se encuentra aislado de los alrededores,

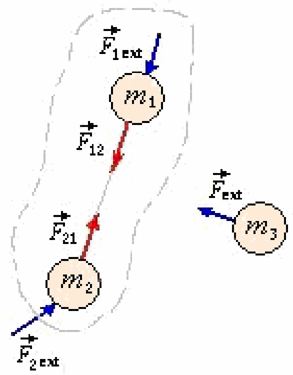
SISTEMA DE PARTICULAS



La figura muestra un sistema de partículas compuesto de tres masas. En el sistema existen dos tipos de fuerzas,

a) Las fuerzas externas como la atracción gravitacional de la tierra por ejemplo.

b) Las fuerzas internas que las partículas ejercen unas sobre otras (estas fuerzas pueden ser gravitacionales, e1éctricas, etc.)

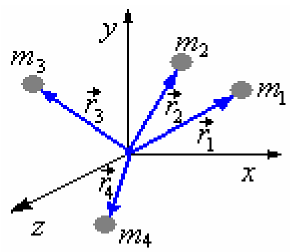


En la figura hemos cambiado el contorno del sistema, excluyendo la masa m_3. Como Una Consecuencia de esto las fuerzas internas Sobre m_1 y m_2 debido a m_3 ya no son internas, se han sumado a las fuerzas externas previas, produciendo una nueva fuerza resultante.

La selección del contorno de un sistema es similar a seleccionar un sistema de coordenadas.

SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA A UN SISTEMA DE PARTICULAS

La figura siguiente muestra un sistema de *n* partículas de masas m_1, m_2, …..m_n, con posiciones especificadas por $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ………… $\vec{r}_n$,, respectivamente.



La segunda ley de Newton para la partícula m_i es:

$$\vec{F}_i = m\vec{a}_i = \vec{F}_{iexter} + \vec{F}_{i\,\text{int}}$$

Donde:

$\vec{F}_{i\,\text{int}}$ = suma de las fuerzas internas sobre m_i

$\vec{F}_{i\,\text{ext}}$ = suma de las fuerzas externas sobre m_i

La suma de las fuerzas internas sobre la masa m_i es:

$$\vec{F}_{1\,\text{int}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots\vec{F}_{12} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

En general para la partícula *i* es:

$$\vec{F}_{i\,\text{int}} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

La fuerza total para el sistema es:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{i\,\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

Por la tercera ley de Newton cada una de las fuerzas

$\vec{F}_{ij}$ tiene un $\vec{F}_{ji}$ igual, pero de sentido contrario

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

De modo que $\sum_{i=0}^{n} \sum_{(j \neq i)=1}^{n} \vec{F}_{ij} = 0$

Consecuentemente solo queda

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,\text{ext}} \quad \text{o} \quad \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,\text{ext}}$$

CENTRO DE MASA

Frecuentemente es muy práctico reemplazar un sistema de muchas partículas con una partícula simple equivalente de masa igual. La pregunta es donde colocar esta partícula simple con respecto al origen de *x* e *y*.

Definamos el vector posición del centro de masa por la ecuación:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Llamando a $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ (masa total de las *n* partículas).

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Como $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$

Tenemos que: $x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$,

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ , \ z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Si hacemos que el número de elementos *n*, se aproximen al infinito, la sumatoria se reemplaza por una integral y *m* por el elemento diferencial *dm*.

Luego.

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int xdm$$

De igual forma se obtiene:

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int ydm \,,$$

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int zdm \ \text{y}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA.

Si en la ecuación: $\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}$

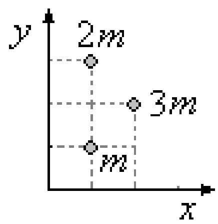
Sustituimos $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M\,\vec{r}_{CM}$

Obtendremos la ecuación del movimiento del centro de masa

$$\frac{d^2}{dt^2} M\,\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext} \Rightarrow M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}$$

El punto indicado por $\vec{r}_{CM}$, vector posición del centro de masa, se mueve se mueve como si en el estuviera concentrada toda la masa y las fuerzas externas del sistema.

Ejemplo 1. Centro de masa de tres masas puntuales.



El centro de masa esta dado por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$= \frac{m(1) + 2m(1) + 3m(2)}{m + 2m + 3m}$$

$$= \frac{9m}{6m} = \frac{3}{2}$$

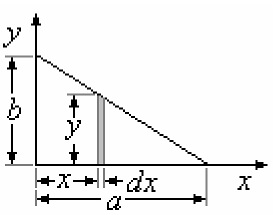
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$= \frac{m(1) + 2m(3) + 3m(2)}{m + 2m + 3m}$$

$$= \frac{13m}{6m} = \frac{13}{6}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3}{2}\hat{i} + \frac{13}{6}\hat{j}$$

Ejemplo 2. Centro de masa de un triángulo.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm$$

Para evaluar

$$dm = \frac{\text{masa total}}{\text{área total}} \times \text{área de la lámina}$$

$$= \frac{M}{\frac{1}{2}ab} ydx = \frac{2M}{ab} ydx$$

Luego: $x_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int x\left(\frac{2M}{ab}\right)ydx$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a xydx$$

Para poder integrar tenemos que expresar la variable *y* en función de *x*.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}(a-x)$$

Sustituyendo:

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\frac{b}{a}(a-x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x(a-x)dx$$

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^a \left(ax - x^2\right)dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

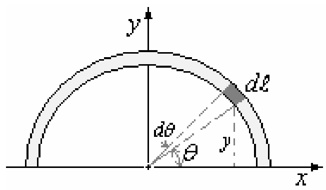
$$= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a}{3}$$

Realizando cálculos similares encontramos:

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

Finalmente: $\vec{r}_{CM} = \frac{a}{3}\hat{i} + \frac{b}{3}\hat{j}$

Ejemplo 3. Centro de masa de un arco semicircular.



Por el sistema de coordenadas escogido, $x_{CM} = 0$, porque por cada elemento de masa a la derecha (+), existe otro elemento igual a la izquierda (-). Sin embargo para y_{CM} es diferente.

$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y dm$, en este caso $dm = \lambda d\ell$

Donde $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ y $d\ell = Rd\theta$

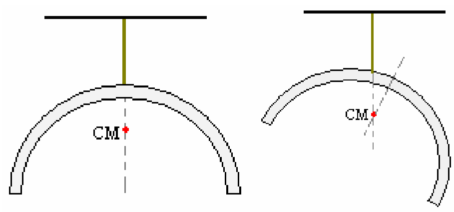
Como $y = R\,\text{sen}\,\theta$, tenemos:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi}(R\,\text{sen}\,\theta)\lambda Rd\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{R^2}{M}\left(\frac{M}{\pi R}\right)(2)$$

$$= \frac{2R}{\pi} = 0{,}64R$$

El centro de masa no se encuentra dentro del cuerpo. Las figuras siguientes muestran como localizar experimentalmente el centro de masa primero colgándolo de la parte superior y luego de otro punto cualquiera.

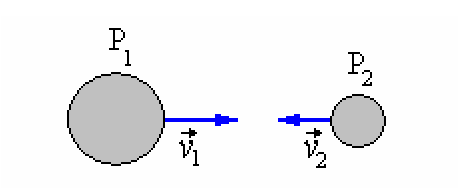


Ejemplo 4. Explosión de una granada

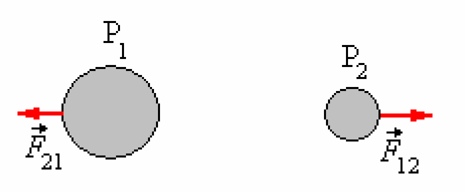
Una granada lanzada al aire que explota en varios fragmentos. La única fuerza externa sobre la granada es la fuerza de la gravedad, entonces la granada sigue una trayectoria parabólica. Si la granada no estallara continuaría moviéndose a lo largo de la trayectoria parabó1ica indicada en la figura. Como las fuerzas de la explosión son internas, no afectan al movimiento del centro de masa. Entonces. Después de La explosión el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria que tendría la granada s! no hubiera habido explosión.

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

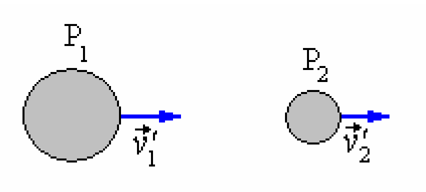
Supongamos el caso de dos partículas esféricas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 con trayectorias contenidas en la misma recta, se aproximan una a otra con velocidades $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$ respectivamente.



Cuando P_1 y P_2 entran en contacto, P_1 ejerce sobre P_2 la fuerza F_{12} y P_2 ejerce sobre P_1 la fuerza F_{21}. De acuerdo con la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

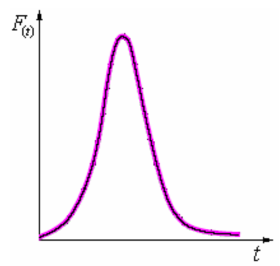


Después que P_1 y P_2 se separan, las velocidades respectivas son $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ diferentes de $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$.



Ahora nos preguntamos. ¿Qué pasa durante el choque?

El tiempo de contacto total Δt es muy pequeño, quizás solo de aproximadamente 0,001 segundos. La fuerza de contacto inicialmente es cero, aumenta hasta un valor muy grande y. finalmente disminuye hasta cero, cuando dejan de estar en contacto. La figura siguiente muestra una variación típica de la fuerza en el tiempo de contacto.



Sea $t_f - t_i = \Delta t$ el tiempo que dura el choque, aplicando la segunda ley de Newton a las partículas P_1 y P_2.

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \text{ y}$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

O $\vec{F}_{12}\, dt = m_1 d\vec{v}_1$ y $\vec{F}_{21}\, dt = m_2 d\vec{v}_2$

Integrando las dos relaciones durante el choque,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1 \int_{v_1}^{v'_1} d\,\vec{v}_1 \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2 \int_{v_2}^{v'_2} d\,\vec{v}_2$$

Finalmente

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2\left(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right)$$

Trabajando con el primer miembro

$\int_{t_i}^{t_f} F dt$ corresponde al área bajo la curva mostrada en la figura anterior, a ésta cantidad la llamaremos

IMPULSO $\left(\vec{J}\right)$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{(t)}\, dt$$

Sus dimensiones son: [F] [T] = [M][L][T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

Newton.segundo (N.s)

Trabajando con el segundo miembro

$$m_1\left(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y } m_2\left(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right)$$

Llamaremos a la cantidad $m\vec{v} = \vec{p}$,

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL o Momentum lineal de la partícula (lo designaremos en la práctica simplemente como **cantidad de movimiento**), cuyas dimensiones son:

[M] [[L]] = [M] [L] [T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

kg.m.s^{-1}

La partícula P_1 ha sufrido en el intervalo $t_f - t_i = \Delta t$, un cambio de la cantidad de movimiento $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1\right) = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

y esta cantidad es también igual al impulso $\vec{J}$ recibido en ese instante por la partícula

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Luego: "**El cambio de la cantidad de movimiento es igual al impulso**".

Ejemplo 5. Una pelota de 100 gramos está en reposo sobre el piso, cuando recibe un puntapié que la lanza con una velocidad de 30 m/s.

a) ¿Qué impulso se dio a la pelota?

b) Si el tiempo que el pie está en contacto con la pelota es 10^{-3} segundos. ¿Cuál es la magnitud aproximada de la fuerza impulsiva?

Solución.

a) El impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento:

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

En este caso

m = 0,1 kg, $\vec{v}_i = 0$, $\vec{v}_f = 30\hat{i}$ m/s

$$\vec{J} = (0,1)(30\hat{i}) - 0 = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

b) Se puede obtener un estimado de la fuerza que actúa sobre la pelota, dividiendo e1 impulso $\vec{J}$ por el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ en que actúa la fuerza :

$$\vec{F} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

Como $\vec{J} = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ y $\Delta t = 0,001\, s$

$$\vec{F} = \frac{3\hat{i}}{0{,}001} = 3000\hat{i}\ \text{N}$$

Ejemplo 6. Se deja caer una pelota de masa *m* de una altura *h* sobre el nivel del suelo y rebota hasta una altura h_1

a) ¿Cuál es la velocidad v_i inmediatamente antes de chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad v_f inmediatamente después de chocar con el suelo?

c) ¿Cuál es el impulso $\vec{J}$ que se le da a la pelota en el impacto con el suelo?

Solución.

a) Como $\vec{v}_0 = 0$, $x = 0$, $y = h_0$

$$\vec{v}_i = \sqrt{2gh_0}\,\hat{j}$$

b) Como después de chocar $y = h_1$, la velocidad $\vec{v}_f$ después de chocar es:

$$\vec{v}_f = \sqrt{2gh_1}\,\hat{j}$$

c) El impulso de la pelota es:

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}\right)\hat{j}$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula de masa *m* y velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La cantidad de movimiento de *n* partículas es la suma de las cantidades de movimiento individuales,

$$\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Usando la expresión de centro de masa

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CMi}$$

De aquí $\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CMi}$

La cantidad de movimiento total de un sistema es igual a la cantidad de movimiento de la masa total concentrada en el centro de masa del sistema.

Derivando nuevamente la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{iCM} = M\vec{a}_{iCM} = \vec{F}_{i\text{ext}}$$

Esta cantidad es muy importante, ya que si no hay fuerza externa,

$$\vec{F}_{i\text{ext}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{total} = \text{CONSTANTE}$$

Esto es la conservación de la cantidad de movimiento. Si no hay fuerzas externas sobre un sistema. La cantidad de movimiento total del sistema es constante.

Ejemplo 7. Tres partículas de masas 2 kg, 1 kg y 3 kg respectivamente con vectores posición

$$\vec{r}_1 = \left[5t\hat{i} - 5t^2\hat{j} + (3t-2)\hat{k}\right]\text{cm},$$
$$\vec{r}_2 = \left[(2t-3)\hat{i} - (12-5t^2)\hat{j} + (4+6t-3t^3)\hat{k}\right]\text{cm}$$
$$\text{y } \vec{r}_3 = \left[(12t-1)\hat{i} - (t^2+2)\hat{j} - t^3\hat{k}\right]\text{cm}$$

Donde *t* es el tiempo en segundos.

Encontrar: a) La velocidad del centro de masa en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

b) La cantidad de movimiento lineal total del sistema en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

c) Analizar si el sistema de tres partículas es sistema aislado

Solución.

a) La posición del centro de masa esta dada por la expresión:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \left[(3t-1)\hat{i} + \left(-t^2+3\right)\hat{j} + \left(-t^3+2t\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$

La velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para t = l s

$$\vec{v}_{1M} = \left[3\hat{i} - 2\hat{j} + -\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para t = 2 s

$$\vec{v}_{2M} = \left[3\hat{i} - 4\hat{j} + -8\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

b) La cantidad de movimiento del sistema es:

$$\vec{p} = +m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p} = 6\left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para t = l s

$$\vec{p}_1 = 6\left[3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para t = 2 s

$$\vec{p}_2 = 6\left[3\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

c) Como , $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, $\vec{p}$ no es constante, luego el sistema no es aislado.

Ejemplo 8. Un pescador de masa 70 kg está en un bote estacionario de masa 200 kg, cuando su ayudante que no sabe nadar y está en el agua cogido del extremo opuesto, se suelta. El pescador corre 2,5 m hasta alcanzar este extremo. ¿A que distancia del ayudante ahogándose se encontrará el pescador cuando alcance el extremo del bote?

Solución.

Consideremos aislado el sistema bote, pescador, ayudante, por lo tanto su cantidad de movimiento es constante.

$$\vec{p} = M\vec{v}_{cm} = \text{CONSTANTE}$$

Como en inicio el sistema está en reposo:

$$\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 0$$

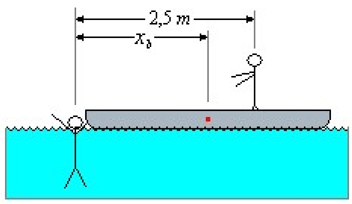
Como $\vec{v}_{cm} = \dfrac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = 0$

$\vec{r}_{cm} = \text{CONSTANTE}$, la posición del centro de masa permanece constante

En éste problema que es en una sola dimensión:
$x_{cm} = \text{CONSTANTE}$

Tomemos como punto de referencia la posición del ayudante en el extremo del bote, al soltarse seguirá en la misma posición.

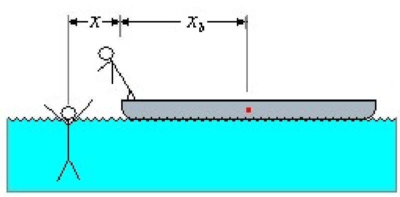
Analicemos la posición inicial.



El centro de masa del sistema pescador-bote está en:

$$x_{cm} = \frac{m_b x_b + m_p(2{,}5)}{m_b + m_p}$$

Analicemos la posición final.



El centro de masa esta en:

$$x_{cm} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

Como la posición del centro de masa del sistema es invariante, se tiene:

$$\frac{m_b x_b + m_p(2,5)}{m_b + m_p} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

$$\Rightarrow (m_b + m_p)x = m_p(2,5)$$

Reemplazando valores:

$$x = \frac{70(2,5)}{(200+70)} = 0,65\text{m}$$

La posición del pescador estará a 0,65 metros del ayudante.

Ejemplo 9. Un muchacho de masa m_1 y una muchacha de masa m_2, ambos con patines, se encuentran en reposo uno en frente del otro, El muchacho empuja a la muchacha, mandándola hacia el este con una velocidad $\vec{v}$. Describa el movimiento del muchacho.

Solución.

Siendo un sistema cerrado la cantidad de movimiento se conserva,

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} = 0,$$

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades del muchacho y la muchacha después del empujón, respectivamente:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$

Considerando el movimiento en el eje *x*, y la dirección al este como sentido positivo

$$\vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{i}$$

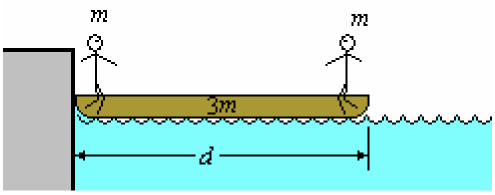
De aquí

$$m_1\vec{v}_1 + m_2 v\hat{i} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}v\hat{i}$$

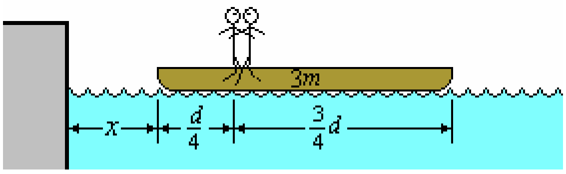
EI muchacho sale con una velocidad de módulo

$v_1 = \frac{m_2}{m_1}v$ dirigida hacia el oeste,

Ejemplo 10. Dos personas de masa *m* cada una, se encuentran paradas en los extremos opuestos de un bote de longitud *d* y masa 3*m* que se encuentra en reposo sobre un líquido sin fricción, tal como se muestra en la figura. Las personas caminan una hacia la otra con rapidez constante y se encuentran a *d*/4 del extremo izquierdo del bote.
a) Si la persona de la izquierda se mueve con velocidad v_0 respecto al bote, ¿cuál es la velocidad que tiene la otra persona, respecto al bote?
b) ¿Cuál es la velocidad del bote, respecto a tierra, durante el movimiento de ambas personas?
c) ¿Cuánto avanzo el bote hasta el momento del encuentro?



Solución.



a)
El tiempo empleado para encontrarse es el mismo para las dos personas

$$\frac{d/4}{v_0} = \frac{3d/4}{v_1} \quad \Rightarrow v_1 = 3v_0 \text{ Hacia la izquierda}$$

b) Por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

$$\vec{p}_{antes} = 0$$

$$\vec{p}_{después} = m(v_0 + v_b)\hat{i} + m(-3v_0 + v_b)\hat{i} + 3mv_b\hat{i} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_b = \frac{2}{5}v_0\hat{i}$$

c)

El tiempo de caminata de las personas es $t = \frac{d}{4v_0}$,

luego el bote se habrá movido

$$x = v_b t = \left(\frac{2}{5}v_0\right)\left(\frac{d}{4v_0}\right) = \frac{d}{10}$$

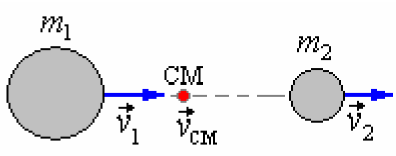
SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema es cero, la cantidad de movimiento total es constante. Muchas veces es conveniente escoger un sistema de coordenada., con el origen situado en el centro de masa. Este sistema se denomina "SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA"

Con respecto a este sistema la velocidad del centro de masa por supuesto es cero y la cantidad de movimiento total es cero.

El análisis de la mayor parte de los choques es más sencillo en el sistema de referencia centro de masa.

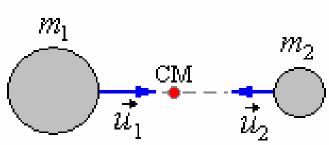
La transformación de un sistema de referencia cualquiera a un sistema centro de masa no es difícil. Consideremos un sistema do dos partículas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente cuyo centro de masa se mueve con velocidad $\vec{v}_{CM}$, como se muestra en la figura.



La cantidad de movimiento es:

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

Para transformar esta expresión al sistema Centro de masa, las velocidades de las partículas con respecto al centro de masa son como se muestra en la figura siguiente.



Las velocidades relativas al centro de masa son:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \text{ y } \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

$$\text{y } \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Como comprobación, calculemos la cantidad de movimiento total con respecto al centro de masa, el cual debe ser igual a cero.

$$\vec{p} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$= \vec{p} = m_1\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right]$$

$$= m_2\left[-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right] = 0$$

En la sección siguiente veremos ejemplos de aplicación usando el sistema de referencia centro de masa.

CHOQUES

Se llama choque o colisión entre dos cuerpos a un fenómeno en el que los cuerpos Participantes son libres antes y después de la interacción, sobre los que no actúan fuerzas resultantes.

La interacción dura un tiempo muy corto, durante el cual los cuerpos ejercen entre si fuerzas de cierta intensidad.

Por lo general en los choques só1o participan dos cuerpos, aunque esto no es estrictamente necesario.

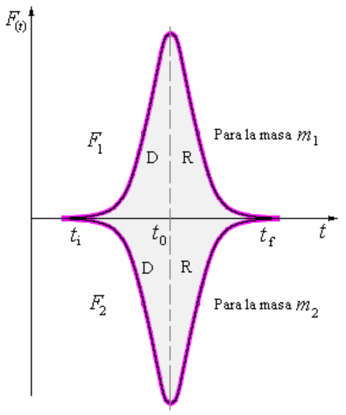
Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ antes del choque y velocidades $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ después del choque respectivamente.

En todo choque entre dos cuerpos se conserva la cantidad de movimiento, esto es:

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Ahora nos introduciremos en el proceso complejo que acompaña al choque, el instante $\Delta t = t_f - t_i$, en el que aparece la fuerza de interacción, este periodo vamos a dividirlo en dos partes, los periodos de deformación y restitución. La figura muestra el gráfico de la fuerza de interacción en función del tiempo entre las masas m_1 y m_2.



E1 tiempo t_0 es el instante de máxima deformación en el que empieza la restitución y las dos masas poseen la misma velocidad

$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_{02} = \vec{v}_0$$

Vamos a aplicar la ecuación impulso - cantidad de movimiento para el periodo de deformación (D), $t_i \rightarrow t_0$:

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v}_0 - m_1 \vec{v}_1 = \vec{J}_D$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v}_0 - m_2 \vec{v}_2 = \vec{J}_{2D} = -\vec{J}_{1D}$$

Resolviendo para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$\vec{v}_1 = -\frac{\vec{J}_{1D}}{m_1} + \vec{v}_0 \text{ , } \vec{v}_2 = \frac{\vec{J}_{1D}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{J}_{1D}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \vec{J}_{1D}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

Ahora aplicaremos la ecuación Impulso-cantidad de movimiento por el periodo de restitución (R). $t_0 \rightarrow t_f$.

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_0 = \vec{J}_R$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v}'_2 - m_2 \vec{v}_0 = \vec{J}_{2R} = -\vec{J}_{1R}$$

Resolviendo para $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$.

$$\vec{v}'_1 = \frac{\vec{J}_{1R}}{m_1} + \vec{v}_0 \text{ , } \vec{v}'_2 = -\frac{\vec{J}_{1R}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = -\vec{J}_{1R}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$= -\vec{J}_{1R}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

De lo visto encontramos la relación entre el impulso de restitución y el impulso de deformación.

$$\frac{\vec{J}_{1R}}{\vec{J}_{1D}} = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \varepsilon$$

A esta relación se le conoce como coeficiente de restitución (ε).

Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada.

EI valor de esta relación depende de muchos factores tales como la geometría, las propiedades de los materiales, la velocidad, por ello debemos contentarnos con una determinación experimental.

Ejemplo 11. Una pelota de béisbol de 0,15 kg de masa se está moviendo con una velocidad de 40 m/s cuando es golpeada por un bate que invierte su dirección adquiriendo una velocidad de 60 m/s, ¿qué fuerza promedio ejerció el bate sobre la pelota si estuvo en contacto con ella 5 ms?.

Solución.

Datos: m = 0,15 kg

v_i = 40 m/s

v_f = - 60 m/s (el signo es negativo ya que cambia el sentido)

t = 5 ms = 0,005 s

$\Delta p = J$

$p_f - p_i = J \Rightarrow mv_f - mv_i = F\,t$

$\Rightarrow F = m(v_f - v_i)/t$

F = 0,15 kg.(- 60 m/s - 40 m/s)/0,005 s

= 0,15 kg.(- 100 m/s)/0,005 s

= - 3000 N

CASOS DE CHOQUE

Perfectamente elástico

$\varepsilon = 1$, $(v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$

Inelástico $\varepsilon < 1$

El coeficiente de restitución y tiene un valor entre 0 y 1.

Perfectamente plástico

$\varepsilon = 0$, $(v'_2 - v'_1) = 0$

Explosivo $\varepsilon > 1$

Ejemplo 12.

a) Choque perfectamente elástico. En este caso no hay pérdida en la energía mecánica asociada al impacto, la energía cinética permanece constante.

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$m_1\left(v'^2_1 - v_1^2\right) = m_2\left(v'^2_2 - v_2^2\right)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2\left(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right)$$

Asumiendo que el movimiento es en una sola dirección

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Dividiendo entre si las expresiones halladas por energía y por cantidad de movimiento obtenemos.

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow (v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(v'_2 - v'_1)}{-(v_2 - v_1)} = 1$$

El cual es por supuesto el coeficiente de restitución de un choque perfectamente elástico $\varepsilon = 1$.

b) Choque perfectamente plástico. En un choque perfectamente Plástico, después del choque las masas quedan juntas, es decir tienen la misma velocidad, tal que

$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_1$, por lo tanto:

$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = 0$ **y** $\varepsilon = 0$

Ejemplo 13. Medición del coeficiente de restitución ε.

Si se quiere medir el coeficiente de restitución de 1os materiales, se realiza mediante una bola hecha con uno de los materiales y una superficie plana hecha con el otro material, la que se coloca sobre el suelo. Se suelta verticalmente la bola sobre la superficie desde una altura h_1.

Conocemos la velocidad de la bola al momento del choque

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

La bola rebota verticalmente hasta una altura h_2, tal que la velocidad v'_1 de la bola después del choque es:

$$v'_1 = -\sqrt{2gh_2}$$

Como la superficie no tiene velocidad inicial ni velocidad final $v_2 = 0$ y $v'_2 = 0$.

Encontramos que:

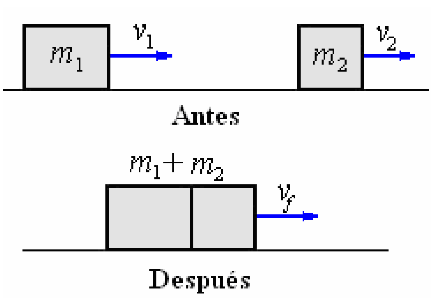
$$\varepsilon = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = -\frac{v'_1}{v_1}$$

Reemplazando valores:

$$\varepsilon = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Ejemplo 14. Choque plástico o inelástico

a) Velocidades de igual dirección y sentido.



Supongamos un cuerpo 1 de masa m_1 y velocidad v_1 que se dirige a hacia el cuerpo 2 de masa m_2 y velocidad v_2, siendo ambas velocidades de igual dirección y sentido. Sobre cada cuerpo actuó en el momento del choque, el impulso que le provocó el otro cuerpo, entonces hay dos acciones de igual intensidad y sentido contrario, en consecuencia ambas cantidades de movimiento serán iguales y de sentido contrario. Luego del choque ambos cuerpos continúan juntos con una velocidad final común a ambos.

La velocidad final será:

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

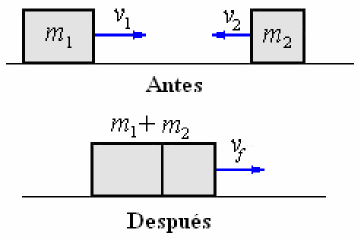
Como v_{1f} y v_{2f} son iguales porque ambos cuerpos siguen juntos:

$v_{1f} = v_{2f} = v_f$

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} + m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

b) Velocidades de igual dirección y sentido contrario.



En este caso los cuerpos poseían velocidades de igual dirección pero de sentido contrario antes del choque, como en el caso anterior luego del impacto continúan juntos, con una velocidad final que estará dada por la diferencia de las cantidades de movimiento. La velocidad final será:

$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

Igualmente:

$v_{1f} = v_{2f} = v_f$

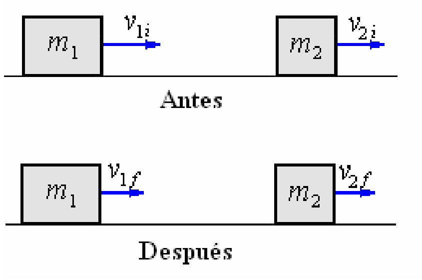
$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} - m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

La velocidad final mantendrá la misma dirección pero tendrá el sentido de la velocidad del cuerpo que antes del choque tenía mayor cantidad de movimiento.

Ejemplo 15. Choque elástico

a) Velocidades de igual sentido



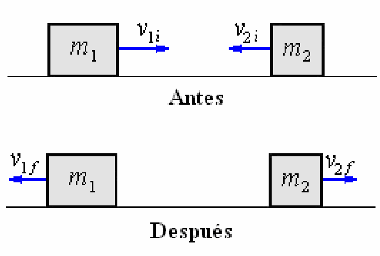
Durante el choque cada cuerpo recibe una cantidad de movimiento que es igual a la velocidad perdida por el otro. Al recuperar su forma inicial, cada uno pierde o gana respectivamente, la cantidad de movimiento ganada o perdida en el momento del choque, la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} - v_{2f}\right) + v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} - v_{2f} + v_{1i}$$

b) Velocidades de distinto sentido



En este caso los cuerpos literalmente rebotan, y la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} + v_{2f}\right) - v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i}$$

El principio de conservación del impulso es el mismo que el de conservación de la cantidad de movimiento.

Cabe aclarar que en la práctica podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento durante los choques, siempre que el tiempo que el tiempo de duración del impacto sea muy pequeño.

Ejemplo 16. Choque plástico. Las dos partículas quedan en contacto después del choque.

Estudiar desde dos puntos de vista:

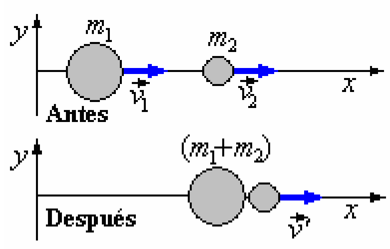
a) Observado desde tierra, sistema laboratorio y

b) Observado desde el centro de masa.

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}' \quad \text{y}$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)}\hat{i}$$

La energía mecánica antes del choque es:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

La energía mecánica después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)}$$

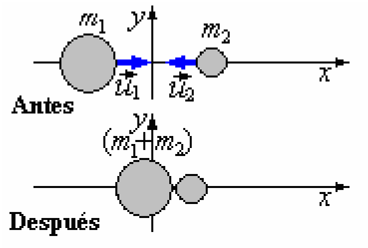
La relación de la energía es:

$$\frac{K'}{K} = \frac{m_1}{\left(m_1 + m_2\right)} \frac{\left(v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2}{\left(v_1^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2^2\right)}$$

Por ejemplo la caída de un meteorito a la tierra, la que suponemos inmóvil ($v_2 = 0$) y $m_1 << m_2$, obtenemos $K' = 0$ y $\frac{K'}{K} = 0$, éste es un choque perfectamente plástico. Si K fuera diferente de cero, la totalidad de la energía se transformaría en calor.

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



En éste caso:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \text{ y}$$
$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Con $\vec{v}_2 = 0$,

Obtenemos:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Después del choque m_1 y m_2 entran en contacto constituyendo una sola partícula de masa ($m_1 + m_2$) que está en reposo en el sistema centro de masa,

$u'_1 = u'_2 = 0$.

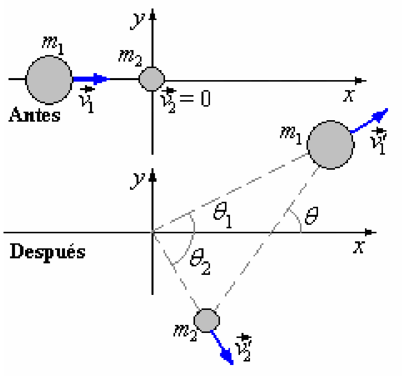
Aquí también $K' = 0$, $\varepsilon = 0$.

Ejemplo 17. Choque elástico. Consideremos dos partículas, una con masa m_1 y velocidad $\vec{v}_1$, la segunda con masa m_2 y velocidad $\vec{v}_2 = 0$

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \qquad (1)$$

En sus componentes:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta_1 + m_2 v'_2 \cos\theta_2$$

$$0 = m_1 v'_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v'_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \qquad (2)$$

En las ecuaciones (1) y (2) conocidas las masas m_1 y m_2, tenemos como incógnitas v_1, v'_1, v'_2, θ_1 y θ_2. Contamos con tres ecuaciones. Para resolver necesitamos conocer al menos dos de las cantidades anteriores.

En el caso particular en que $m_1 = m_2$, podemos llegar a la relación;

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

Elevándola al cuadrado:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2$$

Por la conservación de la energía:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

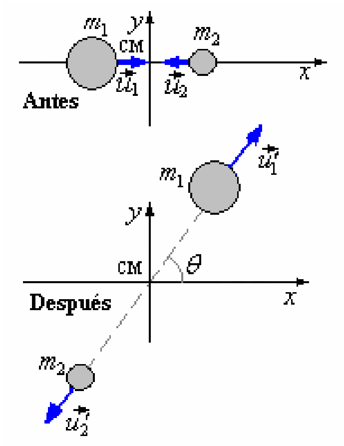
Luego, obtenemos:

$$\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$$

Las velocidades $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ son ortogonales, esto nos dice que las trayectorias de las partículas después del choque son perpendiculares entre sí, tal que:
$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = 0$$

De aquí:

$$u_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u_1\right)^2, \; u'^2_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u'_1\right)^2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2$$

Reemplazando u_2 y u'_2 en función de u_1 y u'_1 respectivamente.

$$(m_1 u_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = (m_1 u'_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)$$

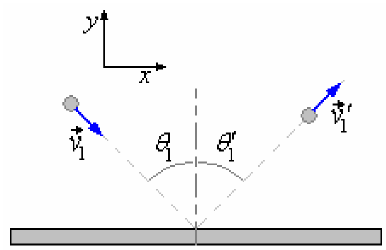
De aquí se deduce:

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 \Rightarrow u_1 = u'_1 \quad \text{y}$$

$$m_2 u_2 = m_2 u'_2 \Rightarrow u_2 = u'_2$$

Para un choque elástico $\varepsilon = 1$, como se espera.

Ejemplo 18. Reflexión de partícula sobre un plano.
Consideremos dos partículas, una con masa m_1, que incide sobre una masa m_2 de superficie plana como se muestra en la figura. La masa m_1 tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}'_1$ antes y después del choque, la superficie inicialmente está inmóvil $\vec{v}_2 = 0$ y tiene una velocidad $\vec{v}'_2$ después del choque.



Solución.

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Para la energía tenemos que tomar en cuenta si el choque es elástico o no.

a) **Choque elástico.**

En éste caso la energía mecánica se conserva
$K = K'$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

De aquí obtenemos: $v'^2_1 - v_1^2 = \frac{m_2}{m_1} v'^2_2$

Expresión que podemos escribir como;
$$\left(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1\right) \cdot \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}'_2$$

De la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2\,\vec{v}'_2 \;\Rightarrow\; \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

Reemplazando ésta expresión en la de la energía, obtenemos:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$$

Como

$$\vec{v}_1 = v_1 \text{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j}\,,$$
$$\vec{v}'_1 = v'_1 \text{sen}\theta'_1 \hat{i} + v'_1 \cos\theta'_1 \hat{j}\,,$$

$$\vec{v}'_2 = -v'_2\,\hat{j}$$

Reemplazando obtenemos:

$$v_1 \text{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j} + v'_1 \text{sen}\theta'_1 \hat{i}$$
$$+ v'_1 \cos\theta'_1 \hat{j} = -v'_2\,\hat{j}$$

De aquí:

$v_1 \text{sen}\theta_1 + v'_1 \text{sen}\theta'_1 = 0$ y
$v_1 \cos\theta_1 - v'_1 \cos\theta'_1 = v'_2$

En el caso en que $v'_2 = 0$ (la superficie no se mueve)

$\theta_1 = \theta'_1$ y $v_1 = v'_1$

b) **Choque inelástico.**

En éste caso $K > K'$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 > \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_1 v'^2_2$$

Para encontrar la relación de *K* y *K'* podemos usar el coeficiente de restitución ε.

$\varepsilon = \sqrt{\dfrac{K'}{K}}$, siendo $0 \le \varepsilon \le 1$

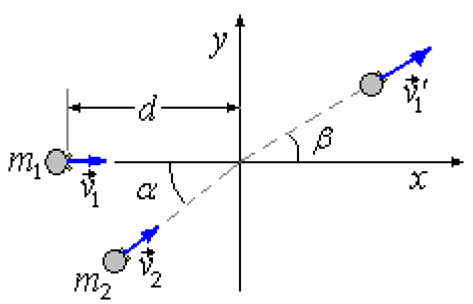
Ejemplo 19. En un parque de diversiones dos amigos juegan con los autitos "chocones". En cierto momento las direcciones de ambos vehículos forman un ángulo α. Un auto se dirige con velocidad $\vec{v}_1$ y el otro con velocidad $\vec{v}_2$ de tal modo que chocan. Después del choque el auto 1 sale con velocidad $\vec{v}'_1$ cuya dirección forma un ángulo β, tal como se indica en la figura.

a) Hallar la velocidad del auto 1 luego del impacto.

b) Determinar la posición del centro de masa y las ecuaciones paramétricas del mismo.

c) Determinar si el choque es elástico o no.

$m_1 = m_2 = 200$ kg, $v_{01} = 3$ m/s,
$v_{02} = 1$ m/s, $v'_1 = 2$ m/s, $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 37^\circ$,
$d = 3$ m



Solución.

a) por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow$$
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

Aquí

$\vec{v}_1 = 3\hat{i}$,

$\vec{v}_2 = (1)\cos 53^\circ \hat{i} + (1)\text{sen}53^\circ \hat{j}$

$= 0{,}6\hat{i} + 0{,}8\hat{j}$,

$\vec{v}'_1 = (2)\cos 37^\circ \hat{i} + (2)\text{sen}37^\circ \hat{j}$

$= 1{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j}$

Reemplazando:

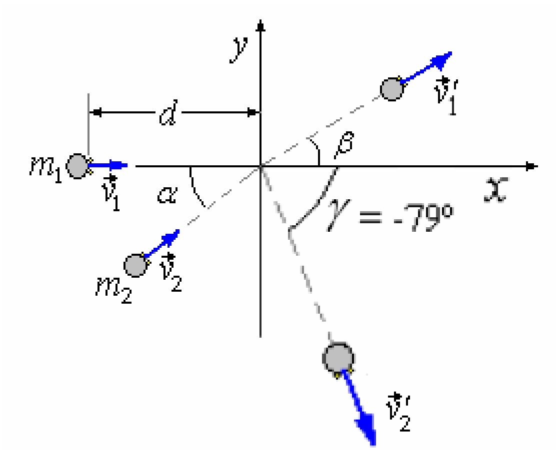
$$3\hat{i} + 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j} = 1,6\hat{i} + 1,2\hat{j} + \vec{v'}_2$$

$$\Rightarrow \vec{v'}_2 = 2\hat{i} - 0,4\hat{j}$$

$$v'_2 = \sqrt{2^2 + 0,4^2} = \sqrt{4,16}$$

$$= 2,04 \text{ m/s}$$

$$\tan\gamma = \frac{2}{-0,4} = -5 \Rightarrow \gamma = -79^o$$



b) Para determinar la posición del centro de masa es necesario conocer la posición inicial de la masa m_2. Como m_1 y m_2 emplean el mismo tiempo desde el inicio hasta el choque:

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{3m}{3m/s} = 1s$$

La posición inicial de m_2 es:

$$x_{20} = -v_{2x}t = -0,6(1) = -0,6 \text{ m},$$
$$y_{20} = -v_{2y}t = -0,8(1) = -0,8 \text{ m}$$

Siendo la posición inicial de m_1

$$x_{10} = -3m,\ y_{10} = 0$$

El centro de masa está dado por:

$$x_{CM} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2},\ y_{CM} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}$$

Como $m_1 = m_2 = 200kg$

$$x_{CM} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y_{CM} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

<u>Antes del choque:</u>

$$x_1 = -3 + 3t,\qquad y_1 = 0$$

$$x_2 = -0,6 + 0,6t,\ y_2 = -0,8 + 0,8t$$

Luego

$$x_{CM} = -1,8 + 1,8t,\ y_{CM} = -0,4 + 0,4t$$

<u>Después del choque:</u>

$$x_1 = 1,6(t-1),\ y_1 = 1,2(t-1)$$

$$x_2 = 2(t-1),\ y_2 = -0,4(t-1)$$

Luego

$$x_{CM} = 1,8(t-1),\ y_{CM} = 0,4(t-1)$$

c) Para saber si es elástico o no, tenemos que analizar si la energía se conserva o no.

La energía cinética antes del choque es:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(3)^2 + \frac{1}{2}(200)(1)^2$$

= 900 +100 = 1000 J

La energía cinética después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(2)^2 + \frac{1}{2}(200)(2,04)^2$$

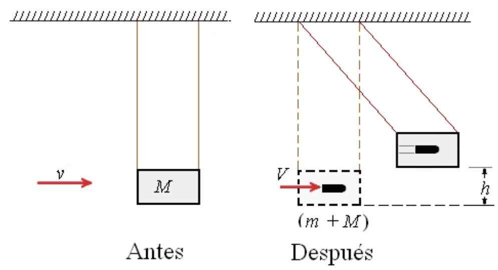
= 400 + 416 = 816 J

Hay una disminución de la energía cinética:

$\Delta K = 816 - 1000 = -184$ J

Luego el choque es inelástico.

Ejemplo 20. El péndulo balístico. Este es el caso de un choque perfectamente plástico, se utiliza para medir la velocidad de un proyectil. Un proyectil de masa *m* y velocidad *v* se incrusta en el bloque de madera de masa *M*.



Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento.

$$m\vec{v} = (m+M)\vec{V}$$

La energía cinética después del choque es:

$K' = \frac{1}{2}(m+M)V^2$, ésta se convierte en energía potencial $U = (m+M)gh$

Luego $(m+M)V^2 = (m+M)gh$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

La velocidad del proyectil es:

$$v = \frac{(m+M)}{m}V = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 21. Una bala de 5,00 g se dispara contra un bloque de madera de 1,00 kg suspendido de un hilo de 2,000 m, atravesándolo. El centro de masa del bloque se eleva 0,45 cm. Calcule la rapidez de la bala al salir del bloque si su rapidez inicial es de 450 m/s.

Solución.

La rapidez del bloque de madera después de que la bala ha atravesado (pero antes de que el bloque comience a elevarse; esto asume una gran fuerza aplicada por un tiempo corto, una situación característica de las balas) es

$$V = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9,80)(0,45\times 10^{-2})}$$

$= 0,297$ m/s

La rapidez final v de la bala es

$$v = \frac{p}{m} = \frac{mv_0 - MV}{m} = v_0 - \frac{M}{m}V$$

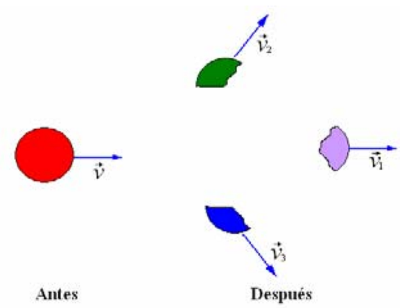
$$= 450 - \frac{1,00}{5,00\times 10^{-3}}(0,297)$$

$= 390,6$ m/s .

Ejemplo 22. Un satélite artificial en vuelo explota en tres partes iguales. Una parte continúa a lo largo de su línea original de vuelo y las otras dos van en direcciones cada una inclinada 60º a la trayectoria original. La energía liberada en la explosión es dos veces más que la energía que tenía el saté1ite en el momento de la explosión. Determinar la energía cinética de cada fragmento Inmediatamente después de la explosión.

Solución.

La figura muestra el satélite antes y después de la explosión.



Por conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

La cantidad de movimiento debe conservarse en las tres dimensiones *x*, *y*, *z* , independientemente, de allí que v_1, v_2, v_3 y v deben ser coplanares.

Así obtenemos:

$$Mv = \frac{M}{3}v_1 + \frac{M}{3}v_2\cos 60^\circ + \frac{M}{3}v_3\cos 60^\circ$$

y $\frac{M}{3}v_2 \text{sen} 60^\circ - \frac{M}{3}v_3 \text{sen} 60^\circ = 0$

De estas dos ecuaciones encontramos que:

$v_2 = v_3$ (1)

$3v = v_1 + v_2$ (2)

La energía inicial es: $E_i = \frac{1}{2}Mv^2$

La energía final es:

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}Mv^2$$

Esta energía es igual a la suma de las energías de los tres fragmentos.

$$\frac{3}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_3^2$$

$9v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ (3)

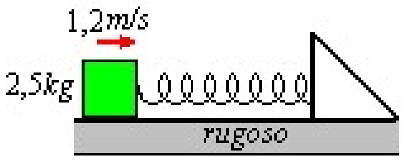
De las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos:

$v_1 = v$, $v_2 = 2v$, $v_3 = 2v$

La energía cinética de cada uno de los fragmentos inmediatamente después de la explosión es:

$$K_1 = \frac{1}{6}Mv^2,\ K_2 = \frac{2}{3}Mv^2,\ K_3 = \frac{2}{3}Mv^2$$

Ejemplo 23. Un bloque de 2,5 kg, se desliza sobre una superficie rugosa, cuando contacta con el resorte tiene una velocidad de 1,2 m/s. el bloque se detiene momentáneamente cuando el resorte se ha comprimido 5,0 cm. El trabajo realizado por la fricción, desde el instante en que el bloque hace contacto con el resorte hasta el instante en que hace el alto es 0,50 J.
a) ¿Cuál es la constante del resorte (*k*)?
b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción?
c) Después de la compresión del resorte, el bloque se aleja de él, ¿cual es la velocidad del bloque, después de separarse del resorte?



Solución.
a) Energía antes = Energía después

$$\frac{1}{2}(2,5)(1,2)^2 = \frac{1}{2}k(0,05)^2 + 0,5$$

$\Rightarrow$ k = 1040N/m

b) $W_f = \mu mgd$

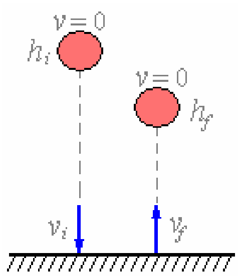
$$\Rightarrow \mu = \frac{W_f}{mgd} = \frac{0,5}{2,5 \times 9,8 \times 0,05} = 0,41$$

c) $\frac{1}{2}kx^2 - Wf = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{1}{2}(1040)(0,05)^2 - 0,5 = \frac{1}{2}(2,5)v^2$$

$\Rightarrow$ v = 0,80 m/s

Ejemplo 24. Una pelota de masa *m* = 100 g se deja caer desde una altura *h* = 2m. La pelota rebota verticalmente hasta ¾ *h* después de golpear el suelo.
a) Calcular la cantidad de movimiento de la pelota antes y después de golpear el suelo,
b) si la duración del golpe fue de 0,01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.
Solución.
En la figura se muestra el esquema de la situación.



a) Cantidad de movimiento inicial:

$$\vec{p}_i = -mv_i\hat{j}$$

Cantidad de movimiento final:

$$\vec{p}_f = mv_f\hat{j}$$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.
Inicial:

$$0 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_i}$$

Final:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh_f$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2g\left(\frac{3}{4}h_i\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}gh_i}$$

Por lo tanto, las cantidades de movimiento inicial y final son:

$$\vec{p}_i = -m\sqrt{2gh_i}\,\hat{j},\ \vec{p}_f = m\sqrt{\frac{3}{2}gh_i}\,\hat{j}$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$p_i = -0,63$ kgm/s, $p_f = -0,54$ kgm/s

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\vec{J} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_f}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_m = \frac{0{,}54\hat{j} - \left(-0{,}63\hat{j}\right)}{0{,}01}$$

$$= 118\hat{j}\ \text{N}$$

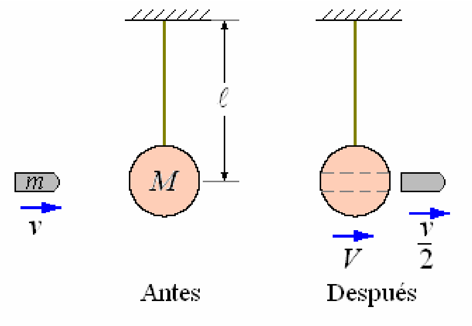
Ejemplo 25. Una bala de la masa *m* y con velocidad *v* pasa a través de un péndulo de masa *M*. La bala emerge con una velocidad de *v*/2. El péndulo está suspendido por una barra rígida de longitud *l* y masa insignificante. ¿Cuál es el valor mínimo de *v* tal que la masa del péndulo gire un círculo completo?

Solución.

En esta colisión, se conserva la cantidad de movimiento pero la energía no.

Este es un ejemplo de una colisión inelástica que no es perfectamente inelástica.

Para la colisión:



$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow mv = m\frac{v}{2} + MV$$

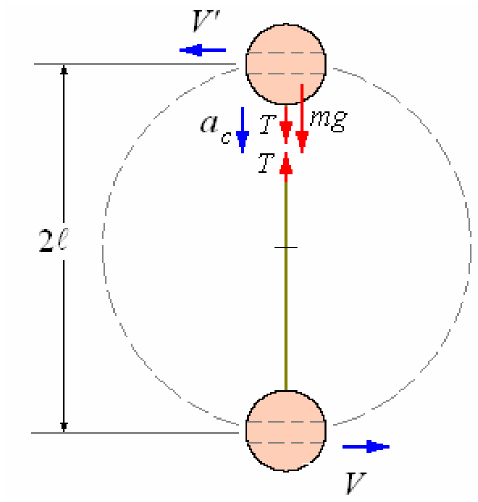
De aquí:

$$v = \frac{2M}{m}V \quad (1)$$

Después de la colisión se conserva la energía para el péndulo (la conservación de la energía para la bala después de la colisión no es útil desde que su energía no cambia). Este tratamiento nos da la velocidad del péndulo el momento después de la colisión:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + Mg(2\ell) \quad (2)$$

Condición para que pueda dar la vuelta



$$T + Mg = Ma_c$$

Condición mínima para hacer movimiento circular

$T = 0$

Luego

$$Mg = M\frac{V'^2}{\ell} \Rightarrow V'^2 = g\ell \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}Mg\ell + Mg(2\ell) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{5}{2}Mg\ell \Rightarrow V = \sqrt{5g\ell}$$

Reemplazando el valor de *V* en (1):

$$v = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

MOVIMIENTO CON MASA VARIABLE - PROPULSIÓN POR REACCIÓN

Por la conservación de la cantidad de movimiento si un cuerpo en reposo puede expulsar una parte de su masa en cierta dirección, el resto de la masa se moverá en sentido opuesto, con igual cantidad de movimiento. Si este proceso puede mantenerse durante un tiempo, el resto de la masa, como es el caso de un cohete, aparecerá para un observador externo en reposo. Como si se estuviese acelerando. Esto se expresa mediante la forma más general de la segunda ley de Newton.

Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

Siendo la masa variable

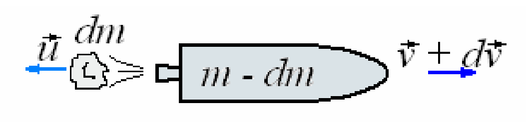
$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Expresión que nos permite determinar el movimiento de un cuerpo cuya masa cambia durante su movimiento.

Cuando aplicamos al caso de un cohete aparecen los problemas, evidentemente *m* es la masa del cohete que va cambiando. ¿Cuál es la velocidad de escape del combustible? No es igual a $\vec{v}$, la velocidad del cohete. Si no existe fuerza externa, ¿ $\vec{F}$ debe ser cero? Entonces no se moverá el cohete. Analicemos el problema desde el punto de vista de la conservación de la cantidad de movimiento.

Sea el cohete mostrado en la figura siguiente, en el instante *t*, tiene una masa *m* y una velocidad $\vec{v} = v\hat{i}$, con una cantidad de movimiento lineal $m\vec{v}$.

En la figura siguiente se muestra el cohete en el instante $t + dt$, a expulsado una masa dm que sale con una velocidad $\vec{u} = -u\hat{i}$ relativa al cohete. Ahora la masa del cohete es $(m - dm)$ y su velocidad es $\left(\vec{v} + d\vec{v}\right)$.



La cantidad de movimiento lineal total es:

$$(m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal tenemos: $\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$$m\vec{v} = (m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm\vec{v} - dm\vec{u}$$

Como el infinitésimo $dmd\vec{v}$ es de segundo orden, podemos despreciar éste término; luego

$$md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$$

Dividiendo por dt se obtiene: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\dfrac{dm}{dt} = 0$

Como $\vec{v}$ es la velocidad del cohete, $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ es la aceleración $\vec{a}$.

De éste modo:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Por la segunda ley de Newton se puede identificar la cantidad $\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ como una fuerza, tal que **la fuerza de empuje** es:

$$\vec{F} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $\dfrac{dm}{dt}$ por se pérdida de mas también es negativa, $\vec{F}$ es positiva, como esperábamos. Esta es una fuerza externa que produce aceleración al cohete, al que ahora consideraremos como un sistema aislado sobre el que hay una fuerza externa.

Velocidad del cohete.

De la expresión $md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$, obtenemos:

$$d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{m}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \vec{u}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \vec{u}\left[\ln\right]_{m_0}^{m} = \vec{u}\ln\frac{m}{m_0}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $m < m_0$, $\ln\dfrac{m}{m_0}$ es negativa.

Luego la velocidad es positiva.

Velocidad límite del cohete.

Una vez que se haya terminado el combustible la masa se reduce a m_1, y llegamos a la velocidad límite.

$$\vec{v}_m = \vec{u} \ln \frac{m_1}{m_0}$$

Una vez alcanzada ésta velocidad, ésta permanecerá constante.

Ejemplo 26. Un cohete y su combustible tienen una masa inicial m_0. El combustible se quema a una razón constante $\frac{dm}{m} = C$ .Los gases son expulsados con una velocidad constante $\vec{u}$ respecto al cohete.

a) Despreciando la resistencia del aire, hallar la velocidad del cohete en el instante *t*, después de despegar de la tierra.

b) ¿Cuál es la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible?

Solución.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cohete son la fuerza de empuje y la fuerza de la gravedad. Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{u}\frac{dm}{dt} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Donde $\vec{u} = -u\hat{k}$, $\vec{g} = -g\hat{k}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{k}$

y $\frac{dm}{dt} = -C \Rightarrow m = m_0 - Ct$

Reemplazando $uC - (m_0 - Ct)g = (m_0 - Ct)\frac{dv}{dt}$

o $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{uC}{(m_0 - Ct)}$

Integrando $\int_0^v dv = \int_0^t -gdt + \int_0^t \frac{uC}{(m_0 - Ct)}dt$

La velocidad en el instante *t* es:

$$v_{(t)} = -gt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}$$

b) Antes de encontrar la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible, encontraremos la altura para el tiempo *t*.

Como $v_{(t)} = \frac{dz}{dt}$, tenemos:

$$dz = -gtdt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

Integrando

$$\int_0^z dz = -\int_0^t gtdt - \int_0^t u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{u}{C}(m_0 - Ct)\left[\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0} - 1\right]$$

El tiempo t_1 en que se acaba el combustible es cuando $m = m_1$. Como $m = m_1 - Ct$, obtenemos:

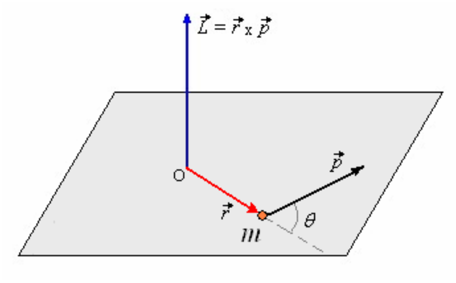
$$t_1 = \frac{m_0 - m_1}{C}$$

Reemplazando t_1 en la expresión anterior encontramos la altura que alcanza en el momento en que el combustible se acaba.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA O TORQUE

Consideremos una partícula P de masa m, su posición con respecto al origen O en un instante dado está determinada por el vector $\vec{r}$.

La partícula tiene una velocidad $\vec{v}$ y su cantidad de movimiento lineal es $\vec{p} = m\vec{v}$.



LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR O MOMENTUM ANGULAR $\vec{L}$

Se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{p}$,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, su sentido lo da la regla de la mano derecha, su módulo es:

$$L = rp\,\text{sen}\,\theta = rmv\,\text{sen}\,\theta$$

Como $v\text{sen}\,\theta$ es la velocidad tangencial (v_t) y $v_t = \omega r$, siendo ω la velocidad angular. Podemos escribir:

$$L = mr^2\omega$$

MOMENTO DE INERCIA (I).

Llamando Momento de Inercia al producto mr^2,

Tenemos:

$$L = I\,\omega, \text{ vectorialmente } \vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Las dimensiones de la cantidad de movimiento angular son:

$$[L] = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Sus unidades en el sistema internacional:

$$\frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} \text{ o J s}$$

Derivando la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ y } \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

Luego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Por otra parte si $\vec{F}$ es la fuerza que produce el movimiento de la partícula, por la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Luego $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

A esta cantidad que produce un cambio en la cantidad de movimiento angular se le conoce como

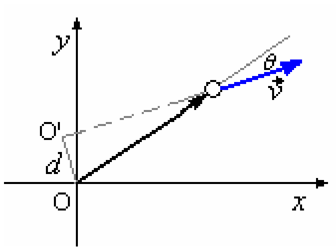
MOMENT0 DE UNA FUERZA o TORQUE $\left(\vec{\tau}\right)$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Tiene como módulo $\tau = rF\,\text{sen}\,\theta$

Su sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Ejemplo 27. Una partícula de masa *m* se mueve en el plano *xy* con una velocidad $\vec{v}$ a lo largo de una línea recta. ¿Cuál es la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular con respecto al origen O?



Solución.

La posici6n de la partícula es $\vec{r}$.

La velocidad de la partícula es $\vec{v}$.

Su cantidad de movimiento lineal es

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Su cantidad de movimiento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\,\text{sen}\,\theta\left(-\hat{k}\right)$$

La magnitud es: $L = rmv\,\text{sen}\,\theta = mvd$, donde $d = r\,\text{sen}\,\theta$

Luego $\vec{L} = -(mvd)\hat{k}$

Podemos ver que la cantidad de movimiento angular con respecto a O' es cero.

Ejemplo 28. En determinado instante, la Posición de una partícula con respecto a un origen O de coordenadas está dada por el vector $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ (en metros) . En ella actúa una fuerza $\vec{F} = 16\hat{i} + 32\hat{j}$ (en Newton) . Encontrar el torque originado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula. Con referencia al origen O.

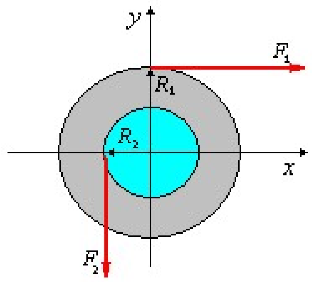
Solución.

El torque es: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) \times \left(16\hat{i} + 32\hat{j}\right)$

$= (3)(32)\hat{k} + (4)(16)\left(-\hat{k}\right) = 96\hat{k} - 64\hat{k}$

$= 32\hat{k}$ Nm

Ejemplo 29. Un cilindro sólido Puede girar alrededor de un eje sin fricción como se ve en la figura. Una cuerda enrollada alrededor del radio exterior R_1 ejerce una fuerza F_1 hacia la derecha. Una segunda cuerda enrollada alrededor de la otra sección cuyo radio es R_2 ejerce una fuerza F_2 hacia abajo. ¿Cuál es el torque que actúa sobre el cilindro alrededor del eje z que pasa por O?



Solución.

Sobre el cilindro actúan:

$\vec{F}_1 = F_1\hat{i}$ en $\vec{r}_1 = R_1\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = -F_2\hat{j}$ en $\vec{r}_2 = -R_2\hat{i}$

El torque neto sobre el cilindro es:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -R_1F_1\hat{k} + R_2F_2\hat{k}$$

$$= \left(R_2F_2 - R_1F_1\right)\hat{k}$$

Si F_1 = 10 N, R_1 = 2 m y F_2 = 5 n, R_2 = 1 m:

$$\vec{\tau} = \left[(5N)(1m) - (10N)(2m)\right]\hat{k} = -15\hat{k}\ \text{N m}$$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

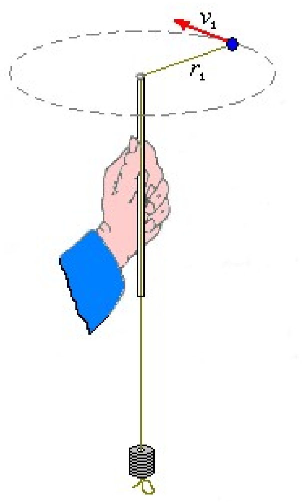
En el caso de una partícula come en la sección anterior, si el torque aplicado con relación a un punto dado de referencia es cero, tenemos que:

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0$, por consiguiente: $\vec{L} = \text{CONSTANTE}$

La cantidad de movimiento angular con respecto al punto de referencia es constante.

Ejemplo 30. Una partícula de, masa *M* en el extremo de un hilo gira con velocidad v_1 cuando el radio es r_1, si disminuimos el radio de r_1 a r_2, ¿qué sucede con la velocidad?

Solución.



La figura indica la forma como se puede realizar esta experiencia, para disminuir el radio basta jalar el hilo.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular:

$L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$

$$r_1 M v_1 = r_2 M v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

También podemos hallar el trabajo realizado para acortar el radio.

$$K_{antes} = \frac{1}{2} M v_1^2 ,$$

$$K_{después} = \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M \left(v_1 \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2$$

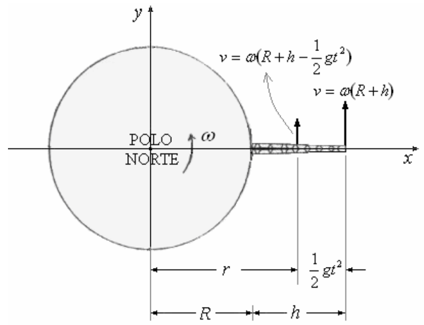
El trabajo realizado es igual al cambio de energía cinética.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2 - \frac{1}{2} M v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Ejemplo 31. Cálculo de la desviación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial y que cae desde una altura h .

Solución.



En la figura, sea una partícula de masa *m* a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra en un punto que, para simplificar, consideramos que se encuentra sobre el ecuador. Para los casos de interés físico, la altura *h* será por lo común muy pequeña en comparación con el radio, *R* de la Tierra. Si se supone que la partícula parte del reposo en relación a un punto de la superficie de la Tierra verticalmente por debajo de él entonces, inicialmente, el componente radial de la velocidad v_r de la partícula desaparece y su componente tangencial v_θ será $\omega (R + h)$, en donde ω es la velocidad angular de la Tierra. Al soltarse, debido a la atracción gravitacional de la Tierra, la partícula comienza a caer verticalmente hacía abajo y, por ende, su distancia radial r del centro de la Tierra comienza a disminuir. De $L = mrv_\theta$ se deduce que el componente tangencial de su velocidad v_θ debe aumentar este proceso y de modo tal que haga que el producto rv_θ sea constante. En términos más cuantitativos, esto quiere decir que durante su descenso hacia el suelo, la distancia radial *r* y la velocidad tangencial v_θ se deben relacionar por medio de

$$mrv_\theta = m\omega(R + h)^2 \qquad (1)$$

Puesto que, inicialmente, la velocidad de la partícula es $\omega(R + h)$, de tal modo que su cantidad de movimiento angular *L* en relación al centro de la Tierra es $m\omega(R + h)^2$ Anticipándonos al hecho de que la desviación hacia el este será muy pequeña, podemos escribir para la distancia radial *r* del cuerpo al centro de la Tierra en cualquier instante t,

$$r = R + h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Y al sustituir esto en (1) obtenemos:

$$v_\theta = \frac{\omega(R+h)^2}{R+h-\frac{1}{2}gt^2} = \frac{\omega(R_o+h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} \qquad (3)$$

Para calcular la magnitud de la desviación hacia el este, sea v_y en el instante t, la velocidad del cuerpo que cae en la dirección hacia el este, tal y como lo ve un observador fijo con respecto a la superficie de la Tierra. Entonces

$$v_y = v_o - r\omega$$

$$= \frac{\omega(R_o+h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} - (R+h-\frac{1}{2}gt^2)\omega$$

$$= (R+h)\omega\left[1+\frac{\frac{1}{2}gt^2}{R+h}\right] - (R+h)\omega + \frac{1}{2}gt^2\omega$$

$$= gt^2\omega$$

Donde la segunda igualdad se obtiene de la utilización de (2) y (3) y la tercera, a continuación, mediante el hecho de que $gt^2 << (R+h)$ y el empleo del teorema binomial. Al integrar esta fórmula para v_y se obtiene, para la desviación total hacia el este y en el instante t,

$$y = \frac{1}{3}gt^3\omega .$$

Finalmente, puesto que el tiempo que necesita la partícula para caer la distancia h es de $(2hg)^{1/2}$, la deflexión total hacia el este d, se puede expresar como sigue

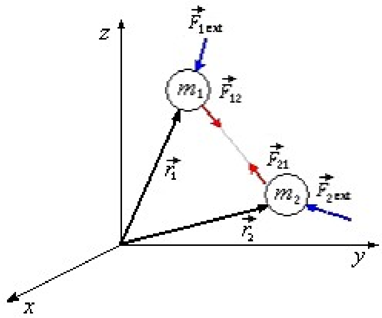
$$d = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (4)$$

Por ejemplo, si se deja caer una partícula desde una altura de 100 metros, su desviación hacia el este, según esta fórmula, se descubre que es (al sustituir los valores h = 100 metros y ω = 7,2 x 10^{-5}rad/s) de 2,2 cm. Esta desviación es muy pequeña y sólo se puede observar en condiciones controladas cuidadosamente.

Es importante recordar la base física para la deflexión pronosticada en (4). Conforme la partícula desciende hacia la superficie de la Tierra su velocidad tangencial v_θ debe aumentar para que el producto rv_θ sea constante. Por consiguiente, de esto se desprende que su velocidad tangencial debe sobrepasar a la del punto de la superficie que se encontraba inicial e inmediatamente por debajo, y, en esta forma, se desvía hacia el este.

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

Vamos a considerar un sistema de dos partículas, como se muestra en la figura.



Para la partícula 1: $\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$, donde

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1ext}\right)$$

$\vec{F}_1$ Es la fuerza total sobre la partícula 1.

$\vec{F}_{12}$ Es la fuerza ejercida por la partícula 2 y

$\vec{F}_{1\,ext}$ Es la suma de las fuerzas externas sobre la partícula 1.

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1\,ext} = \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{1\,ext}$$

Similarmente para partícula 2.

$$\vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2\,ext} = \vec{\tau}_{21} + \vec{\tau}_{2\,ext}$$

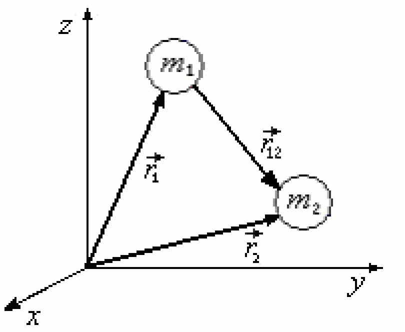
Sumando $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Para los Torques internos tenemos:

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

Como $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}-\vec{r}_2\times\vec{F}_{12}=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{F}_{12}$$



De la figura: $\vec{r}_1+\vec{r}_{12}=\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_{12}$

Reemplazando

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=-\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{12}$$

Como $\vec{r}_{12}$ y $\vec{F}_{12}$ son paralelos: $\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{12}=0$, y

$$\vec{\tau}_{12}+\vec{\tau}_{21}=0$$

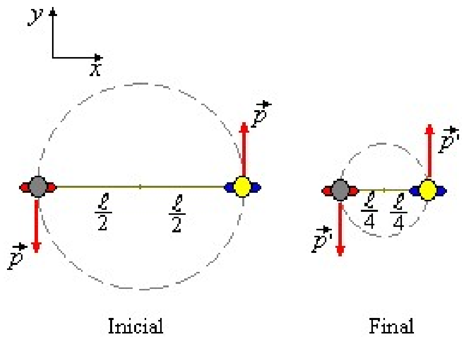
De aquí: $\vec{\tau}_{1\,ext}+\vec{\tau}_{2\,ext}=\dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$ y $\vec{\tau}_{ext}=\dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Vemos si $\vec{\tau}_{ext}=0 \Rightarrow \vec{L}_{total}=\text{CONSTANTE}$, independiente del tiempo.

Ejemplo 32. Dos hombres se encuentran en una pista de patinaje, ambos sostienen una cuerda de longitud ℓ. ¿Qué pasa con la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ de cada uno de ellos, si ambos jalan la cuerda y acortan la distancia entre ellos a $\ell/2$? Asumir que se mueven en círculo y que la magnitud de sus cantidades de movimiento son iguales.

Solución.

Las únicas fuerzas externas al sistema son la fuerza de la gravedad y la reacción normal del piso, estas fuerzas se cancelan. Las únicas fuerzas que, intervienen en el sistema son las internas, por lo tanto la cantidad de movimiento angular del sistema se conserva.



Al estar sujetos los dos hombres a la cuerda su movimiento es circular y si consideramos que el piso está en el plano xy,

Tenemos:

$$\vec{L}_{inicial}=2\frac{\ell}{2}p\hat{k}=\ell p\hat{k},$$

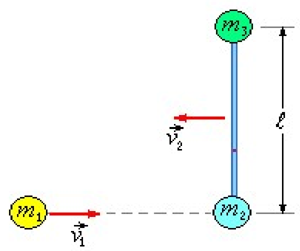
$$\vec{L}_{final}=2\frac{\ell}{4}p'\hat{k}=\frac{\ell p'}{2}\hat{k}$$

Como $\vec{L}_{inicial}=\vec{L}_{final} \Rightarrow \vec{p}'=2\vec{p}$

La cantidad de movimiento lineal final de cada hombre es el doble de la cantidad de movimiento lineal inicial.

CONSTANTE, Independiente, del tiempo

Ejemplo 33. Una partícula de masa m_1 se desplaza sobre un plano horizontal con velocidad $\vec{v}_1$. Dos partículas de masas m_2 y m_3 unidas por una varilla de masa despreciable se mueven con velocidad $\vec{v}_2$, como se indica en la figura.



Suponiendo un choque totalmente plástico entre m_1 y m_2

$m_1=m_2=m_3=1$ kg, $\vec{v}_1=20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$, $\vec{v}_2=-10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$, $\ell=1\text{m}$

Calcular:

a) La posición del centro de masa respecto a la masa m_2 en el momento del choque.

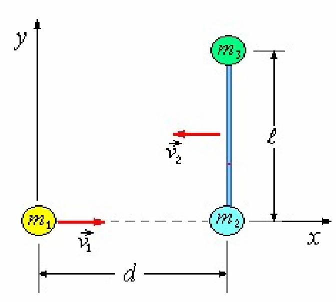
b) La ley del movimiento del centro de masa.

c.) La velocidad angular de rotación alrededor del centro de masa después del choque.

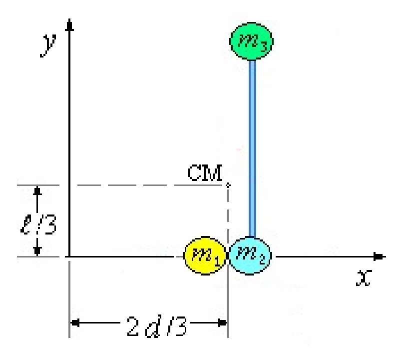
Solución.

a) En el momento del choque, tomando como referencia la posición de m_2, el centro de masa está en:

Posición en el instante partida (t = 0).



Posición en el instante de encuentro.



$$x_{CM} = \frac{m_1\left(\frac{2d}{3}\right) + m_2\left(\frac{2d}{3}\right) + m_3\left(\frac{2d}{3}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m(2d)}{3m} = \frac{2d}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1(0) + m_2(0) + m_3(\ell)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\ell}{3} = \frac{1}{3}\ \text{m}$$

b) Como parten del reposo, la cantidad de movimiento total del sistema es cero.

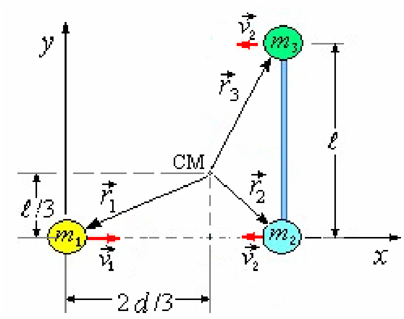
$$\vec{P}_{total} = M\vec{v}_{cm} = 0$$

Como $\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm}$ $\therefore$ $\vec{r}_{cm}$ = constante.

El centro de masa permanece en la misma posición.

c) Consideremos la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa antes y después del choque.

<u>Antes del choque.</u>



$$\vec{L} = \vec{r}_{1cm} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2cm} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_{3cm} \times \vec{p}_3$$

$$\vec{r}_{1cm} = -\frac{2d}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\,,\quad \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 20\hat{i}$$

$$\vec{r}_{2cm} = (d - v_2 t)\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j}\,,\quad \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = -10\hat{i}$$

$$\vec{r}_{3cm} = (d - v_2 t)\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j}\,,\quad \vec{p}_3 = m_3\vec{v}_2 = 20\hat{i}$$

Nota: En los vectores posición ($\vec{r}_{1cm}, \vec{r}_{2cm}, \vec{r}_{3cm}$) solo ponemos la posición en el eje *y*, porque la posición en *x* se va a anular con el producto vectorial.

Reemplazando:

$$\vec{L} = \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(20\hat{i}) + \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i}) + \left(\frac{2}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i})$$

$$\vec{L} = \frac{20}{3}\hat{k} - \frac{10}{3}\hat{k} + \frac{20}{3}\hat{k} = 10\hat{k}$$

<u>Después del choque:</u>

Como después del choque el sistema gira alrededor del centro de masa con velocidad angular $\vec{\omega}$, podemos expresar la cantidad de movimiento angular en función del momento de inercia.

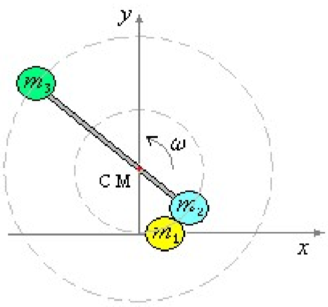
$$\vec{L}' = I\vec{\omega},\ I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow$$

$$I = m_1\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_3\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

luego $\vec{L}' = \frac{2}{3}\vec{\omega}$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}' = \vec{L}$

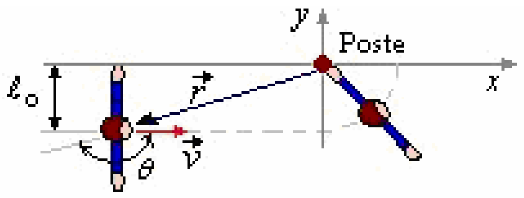
$$10\hat{k} = \frac{2}{3}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = 15\hat{k}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Ejemplo 34. Un muchacho va corriendo por la acera con una velocidad constante *v* con sus brazos estirados perpendicularmente a su recorrido. La distancia entre los extremos de los dedos de sus manos es $2\ell_0$. Cuando al correr pasa junto a un poste, se coge al mismo con la mano izquierda, levanta los pies del suelo, y gira por aire alrededor del poste.

a) Si su masa es, *M*. ¿Cuál es el valor de su cantidad de movimiento angular respecto al poste cuando corre por la acera?

b) Si la fuerza de reacción del poste no só1o lo hace girar, sino que además proporciona una fuerza impulsiva que hace frenar ligeramente su movimiento hacia adelante, de modo que su energía cinética se reduce a los cuatro quintos de su valor original. ¿Cuál es su momento de inercia respecto al poste?



Solución.

a) La cantidad de movimiento con que se acerca el muchacho es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rmv\,\text{sen}\theta\hat{k}$$

Como $r\,\text{sen}\theta = \ell_0 \Rightarrow \vec{L} = m\ell_0 v\hat{k}$

b) Cuando el muchacho se coge del poste, las fuerzas de reacción centrípeta e impulsiva deben pasar por el poste por lo tanto no ejercen ningún torque sobre el muchacho y la cantidad movimiento angular se conserva.

$$\vec{L} = m\ell_0 v\hat{k} = \text{constante}$$

La energía cinética después de cogerse del poste es $K' = \frac{4}{5}K$.

K es la energía cinética antes de cogerse, $K = \frac{1}{2}mv^2$

Luego:

$$K' = \frac{4}{5}K = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{2}{5}mv^2 \quad (1)$$

También $K' = \frac{1}{2}I\omega^2$, como $\vec{L} = I\omega\hat{k} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{L}{I}$$

Reemplazando éste valor de ω en *K’* :

$$K' = \frac{L^2}{2I} = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{2}{5}mv^2 = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I}$$

Luego su momento de inercia es $I = \frac{5}{4}m\ell_0^2$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Una masa m_1 se sitúa en (x_1, y_1, z_1) y otra masa m_2 en (x_2, y_2, z_2).
a) Hallar 1a distancia r_0 entre m_1 y m_2.
b) Hallar la distancia r_1 entre m_1 y el centro de masa.
c) Hallar la distancia r_2 entre m_2 y et centro de masa.
Respuesta. a)

$$r_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

b) $r_1 = \dfrac{m_2 r_0}{(m_1 + m_2)}$, c) $r_2 = \dfrac{m_1 r_0}{(m_1 + m_2)}$

2. Dos partículas de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 3 kg se mueven por el espacio, sus vectores posición Son:

$$\vec{r}_1 = 3\hat{i} + t\hat{j} - \sqrt{t}\hat{k}, \quad \vec{r}_2 = \text{sen}\, t^2\hat{i} + \hat{k}$$

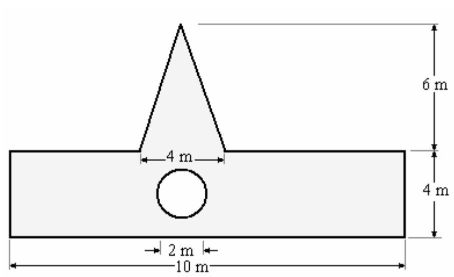
a) Hallar el centro de masa.
b) ¿Cuál es su aceleración?
c) Hallar su aceleración vista por un observador que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = \hat{j} + 3\hat{k}$.
Respuesta. a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4}\left[\left(3 + 3\text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + t\hat{j} + \left(3t - \sqrt{t}\right)\hat{k}\right]$$

b) $\vec{a}_{CM} = \dfrac{1}{2}\left(\cos t^2 + 2t^2 \text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + \dfrac{1}{16}t\hat{k}$

c) igual que b)

3. Encontrar el centro de masa de una lámina delgada mostrada en la figura

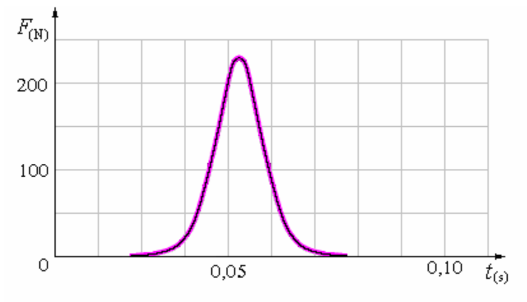


Respuesta. y = 0,983m encima del centro del orificio

4. Una fuerza $\vec{F} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ actúa sobre un cuerpo en el intervalo de $0 \le t \le 6s$. Hallar el impulso sobre el cuerpo.

Respuesta. 181 + 72j + 324l$18\hat{i} + 72\hat{j} + 324\hat{k}$

5. Suponga que la fuerza que actúa sobre una pelota de tenis (m = 0,060 kg) en función del tiempo está dada por la gráfica de la figura. Usando métodos gráficos estime:
a) El impulso total dado a la bola.
b) La velocidad de ésta después de haber sido golpeada, suponiendo que estaba en reposo en el momento de ser golpeada.

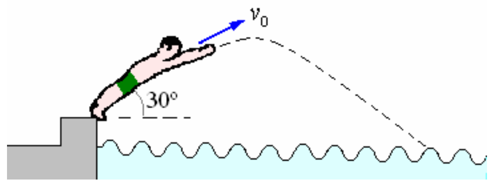


Respuesta. a) 4,5 Ns b) 75 m/s

6. Un flujo de partículas idénticas de masa m y velocidad uniforme $\vec{v}$, inciden sobre un plano fijo de área A, la dirección forma un ángulo θ con la normal. Después del choque las partículas tienen una velocidad $\vec{v}'$, la dirección es simétrica a la de $\vec{v}$. También $\vec{v} = \vec{v}'$.
a) Calcular el Impulso que se ejerce sobre cada partícula en el momento del choque.
b) Calcular el valor de la fuerza comunicada a la superficie por unidad de tiempo. Siendo n el numero de partículas por unidad de volumen de chorro incidente.

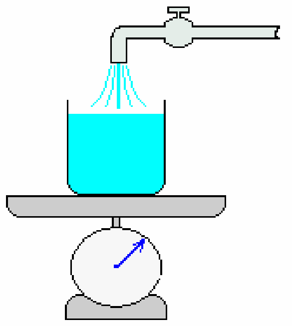
Respuesta. a) $\vec{J} = (2v\cos\theta)\hat{n}$,
b) $F = 2nAmv^2\cos^2\theta$

7. Un nadador de 70 kg se lanza al agua desde el podio de una piscina con una velocidad de 3m/s en la dirección de la figura. Calcular la fuerza ejercida sobre el podio durante los 0,8s que el nadador ejerce el esfuerzo sobre el mismo para impulsarse en el salto.



Respuesta. $\vec{F} = \left(-227\hat{i} - 818\hat{j}\right)\text{N}$

8. Un recipiente de 0,25 kg con capacidad para 5 kg de agua se llena de un caño en 5 s. En el instante en que el recipiente está medio lleno, la balanza lee 3,0 kg. Si no se salpica el agua, ¿Cuál es la velocidad del agua que cae en dicho instante.



Respuesta. 2,45 m/s

9. Una bala de fusil de masa *m* y de velocidad constante v_0, penetra en un bloque de madera fijo; la bala se detiene después de recorrer una distancia *d* con un movimiento uniformemente retardado.
e) Calcular la desaceleración a de la bala, deducir la fuerza de desaceleración.
b) Calcular el tiempo de desaceleración.
c) ¿Cuál es el impulso comunicado a la bala por el bloque? Comparar con la cantidad de movimiento de la bala antes del choque.
Realizar la aplicación numérica para v_0 = 600 m/s, *d* =30 cm, *m* = 40 g

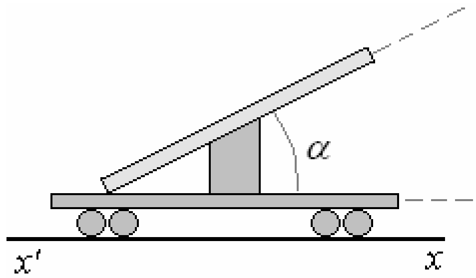
Respuesta. a) $a = \dfrac{v_0^2}{2d} = 6\times 10^5 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

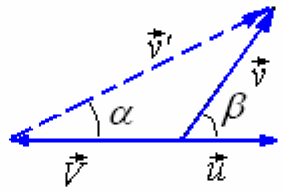
$F = ma = 24\times 10^7\ \text{N}$,

b) $t = \dfrac{v_0}{a} = 10^{-3} s$

c) $J = F\,t$ = 24 N, $J = mv_0$

10. Un cañón fijo sobre un vagón que se puede desplazar si fricción sobre una vía rectilínea horizontal con una masa total *M*. El cañón forma un ángulo α con la horizontal.
a) Si el vagón está en reposo el cañón dispara un obús de masa *m*, determinar la relación entre las velocidades *v* y *V* del obús y del cañón.
b) Si la velocidad del obús relativa al cañón es *v'* (forma un ángulo θ con V), determinar la relación entre v' y V.
c) El vagón se desplaza con una velocidad rectilínea constante *u* sobre la vía antes del disparo. El obús tiene una velocidad *v* relativa al cañón en movimiento a la velocidad *V* después del disparo:
Calcular la variación de la velocidad (*u* - *v*) del vagón
Encontrar la velocidad $\vec{v}$ del obús.
d) Deducir del cálculo anterior el alcance *R* del obús.





Respuesta. a) $v = -\dfrac{M}{m}\dfrac{V}{\cos\alpha}$,

b) $v' = -\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\dfrac{V}{\cos\beta}$,

c) $u - v = \dfrac{m}{m+M} v'\cos\beta$,

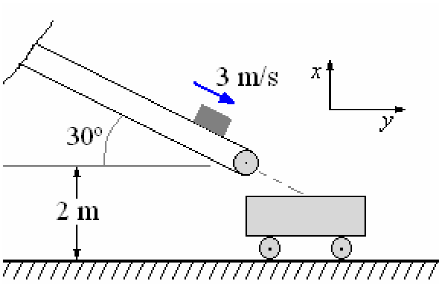
$\vec{v} = \left(u + Mv'\cos\beta\right)\hat{i} + v'\text{sen}\beta\hat{j}$

d) $R = \dfrac{2v^2}{g}\text{sen}\beta\left(u + \dfrac{Mv^2}{M+m}\cos\beta\right)$

11. Desde la plataforma de un tren que se mueve con una velocidad de 10 m/s se arroja un paquete de 25 kg, Este es cogido en el aire por una persona que está junto a la vía. Desde el tren se observa que esta persona retrocede con una velocidad de 7,5 m/s. ¿Cuál es la masa de la persona?
Respuesta. 75 kg.

12. Un muchacho está en medio de un lago congelado sin fricción de tal manera que no puede moverse. Para poder salir él lanza su sombrero de masa 0,5 kg hacia el norte con una velocidad de 12 m/s a 53' con la horizontal. Si la masa del muchacho es 60 kg y el radio del lago es 400 metros. ¿Qué pasa7
Respuesta. El muchacho resbala hacia el sur y llega a la orilla 1 h 51 min después.

13. Un paquete de 10 kg se descarga de una cinta transportadora con una velocidad de 3 m/s y cae en una vagoneta de 25 kg. ¿Si la vagoneta está inicialmente en reposo y puede rodar libremente, Cuál es su velocidad final?

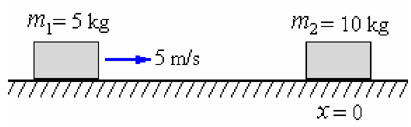


Respuesta. v = 0,732 $\hat{i}$ m/s

14. Un hombre de 75 kg se lanza al agua desde la proa de su bote de 50 kg. La componente horizontal de su movimiento es 1 m/s respecto al bote. Hallar las velocidades del hombre y del bote respecto a un observador en el muelle.
a) Si el bote está inicialmente en reposo
b) Si el bote se movía inicialmente hacia adelante con una velocidad de 2 m/s. No considerar pérdidas de energía debido al agua
Respuesta. a) v_1 = 0,4 m/s , v_2 = 0,6 m/s
b) v_1 = 2,4 m/s , v_2 = 1,4 m/s

15. Un cañón dispara un obús de 2,4 kg hacia arriba. A1canza su máxima altura, 313,6 m y se parte en dos, 0,8 kg y 1,6kg. Las dos partes llegan a tierra simultáneamente. La pieza de 1,6 kg toca tierra a 480 m de la explosión (medida a lo largo del eje x).
a) ¿Cuánto tiempo tomaría al obús volver a tierra si no se hubiera partido?
b) ¿Cuál es la velocidad de cada una de las piezas justamente después de la explosión?
c) Encontrar la cantidad de movimiento de cada pieza justamente antes de tocar tierra.
Respuesta. a) 8 segundos
b) $\vec{v}_{(1,6)} = 60\hat{i}$ m/s (16), $\vec{v}_{(0,8)} = -120\hat{i}$ m/s
c) $\vec{p}_{(1,6)} = 96\hat{i} - 125,44\hat{j}$ kg.m/s ,
$\vec{p}_{(0,8)} = -96\hat{i} - 62,72\hat{j}$ kg.m/s
(El movimiento es en el plano *xy*; g = 9,8 m/s^2)

16. Un bloque de masa 10 kg está en reposo en el origen segundo con masa 5 kg se mueve a lo largo del eje *x* con velocidad de magnitud v_0 = 5 m/s. Los bloques choca quedan unidos. y se mueven en el eje *x*. La superficie tiene fricción despreciable.
a) ¿Cuando el bloque de 5 kg está en x = -10 donde está centro de masa?
b) Encontrar la cantidad de movimiento de la masa de 5 kg, de la masa de 10kg y del centro de masa antes del choque.
c) ¿Cuál es la velocidad del sistema combinado?

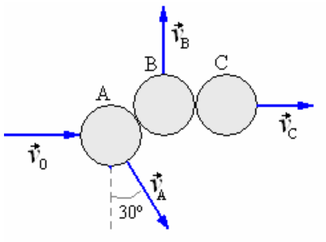


Respuesta. a) x_{CM} = - 3 1/3 m,
b) $\vec{p}_1$ = 25 $\hat{i}$ kg.m/s, $\vec{p}_2 = 0$, $\vec{p}_{CM}$ = 25 $\hat{i}$ kg.m/s
c) $\vec{v}$ = 1 2/3 $\hat{i}$ m/s

17. Dos bolas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 están suspendidas del cielorraso por dos hilos inextensibles de la misma longitud ℓ ; P_1 y P_2 están en contacto sin presión con los hilos verticales.
Se saca P_1 de la posición de equilibrio a un ángulo θ_0 manteniendo el hilo tenso, luego se suelta sobre P_2.
Calcular:
a) La velocidad de P_1 justo antes del choque.
b) Las velocidades v'_1 y v'_2 de P_1 y P_2 inmediatamente después del choque perfectamente elástico. Discutir este resultado para valores relativos de las masas m_1 y m_2.
c) Las alturas de las posiciones limites de P_1 y P_2 después del choque.
Aplicación numérica; ℓ = l m . θ_0 = 60º, $m_2 = m_1/2$
Respuesta. a) $v_1 = \sqrt{2g\ell\cos\theta_0}$, $v_1 = 3{,}13\ \text{m/s}$,
b) $v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $v'_1 = 1{,}05\ \text{m/s}$

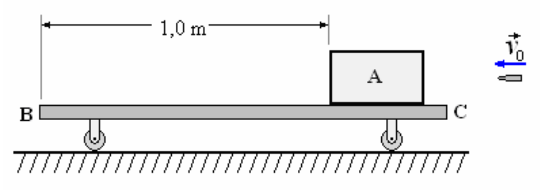
Para $m_1 > m_2$ v_1 y v'_1 tienen el mismo sentido.
Para $m_2 > m_1$ v'_1 tiene sentido contrario de v_1.
$v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = 4{,}22\ \text{m/s}$
v'_2 en todo caso tiene el mismo sentido que v_1
c) $h_1 = \dfrac{v'^2_1}{2g} = 0{,}056\ \text{m}$, $h_2 = \dfrac{v'^2_2}{2g} = 0{,}91\ \text{m}$

18. En un Juego de billar, la bola A está moviéndose con 1a velocidad $\vec{v}_0$ = 31 m/s cuando choca con las bolas B y C que están juntas en reposo. Tras el choque, se observan la tres bolas moviéndose en las direcciones que muestra 1a figura, con θ = 30º. Suponiendo Superficies lisas y choques perfectamente elásticos, hallar los módulos de la velocidades, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$.



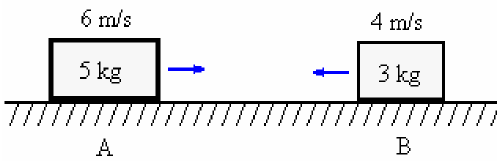
Respuesta. v_A = 1,5 m/s , v_B = 1,29 m/s , $\vec{v}_C$ 2,25 m/s

19. Se dispara una bala de 39 g con una velocidad de 500 m/ contra un bloque A de 5 kg de El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y la plataforma es 0,5. Si la masa de la plataforma es 4 kg y puede rodar libremente, hallar:
a) La velocidad final de la plataforma y e1 bloque.
b) La posición final del bloque sobre la plataforma.



Respuesta. a) 2,16 m/s b) El bloque se detiene a 0,33 m de B.

20. La figura muestra dos masas sobre una superficie con rozamiento despreciable. El coeficiente de restitución entre Las dos masas es 0,73; determinar:
a) Sus velocidades después del choque.
b) La pérdida de energía durante el choque.

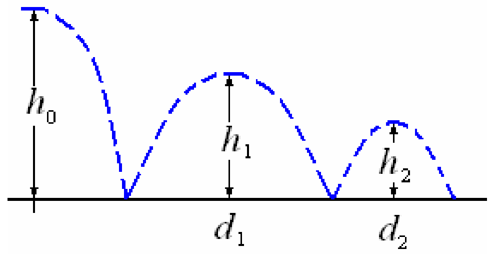


Respuesta: a) $\vec{v}_A$ = - 0,563 $\hat{i}$ m/s, $\vec{v}_B$ = 6,94 $\hat{i}$ m/s
b) ΔK = 41 J

21. Se deja caer una pelota al suelo desde una altura *y*. Si el coeficiente de restitución es ε, escribir expresiones para el tiempo total que tardará la pelota en dejar de dar bote y la distancia total que recorrerá en este tiempo.

Respuesta. $t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}\dfrac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}$, $s = y\dfrac{(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)}$

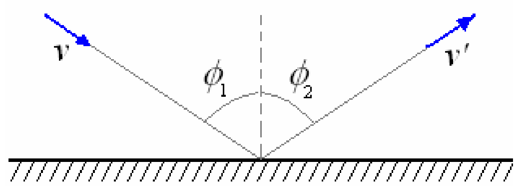
22. Una bola cae desde una altura *h* = 0,900 m sobre una superficie lisa. Si la altura del primer rebote es h_1 = 0,800 m y la distancia d_1 = 0,400 m, calcular:
a) El coeficiente de restitución.
b) La altura y longitud del segundo rebote.



Respuesta. a) 0,943 m, b) 0,711 m, 0,37 m

23. Un objeto de 5 kg que se mueve con una velocidad de 1,2 m/s choca directamente con un objeto de 20 kg que está en reposo. Se observa que el objeto menor rebota con una velocidad de 0,6 m/s
a) ¿Cuál es la pérdida de energía cinética por el impacto?
b) ¿Cuál es el coeficiente de restitución?
Respuesta: a) ΔK = - 0,675 J, b) ε = 0,875

24. Una bola choca contra un plano liso formando un ángulo ϕ_1 con la normal del mismo y rebota con un ángulo ϕ_2. Encontrar La expresión correspondiente al coeficiente de restitución



Respuesta. $\varepsilon = \dfrac{\tan\phi_1}{\tan\phi_2}$

25. Ira partícula de masa m_1 tiene un choque frontal perfectamente elástico con una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo. ¿Cuál es la pérdida relativa de energía cinética correspondiente a la partícula . m_1

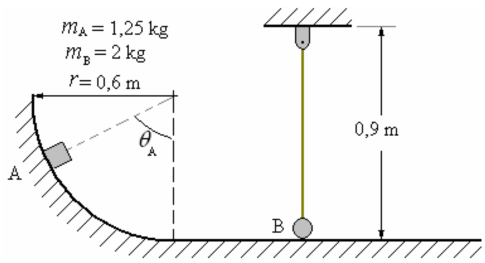
Respuesta. $\dfrac{\Delta K}{K} = 4\dfrac{m_1}{m_2\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2}$

26. Una masa m_1 se mueve a lo largo del eje *x* con una velocidad v_0 a lo largo de una mesa sin fricción. Choca con otra nasa, la cual está inicialmente en reposo. La masa m_2 sale a lo largo del eje *y*. Si se pierde la mitad de la energía cinética original en el choque.
¿Cual es el módulo de la velocidad y con que ángulo sale después de la colisión?

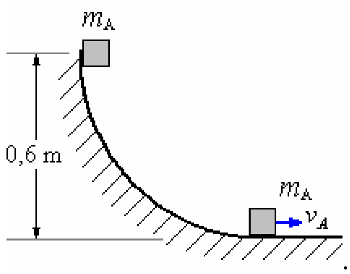
Respuesta. $v_2 = m_1 v_0 \sqrt{\dfrac{3}{2\left(m_2^2 + m_1 m_2\right)}}$,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{m_1 v_0}{m_2 v_2}\right) = \cos^{-1}\left[\frac{2}{3}\frac{(m_1 + m_2)}{m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

27. Se deja en libertad el bloque A cuando θ_A = 90 y desliza sin rozamiento, hasta chocar con la bola B. Si el coeficiente de restitución es 0,90, calcular
a) La velocidad de B inmediatamente después del choque.
b) La máxima tracción que soporta el hilo que sostiene a B
c) La altura máxima a la que se eleva B.



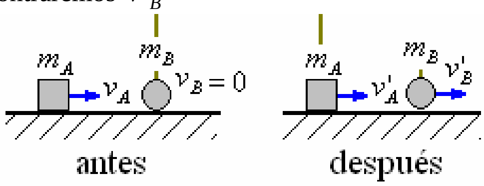
Solución.
a) Por conservación de energía encontraremos v_A.



$$m_A g r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2gr} = \sqrt{2(9{,}8)(0{,}6)}$$
= 3,43 m/s

Por conservación de la cantidad de movimiento encontraremos v'_B



v_A = 3,43 m/s v_B = 0

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow$$

$$(1{,}25)(3{,}43) = 1{,}25 v'_A + 2 v_B \Rightarrow$$

$$v'_A + 1{,}6 v'_B = 3{,}43 \qquad (1)$$

El coeficiente de restitución es 0,90

$$\varepsilon = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0{,}9$$

$$\frac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0{,}9 \Rightarrow \frac{v'_B - v'_A}{3{,}43} = 0{,}9 \Rightarrow$$

$$v'_B - v'_A = 0{,}9(3{,}43) = 3{,}09 \qquad (2)$$

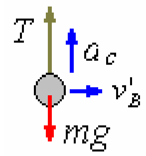
Sumando (1) y (2):

$$v'_B + 1{,}6 v'_B = 3{,}09 + 3{,}43$$

La velocidad de B inmediatamente después del choque es

v'_B = 2,51 m/s

b) El diagrama del cuerpo libre de B, inmediatamente después del choque

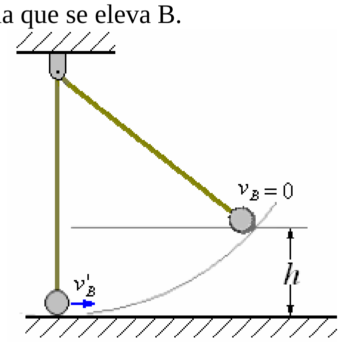


$$\sum F_r = m_B a_c \Rightarrow T - m_B g = m_B \frac{v'^2_B}{0{,}9} \Rightarrow$$

$$T = m_B\left(\frac{v'^2_B}{0{,}9} + g\right)$$

$$= 2\left(\frac{2{,}51^2}{0{,}9} + 9{,}8\right) = 33{,}6 \text{ N}$$

c) Por conservación de energía encontramos la altura máxima a la que se eleva B.



$$\frac{1}{2} m_B v'^2_B = m_B g h \Rightarrow$$

$$h = \frac{v'^2_B}{2g} = \frac{2{,}51^2}{2(9{,}8)} = 0{,}321 \text{ m}$$

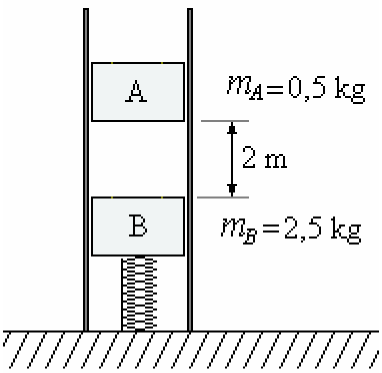
28. Un bloque de masa *M* está en reposo sobre una masa sin fricción. Lo podemos golpear con un bloque que se quede adherido o con un bloque muy duro con el que se producirá un choque perfectamente elástico. Ambos bloques tienen masa *m* y pueden ser lanzados can velocidad V_0 ¿En cuál de los casos el bloque *M* se moverá más rápidamente? (considerar el movimiento en una sola dimensión).

Respuesta. a) $v'_2 = \dfrac{m}{m+M} V_0$,

b) $v'_2 = \dfrac{2m}{m+M} V_0$

En el segundo caso es el doble que en el primero.

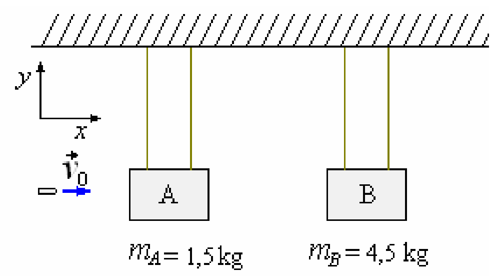
29. Un cilindro A cae sobre otro B apoyado sobre un resorte de constante k = 3000 N/m desde una altura de 2m. Si el choque es perfectamente plástico, calcular:
a) El desplazamiento máximo de B.
b) La pérdida de energía en el choque.



Respuesta. a) 3,47 cm , b) 8,18 J

30. Los parachoques se diseñan de tal manera que un automóvil de 1600 g que golpea una pared rígida a la velocidad de 12 km/h no sufra daño. Suponiendo que ese choque es perfectamente plástico. Calcular:
a) La energía absorbida por el parachoques durante el impacto.
b) La velocidad a la que el automóvil puede golpear a otro de iguales características, que está en reposo sin dañarse.
Respuesta. a) 8890 J b) 24 km/h

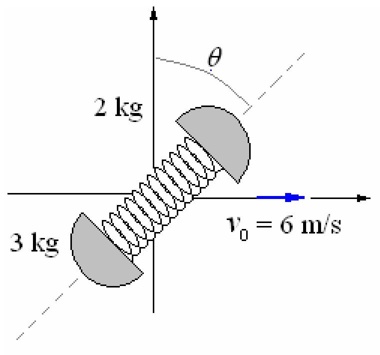
31. Se dispara una bala de 25g en dirección horizontal. La bala atraviesa el bloque A y queda alojada dentro de bloque B. Por dicha causa los bloques A y B comienzan a moverse con velocidades iniciales de 2,4 y 1.8 m/s. respectivamente.
Hallar:
a) La velocidad inicial v_0 de la bala.
b) La velocidad de la bala en el trayecto entre el bloque A y el B.



Respuesta. a) $470\hat{i}\ m/s$ b) 3261 m/s

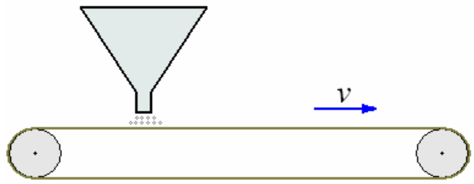
32. Una explosión rompe un objeto en dos piezas una de las cuales tiene 1,5 veces la masa de la otra. Si se liberan 4500 J en la explosión. ¿Cuánta energía cinética adquiere cada pedazo?
Respuesta. 1800 J, 2700 J

33. Cuando se rompe la cuerda que une las partículas A y B, el resorte comprimido las obliga a separarse (el resorte no está unido a las partículas). La energía potencial del resorte comprimido es de 60 J y el conjunto posee la velocidad inicial $\vec{v}_0$ Si se rompe la cuerda cuando $\theta = 30^\circ$, hallar la velocidad resultante de cada partícula



Respuesta. $\vec{v}_A = 9\hat{i} + 5{,}2\hat{j}$ m/s y
$\vec{v}_B = 4\hat{i} - 3{,}5\hat{j}$ m/s

34. Un depósito suelta arena a una banda transportadora razón de 75 kg/s. Si la banda se mueve con una rapidez constate v = 2,2 m/s. ¿Qué fuerza se necesita para mantenerla en movimiento? No tomar en cuenta la fricción



Respuesta. 165 N

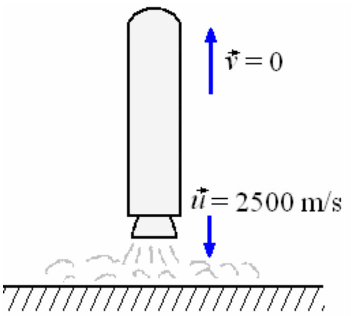
35. Un trineo lleno de arena se desliza sin fricción por una pendiente de 30º. La arena se escapa por un agujero en el trineo a un ritmo de 2 kg/s. Si el trineo parte del reposo con una masa inicial de 40 kg. ¿Cuánto tardó en recorrer 120m a lo largo de la pendiente?
Respuesta. 7 segundos

36. Un cohete que consume combustible a un ritmo constante k se encuentra sometido a la acción de una fuerza externa constante de valor F además de la fuerza de reacción de los gases. La masa inicial del cohete más combustible es m_0. La configuración de la tobera de escape es de tal manera que la velocidad relativa de los gases es igual al negativo de la velocidad v del cohete.
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) Obtener $v_{(t)}$.

Respuesta. a) $F = (m_0 - kt)\dfrac{dv}{dt} - kv$,

b) $v_{(t)} = \dfrac{Ft}{m_0}$

37. Un cohete experimental se proyecta de forma que pueda mantenerse inmóvil sobre el suelo. El cuerpo del cohete tiene una masa de 1200 kg y la carga de combustible inicial es de 3600 kg,. e1 combustible se quema y se expulsa con una velocidad de 2500 m/s. Hallar la velocidad de consumo de combustible necesario.
a) en el momento de encender el cohete.
b) cuando se consume la última partícula de combustible.



Respuesta. a) 18,84 kg/s . b) 4.71 kg/s

38. Una bala de masa *m* se dispara con una velocidad $\vec{v}_B = -v_B\hat{i}$, si para $x = x_0$, $y = a$ (permanece constante) ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular con respecto al origen en función de *x*?

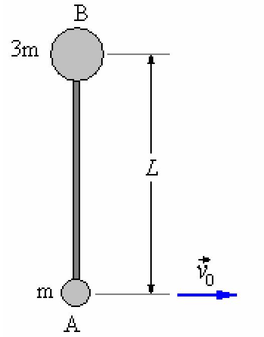
Respuesta. $\vec{L} = mv_0 a\hat{k}$

39. Un obús de masa m se dispara de un cañón en el origen, El obús se mueve en el plano y con una velocidad inicial de magnitud v_0 y un ángulo θ con el eje *x*.
a) ¿Cuál es el torque sobre el obús, con respecto al origen en función del tiempo?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del, obús con respecto al origen en función del tiempo?
c) Comprobar que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Respuesta. a) $\vec{\tau} = -v_0 mgt\cos\theta\,\hat{i}$

b) $\vec{L} = -\dfrac{1}{2}v_0 mgt^2\cos\theta\,\hat{i}$

40. Dos esferas pequeñas A y B están unidas por una varilla rígida de longitud ℓ y masa despreciable. Las dos masas reposan sobre una superficie lisa horizontal cuando se comunica repentinamente a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$. Hallar: a) La cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del sistema respecto al centro de masa.
b) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 90º.
c) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 180º.

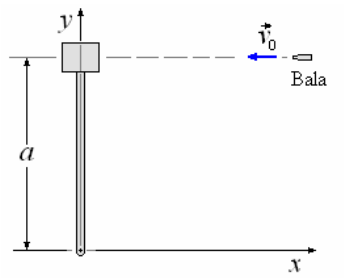


Respuesta: a) $\vec{p} = mv_0\hat{i}$, $\vec{L} = \dfrac{3}{4}m\ell v_0\hat{k}$

b) $\vec{v}_A = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} + \dfrac{3}{4}v_0\hat{j}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} - \dfrac{1}{4}v_0\hat{j}$

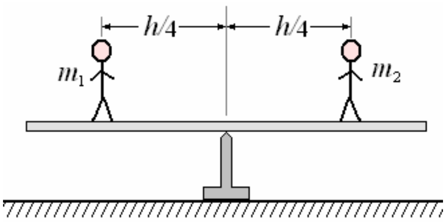
c) $\vec{v}_A = -\dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$

4l. Se tiene una varilla rígida de masa despreciable sujeta a un eje sin rozamiento de tal manera que la varilla pueda rotar libremente. Al otro extremo de la varilla hay un bloque de masa *M*. Si se dispara una bala de masa *m* con una velocidad v_0 tal como se muestra en la figura. ¿Si la bala se incrusta en el bloque, cuál será la velocidad angular del bloque alrededor del eje7



Respuesta. $\omega = \dfrac{mv_0}{(m+M)a}$

42. Una barra de longitud b está pivotada en su centro de tal manera que puede rotar en el plano horizontal. Dos niños están sobre la barra en las posiciones mostradas en la figura 7.59. a cual está rotando con una velocidad angular en el sentido antihorario visto desde arriba. Si el niño de masa m_1 empieza a moverse hacia el centro tal que su distancia a el es $b/4 - at^2$, ¿Cuál debe ser el movimiento del niño de masa m_2 para que la velocidad angular de la barra permanezca constante? (La masa de la barra es despreciable),



Respuesta. Debe cambiar su distancia al centro de acuerdo a la ecuación $\sqrt{\frac{b^2}{16}+\frac{m_1}{m_2}at^2\left(\frac{b}{2}-at^2\right)}$

43. Un taco golpea a una bola de billar ejerciendo una fuerza promedio de 50 N durante un tiempo de 0,01 s, si la bola tiene una masa de 0,2 kg, ¿qué velocidad adquirió la bola luego del impacto?.

Respuesta. v_f = 2,5 m/s

44. Una fuerza actúa sobre un objeto de 10 kg aumentando uniformemente desde 0 hasta 50 N en 4 s. ¿Cuál es la velocidad final del objeto si partió del reposo?.

Respuesta. v_f = 10 m/s

45. Se rocía una pared con agua empleando una manguera, la velocidad del chorro de agua es de 5 m/s, su caudal es de 300 cm^3/s, si la densidad del agua es de 1 g/cm^3 y se supone que el agua no rebota hacia atrás, ¿cuál es la fuerza promedio que el chorro de agua ejerce sobre la pared?.

Respuesta. F = 1,5N

46. Se dispara horizontalmente una bala de 0,0045 kg de masa sobre un bloque de 1,8 kg de masa que está en reposo sobre una superficie horizontal, luego del impacto el bloque se desplaza 1,8 m y la bala se detiene en él. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0,2, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 1073 m/s

47. Se dispara una bala de 0,01 kg de masa contra un péndulo balístico de 2 kg de masa, la bala se incrusta en el péndulo y éste se eleva 0,12 m medidos verticalmente, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 309,8 m/s

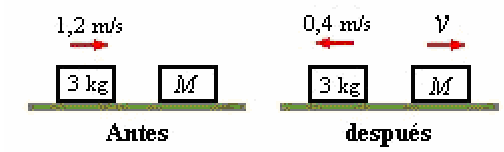
48. Una partícula A de masa m_A se encuentra sujeta por medio de un resorte comprimido a la partícula B de masa $2m_A$, si la energía almacenada en el resorte es de 60 J ¿qué energía cinética adquirirá cada partícula luego de liberarlas?.

Respuesta. $E_{c\,Bf}$ = 20 J

49. Un cuerpo de masa m_1 = 2 kg se desliza sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad inicial v_{1i} = 10 m/s, frente a él moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentre el cuerpo de masa m_2 = 5 kg cuya velocidad inicial es v_{2i} = 3 m/s, éste tiene adosado un resorte en su parte posterior, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?.

Respuesta. Δx = 0,28 m

50. Un bloque de 3,0 kilogramos, moviéndose sobre una superficie sin fricción con una velocidad de 1,2 m/s, tiene una colisión perfectamente elástica con un bloque de la masa M en el reposo. Después de la colisión el bloque de 3,0 kilogramos retrocede con una velocidad de 0,4 m/s.



a) La masa M es:
b) La velocidad del bloque de masa M después de la colisión es:
c) Los bloques están en el contacto para 0,20 s. La fuerza media en el bloque de 3,0 kilogramos, mientras los dos bloques están en contacto, es:
Respuesta. a) 6,0 kg, b) 0,8 m/ s, c) 24 N

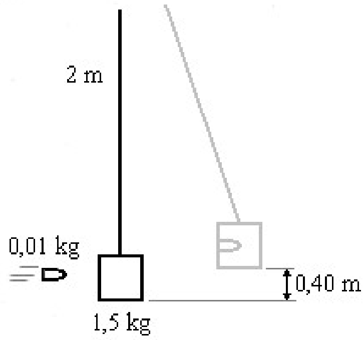
51. El bloque de 8 kilogramos tiene una velocidad v y es detrás del bloque de 12 kilogramos que tiene una velocidad de 0,5 m/s. la superficie es de fricción despreciable. Los bloques chocan y se juntan. Después de la colisión, los bloques tienen una velocidad común de 0,9 m/s.

a) La pérdida de energía cinética de los bloques debido a la colisión está la más cercana a:

b) El impulso sobre el bloque de12 kg debido a la colisión es
Respuesta. a) 2,4 J, b) 4,8 N s

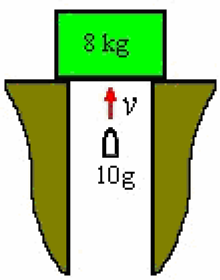
52. Una bola de acero de 72 g se lanza desde el reposo y cae verticalmente sobre una placa de acero. La bola golpes la placa y está en contacto con ella por 0,5 ms, la bola elásticamente, y vuelve a su altura original. El intervalo de tiempo para el viaje es 0,30 s.
a) La fuerza promedio ejercida sobre la bola durante el contacto es
b) Asumiendo que la placa no se deforma durante el contacto. La energía elástica máxima almacenada por la bola es:
Respuesta. a) 420 N, b) 0,08 J

53. Una bala de la masa 0,01 kilogramos que se mueve horizontalmente golpea un bloque de madera de masa 1,5 kilogramos suspendida como péndulo. ¿La bala se aloja en la madera, y juntos giran hacia arriba una distancia de 0,40 m. cuál era la velocidad de la bala momentos antes del impacto con el bloque de madera? La longitud de la cuerda es 2 metros.



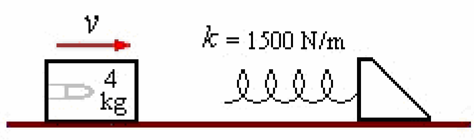
Respuesta. 66,7m/s

54. Una bala de 10 g se dispara verticalmente en un bloque de 8 kilogramos. El bloque se levanta 3 mm. La bala penetra en el bloque en un intervalo de tiempo de 0,001 s. asume que la fuerza en la bala es constante durante la penetración.



a) La energía cinética inicial de la bala es:
b) El impulse en el bloque debido a la captura de la bala es:
c) La penetración de la bala en el bloque, es:
Respuesta. a) 190 J, b) 2,0 Ns, c)) 10 cm.

55. Una bala de 8 g se tira en un bloque de 4,0 kilogramos, en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. La bala se aloja en el bloque. El bloque se mueve hacia el resorte y lo comprime 3,0 centímetros. La constante de la fuerza del resorte es 1500 N/m.

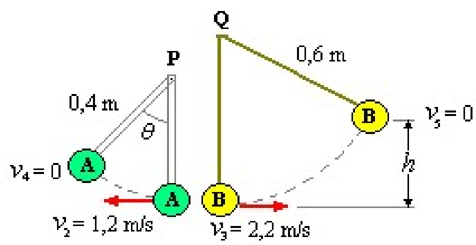


a) La velocidad de la bala es:
b)) El impulso del bloque (con la bala), debido al resorte, durante el tiempo en el cual el bloque y el resorte están en contacto está es:
Respuesta. a) 290 m/s, b) 4,7 N.s

56. En una demostración una bola de acero pequeña de la masa *m* se sostiene sobre una superbola de masa *M* (superbola es una bola de goma del coeficiente de restitución muy alto). La combinación junta se suelta del reposo. Cuando el superbola golpea el piso rebota casi elásticamente, golpeando a bola de acero que todavía está moviéndose hacia abajo. Esta colisión es también bastante elástica, y consecuentemente bola de acero se golpea y es lanzada derecho hasta una altura *H*. Si *h* es la altura de la cual los objetos fueron soltados, y $M >> m$, entonces bola de acero pequeña se levantará a una altura:
Respuesta. 9 *h*

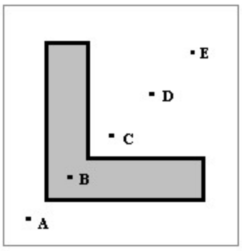
57. Una muchacha de masa 50 kilogramos lanza una bola de la masa 0,1 kilogramos contra una pared. La bola golpea la pared horizontalmente con una velocidad de 20 m/s, y rebota con esta misma velocidad. ¿La bola está en contacto con la pared 0,05 s, cuál es la fuerza media ejercida sobre la bola por la pared?
Respuesta. 80N

58. La bola A, de la masa 3,0 kilogramos, se une a una barra ligera de 0,4 m, que gira libremente en P. La bola B está suspendida de Q por una cuerda de 0,6 m y está en reposo. La bola A se levanta a cierto nivel y se suelta. La bola A desciende, y tiene una velocidad v_1 = 3,6 m/s en el fondo, antes de chocar a la bola B. Las velocidades de las bolas A y B después del choque son: v_2 = - 1,2m/s y v_3 =2,2 m/s...



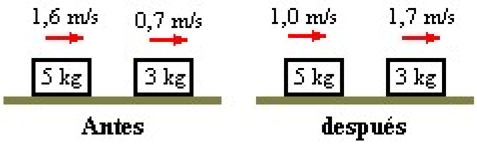
a) La masa de la bola B es:
b) La magnitud del impulso sobre la bola A es:
c) La bola A rebota y gira un ángulo θ, donde la velocidad v_4 es cero. El valor de θ es:
d) La bola B se eleva hasta la altura *h*, donde la velocidad v_5 es cero. El valor de *h* es:
Respuesta. a) 6,6 kg, b) 14.4 N. s, c) 35º d) 0,25 m

59. Una pieza en forma de L se corta de una hoja uniforme de metal. ¿Cuál de los puntos indicados es el más cercano al centro de la masa del objeto?



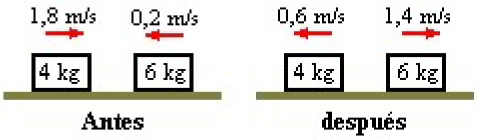
Respuesta. C

60. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

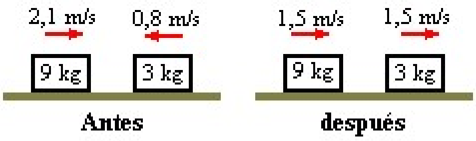


Respuesta. Parcialmente inelástico.

61. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



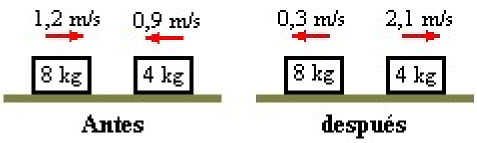
Respuesta. Perfectamente elástico.



62. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

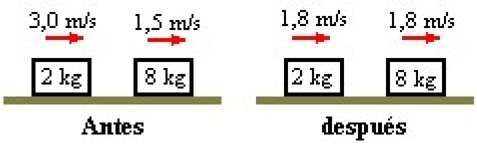
Respuesta. no posible porque la cantidad de movimiento no se conserva.

63. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



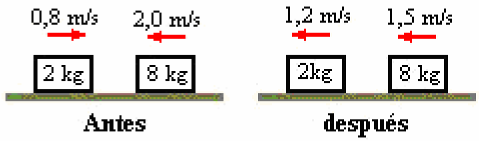
Respuesta. Caracterizado por un incremento en energía cinética.

64. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



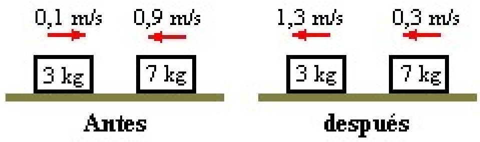
Respuesta. Completamente inelástico

65. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



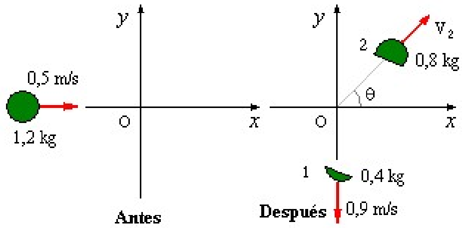
Respuesta. Parcialmente inelástico

66. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



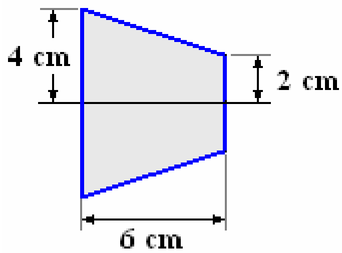
Respuesta. Parcialmente inelástico

67. Un resorte activa una bomba de juguete de 1,2 kg sobre una superficie lisa a lo largo del eje x con una velocidad de 0,50 m/s. en el origen O, la bomba estalla en dos fragmentos. El fragmento 1 tiene una masa de 0,4 kilogramos y una velocidad de 0,9 m/s a lo largo del eje y negativo.



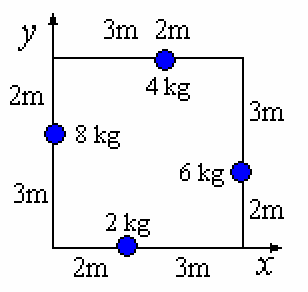
a) La componente en x de la cantidad de movimiento del fragmento 2 debido a la explosión es:
b) El ángulo θ, formado por el vector velocidad del fragmento 2 y el eje x es:
c) La energía liberada por la explosión es:
Respuesta. a) 0., N. s, b) 31º, c) 0,32 J

68. Un cono trunco homogéneo de metal tiene una base circular mayor de radio 4 cm y la menor de radio 2 cm. Su altura es 6 cm. ¿A qué distancia de su diámetro mayor está situado el centro de masa?



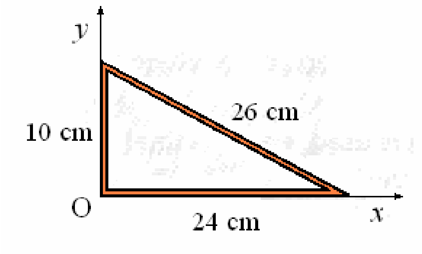
Respuesta. 2,36 cm

69. Cuatro masas puntuales se colocan como se muestra en la figura: ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (23, 2,8)

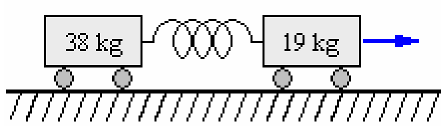
70. Un alambre uniforme de longitud 60 cm y masa 60 g , está doblado en un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (10, 3)

71. Una partícula de la masa 5,01 x 10^{-27} kilogramos, moviéndose a 1,88 x 10^{5} m/s, choca con una partícula idéntica que inicialmente está en el reposo. Después de la interacción, las partículas (que no pueden ser distinguidas) se mueven con los ángulos 55,4º y 34,6º, ambos son medidos con respecto a la dirección original del movimiento. ¿Qué velocidades finales tienen las partículas?
Respuesta. 1,55 x 10^{5} m/s a 346º,
1,07 x 10^{5} m/s a 55,4º

72. Un carro de 19 kg está conectado por medio de un resorte comprimido con un carro 38 kg. Los dos carros se están moviendo a la derecha a una velocidad de 25 m/s cuando el resorte se desenrolla y propulsa repentinamente el carro de 19 kg hacia adelante con una velocidad de 27 m/s. encontrar la velocidad del segundo carro con respecto al centro de la masa del sistema.



Respuesta. 1 m/s
7
3. Una fuerza de 5,3 N es necesaria para sujetar a un paraguas en un viento fuerte. Si las moléculas del aire tienen una masa de 4,7 x 10^{-26} kilogramos, y cada una golpea al paraguas (sin rebotar) con una velocidad de 2,0 m/s en la misma dirección, ¿cuántos átomos golpean al paraguas cada segundo? Asuma que el viento sopla horizontalmente para no tomar en cuenta la gravedad.
Respuesta. 5,6 x 10^{25} por Segundo

74. Un cohete debe ser lanzado al espacio donde no hay campo gravitacional. el 81% de la masa inicial del cohete es combustible y este combustible se expulsa con una velocidad relativa de 2300 m/s. si se asume que todo el combustible será utilizado, encuentra la velocidad final de la última porción de combustible expulsado relativo a un observador estacionario.
Respuesta. 1500 m/ s