

Capítulo 2

Introducción al álgebra lineal

2.1 Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.1 Una matriz de orden $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números acomodados o dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los elementos $a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$, y se conocen como las entradas de la matriz A ; el elemento de A ubicado en la intersección de la i -ésima fila y la j -ésima columna se denota por a_{ij} . La matriz A se denota brevemente por $A = [a_{ij}]$. La i -ésima fila de A se denota por $A_{(i)} = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$ y puede considerarse como un vector de, la j -ésima columna de A se representa por

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

y puede considerarse como un vector de \mathbb{R}^m

Las matrices se denotan por letras mayúsculas A, B, C, \dots , etc.

Observación 2.1 Si $m = n$, se dice que la matriz es cuadrada.

En lo que sigue una matriz de m filas y n columnas será denotada por $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ o simplemente por A .

Ejemplo 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

es una matriz de orden 2×4 y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Definición 2.2 (Igualdad de matrices). Dos matrices A y B del mismo orden son iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales. En tal caso se usa la notación $A = B$.

En símbolo:

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, del mismo tamaño, son iguales si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, para cada $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Denotemos por $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre \mathbb{R} .

2.1.1 Adición de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, entonces

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2.1.2 Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz A es otra matriz kA la cual se obtiene multiplicando cada elemento de A por k .

$$k \cdot A = k \cdot [a_{ij}] = [k a_{ij}], \quad k \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, si k es un escalar y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

Propiedades

Para A, B y C matrices de orden $m \times n$ cualesquiera y para $r, s \in \mathbb{R}$, se cumplen

1. $r(A + B) = rA + rB$
2. $(r + s)A = rA + sA$
3. $r(sA) = (rs)A$
4. $1A = A$.

2.1.3 Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices no está definida de manera obvia; esto es, el producto de dos matrices *no* se obtiene multiplicando sus componentes correspondientes.

Antes de definir la multiplicación matricial, se requiere una definición previa.

Definición 2.3 Sea $A = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]$ una matriz o vector fila n -dimensional y sea

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

una matriz o vector columna n -dimensional. Entonces el producto, AB , de A y B está dado por

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

Obsérvese que el producto de un vector fila y un vector columna no se puede definir a menos que sean de tamaños compatibles. Además, el vector fila debe escribirse a la izquierda.

Ejemplo 2.2 El producto de $A = [3 \ 2 \ 5]$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ es

$$AB = [3 \ 2 \ 5] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3(4) + 2(3) + 5(2) = 12 + 6 + 10 = 28.$$

Usando la definición de un vector fila por un vector columna se puede definir la multiplicación matricial.

Definición 2.4 Dadas las matrices

$$A = [a_{ij}] \text{ de orden } m \times \boxed{p}$$

y

$$B = [b_{ij}] \text{ de orden } \boxed{p} \times n;$$

el producto $A \times B$, en ese orden, es la matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$ cuya componente

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

es el producto de la fila i de A y la columna j de B .

Ejemplo 2.3 Determinar el elemento de la segunda fila y la tercera columna del producto

$$AB \text{ de las matrices } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución El elemento a determinar, c_{23} , se obtiene multiplicando la fila 2 de A por la columna 3 de B .

$$c_{23} = [2 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9.$$

Ejemplo 2.4 Calcular el producto $AB = C$ donde

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución La matriz producto C es de orden 2×2 , esto es, tiene 4 elementos.

$$\begin{aligned} c_{11} &= (\text{fila 1 de } A) \times (\text{columna 1 de } B) = 2(3) + 1(2) + (-3)1 = 5 \\ c_{12} &= (\text{fila 1 de } A) \times (\text{columna 2 de } B) = 2(-1) + 1(4) + (-3)5 = -13 \\ c_{21} &= (\text{fila 2 de } A) \times (\text{columna 1 de } B) = 4(3) + (-5)2 + 1(1) = 3 \\ c_{22} &= (\text{fila 2 de } A) \times (\text{columna 2 de } B) = 4(-1) + (-5)4 + 1(5) = -19 \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -19 \end{bmatrix}$.

Observación 2.2 Dadas dos matrices, por ejemplo, $A_{3 \times 3}$ y $B_{3 \times 4}$ es posible efectuar $AB = C_{3 \times 4}$, debido a que sus tamaños son compatibles, es decir, el número de columnas de A es igual al número de filas de B ; sin embargo, no es posible calcular BA .

Ejemplo 2.5 Hallar todas las matrices cuadradas A de orden 2×2 que conmutan con la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces $AB = BA$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+2b & -b \\ c+2d & -d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} a+2b = a \dots (1) \\ -b = b \dots (2) \implies b = 0 \\ c+2d = 2a-c \dots (3) \\ -d = 2b-d \dots (4) \end{cases}$$

De (3) : $c+2d = 2a-c \implies d = a-c$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{bmatrix}, a, c \in \mathbb{R}.$$

2.1.4 Matrices especiales

1. **Matriz diagonal.** Es la matriz cuadrada $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

en donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Es decir

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es decir, los valores λ_i se ubican en la diagonal principal.

2. **Matriz identidad.**- Llamada también matriz unidad, es un caso particular de matriz diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Se representa por I_n o simplemente por I .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad fundamental

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

3. **Matriz triangular superior.**- Es la matriz cuadrada que verifica $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Ejemplo 2.6

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix},$$

es una matriz triangular superior.

4. **Matriz inversa** Sea A una matriz cuadrada de orden n . Se dice que A es invertible si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que: $AB = BA = I$.

B se llama inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$

A se llama inversa de B y se denota por $A = B^{-1}$

Ejemplo 2.7 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ entonces $AB = BA = I$, por lo que $B = A^{-1}$

Los métodos para determinar la inversa de una matriz se verán más adelante, sin embargo se debe tener en cuenta que no toda matriz cuadrada A es inversible.

Propiedades

Supongamos que existen las inversas de A y B , entonces se cumplen

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$ (k escalar)

2.1.5 Transformaciones elementales con las filas de una matriz

Son operaciones con matrices que no modifican ni su orden ni su rango. Son transformaciones elementales las siguientes.

1. El intercambio de la fila i y la fila j . Se denota por f_{ij} .

2. El producto de todos los elementos de la fila i por una constante $k \neq 0$. Se denota por kf_i .
3. La suma de los elementos de la fila i con los correspondientes de la fila j multiplicados por una constante $k \neq 0$. Se denota por $f_i + kf_j$.

Ejemplo 2.8 Con la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ e pueden efectuar las transformaciones

$$1. f_{23} : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \quad 2. 4f_2 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 16 & 36 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad 3. f_3 - 2f_1 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Rango de una matriz

El rango de una matriz $A_{m \times n}$ es el número real r si el determinante de al menos uno de sus menores cuadrados de orden r es distinto de cero, siendo nulos los correspondientes a todos los menores cuadrados de orden $r + 1$, si es que existen.

Definición 2.5 El rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ es igual a 2, ya que el determinante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ es distinto de cero,}$$

siendo $|A| = 0$. En realidad, el cálculo del rango de una matriz mediante la definición anterior puede ser muy laborioso si aumenta el orden de la matriz, de ahí que es conveniente encontrar algún método que simplifique estos cálculos, para lo cual es necesario conocer los siguientes conceptos.

2.1.7 Matrices Equivalentes

Dos matrices A y B se llaman equivalentes, lo que se denota por $A \sim B$, si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales filas.

Propiedad 1 Las matrices equivalentes tienen el mismo orden y el mismo rango.

Ejemplo 2.9 A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ se puede obtener la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ mediante dos transformaciones elementales: } f_2 - 2f_1 \text{ y } f_3 - f_1$$

por lo que $A \sim B$ y $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$.

2.1.8 Matriz escalonada

Una matriz está en su *forma escalonada* si verifica las siguientes condiciones:

1. La primera componente distinta de cero de cualquier fila no nula es $\boxed{1}$.
2. Todas las componentes que se encuentran debajo de $\boxed{1}$ son iguales a cero.
3. El número de ceros que preceden a $\boxed{1}$ aumenta conforme las filas aumentan.

4. Todas las filas nulas (si en caso existen) se ubican en la parte inferior de la matriz.

Observación 2.3 Si en la segunda condición además se verifica que las componentes que se encuentran sobre $\boxed{1}$ son ceros, entonces se dice que la matriz está en su forma escalonada reducida.

Ejemplo 2.10 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; en

cambio la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ no está en la forma escalonada.

Propiedad 2 Toda matriz A puede reducirse a una forma escalonada, mediante transformaciones elementales por filas.

Ejemplo 2.11 Reducir la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ a la forma escalonada.

Solución

Operaciones: 1) $f_{12} : \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\frac{1}{2}f_1$ y $\frac{1}{5}f_2 : \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3) $f_3 - 3f_2 : \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$ 4) $\frac{-1}{2}f_3 : B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$.

En la última matriz el rango se puede calcular directamente. Basta observar que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que $\text{rango}(B) = 3$. Además como A y B son matrices equivalentes, se concluye que $\text{rango}(A) = 3$. Este procedimiento se puede generalizar a todo tipo de matrices, obteniéndose la siguiente.

Propiedad 3 El rango de una matriz A es igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada B equivalente a A .

Ejemplo 2.12 Hallar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solución Primero se escalona la matriz, mediante transformaciones elementales filas.

$f_2 - 2f_1, f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{5}f_2, \frac{-1}{5}f_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \sim$

$f_3 - f_2 : B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La matriz B tiene dos filas no nulas y es equivalente a A , de donde se concluye que $\text{rango}(A) = 2$.

2.1.9 Sistemas de ecuaciones lineales

En álgebra se han estudiado sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x + 7y - z = -2 \\ 3x - 4y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

Ahora, tales sistemas pueden escribirse en forma matricial. El primer sistema es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3 \times 3} \cdot X_{3 \times 1} = B_{3 \times 1}$$

El segundo sistema se puede representar mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3 \times 4} \cdot X_{4 \times 1} = B_{3 \times 1}.$$

Estos casos particulares se pueden generalizar a sistemas de m ecuaciones con n variables (incógnitas), en tal caso se usará la notación $A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$ o simplemente $AX = B$.

Notar que en esta representación A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz de las variables y B es la matriz de los términos independientes del sistema. La resolución de sistemas escritos en su forma matricial, exige el uso de *la matriz ampliada del sistema*, la cual se representa por $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2.13 *La matriz ampliada del primer sistema es*

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que cada una de las filas de la matriz anterior es una representación abreviada de dicho sistema; para leer la ecuación de una fila basta con añadir apropiadamente las incógnitas y los signos +, -, =.

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

El objetivo general de este tema es discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, haciendo abstracción del tipo de problemas que origina su planteamiento.

Discutir un sistema consiste en averiguar si tiene o no tiene solución y, en caso de tenerla, saber si es única o si no lo es.

Resolver un sistema es calcular su solución (o soluciones).

Los casos más sencillos (2 ecuaciones con 2 incógnitas, 3 ecuaciones con 3 incógnitas, ...). Aquí, analizaremos el caso general: número arbitrario de ecuaciones y número de incógnitas.

Solución. La matriz ampliada

$$\begin{aligned}
 [A \ B] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente el sistema tiene por solución:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2 \\
 x_2 &= 0 \\
 x_3 &= 1
 \end{aligned}$$

En la matriz terminal del sistema se observa que $\text{rango}[A \ B] = \text{rango}[A] = 3 =$ número de variables ($n = 3$), concluyéndose que el sistema tiene solución única. En general la solución de un sistema de ecuaciones depende de la relación existente entre el rango de la matriz ampliada y el rango de la matriz de los coeficientes, la cual es consecuencia de la definición de matrices equivalentes. Antes de enunciar la relación mencionada es oportuno conocer lo siguiente.

Definición 2.9 El sistema $AX = B$ se llama compatible si admite por lo menos una solución, y se denomina incompatible en caso contrario.

Definición 2.10 Un sistema compatible puede tener solución única (sistema determinado) o infinitas soluciones (sistema indeterminado).

Definición 2.11 El sistema $AX = B$ se llama homogéneo, cuando $B = 0 =$ matriz nula.

Observación 2.5 Todo sistema homogéneo es compatible ya que admite por lo menos la solución: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, llamada solución trivial (ST).

Como se anotó anteriormente, existen resultados que simplifican la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales se pueden resumir en la siguiente.

Propiedad Si $A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$ es un sistema m de ecuaciones con n incógnitas, entonces

1. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que $\text{rango}[A \ B] = \text{rango}[A]$.
2. Si $\text{rango}[A \ B] = \text{rango}[A] = n =$ número de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única.
3. Si $\text{rango}[A \ B] = \text{rango}[A] = r < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso se pueden elegir $n - r$ variables libres a las cuales se les llama parámetros. Al asignar valores arbitrarios a estas $n - r$ incógnitas, las otras r quedan perfectamente determinadas.

4. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea incompatible es que $\text{rango}[A B] \neq \text{rango}[A]$.

Ejemplo 2.15 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Solución. Se considera la matriz ampliada del sistema

$$[A B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

la que debe escalonarse.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim f_2 - f_1 \text{ y } f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \sim$$

$$\frac{-1}{2}f_2 \text{ y } \frac{1}{4}f_3 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim f_3 - f_2 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se observa que $\text{rango}[A B] = 2 = \text{rango}[A] < n = 4$. Según la propiedad anterior el sistema tiene infinitas soluciones con $n - r = 2$ parámetros. La última matriz se puede leer de la siguiente manera: $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_4 = 1$, $0 = 0$, de donde se tiene $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. En esta ecuación se pueden tomar como parámetros $x_2 = s$ y $x_3 = t$, obteniéndose $x_1 = 2s - t$. Las soluciones del sistema se pueden expresar como

$$x_1 = 2s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1,$$

con s y t números reales.

Ejemplo 2.16 Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 4y - z + 3w = 10 \\ x + y - 7z = 22 \\ x + 8y + 4z - 8w = 3 \\ 5x + 17y - 5z + 13w = 44 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada del sistema es

$$[A B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 22 \\ 1 & 8 & 4 & -8 & 3 \\ 5 & 17 & -5 & 13 & 44 \end{bmatrix}$$

Escalonando la matriz anterior se obtienen las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -15 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deduce que $\text{rango}[AB] = \text{rango}[A] = 4$ = número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única. Tal solución se obtiene leyendo la última matriz, obteniéndose $x = -1$ $y = 2$ $z = -3$ $w = 0$

Ejemplo 2.17 *La Texas Electronics Inc. (TEI) produce tres modelos de computadoras: 1, 2 y 3. Como parte del proceso de elaboración, estos productos pasan por la planta técnica de la empresa y se emplean 30, 12 y 36 minutos por unidad de los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. Se sabe que, durante el mes, en total se emplearon 116 horas para el respectivo chequeo técnico de las computadoras. En el proceso de ensamblaje de estos productos se requirieron en total 740 horas durante ese mes. Se empleó una hora para ensamblar cada computadora del modelo 1 y cuatro horas para ensamblar cada computadora del modelo 2 y del modelo 3. ¿Cuántas unidades de cada modelo produjo la empresa si obtuvo una utilidad mensual de 37 500 dólares, sabiendo que las ganancias obtenidas por la venta de los modelos 1, 2 y 3 fueron de 200, 50 y 100 dólares por cada unidad, respectivamente? Resolver el problema empleando el método de eliminación gaussiana.*

Solución

Sean las cantidades de computadoras, x , y , z de los modelos 1, 2 y 3 respectivamente, entonces de los datos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,2y + 0,6z = 116 \\ x + 4y + 4z = 740 \\ 200x + 50y + 100z = 37500 \end{cases}$$

La matriz ampliada, después de multiplicar por 10 la primera fila y luego, permutar la primera fila con la segunda, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 5 & 2 & 6 & 1160 \\ 20 & 5 & 10 & 3750 \end{bmatrix}$$

Después de las operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} & \frac{1270}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Y sustituyendo, se obtiene $z = 40$, $y = 110$, $x = 140$.

Ejemplo 2.18 *Micaela desea cubrir sus requerimientos vitamínicos semanales de exactamente 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C. Existen disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas en el mercado. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.*

Si las cápsulas de la marca I cuestan 50 céntimos cada una, las de la marca II cuestan 70 céntimos cada una y las de la marca III, 2 soles cada una, ¿qué combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá exactamente las unidades de vitaminas deseadas y le ocasionará menor gasto semanal a Mica^{la}? Emplear eliminación gaussiana.

Solución. Sean:

x = número de cápsulas de la marca I

y = número de cápsulas de la marca II

z = número de cápsulas de la marca III

$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ x + 2y + 7z = 22 \\ x + 3y + 10z = 31 \end{cases}$$

Resolviendo usando el método de Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 7 & 22 \\ 1 & 3 & 10 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ y + 3z = 9 \end{cases}$$

El sistema es consistente con más de una solución

Si $z = t$, entonces $y = 9 - 3t$, reemplazando en la ecuación $x + y + 4z = 13$ obtenemos $x = 4 - t$

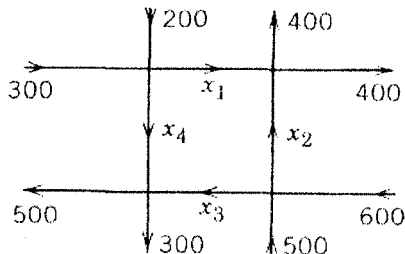
Soluciones posibles:

x	y	z	Costo = $0,5x + 0,7y + 2z$
4	9	0	8,3 soles
3	6	1	7,9 soles
2	3	2	7,1 soles
1	0	3	6,5 soles

El costo es mínimo cuando $x = 1, y = 0, z = 3$.

Ejemplo 2.19 En la siguiente figura se ilustra una red de calles y los números indican la cantidad de

autos por hora que salen o entran (según sea el sentido de las flechas) de las intersecciones. Así por ejemplo, en una de las intersecciones, en una hora, ingresan x_1 y x_2 autos y salen 400 autos por una de las calles y 400 por otra.



Solución

(a) Sistema por resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 500 \\ x_1 + x_2 = 800 \\ x_3 + x_4 = 800 \\ x_2 + x_3 = 1100 \end{cases}$$

(b) Planteando la matriz y realizando las operaciones filas elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \end{bmatrix}$$

de donde resulta un sistema con infinitas soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= 800 - x_4 \\ x_2 &= x_4 + 300 \\ x_1 &= 500 - x_4 \end{aligned}$$

con $x_4 \geq 0$ y entero.

Ejemplo 2.20 La ecuación lineal $ax + by + cz = d$ en las variables x , y y z corresponde a la ecuación de un plano en un sistema coordenado tridimensional. Es posible que dados tres planos, estos:

Se corten solo en un punto: Se corten en infinitos puntos: No se corten

Considerando los planos :

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 1$$

$$\pi_2 : x - 4y + 3z = -4$$

$$\pi_3 : x - 3y + cz = -6$$

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos no se corten.

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en un único punto.

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en infinitos puntos.

Solución

Realizando operaciones fila elementales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & c & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & c-3 & -2 \\ 0 & 0 & 14-2c & 19 \end{bmatrix}$$

Para que los planos no se corten, basta exigir que $14 - 5c = 0$, $c = 14/5$.

Para que el sistema tenga solución única, basta exigir $14 - 5c \neq 0$, $c \neq 14/5$

Y no es posible hallar valores de c para los que el sistema tiene infinitas soluciones pues eso implicaría que $c = 14/5$ y

$$19 = 0.$$

Ejemplo 2.21 *Un proveedor de productos para el campo tiene cuatro tipos de fertilizantes A, B, C y D que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20%, 15% y 60% respectivamente. Se ha planeado mezclarlas para obtener 700 kg. de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 30%. Esta mezcla debe contener 100 kg. más del tipo C que del tipo B y además la cantidad que intervenga del tipo A debe ser exactamente igual a la suma de las cantidades de los tipos C y D con el doble del tipo B. Hallar por métodos matriciales la cantidad de kg. que se deben usar por cada tipo.*

Solución. Sean

x : cantidad de kg. a emplearse del tipo A.

y : cantidad de kg. a emplearse del tipo B.

z : cantidad de kg. a emplearse del tipo C.

t : cantidad de kg. a emplearse del tipo D.

De las condiciones del problema se forma el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 700, \\ 0.3x + 0.2y + 0.15z + 0.6t = 210, \\ y - z = -100, \\ x - 2y - z - t = 0. \end{cases}$$

En la segunda ecuación, tener en cuenta que se trabaja con porcentajes(30% de 700=210)

La tercera ecuación es consecuencia de $z = y + 100$ y la cuarta es consecuencia de $x = 2y + z + t$.

Se forma la matriz ampliada del sistema y se escalona mediante transformaciones elementales filas.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.6 & 210 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 & \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 & \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & 0 & -2.5 & 3 & -100 & \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -200 & \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 & \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1000 & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -800 & \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 & \end{array} \right] \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $t = 100$, $z = 160$, $y = 60$, $x = 380$.

2.2 Determinantes

Los determinantes de las matrices pueden ser considerados como funciones que cumplen cuatro propiedades básicas. En este capítulo veremos que cualquier función del álgebra de matrices cuadradas $\mathcal{M}_n(K)$ (en el cuerpo K que cumpla dichas propiedades es necesariamente la función determinante. Nuestra primera lección está dedicada al estudio de las propiedades básicas.

Definición 2.12 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K , una función multilineal de m argumentos sobre el espacio V es una función

$$D : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m\text{-veces}} \rightarrow K$$

que es lineal en cada argumento, es decir, D satisface las siguientes condiciones:

- a) $D(v_1, \dots, v_i + u_i, \dots, v_m) = D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) + D(v_1, \dots, u_i, \dots, v_m)$, para cada $1 \leq i \leq m$.
- b) $D(v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_m) = a \cdot D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$, para cada $1 \leq i \leq m$.
- c) D es alternada si D cumple la siguiente condición:

$$D(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_m) = 0$$

para cada $1 \leq i \leq m-1$. Es decir, D es alternada si D se anula cuando dos argumentos consecutivos coinciden.

Sea D una función multilineal alternada de m argumentos sobre un espacio V . Entonces se puede demostrar fácilmente que D satisface las siguientes propiedades.

- d) Si se intercambian dos argumentos de D el signo cambia, es decir, $D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = -D(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m)$, para cualquier par $i \neq j$.
- e) Si existe un par $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$, entonces $D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = 0$.
- f) Si a un argumento le sumamos otro multiplicado por un escalar, entonces el valor de la función D no cambia. Es decir, $D(v_1, \dots, v_i + a \cdot v_j, \dots, v_m) = D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$, para cada par $i \neq j$ y cada escalar $a \in K$.
- g) Si un argumento de D es nulo, entonces D se anula, es decir, $D(v_1, \dots, v_i, \dots, 0, \dots, v_m) = 0$.

Cada fila de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ puede considerarse como un vector de K^n de tal forma que podemos definir funciones multilineales de $\mathcal{M}_n(K)$ en K . Según la Proposición de la lección anterior, cada función multilineal alternada $D : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. Esto permite definir el concepto de función determinante de la siguiente manera.

Sea $\mathcal{M}_n(K)$ el álgebra de matrices cuadradas de tamaño $n \geq 1$ y sea $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de K^n . Se define la función determinante como la única función multilineal alternada

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$$

que satisface la condición $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, es decir, $\det(E) = 1$, donde E es la matriz idéntica de orden n .

Si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces cada fila $A_{(i)}$ de A puede expresarse en la forma $A_{(i)} = a_{i1} \cdot e_1 + \dots + a_{in} \cdot e_n$ y, de acuerdo a la prueba de la Proposición, necesariamente se tiene que

$$\det(A) = [\sum_{f \in S} \text{signo}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}] \det(e_1, \dots, e_n),$$

es decir,

$$\det(A) = [\sum_{f \in S} \text{signo}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}],$$

donde S es el conjunto de funciones biyectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ en si mismo. El signo de la función f fue definido en al prueba de la Proposición. Cualquier función multilineal alternada D de $\mathcal{M}_n(K)$ en K tal que $D(E) = 1$ coincide con la definición anterior de la función \det .

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(K).$$

A partir de la definición de la función \det demuestre que

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Teniendo en cuenta que la función determinante es multilineal y alternada respecto de sus filas, entonces tiene las propiedades que se enuncian a continuación. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$.

a)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A) + \det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

donde $u_i \in K^n$.

b)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ a \cdot A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = a \det A.$$

par $i \neq j$ tal que $A_{(i)} = A_{(j)}$, entonces $\det(A) = 0$.

De donde .

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

para cada par $i \neq j$.

e)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + a \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A),$$

para cada par $i \neq j$.

f)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = 0.$$

Además de las propiedades anteriores se tienen las siguientes.

g) La matriz A se dice que es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, es decir, A tiene el siguiente aspecto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si A es una matriz triangular superior, entonces $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, es decir, el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal.

h) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

i) Si A es una matriz invertible, entonces $\det(A) \neq 0$, y además, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

j) Si A es similar a B , entonces $\det(A) = \det(B)$.

k) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces el determinante de T se define como el determinante de la matriz de T en cualquier base (véase en el próximo Capítulo).

l) $\det(A^t) = \det(A)$.

Determinante de Vandermonde. Sean $x_1, \dots, x_n \in K$, entonces

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Sea A una matriz de orden n , B una matriz de orden m y C un matriz de orden $n \times m$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Sea A, B y C como en el ejercicio anterior. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm} \det(A) \det(B).$$

La teoría de determinantes puede ser emprendida por medio de los llamados menores de una matriz. La definición de una nueva función \det en este caso se hace por inducción sobre el tamaño de las matrices.

Definimos

$$\begin{aligned} \det_1 : \mathcal{M}_1(K) &\rightarrow K \\ [a] &\mapsto \det_1(a) = a \\ \det_2 : \mathcal{M}_2(K) &\rightarrow K \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\mapsto a_{11} \text{Det}_1[a_{22}] - a_{21} \text{Det}_1[a_{12}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

La función $\det_{n-1} : \mathcal{M}_{n-1}(K) \rightarrow K$ se supone definida y queremos construir la función

$$\det = \det_n : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K.$$

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, para el elemento a_{ij} definimos la matriz $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ suprimiendo la i -ésima fila y la j -ésima columna de A , es decir,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

La imagen de A_{ij} a través de la función \det_{n-1} se conoce como el menor del elemento a_{ij} y se denota por M_{ij} , es decir,

$$M_{ij} = \det_{n-1}(A_{ij}).$$

\det se define entonces por

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} \quad (1).$$

det es una función multilineal alternada sobre las filas de las matrices de orden n que cumple además la condición $\det(E) = 1$.

Se dice que la fórmula (1) define la función determinante por los menores de la primera columna, adaptando esta fórmula a cualquier otra columna se puede probar también la proposición anterior, además, como $\det(A^T) = \det(A)$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (2)$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$. Estas fórmulas pueden usarse para probar la regla de Cramer que estudiaremos enseguida.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n , se define la matriz de cofactor de A por

$$\text{Cof}(A) = [(-1)^{i+j} M_{ij}].$$

La regla de Cramer está entonces dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,*

$$\text{ACof}(A)^T = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \text{Cof}(A)^T A.$$

Una consecuencia importante de este útil teorema es el siguiente corolario.

Sea A una matriz de orden $n \geq 1$. Entonces, A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. En tal caso, $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \text{Cof}(A)^T$.

Ejemplo 2.22 *Hallar el valor de x tales que*

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Primera forma:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4x+25 & 31 & 8x+4 & 13 & 14 \\ 3x+9 & 13 & 4x & -1 & -1 \\ -12 & -13 & -4 & -15 & -16 \\ -23 & -25 & -4x-8 & -29 & -31 \\ -30 & -31 & -12 & -33 & -34 \end{vmatrix} = 16(9x+1)(2x-5) = 0,$$

la Solución es: $x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}$

Segunda forma:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)(-2) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3(-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)(-1)(-2) = -6$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \right) = 4(-4) - 3(-6) = 2$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4x & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4x \begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2.5 \begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4x(36x + 4) - 10(36x + 4) = (4x - 10)(36x + 4)$$

$$2(4x - 10)(36x + 4) = 0 \implies x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}.$$

Ejemplo 2.23 Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{bmatrix}$

Solución

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2k \\ -k & k^2+k-3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 1 & k^2+k-3 \end{vmatrix} + (k+2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -k \end{vmatrix}$$

$$\det A = -k^2 - 3k + 9 + 2(2k^2 - 6) + (k+2)(3 - 2k) = k^2 - 4k + 3 = (k-1)(k-3)$$

Ejemplo 2.24 Dado el sistema de ecuaciones lineales en las variables x, y, z :

$$\begin{cases} x - 2y + (k+2)z = 5 \\ 2x - 3y + 2kz = 8 \\ x - ky + (k^2+k-3)z = 3k \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que dicho sistema:

- (a) tenga una única solución
 (b) tenga infinitas soluciones.
 (c) no tenga solución

Solución

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 2 & -3 & 2k & 8 \\ 1 & -k & k^2+k-3 & 3k \end{array} \right] \begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2-k & k^2-5 & 3k-5 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_3 - (2-k)F_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-4k+3 & k-1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) & (k-1) \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + (k+2)z = 5 \\ y - 4z = -2 \\ (k-3)(k-1)z = (k-1) \end{cases}$$

(a) Si $k \neq 1$ y $k \neq 3$, el sistema tiene solución única.

$$C.S. = \left\{ (x, y, z) = \left(\frac{3}{k-3}, -\frac{2k-10}{k-3}, \frac{1}{k-3} \right) : k \neq 1, k \neq 3 \right\}.$$

(b) El sistema tiene infinitas soluciones si $k = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 4z = -2 \rightarrow y = -2 + 4z \end{cases}$$

$$\text{De: } x - 2y + 3z = 5 \rightarrow x = 2y - 3z + 5 = 2(-2 + 4z) - 3z + 5 = 1 + 5z$$

$$C.S. = \{(x, y, z) = (1 + 5z, -2 + 4z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

(c) El sistema no tiene solución si $k = 3$, pues

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow 0 = -2.$$

Otra forma: Sea

Si $\det A = (k-1)(k-3) \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$ y $k \neq 3$. Entonces el sistema tiene solución única.

Si $\det A = 0 \Rightarrow k = 1$ o $k = 3$.

Si $k = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_3 \leftrightarrow F_3 - F_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 4z = -2 \rightarrow y = -2 + 4z \end{cases}$$

$$\text{De: } x - 2y + 3z = 5 \rightarrow x = 2y - 3z + 5 = 2(-2 + 4z) - 3z + 5 = 1 + 5z$$

$$C.S. = \{(x, y, z) = (1 + 5z, -2 + 4z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Si $k = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_3 \leftrightarrow F_3 + F_2 \sim \\ \\ \\ \\ \Rightarrow 0 = -2. \end{array}$$

El sistema no tiene solución.

Ejemplo 2.25 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$

- (a) Hallar todos los valores de a para los cuales existe A^{-1} .
 (b) Calcular A^{-1} .
 (c) Hallar la inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

(a) Existe A^{-1} si $\det A \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(b) \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_2 - aF_1 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - a^2F_1 \sim \\ F_4 \leftrightarrow F_4 - a^3F_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} F_3 \leftrightarrow F_3 - aF_2 \sim \\ F_4 \leftrightarrow F_4 - a^2F_2 \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{array} \right] F_4 \leftrightarrow F_4 - aF_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array} \right]$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$

(c) Si $a = \sqrt{2}$, entonces $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2.26 Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (x^m - 1)(x^m - 3^m)$$

Hallar m .

Solución

$$\text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$|A| = x \left(x \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix} \right) - \left(3 \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix} \right) : 0$$

$$|A| = x(x(x^2 - 3) - 2(2x)) - (3(x^2 - 3) - 2(0)) : x^3 - 7x$$

$$|A| = x(x^3 - 7x) - (3x^2 - 9) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 1)(x + 3)(x - 3)(x + 1)$$

$$|A| = (x^2 - 1)(x^2 - 3^2), \text{ de donde } m = 2$$

Ejemplo 2.27 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = k(a-b)(a-c)(b-c)$

Hallar el valor de k .

Solución

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4(a+1) \\ b^2 & 2b+1 & 4(b+1) \\ c^2 & 2c+1 & 4(c+1) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 - a^2 & 2(b-a) & b-a \\ c^2 - a^2 & 2(c-a) & c-a \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b+a & 2 & 1 \\ c+a & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4(b-a)(c-a) [a^2(0) - (2a+1)(b-c) + 2(a+1)(b-c)]$$

$$\Delta = 4(b-c)(a-c)(a-b), \text{ de donde } k = 4.$$

Ejemplo 2.28 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demstrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa y hallar dicha matriz.

Solución

Puesto que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ entonces } A \text{ tiene inversa para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Usando el método de Gauss -Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] F_2 \longleftrightarrow F_2 - xF_1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 \longleftrightarrow F_2 - \frac{x^2}{2}F_3 \\ F_1 \longleftrightarrow F_1 - xF_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios Propuestos: Matrices y determinantes

1. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2, tales que:

- (a) Sus cuadrados son iguales a la matriz identidad
- (b) Sus cubos son iguales a la matriz nula.

2. Sea E_{pq} la matriz de orden $m \times n$ que contiene 1 en el lugar pq -ésimo, y el número cero en los demás lugares.

(a) Obtenga las matrices $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ todas ellas de orden 2×2

(b) Expresé la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ como una suma

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

donde a, b, c y d son escalares apropiados.

3. Si $A = [a_{ij}]_{4 \times 5}$ es una matriz tal que la suma de los elementos de la diagonal principal de $A^t \cdot A$ es 0. Halle la matriz A .

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -b & 4 \\ 6 & 7 & -d \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Hallar a, b, d, e y la matriz X , sabiendo que $AX = BX + I$ y $XC = I$.

5. Hallar la matriz inversa de A en los siguientes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Hallar la matriz incógnita X a partir de la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Se sabe que A es una matriz cuadrada tal que $A^n = 0$. Demuestre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$.

8. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tales que $A.X = B$, hallar la matriz X .

9. Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

- (a) Determinar la matriz $B = A^2 - 2A$
- (b) Determinar los valores de λ para que la matriz B tiene inversa.
- (c) Calcular B^{-1} para $\lambda = 1$.

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$.

- (a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.
- (b) para $m = 1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales : $A.X = B$, con $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- (c) Calcular $C = A^{-1}B$, siendo $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y B definida en el apartado anterior.

11. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, calcule el determinante de A .

12. Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij + 2 & \text{si } i \geq j \\ ij - 2 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Calcular el determinante de A .

Encontrar, si existe, la inversa de A .

13. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Hallar la matriz AB^T , donde B^T indica la matriz transpuesta de B . ¿Es inversible?

- (b) Calcular $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que verifique la ecuación $(AB^T + C).M = E$.

14. Si $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1+x & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 2-2x & 0 \\ 2 & 1-2x & 2-2x & 0 \\ -2x & 1-2x & 2-2x & 0 \end{bmatrix}$

- (a) Halle los valores de x para los cuales $|A| = 0$.
 (b) ¿Para qué valores de x , A es inversible?

15. Dada la matrices : $A = \begin{bmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

- (a) Calcular el determinante de la matriz $3A$ y obtener el valor de x para que dicho determinante sea 162.
 (b) Demostrar que la matriz B no tiene inversa.

16. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular el valor del siguiente determinante : $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.3 Espacio vectorial

Definición 2.13 *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K (los elementos de K se llamarán escalares) es un conjunto V (cuyos elementos se llamarán vectores) dotados de dos operaciones. una de ellas interna (adición):*

$$\begin{aligned} + & : K \times V \rightarrow V \\ (u, v) & \mapsto u + v \end{aligned}$$

respecto de la que V es un grupo conmutativo.

Una Operación externa, multiplicación por un escalar

$$\begin{aligned} K \times V & \rightarrow V \\ (a, v) & \mapsto a.v \end{aligned}$$

que verifican los siguientes axiomas:

Para cualesquiera escalares $r, s \in K$ y cualesquiera vectores $u, v \in V$.

Adición:

Commutativa. $u + v = v + u$

Asociativa. $u + (v + w) = (u + v) + w$

Elemento neutro de la adición. $u + e = e + u = u$

Elemento opuesto de la adición. $u + u^* = u^* + u = e$

Multiplicación por un escalar:

$r.(u + v) = r.u + r.v$

$(r + s).v = r.v + s.v$

$(rs).v = r.(s.v)$

$1.v = v$

Es costumbre denotar el espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ simplemente por V ; también se dice que V es un K -espacio vectorial.

Ejemplo 2.29 *El plano cartesiano \mathbb{R}^2 de puntos de la forma (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial real respecto de las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ r.(x, y) & = (rx, ry) \end{aligned}$$

El conjunto \mathbb{R}^n con la relación de igualdad y las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por números reales. En \mathbb{R}^n definimos una relación de igualdad y dos operaciones:

Igualdad de vectores. Si $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ son vectores en \mathbb{R}^n , entonces

$$A = B \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

Adición de vectores. Si $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ son vectores en \mathbb{R}^n , entonces

$$A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Multiplicación de vectores por escalares. Si α es un número real y $A = (a_1, \dots, a_n)$ es un vector en \mathbb{R}^n , entonces

$$\alpha A = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Proposición 2.1 El conjunto \mathbb{R}^n se llama espacio vectorial real n -dimensional:

1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $A + B \in \mathbb{R}^n$.
2. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $A + B = B + A$.
3. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Proposición 2.2 4. $\exists \theta \in \mathbb{R}^n$, $\forall A \in \mathbb{R}^n$:

$$A + \theta = A.$$

El elemento θ de \mathbb{R}^n , llamado vector cero, está dado por

$$\theta = (0, \dots, 0).$$

5. $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\exists! (-A) \in \mathbb{R}^n$:

$$A + (-A) = \theta.$$

El vector $-A$, llamado opuesto de A , es

$$-A = (-1)A.$$

6. $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in \mathbb{R}^n$.

7. $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

8. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

9. $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

10. $\forall A \in \mathbb{R}^n$: $1A = A$.

Ejemplo 2.30 El conjunto $R[x]$ de polinomios reales en la indeterminada x con las operaciones habituales de adición y multiplicación de real por polinomio, es un espacio vectorial real.

Si cambiamos \mathbb{R} por un cuerpo cualquiera K obtenemos el K -espacio vectorial $K[x]$ de polinomios con coeficientes en K .

Ejemplo 2.31 Sea $M_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre \mathbb{R} con las operaciones usuales de adición y multiplicación de matriz por escalar conforma un espacio vectorial sobre los reales.

Ejemplo 2.32 Sea S un conjunto no vacío en \mathbb{R} . El conjunto \mathbb{R}^S de todas las funciones de S en \mathbb{R} es un espacio vectorial real bajo las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (r \cdot f)(x) &= rf(x)\end{aligned}$$

Ejemplo 2.33 *Ejemplo 2.34* *Ejemplo 2.35* El espacio vectorial $\mathbb{R}[t]$

Define una estructura de

Ejemplo 2.36 *Ejemplo 2.37* espacio vectorial en el conjunto $\mathbb{R}[t]$ de polinomios en t con coeficientes en \mathbb{R} .

Solución. Si $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ and $q(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$ son dos polinomios en $\mathbb{R}[t]$, entonces las definiciones:

$$\begin{aligned}p(t) + q(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n \\ ap(t) &= aa_0 + aa_1t + \dots + aa_nt^n \\ \mathbf{0} &= 0\end{aligned}$$

proporcionan la estructura del espacio vectorial deseado. ♦

Ejemplo 2.38 Algunos ejemplos de espacios vectoriales son los siguientes:

- (a) El espacio vectorial trivial es el conjunto $V = \{0\}$, con respecto a cualquier
- (b) Los conjuntos de polinomios $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ son espacios vectoriales con cuerpo de escalares, respectivamente, \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} .

Proposición 2.3 Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K , se tienen las siguientes:

1. Si $ru = 0$ entonces $r = 0$ o $u = 0$.
2. $(-r)v = r(-v) = -rv$.

Subespacio vectorial

Dados un V sobre un cuerpo K y un subconjunto no vacío S de V , resulta interesante preguntarse si S bajo la misma adición de vectores y la misma acción de escalares sobre vectores, conforma un espacio vectorial sobre K . En caso afirmativo, se dice que S es un Subespacio del espacio V . Esta relación se denota por $S \leq V$. Según esta definición, si deseamos establecer que $S \leq V$ deberíamos verificar el cumplimiento cuatro axiomas para la adición de vectores y cuatro axiomas para la acción de escalares sobre vectores. Sin embargo, solo es necesario verificar el cumplimiento de dos condiciones, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.4 Un subconjunto W no vacío de V se dice un subespacio de él si W con las operaciones de suma y producto por un escalar real es un espacio vectorial. Para probar que W es un subespacio vectorial de V solo es suficiente verificar que se satisfacen las dos leyes de clausura, esto es:

Si v, w en W entonces $v+w$ en W y si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda w \in W$.

Ejemplo 2.39 En el plano cartesiano el subconjunto $S = \{(x, y), |y = mx\}$, donde $m \in \mathbb{R}$ es una constante, representa una recta que pasa por el origen y conforma un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2.40 En el espacio de polinomios reales el subconjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de polinomios de grado $\leq n$ conforma un subespacio.

Ejemplo 2.41 En el espacio de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} la colección de funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} conforma un subespacio. Se tienen dos subespacios notables: $C^n(a, b)$ conformado por todas las funciones de (a, b) en \mathbb{R} cuyas primeras n derivadas son continuas, y $C^\infty(a, b)$ constituido por las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} para las cuales las derivadas de cualquier orden son continuas. Similarmente, se tienen los subespacios $C^n(a, b)$ y $C^\infty(a, b)$ de $C(\mathbb{R})$. También, en el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones convergentes es un subespacio. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es polinómica si existe un entero positivo m tal que $a_n = 0$ para cada $n \geq m$. Es claro que el conjunto de sucesiones polinómica es un subespacio del espacio de sucesiones convergentes.

Ejemplo 2.42 En cada espacio vectorial V se tienen dos subespacios propios: $0 = \{0\}$ y V .

Proposición 2.5 La intersección de dos subespacios es un subespacio. Más generalmente, la intersección de cualquier familia no vacía de subespacios de un espacio vectorial es un subespacio.

Definición 2.14 Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V ; nótese que el subespacio más pequeño de V que contiene a S es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S . Este subespacio se denota por $\langle S \rangle$ y se conoce como el subespacio generado por S .

A continuación veremos que $\langle S \rangle$ puede describirse en términos de combinaciones lineales de elementos de S . Sean v_1, v_2, \dots, v_n elementos del espacio V , una *combinación lineal* de estos elementos es un vector $v \in V$ de la forma $v = a_1.v_1 + \dots + a_n.v_n$, donde a_1, \dots, a_n son escalares del cuerpo K . Se puede entonces afirmar lo siguiente.

Proposición 2.6 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea S un subconjunto no vacío de V . Entonces $\langle S \rangle$ coincide con el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales realizadas con elementos de S .*

Más exactamente,

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i.v_i \mid \lambda_i \in K, v_i \in S, n \geq 1 \right\}$$

Esta presentación permite identificar a $\langle S \rangle$ como la *envolvente lineal* de S . Si $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ es finito, entonces

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i.v_i \mid \lambda_i \in K \right\}.$$

En cada espacio vectorial existen ciertos subconjuntos conocidos como bases; la importancia de estos subconjuntos radica en que cada elemento del espacio puede ser representado de manera única a través de sus elementos. El propósito de la presente lección es explicar en detalle la noción de base, la cual es fundamental en álgebra lineal.

Ejemplo 2.43 *Analizar si el subconjunto*

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$$

es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

Solución

Como $(0, 0, 0) \in H : 0 + 2.0 + 3.0 = 0, H \neq \phi$.

i) Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in H$, entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Luego,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + 2y_1 + 3z_1 + x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $u + v \in H$

ii) Sea $u = (x, y, z) \in H$, y sea $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$cu = (cx, cy, cz)$$

Luego,

$$\begin{aligned} (cx) + 2(cy) + 3(cz) &= c(x + 2y + 3z) \\ &= c.0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $cu \in H$.

H es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 2.44 Sea $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el conjunto de los polinomios de grado ≤ 3 , con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real. Demostrar que el conjunto

$$W = \{p(x) \in V : p(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b, \quad a, b \in \mathbb{R}\},$$

es un subespacio vectorial de V .

Solución

$W \neq \phi$, pues $0(x) \in W : 0(x) = 0x^3 + 0x^2 + (0+0)x + 2(0)$

(i) Sean $p(x), q(x) \in W$ entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ q(x) &= a'x^3 + b'x^2 + (a'+b')x + 2b', \quad a', b' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a+a')x^3 + (b+b')x^2 + (a+a'+b+b')x + 2(b+b'), \quad a, b, a', b' \in \mathbb{R} \\ \implies p(x) + q(x) &\in W \end{aligned}$$

(ii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda(ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b) = \lambda ax^3 + \lambda bx^2 + (\lambda a + \lambda b)x + 2(\lambda b)$

$$\implies (\lambda p)(x) \in W$$

Ejemplo 2.45 Sea \mathbb{R}^3 el espacio vectorial con las operaciones usuales. Analizar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 .

(a) $S = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

(b) $T = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

Solución

(a) $S \neq \phi$, pues $(0, 0, 0) \in S : 0 = 0 = 0$

(R1) Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in S$ entonces $u = (x_1, x_1, x_1), v = (x_2, x_2, x_2) \implies u + v = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in S$

(R2) Sean $u = (x, y, z) \in S$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $u = (x, x, x)$

$$\lambda u = (\lambda x, \lambda x, \lambda x) \in S$$

Por tanto S es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

(b) $T \neq \phi$, pues $(0, 0, 0) \in S : 0 = 0^2 + 0^2$

(R1) Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in T$ entonces $z_1 = x_1^2 + y_1^2, z_2 = x_2^2 + y_2^2$

Entonces $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$$z_1 + z_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

Por ejemplo:

(R1) Sean $u = (1, 1, 2), v = (-1, -1, 2) \in T \implies u + v = (0, 0, 4) \notin T$, pues $4 \neq 0^2 + 0^2$

o

(R2) Sean $u = (1, 1, 2) \in T$ y Sea $\lambda = 2$ entonces $\lambda u = 2u = (2, 2, 4) \notin T$, pues $4 \neq 2^2 + 2^2$

Por tanto T no es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 2.46 Analizar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial V (con las operaciones usuales) son subespacios.

(a) $S = \{A = (a_{ij})_{2 \times 2} \in V : a_{11} + a_{22} = 0\}$,

donde $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}$, es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 2×2 .

(b) $\mathcal{T} = \{f \in V : \exists k \geq 0; |f(t)| \leq k, \forall t \in \mathbb{R}\}$,
 donde V , es el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Solución

(a) $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$.

(R1) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}, B = (b_{ij})_{2 \times 2} \in \mathcal{S}$ entonces $a_{11} + a_{22} = 0, b_{11} + b_{22} = 0 \implies$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{2 \times 2}$$

$$(a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = 0$$

Por tanto, $A + B \in \mathcal{S}$.

(R2) Sea $A = (a_{ij})_{2 \times 2} \in \mathcal{S}$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $a_{11} + a_{22} = 0$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{2 \times 2}$$

$$\lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) = 0$$

Por tanto, $\lambda A \in \mathcal{S}$.

Por tanto \mathcal{S} es un subespacio vectorial de V .

(b) $\mathcal{T} \neq \emptyset$, pues $f = 0 \in \mathcal{T}$.

(R1) Sean $f, g \in \mathcal{T}$: existen $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ tales que $|f(t)| \leq k_1, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq k_2, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Luego, } |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq k_1 + k_2 = k,$$

$$\text{existe un } k > 0 : |f(t) + g(t)| \leq k, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $f + g \in \mathcal{T}$.

(R2) Sea $f \in \mathcal{T}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\exists k \geq 0; |f(t)| \leq k, \forall t \in \mathbb{R}$

$$|(\lambda f)(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| k = k' \implies \exists k' \geq 0; |(\lambda f)(t)| \leq k', \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego, $\lambda f \in \mathcal{T}$.

Por tanto \mathcal{T} es un subespacio vectorial de V .

Ejercicios propuestos: Espacios vectoriales y subespacios vectoriales

1. Sea $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ el conjunto de las matrices reales de orden 2×2 . Si $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen las operaciones \oplus y \odot del siguiente modo.

$$A \oplus B = AB \text{ (producto usual de matrices)}$$

$$\alpha \odot A = \alpha A \text{ (producto usual de un escalar por una matriz)}$$

Determinar, justificando su respuesta, cuales de los 10 axiomas de espacio vectorial se cumplen para estas operaciones.

2. Demostrar que \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial real con la adición definida por

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

y la multiplicación por un escalar definida por

$$\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha y_1 - 1)$$

3. Sea $V = \{(e^x, e^y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ provisto de las operaciones siguientes:

$$(e^{x_1}, e^{y_1}) \oplus (e^{x_2}, e^{y_2}) = (e^{x_1+x_2}, e^{y_1+y_2})$$

$$\alpha \odot (e^x, e^y) = (e^{\alpha x}, e^{\alpha y})$$

Demostrar que V con estas operaciones es un espacio vectorial real.

4. En los siguientes casos determinar si el conjunto dado es o no un espacio vectorial. si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen

- (a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tal que } x = y = z\}$ con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.
- (b) $F = f : f$ es una función cuyo dominio es \mathbb{R} y su rango es un subconjunto de \mathbb{R} con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de una función por un escalar.
- (c) $E = \mathcal{P}_n$, el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$, con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real
5. Sea $E = \mathcal{C}[0, 1]$ el conjunto de las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tales que f es continua en $[0, 1]$
- (a) Verificar que E con las operaciones usuales de adición y multiplicación de funciones por un número real, es un espacio vectorial
- (b) Si se consideran

$$F_1 = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}, \quad F_2 = \{f \in E : f(0) = 2\}$$

Analizar si F_1 y F_2 son subespacios de E .

6. Determinar, justificando su respuesta, cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que los contienen.
(Asumimos que son espacios vectoriales bajos las operaciones usuales)

(a) $H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$

(b) $H_2 = \{(x - 2y, x, 2y, -y) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $H_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x, y\} = x\}$

(d) $H_4 = \{(x, y, x - y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$

(e) $H_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \text{ es racional}\}$

(f) $H_6 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : \text{tr}(A) = 0\}$

(g) $H_7 = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_1 \neq 0\}$

(h) $H_8 = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_2a_1 = 0\}$

7. Sean $F_1 = \{v = (x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$ y $F_2 = \{w = (x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que F_1 y F_2 son subespacios de \mathbb{R}^3 .
8. Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V . Definimos el conjunto

$$S + T = \{v \in V : v = s + t, s \in S \text{ y } t \in T\}$$

El conjunto $S + T$ se llama suma de los subespacios S y T . Pruebe que $S + T$ es un subespacio de V .

Hallar e identificar la suma de los subespacios de \mathbb{R}^3 .

$$S = \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(3s, 2s, -5s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}$$

9. Responder con verdadero o falso

- (a) El conjunto X formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $z = 3x, x = 2y$, es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

- (b) El conjunto Y formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $xy = 0$, es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
- (c) El conjunto L formado por los vectores $v = (x, 2x, 3x, \dots, nx)$, es un subespacio de \mathbb{R}^n .

2.3.1 Bases y dimensión del espacio vectorial

Definición 2.15 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y S un subconjunto no vacío de V , se dice que S genera V si la envolvente lineal de S coincide con V , es decir, $\langle S \rangle = V$. El espacio V se dice finitamente generado si existe en V un subconjunto finito S de generadores.

Definición 2.16 Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un subconjunto finito de V , se dice que X es un conjunto de vectores linealmente independientes (L I) si la única combinación lineal nula con los elementos de X es a través de escalares nulos. Más exactamente, los vectores de X son linealmente independientes si para cualesquiera escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = 0 \iff \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

Por definición asumimos que el conjunto vacío es L I. Un subconjunto cualquiera X de V es L I si cada subconjunto finito de X es L I. X es linealmente dependiente (L D) si no es L I.

La siguiente proposición reúne algunas propiedades básicas sobre dependencia e independencia lineal.

Proposición 2.7 Sea V un K -espacio y $\phi \neq V$. Entonces

- S es L D si y solo si existe $x \in S$ tal que $x \in \langle S' \rangle$, donde $S' = S - \{x\}$.
- Si $0 \in S$ entonces S es L D.
- Si S es L I entonces cada subconjunto de S es L I.
- Si S es finito con $n \geq 0$ elementos, entonces cada conjunto de $n + 1$ elementos de $\langle S \rangle$ es L D.

Ejercicios

- Demuestre que en el espacio de funciones el conjunto $\beta = \{e^{nx} \mid n \in \mathbf{N}\}$ es L I.
- Demuestre que dos vectores de \mathbb{R}^2 son L D si y solo si pertenecen a misma recta que pasa por el origen.

Ya estamos en capacidad de presentar la noción de base. $\beta \subset V$ es una base para V si se cumplen dos condiciones:

- $\langle \beta \rangle = V$
- β es L I.

Ejemplo 2.47 En \mathbb{R}^n los vectores

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n$$

constituyen la llamada base canónica (1 se encuentra en la i -ésima entrada de la n -upla). Cambiando \mathbb{R} por cualquier cuerpo K obtenemos la base canónica de K^n .

Ejemplo 2.48 En el espacio de polinomios el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ constituye su base canónica. En el subespacio de polinomios de grado $\leq n$ la base canónica es $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$.

Ejemplo 2.49 En el espacio $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices reales 2×2 se tiene la siguiente base canónica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.50 En el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0, \dots), \quad i \geq 1$$

conforman la base canónica para el subespacio de sucesiones polinómicas.

Ejemplo 2.51 El conjunto ϕ es, por definición, la única base del espacio nulo $0 = \{0\}$.

Terminamos esta lección con una de las principales caracterizaciones del concepto de base.

Proposición 2.8 Sea V un \mathbb{R} -espacio y β un subconjunto no vacío de V . β es una base de V si y solo si cada elemento $v \in V$ tiene una representación única (salvo sumandos nulos) como combinación lineal de elementos de β en la forma:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n, \quad \lambda_i \in K, v_i \in \beta, 1 \leq i \leq n.$$

Ejemplo 2.52 Determine los valores de $c \in \mathbb{R}$ para que el siguiente conjunto de vectores,

$$S = \{u = (1, -1, 2), v = (2, 3, 1), w = (4, c, 5)\}$$

del espacio vectorial \mathbb{R}^3 , sea linealmente dependiente.

Solución.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & c \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3c - 3 = 0, \text{ de donde } c = 1.$$

Ejemplo 2.53 En el espacio de polinomios de grado menor o igual que 3, \mathcal{P}_3 . Analizar si el conjunto dado de vectores $T = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = (x-1)^3$, $p_3(x) = (x-2)^3$, $p_4(x) = 1 + x^3$, es linealmente dependiente o linealmente

Solución.

Considere la ecuación $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0$ expandiendo la ecuación

$$c_1 x^3 + c_2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + c_3 (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3,$$

se tiene que el sistema de ecuaciones resultante está dado por:

$$\begin{cases} 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 0 \\ 0c_1 - 3c_2 - 6c_3 = 0 \\ 0c_1 + 3c_2 + 12c_3 = 0 \\ 0c_1 - 1c_2 - 8c_3 = 0 \end{cases}$$

La matriz aumentada en su forma original y en los sucesivos pasos de escalonamiento están dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, el sistema de ecuaciones tiene una única solución, la trivial, y el conjunto formado por $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2.54 Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V . Analizar para que valores de $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$$

es una base de V .

Solución. Si

$$\lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_2 + v_3) + \lambda_3 (v_3 + v_4) + \dots + \lambda_{n-1} (v_{n-1} + v_n) + \lambda_n (v_n + v_1) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_n) v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) v_3 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) v_n = 0$$

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \lambda_2 = \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \lambda_n, \lambda_n = -\lambda_n$$

De donde se tiene que n es un número par natural.

Ejemplo 2.55 En \mathbb{R}^3 , sean los subconjuntos

$$S = \{(1, 2, 0), (1, 0, 1)\}$$

$$T = \{(1, 2, 0), (2, 0, 2), (3, 2, 2)\}$$

(a) Demostrar que los subespacios generados por S y T son iguales. Es decir, $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

(b) Representar gráficamente el subespacio hallado en la parte (a) y hallar una base de dicho subespacio.

Solución.

$$(a) \langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(1, 2, 0) + r(1, 0, 1); t, r \in \mathbb{R}\},$$

Se observa que $(3, 2, 2) = (1, 2, 0) + 2(1, 0, 1)$;

$$\langle T \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(1, 2, 0) + r(1, 0, 1); t, r \in \mathbb{R}\}$$

De donde $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

(b) $\langle S \rangle, \langle T \rangle$ representan planos que pasan por el origen de coordenadas.

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot (1, 2, 0) \times (1, 0, 1) = 0\}$$

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot (2, -1, -2) = 0\}$$

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 2z = 0\}$$

$$\text{Sea } v = (x, y, z) \in \langle S \rangle : 2x - y - 2z = 0 \implies y = 2x - 2z$$

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) = (x, 2x - 2z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, -2, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

$\langle S \rangle = \{(1, 2, 0), (0, -2, 1)\}$, además $(1, 2, 0)$ y $(0, -2, 1)$ son linealmente independientes.

$$\beta_{\langle S \rangle} = \{(1, 2, 0), (0, -2, 1)\} \text{ es una base para } \langle S \rangle.$$

Ejemplo 2.56 Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado ≤ 2 .

Considere $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = (1 + x)^2$. Analizar si S es una base de \mathcal{P}_2 .

Solución

(i) S es linealmente independiente

Si

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0$$

$$c_1(1) + c_2(1 + x) + c_3(1 + x)^2 = 0$$

$$c_3 x^2 + (c_2 + 2c_3)x + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad F_2 \leftrightarrow F_2 + (-2)F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad F_1 \leftrightarrow F_1 + (-1)F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto S es linealmente independiente.

(ii) S Generan \mathcal{P}_2

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$, entonces existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$$

$$ax^2 + bx + c = c_1(1) + c_2(1+x) + c_3(1+x)^2$$

$$ax^2 + bx + c = c_3 x^2 + (c_2 + 2c_3)x + c_1 + c_2 + c_3$$

$$\begin{cases} c_3 = a \\ c_2 + 2c_3 = b \\ c_1 + c_2 + c_3 = c \end{cases}$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right] \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right] \quad F_2 \leftrightarrow F_2 + (-2)F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right] \quad F_1 \leftrightarrow F_1 + (-1)F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c - a \\ 0 & 1 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right] \quad F_1 \leftrightarrow F_1 + (-1)F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c - a - (b - 2a) = a - b + c \\ 0 & 1 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = a - b + c \\ c_2 = b - 2a \\ c_3 = a \end{cases}$$

Luego S genera \mathcal{P}_2 .

Por tanto S es una base de \mathcal{P}_2 .

Dimensión de un espacio vectorial

En esta lección discutiremos los siguientes aspectos relativos a las bases: existencia, unicidad y cardinalidad (= cantidad de elementos). Comenzamos con el siguiente teorema sobre existencia de bases en cualquier espacio vectorial. La prueba de este teorema se apoya en el Lema de Zorn (axioma de elección), el cual representa uno de los supuestos básicos de la teoría clásica de conjuntos. El lector no interesado en la prueba puede simplemente asumir el Teorema 1 como un axioma.

Teorema 2.2 *Todo espacio vectorial posee al menos una base.*

Con respecto a la unicidad de las bases podemos decir que, en general, un espacio vectorial tiene infinitas bases. Pensemos por ejemplo que el espacio V es no nulo (si V es nulo su única base es \emptyset); si β es una base cualquiera

de V y v es un elemento de β , entonces cambiando v por $\lambda.v$ en β , con cada $\lambda \in K - \{0\}$, obtendremos bases diferentes en V . Cuando K es infinito esta colección de bases es infinita. En realidad, el único espacio con base única es el espacio nulo.

Mucho más interesante que la pregunta sobre la unicidad de las bases es el problema sobre el tamaño de éstas. Las siguientes proposiciones constituyen la prueba del Teorema 2 que enunciaremos más adelante.

Proposición 2.9 *Si un espacio vectorial V posee una base finita, entonces todas sus bases son finitas.*

La proposición anterior permite clasificar los espacios vectoriales en dos categorías: los de bases finitas y los de bases infinitas.

Proposición 2.10 *Sea V un espacio vectorial con bases finitas $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\beta' = \{v_1, \dots, v_m\}$. Entonces $n = m$.*

Proposición 2.11 *Sea V un espacio vectorial con bases infinitas β y β' . Entonces $\text{card}(\beta) = \text{card}(\beta')$.*

Para cada espacio vectorial V se cumple que todas las bases tienen la misma cardinalidad.

El teorema anterior permite definir la noción de dimensión en un espacio vectorial V como el número de elementos que forma cualquiera de sus bases; denotaremos este invariante de V por $\text{dim}_K(V)$, o simplemente por $\text{dim}(V)$, es claro por el contexto sobre que cuerpo estamos trabajando. Si V es de bases infinitas diremos que V es de dimensión infinita. Si β es un subconjunto de V , definimos el *ranko* de X , como la dimensión de la envolvente lineal de X , es decir, $\text{rank}_K(X) = \text{dim}_K \langle X \rangle$.

Ejemplo 2.57 $\text{dim}(\mathbb{R}^n) = n$

Ejemplo 2.58 *El espacio de los polinomios es de dimensión infinita.*

Ejemplo 2.59 $\text{dim}(\mathcal{P}_n) = n + 1$

Ejemplo 2.60 $\text{dim}(0) = 0$.

Ejercicio. Demuestre que si un espacio vectorial V posee un subconjunto infinito LI, entonces V es de dimensión infinita.

Algunas propiedades interesantes relativas a espacios de dimensión finita se presentan a continuación.

Proposición 2.12 *Sea V un K -espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Entonces,*

- Cada conjunto de n elementos LI de V conforman una base.*
- Cada conjunto de n generadores de V conforman una base de V .*
- Sea $m < n$ y sean v_1, \dots, v_m vectores LI de V . Entonces es posible encontrar vectores v_{m+1}, \dots, v_n en V tales que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V .*
- Sea S un subespacio de V . Entonces, cada base de S puede extenderse hasta una base de V . En particular, $\text{dim}(S) \leq \text{dim}(V)$.*
- Sean x_1, \dots, x_m elementos cualesquiera de V y S su envolvente lineal. Entonces, $\text{dim}(S)$ coincide con el máximo número de vectores LI encontrados en la colección v_1, \dots, v_m de vectores dados.*

Ejercicios Propuestos: Bases y dimensión de espacios vectoriales

1. Determinar si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial
 - (a) En \mathbb{R}^2 , $u = (1, 1)$, $v = (2, 1)$
 - (b) En \mathbb{R}^3 , $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (0, 0, 1)$
 - (c) En \mathcal{P}_2 , $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 3 - x^2$, $p_3(x) = x$
2. Analizar si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente
 - (a) En \mathbb{R}^2 , $u = (1, 2)$, $v = (-1, -3)$
 - (b) En \mathbb{R}^3 , $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (2, 1, 2)$
 - (c) En \mathbb{R} , $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 0)$
 - (d) En \mathbb{R}^4 , $u_1 = (1, -2, 1, 1)$, $u_2 = (3, 0, 2, -2)$, $u_3 = (0, 4, -1, 1)$, $u_4 = (5, 0, 3, 1)$
 - (e) En $E = C[0, 1]$ el conjunto de las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tales que f es continua en $[0, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$.
3. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base del espacio vectorial dado
 - (a) En \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. En caso afirmativo expresar cada uno de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ como combinación lineal de los elementos de esta base
 - (b) En \mathbb{R}^2 , $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\mathcal{B} = \{(1, -2)\}$
 - (c) En \mathbb{R}^2 , $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\mathcal{B} = \{(1, -2), (-5, 10)\}$
 - (d) En $\mathcal{P}_3 : \mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 + x^2$, $p_4(x) = 1 + x^3$. En caso afirmativo expresar el polinomio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ como combinación lineal de los elementos de esta base
4. Demostrar que el conjunto solución $\{e^{x^2}, xe^{x^2}, x^2e^{x^2}\}$ es linealmente independiente en $C(\mathbb{R})$, el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f es continua.
5. Analizar la dependencia lineal de los polinomios $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_3$ dados por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - 2x + x^2 + x^3 \\ p_2(x) &= -5 - 2x - 9x^2 + 7x^3 \\ p_3(x) &= 2 - x + 3x^2 - x^3 \end{aligned}$$

y hallar una base y la dimensión del espacio generado por ellos.

6. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

hallar el valor de α para que A_4 esté en el subespacio generado por A_1, A_2 y A_3 .

7. Dados los vectores $(k, 1, 0)$, $(1, k - 1, k)$, $(1 + k, 1, k)$ de \mathbb{R}^3 .
 - (a) ¿Para cuáles valores de k estos vectores forman una base de \mathbb{R}^3 ?
 - (b) ¿Para cuáles valores de k estos vectores generan subespacios propios de \mathbb{R}^3 ? Hallar dichos subespacios mostrando un conjunto generador para cada uno.

8. Dados los vectores $v_1 = (1, 2, -2, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1, 2)$ y $v_3 = (1, -3, -1, 3)$ de \mathbb{R}^4 , hallar una base para el subespacio

$$H = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \text{ es ortogonal a los tres vectores dados}\}.$$

9. Dado

$$H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \wedge x + 2y + 3z + 4w = 0\}.$$

- (a) Demostrar que H es un subespacio de \mathbb{R}^4 .
 (b) Hallar una base para H .
10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, sea H el conjunto de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ formado por todas las matrices X tales que $AX = XA$.
- (a) Demostrar que H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.
 (b) Hallar, justificando su respuesta, una base para H .
11. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión 4. Dados

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + 3u_2 + u_3 - u_4 \\ v_2 &= u_1 + 2u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_3 + 3u_4 \\ v_4 &= u_4 \end{aligned}$$

analizar si el conjunto $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V .

12. Hallar una base del siguiente subespacio

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$

13. Sea $E = \mathcal{M}_{m \times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales. Si la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar son las usuales, se comprueba que $\mathcal{M}_{m \times n}$ es un espacio vectorial

Determinar si el siguiente conjunto de vectores es una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \text{ donde } abcd \neq 0$$

14. Hallar una base para

(a) $E = \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \right\}$

(b) $E = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$

(c) $E = \{v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $abcd \neq 0$

2.3.2 Vectores de coordenadas

Con el fin de ser capaz de enlazar el álgebra lineal con el álgebra de matrices, tenemos que encontrar una manera de representar los vectores numéricamente. Esto se puede hacer eligiendo una base para un espacio determinado y por escrito cada vector como una combinación única lineal de vectores de la base. Los coeficientes que surgen de esta manera son los escalares necesario.

Sea V un espacio vectorial n -dimensional sobre un campo k , sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , y sea $x \in V$. Entonces x se puede escribir únicamente en la forma

$$x = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

en relación con la base S . Por lo tanto, tienen un mapeo invertible $V \rightarrow \mathbb{k}^n$ que asocia a cada vector $x \in V$ un vector columna única

$$[x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^n,$$

determines a unique linear combination $\hat{y}_S = b_1v_1 + \dots + b_nv_n \in V$.

conocido como el vector de coordenadas de x con respecto a la base de S . Por el contrario, cada vector columna

$$y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^n$$

determina una única combinación lineal $\hat{y}_S = b_1v_1 + \dots + b_nv_n \in V$.

Definición 2.17 *La aplicación $x \rightarrow [x]_S$ que asigna a cada vector $x \in V$ el vector de coordenadas $[x]_S \in \mathbb{k}^n$ es la aplicación de coordenadas de V a \mathbb{k}^n determinado por la base S para V .*

Definición 2.18 *La aplicación $y \rightarrow \hat{y}_S$ que asigna a cada vector columna $y \in \mathbb{k}^n$ la combinación lineal $\hat{y}_S \in V$ es la aplicación combinación lineal de coordenadas de \mathbb{k}^n en V determinado por la base S para V .*

Teorema 2.3 *Teorema de aplicación de coordenadas)Las aplicaciones $x \rightarrow [x]_S$ y $y \rightarrow \hat{y}_S$ son inversos el uno del otro.*

Prueba. Los cálculos necesarios para demostrar este teorema es trivial. Por definición,

$$x = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \rightarrow [x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y \rightarrow \hat{y}_S = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = x$$

y

$$y = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \rightarrow \hat{y}_S = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \rightarrow [\hat{y}_S]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y.$$

Por lo tanto, las aplicaciones de coordenadas son inversos el uno del otro. ■

Las aplicaciones combinación lineal de coordenadas, son útiles porque son inversos el uno del otro, y porque preservan la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Las aplicaciones de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{x}]_S$ de V a k^n tiene la propiedad que $[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_S = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S$ y que $[a\mathbf{x}]_S = a[\mathbf{x}]_S$.*

Prueba. Sean $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{y} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$ son dos vectores en V y sea $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n$ su suma. Entonces

$$[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_S = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S.$$

Además, para cualquier escalar $a \in \mathbf{k}$,

$$a\mathbf{x} = a(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = (aa_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (aa_n)\mathbf{v}_n,$$

de modo que

$$[a\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a[\mathbf{x}]_S.$$

Por lo tanto la aplicación de coordenadas preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar. ■

Una aplicación entre dos espacios vectoriales con las propiedades descritas en el teorema anterior se llama una Transformación lineal

La pregunta obvia es ¿qué relación existe entre los vectores de coordenadas $[\mathbf{x}]_S$ y $[\mathbf{x}]_{S'}$ de un vector dado \mathbf{x} con respecto a dos bases distintas S y S' de V . La respuesta resulta a ser bastante simple.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ en S como combinaciones lineales de los vectores básicos en la base S' , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{w}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{w}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ en la base S' , por lo tanto

$$[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \quad \dots \quad [\mathbf{v}_n]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \quad \dots \quad [\mathbf{v}_n]_{S'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas. Entonces, por construcción, $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ en S' como combinaciones lineales de los vectores de la base S , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= b_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{1n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= b_{n1}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{nn}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ en la base, por lo tanto

$$[\mathbf{w}_1] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} \quad \dots \quad [\mathbf{w}_n] = \begin{bmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} .$$

Sea

$$Q = [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de la base de vectores \mathbf{w}_i determinado por la base S , entonces, por construcción, $Q[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$. Es fácil comprobar que $Q = P^{-1}$

El siguiente teorema resume los resultados de estos cálculos.

Teorema 2.5 (Teorema de cambio de base) Sea V un espacio vectorial n -dimensional sobre un campo k . Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y

$S' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ dos bases de V , y sea \mathbf{x} un vector en V con vectores de coordenadas $[\mathbf{x}]_S$ y $[\mathbf{x}]_{S'}$. Entonces

existe una matriz P invertible para el cual $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ y $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sea $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ cualquier vector en V , escrito como una combinación lineal de la base de S . Por el hecho de que la aplicación de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{x}]_{S'}$ conserva vector Además de la multiplicación y escalar se deduce que

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{S'} &= [a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n]_{S'} = a_1[\mathbf{v}_1]_{S'} + \cdots + a_n[\mathbf{v}_n]_{S'} \\ &= [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}][\mathbf{x}]_S = P[\mathbf{x}]_S \end{aligned}$$

Por el contrario, $\mathbf{y} = b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n$ cualquier vector en V , escrito como una combinación lineal de la base S' . Del hecho de que la función de coordenadas $\mathbf{y} \rightarrow [\mathbf{y}]_S$ preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar se deduce que

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}]_S &= [b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n]_S = b_1[\mathbf{w}_1]_S + \cdots + b_n[\mathbf{w}_n]_S \\ &= [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S][\mathbf{y}]_{S'} = Q[\mathbf{y}]_{S'} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $Q = P^{-1}$. ■

Las matrices P y P^{-1} juegan un papel importante en el estudio de las transformaciones lineales. Por lo tanto, dado un nombre especial.

Definición 2.19 Las matrices $n \times n$ P y P^{-1} con la propiedad que $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ y $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$ son el cambio de base } matrices de la base S a la base de S' y de la base S' a la base S , respectivamente.

Ejemplo 2.61 *Una Matriz general de Cambio de Base de \mathbb{R}^2 .*

Sea x un vector en \mathbb{R}^2 , y sea $S = \{v_1, v_2\}$ y $S' = \{w_1, w_2\}$ dos bases de \mathbb{R}^2 . Entonces $x = a_1v_1 + a_2v_2 = b_1w_1 + b_2w_2$. Por lo tanto

$$[x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [x]_{S'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Escribimos S en términos de S' y S' en términos de S , se obtienen dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ v_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} w_1 = d_{11}v_1 + d_{12}v_2 \\ w_2 = d_{21}v_1 + d_{22}v_2 \end{cases}.$$

En la notación de matriz-vector, estos sistemas toman la forma

$$[x]_{S'} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [x]_S, \quad \text{and} \quad [x]_S = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [x]_{S'}.$$

Por sustitución, obtenemos

$$[x]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [x]_S$$

y

$$[x]_{S'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [x]_{S'}.$$

Dado que estas ecuaciones son válidas para todos $x \in \mathbb{R}^2$, se sigue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Esto nos dice que las dos bases de S y S' están conectados por las matrices invertible P y Q . ♦

Ejemplo 2.62 *Un especial Cambio de base para la matriz para \mathbb{R}^2 .*

Sea $S = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ y $S' = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ son dos bases para \mathbb{R}^2 .

Entonces

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1 = p + 3q \\ 0 = 2p + 4q \end{cases}, \text{ la solución es : } \{q = 1, p = -2\}$$

$$\text{Así } P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } Q = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se sigue que

$$PQ = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$QP = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y

$$Q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos ver, la matriz P es la matriz de cambio de base de S a S' , y su inverso Q es la matriz de cambio de base de S' a S .

Ejemplo 2.63 *Un cambio de coordenadas en \mathbb{R}^3 .*

Convertir los vectores de la base de

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a vectores coordenadas en la base

$$S' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utilizar el resultado para la construcción de una matriz de cambio de base de S a S' .

Solución

Comenzamos calculando el vector de coordenadas $[\mathbf{v}_1]_{S'}$.

$$a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}.$$

Ahora resolvemos el sistema $\begin{cases} 1 = a_{12} + a_{13} \\ 2 = a_{11} + a_{12} \\ 3 = a_{11} + a_{13} \end{cases}$.

la solución es : $\{a_{11} = 2, a_{12} = 0, a_{13} = 1\}$.

$$\text{Por tanto } [\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{S'} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Al repetir los pasos anteriores para \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 , se obtiene

$$[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{S'} = a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} \\ a_{21} + a_{22} \\ a_{21} + a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{32} + a_{33} \\ a_{31} + a_{32} \\ a_{31} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con estos resultados, podemos construir el cambio de base de la matriz P de S a S'.

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \quad [\mathbf{v}_2]_{S'} \quad [\mathbf{v}_3]_{S'}] = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como era de esperar,

$$P[\mathbf{v}_1]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_{S'}$$

$$P[\mathbf{v}_2]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_{S'}$$

$$P[\mathbf{v}_3]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_{S'}$$

A continuación, utilizamos P^{-1} , la matriz de cambio de base de S' de S, para revertir estos cálculos.

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Como era de esperar,

$$P^{-1}[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_S$$

$$P^{-1}[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_S$$

$$P^{-1}[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_S.$$

Con esto se completa el cambio deseado de las coordenadas.

2.4 Transformaciones Lineales

Definición 2.20 Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; una transformación lineal de V en W es una función $T : V \rightarrow W$ que satisface dos condiciones:

$$(a) T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$(b) T(\lambda.v) = \lambda.T(v)$$

para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y cualquier escalar $\lambda \in K$. Se dice también que T es un operador lineal de V en W , o

que T es una función K -lineal de V en W .

Ejemplo 2.64 La función $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, 2y)$ es una transformación lineal.

Ejemplo 2.65 La integración puede considerarse como un operador lineal S del espacio $C(\mathbb{R})$ (o $c(a, b)$) en \mathbb{R} :

$$S(f) = \int f(x)dx + C \text{ con } C = 0$$

Ejemplo 2.66 Dados dos espacios vectoriales V y W , la función nula

$$\begin{aligned} O & : V \rightarrow W \\ x & \mapsto O(x) = 0 \end{aligned}$$

es una transformación lineal, denominada la transformación nula.

Ejemplo 2.67 De igual manera, la función identidad

$$\begin{aligned} I_V & : V \rightarrow V \\ u & \mapsto I_V(u) = u \end{aligned}$$

es también una transformación lineal, y se le conoce como la identidad de V .

Ejemplo 2.68 Sea $a \in \mathbb{R}$ un real fijo y el espacio de polinomios reales, entonces la función

$$\begin{aligned} T & : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R} \\ p(x) & \mapsto p(a) \end{aligned}$$

es una transformación lineal.

2.4.1 Núcleo e Imagen

Definición 2.21 Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal de V en W ; se define el núcleo de T como

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Nótese que $N(T)$ es un subespacio de V . Por otro lado, se define la imagen de T como

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid w = T(v), \text{ para algún } v \in V\};$$

$\text{Im}(T)$ es un subespacio de W . Si A es un subespacio de V y B es un subespacio de W , entonces los conjuntos

$$\begin{aligned} T(A) &= \{T(a) \mid a \in A\} \\ T^{-1}(B) &= \{v \in V \mid T(v) \in B\} \end{aligned}$$

son subespacios de W y V respectivamente.

Observación 2.6 Obsérvese que $N(T) = T^{-1}(0)$, e $\text{Im}(T) = T(V)$. La dimensión del espacio imagen $\text{Im}(T)$ se conoce como el rango de la transformación T , y la denotamos por $\text{rank}(T)$.

Ejemplo 2.69 Consideremos la función T definida por $T: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[x]$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{2n}.$$

T es una transformación lineal con núcleo 0 y $\text{rank}(T) = n + 1$.

Ejemplo 2.70 En el espacio V de las $c(a,b)$ sucesiones reales convergentes la función T definida por

$$T(\{x_n\}) = \{a - x_n\}, \text{ donde } a = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$$

es una transformación lineal cuyo núcleo es el espacio de las sucesiones constantes y cuya imagen es el espacio de las sucesiones de límite 0 . Además, la sucesión constante 1 es una base de $N(T)$ y, por otro lado, las sucesiones

$$s_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$$

$$s_2 = \{0, 1, 0, \dots\}$$

$$s_3 = \{0, 0, 1, \dots\}$$

⋮

son linealmente independientes, con lo cual $\text{Im}(T)$ y V son espacios de dimensión infinita.

A continuación presentamos y probamos uno de los teoremas básicos del álgebra lineal.

Teorema 2.6 Sea V un espacio de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim(V) = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$$

El siguiente teorema muestra que una transformación lineal queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. En otras palabras, para definir una transformación lineal basta conocer las imágenes de los vectores de una base.

Teorema 2.7 Sean V y W dos K -espacios, β una base de V y $\varphi: \beta \rightarrow W$ una función. Entonces existe una única transformación lineal $T: V \rightarrow W$ que extiende a φ , es decir, $T(v) = \varphi(v)$, para cada $v \in \beta$.

Ejemplo 2.71 Sea

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

una recta en \mathbb{R}^3 . Si P es un punto de \mathbb{R}^3 , el simétrico de P respecto a la recta \mathcal{L} es el punto P' en \mathbb{R}^3 tal que, el segmento $\overline{PP'}$ interseca perpendicularmente a la recta \mathcal{L} en el punto M (M es el, puntomedio de $\overline{PP'}$). Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(P) &= P' \text{ (} P' \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L} \text{)} \\ T(P) &= P \text{ si } P \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.72 (a) Hallar el núcleo y la imagen de T .

(b) Determinar una base para el núcleo y una base para la imagen de T .

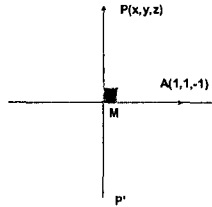
Solución

$$(a) \mathcal{L} : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \dots (1) \\ x + y + 2z = 0 \dots (2) \end{cases}$$

Sumando (1) y (2) : $3x + 3z = 0 \implies z = -x$. Luego $y = 2x + z = 2x - x = x$

Parametrizando : sea $x = t$, de donde $y = t, z = -t$

$$\mathcal{L} : P = t(1, 1, -1), t \in \mathbb{R}$$



Sea $M \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $M = (t, t, -t)$. Luego,

$$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y, z) - (t, t, -t) = (x - t, y - t, z + t)$$

$$\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{L} \implies \overrightarrow{MP} \perp A = (1, 1, -1) \implies \overrightarrow{MP} \cdot A = 0$$

$$(x - t, y - t, z + t) \cdot (1, 1, -1) = 0 \implies x - 3t + y - z = 0 \implies$$

$$x - 3t + y - z = 0 \implies t = \frac{x + y - z}{3}. \text{ Luego,}$$

$$M = \left(\frac{x + y - z}{3}, \frac{x + y - z}{3}, -\frac{x + y - z}{3} \right)$$

Como M es punto medio $\overline{PP'}$ se tiene $\frac{P+P'}{2} = M$, de donde $P' = 2M - P$

$$P' = 2 \left(\frac{x + y - z}{3}, \frac{x + y - z}{3}, -\frac{x + y - z}{3} \right) - (x, y, z)$$

$$P' = \left(\frac{-x + 2y - 2z}{3}, \frac{2x - y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y - z}{3} \right)$$

Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$T(P) = P' \text{ (} P' \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L} \text{)}$$

$$T(x, y, z) = \left(\frac{-x + 2y - 2z}{3}, \frac{2x - y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y - z}{3} \right)$$

(b) El núcleo de T está formado por los puntos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$T(x, y, z) = \left(\frac{-x + 2y - 2z}{3}, \frac{2x - y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y - z}{3} \right) = (0, 0, 0)$$

de donde

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \end{cases},$$

la Solución es: $[x = 0, y = 0, z = 0]$.

Por tanto $Nu(T) = \{(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$.

La imagen de T está formado por los puntos

$$P' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z, 2x - y - 2z, -2x - 2y - z); x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$P' = x \frac{1}{3}(-1, 2, -2) + y \frac{1}{3}(2, -1, -2) + z \frac{1}{3}(-2, -2, -1)$$

$$\text{Por tanto } \text{Im}(T) = \left\{ P' = x \frac{1}{3}(-1, 2, -2) + y \frac{1}{3}(2, -1, -2) + z \frac{1}{3}(-2, -2, -1) \right\}$$

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \{(-1, 2, -2), (2, -1, -2), (-2, -2, -1)\}.$$

$$\beta_{\text{Im } T} = \{(-1, 2, -2), (2, -1, -2), (-2, -2, -1)\} \text{ es l.i.}$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$c_1(-1, 2, -2) + c_2(2, -1, -2) + c_3(-2, -2, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(2c - c_1 - 2c_3, 2c_1 - c - 2c_3, -2c - 2c_1 - c_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2c - c_1 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 - c - 2c_3 = 0 \\ -2c - 2c_1 - c_3 = 0 \end{cases},$$

la Solución es: $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$

Ejemplo 2.73 Sea

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + z, x + y - z - 2w, -2x - y + 2w)$$

(a) Encontrar la matriz asociada de T .

(b) Hallar la dimensión de la imagen de T .

Solución

(a) La matriz asociada de T es

$$A_T = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3) \quad T(e_4)]$$

$$T(e_1) = (1, 1, -2)$$

$$T(e_2) = (0, 1, -1)$$

$$T(e_3) = (1, -1, 0)$$

$$T(e_4) = (0, -2, 2)$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Sea $w = T(x, y, z) = (x + z, x + y - z - 2w, -2x - y + 2w) \in \text{Im}(T)$ entonces

$$w = x(1, 1, -2) + y(0, 1, -1) + z(1, -1, 0) + w(0, -2, 2)$$

$$w = x(1, 1, -2) + (y - 2w)(0, 1, -1) + z(1, -1, 0); x, y, z \in \mathbb{R}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, entonces los vectores $(1, 1, -2), (0, 1, -1), (1, -1, 0)$ son linealmente dependientes.

Luego, $(1, 1, -2)$ y $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

$\text{Im}(T) = \langle \{(1, 1, -2), (0, 1, -1)\} \rangle$, de donde $\dim \text{Im}(T) = 2$

Ejemplo 2.74 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = (\lambda x + y + z, \lambda x + y, y + z)$$

Determinar el valor de λ para que el núcleo de T tenga dimensión 1 y para dicho valor de λ , hallar una base para la imagen de T .

Solución

$$T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

$$\text{núcleo de } T : \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $|A| = \lambda \neq 0$, entonces núcleo de $T = \{(0, 0, 0)\} \implies \dim \text{Nu}(T) = 0$

Si $|A| = \lambda = 0$, entonces núcleo de T se tiene :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De : $y + z = 0 \implies z = 0$

$\text{Nu}(T) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$, de donde $\dim \text{Nu}(T) = 1$

Sea $w = T(x, y, z) = (y + z, y, y + z) \in \text{Im}(T)$ entonces

$$w = y(1, 1, 1) + z(1, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}$$

$\text{Im}(T) = \langle \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\} \rangle$

Luego, $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$ son linealmente independientes. Por tanto,

$\beta_{\text{Im}(T)} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es una base para la imagen de T .

Operaciones con Transformaciones Lineales En esta lección mostraremos que el conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos K -espacios V y W es un K -espacio. Veremos además que cuando $V = W$ dicho conjunto es una K -álgebra.

Denotemos por $L(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio V en el espacio W .

$L_K(V, W)$ adquiere estructura de espacio vectorial respecto de las siguientes operaciones:

Para $T_1, T_2 \in L_K(V, W)$ y $v \in V$ se define la suma por

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v).$$

La acción de producto por un escalar sobre transformaciones viene dada por

$$(r.T)(v) = r.T(v)$$

donde $r \in K$ y $T \in L_K(V, W)$. Nótese que el cero de $L_K(V, W)$ es la transformación nula y la opuesta de $T \in L_K(V, W)$ es la transformación $-T$ definida por

$$(-T)(v) = -T(v).$$

$L_K(V, W)$ se conoce también como el *espacio de operadores lineales* de V en W .

Además de las dos operaciones definidas anteriormente, podemos considerar la composición de transformaciones lineales como una tercera operación.

En efecto, sean $T : V \rightarrow W$ y $S : Z \rightarrow U$ dos transformaciones lineales de tal manera que se cumpla la condición habitual de compatibilidad: $Im(T) \subseteq Z$. Entonces la función compuesta ST definida para cada $v \in V$ por

$$(ST)(v) = S(T(v))$$

es una transformación lineal.

Las tres operaciones introducidas gozan de las siguientes propiedades algebraicas.

Sean T, T_1, T_2, T_3 transformaciones lineales compatibles para las operaciones indicadas. Entonces

$$\begin{aligned} (T_1 T_2) T_3 &= T_1 (T_2 T_3) \\ T (T_1 + T_2) &= T T_1 + T T_2 \\ (T_1 + T_2) T &= T_1 T + T_2 T \\ a.(T_1 T_2) &= (a.T_1) T_2 = T_1 (a.T_2), a \in K \\ IT &= T = TI, \end{aligned}$$

donde I es la transformación idéntica respectiva.

De acuerdo a la discusión anterior, el espacio $L_K(V, V)$, de transformaciones lineales de V en sí mismo, viene dotado de tres operaciones: suma de vectores, producto de escalares por vectores y producto entre vectores. Resulta entonces que $L_K(V)$ es un álgebra sobre el cuerpo K , en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.22 Sea \mathcal{A} un espacio vectorial sobre un cuerpo K , se dice que \mathcal{A} es un álgebra sobre K , o también que \mathcal{A} es una K -álgebra, si en \mathcal{A} está definido un producto entre vectores que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}(v_1 v_2) v_3 &= v_1 (v_2 v_3) \\ v(v_1 + v_2) &= v v_1 + v v_2 \\ (v_1 + v_2)v &= v_1 v + v_2 v \\ \lambda.(v_1 v_2) &= (\lambda.v_1) v_2 = v_1(\lambda.v_2), \lambda \in K \\ 1v &= v = v1,\end{aligned}$$

donde $v, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{A}$, $a \in K$ y 1 es el elemento neutro del producto de vectores.

En lo siguiente presentamos el concepto de isomorfismo para grupos y anillos; en esta lección mostraremos la importancia de esta noción para el caso de los espacios vectoriales.

Definición 2.23 Una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es inyectiva si para cualesquiera elementos $u, v \in V$ se cumple que:

$$T(u) = T(v) \implies u = v.$$

T se dice sobreyectiva si $Im(T) = W$.

Proposición 2.13 Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva.
2. $N(T) = 0$.
3. Si v_1, \dots, v_n son vectores L.I. de V , entonces $T(v_1), \dots, T(v_n)$ son vectores L.I. de $Im(T)$.
4. Si β es una base de V , entonces $T(\beta)$ es una base de $Im(T)$.

En particular, si V y W son espacios de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

Definición 2.24 Se dice que T es biyectiva si T es inyectiva y sobreyectiva. Dos K -espacios V y W se dicen isomorfos si existe una transformación lineal biyectiva T de V en W . Esta relación entre V y W se denota por $V \cong W$.

Siendo T biyectiva, existe la función inversa de T definida por

$$T^{-1} : W \rightarrow V$$

$$T^{-1}(w) = v \iff T(v) = w$$

donde $w \in W$ y $v \in V$. Es obvio que T^{-1} es también una transformación lineal y cumple las siguientes condiciones:

$$T T^{-1} = I \text{ identica}, T^{-1} T = I \text{ identica}$$

Nótese que T^{-1} es la única transformación de W en V que cumple estas identidades, y se le conoce como la inversa de T . Hemos visto entonces que una transformación lineal biyectiva tiene inversa, ésta es única y viene caracterizada por las identidades anteriores.

Nótese que la relación “ser isomorfo” es una relación de equivalencia en la colección de todos los K -espacios. Es también claro que la composición de dos isomorfismos es nuevamente un isomorfismo. Un isomorfismo T de un espacio V en si mismo se denomina un automorfismo de V . La colección de todos los automorfismos de un espacio V se denota por $\text{Aut}_K(V)$. Se tiene entonces inmediatamente el siguiente resultado.

Si V es un K -espacio, entonces $\text{Aut}_K(V)$ es un grupo respecto de la composición de transformaciones con elemento neutro I_V .

Una consecuencia inmediata de la Proposición anterior es el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. T es inyectiva
2. $N(T) = 0$
3. T es sobreyectiva
4. $\text{rank}(T) = n$
5. T es un automorfismo.

2.4.2 Matrices y transformaciones lineales

En este capítulo, usted también aprenderá que todas las matrices determinan las transformaciones lineales. Usted también aprenderá cómo representar transformaciones lineales de matrices y estudiar la conexión entre diferentes matrices que representan la misma transformación lineal. Estas matrices se denominan matrices similares.

Usted aprenderá que las matrices similares están vinculados a través invertible de cambio de base de matrices.

Las matrices de las transformaciones lineales

Sea V un espacio n -dimensional y W es un espacio vectorial m -dimensional sobre los mismo campo k . Entonces sabemos de teorema de isomorfismo que en relación con una base fija de S de V , el espacio V es isomorfo a k^n , y en relación con una base fija S' de W , el W es isomorfo al espacio k^m . En relación con estos isomorfismos, por lo tanto, cada vector $x \in V$ corresponde a un único vector de coordenadas $[x]_S \in k^n$, y cada vector $T(x) \in W$ corresponde a un único vector de coordenadas $[T(x)]_{S'}$. En esta sección, vamos a utilizar tales isomorfismos para representar a cada transformación lineal $T : V \rightarrow W$ por una transformación de matriz $[T]_{S'}^S : k^n \rightarrow k^m$ de modo que $[T]_{S'}^S [x]_S = [T(x)]_{S'}$. La matriz $[T]_{S'}^S$ se llama la *matriz de T* en las bases de S y S' . Diferentes bases S y el rendimiento de diferentes matrices S' .

Definición 2.25 *La matriz de una transformación lineal $T : k^n \rightarrow k^m$ en la base $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para k^n y la base S' para k^m es la matriz*

$$A = [T]_{S'}^S = [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}]$$

cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[T(\mathbf{v}_i)]_{S'}$ en la base S' de la imagen $T(\mathbf{v}_i)$ de la base de vectores $\mathbf{v}_i \in S$.

Definición 2.26 *Si $T : k^n \rightarrow k^m$ es una transformación lineal y si E es la base estandar para k^n y E' la base estandar para k^m , entonces la matriz*

$$[T]_{E'}^E = [[T(\mathbf{e}_1)]_{E'} \cdots [T(\mathbf{e}_n)]_{E'}]$$

es la matriz estándar de T .

Teorema 2.9 (teorema de representación de la matriz). Si A es la matriz de una transformación lineal $T : k^n \rightarrow k^n$ en la bases S y S' , entonces $[T(\mathbf{x})]_{S'} = A [\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, y supongamos que $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$ es cualquier vector en k^n . Entonces, el vector de coordenadas de x en la base S es

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{x})]_{S'} &= [T(a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n)]_{S'} \\ &= a_1 [T(\mathbf{v}_1)]_{S'} + \dots + a_n [T(\mathbf{v}_n)]_{S'} \\ &= [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \dots \ [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= A [\mathbf{x}]_S. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.75 La transformación identidad como una matriz de cambio de base.

Sea $I : k^n \rightarrow k^n$ es la transformación identidad de un espacio vectorial V sobre un campo k , and let $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $S' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ son dos bases k^n . Entonces por definición,

$$[I]_{S'}^S = [[I(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \dots \ [I(\mathbf{v}_n)]_{S'}] = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \dots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] = P \in k^{n \times n}$$

es la matriz de cambio de bases S a S' , y

$$[I]_S^{S'} = [[I(\mathbf{w}_1)]_S \ \dots \ [I(\mathbf{w}_n)]_S] = [[\mathbf{w}_1]_S \ \dots \ [\mathbf{w}_n]_S] = Q \in k^{n \times n}$$

es la matriz de cambio de bases S' a S .

Ejemplo 2.76 La transformación identidad como la matriz identidad

Ejemplo 2.77 .

Probar que la transformación identidad $I : k^n \rightarrow k^n$ es representada por una matriz identidad I_n , provista de las bases S y S' es la base estándar de $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ para k^n definida anteriormente.

Solución. Por teorema de representación de la matriz,

$$[I]_E^E = [[I(\mathbf{e}_1)]_E \ \dots \ [I(\mathbf{e}_n)]_E].$$

Pero $[I(\mathbf{e}_i)]_E = \mathbf{e}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$[I]_E^E = [\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n] = I_n \in k^{n \times n}.$$

Esto demuestra que la matriz de identidad representa la transformación de la identidad, siempre que la base estándar que se elija, tanto para el dominio y el codominio de I .

Ejemplo 2.78 Una matriz de una transformación lineal

Ejemplo 2.79 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Sea

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$S' = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dos bases para \mathbb{R}^2 . Encontrar la matriz $[T]_{S'}^S$ representante a la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x - 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculando los valores de T en la base S .

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{v}_2) &= \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Por tanto

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$A = [T]_{S'}^S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vamos a verificar que $A[\mathbf{x}]_S$ nos da los valores esperados mediante el cálculo de $A[\mathbf{v}_1]_S$ y $A[\mathbf{v}_2]_S$.

Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$A[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{S'}.$$

Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$A[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{S'}.$$

Por lo tanto, representa la transformación lineal T en las bases S y S' .

Es importante señalar que en la especificación de las bases $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2\}$ y $S' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ en el ejemplo anterior, se supone que las bases se ordenan. Esto significa que \mathbf{v}_1 viene antes de \mathbf{v}_2 en S y \mathbf{e}_1 antes de \mathbf{e}_2 en S' . Si cambiamos el orden de los vectores en S y T

representan en las bases de $S'' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ y S' , por ejemplo, entonces

$$[T]_{S''}^{S''} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.80 Una Matriz de una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Sea

$$S = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para \mathbb{R}^3 y

$$S' = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para \mathbb{R}^2 . Encontrar la matriz $[T]_{S'}^S$, que representa la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{bmatrix}.$$

Solución. Por definición,

$$[T]_{S'}^S = [[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_2)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_3)]_{S'}].$$

Calculando los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}$, $[T(\mathbf{w}_2)]_{S'}$, y $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$$T(\mathbf{w}_1) = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{w}_2) = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{w}_3) = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego ahora calculamos los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}$, $[T(\mathbf{w}_2)]_{S'}$, y $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$$[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = 3a + 5b \end{cases}, \text{ la solución es : } \{b = 4, a = -7\}$$

$$\text{Por tanto } [T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$[T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5 = a + 2b \\ -4 = 3a + 5b \end{cases}, \text{ la solución es : } \{a = -33, b = 19\}$$

$$\text{Por tanto } [T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

$$[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = a + 2b \\ 1 = 3a + 5b \end{cases}, \text{ la solución es : } \{a = -13, b = 8\}$$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Esto significa que

$$[T]_{S'}^S = [[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} \quad [T(\mathbf{w}_2)]_{S'} \quad [T(\mathbf{w}_3)]_{S'}] = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Ejercicios Propuestos :Transformaciones lineales

1. Analizar si las siguientes transformaciones de V a W son lineales o no

- (a) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad T(x, y, z) = (x, y)$
- (b) $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad T(x, y) = (x^2, y^2)$
- (c) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad T(x, y, z) = (0, y)$
- (d) $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad T(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$
- (e) $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad T(x) = (x, \dots, x)$
- (f) $T : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_1, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$
- (g) $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1], \quad T(f(x)) = f(x) + 1$

2. Si $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, está dada por $T(x, y) = (-x, -y)$; describir T geoméricamente

3. Suponga que el vector $v = (x, y)$ en el plano XY se rota un ángulo θ en sentido antihorario, obteniéndose el vector $v' = (x', y')$.

(a) Justificar que

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

La transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x', y')$ se denomina transformación de rotación y la matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

se denomina matriz de rotación (asociada a la transformación T)

(b) ¿Qué sucede con el vector $v = (-3, 4)$ si se le rota un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ en sentido antihorario?

4. Determinar la expresión del operador lineal $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, sabiendo que, para todo $v = (x, y)$, el segmento de recta determinado por v y $T(v) = (x', y')$ es horizontal y tiene su punto medio en la recta $y = x$. ¿Cuál es la imagen del eje Y por la transformación T ?

5. Sea $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una transformación lineal. Responder con verdadero o falso

- (a) Si $v \in V$ es tal que $T(v) = 0$, entonces $v = 0$
- (b) Si $T(w) = T(u) + T(v)$, entonces $w = u + v$
- (c) Si v es combinación lineal de u_1, \dots, u_m , entonces $T(v)$ es combinación lineal de $T(u_1), \dots, T(u_m)$

6. Proporcionar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ tal que

- (a) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces el conjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_m)\}$ es L.I
- (b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces el conjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_m)\}$ es L.D

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T(u) = \text{Proyección ortogonal de } u \text{ sobre } v = (-2, 1, 3).$$

- (a) Hallar una fórmula para T .
 - (b) Encontrar una base para el núcleo de T y una base para la imagen de T .
8. Considere $\mathcal{M}_{3 \times 3}$, el espacio de matrices 3×3 y sea la aplicación

$$T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}$$

definida por

$$T(A) = A + A^t, \text{ donde } A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$$

- (a) Demuestre que T es una transformación lineal.
 - (b) Halle el núcleo de T .
9. Sea $\mathcal{M} : x - y - z = 0$, un plano en \mathbb{R}^3 . Si p es un punto de \mathbb{R}^3 , el simétrico de p respecto al plano \mathcal{M} es el punto p' en \mathbb{R}^3 tal que, el segmento $\overline{pp'}$ interseca perpendicularmente al plano \mathcal{M} en el punto Q (Q es el punto medio de pp'). Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(p) &= p' \text{ (} p' \text{ es simétrico de } p \text{ respecto a } \mathcal{M}) \\ T(p) &= p \text{ si } p \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

- (a) Halle la matriz que representa a T .
- (b) Determinar el núcleo de T .

2.5 Valores y Vectores Propio

En la sección anterior vimos que cada transformación lineal T de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$ se puede representar por medio de una matriz A de orden n , la cual permite conocer propiedades de la transformación T , por ejemplo, es claro que T es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. Si la matriz A tiene un aspecto sencillo es muy fácil obtener información de T a partir de ella. La forma más simple que puede tener una matriz es la forma diagonal. En este capítulo estudiaremos criterios para diagonalizar matrices.

2.5.1 Valores y Vectores Propio

Definición 2.27 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación de un K -espacio V , un escalar $a \in K$ se dice que es un valor propio de la transformación T si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda \cdot v$. En tal caso se dice que v es un vector propio de T perteneciente al valor propio a . Nótese que un vector propio solo puede ser asociado a un solo valor propio.

Ejemplo 2.81 Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 3y)$, $\lambda = 2$ es un valor propio con vector propio $(6, 0)$; $\lambda = 3$ es también un valor propio de T con vector propio $(0, -2)$.

Definición 2.28 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y $a \in K$, el conjunto

$$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda \cdot v\}$$

es un subespacio de V ; nótese que $E_\lambda \neq 0$ si y solo si E_λ es un valor propio de T , en tal caso E_λ se denomina el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ .

Ejemplo 2.82 Sea D el operador derivación definido sobre el espacio de funciones reales cuyas derivadas de cualquier orden existen, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $E(\lambda) = \{c e^{\lambda x} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 2.83 Existen transformaciones lineales sin valores propios, es decir, $E(\lambda) = 0$, para cada $\lambda \in K$. En efecto, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (y, -x)$$

no tiene valores propios.

Proposición 2.14 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V . Sean a_1, \dots, a_r valores propios diferentes con vectores propios v_1, \dots, v_r , respectivamente. Entonces v_1, \dots, v_r son L.I. En particular, si V es de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T tiene a lo sumo n valores propios diferentes. Si T tiene exactamente n valores propios diferentes, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V .

Demostración.Ejercicio.

El recíproco de la proposición anterior no es siempre cierto, por ejemplo, si $T = I_V$, cualquier base de V pertenece a 1, que es el único valor propio de I_V .

Ejemplo 2.84 Sea $K[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo K , y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces para cada polinomio $p(x) \in K[x]$ se tiene que $p(T)$ es una transformación lineal de V en V , además si $a \in K$ es un valor propio de T con vector propio v , entonces $p(a)$ es un valor propio de $p(T)$ con vector propio v . En tal caso, $E(a) \subseteq N(p(T))$ si a es raíz de $p(x)$, y $E(a) \subseteq \text{Im}(p(T))$ si λ no es raíz de $p(x)$.

2.5.2 Polinomio Característico

En la sección anterior definimos la teoría de determinantes para matrices con entradas en un cuerpo, sin embargo la invertibilidad de los elementos del cuerpo no fue usada en la construcción. Esto indica que se puede desarrollar la teoría de determinantes para matrices con entradas en un anillo conmutativo, por ejemplo, con entradas polinómicas. Esta observación nos permite definir un invariante muy importante de una transformación lineal de un espacio de dimensión finita: su polinomio característico. Comencemos por definir el polinomio característico de una matriz cuadrada.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$ sobre un cuerpo K . Se define el *polinomio característico* de A por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Nótese que efectivamente $p_A(x) \in K[x]$. Se puede probar fácilmente que para $p_A(x)$ se tienen las siguientes propiedades:

- a) $p_A(x)$ es un polinomio de grado n .
- b) Siendo $p_A(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + p_nx^n$, entonces se tiene que $p_0 = (-1)^n \det(A)$, $p_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ y $p_n = 1$.

c) Matrices similares tienen el mismo polinomio característico. El recíproco de esta afirmación no es siempre cierto, como lo ilustran las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces se define el polinomio característico de T como el polinomio característico de la matriz de T en cualquier base, y se denota por $p_T(x)$. En otras palabras, el polinomio característico de T es un invariante de T que no depende de la base elegida en V , y se tiene que $p_T(x) = p_A(x)$, donde $A = m_X(T)$ y X es cualquier base de V .

El polinomio característico es un instrumento para determinar los valores propios de una transformación lineal.

Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $a \in \mathbf{K}$. Entonces, a es un valor propio de T si y solo si a es raíz del polinomio característico de T , es decir, $p_T(a) = 0$.

Insistimos en que este resultado es válido para valores $a \in \mathbf{K}$. Podría ocurrir que las raíces del polinomio característico no pertenecieran al cuerpo K , por ejemplo, en el caso en que K sea el cuerpo de números reales y todas las raíces de $p_T(x)$ fueran complejas, entonces no tendríamos valores propios.

Un cuerpo K se dice *algebraicamente cerrado* si todas las raíces de todos sus polinomios pertenecen a K , por ejemplo, el cuerpo \mathbf{C} de números complejos es algebraicamente cerrado, en cambio, el cuerpo \mathbf{R} de números reales no lo es.

Corolario 2.10 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal del K -espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces, T tiene n valores propios (no necesariamente diferentes) correspondientes a las n raíces de su polinomio característico.*

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$, un elemento $\lambda \in K$ se dice que es un valor propio de A si existe una matriz columna no nula $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in K^n$ tal que $Au = \lambda u$. La teoría de valores y vectores propios para matrices está relacionada de manera obvia con la correspondiente teoría para transformaciones lineales.

Corolario 2.11 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un K -espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , $A = m_\beta(T)$ y $\lambda \in K$. Entonces, λ es un valor propio de T si y solo si λ es un valor propio de A . Mas exactamente, $v = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$ es un vector propio de T perteneciente al valor propio λ si y solo si $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ es un vector propio de A perteneciente al valor propio λ .

2.5.3 Matrices Diagonalizables

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Se dice que T es diagonalizable si existe una base β en V tal que es una matriz diagonal. Una matriz A de orden $n \geq 1$ se dice que es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal. Teniendo en cuenta que matrices que representen la misma transformación lineal son similares, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.15 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea β una base cualquiera de V . Entonces, T es diagonalizable si y solo si $m_\beta(T)$ es diagonalizable.

En términos de vectores propios se tiene el siguiente criterio obvio de diagonalización.

Teorema 2.12 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. T es diagonalizable si y solo si V tiene una base constituida por vectores propios.

Según la proposición y el corolario se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.13 Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,

- a) A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios LI.
- b) Si A tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

El recíproco de la parte b) del corolario anterior no siempre se cumple: la matriz idéntica E es diagonal, sin embargo sus n valores propios coinciden y son iguales a 1.

Proposición 2.16 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T , $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_r)$ los subespacios propios correspondientes. Entonces, la suma $E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_r)$ es directa. En consecuencia,

$$\dim(E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)) = \dim(E(\lambda_1)) + \dots + \dim(E(\lambda_r)).$$

Podemos probar ahora un criterio de diagonalización en términos del polinomio característico y de los espacios propios.

Teorema 2.14 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T , $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_r)$ los subespacios propios correspondientes. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) T es diagonalizable.
- b) El polinomio característico de T es de la forma

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_r)^{d_r},$$

donde $d_i = \dim(E(\lambda_i))$, $1 \leq i \leq r$.

c) $\dim(V) = \dim(E(\lambda_1)) + \dots + \dim(E(\lambda_r))$.

d) $V = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$.

Ejemplo 2.85 Encontrar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) - 2((5 - \lambda) - 4) - (-4 + 4\lambda)$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) - 2(1 - \lambda) + 4(1 - \lambda)$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + 2(1 - \lambda)$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Por lo tanto los valores propios de A son $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$

Para determinar un vector propio $v = (x, y, z)$ asociado con $\lambda = 1$, formamos el sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \sim \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - 4F_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 \leftrightarrow F_3 - 4F_1 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \implies x = y - z = y - 2y = -y \\ 2y - z = 0 \implies z = 2y \end{cases}$$

Los vectores propios buscados son $v = (x, y, z) = (-y, y, 2y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 2$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \sim \\ F_4 \leftrightarrow F_4 - 4F_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \implies x = 2y - 4y = -2y \\ 4y - z = 0 \implies z = 4y \end{cases}$$

Los vectores buscados son $v = (x, y, z) = (-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$, $y \in \mathbb{R}$.

Los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 3$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow E_2 + 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow E_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \Rightarrow x = 3y - 4z = -y \\ -4y + z = 0 \Rightarrow z = 4y \end{cases}$$

Los vectores propios buscados son $v = (x, y, z) = (-y, y, 4y) = y(-1, 1, 4)$, $y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.86 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz asociada A tal que

$$|A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

(a) Hallar los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A .

(b) Sean $(1, 0, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(-1, 2, 0)$ vectores propios correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ respectivamente con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Calcular $T(1, 0, 1)$, $T(1, 2, 1)$ y $T(-1, 2, 0)$.

(c) Hallar $T(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solución

(a) Sea $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ son los valores propios de A .

(b) Los vectores propios $T(v) = \lambda v$

$$T(v_1) = T(1, 0, 1) = -1(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$$

$$T(v_2) = T(1, 2, 1) = 1(1, 2, 1) = (1, 2, 1)$$

$$T(v_3) = T(-1, 2, 0) = 2(-1, 2, 0) = (-2, 4, 0)$$

(c) Sea $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 2, 1) + \gamma(-1, 2, 0)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta - \gamma \\ y = 2\beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2z - \frac{1}{2}y - x, \beta = x + \frac{1}{2}y - z, \gamma = z - x$$

Luego,

$$T(x, y, z) = \alpha T(1, 0, 1) + \beta T(1, 2, 1) + \gamma T(-1, 2, 0)$$

$$T(x, y, z) = \alpha(-1, 0, -1) + \beta(1, 2, 1) + \gamma(-2, 4, 0)$$

$$T(x, y, z) = (\beta - \alpha - 2\gamma, 2\beta + 4\gamma, \beta - \alpha)$$

Por tanto,

$$T(x, y, z) = (4x + y - 5z, y - 2x + 2z, 2x + y - 3z)$$

Ejercicios Propuestos: Valores propios y vectores propios

1. Hallar el polinomio característico, los valores propios y vectores propios de cada matriz :

$$\begin{array}{lll}
 (a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 (d) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} & (e) \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; bc \neq 0 &
 \end{array}$$

2. Suponga que la matriz A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$.

- Demostrar que los valores propios de A^t son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$.
- Demostrar que los valores propios de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \alpha\lambda_3, \dots, \alpha\lambda_k$.
- Demostrar que A^{-1} existe si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \neq 0$.
- Si A^{-1} existe, demostrar que los valores propios de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$.
- Demostrar que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores propios $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \lambda_3 - \alpha, \dots, \lambda_k - \alpha$.
- Demostrar que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de la diagonal principal.

3. Si A y B son matrices semejantes de orden $n \times n$. Demostrar que A y B tienen los mismos valores propios.

Nota. Dos matrices A y B de orden $n \times n$, son **semejantes** si existe una matriz invertible C de orden $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

4. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar una matriz que diagonalice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Determinar los valores y vectores propios del operador derivación sobre el espacio n -polinomios. ¿Es este operador diagonalizable?
- Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \geq 1$ y $m \geq 1$, respectivamente. Demuestra que el polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

es $p_A(x)p_B(x)$.

- Sea A una matriz de orden $n \geq 1$ y $p(x)$ un polinomio cualquiera. Demostrar que si A es diagonalizable, entonces $p(A)$ es diagonalizable.
- Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$ tal que $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Demostrar que 1 es un valor propio de A .

Funciones vectoriales de variables real

2.6 Introducción

Este capítulo está compuesto por cuatro secciones, en la primera introducimos el concepto de bola abierta y a partir de él llegamos a los conceptos básicos de la topología en \mathbb{R}^n como son: punto interior, conjunto abierto, punto adherente, punto de acumulación, conjunto cerrado, frontera de un conjunto y conjunto acotado.

En la segunda sección introducimos la noción de curva en \mathbb{R}^n , y los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración de funciones vectoriales. Presentamos los teoremas fundamentales del cálculo para funciones vectoriales e introducimos los conceptos de vector tangente y vector normal. Finalmente introducimos el concepto de plano osculador.

En la tercera sección introducimos el concepto de longitud de arco, función longitud de arco y curvatura de una curva.

La cuarta sección está dedicada a presentar un ejemplo de las ideas anteriores a la teoría newtoniana de la gravitación: A partir de las leyes de Newton mostramos cómo se deducen las leyes de Kepler.

Cada sección tiene un grupo de problemas que el estudiante debe resolver. Adicionalmente hemos incluido en cada sección

2.7 Topología en \mathbb{R}^n

Uno de los conceptos que podemos iniciar es la definición de bola abierta. Concretamente tenemos:

Definición 2.29 *El conjunto*

$$B(Q, r) = \{P \in \mathbb{R}^n, \|P - Q\| < r\}$$

se llama la bola abierta de centro Q y radio r .

Con la ayuda de la definición anterior introducimos los siguientes conceptos:

Definición 2.30 1. **Punto interior:** Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Un vector $P \in S$ se dice un punto interior a S si existe una $B(P, r)$ tal que $B(P, r) \subset S$.

El conjunto de puntos interiores es denotado por S° . Es claro que $S^\circ \subset S$.

Por ejemplo, todos los puntos de la bola $B(P, r)$ son puntos interiores de ella.

2. **Conjunto abierto:** Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama un conjunto abierto de \mathbb{R}^n si todos sus puntos son puntos interiores. Esto es $S = S^\circ$.

Por ejemplo, la bola $B(Q, r)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , todo el espacio \mathbb{R}^n es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , así mismo, el conjunto Φ es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Es importante observar que estamos diciendo que un conjunto es abierto de otro. Esto quiere decir que un conjunto A puede ser un abierto de Q más no un abierto de P . Por ejemplo: el intervalo $(0, 1)$ es un abierto de \mathbf{R} más no es un abierto de \mathbf{R}^n , $n \geq 2$.

3. Punto adherente: Decimos que $P \in \mathbf{R}^n$ es un punto adherente de un subconjunto S de \mathbf{R}^n si para todo $\varepsilon > 0$, $B(P, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos adherentes de S lo denotamos con \overline{S} .

Es claro, de la definición de punto adherente, que $S \subset \overline{S}$. Por ejemplo, el conjunto $\{Z \in \mathbf{R}^n, \|Z - X\| \leq r\}$ está formado por puntos adherentes de $B(Q, r)$.

Dentro del conjunto de puntos adherentes están los puntos de acumulación.

4. Puntos de acumulación: Decimos que $P \in \mathbf{R}^n$ es un punto de acumulación de un subconjunto S de \mathbf{R}^n si para todo $\varepsilon > 0$, $B(P, \varepsilon)$ posee infinitos puntos de S .

Los puntos de acumulación de S son denotados con S' . Es claro que $S' \subset \overline{S}$.

Por ejemplo, el conjunto $\{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbf{R}$ tiene como único punto de acumulación al punto 0.

5. Conjuntos Cerrados: Un conjunto S de \mathbf{R}^n se dice cerrado en \mathbf{R}^n si $S = \overline{S}$.

El ejemplo más clásico de conjunto cerrado es

$$\overline{B(Q, r)} = \{P \in \mathbf{R}^n, \|Q - P\| \leq r\}.$$

Debemos advertir que los conceptos cerrado y abierto no son contrarios. Un conjunto puede ser al mismo tiempo abierto y cerrado, por ejemplo \mathbf{R}^n y \emptyset son conjuntos abiertos y cerrados, o también, no ser ni abierto ni cerrado, por ejemplo el conjunto de números racionales \mathbf{Q} no es ni abierto ni cerrado de \mathbf{R} .

Nota: Cuando una colección \mathcal{T} de subconjuntos de \mathbf{R}^n contiene al mismo \mathbf{R}^n , al conjunto \emptyset y satisface que la unión arbitraria y la intersección finita de elementos de \mathcal{T} es un elemento de \mathcal{T} , decimos que dicha colección es una topología. Por ejemplo, la familia de conjuntos abiertos de \mathbf{R}^n es una topología de él.

6. Punto frontera: Sea S un subconjunto de \mathbf{R}^n . Decimos que $Z \in \mathbf{R}^n$ es un punto frontera de S si toda bola abierta $B(Z, \varepsilon)$ contiene puntos de S y puntos de S^c .

El conjunto de todos los puntos frontera de S lo denotamos como ∂S . Es claro que $\partial S = \overline{S} \cap (\overline{\mathbf{R}^n - S})$. Por lo tanto ∂S es cerrado de \mathbf{R}^n .

Por ejemplo,

$$\partial B(Q, r) = \{P \in \mathbf{R}^n, \|P - Q\| = r\}$$

7. Conjunto acotado: Un subconjunto S de \mathbf{R}^n se dice acotado si existe $B(\Theta, r)$ tal que $S \subseteq B(\Theta, r)$.

Los subconjuntos de \mathbf{R}^n que son cerrados y acotados se llaman *compactos*. Estos tienen la propiedad que todo subconjunto infinito de ellos posee un punto de acumulación en él. La prueba de esta importante propiedad se sale de los propósitos de este curso. Ella se basa en un célebre resultado conocido como el Teorema de Heine-Borel que afirma:

Definición 2.31 Si \mathcal{C} es una colección de conjuntos abiertos \mathbb{R}^n tal que su unión contiene a un subconjunto C de \mathbb{R}^n que es cerrado y acotado, entonces existe una subcolección finita de \mathcal{C} cuya unión también contiene a A .

Para su prueba referimos al lector a cualquier texto de Análisis Matemático.

La definición de límite para funciones de varias variables es similar a aquélla para funciones de una variable, pero con la salvedad de que los entornos tomados alrededor del punto donde queremos encontrar el límite serán ahora discos o bolas, de acuerdo a la dimensión del espacio de las variables.

Mientras que en funciones de una variable hay sólo dos maneras de acercarnos a un punto del dominio —por derecha y por izquierda—, en funciones de varias variables hay

infinitos caminos para acercarse a un punto del plano de las variables. Para que exista un límite, el mismo debe ser igual para todos los posibles acercamientos.

Igual que en funciones de una variable, para que una función de varias variables sea continua en un punto debe estar definida en el mismo, debe tener límite en él y el valor de la función debe ser igual al del límite. Si una función es combinación de otras continuas, será también continua excepto en aquellos puntos donde no esté definida.

Ejemplo 2.87 *Conjuntos abiertos. Mostrar que el siguiente conjunto del plano es abierto:*

$$\Omega = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

Solución. En el plano, un conjunto es abierto cuando dado un elemento $(x; y)$ perteneciente al conjunto es posible trazar un disco alrededor de dicho punto tal que todos los elementos del disco pertenecen al conjunto.

En el caso de nuestro problema, tenemos que cualquier punto $(x_0; y_0)$ perteneciente al conjunto estará a una cierta distancia de cada uno de los cuatro bordes, no pudiendo estar exactamente sobre los mismos dado que las desigualdades son estrictas.

En esas condiciones, para seleccionar un δ tal que todos los puntos en un disco de radio δ pertenezcan al conjunto, basta tomar:

$$\delta < \min\{(x_0 + 1), (1 - x_0), (y_0 + 1), (1 - y_0)\}$$

Esto es, δ debe ser menor que la menor distancia del punto a los bordes. De esa manera, tendremos que para cualquier punto $(x; y)$ del disco se verificará:

$$\begin{aligned} x > x_0 &\Rightarrow x - x_0 < \delta < 1 - x_0 \Rightarrow x < 1 \\ x < x_0 &\Rightarrow x_0 - x < \delta < x_0 + 1 \Rightarrow x > -1 \\ > y_0 &\Rightarrow y - y_0 < \delta < 1 - y_0 \Rightarrow y < 1 \\ y < y_0 &\Rightarrow y_0 - y < \delta < y_0 + 1 \Rightarrow y > -1 \end{aligned}$$

Esto es, cualquier punto dentro del disco cumplirán las cuatro condiciones requeridas para que pertenezca al conjunto Ω . Por ende, el conjunto es abierto.

2.8 Función vectorial de variable real

Definición 2.32 *Una aplicación $F : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, donde I es un subconjunto de \mathbf{R} se llama una función vectorial. Puesto que para cada $t \in I$, $F(t) \in \mathbf{R}^n$, entonces*

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

donde las funciones coordenadas o componentes de F son

$$\begin{aligned} f_k : I \subset \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f_k(t). \quad , k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

es la k -ésima componente o coordenada del vector $F(t)$.

Así, para todo $t \in \mathcal{D}(F) := \bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}(f_k)$

Las funciones $f_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ son las funciones componentes de F . Es por ello que todas las propiedades de F , como veremos, reposan en las propiedades de las funciones componentes.

Ejemplo 2.88 1. $F(t) = P + tA$, $t \in \mathbf{R}$, P y A vectores fijos de \mathbf{R}^n es una función vectorial que representa una recta en \mathbf{R}^n .

2. $F(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbf{R}$ es una función vectorial que representa una circunferencia de centro cero y radio uno en \mathbf{R}^2 .

3. $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$ es una función vectorial que representa una parábola

La imagen $F(I)$ es un subconjunto de \mathbf{R}^n y determina una curva en él. Es claro que una curva en \mathbf{R}^n puede estar determinada por diferentes funciones vectoriales, por ejemplo: $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \geq 0$ y $\beta(t) = (t^2, t^4)$, definen la misma curva en \mathbf{R}^2 . No obstante, aunque es un abuso, para simplificar la escritura, *identificaremos* la curva con la función que la define.

Operaciones algebraicas con funciones vectoriales:

Definición 2.33 Si F y G son funciones vectoriales con rangos en \mathbf{R}^n y dominios $\mathcal{D}(F)$ y $\mathcal{D}(G)$ en \mathbf{R} , entonces $F + G$, $F \cdot G$ y $F \times G$ son funciones con dominio $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$ y reglas de correspondencias :

1. $(F \pm G)(t) = F(t) \pm G(t)$
2. $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$
3. $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$ (definidas solamente si $n = 3$).

Si F es una función vectorial y $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función real de variable real, entonces la función $\phi \cdot F$ está definida como sigue :

$$(\phi F)(t) = \phi(t)F(t), \mathcal{D}_{\phi F} = \mathcal{D}(\phi) \cap \mathcal{D}(F).$$

Además, si la función vectorial $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ y la función escalar $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que $\mathcal{R}(\phi) \cap \mathcal{D}(F) \neq \emptyset$, donde

$$\mathcal{D}_{F \circ \phi} = \{t \in \mathcal{D}(\phi) : \phi(t) \in \mathcal{D}(F)\}$$

y regla de correspondencia

$$(F \circ \phi)(t) = F(\phi(t)),$$

se denomina composición de las funciones ϕ y F en ese orden.

2.9 Límite de funciones vectoriales

En esta sección extenderemos el concepto de límite de una función real de una variable real a las funciones vectoriales de una variable real. Las funciones F que se consideran en esta sección tienen dominio $\mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R}$ y rango $\text{ran}(F) \subset \mathbf{R}^n$.

Cualquier límite debe definirse en puntos de acumulación del dominio de una función.

Un punto de acumulación t_0 de $\mathcal{D}(F)$ es un punto de \mathbf{R}^n (que puede pertenecer o no a $\mathcal{D}(F)$) que tiene la propiedad de que tan cerca como se quiera de él, deben existir puntos $t (\neq t_0)$ de $\mathcal{D}(F)$.

En cada uno de los límites siguientes, será un punto de acumulación de los dominios correspondientes.

La siguiente definición es la formalización del hecho intuitivo: el límite de F en t_0 es L , si como sea que se tome $t \in \mathcal{D}(F)$ "muy cerca" de t_0 , entonces $F(t)$ estará "muy cerca" de L .

Definición 2.34 Sea $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial y sea $t_0 \in \mathcal{D}(F)$. Entonces se dice que el vector $L = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$ es el límite de la función F en t_0 y escribimos si dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que t_0 esté en el dominio de F y

$$0 < |t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - L\| < \varepsilon.$$

Al aplicar la definición para demostrar que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$, debemos demostrar que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : t \in \mathcal{D}(F) \wedge 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - L\| < \varepsilon.$$

Lo que se requiere es mostrar cómo se elegirá $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado cualquiera. Es decir, debemos dar una regla

para la selección de $\delta > 0$ en términos de $\varepsilon > 0$.

La desigualdad $0 < |t - t_0|$ en la definición implica que $t \neq t_0$. Nosotros excluimos $t = t_0$ para ser capaces de considerar el límite de F en t_0 cuando no está definido $F(t_0)$.

En esta sección, siempre que hablemos del límite de una función F en t_0 , supondremos que t_0 es un punto de acumulación del dominio de F . Si t_0 no es un punto de acumulación del dominio de F , entonces el límite de f en t_0 no es único.

Observación.

Así pues, decimos que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ si para cada vecindad $B(L; \varepsilon)$ de L hay una vecindad $B'(t_0; \delta) = B(t_0; \delta) \setminus \{t_0\}$ de t_0 tal que $F(t_0) \in B(L; \varepsilon)$; siempre que $t \in \mathcal{D}(F) \cap B'(t_0; \delta)$.

Teorema 2.15 Sea $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial, y t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$. Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_n) \in \mathbf{R}^n$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) = l_k$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Demostración.

Si $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que t esté en el dominio de F y

$$0 < |t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - L\| = \|(f_1(t) - l_1, f_2(t) - l_2, \dots, f_n(t) - l_n)\| < \varepsilon.$$

Como: $|f_k(t) - l_k| \leq \|F(t) - L\|$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

De donde, $|f_k(t) - l_k| < \varepsilon$, para $k = 1, 2, \dots, n$, siempre que t esté en el dominio de f_k . Esto muestra que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ implica $\lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) = l_k$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Recíprocamente, si $\lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) = l_k$, para $k = 1, 2, \dots, n$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta_k > 0$ tal que siempre que t esté en el dominio de f_k y

$$\|F(t) - L\| = \|(f_1(t) - l_1, f_2(t) - l_2, \dots, f_n(t) - l_n)\| < \varepsilon.$$

$$0 < |t - t_0| < \delta_k$$

se tiene $|f_k(t) - l_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Tomando $\delta = \min \{\delta_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ tenemos, si $0 < |t - t_0| < \delta_k$, siempre que t esté en el dominio de F :

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k(t) - l_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} < \varepsilon,$$

es decir, que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$.

El teorema anterior nos dice que si existe el límite:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right).$$

El límite de una función vectorial F puede, por tanto, calcularse con los límites de funciones reales componentes f_k , para $k = 1, 2, \dots, n$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin t, \tan t, t) &= \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t, \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan t, \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} t \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Usando el teorema anterior, podemos probar fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 2.16 Si F y G son funciones vectoriales de una variable real tales que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \text{ y } \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = M$$

y t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$, entonces

$$1. \lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) + G(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = L + M,$$

$$2. \lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) \cdot G(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = L \cdot M, \text{ y}$$

$$3. \lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) \times G(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = L \times M \text{ (solamente para } \mathbf{R}^3 \text{)}.$$

Demostración.

Probaremos (1). Las pruebas de las otras propiedades son análogas. Si $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} [(f_1 + g_1)(t), (f_2 + g_2)(t), \dots, (f_n + g_n)(t)] \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g_n(t) \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} g_n(t) \right) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} G(t). \end{aligned}$$

Teorema 2.17 Si F es una función vectorial y ϕ es una función real de variable real y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \text{ y } \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) = r$$

y t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}_{\phi F}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \phi F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = rL$$

Demostración.

Si $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} \phi F(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} (\phi f_1)(t), \lim_{t \rightarrow t_0} (\phi f_2)(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} (\phi f_n)(t) \right) \\
&= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) \\
\lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) \lim_{t \rightarrow t_0} G(t).
\end{aligned}$$

2.10 Continuidad de funciones vectoriales

Definición 2.35 Sea $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función vectorial. Decimos que F es continua en t_0 de $\mathcal{D}(F)$, si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

Es equivalente a decir: dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que $t \in \mathcal{D}(F)$ y

$$|t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - F(t_0)\| < \varepsilon.$$

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces F es continua en t_0 , pues en este caso hay un $\delta > 0$ tal que t_0 es el único punto de $\mathcal{D}(F) \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, y entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $\|F(t) - F(t_0)\| < \varepsilon$

siempre que $t_0 \in \mathcal{D}(F) \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Si t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces la definición es equivalente a : F es continua en el punto t_0 de $\mathcal{D}(F)$, si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

El siguiente teorema es inmediato.

Teorema 2.18 Sea $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial. Entonces F es continua en a si y sólo si las funciones componentes f_1, f_2, \dots, f_n de F son continuas en t_0 .

Demostración.

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces la prueba es inmediata, basta ver que $\mathcal{D}(f_k) = \mathcal{D}(F)$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Supongamos que t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, según teorema,

$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) = f_k(t_0)$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Lo que completa la prueba.

Teorema 2.19 Sean $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $G : \mathcal{D}(G) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ dos funciones continuas en el número $t_0 \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$, entonces:

1. $F + G$ es continua en t_0 .
2. $F \cdot G$ es continua en t_0 .
3. $F \times G$ es continua en t_0 .
4. Si ϕ es una función escalar, ϕF es continua en $t_0 \in \mathcal{D}_{\phi F}$.

Demostración.

Probaremos la primera afirmación, dejando el resto como un ejercicio para el estudiante. Ya que F y G son continuas en t_0 , tenemos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = G(t_0).$$

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F + G)$, entonces $F + G$ es continuas en t_0 .

Si t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F + G)$, entonces t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$ y $\mathcal{D}(G)$,

Por lo tanto, por teorema,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) + G(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = F(t_0) + G(t_0).$$

Lo cual demuestra que $F + G$ es continua en t_0 .

Ejemplo 2.89 Sea

$$f(t) = \begin{cases} \left(e^{t-1}, \frac{e^{t-1}-1}{t-1}, \frac{2 \ln t}{t-1} \right) & t = 1 \\ (1, 1, 2) & t \neq 1 \end{cases}$$

Analizar si f es continua en $t = 1$.

Solución.

Como $\lim_{t \rightarrow 1} e^{t-1} = 1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{e^{t-1}-1}{t-1} = 1, \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \ln t}{t-1} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(e^{t-1}, \frac{e^{t-1}-1}{t-1}, \frac{2 \ln t}{t-1} \right) = f(1).$$

Por tanto, f es continua en 1.

Ejemplo 2.90 Sea la función f definida por

$$f(t) = \begin{cases} \left(1-t, \frac{\ln(1+t)}{t}, -e^{-t} \right) & , t > 0 \\ (1, 1, -1) & , t = 0 \\ \left(\sqrt{1-t^2}, \frac{\sin^2 t}{t^2}, \frac{2t}{1-e^{2t}} \right) & , t < 0 \end{cases}$$

Analizar si f es continua en $t = 0$.

Solución.

Para $t > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} 1-t, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0^+} -e^{-t} \right) \\ &= \left(1, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+t}, -1 \right) = (1, 1, -1) \end{aligned}$$

Para $t < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0^-} \sqrt{1-t^2}, \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 t}{t^2}, \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2t}{1-e^{2t}} \right) \\ &= \left(1, 1, \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2}{2e^{-2t}} \right) = (1, 1, 2) \end{aligned}$$

Puesto que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$ entonces no existe $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ Por tanto, f no es continua en $t = 0$

2.11 Curvas en \mathbf{R}^n

Definición 2.36 Sea $\alpha : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial continua, definida en un intervalo I como dominio. A α se le llama camino o trayectoria o parametrización.

La imagen del camino α se le llama curva en \mathbf{R}^n . Es decir,

Denotaremos la curva por C y diremos que C es descrita por α

$$C := \{P \in \mathbf{R}^n : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}\}$$

Así, $C : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}$ Se le llama ecuación vectorial de la curva C .

En la gráfica de la curva descrita por una función continua, no puede tener interrupciones.

Ecuación paramétricas de C

Sea C la curva descrita por el camino $\alpha : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Si $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}$

y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ entonces $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$, de donde

$$C : \begin{cases} x_1 = \alpha_1(t) \\ x_2 = \alpha_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbf{I}$$

Se le llama ecuaciones paramétricas de la curva C .

Observación 2.7 1. La curva en el espacio puede ser expresada o bien por una ecuación vectorial, o bien por las ecuaciones paramétricas, o bien mediante dos ecuaciones.

2. Si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbf{I};$$

y obtenemos dos ecuaciones que relacionan x, y, z , realizamos el paso de las curvas dadas por el procedimiento paramétrico a las curvas expresadas por la intersección de dos superficies. Recíprocamente, si ponemos $x = \phi(t)$ (donde ϕ es una función arbitraria) y hallamos y, z como funciones de t de las ecuaciones

$$C : \begin{cases} E(\phi(t), y, z) = 0 \\ F(\phi(t), y, z) = 0 \end{cases},$$

realizamos el paso de las curvas expresadas por la intersección de dos superficies a las curvas dadas por el procedimiento paramétrico.

Ejemplo 2.91 Sea

$$F(t) = \left(t, \sqrt{1-2t}, \int_0^t e^{\operatorname{sen} u} du \right).$$

Verificar que $F(t)$ es una parametrización de alguna curva Γ .

Solución.

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \sqrt{1-2t}, \quad f_3(t) = \int_0^t e^{\operatorname{sen} u} du$$

son continuas en $I = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$.

Observación 2.8 *Proyección de una curva sobre un plano coordenado*

Sea la curva C , definida por el sistema de ecuaciones

$$C : \begin{cases} E(x, y, z) = 0 \cdots (1) \\ F(x, y, z) = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

La superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje Z , y de directriz C , se llama cilindro proyectante con el plano de C sobre el plano XY . Su ecuación es de tipo $f(x, y) = 0$ y se obtiene eliminando z entre (1) y (2).

La intersección del cilindro proyectante con el plano de ecuación $z = 0$, es la proyección de C sobre el plano XY . Osea,

$$\Gamma = \text{Proy}_{XY} C : \begin{cases} f(x, y) = 0 \cdots (1) \\ z = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

Para obtener la proyección de C sobre el plano YZ hay que eliminar x entre (1) y (2) y cortar el cilindro proyectante con el plano de ecuación $x = 0$.

Ejemplo 2.92 Sea la curva

$$\Gamma : \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

a) Hallar la proyección ortogonal C de la curva Γ sobre el plano XZ .

b) Parametrizar la curva Γ en función de **senos** y **cosenos**, indicando el dominio del parámetro.

Solución.

Sean las ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \cdots \cdots \cdots (1) \\ x + y = 4 \cdots \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

Proyectando la curva Γ sobre el plano XZ : Eliminando la variable "y".

Despejando la variable "y" de la ecuación (1):

$$y = 4 - x \cdots \cdots (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$(x-2)^2 + [(4-x)-2]^2 + z^2 = 8 \implies 2(x-2)^2 + z^2 = 8$$

$C := \text{Proy}_{XZ} \Gamma$:

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{z^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Parametrizando la elipse:

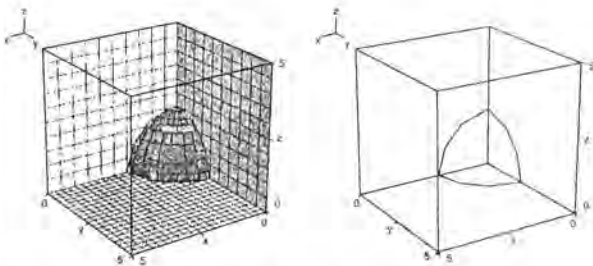
$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ z = 2\sqrt{2} \sin t; t \in [0, 2\pi] \end{cases}, \text{ "y" en (3): } y = 4 - (2 + 2 \cos t) = 2 - 2 \cos t$$

Así, la parametrización pedida es:

$$C : \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2 - 2 \cos t \\ z = 2\sqrt{2} \sin t \end{cases}; t \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo 2.93 Hacer un esbozo de la curva $- : \begin{cases} xy z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Solución.
Es inmediata.



Ejemplo 2.94 Dada la curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ay = 0 \end{cases}, a > 0.$

Parametrizar la curva C en términos de senos y cosenos, indicando su dominio.

Solución.

Sean las ecuaciones:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 \end{cases}, z > 0, a > 0$$

Parametrizando la curva C :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Luego, en $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t\right)^2}$$

$$z = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} \cos^2 t - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \sin t - \frac{a^2}{4} \sin^2 t}$$

$$z = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \sin t}$$

Así, la parametrización pedida es:

$$\text{Sea } \alpha(t) = \left(\frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t, \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \sin t} \right), t \in [0, 2\pi].$$

Ejemplo 2.95 (a) Dada la superficie $S : x^2 + (y - 2)^2 = z^2$.

Hacer un esbozo de la gráfica de S , mostrando las trazas y las secciones transversales correspondientes a los planos: $z = 2$, $z = -2$.

(b) Parametrizar la curva C intersección de la superficie S con el plano $y = 3z$, $z \geq 0$.

Solución.

(a) Sea $S : x^2 + (y - 2)^2 = z^2$.

Intesecciones de S con los planos coordenados:

$$\text{Al plano } YZ, T_{YZ} := S \cap \mathcal{P}_{YZ} : \begin{cases} (y - 2)^2 = z^2 \\ x = 0 \end{cases} \implies T_{YZ} : \begin{cases} y - z = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

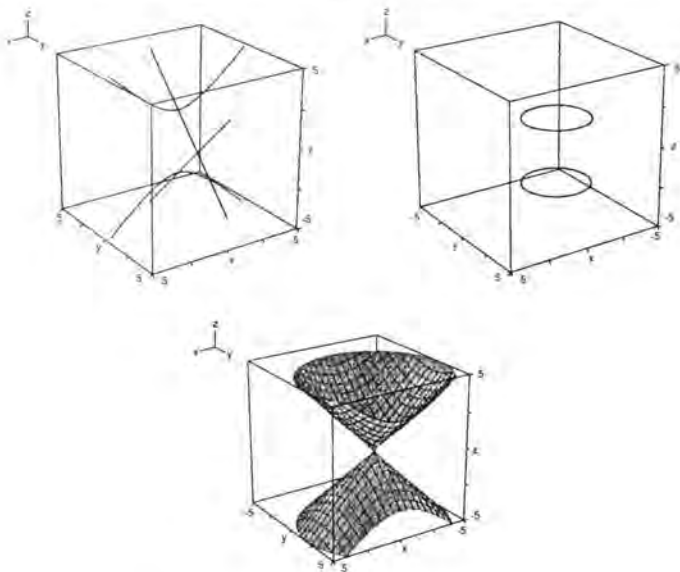
$$\text{Al plano } XZ, T_{XZ} := S \cap \mathcal{P}_{XZ} : \begin{cases} z^2 - x^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ Hipérbola con eje focal } Z$$

Al plano XY , $T_{XY} := S \cap \mathcal{P}_{XY} : z = 0$, se tiene el vértice del cono $V = (0, 2, 0)$.

Secciones transversales planos :

$$\text{Al plano } z = 2, \Gamma_2 := S \cap \mathcal{P}_{z=2} : \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Al plano } z = -2, \Gamma_{-2} := S \cap \mathcal{P}_{z=-2} : \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$



$$(b) \text{ Sea } C : \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = z^2 \\ y = 3z \end{cases}$$

Proyectando sobre el plano XY .

$$x^2 + (y-2)^2 = \frac{y^2}{9} \Rightarrow x^2 + \frac{8y^2}{9} - 4y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{8}{9} \left(y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{81}{16} \right) = -4 + \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{8}{9} \left(y - \frac{9}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y - \frac{9}{2} \right)^2}{\frac{9}{16}} = 1.$$

Parametrizando la curva C :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Luego, en } z = \frac{y}{3} : z = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sin t$$

Así, la parametrización pedida es:

$$\text{Sea } \alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \sin t, \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sin t \right), t \in [0, 2\pi].$$

2.12 Derivabilidad de funciones vectoriales

Definición 2.37 Sea $F : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial. La derivada de F es una función vectorial F' cuya regla de correspondencia es

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \quad (*)$$

y cuyo dominio es el intervalo I para lo cual el límite existe.

Si t es un número en el dominio de F' , entonces se dice que F es diferenciable en t .

Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial

Sea C una curva descrita por la función F cuyo dominio es I . Si t y $t+h$ están en I ($h \neq 0$).

Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $F(t)$ y $F(t+h)$, entonces \overrightarrow{PQ} representa al vector $F(t+h) - F(t)$ que, por tanto, se considera como un vector secante. Si $h > 0$, el vector $\frac{1}{h} [F(t+h) - F(t)]$ es un vector paralelo al vector $F(t+h) - F(t)$ que tienen la misma dirección.

Si F es diferenciable en t y $F'(t) \neq 0$, entonces la dirección del vector $\frac{1}{h} [F(t+h) - F(t)]$ se aproxima a la dirección del vector $F'(t)$ cuando h tiende a cero, puesto que

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}.$$

Teorema 2.20 Sea $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función vectorial. Entonces F es derivable en $a \in I$ si y sólo si las funciones componentes f_1, f_2, \dots, f_n de F son derivables en a .

Demostración.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ F'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \dots, \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right). \end{aligned}$$

existe si y sólo si cada uno de los límites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h}$$

($k = 1, 2, \dots, n$) existe.

Esto prueba que el dominio de F' es la intersección de f_1', f_2', \dots, f_n' . Si $t \in \mathcal{D}(F')$ entonces, usando nuevamente el teorema concluimos que

$$F'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t));$$

es decir, que

$$F' = (f_1', f_2', \dots, f_n').$$

Recta tangente a una curva

Sea $C : P = \alpha(t), t \in I$ una curva descrita por una función $\alpha : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ y si $\alpha'(t)$ existe y es distinta de cero, entonces $\alpha'(t)$ se le llama *vector tangente* (o *vector velocidad*) a la curva C en el punto $\alpha(t)$. Además la recta \mathcal{L} que pasa por $\alpha(t)$ y tiene por dirección el vector tangente $\alpha'(t)$ se llama *recta tangente a la curva C* en el punto $\alpha(t)$, cuya ecuación es dada por

$$\mathcal{L} : P = \alpha(t) + \lambda \alpha'(t), \lambda \in \mathbf{R}.$$

Algunos teoremas sobre derivada

Definición 2.38 1. Se dice que un afunción es diferenciable en un punto si la derivada de la función existe en tal punto.

2. La función F es diferenciable sobre el intervalo abierto $]a, b[$ si F es diferenciable en cada punto del intervalo $]a, b[$.

3. La función F es diferenciable sobre el intervalo $[a, b]$ si F es diferenciable en cada punto del intervalo $]a, b[$ y si existen las derivadas laterales en los puntos extremos:

$$F'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}.$$

y

$$F'_-(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

El siguiente teorema relaciona la continuidad y diferenciability sobre un intervalo.

Teorema 2.21 Si la función F es diferenciable sobre el intervalo I , entonces F es continua sobre I .

Demostración.

Es una consecuencia inmediata de las definiciones de continuidad y diferenciability sobre un intervalo.

Teorema 2.22 La derivación de funciones vectoriales satisface las siguientes propiedades:

1. $(F + G)' = F' + G'$.
2. $(\phi \cdot F)' = \phi' \cdot F + \phi \cdot F'$, con $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
3. $(F \cdot G)' = (F' \cdot G) + (F \cdot G')$.
4. $(F \times G)' = F' \times G + F \times G'$.
5. $(F \circ \phi)' = \phi' \cdot F'(\phi)$, con $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Como consecuencia de la propiedad 3. anterior tenemos el siguiente

Teorema 2.23 Sea F una función vectorial definida en algún intervalo I . Si $\|F(t)\| = c$, para todo t , entonces

$$F(t) \perp F'(t) = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Demostración.

Si $\|F(t)\| = c$, para todo $t \in I$, entonces $F(t) \cdot F(t) = c^2$.

Aplicando la derivada miembro a miembro:

$$D_t (F(t) \cdot F(t)) = D_t (c^2), \text{ para todo } t \in I$$

$$F'(t) \cdot F(t) + F(t) \cdot F'(t) = 0, \text{ para todo } t \in I$$

$$F'(t) \cdot F(t) = 0, \text{ para todo } t \in I$$

$$F(t) \perp F'(t) = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

El Teorema nos dice que el vector posición de la curva y su vector tangente son perpendiculares para todo valor t .

Ejemplo 2.93 Dada la curva $C : \begin{cases} z + x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}; z \geq 0$.

(a) Parametrizar, indicando el dominio de la parametrización.

(b) Las rectas tangentes a la curva C cortan al plano $\mathcal{P} : x - y = 0$ en una curva \mathcal{D} . Hallar la parametrización para \mathcal{D} .

Solución

$$(a) C : \begin{cases} z + x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ -2x - 2y + 4 = z \end{cases} \implies \begin{cases} -2x - 2y + 4 + x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 2x + 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Parametrizando la curva C :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Luego, en $2x + 2y + z = 0$:

$$z = -2x - 2y + 4 = -2(1 + \cos t) - 2(1 + \sin t) + 4 = -2 \cos t - 2 \sin t$$

$$\text{Pero } z \geq 0 \implies \cos t + \sin t \leq 0 \implies t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$$

Así, la parametrización pedida es:

$$\text{Sea } \alpha(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, -2 \cos t - 2 \sin t), t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right].$$

$$(b) \text{ Como } \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2 \sin t - 2 \cos t)$$

Sea la recta tangente a la curva C en el punto $P = \alpha(t)$.

$$\mathcal{L} : P = \alpha(t) + r\alpha'(t); r \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (1 + \cos t, 1 + \sin t, -2 \cos t - 2 \sin t) + r(-\sin t, \cos t, 2 \sin t - 2 \cos t); r \in \mathbb{R} :$$

$$\mathcal{L} : P = (\cos t - r \sin t + 1, \sin t + r \cos t + 1, 2r \sin t - 2r \cos t - 2 \sin t - 2 \cos t); r \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D} := \mathcal{L} \cap \mathcal{P} : \cos t - r \sin t + 1 - (\sin t + r \cos t + 1) = 0, \text{ de donde}$$

$$r = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$$

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \cos t - \left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) \sin t + 1 \\ y = \sin t + \left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) \cos t + 1 \\ z = 2 \left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) (\sin t - \cos t) - 2 \sin t - 2 \cos t \end{cases}; t \in \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right[.$$

Ejemplo 2.97 Sea S el paraboloido elíptico, en el primer octante, de ecuación

$$z = x^2 + y^2.$$

Sean C_1 , la intersección de S con el plano XZ ; C_2 parte de la intersección de S con el plano YZ que está comprendida entre el origen de coordenadas y el punto $A(0, 2, 4)$; y C_3 el segmento de recta que une el punto A y el punto B , donde su vector tangente a C_2 , es paralelo al plano $\mathcal{P} : x - 6y + z - 1 = 0$.

(a) Parametrizar cada una de las curvas C_1, C_2 y C_3 .

(b) Hallar una función $F(u)$ que parametrize a la curva C formada por la reunión de C_1, C_2 y C_3 .

Solución.

$$(a) \text{ Sea } C_1 := S \cap XZ : \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Parametrizando C_1 :

Sea $x = t$ entonces $z = t^2$. Así,

$$C_1 : F_1(t) = (t, 0, t^2); t \geq 0$$

$$\text{Sea } \mathcal{C}_2 := S \cap YZ : \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Parametrizando \mathcal{C}_2 :

Sea $y = r$ entonces $z = r^2$. Así

$$\mathcal{C}_2 : F_2(t) = (0, r, r^2) ; r \geq 0$$

Como $(0, 0, 0) \in \mathcal{C}_2$ entonces existe un $r_o \geq 0$ tal que $(0, 0, 0) = F_2(r_o) = (0, r_o, r_o^2)$, entonces $r_o = 0$ y también como $A(0, 2, 4) \in \mathcal{C}_2$, existe un $r_1 \geq 0$ tal que $(0, 2, 4) = F_2(r_1) = (0, r_1, r_1^2)$, de donde $r_1 = 2$. Así,

$$\mathcal{C}_2 : F_2(r) = (0, r, r^2) ; 0 \leq r \leq 2.$$

Para el segmento $\mathcal{C}_3 := \overline{AB}$

Sea B el punto donde su vector tangente a \mathcal{C}_2 es paralelo al plano $\mathcal{P} : x - 6y + z - 1 = 0$.

Es decir: $B = F_2(r_o) = (0, r_o, r_o^2) \in \mathcal{C}_2$ tal que $F_2'(r_o) \perp N$, donde $N(1, -6, 1)$ es el vector normal del plano y $F_2'(r_o) = (0, 1, 2r_o)$.

$$\text{Así } F_2'(r_o) \cdot N = 0 \iff (0, 1, 2r_o) \cdot (1, -6, 1) = 0$$

$$\implies -6 + 2r_o = 0 \implies r_o = 3.$$

Por tanto, $B = F_2(r_o = 3) = (0, 3, 9)$

$$\text{Así, } \mathcal{C}_3 : P = A + s(B - A) ; \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$\mathcal{C}_3 : P = (0, 2, 4) + s(0, 1, 5) ; \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$\mathcal{C}_3 : P = (0, 2 + s, 4 + 5s) ; \quad 0 \leq s \leq 1$$

(b) Sea $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ la curva descrita por la función vectorial:

$$F(u) =: \begin{cases} (-u, 0, u^2) & ; \quad u < 0 \\ (0, u, 2u^2) & ; \quad 0 \leq u \leq 2 \\ (0, u, 5u - 6) & ; \quad 2 \leq u \leq 3 \end{cases} .$$

2.13 Curvas parametrizadas por parametrizaciones regulares

La parametrización $\alpha : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una *parametrización regular*, si α es de clase C^1 (es decir, α es diferenciable en I y α' es continua en I), y $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Decimos que una curva \mathcal{C} es regular en I , si existe una *parametrización regular* en I .

Decimos que una curva \mathcal{C} es *regular a trozos* en el intervalo $I = [a; b]$, si $[a; b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales el camino es regular.

Ejemplo 2.98 Para la curva Γ , parametrizada por la función $F(t) = (t^2, 2t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en cada punto $F(t)$.

b) Hallar los valores de t que tienen la siguiente propiedad: "La recta tangente a Γ en el punto $F(t)$ es tangente a la esfera

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Solución.

a) la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $F(t)$ es

$$\mathcal{L} : P = (t^2, 2t, t^2) + r(t, 1, t), r \in \mathbf{R}.$$

b) Para que una recta sea tangente a la esfera, la distancia del centro $C(0, 0, 0)$ de la esfera a la recta \mathcal{L} debe ser igual al radio de la esfera. Así, tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\|F(t) \times F'(t)\|}{\|F'(t)\|} \iff \frac{\|(t^2, 2t, t^2) \times (t, 1, t)\|}{\|(t, 1, t)\|} = 2 \\ \implies \frac{\|(t^2, 0, -t^2)\|}{\|(t, 1, t)\|} &= 2 \implies \frac{t^2\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2 + 1}} = 2 \implies t^4 - 4t^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra $t = \pm\sqrt{2 + \sqrt{6}}$.

Ejemplo 2.99 Sea la curva $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 - 4z - 9 = 0 \\ y = 2z + 1 \end{cases}, z \geq 0$

a) Hallar una parametrización para Γ en términos de senos y cosenos, indicando el dominio del parámetro.

b) Analizar si la parametrización hallada en la parte (a), es regular.

c) Sean $P = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Gamma$ y Q el punto de intersección de la recta tangente a Γ en P con el plano $x = 0$. Parametrizar el segmento \overline{PQ} .

Solución.

$$a) \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 - 4z - 9 = 0 \\ y = 2z + 1 \end{cases}, z \geq 0$$

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + (2z + 1)^2 + 4z^2 - 4z - 9 = 0 \\ y = 2z + 1 \end{cases}, z \geq 0$$

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{8} + z^2 = 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}, z \geq 0.$$

Parametrizando \mathcal{C} :

Usando como parámetro el ángulo central t . Sean :

$$x = 2\sqrt{2} \cos t, z = \sin t$$

Reemplazando en el plano $y = 2z + 1$, se tiene $y = 2 \sin t + 1$

Así,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ z = \sin t \\ y = 2 \sin t + 1 \end{cases}; t \in [0, \pi]$$

$$b) \Gamma : F(t) = (2\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t + 1, \sin t), t \in [0, \pi].$$

Existe $F'(t) = (-2\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t, \cos t) t \in]0, \pi[$ y además F' es continua $]0, \pi[$.

$\|F'(t)\| = \|(-2\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t, \cos t)\| = \sqrt{5 \cos^2 t + 8 \sin^2 t} = \sqrt{1 + 3 \sin^2 t} \neq 0$, entonces $F'(t) \neq 0$. Por tanto, F es regular.

$$c) \text{Sea } \Gamma : F(t) = (2\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t + 1, \sin t), t \in [0, \pi]$$

$$\implies F'(t) = (-2\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t, \cos t); t \in]0, \pi[.$$

Sea \mathcal{L} la recta tangente a la curva Γ en el punto $F(t)$,

$$\mathcal{L} : P = F(t) + rF'(t); r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (2\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t + 1, \sin t) + r(-2\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t, \cos t); r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (2(\cos t) \sqrt{2} - 2\sqrt{2}r \sin t, 2 \sin t + 1 + 2r \cos t, \sin t + r \cos t); r \in \mathbf{R}$$

Como el punto $P = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Gamma$ entonces existe un $t \in]0, \pi[$ tal que

$$\left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F(t) = (2\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t + 1, \sin t),$$

de donde $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Así, } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-2, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\mathcal{L} : P = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + r \left(-2, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-2r + 2, \sqrt{2} + r\sqrt{2} + 1, \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}r\sqrt{2}),$$

$$\{Q\} := \mathcal{L} \cap XY : x = -2r + 2 = 0, \text{ de donde } r = 1. \text{ Así, } Q = (0, 2\sqrt{2} + 1, \sqrt{2}).$$

Parametrizando el segmento \overline{PQ}

$$\text{Así, } \overline{PQ} : P^* = P + t(Q - P); \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\overline{PQ} : P^* = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t \left[(0, 2\sqrt{2} + 1, \sqrt{2}) - \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]; \quad 0 \leq t \leq 1 :$$

$$\overline{PQ} : P^* = \left(2, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t \left(-2, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\overline{PQ} : P^* = \left(2 - 2t, \sqrt{2} + 1 + t\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right); \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ejemplo 2.100 Sea la curva

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases}, yz \geq 0$$

(a) Parametrizar la curva Γ en términos de senos y cosenos, indicando su dominio del parámetro.

(b) Hallar la recta tangente \mathcal{L} a la curva Γ que interseca al plano $\mathcal{P} : 3x + 2y - 2z = 0$ en el punto $Q = (0, 2, 2)$.

Solución.

(a) Parametrizando Γ :

Usando como parámetro el ángulo central t . Sean :

$$x = \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Reemplazando en la superficie $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, se tiene $z = 2 \sin t$, puesto que $yz \geq 0$.

Así,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 2 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(b) $\Gamma : F(t) = (\cos t, 2 \sin t, 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Sea \mathcal{L} la recta tangente a la curva Γ en el punto $F(t)$,

$$\mathcal{L} : P = F(t) + rF'(t); \quad r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (\cos t, 2 \sin t, 2 \sin t) + r(-\sin t, 2 \cos t, 2 \cos t); \quad r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (\cos t - r \sin t, 2 \sin t + 2r \cos t, 2 \sin t + 2r \cos t); \quad r \in \mathbf{R}$$

$\{Q\} := \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$:

Sea $Q \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$Q = (\cos t - r \sin t, 2 \sin t + 2r \cos t, 2 \sin t + 2r \cos t)$$

$$Q \in \mathcal{P} : 3(\cos t - r \sin t) + 2(2 \sin t + 2r \cos t) - 2(2 \sin t + 2r \cos t) = 0,$$

$$\cos t - r \sin t = 0 \implies r = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad t \neq 0, \pi.$$

Luego,

$$(0, 2, 2) = \left(0, \frac{2}{\sin t}, \frac{2}{\sin t}\right) \implies t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Así, } \mathcal{L} : P = (0, 2, 2) + r(-1, 0, 0) ; r \in \mathbf{R}.$$

Ejemplo 2.101 Sea Γ la intersección de la superficie $S : (4 - y)^2 = z^2 + 4x^2, 0 \leq y \leq 4$ con los planos coordenados en el primer octante trazada en sentido antihorario vista desde el origen de coordenadas. Parametrizar Γ .

Solución.

la curva pedida es, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$\text{Sea } \Gamma_1 := \mathcal{S} \cap XY : \begin{cases} y = 4 - 2x \\ z = 0 \end{cases} ; 0 \leq y \leq 4,$$

de esta manera una parametrización de ella es

Parametrizando Γ_1 :

Sea $y = 4t$. Así,

$$C_1 : F_1(t) = (2 - 2t, 4t, 0) ; 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{Sea } \Gamma_2 := \mathcal{S} \cap YZ : \begin{cases} z = 4 - y \\ x = 0 \end{cases} ; x \geq 0, y \geq 0$$

Parametrizando Γ_2 :

Sea $y = 4t$ entonces $z = 4 - 4t$.

Así,

$$C_2 : F_2(t) = (0, 4t, 4 - 4t) ; 0 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Sea } \Gamma_3 := \mathcal{S} \cap XZ : \begin{cases} 16 = z^2 + 4x^2 \\ y = 0 \end{cases} ; x \geq 0, z \geq 0$$

Parametrizando Γ_3 :

Sea $x = t$ entonces $z = \sqrt{16 - 4t^2}$; $16 - 4t^2 \geq 0$ de donde $0 \leq t \leq 2$

Así,

$$\Gamma_3 : F_3(t) = (t, 0, \sqrt{16 - 4t^2}) ; 0 \leq t \leq 2.$$

Luego, la curva pedida es, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$F(u) = : \begin{cases} (2 - 2u, 4u, 0) & ; 0 \leq u \leq 1 \\ (0, 4u - 4, -4u + 8) & ; 1 \leq u \leq 2 \\ (u - 2, 0, 2\sqrt{u(-u + 4)}) & ; 2 \leq u \leq 4 \end{cases} .$$

Ejemplo 2.102 Sea la curva \mathcal{C} que resulta de intersecar las superficies

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 - z = 7, \quad \mathcal{S}_2 : x^2 + 8x - 2y + z = 0.$$

Hallar una parametrización de \mathcal{C} , en términos de senos y cosenos.

Solución

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 7 \dots (1) \\ x^2 + 8x - 2y + z = 0 \dots (2) \end{cases}$$

Sumando (1) y (2) resulta $2x^2 + 8x + y^2 - 2y = 7$. Completando cuadrado resulta $2(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 7 + 8 + 1$

$$2(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{(4)^2} = 1 \dots (3).$$

Por tanto,

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{(4)^2} = 1 \\ z = x^2 + y^2 + 7 \end{cases}$$

Parametrizando la curva Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 1 + 4 \sin t \\ z = (-2 + 2\sqrt{2} \cos t)^2 + (1 + 4 \sin t)^2 + 7 \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 1 + 4 \sin t \\ z = 8 \cos^2 t - 8\sqrt{2} \cos t + 16 \sin^2 t + 8 \sin t + 5 \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Ejemplo 2.103 Dada la curva $\Gamma : \alpha(t) = \left(t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right), t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right), \frac{t^2}{2} \right)$, $0 < t < 1$.

(a) Demostrar que la curva Γ está contenida en un cono elíptico (Ecuación de la forma : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$).

(b) Analizar si α es regular.

Solución.

(a) Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario de Γ , entonces

$$x = t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right), y = t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right), z = \frac{t^2}{2}.$$

Luego,

$$x^2 + y^2 = t^4 \cos^2\left(\frac{1}{t^2}\right) + t^4 \sin^2\left(\frac{1}{t^2}\right) = t^4, \text{ pero: } t^2 = 2z$$

Por tanto, $P((x, y, z) \in \mathcal{S} : x^2 + y^2 = 4z^2$.

$$(b) \alpha'(t) = \left(2t \cos \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} \sin \frac{1}{t^2}, 2t \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2}, t \right), \text{ para todo } t \in]0, 1[.$$

Es claro que

$$\alpha'(t) = \left(2t \cos \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} \sin \frac{1}{t^2}, 2t \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2}, t \right)$$

es una función continua en $]0, 1[$.

Como $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + \frac{4}{t^2} + t^2} \neq 0$, para todo $t \in]0, 1[$. Entonces $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in]0, 1[$.

Por tanto es α es regular.

Ejemplo 2.104 Sea la curva $\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ z = 2by \end{cases}$

donde a y b son constantes positivas tales que $a + b = 2$.

Hallar los valores de a y b para los cuales la proyección de Γ sobre el plano XY sea una circunferencia \mathcal{C}

Solución.

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ z = 2by \end{cases}$$

Reescribiendo el sistema anterior se obtiene

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + 4y^2 = 1 \\ z = 2by \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

C es una circunferencia si $a = \frac{1}{2}$. Luego, $b = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 2.105 la curva $\Gamma : \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 & = 4(1 - z^2) \\ y & = \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$

(a) Probar que la curva Γ se puede representar por :

$$\begin{cases} z^2 + 4x^2 - 4x & = 0 \\ y & = \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

(b) Parametrizar la curva Γ en términos de senos y cosenos, indicando su dominio del parámetro.

(c) Analizar si la parametrización hallada en (b) es regular.

Solución.

(a) Sean las ecuaciones: $\begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 & = 4(1 - z^2) \dots\dots\dots (1) \\ y & = \sqrt{3}x \dots\dots\dots (2) \end{cases}, x \geq 0.$

Proyectando la curva Γ sobre el plano XZ : Eliminando la variable "y".

Reemplazando (2) en (1) :

$$(x^2 + (\sqrt{3}x)^2 + z^2 - 2)^2 = 4(1 - z^2) \implies$$

$$(4x^2 + z^2 - 2)^2 = 4 - 4z^2 \implies$$

$$16x^4 - 16x^2z^2 - 4z^2 + z^4 + 8x^2z^2 + 4 = 4 - 4z^2 \implies$$

$$16x^4 - 16x^2z^2 + z^4 + 8x^2z^2 = 0 \implies$$

$$z^4 + 8x^2z^2 + 16x^4 = 16x^2 \implies$$

$$(z^2 + 4x^2)^2 = 16x^2 \implies z^2 + 4x^2 = 4x, x \geq 0.$$

Así,

$$\Gamma : \begin{cases} z^2 + 4x^2 - 4x & = 0 \\ y & = \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

(b)

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

Parametrizando la curva Γ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \\ z = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Luego, en (2) : $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$

Así, la parametrización pedida es:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \\ z = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

(c) Sea $\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \sin t \right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Así: $\alpha'(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \cos t \right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Existe $\alpha'(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y además α' es continua $[0, 2\pi]$, pues sus funciones coordenadas son continuas en $[0, 2\pi]$.

Además, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{3}{4} \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \neq 0$, entonces $\alpha'(t) \neq 0$. Por tanto, α es regular.

Ejemplo 2.106 Desde el punto $A(0, 4, -2)$ se trazan rectas que pasan por puntos de la recta

$$\mathcal{L} : x + y = 2, \quad z = 0$$

y que intersecan al cilindro $\mathcal{S} : x^2 + y^2 = 4$ en una curva Γ .

(a) Parametrizar Γ , indicando el dominio de la parametrización.

(b) ¿Es Γ regular con la parametrización elegida en (a)? Justificar.

Solución.

(a) Desde el punto $A(0, 4, -2)$, consideremos la recta AQP , en la recta \mathcal{L} y P en el cilindro \mathcal{S} .

Entonces $Q = (x, 2 - x, 0) \implies \overrightarrow{AQ} = Q - A = (x, 2 - x, 0) - (0, 4, -2) = (x, -x - 2, 2)$.

Luego,

$$\mathcal{L} : P = A + t\overrightarrow{AQ} = (0, 4, -2) + t(x, -x - 2, 2) = (tx, 4 - 2t - tx, 2t - 2), t \in \mathbb{R}$$

Si $u = tx$, $v = 4 - 2t - tx$ y $w = 2t - 2$ entonces

$$u + v + w = (tx) + (4 - 2t - tx) + (2t - 2) = 2$$

Luego P pertenece al plano: $u + v + w = 2$.

Otra forma: sean $B = (2, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 0)$ puntos de \mathcal{L} . Luego

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 0) - (0, 4, -2) = (2, -4, 2)$$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 0) - (0, 4, -2) = (0, -2, 2)$, y la normal al plano es

$$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -4, 2) \times (0, -2, 2) = (-4, -4, -4) = -4(1, 1, 1).$$

La ecuación del plano es:

$$\mathcal{P} : (P - A) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0 \implies \mathcal{P} : (x - 0, y - 4, z + 2) \cdot (1, 1, 1) = 0,$$

$$\mathcal{P} : x + y + z = 2.$$

En consecuencia

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 & = 4 \\ x + y + z & = 2 \end{cases}$$

Parametrizando

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 2 - x - y = 2 - 2 \cos t - 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

(b) $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 - 2 \cos t - 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Existe $\alpha'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 2 \sin t - 2 \cos t)$

α' es continua para $t \in [0, 2\pi]$.

$$\|\alpha'(t)\| = \|(-2 \sin t, 2 \cos t, 2 \sin t - 2 \cos t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (2 \sin t - 2 \cos t)^2}$$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{8 - 8 \sin t \cos t} = \sqrt{8 - 4 \sin 2t} \neq 0$, para $t \in [0, 2\pi]$, pues $4 \leq 8 - 4 \sin 2t \leq 12$.

Así, $\alpha'(t) \neq 0$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Por tanto – regular con la parametrización elegida en (a)

2.14 Vectores unitarios: tangente, normal y binormal

Sea $C : P = \alpha(t), t \in I$ una curva regular en I , descrita por una función $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 2.39 El vector tangente unitaria en el punto $\alpha(t)$ de la curva C , se define por:

$$T(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Observación 2.9 Como $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \in I$ y por teorema anterior se deduce que $T(t) \perp T'(t)$, para todo $t \in I$.

Definición 2.40 Si suponemos que la función $T(t)$ es derivable y $T'(t) \neq 0$, entonces podemos definir el vector normal unitario a la curva C en el punto $\alpha(t)$, por:

$$N(t) := \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

Así, $\|N(t)\| = 1$, para todo $t \in I$

Observación 2.10 Como $T(t) \times N(t) \perp T(t)$ y $T(t) \times N(t) \perp N(t)$, entonces

$$\|T(t) \times N(t)\| = \|T(t)\| \|N(t)\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

Definición 2.41 El vector binormal unitario a la curva C en el punto $\alpha(t)$, se denota y se define por :

$$B(t) := T(t) \times N(t).$$

Observación 2.11 El Plano Osculador:

El par de vectores $T(t)$ y $N(t)$ definen un plano, en cualquier punto $\alpha(t)$ de la curva C , así la ecuación del plano que pasa por $\alpha(t)$ de la curva C y es generado por los vectores $T(t)$ y $N(t)$ es dado por :

$$\mathcal{P} : (P - \alpha(t)) \cdot B(t) = 0$$

Este plano es conocido como el *plano osculador* a la curva C en el punto $\alpha(t)$. La característica de este plano consiste en que es el plano que mejor *aproxima* a la curva en el punto $\alpha(t)$. Esto quiere decir que si tomamos tres puntos distintos de la curva que puedan determinar un plano y hacemos que esos tres puntos se aproximen a $\alpha(t)$ entonces esos planos se aproximan al plano $\mathcal{P}(t)$.

Observación 2.12 Es fácil ver que los vectores velocidad $V(t) = \alpha'(t)$ y aceleración $A(t) = \alpha''(t)$ del punto $\alpha(t)$ se encuentran en el plano osculador. En efecto, un cálculo sencillo nos muestra que

$$A(t) = v'(t)T(t) + \|\alpha'(t)\| \|T'(t)\| N(t),$$

en donde $v(t) = \|\alpha'(t)\|$.

La componente $v'(t)$ se llama la componente tangencial de la aceleración y $\|\alpha'(t)\| \|T'(t)\|$ la componente normal.

Si pensamos en una partícula que se mueve a lo largo de la curva que describe la imagen de una función vectorial α , entonces $\alpha(t)$ es el vector que mide la posición de la partícula, $\alpha'(t)$ será el vector velocidad y $\alpha''(t)$ será el vector aceleración. Es costumbre nombrar, entonces, $\alpha'(t) = V(t)$, vector velocidad y $\alpha''(t) = A(t)$, vector aceleración. Además denotaremos $v(t) = \|V(t)\|$ que representa la rapidez de la partícula, así mismo denotaremos $a(t) = \|\alpha''(t)\|$.

Ejemplo 2.107 Sea la curva Γ definida por la función vectorial F definida por

$$F(t) = \begin{cases} (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}), \pi - t) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ (0, 0, 0) & , \quad t = \pi \\ (-2 \cos(\frac{3\pi}{2} - t), \sin 2(\frac{3\pi}{2} - t), \pi - t) & , \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

(a) Hallar $F'(t)$, indicando su dominio.

(b) Analizar si F es una parametrización regular en $[0, 2\pi]$.

(c) Hallar el plano osculador de la curva Γ en el punto $(\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4})$.

Solución.

$$(a) F'(t) = \begin{cases} (-2 \sin(t - \frac{\pi}{2}), 2 \cos 2(t - \frac{\pi}{2}), -1) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ (-2 \sin(\frac{3\pi}{2} - t), -2 \cos 2(\frac{3\pi}{2} - t), -1) & , \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Entonces, F es derivable en $[0, \pi[\cup]\pi, 2\pi]$.

Hallando la derivada en $t = \pi$.

$$F'(\pi^-) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{F(t) - F(\pi)}{t - \pi} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \left(\frac{2 \cos(t - \frac{\pi}{2})}{t - \pi}, \frac{\sin 2(t - \frac{\pi}{2})}{t - \pi}, \frac{\pi - t}{t - \pi} \right).$$

Aplicando L'hospital en cada componente

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{2 \cos(t - \frac{\pi}{2})}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} -2 \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -2, \\ \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\sin 2(t - \frac{\pi}{2})}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} 2 \cos 2(t - \frac{\pi}{2}) = -2. \end{aligned}$$

Así, $F'(\pi^-) = (-2, -2, -1)$.

$$F'(\pi^+) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{F(t) - F(\pi)}{t - \pi} = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \left(\frac{-2 \cos(\frac{3\pi}{2} - t)}{t - \pi}, \frac{\sin 2(\frac{3\pi}{2} - t)}{t - \pi}, \frac{\pi - t}{t - \pi} \right).$$

Aplicando L'hospital en cada componente

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{-2 \cos(\frac{3\pi}{2} - t)}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^+} -2 \sin(\frac{3\pi}{2} - t) = -2, \\ \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{\sin 2(\frac{3\pi}{2} - t)}{t - \pi} &= \lim_{t \rightarrow \pi^+} -2 \cos 2(\frac{3\pi}{2} - t) = 2. \end{aligned}$$

Así, $F'(\pi^+) = (-2, 2, -1)$.

Como las derivadas laterales son distintas, entonces no existe la derivada de F en $t = \pi$. Luego el dominio de la derivada es, $Dom(F') = [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi]$.

(b) F no es regular en $[0, 2\pi]$ porque F no es derivable en $t = \pi$.

(c) Como $F(\frac{3\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4})$

$$F'(\frac{3\pi}{4}) = \left(-2 \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}), 2 \cos 2(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}), -1 \right) = (-\sqrt{2}, 0, -1)$$

$$F''(t) = \left(-2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), -4 \sin 2(t - \frac{\pi}{2}), 0 \right)$$

$$F''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right), -4\sin 2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right), 0\right) = (-\sqrt{2}, -4, 0)$$

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times F''\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}, 0, -1) \times (-\sqrt{2}, -4, 0) = (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2})$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) \parallel (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2}).$$

Hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) \in -$:

$$\mathcal{P} : B\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot (P - F\left(\frac{3\pi}{4}\right)) = 0 \rightarrow$$

$$\mathcal{P} : (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}, y - 1, z - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\rightarrow \mathcal{P} : 4x - \sqrt{2}y - 4\sqrt{2}z + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi = 0.$$

Ejemplo 2.108 Dada la curva

$$C : \begin{cases} x^2 - 2y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

(a) Parametrizar la curva C en términos de senos y cosenos, indicando su respectivo dominio.

(b) Hallar los vectores unitarios $T(t)$, $B(t)$ y $N(t)$ en el punto Q , no nulo de la curva C , donde el vector tangente es paralela a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(c) Hallar la curvatura $k(t)$ de la curva C y la ecuación del plano osculador en el punto Q hallado en (b).

Solución.

(a)

$$C : \begin{cases} 2z = 2y - x^2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

Parametrizando la curva C :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Reemplazando en el plano $2z = 2y - x^2$, se tiene $2z = 2(2 + 2 \sin t) - 4 \cos^2 t \Rightarrow z = 2 + 2 \sin t - 2 \cos^2 t$

Así,

$$C : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \\ z = 2 + 2 \sin t - 2 \cos^2 t \end{cases}; t \in [0, 2\pi]$$

(b) $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 + 2 \sin t, 2 + 2 \sin t - 2 \cos^2 t); t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \alpha'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 2 \cos t + 2 \sin 2t); t \in [0, 2\pi]$

$\alpha''(t) = (-2 \cos t, -2 \sin t, -2 \sin t + 4 \cos 2t)$

Como el punto $Q = \alpha(t) \in C$, entonces existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que

$(2 \cos t, 2 + 2 \sin t, 2 + 2 \sin t - 2 \cos^2 t) = (r, 0, 0)$, de donde $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Así,

$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2, 2)$, $\alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 0, 0)$ (se descarta)

$\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0, 0)$.

$$\alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -2, -6)$$

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0, 0) \times (0, -2, -6) = (0, -12, 4)$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 4\sqrt{10}$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 1, 3)$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)\|} = \frac{(-2, 0, 0)}{\|(-2, 0, 0)\|} = (-1, 0, 0)$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right)\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3, 1) \parallel (0, 3, -1).$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = B\left(\frac{\pi}{2}\right) \times T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3, 1) \times (-1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -1, -3).$$

$$(c) \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right)\|}{\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)\|^3} = \frac{4\sqrt{10}}{(2)^3} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$:

$$\pi : B\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (P - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0 \rightarrow \pi : (0, 3, -1) \cdot (x, y - 2, z - 2) = 0$$

$$\rightarrow \pi : 3y - z - 4 = 0.$$

2.14.1 Integración

La integración de funciones vectoriales la definimos así:

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right).$$

Como en el caso de funciones de variable y valor real, tenemos acá los teoremas fundamentales del cálculo que enunciaremos sin demostración pues ésta sigue los mismos pasos que la que conocemos en los primeros cursos de cálculo.

Teorema 2.24 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua y sea $c \in [a, b]$. Entonces la función

$$G(x) = \int_c^x F(t) dt$$

cumple que $G'(x) = F(x)$.

Teorema 2.25 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). Supongamos que F' es continua en (a, b) . Entonces para cada $c, x \in (a, b)$ tenemos que

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)dt.$$

2.14.2 El Plano Osculador

Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación derivable y supongamos que $F'(t) \neq 0$. Entonces el vector

$$T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$$

es el vector tangente unitario de la curva en el punto $F(t)$. Si además suponemos que la función $T(t)$ es derivable y $T'(t) \neq 0$, entonces podemos definir el vector normal unitario a la curva en el punto $F(t)$, así:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

Puesto que $T(t)$ es unitario, entonces $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$. Este par de vectores definen un plano, así:

$$\mathcal{P}(t) = \{X(t) = F(t) + sT(t) + rN(t), r, s \in \mathbf{R}\}.$$

Este plano es conocido como el plano osculador a la curva en el punto $F(t)$. La característica de este plano consiste en que es el plano que mejor *aproxima* a la curva en el punto $F(t)$. Esto quiere decir que si tomamos tres puntos distintos de la curva que puedan determinar un plano y hacemos que esos tres puntos se aproximen a $F(t)$ entonces esos planos se aproximan al plano $\mathcal{P}(t)$.

Es fácil ver que los vectores velocidad $V(t) = F'(t)$ y aceleración $A(t) = F''(t)$ del punto $F(t)$ se encuentran en el plano osculador. En efecto, un cálculo sencillo nos muestra que

$$A(t) = v'(t)T(t) + \|F'(t)\| \|T'(t)\| N(t),$$

en donde $v(t) = \|F'(t)\|$.

La componente $v'(t)$ se llama la componente tangencial de la aceleración y $\|F'(t)\| \|T'(t)\|$ la componente normal.

A manera de ejemplo, consideremos la curva $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Esta curva representa una hélice ascendente.

Observamos que

$$\begin{aligned}\|F'(t)\| &= \sqrt{2} \\ \|T'(t)\| &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} &= T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t, \cos t, 1) \\ \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} &= N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto $v'(t) = 0$ y la aceleración será

$$A(t) = N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Esto es, la aceleración permanece en el plano $X; Y$ y en la dirección opuesta a la proyección, sobre el plano $X; Y$, del movimiento $F(t)$. Esto nos dice que la aceleración es centrípeta.

2.14.3 Longitud de arco y curvatura

Para poder comprender mejor algunas otras propiedades de las curvas es necesario mirarlas como dependientes de una variable que mida la longitud de arco. Así, por ejemplo, le daremos un significado físico a la velocidad más acorde con el concepto que de ella tenemos.

Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva y tomemos $\Delta = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Denotemos con $\Pi(\Delta)$ el *polígono* de segmentos de recta que definen $F(t_0), \dots, F(t_n)$.

Sea:

$$|\Pi(\Delta)| = \sum_{k=1}^n \|F(t_k) - F(t_{k-1})\|$$

la longitud de dicho polígono. Tenemos, entonces, la siguiente

Definición 2.42 Decimos que la curva definida por $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ es *rectificable* si existe una constante $M > 0$ tal que $|\Pi(\Delta)| \leq M$, para toda partición Δ de $[a, b]$.

Ahora, si la curva es rectificable, al número

$$\Lambda(a, b, F) = \sup_{\mathbf{p} \in \Delta} |\Pi(\Delta)|,$$

en donde Δ denota el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$, lo llamamos la longitud de la curva.

Los consecuencias más importantes son:

1. Para todo $c \in [a, b]$ se tiene que

$$\Lambda(a, b, F) = \Lambda(a, c, F) + \Lambda(c, b, F).$$

2. $\Lambda(a, b, F) = \int_a^b \|F'(t)\| dt$.

La propiedad 1. se deduce de lo anterior. Para ver 2. procedemos de la siguiente forma: Por el teorema del valor medio tenemos que

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) (f'_1(\theta_{1k}), \dots, f'_n(\theta_{nk})),$$

en donde $\theta_{jk} \in (t_k, t_{k-1})$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\Pi(p)| &= \sum_{k=1}^n \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| \\
&= \sum_{k=1}^n \|(t_k - t_{k-1})(f'_1(\theta_{1k}), \dots, f'_n(\theta_{nk}))\| \\
&= \sum_{k=1}^n |t_k - t_{k-1}| \|(f'_1(\theta_{1k}), \dots, f'_n(\theta_{nk}))\|.
\end{aligned}$$

Si en expresión anterior tomamos el sup en ambos miembros observamos que el miembro izquierdo se transforma en $\Lambda(a, b, F)$ y el miembro derecho se transforma en $\int_a^b \|F'(t)\| dt$. Como una aplicación de la propiedad **2**. consideremos la curva

$$F(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \theta].$$

Entonces $\Lambda(0, \theta, F) = r\theta$. Este resultado lo conocemos desde nuestros cursos elementales de geometría.

2.14.4 Función longitud de arco

Definición 2.43 La función $s(t) = \Lambda(a, t, F)$, $t \in [a, b]$ se denomina la función longitud de arco.

La función $s(t)$ mide la longitud de la curva desde el punto $F(a)$ hasta el punto $F(t)$. Sus propiedades más importantes son:

1. $s(t)$ es estrictamente creciente.
2. $s'(t) = \|F'(t)\|$.

La propiedad **2**. nos dice que la rapidez, en el instante t , de un móvil que se desplaza por una curva se mide como la derivada de la función desplazamiento. Esto coincide con la idea de velocidad que veíamos en nuestros primeros cursos de Física.

Es fácil ver que

1. Si $F(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$, entonces

$$\Lambda(a, b, F) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Este resultado ya lo conocíamos como una aplicación de la integral definida.

2. Si las curvas F y G satisfacen que $G(t) = F(u(t))$, en donde $u : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$, $u'(t) \neq 0$, entonces

$$\int_c^d \|G'(t)\| dt = \int_{u(c)}^{u(d)} \|F'(t)\| dt.$$

La propiedad **2**. anterior nos dice que la longitud de arco se preserva después de hacer reparametrizaciones de la curva. O desde el punto de vista de la mecánica clásica: Aunque recorramos un camino a diferentes velocidades su longitud no cambia.

Ejemplo 2.109 Sea $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$. y sea $u(t) = t^2$, $t \in [0, 2]$. Entonces la función vectorial $G(t) = F(u(t)) = (t^2, t^4)$ satisface:

$$\int_0^2 \sqrt{4t^2 + 16t^6} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 16.819$$

Ejemplo 2.110 La curva — es parametrizada por la función

$$F(t) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2 \ln(\cos t)), \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Hallar la longitud del arco de la curva – comprendido entre el punto $\left(1, 1, 2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2 \ln \frac{1}{2}\right)$.

Solución.

Sea $F(t) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2 \ln(\cos t))$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Entonces, se tienen :

$$F'(t) = (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, -2 \tan t)$$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{(2 \cos 2t)^2 + 2 \sin 2t)^2 + (-2 \tan t)^2} = \sqrt{4 + 4 \tan^2 t} = 2 \sec t$$

Como el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in - : P_0 = F(t_0) \implies t_0 = \frac{\pi}{6}$. Similarmente, el

punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \ln \frac{1}{2}\right) \in - : P_1 = F(t_1) \implies t_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \sec t dt = 2 \left[\ln(\sec t + \tan t) \right] \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathcal{L} = 2 \left[\ln \left(\sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right) - \ln \left(\sec \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$\mathcal{L} = 2 \left[\ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(\sqrt{2} + 1) \right]$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} = 2 \left[\ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(\sqrt{2} + 1) \right]$.

Ejemplo 2.111 Si la curva $\Gamma : \beta(t) = (2t, 3 \operatorname{sen}(2t), 3 \operatorname{cos}(2t))$, $t \geq 0$ (tiempo), es la trayectoria de una partícula, en qué punto de Γ dicha partícula habrá recorrido una distancia de $\frac{\sqrt{10}}{3} \pi$ unidades.

Solución.

$$\beta'(t) = (2, 6 \operatorname{cos}(2t), -6 \operatorname{sen}(2t)), \quad t \geq 0$$

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{40}$$

Sea t_0 el tiempo recorrido para que $s(t_0) = \frac{\sqrt{10}}{3} \pi$, entonces

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{t_0} \sqrt{40} dt = 40t_0 \implies 40t_0 = \frac{\sqrt{10}}{3} \pi, \text{ de donde } t_0 = \frac{\pi}{6},$$

por tanto el punto es $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2.14.5 Curvatura de una curva

La curvatura de una curva en el instante t es un número que expresa la magnitud del cambio de su vector tangente con respecto a la longitud de arco.

Concretamente tenemos: Sea $T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$ el vector tangente unitario de una curva en el tiempo t . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt} T'(t) \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{\|T'(t)\|} T'(t) \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{\|T'(t)\|} N(t).\end{aligned}$$

Definimos la curvatura de la curva en el tiempo t como

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|F'(t)\|}.$$

Vemos que $\kappa(t)$ es la norma de un vector que tiene la misma dirección del vector normal unitario. Si este número es muy grande nos indica que la curva se *tuerce* mucho en trayectos muy cortos y si es pequeño nos indica que la curva se *tuerce* poco. Por ejemplo, consideremos la recta $F(t) = P + tA$, $t \in [a, b]$. Vemos entonces que $T(t)$ es constante y por lo tanto $\frac{dT}{ds} = 0$. Así que $\kappa(t) = 0$. Esto es: la línea recta no tiene ninguna tendencia a torcerse. Ahora, consideremos la curva $F(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Un cálculo nos dice que $\kappa(t) = \frac{1}{r}$. Si r es pequeño la circunferencia se tuerce demasiado en cortos trayectos.

Ejemplo 2.112 La curva C es parametrizada por la función

$$F(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2}), t \in [0, \pi].$$

Hallar la longitud del arco de la curva C comprendido desde el punto $(\frac{\pi-2}{2}, 1, \sqrt{2})$ hasta el punto $(\pi, 2, 4)$.

Solución.

$$\text{Sea } F'(t) = \left(1 - \cos t, \sin t, 2 \cos \frac{t}{2} \right)$$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 + (2 \cos \frac{t}{2})^2} = \sqrt{2 - 2 \cos t + 4 \cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2} + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} = 2.$$

Como el punto $(\frac{\pi-2}{2}, 1, \sqrt{2}) \in C : P_0 = F(t_0) \implies t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Similarmente, el punto $(\pi, 2, 4) \in C : P_1 = F(t_1) \implies t_1 = \pi$.

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dt = 2t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} = \pi$.

Ejemplo 2.113 Dada la curva ζ descrita por la parametrización $F(t) = (a \cos t, c - c \sin t, b \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, donde $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

a) Calcular la curvatura de ζ en cualquier punto de la curva.

b) Determinar el plano osculador de la curva ζ en el punto donde la recta tangente es paralela al plano XZ .

c) Las rectas tangentes a la curva ζ cortan al plano XY en una curva \mathcal{B} . Hallar las ecuaciones paramétricas para \mathcal{B} .

Solución.

a) Sea $F(t) = (a \cos t, c - c \sin t, b \cos t)$, entonces

$$F'(t) = (-a \sin t, -c \cos t, -b \sin t)$$

$$F''(t) = (-a \cos t, c \sin t, -b \cos t)$$

$$F'(t) \times F''(t) = c(b, 0, -a)$$

$$\|F'(t)\| = c$$

$$\|F'(t) \times F''(t)\| = c^2$$

$$\text{Así, } k(t) = \frac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3} = \frac{1}{c}.$$

b) La derivada de F es paralela al vector $j = (0, 1, 0)$, entonces se tiene $\cos t = 0$, de donde $t = \frac{\pi}{2}$.

Así el punto $P = (0, 0, 0)$ y el plano osculador es :

$$\mathcal{P} : (x, y, z) \cdot (b, 0, -a) = 0,$$

de donde

$$\mathcal{P} : bx - az = 0$$

c) Las rectas tangentes a la curva ζ en cualquier punto es:

$$\begin{cases} x = a \cos t - \lambda a \sin t \\ y = c - c \sin t - c \lambda \cos t; \quad \lambda \in \mathbf{R} \\ z = b \cos t - \lambda b \sin t \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación del plano $XY : z = 0$

Resulta que $\lambda = \cos t / \sin t = \cot t$.

Así la curva \mathcal{B} , está dada por las ecuaciones paramétricas :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = c(1 - \csc t); 0 < t < \pi \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.114 Sea $F(t) = (\ln(t-1), \frac{t^2-1}{t+1}, 2t^2+2)$.

(a) Dar el dominio de la función F .

(b) Hallar el punto o los puntos de la curva Γ descrita por F donde la recta que pasa por el punto $(-2, -1, -6)$ es tangente a la curva Γ .

Solución.

$$(a) F(t) = \left(\ln(t-1), \frac{t^2-1}{t+1}, 2t^2+2 \right) = (\ln(t-1), t-1, 2t^2+2), t > 1.$$

Dominio de $F =]1; +\infty[$.

(b) Hallando el punto de tangencia.

$$\text{Sea } \Gamma : F(t) = (\ln(t-1), t-1, 2t^2+2), t > 1.$$

$$\implies F'(t) = \left(\frac{1}{t-1}, 1, 4t \right); t > 1.$$

Sea \mathcal{L} la recta tangente a la curva Γ en en el punto $F(t)$,

$$\mathcal{L} : P = F(t) + rF'(t) ; r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} : P = (\ln(t-1), t-1, 2t^2+2) + r \left(\frac{1}{t-1}, 1, 4t \right) ; r \in \mathbf{R}, t > 1$$

$$\mathcal{L} : P = \left(\ln(t-1) + \frac{r}{t-1}, t-1+r, 2t^2+2+4rt \right) ; r \in \mathbf{R}, t > 1$$

Como el punto $P = (-2, -1, -6) \in \Gamma$ entonces existe un $t \in]1; +\infty[$ tal que $(-2, -1, -6) = F(t) = \left(\ln(t-1) + \frac{r}{t-1}, t-1+r, 2t^2+2+4rt \right)$, de donde

$$\begin{cases} -2 = \ln(t-1) + \frac{r}{t-1} \dots (1) \\ t-1+r = -1 \dots (2) \\ 2t^2+2+4rt = -6 \dots (3) \end{cases}$$

Reemplazando (2) en (3) : $-6 = 2t^2+2+4(-t)t$

$\implies 2t^2 = 8 \implies t = \pm 2$, de donde $t = 2$. Así, $Q = (0, 1, 10)$.

Ejemplo 2.115 Dada la curva $\Gamma : \alpha(t) = (t, \ln(\sec t), 3)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, hallar la longitud de la curva Γ comprendido entre el punto $R(0, 0, 3)$ y el punto $Q\left(\frac{\pi}{4}, \ln \sqrt{2}, 3\right)$.

Solución.

Sea $\alpha(t) = (t, \ln(\sec t), 3)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Entonces, se tienen :

$$\alpha'(t) = (1, \tan t, 0), \quad \|\alpha'(t)\| = \sec t.$$

Como el punto $R(0, 0, 3) \in - : R = \alpha(t_0) \implies t_0 = 0$. Similarmente, el punto

$$Q\left(\frac{\pi}{4}, \ln \sqrt{2}, 3\right) \in - : Q = \alpha(t_1) \implies t_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt \\ \mathcal{L} &= [\ln |\sec t + \tan t|]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(-) = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Ejemplo 2.116 Sea la curva $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - y^{\frac{3}{2}} = z \\ y = x^2 \end{cases}$.

(a) Parametrizar \mathcal{C} .

(b) Hallar el plano osculador \mathcal{P} en los puntos de \mathcal{C} donde el plano \mathcal{P} es paralela a la recta $\mathcal{L} : P = (0, t, -t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Solución.

(a) Parametrizando la curva \mathcal{C} :

$$\text{Sea } x = t \rightarrow y = t^2 \rightarrow z = t^2 - t^3.$$

$$\text{Así, } \alpha(t) = (t, t^2, t^2 - t^3), \quad t \in \mathbf{R}.$$

$$(b) \alpha'(t) = (1, 2t, 2t - 3t^2),$$

$$\alpha''(t) = (0, 2, 2 - 6t)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (1, 2t, 2t - 3t^2) \times (0, 2, 2 - 6t) = (-6t^2, 6t - 2, 2) = 2(-3t^2, 3t - 1, 1)$$

$$B(t) \parallel \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rightarrow B(t) \parallel (-3t^2, 3t - 1, 1)$$

Por condición : existe un punto $Q = \alpha(t) \in \mathcal{C}$ tales que

$$\mathcal{P}_{osc} \parallel \mathcal{C} \iff B(t) \perp (0, 1, -1) \Rightarrow (-3t^2, 3t - 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Así, } Q = \alpha\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}\right).$$

Luego, hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$,

$$\alpha'\left(\frac{2}{3}\right) \times \alpha''\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{-4}{3}, 1, 1\right) \parallel (4, -3, -3)$$

$$\mathcal{P}_{osc} : (P - \alpha\left(\frac{2}{3}\right)) \cdot B\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}, y - \frac{4}{9}, z - \frac{4}{27}\right) \cdot (4, -3, -3) = 0.$$

Por tanto, la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$ es,

$$\mathcal{P}_{osc} : 36x - 27y - 27z - 8 = 0$$

Ejemplo 2.117 Dada la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 4x + z^2 = 16 \\ z\sqrt{x} = 2y \end{cases}$$

(a) Parametrizar \mathcal{C} , indicando el dominio de la parametrización.

(b) Hallar los vectores unitarios $T(t)$, $B(t)$ y $N(t)$ en el punto $(4, 0, 0)$.

Solución.

(a) Parametrizando \mathcal{C} :

Sea :

$$\begin{aligned} z &= 2t \\ x &= 4 - t^2 \end{aligned}$$

Reemplazando en $z\sqrt{x} = 2y$, se tiene

$$y = t\sqrt{4 - t^2}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\text{Así, } \alpha(t) = \left(4 - t^2, \frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2}, 2t\right), \quad -2 \leq t \leq 2.$$

$$(b) \alpha'(t) = \left(-2t, \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 - t^2} + t \left(\frac{-2t}{2\sqrt{4 - t^2}} \right) \right], 2\right) = \left(-2t, \frac{4 - 2t^2}{\sqrt{4 - t^2}}, 2\right)$$

$$\implies \alpha'(0) = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{4 - 2t^2}{\sqrt{4 - t^2}} \right) = \left[-4t\sqrt{4 - t^2} - (4 - 2t^2) \left(\frac{-2t}{2\sqrt{4 - t^2}} \right) \right]$$

$$y''(t) = \frac{2t(t^2 - 6)}{(4 - t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\alpha''(t) = \left(-2, \frac{2t(t^2 - 6)}{(4 - t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right) \implies \alpha''(0) = (-2, 0, 0)$$

$$\|\alpha'(0)\| = \|(0, 2, 2)\| = \sqrt{(0)^2 + 2^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \frac{2(0, 1, 1)}{2\sqrt{2}} \implies T(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0, 2, 2) \times (-2, 0, 0) = (0, -4, 4)$$

$$\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\| = \|(0, -4, 4)\| = 4\sqrt{2}$$

$$B(0) = \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|} = \frac{(0, -4, 4)}{4\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(0) = (-1, 0, 0).$$

Ejemplo 2.118 Una partícula se desplaza en \mathbf{R}^3 según la trayectoria

$$\mathcal{C} : \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

en el instante $t = \frac{\pi}{4}$ la posición de la partícula es $P_0 = \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right)$ y tiene velocidad $V_0 = (-1, 1, \sqrt{2})$. En cada instante, la aceleración de la partícula es

$$A(t) = (-\sec^2 t, -\csc^2 t, 0).$$

Hallar :

(a) $\alpha(t)$.

(b) Los vectores unitarios $T\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $N\left(\frac{\pi}{4}\right)$ en la curva C .

(c) La curvatura $k(t)$ en cualquier punto $F(t)$ de la trayectoria.

Solución.

(a) La aceleración de la partícula es

$$\alpha''(t) = A(t) = (-\sec^2 t, -\csc^2 t, 0)$$

La velocidad de la partícula es

$$\alpha'(t) = V(t) = \left(\int -\sec^2 t \, dt, \int -\csc^2 t \, dt, \int 0 \, dt \right)$$

$$\alpha'(t) = (-\tan t + C_1, \cot t + C_2, C_3).$$

$$\text{Como } V_0 = (-1, 1, \sqrt{2}) = \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\tan\frac{\pi}{4} + C_1, \cot\frac{\pi}{4} + C_2, C_3\right),$$

de donde $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ y $C_3 = \sqrt{2}$.

$$\alpha'(t) = (-\tan t, \cot t, \sqrt{2}).$$

La trayectoria de la partícula es

$$\alpha(t) = \left(\int -\tan t \, dt, \int \cot t \, dt, \int \sqrt{2} \, dt \right) = (\ln \sin t + D_1, \ln \cos t + D_2, \sqrt{2}t + D_3)$$

$$\text{Como } P_0 = \alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\ln \sin\frac{\pi}{4} + D_1, \ln \cos\frac{\pi}{4} + D_2, \sqrt{2}t + D_3\right),$$

de donde $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ y $D_3 = 0$.

Así, $\alpha(t) = (\ln \sin t, \ln \cos t, \sqrt{2}t)$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$(b) \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, \sqrt{2}), \quad \left\| \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \|(-1, 1, \sqrt{2})\| = 2,$$

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left\| \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\|} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\sec^2\frac{\pi}{4}, -\csc^2\frac{\pi}{4}, 0\right) = (-2, -2, 0)$$

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, \sqrt{2}) \times (-2, -2, 0) = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4) = 2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$$

$$\left\| \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \|(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)\| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$B\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left\| \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\|} = \frac{(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)}{4\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$N\left(\frac{\pi}{4}\right) = B\left(\frac{\pi}{4}\right) \times T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right).$$

(c)

$$\alpha'(t) = (-\tan t, \cot t, \sqrt{2}),$$

$$\left\| \alpha'(t) \right\| = \|(-\tan t, \cot t, \sqrt{2})\| = \sqrt{\tan^2 t + \cot^2 t + 2} = \sqrt{\sec^2 t + \csc^2 t}$$

$$\alpha'(t) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t}} = \frac{2}{|\sin 2t|} = \frac{2}{\sin 2t}.$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (-\tan t, \cot t, \sqrt{2}) \times (-\sec^2 t, -\csc^2 t, 0)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\sqrt{2} \csc^2 t, -\sqrt{2} \sec^2 t, \tan t \csc^2 t + \cot t \sec^2 t)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= \left\| \left(\sqrt{2} \csc^2 t, -\sqrt{2} \sec^2 t, \tan t \csc^2 t + \cot t \sec^2 t \right) \right\|^2 \\ \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= 2 \csc^4 t + 2 \sec^4 t + \tan^2 t \csc^4 t + \cot^2 t \sec^4 t + 2 \tan t \csc^2 t \cot t \sec^2 t \\ \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= \frac{2}{\sin^4 t} + \frac{2}{\cos^4 t} + \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} + \frac{2}{\sin^2 t \cos^2 t} \\ \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= \frac{2}{\sin^4 t} + \frac{2}{\cos^4 t} + \frac{4}{\sin^2 t \cos^2 t} \\ \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= 2 \left(\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} \right)^2 = \frac{32}{\sin^2 2t} \\ \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| &= \frac{4\sqrt{2}}{\sin 2t} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\sin 2t}}{\left[\frac{2}{\sin 2t} \right]^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 2t.$$

Ejemplo 2.119 Una partícula se mueve en \mathbf{R}^3 según la trayectoria $C : F(t) = (x(t), y(t), z(t))$, partiendo del punto $P_0(1, 1, 0)$ en el instante $t = 0$. En cada instante $t \geq 0$ la velocidad de la partícula es

$$V(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

(a) Hallar la trayectoria $F(t)$.

(b) Calcular la curvatura $k(t)$ y la torsión $\tau(t)$ de la trayectoria en el instante cuando $t = 0$.

(c) Hallar las componentes tangencial $a_T(t)$ y normal $a_N(t)$ de la aceleración en el punto $F(0)$.

Sugerencia. Usar las fórmulas :

$$k(t) = \frac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{(F'(t) \times F''(t)) \cdot F'''(t)}{\|F'(t) \times F''(t)\|^2}$$

$$a_T(t) = F''(t) \cdot T(t) \quad \text{o} \quad a_T(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad \text{donde} \quad s'(t) = \frac{ds}{dt} = \|F'(t)\|$$

$$a_N(t) = F''(t) \cdot N(t) \quad \text{o} \quad a_N(t) = s'(t) \|T'(t)\| = k(t) [s'(t)]^2$$

Solución.

(a) la velocidad de la partícula es

$$F'(t) = V(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) ; t \geq 0$$

$$F(t) = (e^t + C_1, e^{-t} + C_2, \sqrt{2}t + C_3).$$

$$\text{Como } P_0(1, 1, 0) = F(0) = (e^0 + C_1, e^{-0} + C_2, \sqrt{2}(0) + C_3),$$

de donde $C_1 = 0, C_2 = 0$ y $C_3 = 0$.

$$\text{Así, } F(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t) ; t \geq 0.$$

$$(b) F'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}), \|F'(t)\| = e^t + e^{-t} \text{ entonces } F'(0) = (1, -1, \sqrt{2}), \|F'(0)\| = 2.$$

$$F''(t) = (e^t, e^{-t}, 0) \implies F''(0) = (1, 1, 0).$$

$$F'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0) \implies F'''(0) = (1, -1, 0).$$

$$F'(t) \times F''(t) = (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2).$$

$$\text{Ahora en } t = 0 : F'(0) \times F''(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2), \|F'(0) \times F''(0)\| = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Así, } k(0) = \frac{\|F'(0) \times F''(0)\|}{\|F'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{[2]^3} = \frac{2\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ahora, } (F'(t) \times F''(t)) \cdot F'''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2) \cdot (e^t, -e^{-t}, 0) = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{Así, } \tau(0) = \frac{(F'(0) \times F''(0)) \cdot F'''(0)}{\|F'(0) \times F''(0)\|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{4}.$$

(c)

$$T(0) = \frac{F'(0)}{\|F'(0)\|} = \frac{(1, -1, \sqrt{2})}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$B(0) = \frac{F'(0) \times F''(0)}{\|F'(0) \times F''(0)\|} = \frac{(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \text{ Luego,}$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Ahora,

$$\alpha_r(0) = F''(0) \cdot T(0) = (1, 1, 0) \cdot (1, -1, \sqrt{2}) = 0.$$

$$\alpha_N(t) = F''(0) \cdot N(0) = (1, 1, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \sqrt{2}.$$

Aplicaciones a la gravitación

En esta sección estudiaremos una aplicación de las curvas en \mathbf{R}^2 al movimiento planetario. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ una función vectorial. Los puntos $(x, y) \in \text{Im}(\alpha)$ lo podemos poner en coordenadas polares y así la curva puede ser puesta cómo

$$(x, y) = r(\cos \theta, \text{sen} \theta),$$

en donde r mide la distancia del punto (x, y) al origen. Es claro que tanto r como θ dependen del tiempo t .

Denotemos con $U_r = (\cos \theta, \text{sen} \theta)$. Entonces nuestra curva la podemos escribir como $\alpha(t) = r \cdot U_r$. También, denotemos con

$$U_\theta = \frac{dU_r}{d\theta} = (-\text{sen} \theta, \cos \theta).$$

Es claro que U_r y U_θ son vectores unitarios y perpendiculares, además $U_r = \frac{-dU_\theta}{dt}$. Ahora,

$$V(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot U_r + r \frac{dU_r}{dt}.$$

Hacemos uso de la regla de la cadena y obtenemos que

$$\frac{dU_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dU_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} U_\theta.$$

Combinando estas dos última expresiones obtenemos

$$V(t) = \frac{dr}{dt} \cdot U_r + r \frac{d\theta}{dt} U_\theta.$$

De la misma forma la aceleración también la podemos expresar como una combinación lineal de U_r y U_θ , así:

$$A(t) = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] U_r + \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] U_\theta.$$

Si suponemos que una estrella de masa M atrae a un planeta de masa m , la fuerza de atracción la podemos expresar así:

$$F = f_r U_r + f_\theta U_\theta.$$

De otra parte, la segunda ley de Newton nos dice que $F(t) = mA(t)$. De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f_r &= m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \\ f_\theta &= m \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Dentro de las hipótesis que hizo, con respecto al movimiento planetario, está aquella que afirma que la fuerza de atracción, de la estrella al planeta, se ejerce en la dirección del planeta hacia la estrella. Esto es, en la dirección de $-U_r$. Entonces la componente $f_\theta = 0$. Esto es,

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Si multiplicamos por r vemos que se transforma en

$$\frac{d \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)}{dt} = 0$$

De lo anterior se deduce que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h,$$

en donde h es una constante. Pero si suponemos que el movimiento del planeta es un giro en sentido contrario al las manecillas del reloj podemos concluir que $\theta(t)$ es una función creciente y por lo tanto $\frac{d\theta}{dt} > 0$. Así, nuestra constante h es positiva.

Sabemos que el área que barre el radio vector R cuando el planeta se desplaza de un tiempo t_1 a un tiempo t_2 viene expresada por la fórmula

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt.$$

De lo expuesto anteriormente obtenemos que

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} h (t_2 - t_1).$$

Esta expresión confirma la segunda Ley de Kepler que dice: *Las áreas barridas por el radio vector desde el sol a un planeta son proporcionales al tiempo.*

La ley de gravitación universal de Newton establece que

$$f_r = -\frac{G.M.m}{r^2} = \frac{-km}{r^2},$$

en donde G es la constante de gravitación universal. De lo anterior obtenemos la ley que rige el movimiento planetario en la mecánica newtoniana:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r(t) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{-k}{r^2}.$$

Si hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{r}$ y hacemos uso de lo anterior, es fácil observar que

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2}.$$

Remplazamos en lo anterior obtenemos:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

La solución general es

$$z = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + \frac{k}{h^2}.$$

Para obtener información de lo anterior debemos hacer algunas simplificaciones. Podemos suponer, por ejemplo, que para $\theta = 0$ la distancia r del planeta a la estrella es mínima o lo que es lo mismo z es máximo. Esto significa que podemos suponer que $z'(0) = 0$ y $z''(0) > 0$. entonces se deduce que $\alpha = 0$ y $\beta > 0$. La solución tomará la forma

$$z = \beta \cos \theta + \frac{k}{h^2}.$$

Si en lo anterior cambiamos z por $\frac{1}{r}$, aquella se transforma en

$$r = \frac{pE}{1 + E \cos \theta},$$

en donde $p = \frac{1}{\beta}$ y $E = \frac{\beta h^2}{k}$. Este número E se llama la excentricidad de la cónica definida anteriormente.

Puesto que el movimiento del planeta alrededor de la estrella es cerrado, dedujo que la cónica anterior debe ser una elipse. Con ello confirmó la primera ley de Kepler que dice: *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el sol.*

Ejercicios Propuestos: Curvas y sus aplicaciones

1. Dada la curva

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y) \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones paramétricas de Γ .

2. Sea la curva

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z - y = 1 \end{cases}$$

- (a) Hallar una parametrización para Γ .
 (b) Hacer un esbozo de la curva Γ considerándola como intersección de dos superficies.

3. La parábola

$$x^2 = 8(y - 4), \quad z = 0$$

es la proyección ortogonal de una curva \mathcal{C} que se encuentra en la esfera con centro $(0, 4, 5)$ y radio 3. Hallar las ecuaciones paramétricas y graficar la curva \mathcal{C} .

4. Sea \mathcal{C} la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Verificar que la proyección ortogonal de \mathcal{C} sobre el plano XY es una elipse.
 (b) Hallar el vector tangente en cualquier punto de la curva $P(x, y, z)$ tal que $y > 0$.

5. Hallar una representación paramétrica de una curva que se encuentra en el cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

y tal que en cualquier punto P de la curva, el ángulo entre el eje Y y la tangente es igual al ángulo entre el radio vector P y la tangente.

6. Hallar sobre la curva Γ con ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = \ln(t+2), \quad z = \frac{t+1}{t-1}$$

los puntos donde su recta tangente pasa por el centro de la esfera

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 - 2\beta y + \beta^2 - 4 = 0.$$

7. Demostrar que la curva \mathcal{C} descrita por $\alpha(t) = (ae^{kt} \cos t, ae^{kt} \sin t, ce^{kt})$ está sobre un cono de revolución.

8. Sean las curvas

$$C_1 : F(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad C_2 : G(t) = (t+1, t^2, t+1)$$

¿En cuánto debe incrementarse t para que la longitud de arco de C_1 se incremente en $(e-1)\sqrt{3}$ desde el instante en que C_2 interseca a C_1 ?

9. Una partícula que se mueve en el espacio describe una curva \mathcal{C} , con vector de posición

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{2}{t}, \ln(t^2)\right), \quad t > 0 \quad \text{y } t \text{ en segundos.}$$

¿En cuánto tiempo recorrerá una longitud de arco de la curva \mathcal{C} igual a 9 unidades, desde el punto P_0 donde la recta tangente a la curva descrita por α pasa por el punto $(4, 0, 2 + \ln 4)$?

10. Sea la función $F(t) = (t - \ln t, \tan(\pi t), \sqrt{2t - t^2})$

- (a) Hallar el intervalo más grande (del dominio de F) para el cual F es la parametrización de una curva en \mathbf{R}^3 .
 (b) Analizar si F es regular en el intervalo hallado en la parte (a).
 (c) Si Γ es una curva regular descrita por F , de la parte (b), hallar ecuaciones paramétricas de la curva \mathcal{C} que resulta de intersecar las rectas tangentes a Γ con el plano XZ .

11. Sea

$$\Gamma : \alpha(t) = (3t^2 - 5, -t + 5, 3t^2 + 5), \quad t \in \mathbf{R}$$

- (a) Hallar los puntos P_1 y P_2 de Γ tales que la curvatura de Γ toma su valor máximo en P_1 y un vector tangente a Γ en P_2 es paralelo al vector $(6, -1, 6)$.
- (b) Hallar la longitud de arco de Γ desde P_1 hasta P_2 .

12. Una curva Γ es descrita por la parametrización $F(t) = (2t, e^t, e^{-t}), t \in \mathbf{R}$.

- (a) Hallar los vectores unitarios T , N y B en el punto $(0, 1, 1)$.
- (b) ¿Existe en la curva un punto donde su plano osculador tiene como normal al vector $(\sqrt{2}, -1, 2)$? En caso afirmativo, hallar la ecuación de dicho plano osculador.

13. La curva C es parametrizada por la función $F(t) = (\sin t, \cos t, \ln \sec t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Hallar:

- (a) La curvatura $k(t)$ en cualquier punto $F(t)$ de la curva.
- (b) La longitud del arco de la curva comprendido entre el punto $F(\frac{\pi}{3})$ y el punto donde la curvatura tiene valor $\sqrt{2}$.

14. Una partícula se mueve por el espacio con velocidad

$$V(t) = (-3t^2, t^3, e^{t-2}), \quad t \geq 0.$$

Hallar la aceleración partícula en el instante, distinto de 0, en que su rapidez coincide con el módulo de su aceleración.

Funciones de varias variables

2.15 Introducción. Función de varias variables

Definición 2.44 Una función $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de n variables es una regla que asocia a cada n -upla de números reales (x_1, \dots, x_n) de algún subconjunto $D(f)$ un único número real $f(x_1, \dots, x_n)$.

Observación 2.13 La función f definida sobre $\mathcal{D}(f)$ con valores en \mathbb{R} se representa por

$$f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto w = f((x_1, \dots, x_n)),$$

y se dice que

$$\begin{aligned} w = f(x_1, \dots, x_n) & : \text{regla de correspondencia de } f \\ w & : \text{imagen de } P \text{ mediante } f \text{ (variable dependiente)} \\ (x_1, \dots, x_n) & : \text{preimagen de } w \text{ mediante } f \text{ (variables independientes - argumento de } f) \end{aligned}$$

El conjunto $\mathcal{D}(f)$ se denomina dominio de f .

El conjunto de números reales $f(x_1, \dots, x_n)$ se denomina rango o imagen de f .

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}.$$

En lo que sigue en adelante consideramos ejemplos de funciones de dos o tres variables independientes.

Ejemplo 2.120 (Encontrando un dominio). Encontrar el dominio de definición de función

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Se trata de encontrar aquellas parejas de números (x, y) , para las cuales tiene sentido la fórmula dada para $f(x, y)$. Es decir, ¿qué valores pueden darse a x e y , de manera que al realizar las operaciones indicadas en la fórmula se obtenga un valor numérico y no tropecemos con una operación imposible?

Es evidente que, en este caso, el dominio de la función es todo el espacio \mathbb{R}^2 excepto el origen de coordenadas, es decir, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pues la fórmula puede ser calculada para cualquier pareja de números reales, salvo para la pareja $(0, 0)$.

Ejemplo 2.121 (Representando un dominio). Encontrar el dominio de las siguientes funciones y representar su gráfico:

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x - y^2}} \\ 2. f(x, y) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{y} \end{aligned}$$

$$3. f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}}$$

$$4. f(x, y) = \ln xy$$

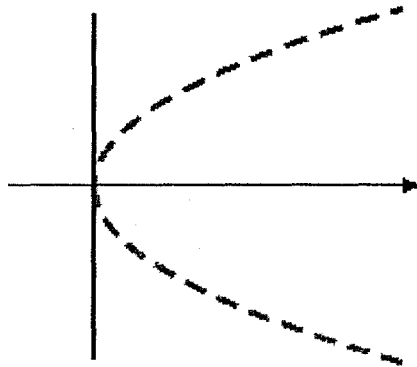
$$5. f(x, y) = \arcsin(x + y)$$

Solución

1. Para que la raíz cuadrada $\sqrt{x - y^2}$ esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x - y^2 \geq 0$, pero, al estar en el denominador, ha de ser distinto de cero, $x - y^2 \neq 0$. En consecuencia, $x - y^2 > 0$.

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}$$

Luego el dominio de la función coincide con el interior de la parábola, excluido el contorno.



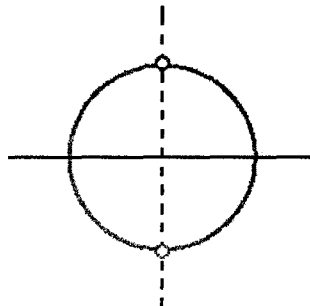
$$\text{Dominio de la función : } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy - y^2}}$$

$$2. f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{y}$$

Para que la raíz cuadrada esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Ahora bien, al estar y en el denominador, no puede ser cero, $y \neq 0$. En consecuencia,

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4, y \neq 0\}$$

Exterior de la circunferencia de centro el Origen y radio 2, incluido el contorno y excluido el eje OY. Los puntos (0,2) y (0,-2) quedan excluidos.

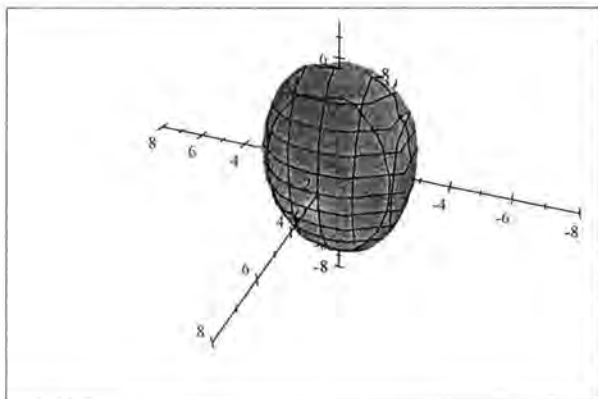


$$3. f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}}$$

$$36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2 > 0 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} < 1$$

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} < 1 \right\}$$

El dominio es el interior del elipsoide con centro el Origen y eje mayor el eje Z, excluido el contorno.



$$4. f(x, y) = \ln xy$$

$$xy > 0 \implies (x > 0 \wedge y > 0) \circ (x < 0 \wedge y < 0)$$

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \circ (x < 0 \wedge y < 0)\}$$

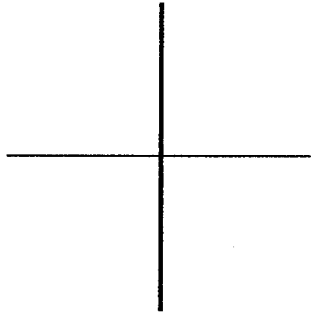
Es decir, el dominio está formado por el primer y el tercer cuadrante, excluidos los ejes de coordenadas.

$$5. f(x, y) = \arcsin(x + y)$$

esto significa que $x + y$ es el seno de un ángulo. Para que $x + y$ pueda ser el seno de un ángulo ha de estar comprendido

entre 1 y -1, $-1 \leq x + y \leq 1$. En consecuencia

$$-1 \leq x + y \leq 1 \implies -x - 1 \leq x + y \leq 1 - x$$



El dominio es la franja comprendida entre las rectas $y = 1 - x$, $y = -1 - x$, incluidas ambas rectas.

2.15.1 Operaciones con funciones de varias variables

Definición 2.45 Sean $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Entonces se definen:

1. La función suma de f y g ,

$$f + g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P).$$

2. La función producto de f y g ,

$$fg : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$fg(P) = f(P) \cdot g(P).$$

3. La función cociente de f sobre g ,

$$\frac{f}{g} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\frac{f}{g}(P) = \frac{f(P)}{g(P)},$$

donde $\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{D} : g(P) \neq 0\}$.

Las funciones de varias variables se pueden combinar de la misma forma que las funciones de una sola variable. Por tanto se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

Definición 2.46 (Composición de funciones). Dada la función $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $\mathcal{D}(f)$ de \mathbb{R}^n y la función $\varphi : \mathcal{D}(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $\mathcal{D}(\varphi)$ de \mathbb{R} , cuyo rango está contenido en $\mathcal{D}(f)$ (es decir, $f(\mathcal{D}(\varphi)) \subseteq \mathcal{D}(f)$), entonces se puede formar la composición de φ con f , que representamos por $\varphi \circ f : \mathcal{D}(\varphi \circ f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$\mathcal{D}(\varphi \circ f) = \{P \in \mathcal{D}(f) : f(P) \in \mathcal{D}(\varphi)\}$$

y regla de correspondencia

$$(\varphi \circ f)(P) = \varphi(f(P)).$$

Ejemplo 2.122 Hallar la función compuesta de la función $f(x, y) = y - x^2$ con la función $\varphi(t) = \sqrt{t}$

Solución. Para poder componer, la función f tiene que actuar primero, y después la φ . En efecto, en esquema, resulta

$$\begin{array}{ccccc} f(x, y) = xy - x^2y & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ \varphi(t) = \sqrt{t} & (x, y) & \mapsto & t & \mapsto & z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$h(t) = (\varphi \circ f)x, y) = (\varphi)(f(x, y)) = \varphi(y - x^2) = \sqrt{y - x^2}$$

Observe que la función resultante de la composición solamente estará definida para aquellos puntos (x, y) en los cuales se cumpla que $y - x^2 \geq 0$, es decir,

$$D(h) = D(\varphi \circ f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

2.15.2 Gráfica de una función de dos variables

Definición 2.47 Sea $f : A \rightarrow B$ definida por $w = f(u)$, el grafo de f es el subconjunto de $A \times B$ denotado $\mathcal{G}(f)$ y definido por

$$\mathcal{G}(f) = \{(u, f(u)) \in A \times B : u \in A\}.$$

Observación 2.14 1. La representación gráfica del grafo de una función se denomina gráfica de la función.

2. Si $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable vectorial, para obtener la gráfica de la función en el espacio \mathbb{R}^n dibujamos

$$w = f(u) \text{ con } u \in \mathcal{D}(f).$$

3. Dada la gráfica de una función f ,

Para determinar	se proyecta ortogonalmente la gráfica sobre
$\mathcal{D}(f)$	el espacio \mathbb{R}^n
$\mathcal{R}(f)$	el eje vertical

Así,

$$\mathcal{D}(f) = \Omega \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(f) = [c, d].$$

Definición 2.48 Sea $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable vectorial. Definimos la gráfica de la función f como el subconjunto del espacio \mathbb{R}^{n+1} que consta de todos los puntos $((x_1, x_2, \dots, x_n), w)$ en \mathbb{R}^{n+1} tales que

$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para $(x_1, x_2, \dots, x_n, w)$ en $\mathcal{D}(f)$. Es decir,

$$\mathcal{G}(f) = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

En el caso de $n = 1$:

Funciones de una variable. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una *curva en el plano*.

Un punto (x, y) del plano para estar situado en la gráfica ha de cumplir dos condiciones: en primer lugar, que su primera coordenada, x , esté en el dominio de la función, $x \in \mathcal{D}(f)$; y en segundo lugar, que su segunda coordenada, y , sea la imagen,

mediante la función de la primera, es decir, $y = f(x)$. En base a esto, los puntos (x, y) de la gráfica se pueden expresar de la forma $(x, f(x))$. Es decir,

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in D(f)\}$$

o bien, de manera esquemática,

$$(x, y) \in \mathcal{G}(f) \Leftrightarrow \{x \in D(f) : y = f(x)\}$$

Funciones de dos variable. La gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio (x, y, z) para los cuales se tiene que $z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$.

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

Es decir,

$$(x, y, z) \in \mathcal{G}(f) \Leftrightarrow z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$$

La gráfica de una función de dos variables será una *superficie en el espacio*. La proyección de la gráfica sobre el plano horizontal coincide con el dominio de la función.

Definición 2.49 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de nivel del valor k se define como todos los puntos $P \in \Omega$ tales que $f(P) = k$. Se denota por

$$\Gamma_k := \{P \in \Omega : f(P) = k, k \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.123 Dada $f(x, y) = x^2 + y^2$. Esbozar S la **gráfica** de f , hallando y graficando las intersecciones de S con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\} \quad \text{para } k \in \mathbb{R}.$$

Solución.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

Las curvas de nivel de valor k :

$$\Gamma_k : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = k \implies \Gamma_k : \frac{x^2}{(3\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{k})^2} = 1, k > 0$$

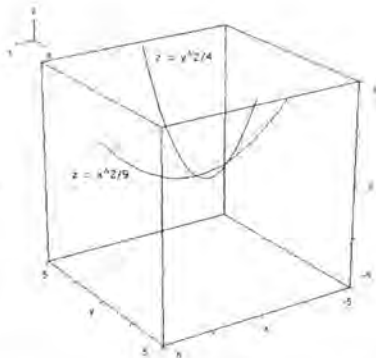
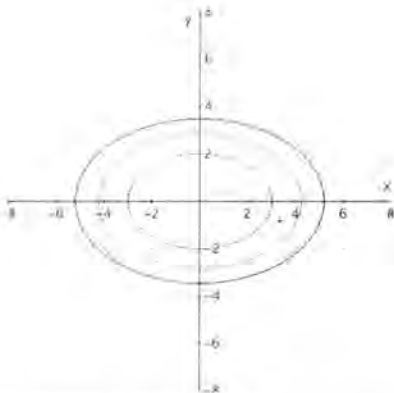
Si $k > 0$, vemos que son elipses, de centro $V(0, 0)$, con eje mayor el eje X.

Γ_0 : es el punto $(0, 0)$.

$$\Gamma_1 : \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\Gamma_2 : \frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\Gamma_3 : \frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$$

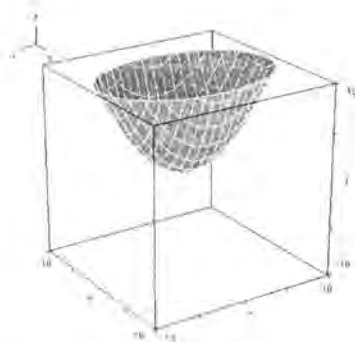


Las trazas a los planos coordenados (intersección de la gráfica de f con los planos coordenados \mathcal{P}_{XZ} y \mathcal{P}_{YZ}).

$T_{XZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{9}, y = 0 \right\}$ es una parábola.

$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{y^2}{4}, x = 0 \right\}$ es una parábola.

La gráfica de f , usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.124 Dada la función $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

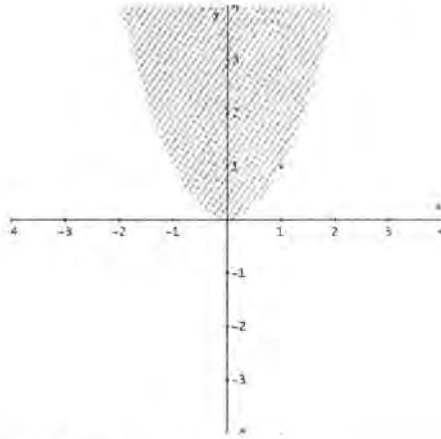
a) Hallar y graficar el dominio de f .

b) Esbozar la gráfica de f , hallando y graficando las intersecciones de S con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\} \quad \text{para } k = 0, 1, 2.$$

Solución.

a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$



b) Las curvas de nivel de valor k :

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = k\} \text{ para } k \in \mathbb{R}.$$

$$\Gamma_k : \sqrt{y - x^2} = k \iff \Gamma_k : y = x^2 + k^2.$$

Si $k \geq 0$, vemos que son parábolas, de vértice $V(0, k^2)$, se abre hacia el eje positivo de Y .

$$\Gamma_0 : y = x^2.$$

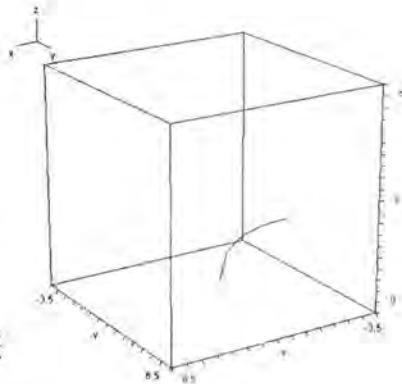
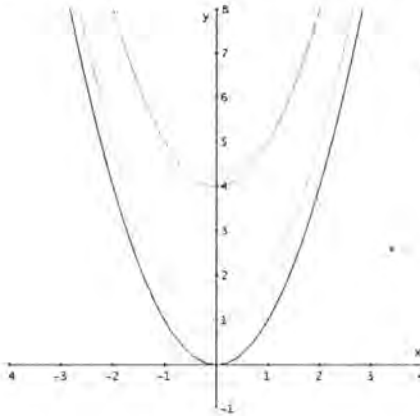
$$\Gamma_1 : y = x^2 + 1$$

$$\Gamma_2 : y = x^2 + 4$$

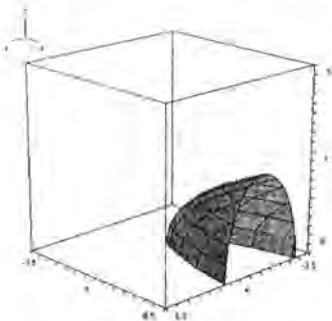
Las trazas a los planos coordenados (intersección de la gráfica de f con los planos coordenados \mathcal{P}_{XZ} y \mathcal{P}_{YZ}).

T_{XZ} : no existe

$$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{y}, x = 0\}.$$



La gráfica de f , usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.125 Graficar la función: $f(x, y) = x + y - 3$

Solución. El dominio de la función es $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Para representar la función ponemos z en vez de $f(x, y)$, de donde se tiene: $z = x + y - 3$, es la ecuación de un plano en el espacio.

Para visualizar el plano en el espacio representamos el triángulo formado por los tres puntos en los que el plano corta a los ejes de coordenadas.

Para hallar las coordenadas de un punto de un plano se dan valores arbitrarios a dos de las variables y se calcula el tercer valor a partir de la ecuación del plano. En nuestro caso, se da el valor cero a dos de las variables y se calcula el valor correspondiente de la otra variable:

x	y	z
0	0	-3
3	0	0
0	3	0

Las curvas de nivel de valor k :

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in D(f) = \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\} \text{ para } k \in \mathbb{R}.$$

$$\Gamma_k : x + y - 3 = k \iff \Gamma_k : x + y = k + 3$$

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = k + 3\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Para $k \in \mathbb{R}$, vemos que es una familia de rectas.

$$\Gamma_0 : x + y = 3$$

$$\Gamma_1 : x + y = 4$$

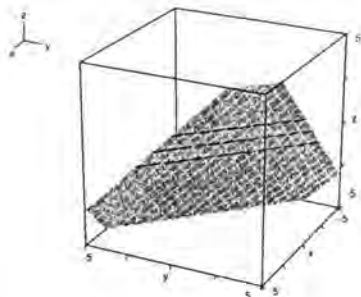
$$\Gamma_2 : x + y = 5$$

Las trazas a los planos coordenados (intersección de la gráfica de f con los planos coordenados \mathcal{P}_{XZ} y \mathcal{P}_{YZ}).

$$T_{XZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 3, y = 0\} \text{ es una recta.}$$

$$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y - 3, x = 0\} \text{ es una recta.}$$

La gráfica de f , usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.126 Dada la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

Esbozar S la gráfica de f , hallando y graficando las intersecciones de S con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel

$$N_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = k\} \text{ para } k = -1, 0, 1.$$

Solución.

$$\text{Dom}(f) = \mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$$

Las curvas de nivel de valor k :

$$N_k : \frac{x^2}{y} = k \iff \Gamma_k : x^2 = ky.$$

Si $k \neq 0$, vemos que son parábolas, de vértice $V(0, 0)$, sin el origen de coordenadas.

$$N_{-1} : x^2 = -y, y \neq 0$$

$$N_0 : x = 0, y \neq 0, \text{ el eje } Y \text{ sin el origen.}$$

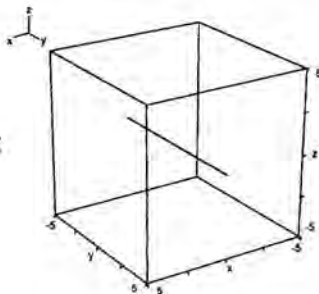
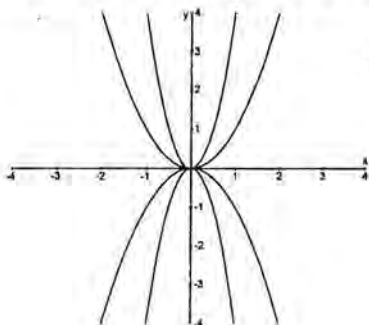
$$N_1 : x^2 = y, y \neq 0$$

Las trazas a los planos coordenados (intersección de la gráfica de f con los planos coordenados \mathcal{P}_{XZ} y \mathcal{P}_{YZ}) son:

T_{XZ} : no existe

$$T_{XY} := \text{Gr}(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0, x = 0\} = \{(0, y, 0) : y \neq 0\}.$$

$$T_{YZ} := \text{Gr}(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, z = 0\} = \{(0, y, 0) : y \neq 0\}.$$



La gráfica de f , usando las trazas y las curvas de nivel es :



Observación 2.15 La ecuación del plano se generaliza al espacio de n dimensiones mediante lo que se denomina hiperplano. Así, tenemos las siguientes representaciones:

$$f(x) = ax + b \quad \text{Recta en el plano}$$

$$f(x, y) = ax + by + c \quad \text{Plano en el espacio}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \quad \text{Hiperplano en } \mathbb{R}^{n+1}$$

2.16 Límites

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 2$, la denominamos campo vectorial. En el caso en que $m = 1$ la denominamos campo escalar.

Cualquier límite debe definirse en puntos de acumulación del dominio de una función.

Un punto de acumulación P_0 de $\text{dom}(f)$ es un punto de \mathbb{R}^n (que puede pertenecer o no a $\text{dom}(f)$) que tiene la propiedad de que tan cerca como se quiera de él, deben existir puntos $P (\neq P_0)$ de $\text{dom}(f)$.

Cuando consideramos funciones de una sola variable el concepto de límite está referido a la aproximación que hacemos a un punto ya sea por la derecha o por la izquierda. En el caso de campos vectoriales la aproximación a un punto puede hacerse por infinitos caminos. Iniciemos con unos ejemplos:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si dejamos una variable, por ejemplo x , fija vemos que $f(x, y)$ se aproxima a 0 cuando y se aproxima a 0. Pero si tomamos la recta $x = y$ entonces $f(x, y) = \frac{1}{2}$, aunque (x, y) se aproxime a $(0, 0)$, no se tiene que $f(x, y)$ se aproxime a 0.

La siguiente definición es la formalización del hecho intuitivo: el límite de f en P_0 es l , si como sea que se tome $P \in \text{dom}(f)$ "muy cerca" de P_0 , entonces $f(P)$ estará "muy cerca" de l .

Definición 2.50 Se dice que el número real l es el límite de f en P_0 , si para cada $\varepsilon > 0$ que se considere existe un $\delta > 0$ (por lo general, δ depende de ε y de P_0) tal que:

$$\text{Si } P \in \text{dom}(f), 0 < \|P - P_0\| < \delta \implies |f(P) - l| < \varepsilon$$

En este caso escribimos: $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$.

Definición 2.51 (Límite de una función en un punto en el plano). Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto quizás en el punto (x_0, y_0) . Entonces,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - l| < \varepsilon$, siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Gráficamente, esta definición de límite significa que para un punto cualquiera (x, y) situado en el disco de radio δ , el valor $f(x, y)$ está comprendido entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.

Hay que tener en cuenta que para que exista el límite todos los puntos del entorno tienen que tener su imagen aproximadamente a la misma altura (entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$). Si unos puntos del entorno se aproximan a un valor y otros a otros, entonces el límite no existe.

En la definición de límite, el punto en cuestión no cuenta. Es decir, da igual cuál sea el valor de $f(x_0, y_0)$, incluso da igual que no exista dicho valor. Al poner $0 < \delta$ nos estamos ocupando de todos los puntos del δ -entorno, salvo del centro. No obstante, hay que advertir que en el cálculo de límites de funciones continuas dicho valor sí que adquiere gran importancia.

Esto es lo que no sucede en el ejemplo anterior, podemos tener puntos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tales que $\|(x, y) - (0, 0)\|$ sea muy pequeña y no obstante $|f(x, y) - 0| = \frac{1}{2}$.

A partir de la definición se pueden demostrar teoremas similares a los teoremas sobre límites conocidos de las funciones del Cálculo.

2.16.1 Propiedades de límites de función vectorial

Proposición 2.17 Si f es una función de \mathbf{R}^n a \mathbf{R} tales que $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$, y $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$ existen y si P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, entonces

1. $\lim_{P \rightarrow P_0} \{f(P) + g(P)\} = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) + \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$
2. $\lim_{P \rightarrow P_0} \lambda f(P) = \lambda \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$
3. $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \cdot g(P) = (\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)) (\lim_{P \rightarrow P_0} g(P))$
4. $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)}$, si $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \neq 0$.

Omitimos la prueba de esta proposición, ya que es la misma que la de la proposición correspondiente para funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} .

Ejemplo 2.127 Demostrar, usando la definición, que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} y^2 - xy = 3.$$

Solución.

Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ y $0 < \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} < \delta \implies |y^2 - xy - 3| < \varepsilon$.

Expresamos $|y^2 - xy - 3|$ en términos de $|x - 2|$ y $|y + 1|$.

Si $0 < \sqrt{(x-2) + (y+1)^2} < \delta$, entonces $|x-2| < \delta$ y $|y+1| < \delta$.

$$\begin{aligned} |y^2 - xy - 3| &= \left| [(y+1) - 1]^2 - [(x-2) + 2] [(y+1) - 1] - 3 \right| \\ &= \left| [(y+1)^2 - 2(y+1) + 1] - [(x-2)(y+1) - (x-2) + 2(y+1) - 2] - 3 \right| \\ &= \left| (y+1)^2 - 2(y+1) - (x-2)(y+1) + (x-2) + 2(y+1) \right|. \\ |y^2 - xy - 3| &\leq |y+1|^2 + 2|y+1| + |x-2||y+1| + |x-2| + 2|y+1| \end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión podemos restringir la elección de δ de modo que $\delta \leq 1$. Entonces, $|x-2| < 1$ y $|y+1| < 1$ y

$$|y^2 - xy - 3| < \delta + 2\delta + \delta + \delta + 2\delta = 7\delta.$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}$,

$$|y^2 - xy - 3| < \epsilon$$

siempre que $0 < \sqrt{(x-2) + (y+1)^2} < \delta$. Lo que prueba lo pedido.

Ejemplo 2.128 Usando la *definición de límite*, probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0.$$

Solución.

$$D(f) = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Por demostrar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x,y) \in D(f) \wedge 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies \left| \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \right| < \epsilon$$

Observemos que :

$$\begin{aligned} \text{De } : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ se tiene:} \\ |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |x| < \delta \\ |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |y| < \delta \\ |x| &\leq |x| + |y|, \quad |y| \leq |x| + |y| \quad ; \forall x, y \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{|x|}{|x| + |y|} |x| + \frac{|y|}{|x| + |y|} |y| \leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta = \epsilon, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Por tanto, basta elegir $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Proposición 2.18 Si f es una función de \mathbf{R}^n a \mathbf{R} tal que $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$, φ es una función continua en l , y P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$, entonces

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \varphi(f(P)) = \varphi(l).$$

Prueba.

La prueba es la misma que la prueba de la proposición correspondiente para funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} .

Tomemos $\epsilon > 0$. Como φ es una función continua en l , existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|\varphi(y) - \varphi(l)| < \varepsilon \text{ siempre que } y \in \mathcal{D}(\varphi) \text{ y } |y - l| < \sigma.$$

Como $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$, existe un número $\delta > 0$ (por lo general, δ depende de ε y de P_0) tal que:

$$\text{Si } P \in \mathcal{D}(f), 0 < \|P - P_0\| < \delta \implies |f(P) - l| < \sigma$$

Si $P \in \mathcal{D}(\varphi \circ f)$ y $0 < \|P - P_0\| < \delta$, entonces $|f(P) - l| < \sigma$ y $|\varphi(f(P)) - \varphi(f(l))| < \varepsilon$.

Esto prueba que $\lim_{P \rightarrow P_0} \varphi(f(P)) = \varphi(l)$.

Proposición 2.19 (El teorema del emparedado)

Si f y g son funciones de \mathbf{R}^n a \mathbf{R} tales que si existe una bola abierta $B(P_0; r)$ tales que

$$(i) \ g(P) \leq f(P) \leq h(P) \text{ para todo } P \in (B(P_0; r) \setminus \{P_0\}) \cap \mathcal{D}(f \cap g)$$

$$(ii) \ \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} h(P) = l,$$

entonces $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ existe y

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l.$$

2.16.2 Límites restringidos

Cuando existe $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$, cualquiera que sea la forma en que se tome $P \in \text{dom}(f)$, próximo a P_0 , siempre se tendrá $f(P)$ próximo a l . Fijada una tal forma, tenemos lo que se llama un *límite restringido de la función f en P_0* .

Por lo general, las formas que se toman son curvas Γ , contenidas en el dominio de la función f , para las cuales P_0 es un punto de acumulación.

Escribimos $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \Gamma}} f(P) = l$, para un tal límite restringido.

El siguiente teorema es claro a partir de la definición de límite.

Teorema 2.26 Si $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$, entonces para cualquier curva Γ , en el dominio de la función f y tal que P_0 es un punto de acumulación de ella, se tiene: $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \Gamma}} f(P) = l$.

Nota. El teorema sólo es útil para demostrar que $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ no existe:

(i) Mostrando que un cierto límite restringido no existe, o, en su defecto,

(ii) Hallando dos límites restringidos diferentes.

Inexistencia de límites

Cuando no sepamos calcular un límite, intentaremos demostrar que dicho límite no existe. Esto lo podemos hacer por dos métodos:

Mediante los límites restringidos.

Mediante los límites iterados.

Límites iterados

Para el cálculo de límites de funciones de varias variables es necesario hacer uso de los conocimientos que tenemos de límites de funciones de una sola variable. Por ejemplo: Si queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

estamos tentados a calcularlo primero buscando el $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, dejando la variable y fija, y al resultado que obtenemos le aplicamos $\lim_{y \rightarrow b}$. Esto es, calculamos

$$\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\},$$

o también

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$$

Estos límites los llamamos *límites iterados*. Desafortunadamente éstos no nos lleva siempre a feliz término. En general tenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \\ & \neq \lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\} \\ & \neq \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}. \end{aligned}$$

Inclusive, podemos tener que

$$\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$$

y no obstante

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}.$$

Veamos algunos ejemplos: Consideremos la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Nótese que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0.$$

Ahora, cuando tomamos $x = y$ vemos que $f(x, y) = 1$ y cuando $y = 2x$ vemos que

$$f(x, y) = 4 \frac{x^2}{4x^2 + 1}$$

Esto nos indica que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe debido a que si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ por la recta $x = y$, entonces $f(x, y) \rightarrow 1$. Y si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ por la recta $y = 2x$, entonces $f(x, y) \rightarrow 0$

O más extraño aún, podemos tener que

$$\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\} \neq \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$$

y no obstante $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe. Por ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{y} \right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

En este caso, puesto que $|f(x, y)| = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| \leq |x|$, tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right\},$$

el primer límite es cero y el segundo simplemente no existe.

Ahora, Cuando, entonces, tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right\} \quad ?$$

Sólo si:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existe y
2. Los límites iterados existen y son iguales.

De los ejemplos anteriores concluimos que no hay métodos seguros para calcular el límite de una función de varias variables. El uso de los límites iterados nos puede servir para *sospechar* quien puede ser el posible límite de la función. Sólomente la definición es la que nos da la certeza de la existencia del límite de la función.

Límites restringidos

Aunque la definición de límite de funciones de dos variables va en total paralelismo con la definición de límite de funciones de una sola variable, existe una diferencia fundamental a la hora de determinar la existencia de un límite. En una variable, la existencia del límite, es equivalente a la coincidencia de los límites laterales. Es decir, para determinar si una función de una variable tiene límite en un punto determinado, solamente necesitamos comprobar qué ocurre al aproximarnos por dos direcciones –por la izquierda y por la derecha–. Si la función tiene el mismo límite por la izquierda y por la derecha podemos concluir que el límite existe. Si embargo, en dos variables esto no es así

En dos variables, en principio, no tiene sentido hablar de límites laterales ¿qué significan derecha e izquierda en el plano?, por eso hablamos de límites *restringidos*, ya que, en dos variables existen infinitos caminos para acercarnos al punto, es más, podemos acercarnos siguiendo un camino recto o un camino curvo. Es decir, al escribir

$$(x, y) \longrightarrow (x_0, y_0)$$

entendemos que el punto (x, y) se aproxima al punto (x_0, y_0) en cualquier dirección. Y, para que exista el límite, los límites siguiendo todas las direcciones o trayectorias tienen que coincidir. La exigencia de la definición a todos los puntos del disco o entorno significa todas las posibles formas de aproximarse. En consecuencia, para ver que una función no tiene límite en un punto se siguen varios caminos de aproximación al punto y si la función tiene un límite distinto por cada camino, entonces el límite “doble” no existe. El problema será determinar si existe un camino que conduce a otra parte. En la práctica los caminos que se suelen seguir son rectas y parábolas. (El camino por rectas se sigue cuando las potencias del denominador son del mismo grado, y el camino por parábolas cuando son de distinto grado, intentando igualar los grados). No debe olvidarse que la recta ha de pasar por el punto en cuestión, es decir su ecuación ha de ser $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Ejemplo 2.129 Analizar si los siguientes límites existen. Justificar su respuesta.

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^2}{x^3 + y}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \frac{x(x-2)}{y+3}$$

Solución.

a) Tomando límites restringidos a los caminos $C : y = mx^3$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{x^3 - y^2}{x^3 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - (mx^3)^2}{x^3 + mx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - m^2x^3}{m + 1} = \frac{1}{m + 1}.$$

Para $m = 0$, el límite es 1

Para $m = 1$ el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^2}{x^3 + y}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

b) Tomando límites restringidos a los caminos $C : y + 3 = m(x - 2)$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-3) \\ (x,y) \in C}} \frac{x(x-2)}{y+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{m(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{m} = \frac{2}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 2.

Para $m = 2$, el límite es 1.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \frac{x(x-2)}{y+3}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.130 Demostrar que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$.

Solución.

Observemos que: $y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2, \forall x, y, z \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq \left| \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} |xz| \leq |xz|, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Como $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |xz| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left| \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = 0.$$

Luego, $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$.

Ejemplo 2.131 Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln[(x^2 + y^2 + 1)^{2x}]}{x^2 + y^2} = 0$.

Sugerencia. Usar la desigualdad: $\ln(z + 1) \leq z; z \geq 0$.

Solución. Observemos que: $\ln(x^2 + y^2 + 1) \leq x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq \left| \frac{\ln[(x^2 + y^2 + 1)^{2x}]}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{2x \ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} \right|$$

$$0 \leq \left| \frac{\ln[(x^2 + y^2 + 1)^{2x}]}{x^2 + y^2} \right| \leq 2|x| \frac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} \leq 2|x|, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2|x| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\ln \left[(x^2 + y^2 + 1)^{2x} \right]}{x^2 + y^2} \right| = 0.$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln \left[(x^2 + y^2 + 1)^{2x} \right]}{x^2 + y^2} = 0.$

Ejemplo 2.132 Usando la definición de límite probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2y + 2} = 0.$

Solución.

$$D(f) = \mathbf{R}^2 - \{(1,1)\}.$$

Por demostrar que: dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$(x, y) \in D(f) \wedge 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \implies \left| \frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} - 0 \right| < \epsilon$$

Análisis preliminar:

Observemos que:

$$\text{De : } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \text{ se tiene:}$$

$$|y-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \implies |y-1| < \delta.$$

Dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$\left| \frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \right| = \frac{|(x-1)|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} |y-1| \leq |y-1| < \delta.$$

Por tanto, basta elegir $\delta = \epsilon$.

Ejemplo 2.133 (a) Demostrar que el $(0,0)$ es un punto de acumulación de la curva Γ cuya ecuación es

$$x = \frac{4 - \sqrt{16 + y^4}}{y}; y \neq 0.$$

Sugerencia. Basta demostrar que $\lim_{y \rightarrow 0} x = 0.$

(b) Usar la parte (a) para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(8x + y^3)^2}$ no existe.

Solución.

$$(a) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + y^4}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{16 - (16 + y^4)}{y(4 + \sqrt{16 + y^4})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{4 + \sqrt{16 + y^4}} = 0.$$

Tomando límite restringido al camino $C: y = 0$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{x^4 y^2}{(8x + y^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{(8x)^2} = 0.$$

(b) Considerando la curva Γ de la parte (a),

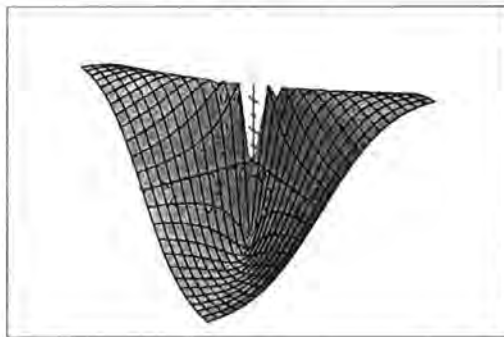
$$\begin{aligned}x &= \frac{4 - \sqrt{16 + y^4}}{y}; y \neq 0 \implies xy = 4 - \sqrt{16 + y^4} \\ \implies 4 - xy &= \sqrt{16 + y^4} \implies 16 - 8xy + x^2y^2 = 16 + y^4 \\ \implies x^2y^2 &= (8x + y^3)y \implies x^4y^2 = (8x + y^3)^2; y \neq 0.\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} \frac{x^4y^2}{(8x + y^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8x + y^3)^2}{(8x + y^3)^2} = 1.$$

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^2}{(8x + y^3)^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.134 (Calculando límites direccionales). Probar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$



Solución.

Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C} := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = mx\}$, nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0

Para $m = 1$ el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.135 Demostrar que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C} := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : x = my^2\}$, nos acercamos al origen a través de trayectorias parabólicas $x = my^2$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{m^2y^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{m^2y^2 + 1} = \frac{1}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 1

Para $m = 2$ el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.136 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos

$$C := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = mx^2\},$$

nos acercamos al origen a través de trayectorias parabólicas $y = mx^2$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2x^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2}{1 + m^2} = \frac{2m^2}{1 + m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0

Para $m = 1$ el límite es 1.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.137 *Demostrar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-5,-2)} \frac{x(x-5)}{y+2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos

$$C := \{(x, y) \in B_r(5, -2) : y + 2 = m(x - 5)\},$$

nos acercamos al punto $(5, -2)$ a través de la recta $y + 2 = m(x - 5)$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (-5,-2) \\ (x,y) \in C}} \frac{x(x-5)}{y+2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{m(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{m} = \frac{5}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 5

Para $m = 2$ el límite es $\frac{5}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (-5,-2)} \frac{x(x-5)}{y+2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.138 *Demostrar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^5}{y^3 + y(x-1)^3}.$$

Solución. Tomando límites restringidos a los caminos $C := \{(x, y) \in B_r(1, 0) : y = m(x - 1)^2\}$

nos acercamos al punto $(1, 0)$ a través de trayectorias parabólicas $y = m(x - 1)^2$. Entonces

$$L = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{(x-1)^5}{y^3 + y(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^5}{m^3(x-1)^6 + m(x-1)^5}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{m^3(x-1) + m} = \frac{1}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 1.

Para $m = 2$, el límite es $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^5}{y^3 + y(x-1)^3}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.139 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos

$$C := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = mx\},$$

nos acercamos al origen a través de rectas $y = mx$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - (mx)^2}{x^2 + 3(mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - m^2}{1 + 3m^2} = \frac{3 - m^2}{1 + 3m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 3

Para $m = 1$ el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.140 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

En este ejemplo ilustraremos el uso de las coordenadas polares: Si hacemos el cambio de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ obtenemos

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = r \cos \theta \sen^2 \theta.$$

Puesto que $|r \cos \theta \sen^2 \theta| \leq r$ y $r \rightarrow 0$ si y sólo si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, deducimos que por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Ejemplo 2.141 *Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy}, & \text{si } xy \neq 0 \\ 0, & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Analizar la existencia del límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.

Solución.

· Cuando (a, b) es tal que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^3 - y^3}{xy} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

(o por cocientes de límites).

· Cuando $(0, b)$ es tal que $b \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - b^3}{xb} = \pm \infty.$$

· Cuando $(a, 0)$ es tal que $a \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(a,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^3 - y^3}{ay} = \pm \infty.$$

· Cuando $(a, b) = (0, 0)$ tenemos que al evaluar dicho límites por el camino

$\mathcal{C} : y = mx^2$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, mx^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - (mx^2)^3}{x(mx^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - m^2x^6}{mx^3} = \frac{1}{m}.$$

Luego el límite dado no existe, por depender de m .

2.17 Continuidad de funciones de varias variables

Definición 2.52 Una función f es continua en P_0 si se cumple $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Proposición 2.20 Si las funciones f y g son funciones de \mathbf{R}^n a \mathbf{R} continuas en P_0 , entonces $f \pm g$, fg y $\frac{f}{g}$ (siempre que $g(P_0) \neq 0$) son continuas en P_0 .

Proposición 2.21 Si f es una función de \mathbf{R}^n a \mathbf{R} continua en P_0 y φ es una función de \mathbf{R} en \mathbf{R} continua que es continua en $f(P_0)$, entonces $\varphi \circ f$ es continua en P_0 .

Demostración.

Si P_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$, entonces $\varphi \circ f$ es continua en P_0 . Si P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$, entonces, como $\mathcal{D}(\varphi \circ f) \subset \mathcal{D}(f)$, P_0 debe ser un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$ y $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Luego de acuerdo con el teorema de límite

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (\varphi \circ f)(P) = \varphi(f(P_0)) = (\varphi \circ f)(P_0).$$

Definición 2.53 Una función f es continua si es continua en cada punto de su dominio.

Proposición 2.22 Las funciones polinómicas y las funciones racionales son funciones continuas (en sus respectivos dominios).

Ejemplo 2.142 Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar si f es continua en $(0, 0)$.

Solución.

Tomando límites restringidos a diferentes caminos, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} = 0$$

Observemos que:

$$2|x| \leq \sqrt{4x^2 + 3y^4}, \forall x, y \in \mathbf{R},$$

$$0 \leq \left| \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} \right| \leq \frac{2|x||y|}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} \leq |y|, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} \right| = 0$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 3y^4}} = 0 = f(0, 0)$. Por lo tanto, f es continua en $(0, 0)$.

Ejemplo 2.143 Sea la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - 2x}{x^2 + (y - 2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 2) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 2) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de la función f en $(0, 2)$.

Solución.

Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C} := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y - 2 = mx\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} \frac{x(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0

Para $m = 2$, el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(y-2)}{x^2 + (y-2)^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos. Por lo tanto, f no es continua en $(0, 2)$

Ejemplo 2.144 Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Demostrar que f es continua en $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(b) Demostrar que f es continua en $(0, 0)$.

Sugerencia: Use la desigualdad

$$|\sin t| \leq |t|, \text{ para todo } t.$$

Solución.

(a) Para $(x, y) \neq \{(0, 0)\}$.

$g(x, y) = \sin^2(x+y)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

Puesto que $h(x, y) \neq (0, 0)$, se concluye que $f = \frac{g}{h}$ es continua en $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(b) Para $(x, y) = (0, 0)$:

Observemos que: $\forall x, y \in \mathbf{R}$

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin(x+y)| \leq |x+y| \\ &\Rightarrow 0 \leq |\sin(x+y)|^2 \leq |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \\ &\Rightarrow 0 \leq |\sin(x+y)|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|\sin^2(x+y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|\sin(x+y)|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \\ 0 &\leq \frac{|\sin^2(x+y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |x| + \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| + 2 \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \\ 0 &\leq \frac{|\sin^2(x+y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| + |y| + 2|y| = |x| + 3|y|, \quad (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|x| + 3|y|) = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = 0$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Por lo tanto, f es continua $(0,0)$.

Ejemplo 2.145 *Demostrar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{4x^4 - 3x^2y + y^2}$$

Solución.

Tomando límites restringidos a los caminos $C : y = mx^2$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} \frac{x^2y}{4x^4 - 3x^2y + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(mx^2)}{4x^4 - 3x^2(mx^2) + (mx^2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4(4 - 3m + m^2)} = \frac{m}{4 - 3m + m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0

Para $m = 1$ el límite es $\frac{1}{2}$.

$$\text{Así, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{4x^4 - 3x^2y + y^2}$$

Ejemplo 2.146 *Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de las función f en $(0,0)$.

Solución

Es suficiente demostrar que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

Observemos que:

$$3x^2 \leq 3x^2 + y^2, y^2 \leq 3x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$0 \leq \left| \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2} \right| \leq 2 \frac{3x^2}{3x^2 + y^2} |x| + \frac{y^2}{3x^2 + y^2} |x| \leq 3|x|, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|x| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2} \right| = 0$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2} = 0$. Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3 + xy^2}{3x^2 + y^2} = f(0,0)$. Por lo tanto, f es continua en $(0,0)$.

2.18 Diferenciación funciones de varias

Derivada direccional de un campo escalar

Definiremos el concepto de derivada en campos escalares para luego generalizar a campos vectoriales.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, y sea $P \in \Omega$. Deseamos estudiar la variación de f cuando nos movemos desde P hasta un punto próximo.

Teorema 2.27 *Supongamos que $f'(X + tY, Y)$ existe para todo $t \in [0, 1]$. Entonces existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(X + Y) - f(X) = f'(X + \theta Y, Y)$$

Demostración: Es suficiente aplicar el Teorema del valor medio a la función $g(t) = f(X + tY)$, $t \in [0, 1]$.

Definición 2.54 *Dado un campo escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $P \in \Omega$, sea U un vector unitario de \mathbb{R}^n , se llama derivada direccional de f en P según el vector unitario U y se denota y se define por*

$$D_u f(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial U} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}$$

Interpretación geométrica

Consideremos la recta $\mathcal{L} = \{Q : Q = P + tU, t \in \mathbb{R}\}$

que pasa por el punto P y tiene de vector director el vector unitario U . Sea la función

$$g(t) := f(P + tU).$$

Si una de las dos derivadas $g'(t)$ o $\frac{\partial f(P + tU)}{\partial U}$ existen, entonces también existe la otra y coinciden:

En particular cuando $t = 0$ tenemos

$$g'(0) = \frac{\partial f(P)}{\partial U} = D_u f(P)$$

Luego la derivada direccional $D_u f(P)$ no es más que $g'(0)$ pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(P, f(P))$ que resulta de cortar la superficie por el plano perpendicular al plano $z = 0$ que contiene a la recta \mathcal{L} .

Definición 2.55 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, sea $P \in \Omega$ si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n a la derivada, si existe, de f en P según la dirección e_j para $j = 1, 2, \dots, n$ se le llama derivada parcial con respecto a la variable x_j se representa*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) &= \frac{\partial f}{\partial e_j}(P) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + te_j) - f(P)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

Consecuencia.

Hallar la derivada parcial respecto a la variable x_j equivale a derivar la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que resulta de considerar en $f(P)$, la componente x_j como variable y las restantes como constantes.

Observación 2.16 El símbolo $D_k f(X)$ se llama la derivada parcial con respecto a la variable x_k . También se usan las siguientes notaciones para la derivada parcial:

$$D_k f(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial x_k} = f_{x_k}(P).$$

Estas notaciones las usaremos indistintamente.

Definición 2.56 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $P \in \Omega$. Se llama gradiente de f en P y se representa $\nabla f(P)$ al vector

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

cuyas componentes son las derivadas parciales de f en P

Ejemplo 2.147 Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(y^2 - 2x^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcular la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ especificando su dominio.
 (b) Demostrar que f es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución.

(a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^5 - 2x^4y - 7x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \left(\frac{0^2 - 2h^2}{h^2 + 0^2} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - 2x^4y - 7x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) De la parte (a), se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \left(\frac{h^2 - 2 \cdot 0^2}{0^2 + h^2} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Para probar que f sea diferenciable en $(0, 0)$ bastará demostrar que $L = 0$.

$$L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| \frac{hk(k^2 - 2h^2)}{h^2 + k^2} - 0 - (0, 0) \cdot (h, k) \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| \frac{hk(k^2 - 2h^2)}{h^2 + k^2} \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|hk(k^2 - 2h^2)|}{\sqrt{h^2 + k^2} (h^2 + k^2)} = 0.$$

Observemos que:

$$|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2}, |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}, \forall h, k \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \left| \frac{hk(k^2 - 2h^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}(h^2 + k^2)} \right| \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{k^2}{h^2 + k^2} |k| + 2 \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{h^2}{h^2 + k^2} |h| \leq |k| + 2|h|,$$

$(h, k) \neq (0, 0)$.

Como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (|k| + 2|h|) = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{hk(k^2 - 2h^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}(h^2 + k^2)} \right| = 0.$$

2.18.1 Diferencial de un campo escalar. Plano tangente

Hemos visto como la existencia de derivadas direccionales no aseguran la continuidad de la función, hagamos un análisis de la situación.

En funciones reales de variable real $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las únicas derivadas direccionales que existen son la derivada por la izquierda y por la derecha y ya sabemos que la simple existencia de estas no aseguran la continuidad de f . La existencia de derivada equivale a que $f(x)$ posea recta tangente en $x = a$.

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f'(a) = f'(a)$, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} f'(a) \\ \iff \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] &= 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} &= 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - r(x; a)}{x - a} &= 0, \text{ donde } r(x; a) = f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

$r(x; a)$ es la mejor aproximación lineal a $f(x)$ en $x = a$

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, el hecho de que existan las derivadas direccionales en (x_0, y_0) obliga a la existencia de rectas tangentes a $f(x, y)$ en (x_0, y_0) pero esto no garantiza el comportamiento suave de la superficie, lo que si puede hacer es la existencia del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) . Ese plano tangente tendrá de ecuación:

$$z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$$

Como pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $c = f(x_0, y_0)$

$$z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Por ser plano tangente a $f(x, y)$ en (x_0, y_0) debe tener las mismas derivadas direccionales que f en (x_0, y_0) , en particular las mismas derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = b$$

Luego el plano tangente deberá ser:

$$z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Este es el candidato para ser el plano tangente, pero para que efectivamente lo sea debe ser la mejor aproximación lineal a f .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - z|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

que equivale a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \right|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

Usando el hecho de que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + f(x_0,y_0) \\ &= \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0)) \\ &= \nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0)) \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente condición:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0))|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

2.18.2 Regla de la Cadena

Sea $f : S \rightarrow \mathbf{R}$, donde S es un conjunto abierto de \mathbf{R}^n . Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ una función vectorial cuya imagen determina una curva en S . Entonces $f \circ \gamma$ determina una función del intervalo $[a, b]$ al conjunto \mathbf{R} . Si ambas funciones son diferenciables entonces tenemos la siguiente expresión conocida como regla de la cadena.

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \quad (1)$$

Para ver (1) es suficiente calcular $g'(t)$, donde $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$, y hacer uso de la fórmula de diferenciación.

En efecto, llamemos $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Sabemos que

$$g(t+h) - g(t) = g'(t)h + o(h).$$

Para ver quien es $g'(t)$ procedemos así: Sea $Y = \gamma(t+h) - \gamma(t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} g(t+h) - g(t) &= (f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t) \\ &= f(\gamma(t) + Y) - f(\gamma(t)) \\ &= f'(\gamma(t))(Y) + o(\|Y\|) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t+h) - \gamma(t) \rangle + o(\|Y\|) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), h\gamma'(t) + o_1(h) \rangle + o(\|Y\|) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle h + \langle \nabla f(\gamma(t)), o_1(h) \rangle + o(\|Y\|) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle h + o_2(h), \end{aligned}$$

en donde $o_2(h) = \langle \nabla f(\gamma(t)), o_1(h) \rangle + o(\|Y\|)$. Dejamos que el lector verifique que $\frac{o_2(h)}{h} \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$. Concluimos, entonces, la validez de (1)

Como una aplicación de (1) tenemos el siguiente ejemplo. Supongamos que el campo escalar $f(x, y)$ es tal que cada una de sus variables x e y son funciones de una variable t , ésto es, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces $f(x, y) = F(t)$. La expresión (1) nos dice que

$$F'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(t).$$

Otra manera sugestiva de escribir (3.4.2) es la siguiente:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Por ejemplo: Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ y supongamos que $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$. Entonces $F'(t) = 2t \cdot 1 + 2t^2 \cdot 2t = 4t^3 + 2t$.

Teorema 2.28 $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$. Considere el conjunto de nivel

$$S = \{P \in \Omega : f(P) = k\}.$$

tales que $P_0 \in S$ con $f(P_0) = k$. Entonces $\nabla f(P_0)$ es normal al conjunto de nivel S . En el siguiente sentido:

si u es el vector tangente en $t=0$ de una curva $\Gamma : P = \alpha(t)$, $t \in I$, I algún intervalo de la recta real, en S con $\alpha(t_0) = P_0$, entonces $\nabla f(P_0)$ es ortogonal al vector u .

Prueba.

Sea la curva $\Gamma : P = \alpha(t)$, $t \in I$, tales que $\nabla f(\alpha(t)) = k$. Sea u como la hipótesis, entonces $u = \alpha'(t_0)$. Aplicando la regla de la cadena: $\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} k = 0$,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \Big|_{t=t_0} = \nabla f(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot u,$$

es decir, u es ortogonal a $\nabla f(P_0)$.

Definición 2.57 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$. Considere la superficie

$$S = \{P = (x, y, z) \in \Omega : f(P) = k\}.$$

si $\nabla f(P_0) \neq 0$. Así el plano tangente a S en un punto P_0 es,

$$\mathcal{P} := \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\}.$$

Observación 2.17 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$. Considere la gráfica de f :

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}.$$

Sea

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

Entonces el plano tangente a la gráfica de f en un punto $P_0 \in S = \mathcal{G}(f)$ con

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$$

está definido por la ecuación :

$$\mathcal{P} : \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\mathcal{P} : \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\mathcal{P} : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Ya estamos en condiciones de definir cuando un campo escalar es diferenciable.

Ejemplo 2.148 Sea la superficie $S : 6x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0$.

(a) Demostrar que el plano tangente a S en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ es $\mathcal{P} : 6x_0x - y_0y - z_0z + 4 = 0$.

(b) Hallar las ecuaciones cartesianas de todos los planos tangentes a S que contienen a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} y = 4 \\ z + 2x = 0 \end{cases}.$$

Solución.

(a) Llamemos al punto de tangencia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Entonces se tiene que

$$6x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 4 = 0 \dots \dots (1)$$

Sea $F(x, y, z) = 6x^2 - y^2 - z^2 + 4$, entonces el vector normal al plano tangente será

$$\nabla F(x, y, z) = (12x_0, -2y_0, -2z_0)$$

La ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\mathcal{P} : (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (12x_0, -2y_0, -2z_0) = 0$$

$$\mathcal{P} : 12x_0 - 2y_0y - 2z_0z - 2(6x_0^2 - y_0^2 - z_0^2) = 0$$

$$\mathcal{P} : 6x_0x - y_0y - z_0z + 4 = 0 \dots \dots (2)$$

(b) Parametrizando la recta $\mathcal{L} : \begin{cases} y = 4 \\ x = t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{L} : P = (t, 4, -2t), t \in \mathbf{R}.$$

Sea $A = (1, 0, -2)$ el vector de dirección de la recta \mathcal{L} y como $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ entonces

$$\nabla F(P_0) \perp A \implies \nabla F(P_0) \cdot A = 0 \implies (12x_0, -2y_0, -2z_0) \cdot (1, 0, -2) = 0 \implies 12x_0 + 4z_0 = 0, \text{ y obtenemos}$$

$$z_0 = -3x_0 \dots \dots (3).$$

El punto $(0, 4, 0) \in \mathcal{P} : 6x_0x - y_0y - z_0z + 4 = 0$ entonces $-4y_0 + 4 = 0$, de donde $y_0 = 1 \dots (4)$.

Reemplazando (3) y (4) en (1) : $6x_0^2 - (1)^2 - (-3x_0)^2 + 4 = 0$, resulta $x_0^2 = 1$, de donde $x_0 = \pm 1$. Luego, $z_0 = \mp 3$.

Así, los puntos de tangencias son : $P_0(1, 1, -3)$ y $P'_0(-1, 1, 3)$.

La ecuación del plano tangente a la superficie S en los puntos $P_0(1, 1, -3)$ y $P'_0(-1, 1, 3)$ son :

$$\mathcal{P} : 6x - y + 3z + 4 = 0 \quad ,$$

$$\mathcal{P}' : 6x + y + 3z - 4 = 0 \quad .$$

Ejemplo 2.149 Sean S la gráfica de $f(x, y) = \frac{4x}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ y \mathcal{P} el plano tangente a S en el punto $(a, b, 2)$ de S , ubicado en el plano $z = 2$. Hallar la relación entre a y b para que la intersección de \mathcal{P} con el eje Y sea $(0, 1, 0)$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{4y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{8xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Pero $f(a, b) = \frac{4a}{a^2 + b^2} = 2$ de donde $2a = a^2 + b^2$.

Sea $P_0 = (a, b, f(a, b)) = (a, b, 2)$.

Entonces el vector normal al plano tangente en el punto $(a, b, 2)$ de S es

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) = \left(\frac{4b^2 - 4a^2}{(a^2 + b^2)^2}, \frac{-8ab}{(a^2 + b^2)^2}, -1 \right) \\ &= \left(\frac{4b^2 - 4a^2}{(2a)^2}, \frac{-8ab}{(2a)^2}, -1 \right) = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{-2b}{a}, -1 \right) \end{aligned}$$

y la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, 2)$ es:

$$\mathcal{P} : (x - a, y - b, z - 2) \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{-2b}{a}, -1 \right) = 0$$

$$\mathcal{P} : (x - a) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) - (y - b) \frac{2b}{a} - (z - 2) = 0.$$

$$\text{Pero } (0, 1, 0) \in \mathcal{P} : (0-a) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) - (1-b) \frac{2b}{a} - (0-2) = 0 \implies -\frac{b^2}{a} + a - \frac{2b}{a} + \frac{2b^2}{a} + 2 = 0$$

$$\implies \left(\frac{b^2}{a} + a \right) - \frac{2b}{a} + 2 = 0 \implies 2 - \frac{2b}{a} + 2 = 0 \implies b = 2a.$$

Ejemplo 2.150 Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = x \phi \left(\frac{y}{x^3} \right); \quad x > 0$$

donde

$$\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R},$$

es una función real diferenciable, de variable real tales que

$$\phi(1) = 5 \quad y \quad \phi'(1) = 1.$$

(a) Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, f(1, 1))$.

(b) Si $\phi(t) = e^{6t-1}$, determinar los puntos de la superficie donde el plano tangente a la gráfica $z = f(x, y)$ es perpendicular al plano YZ .

Solución.

$$(a) \text{ Sea } F(x, y, z) = f(x, y) - z = x \phi \left(\frac{y}{x^3} \right) - z = 0$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \phi \left(\frac{y}{x^3} \right) + x \phi' \left(\frac{y}{x^3} \right) \cdot y \left(\frac{-3x^2}{x^6} \right) = \phi \left(\frac{y}{x^3} \right) - \frac{3y}{x^3} \phi' \left(\frac{y}{x^3} \right)$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \phi' \left(\frac{y}{x^3} \right)$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = -1.$$

$$\text{Pero } f(1, 1) = 1 \phi \left(\frac{1}{1^3} \right) = \phi(1) = 5.$$

Sea

Luego :

$$\frac{\partial F(1, 1, 5)}{\partial x} = \phi \left(\frac{1}{1^3} \right) - \frac{3(1)}{1^3} \phi' \left(\frac{1}{1^3} \right) = \phi(1) - 3 \phi'(1) = 5 - 3(1) = 2$$

$$\frac{\partial F(1, 1, 5)}{\partial y} = \frac{1}{1^2} \phi' \left(\frac{1}{1^3} \right) = \phi'(1) = 1$$

$$\text{Así : } \nabla F(2, 8, 4) = (2, 1, -1)$$

Ahora, la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S} : F(x, y, z) = x \phi \left(\frac{y}{x^3} \right) - z = 0$ en el punto $P_0 = (1, 1, 5) \in \mathcal{S}$, es :

$$\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot \nabla F(1, 1, 5) = 0$$

$$\mathcal{P} : 2(x-1) + (y-1) - (z-5) = 0$$

$$\mathcal{P} : 2x + y - z + 2 = 0$$

(b) Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S} : F(x, y, z) = x \phi \left(\frac{y}{x^3} \right) - z = 0$

Luego, como tal que

$$\mathcal{P} \perp YZ \iff \nabla F(P_0) \perp (1, 0, 0) \iff \nabla F(P_0) \cdot (1, 0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial z} \right) \cdot (1, 0, 0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial F(P_0)}{\partial x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) - \frac{3y_0}{x_0^3} \phi' \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que $\phi(t) = e^{6t-1}$, $\phi'(t) = 6 e^{6t-1} = 6\phi(t)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) - \frac{3y_0}{x_0^3} \cdot 6\phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) = 0 &\Leftrightarrow \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) - \frac{18y_0}{x_0^3} \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{18y_0}{x_0^3} \right) \cdot \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{18y_0}{x_0^3} = 0, \text{ pues } \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0^3} = \frac{1}{18} &\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^3}{18}. \end{aligned}$$

$$z = x_0 \phi \left(\frac{y_0}{x_0^3} \right) = x_0 \phi \left(\frac{1}{18} \right) = x_0 \cdot e^{6\left(\frac{1}{18}\right)-1} = x_0 e^{-\frac{2}{3}}; x_0 > 0$$

Por lo tanto, los puntos de la superficie son: $\left\{ \left(x_0, \frac{x_0^3}{18}, x_0 e^{-\frac{2}{3}} \right) : x_0 > 0 \right\}$.

Ejemplo 2.151 Hallar el valor de la constante c tal que en todo punto de intersección de las dos superficies esféricas

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \end{cases},$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares uno al otro.

Solución

Podemos escribir ambas esferas como $F_1(x; y; z) = 3$ y $F_2(x; y; z) = 1$, respectivamente. Los vectores normales a los planos tangentes correspondientes serán los gradientes de F_1 y F_2 . Sabemos que deben ser perpendiculares y por lo tanto su producto interno debe ser nulo.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \nabla F_1 &= (2(x-c), 2y, 2z) \\ \nabla F_2 &= (2x, 2(y-1), 2z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = 4x^2 - 4xc + 4y^2 - 4y + 4z^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - xc + y^2 - y + z^2 = 0 \Rightarrow x^2 - xc - y + 3 - (x-c)^2 = 0 \end{aligned}$$

Esta última es: $xc - y + 3 - c^2 = 0$

Ahora maniobramos algebraicamente despejando z^2 de las ecuaciones de ambas esferas:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} z^2 &= 3 - (x-c)^2 - y^2 \\ z^2 &= 1 - x^2 - (y-1)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 - (x-c)^2 - y^2 = 1 - x^2 - (y-1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 1 - x^2 - y^2 + 2y - 1 \Rightarrow 3 + 2xc - c^2 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2} + xc - \frac{1}{2}c^2 \end{aligned}$$

Introduciendo esto en la ecuación $xc - y + 3 - c^2 = 0$ tenemos:

$$xc - \frac{3}{2} - xc + \frac{1}{2}c^2 + 3 - c^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2.152 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in \Omega$; decimos que f es diferenciable en P_0 si :

(i) existen las derivadas parciales de f en P_0 y

$$(ii) L = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|f(P+H) - f(P) - \nabla f(P) \cdot H|}{\|H\|} = 0$$

Al vector $\nabla f(P_0)$ se le llama diferencial de f en P_0 y se representa $Df(P_0)$.

El grán inconveniente de la derivada débil que introdujimos en la sección dos consiste en que ella no implica continuidad. Para subsanar esa debilidad introduciremos, ahora, la noción de derivada fuerte o derivada de Frechet.

Definición 2.58 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Decimos que f es fuertemente diferenciable en $P \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $T_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $H \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$f(P + H) - f(P) = T_P(H) + r(P, \|H\|),$$

en donde $r(P, \|H\|)$ es tal que $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{|r(P, \|H\|)|}{\|H\|} = 0$.

La transformación lineal T_P se le llama la diferencial fuerte de f en el punto P . Es costumbre denotar $T_P = f'(P)$.

Lo primero que debemos advertir de la definición anterior es que si la función f es fuertemente diferenciable en P entonces es débilmente diferenciable en P y las dos derivadas coinciden. Esto es

$$f'(P, H) = f'(P)(H),$$

para todo $H \in \mathbb{R}^n$

También advertimos de la definición (3.3.1) que si f es fuertemente diferenciable en P entonces la función f es continua en P . Sólo es suficiente tener en cuenta que la transformación lineal T_P es siempre una función continua y $T_P(0) = 0$. Además, de la caracterización que hicimos de $r(P, \|H\|)$ concluimos que $r(P, \|H\|) \rightarrow 0$ cuando $H \rightarrow 0$.

Ahora, sea $H \in \mathbb{R}^n$. Entonces $H = \sum_{k=1}^n h_k e_k$ donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ representa la base canónica de \mathbb{R}^n . Esto es, $e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ donde el 1 aparece en el lugar k -ésimo. Por la linealidad de $T_P = f'(P)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(P)(H) &= f'(P)\left(\sum_{k=1}^n h_k e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k f'(P)(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k f'(P, e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k D_k f(P). \end{aligned}$$

Esto es, podemos expresar la diferencial fuerte en términos de las derivadas parciales de f . En resumen tenemos

$$f'(P)(H) = \sum_{k=1}^n h_k D_k f(P).$$

Si denotamos $\nabla f(P) = (D_1 f(P), \dots, D_n f(P)) \in \mathbb{R}^n$ la expresión anterior toma la siguiente forma:

$$f'(P)(Y) = \langle \nabla f(P), Y \rangle.$$

Esto quiere decir que la diferencial fuerte, o simplemente la diferencial, de ahora en adelante, de f en P , $f'(P)$, la podemos representar por medio del vector

$$\nabla f(P) = (D_1 f(P), \dots, D_n f(P)) \in \mathbb{R}^n.$$

Este vector es conocido como el gradiente de f en P .

Es muy importante tener una fórmula anterior nos permita calcular la diferencial de un campo escalar, pero la pregunta crucial de esta sección es: Cuando un campo escalar es diferenciable? La respuesta la tenemos en el siguiente

Teorema 2.29 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en P , esto es, existe $f'(P)$, si las derivadas parciales $D_k f$, $k = 1, 2, \dots, n$, existen en alguna bola $B(P, r)$ y son continuas en P .

Demostración: Sea $H \in B(P, r)$. Denotemos con $H_k = \sum_{j=1}^k h_j e_j$, además, $H = H_n$ y $H_0 = 0$. Ahora, obsevemos que

$$f(P + H) - f(P) = \sum_{j=1}^n \{f(P + H_j) - f(P + H_{j-1})\}$$

nos dice que

$$f(P + H_j) - f(P + H_{j-1}) = h_j D_j f(C_j),$$

en donde C_j es un vector que se encuentra en el segmento que une a los vectores $P + H_j$ y $P + H_{j-1}$. Y cuando $H \rightarrow 0$ entonces $C_j \rightarrow P$. De lo anterior obtenemos:

$$f(P + H) - f(P) = \sum_{j=1}^n h_j D_j f(P) + \sum_{j=1}^n h_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\}.$$

Denotemos con

$$r(P, \|H\|) = \sum_{j=1}^n h_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\}.$$

Puesto que las derivadas parciales $D_j f$, $j = 1, 2, \dots, n$, son continuas en $B(P, r)$ es fácil ver que $\frac{r(P, \|H\|)}{\|H\|} \rightarrow 0$ cuando $\|H\| \rightarrow 0$. De lo anterior deducimos que

$$f'(P)(H) = \sum_{j=1}^n h_j D_j f(P) = \langle \nabla f(P), H \rangle.$$

Ejemplo 2.153 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(P) = \|P\|^2$. Calculamos $\nabla f(P)$.

Solución. La fórmula (3.3.3) nos dice que

$$f'(P)(H) = \langle \nabla f(P), H \rangle$$

También sabemos que

$$f'(P)(Y) = f'(P, Y) = 2 \langle P, Y \rangle.$$

Por lo tanto obtenemos que $\nabla f(P) = 2P$.

Ejemplo 2.154 Sea $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Calculamos $f'(a, b, c)(m, n, r)$.

Solución. La fórmula anterior nos dice que

$$f'(a, b, c)(m, n, r) = \langle \nabla f(a, b, c), (m, n, r) \rangle$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \nabla f(a, b, c) &= (D_1 f(a, b, c), D_2 f(a, b, c), D_3 f(a, b, c)) \\ &= (b + c, a + c, b + a). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(a, b, c)(m, n, r) &= \langle (b+c, a+c, b+a), (m, n, r) \rangle \\ &= mb + mc + na + nc + rb + ra \end{aligned}$$

2.18.3 Diferenciabilidad y continuidad

Teorema 2.30 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $P_0 \in \Omega$ si f es diferenciable en P_0 , entonces f es continua en P_0 .

2.18.4 Diferencial de campos escalares

Propiedades de la diferencial

Teorema 2.31 Sean los campos escalares $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $D[\lambda f(P)] = \lambda Df(P)$
2. $D[f(P) + g(P)] = Df(P) + Dg(P)$
3. $D[f(P) \cdot g(P)] = [Df(P)]g(P) + f(P)[Dg(P)]$
4. $D\left[\frac{f(P)}{g(P)}\right] = \frac{Df(P)g(P) - f(P)Dg(P)}{[g(P)]^2}$; siempre que $g(P) \neq 0$

Condición suficiente de diferenciabilidad

Lema 2.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ supongamos que existen todas las derivadas parciales de f en una bola $B(a, r)$, sea $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B(a, r)$, llamemos $x_i = (b_1, b_2, \dots, a_{i+1}, \dots, b_n)$ entonces el segmento de \mathbb{R}^n , $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \dots, n$ están en $B(a, r)$ y existen $c_i \in \text{int}(I_i)$ tales que:

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f(c_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(c_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f(c_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$

Este lema es el equivalente en varias variables del Teorema del Valor Medio para funciones reales de variable real, es necesario para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.32 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales en una bola abierta $B(P_0, r)$ y al menos $n - 1$ de ellas son continua en P_0 , entonces f es diferenciable en P_0 . El recíproco es falso.

Ejemplo 2.155 Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$ pero sin embargo no verifica las condiciones suficientes de diferenciabilidad del teorema anterior.

Solución. Se deja al lector.

Ejercicios Propuestos : Función real de variable vectorial

LIMITES

1. (a) Analizar si el siguiente límite existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^4 x^2}{x^2 + y^2}$.

(b) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones positivas para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = 0.$$

Demuestre que existe un $\delta > 0$ tal que si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces $f(x, y) < \frac{1}{2}g(x, y)$.

2. Si existen calcular los siguientes límites. Justificar su respuesta.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Demostrar que

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ no existe.

(b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} xy \sin\left(\frac{z}{xy}\right) = 0$.

4. Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln[(x^2 + y^2 + 1)^{2x}]}{x^2 + y^2} = 0$.

Sugerencia. Usar la desigualdad : $\ln(z + 1) \leq z$; $z \geq 0$.

5. Usando la definición de límite probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2y + 2} = 0$.

CONTINUIDAD

6. Analizar la continuidad de la función f en el punto $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Demostrar que la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x \sin y}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Es continua en $(x, y) \neq (0, 0)$;

(b) Es continua en $(0, 0)$.

8. Dada la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4 + 3x^3y^2 + x^5}{x^4 + y^4} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Probar que f es continua en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Analizar si f es **continua** en $(0, 0)$.

9. Analizar la continuidad en el punto $(0, 2)$ para la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } (x, y) \neq (0, 2) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 2) \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIALES, GRADIENTE, DERIVADA DIRECCIONAL

10. Analizar la continuidad de la función f en cada (x, y) de \mathbf{R}^2 y la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ si $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

11. Hallar un ángulo formado por la tangente a la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = 2t^3$ y la normal del plano tangente a la superficie $z = x^2 + 3y^2 - 2xy$, en el punto de intersección de la curva con la superficie.

12. Dada la función

$$f(x, y) = \sqrt{x(x-y)}$$

(a) Graficar su dominio.

(b) Si (a, b) satisface $a(a-b) = 0$, hallar todos los vectores unitarios $U = (u_1, u_2)$ para los cuales existe $D_u f(a, b)$.

13. Hallar las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$ y la derivada direccional en ese punto, en la dirección $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^5}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

DIFERENCIABILIDAD Y PROPIEDADES DE LA DERIVADA

14. Usando la definición de función diferenciable, demostrar que la función

$$f(x, y) = x^2 y + 2y$$

es diferenciable en $(0, 0)$.

15. Usando la definición de función diferenciable, demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{|x| + |y|}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$.

16. Demostrar que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ no es diferenciable en $(0, 0)$ pero es continua allí.
17. Sean f y g funciones diferenciables en \mathbf{R}^3 . Deducir las siguientes fórmulas:
- (a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- (b) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, si $g \neq 0$
18. Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable y $F(x, y, z) = f(r)$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, demuestre que $\|\nabla F\| = |f'|$.
19. Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable y $u = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, demostrar que u satisface una ecuación diferencial de la forma: $x^2 u_x - y^2 u_y = G(x, y)u$. Hallar la función G .
20. Sea la función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Hallar las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, indicando su dominios.
- (b) Analizar la continuidad de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de \mathbf{R}^2 .
- (c) ¿Es f es diferenciable en todo punto de \mathbf{R}^2 ? Justifique su respuesta.
21. Dada la función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$$

- (a) Hallar las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en \mathbf{R}^2 .
- (b) Demostrar que la función f es diferenciable en $(x, y) \neq (0, 0)$.

DERIVADA DIRECCIONAL, MÁXIMO CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

22. Dada la función $z = f(x, y)$ donde $z = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt[3]{x^2 - y^2}$.
- (a) Sea $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Hallar el vector gradiente de $g(x, y, z)$ en los puntos $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
- (b) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(4, 3)$ en una de las direcciones del vector tangente a la curva

$$\Gamma: \begin{cases} x + 5 = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

23. Sea $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función diferenciable en $(1, 1)$ con $Df(1, 1) \neq (0, 0)$. Si la derivada direccional de f en $(1, 1)$ alcanza su valor mínimo $-2\sqrt{10}$ según el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Calcular la derivada direccional de f en $(1, 1)$ según el vector $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

24. Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función diferenciable en $P_0 \in \mathbf{R}^2$, $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $v = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ dos valores tales que $D_u f(P_0) = 1$ y $D_v f(P_0) = 2$.

(a) Calcular $\nabla f(P_0)$.

(b) Demostrar que para todos los vectores $W = (p, q)$ unitarios tales que $D_w f(P_0) = 0$, se cumple $p = mq$, para cierta constante m . Encontrar la constante m .

25. Sea la función $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xy - z^2}$.

(a) Demostrar que si $xy - z^2 \neq 0$ entonces $D_u f(x, y, z)$ existe para todo vector unitario $u \in \mathbf{R}^3$.

(b) ¿Para qué puntos (x_0, y_0, z_0) tales que $x_0 y_0 - z_0^2 = 0$ existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$?

(c) Hallar todos los $u = (u_1, u_2, 0)$ unitarios par los cuales existe $D_u f(0, 0, 0)$.

26. Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable en el punto $(0, 0)$ tal que $\nabla f(0, 0) \neq (0, 0)$. Si $u = (a, b)$ es un vector unitario tal que $D_u f(0, 0) = 2$. Analizar el valor de las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso su respuesta

(a) u y $\nabla f(0, 0)$ son ortogonales

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(a, b)}{t} = 2$

(c) $\|\nabla f(0, 0)\| \geq 2$

(d) Existe el $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

27. El potencial eléctrico V en cualquier punto (x, y) del plano se puede calcular con la función

$$V(x, y) = e^{-x} \cos(2y),$$

donde V está dado en voltios y las distancias se miden en pies.

(a) Calcular la tasa de variación de V en el punto $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, en la dsirección del vector $(1, 1)$.

(b) Interpretar el número obtenido en (a), en el contexto físico presentado.

(c) Determinar en que dirección se obtiene la máxima tasa de variación de V en el punto $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$. ¿Cuál es el valor?

28. Dada la función $f(x, y) = x^2 + \cos(x + y) - z^2$, hallar la derivada direccional de f en el punto $Q(1, -1, 1)$ y en la dirección de una normal al plano tangente en Q de una superficie de nivel de f .

29. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = xy - y^2$ en el punto $(3, -1, f(3, -1))$, en la dirección de máximo crecimiento de f .

PLANO TANGENTE

30. Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente o los planos tangentes a la gráfica de la función:

$$f(x, y) = 3 + 3x^2 + (y - 2)^2$$

que contiene a la recta $\mathcal{L} : x = 1, z = 0$. ¿Cuántos de tales planos existen?

31. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 - 3x^2 - x + \ln(y^2) + 3$, si este plano contiene a la recta

$$\mathcal{L} : x = 2, y = t, z = -1 - 2t ; t \in \mathbf{R}.$$

32. Sea la superficie $S : z = \ln(xyz)$. Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie S en el punto $(e, 1, 1)$.

33. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$S : z = 2x - 3y + \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + 5 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) ; x \neq 0,$$

en el punto $(1, 0, 2)$ de su gráfica.

34. Sea f la función definida por $f(x, y) = x + y^2$.

- (a) Hallar, simplificando al máximo, la ecuación cartesiana del plano tangente a su gráfica en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) , donde $z_0 = x_0 + y_0^2$.
- (b) Hallar todos los planos de la parte (a) que forman con los planos coordenados un tetraedro de volumen $\frac{8}{3}u^3$.

2.18.5 Derivadas parciales de órdenes superiores

Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de una función de dos variables $f(x, y)$, son, a su vez, funciones de dos variables, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ y, por lo tanto, podemos obtener de ellas, nuevamente, sus derivadas parciales. Llamadas derivadas parciales de segundo orden. Así, resultan las siguientes cuatro derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Para simplificar los paréntesis usaremos la siguiente notación:

$$(fx)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = D_1(D_1f) = D_{11}f$$

$$(fy)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = D_1(D_2f) = D_{12}f$$

$$(fx)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = D_2(D_1f) = D_{21}f$$

$$(fy)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = D_2(D_2f) = D_{22}f$$

Ejemplo 2.156 Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2y)$$

Solución.

$$fx = 2xy \cos(x^2y)$$

$$f_{xx} = (fx)_x = 2y \cos(x^2y) + 2xy(-2xy \operatorname{sen}(x^2y)) = 2y \cos(x^2y) - 4x^2y^2 \operatorname{sen}(x^2y)$$

$$f_{xy} = (fx)_y = 2x \cos(x^2y) + 2xy(-x^2 \operatorname{sen}(x^2y)) = 2x \cos(x^2y) - 2x^3y \operatorname{sen}(x^2y)$$

$$fy = x^2 \cos(x^2y)$$

$$f_{yx} = (fy)_x = 2x \cos(x^2y) + x^2(-2xy \operatorname{sen}(x^2y)) = 2x \cos(x^2y) - 2x^3y \operatorname{sen}(x^2y)$$

$$f_{yy} = (fy)_y = x^2(-x^2 \operatorname{sen}(x^2y)) = -x^4 \operatorname{sen}(x^2y)$$

Derivadas parciales mixtas.

Las derivadas parciales f_{xy} , f_{yx} , se llaman derivadas parciales mixtas o cruzadas y cuando son continuas coinciden.

Teorema 2.33 (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas). Si f es una función de dos variables x e y tal que f , f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} son continuas en una región abierta \mathcal{R} , entonces se tiene que las derivadas parciales cruzadas coinciden para cada (x, y) de \mathcal{R} ,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Este teorema se llama *Teorema de Schwartz*, y puede enunciarse en términos más restrictivo de la siguiente forma

Teorema 2.34 Sea $f_{yx} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el abierto \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Si las derivadas parciales

$f_{xy} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_{yx} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existen y son funciones continuas en \mathcal{D} , entonces

$$f_{xy} = f_{yx}$$

El teorema de Schwartz también puede enunciarse en los siguientes términos: Si f_x , f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0) , entonces existe $f_{yx}(x_0, y_0)$ y se verifica $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

Ejemplo 2.157 Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x, y) = x^2 y e^{x^2 + y^2}.$$

Solución.

$$\begin{aligned} fx &= 2xye^{x^2+y^2} + x^2y(2xe^{x^2+y^2}) = (2x^3y + 2xy)e^{x^2+y^2} \\ fxx &= (6x^2y + 2y)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)(2xe^{x^2+y^2}) = (4x^4y + 10x^2y + 2y)e^{x^2+y^2} \\ fxy &= (2x^3 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)(2ye^{x^2+y^2}) = (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} \\ fyy &= x^2e^{x^2+y^2} + x^2y(2ye^{x^2+y^2}) = (2x^2y^2 + x^2)e^{x^2+y^2} \\ fyyx &= (4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x^2)(2xe^{x^2+y^2}) = (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} \\ fyyx &= 4x^2ye^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x^2)(2ye^{x^2+y^2}) = (4x^2y^3 + 6x^2y)e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

También tenemos derivadas de orden superior. Por ejemplo denotamos con

$$D_{jk}f(P) = D_j(D_kf(P))$$

y es llamada la derivada parcial de orden dos. Otra notación para tal derivada parcial es $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j \partial x_k}$. También, $D_{jj}(f(P))$ la notamos como $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j^2}$.

Es importante preguntarse bajo qué condiciones

$$\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

En términos generales esto no es cierto. Por ejemplo la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cumple que $D_{21}f(0, 0) = -1$ y $D_{12}f(0, 0) = 1$. La razón de esta diferencia estriba en que $D_{21}f(x, y)$ y $D_{12}f(x, y)$ no son continuas en el origen. Tenemos el siguiente

Teorema 2.35 Si las derivadas parciales D_1f , D_2f , $D_{21}f$ y $D_{12}f$ son continuas en un punto (a, b) de un abierto $S \subset \mathbb{R}^2$ entonces

$$D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b).$$

Demostración: Consideremos la siguiente expresión

$$h(x, y) = f(a + x, b + y) - f(a + x, b) - f(a, b + y) + f(a, b).$$

Si llamamos $g(x) = f(x, b + y) - f(x, b)$ vemos que

$$h(x, y) = g(a + x) - g(a).$$

Aplicamos el teorema del valor medio obtenemos

$$g(a + x) - g(a) = xg'(z),$$

con z entre $a + x$ y a . Ahora,

$$g'(z) = D_1f(z, b + y) - D_1f(z, b)$$

y se transforma en

$$h(x, y) = x \{D_1f(z, b + y) - D_1f(z, b)\}.$$

Aplicamos de nuevo el teorema del valor medio y obtenemos

$$h(x, y) = xyD_{21}f(z, w),$$

en donde w está entre b y $b + y$.

Aplicamos el mismo procedimiento a la función

$$s(y) = f(a + x, y) - f(a, y)$$

y obtenemos

$$h(x, y) = xyD_{12}f(z', w').$$

De lo expuesto anteriormente se tiene que

$$D_{12}f(z', w') = D_{21}f(z, w).$$

Si hacemos tender (x, y) hacia $(0, 0)$ entonces $(z', w') \rightarrow (a, b)$ y $(z, w) \rightarrow (a, b)$. La hipótesis de continuidad nos asegura que

$$D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b).$$

Ejemplo 2.158 Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcular las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ especificando sus dominios respectivos.

(b) Hallar $E = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Solución.

(a) Para $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \left(x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right)}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \left(x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right)}{\partial y} = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para $x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{y}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{y}{h}\right) = 0,$$

$$0 \leq 0 \leq \left| h \sin\left(\frac{y}{h}\right) \right| \leq |h|, h \neq 0.$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$, por el teorema del sandwich, resulta que $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{y}{h}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos\left(\frac{0}{h}\right)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$E = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

Ejemplo 2.159 La propagación del sonido se estudia mediante la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u(x, t)$ es una función diferenciable en dos variables.

Probar que $u(x, t) = A \sin(x - ct)$; $A, c \in \mathbf{R}$ es **solución** de la ecuación diferencial.

Solución

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -cA \cos(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -c^2 A \sin(x - ct) \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = A \cos(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -A \sin(x - ct) \dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2) resulta: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -c^2 A \sin(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Derivada y continuidad

La *debilidad* de la derivada de Gateaux o derivada débil consiste en que ella no implica la continuidad de la función. Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Es fácil ver que f tiene derivada débil en $(0, 0)$ y en la dirección de cualquier vector $P = (a, b)$. En efecto, un cálculo sencillo nos dice que

$$f'[(0, 0), P] = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Pero la función no es continua en $(0, 0)$. En efecto, hacemos $x = y^2$, observamos que $f(x, y) = \frac{1}{2}$. Para puntos (x, y) próximos a $(0, 0)$ no tenemos que $f(x, y)$ sea próximo a 0.

Ejemplo 2.160 Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)^\alpha}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

Analizar la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$, en la dirección $v = (a, b) \neq (0, 0)$ según los valores de $\alpha \in \mathbf{R}^+$.

Solución.

Consideremos $u = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto, $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 =$

1.

Luego,

$$\begin{aligned} D_u f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0 + ta, 0 + tb)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t} \\ D_u f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{((ta)^2 - (tb)^2)^\alpha}{(ta)^2 + (tb)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{2\alpha} (a^2 - b^2)}{t^2 (a^2 + b^2)} \\ D_u f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\alpha - 3} (a^2 - b^2) = \begin{cases} (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}, & \text{si } \alpha = \frac{3}{2} \\ 0, & \text{si } \alpha > \frac{3}{2} \\ \text{No existe} & \text{si } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.161 Analizar la diferenciabilidad de la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{3x^{2/3}}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\sqrt[3]{x}y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Como las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen, y son continuas en $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$, pues son funciones elementales las cuales son continuas en $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$. Entonces por el teorema de condición suficiente se tiene que f es diferenciable en $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$.

Para $x = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}y^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^2}{h^{2/3}} = \begin{cases} 0, & \text{si } y = 0 \\ \text{No existe}, & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{3x^{2/3}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Analizando la diferenciabilidad en $(0, 0)$.

En $(0, 0)$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Usamos la definición de diferenciabilidad,

(i) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

$$(ii) L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{hk^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Observemos que:

$$|k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \forall h, k \in \mathbf{R}$$

Puesto que,

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt[3]{hk^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \left| \sqrt[3]{h} \right| |k| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \left| \sqrt[3]{h} \right| |k|, \quad (h, k) \neq (0, 0).$$

Como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \sqrt[3]{h} \right| |k| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

La función f es diferenciable en $(\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}) \cup \{(0, 0)\}$.

Ejemplo 2.162 Sea

$$T(x, y, z) = \frac{500}{x^2 + y^2 + z^2},$$

la temperatura en el punto (x, y, z) .

(a) Hallar la razón de cambio de T en el punto $(2, 3, 3)$ y en la dirección del vector $(3, 1, 1)$.

(b) Estando en el punto $(2, 3, 3)$ ¿en que dirección se incrementa mas rápidamente la temperatura?

(c) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio máxima de T en el punto $(2, 3, 3)$?

Solución.

(a)

$$f_x(x, y, z) = -\frac{1000x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \rightarrow f_x(2, 3, 3) = -\frac{2000}{(22)^2} = -\frac{500}{121}$$

$$f_y(x, y, z) = -\frac{1000y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \rightarrow f_y(2, 3, 3) = -\frac{3000}{(22)^2} = -\frac{750}{121}$$

$$f_z(x, y, z) = -\frac{1000z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \rightarrow f_z(2, 3, 3) = -\frac{3000}{(22)^2} = -\frac{750}{121}$$

$$\nabla f(2, 3, 3) = \left(-\frac{500}{121}, -\frac{750}{121}, -\frac{750}{121}\right) = -\frac{250}{121}(2, 3, 3),$$

$$v = \frac{(3, 1, 1)}{\|(3, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1)$$

Luego f_x, f_y, f_z son continuas en el punto $(2, 3, 3)$. Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en $(2, 3, 3)$. Luego, por teorema se tiene que:

$$D_v f(2, 3, 3) = \nabla f(2, 3, 3) \cdot v = \left(-\frac{500}{121}, -\frac{750}{121}, -\frac{750}{121}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right) = -\frac{3000}{1331} \sqrt{11}$$

(b) Se incrementa mas en la dirección del $\nabla f(2, 3, 3) // (-2, -3, -3)$.

(c) El valor de la razón de cambio máxima de T es : $\|\nabla f(2, 3, 3)\| = \frac{250}{121} \sqrt{22}$

Ejemplo 2.163 Sea

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

donde a, b, c son constantes positivas. Hallar los puntos P , donde la derivada direccional máxima de f es igual a 1, sabiendo que dicho valor lo alcanza en la dirección de la recta $\mathcal{L} : x = y = z$.

Solución.

Parametrizando la recta $\mathcal{L} : x = t, t \in \mathbf{R}$ se tiene $\mathcal{L} : P = t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbf{R}$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2z}{c^2}$ existen y son continuas. Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en \mathbf{R}^3 . Por teorema, existe $D_u f(x, y, z)$ en cualquier dirección unitaria u . Por propiedad se tiene:

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot u$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

Considere el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$. Entonces $\nabla f(P_0) \parallel (1, 1, 1)$, entonces existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\nabla f(P_0) = \lambda(1, 1, 1)$ de donde se tiene

$$\frac{2x_0}{a^2} = \lambda, \frac{2y_0}{b^2} = \lambda, \frac{2z_0}{c^2} = \lambda \implies x_0 = \frac{\lambda a^2}{2}, y_0 = \frac{\lambda b^2}{2}, z_0 = \frac{\lambda c^2}{2}$$

El valor de la razón de cambio máxima de f es: $\|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{\frac{4x_0^2}{a^4} + \frac{4y_0^2}{b^4} + \frac{4z_0^2}{c^4}} = 1$,

$$\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 = 1 \implies 3\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{2}, \quad y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b^2}{2}, \quad z_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{2}$$

Por tanto los puntos son: $P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{2}\right)$ y $P'_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b^2}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{2}\right)$.

Ejemplo 2.164 Dada la función $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$. Hallar

(a) La derivada direccional de f en $(0, 0)$ en la dirección del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) Un vector unitario U para el cual $D_U f(0, 0) = 0$.

Solución.

(a) Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$ existen y son continuas (pues, las funciones exponenciales y trigonométricas \sin , \cos son continuas en \mathbf{R}^2). Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en \mathbf{R}^2 . Por teorema, existe $D_u f(x, y, z)$ en cualquier vector unitario u . Por propiedad se tiene:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (e^x \sin y + e^y \cos x, e^x \cos y + e^y \sin x),$$

$$\text{Así, } \nabla f(0, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0), \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)\right) = (1, 1).$$

$$D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot u = (1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

(b) Consideremos $U = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto, $\|U\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \dots (1)$

$$D_U f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot U = (1, 1) \cdot (a, b) = a + b = 0 \implies b = -a \dots (2).$$

$$\text{Reemplazando (2) en (1), se tiene: } a^2 + a^2 = 1, a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto los vectores pedidos son: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Ejemplo 2.165 Si $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^1 .

(a) Demostrar que $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ decrece más rápido en el punto $P \in \mathbf{R}^n$, en dirección opuesta al vector gradiente $\nabla f(P)$.

(b) Usando la parte (a), encontrar la dirección en que la función $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ disminuye con más rapidez en el punto $P(2, -3)$.

Solución.

(a) Sea u el vector unitario y como f es una función diferenciable, entonces la razón de cambio de f en la dirección u es:

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u = \|\nabla f(P)\| \|u\| \cos \theta = \|\nabla f(P)\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre u y $\nabla f(P)$. Puesto que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ se tiene que

$$-\|\nabla f(P)\| \leq \underbrace{\|\nabla f(P)\| \cos\theta}_{D_u f(P)} \leq \|\nabla f(P)\|,$$

entonces esta es mínima cuando $\theta = \pi$; esto es, cuando u y $\nabla f(P)$ son paralelos y de sentido opuestos.

(b) $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (4x^3 - 2xy^3, x^4 - 3x^2y^2)$, entonces f decrece más rápido en el punto $P(2, -3)$, en dirección opuesta al vector gradiente $\nabla f(P)$. Es decir, $u = -\nabla f(2, -3) = -(12, -92) = (-12, 92)$.

Ejemplo 2.166 Sea S una superficie con ecuación $z = g(x, y)$, donde $z > 0$ satisface la ecuación

$$x^3 + 4xyz - y^3 + z^3 = 2.$$

Si $(1, -1)$ está en el dominio de g , hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Solución.

Sea $F(x, y, z) = x^3 + 4xyz - y^3 + z^3 = 2$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 3x^2 + 4yz$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 4xz - 3y^2$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 3z^2 + 4xy.$$

Sean $g(1, -1) = c$ y $P_0 = (1, -1, g(1, -1)) = (1, -1, c) \in S : 1 - 4c + 1 + c^3 = 2$
 $\implies c(c^2 - 4) = 0$, de donde $c = 0$ o $c = \pm 2$. Por tanto $c = 2$.

Así, $\nabla F(1, -1, 2) = (-5, 5, 8)$

Ahora, la ecuación del plano tangente a S en el punto $P_0 = (1, -1, 2) \in S$, es :

$$\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot \nabla F(1, -1, 2) = 0$$

$$\mathcal{P} : -5(x - 1) + 5(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

$$\mathcal{P} : 5x - 5y - 8z + 6 = 0.$$

Ejemplo 2.167 Sean $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función, $U = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $V = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $W = (0, 1)$ vectores de \mathbf{R}^2 tales que $D_U f(1, 1) = 2$, $D_V f(1, 1) = 0$, $D_W f(1, 1) = 1$.

(a) ¿Es f diferenciable en $(1, 1)$? Justificar su respuesta.

(b) ¿Si $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es una función tal que $\nabla f(P_0)$ existe, entonces f es diferenciable en P_0 ? Justificar su respuesta.

Solución.

(a) Si f es diferenciable en $(1, 1)$, entonces \forall vector unitario A , se tiene $D_A f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot A$

$$\text{Sea } \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (a, b),$$

$$D_U f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot U = (a, b) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\sqrt{3} = 2 \implies a = 4 - b\sqrt{3} \dots (1).$$

$$D_V f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot V = (a, b) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}b = 0 \implies b = -a\sqrt{3} \dots (2).$$

Resolviendo (1) y (2), resulta $a = 4 + 3a$, $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$

Con estos datos se tiene $D_W f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot W = (a, b) \cdot (0, 1) = b = 2\sqrt{3}$ lo que contradice al tercer dato. $D_W f(1, 1) = 1$.

Por lo tanto f no es diferenciable en $(1, 1)$.

(b) Es Falso. **Por ejemplo**, considere la función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$. Luego existe $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Pero f no es continua en $(0, 0)$, pues $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe. Por tanto f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Otro ejemplo, considere la función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$. Luego existe $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Usamos la definición de diferenciability,

(i) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(ii) $L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$

$$L = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

Por tanto f no es diferenciable en $(0, 0)$, pues $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$ no existe.

Ejemplo 2.168 Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Hallar α de manera que existan $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) Si $\alpha = 1$, analizar si la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0, 0)$.

(c) Hallar α de manera que f sea diferenciable en el punto $(0, 0)$.

(d) Sea $g(x, y) = (x^2 - y^2) f(x, y)$ y $\alpha = -\frac{1}{2}$. Hallar todos los **vectores unitarios** $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ tales que $D_u g(0, 0)$ **existen**.

Solución.

$$(a) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 0^2)^\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{1}{(h^2 + 0^2)^\alpha} \right)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right)$$

Observemos que:

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in \mathbf{R}$$

Se tiene

$$0 \leq \left| h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right) \right| \leq |h|^{2\alpha-1}, h \neq 0$$

Como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |h|^{2\alpha-1} = 0$, para $2\alpha - 1 > 0, \alpha > \frac{1}{2}$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right) \right| = 0.$$

Luego, existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Similarmente se puede ver que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2)^\alpha}\right)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right) = 0.$$

(b) Si $\alpha = 1$:

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \left((x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right)}{\partial x} = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Así,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pero $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$, ya que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Esto último lo podemos justificar de la siguiente forma:

$$\text{Cuando } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0, \text{ pero no existe } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right),$$

ya que por ejemplo si hacemos el camino $C : y = x$, no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$.

Este último lo podemos ver tomando la sucesión $x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, x_n \rightarrow 0$ y

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1}{x_n} \cos\left(\frac{1}{2x_n^2}\right) = \lim_{x_n \rightarrow 0} 2\sqrt{n\pi} \cos(2n\pi) = \infty.$$

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

(c) Por parte (a), se tienen que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Falta ver:

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (h,k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| (h^2 + k^2)^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2 + k^2)^\alpha}\right) \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| (h^2 + k^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2 + k^2)^\alpha}\right) \right| = 1$$

Observemos que:

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in \mathbf{R}$$

Se tiene

$$0 \leq \left| (h^2 + k^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{(h^2 + k^2)^\alpha} \right) \right| \leq |h^2 + k^2|^{\alpha - \frac{1}{2}}, (h, k) \neq (0, 0).$$

Como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |h^2 + k^2|^{\alpha - \frac{1}{2}} = 0$, para $\alpha - \frac{1}{2} > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| (h^2 + k^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{(h^2 + k^2)^\alpha} \right) \right| = 0.$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0, 0)$, si $\alpha > \frac{1}{2}$

(d) Para $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(hu_1, hu_2) - g(0, 0)}{h}$$

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left((hu_1)^2 - (hu_2)^2 \right) \left((hu_1)^2 + (hu_2)^2 \right)^\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\left((hu_1)^2 + (hu_2)^2 \right)^\alpha} \right)}{h}$$

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 (u_1^2 - u_2^2) h^{2\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^{2\alpha}} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (u_1^2 - u_2^2) h^{2\alpha+1} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^{2\alpha}} \right) =$$

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} (u_1^2 - u_2^2) h^{2\alpha+1} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h^{2\alpha}} \right). \text{ Por lo tanto,}$$

$$D_u f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } u_2 = \pm u_1 \\ \text{no existe} & , \text{ si } u_2 \neq \pm u_1 \end{cases}$$

La $D_u f(0, 0)$ existe si y sólo si $u_2 = \pm u_1$, como $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow 2u_1^2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $u_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ son los vectores pedidos.

Ejemplo 2.169 Dada la función $f(x, y) = y^2 \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Demostrar que si $x > 0$ entonces existe $D_u f(x, y)$ para todo vector unitario $u \in \mathbf{R}^2$.

Solución.

$$f_x(x, y) = \frac{y^2}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$$

$$f_y(x, y) = 2y\sqrt{x}$$

Luego f_x, f_y son continuas en $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$. Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en D . Por tanto para cada punto $(x, y) \in D$, existen todas las derivadas parciales y en cualquier dirección unitaria $u \in \mathbf{R}^2$.

Ejemplo 2.170 Dada la función $f(x, y) = \arctan \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) + x^2 y$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Sean S la gráfica de f y el plano $\mathcal{P} : x - y = 0$. Verificar que el vector tangente a la curva $\Gamma := S \cap \mathcal{P}$, es **ortogonal** al vector gradiente a S en el punto $P_0 = (1, 1, f(1, 1))$.

Solución.

$$f(1, 1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

Definamos $\mathcal{S} : g(x, y, z) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y - z$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{2(x^2+y^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + 2xy \rightarrow f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + x^2 \rightarrow f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$\nabla g(x, y, z) = (f_x(x, y), f_y(x, y), -1), \nabla g(1, 1, \frac{\pi}{4} + 1) = (2, \frac{1}{2}, -1).$$

Parametrizando la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} z = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y \\ x - y = 0 \end{cases}$

Sea $x = t$, se tiene $y = t$ entonces $z = \arctan\left(\frac{2t}{t^2+t^2}\right) + t^3 = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3, t \neq 0$.

Así, $\Gamma : \alpha(t) = (t, t, \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3), t \in]0, +\infty[$,

entonces $\alpha'(t) = \left(1, 1, 3t^2 - \frac{1}{t^2+1}\right)$, luego $\alpha'(1) = (1, 1, \frac{5}{2})$.

Ahora,

$$\nabla g(P_0) \cdot \alpha'(1) = (2, \frac{1}{2}, -1) \cdot (1, 1, \frac{5}{2}) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0. \text{ Por tanto, } \nabla g(P_0) \perp \alpha'(1).$$

Ejemplo 2.171 Dada la función $f(x, y) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y, (x, y) \neq (0, 0)$. Sean \mathcal{S} la gráfica de f y el plano $\mathcal{P} : x - y = 0$. Verificar que el vector tangente a la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$, es ortogonal al vector gradiente a \mathcal{S} en el punto $P_0 = (1, 1, f(1, 1))$.

Solución.

$$f_x(x, y) = \frac{y^2}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$$

$$f_y(x, y) = 2y\sqrt{x}$$

Luego f_x, f_y son continuas en $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$. Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en D . Por tanto para cada punto $(x, y) \in D$, existen todas las derivadas parciales y en cualquier dirección unitaria $u \in \mathbf{R}^2$.

$$f(1, 1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

Definamos $\mathcal{S} : g(x, y, z) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y - z$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{2(x^2+y^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + 2xy \rightarrow f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + x^2 \rightarrow f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$\nabla g(x, y, z) = (f_x(x, y), f_y(x, y), -1), \nabla g(1, 1, \frac{\pi}{4} + 1) = (2, \frac{1}{2}, -1).$$

Parametrizando la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} z = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y \\ x - y = 0 \end{cases}$

Sea $x = t$, se tiene $y = t$ entonces $z = \arctan\left(\frac{2t}{t^2+t^2}\right) + t^3 = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3, t \neq 0$.

Así, $\Gamma : \alpha(t) = (t, t, \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3), t \in]0, +\infty[$,

entonces $\alpha'(t) = \left(1, 1, 3t^2 - \frac{1}{t^2+1}\right)$, luego $\alpha'(1) = (1, 1, \frac{5}{2})$

Ahora,

$$\nabla g(P_0) \cdot \alpha'(1) = (2, \frac{1}{2}, -1) \cdot (1, 1, \frac{5}{2}) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0. \text{ Por tanto, } \nabla g(P_0) \perp \alpha'(1).$$

Ejemplo 2.172 Sea la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

(a) Hallar las función $\frac{\partial f}{\partial x}$, indicando su dominio.

(b) Hallar todos los vectores unitarios $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ para los cuales existe $D_U f(0, 0)$.

(c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto correspondiente a $x = 8, y = 1$.

Solución.

(a) Se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$; si $x \neq 0$.

Si $x = 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{y}}{h^{\frac{2}{3}}}$,

solamente existe la derivada parcial cuando $y = 0$.

Entonces tenemos :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

(b) Consideremos $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto, $\|U\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1 \dots (1)$

$$f(0, 0) = \sqrt[3]{0 \cdot 0} = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} D_U f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(u_1, u_2)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(hu_1)(hu_2)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{u_1 u_2}}{h} \\ D_U f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{u_1 u_2}}{h^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

El límite existe si y sólo si

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \vee u_2 = 0.$$

Si $u_1 = 0$. En (1) : $u_1^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow 0^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow u_2 = \pm 1$. Así, $u = (0, \pm 1)$.

Si $u_2 = 0$. En (1) : $u_1^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow u_1^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \pm 1$. Así, $u = (\pm 1, 0)$.

Por lo tanto, $(0, -1), (0, 1), (-1, 0)$ y $(1, 0)$ son los vectores pedidos.

(c) Tenemos $g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$

entonces $g(8, 1) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \frac{1}{12}$. Se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{\frac{y}{x^5}} \text{ y } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2 y^2}}.$$

Entonces el vector normal al plano tangente es

$$N = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(8, 1), \frac{\partial g}{\partial y}(8, 1), -1 \right) = \left(-\frac{1}{144}, \frac{1}{36}, -1 \right) \parallel (-1, 4, -144)$$

y la ecuación del plano tangente a la gráfica de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $\left(8, 1, \frac{1}{12}\right)$ es

$$\mathcal{P} : \left(x - 8, y - 1, z - \frac{1}{12}\right) \cdot (-1, 4, -144) = 0.$$

Es decir,

$$\mathcal{P} : 4y - x - 144z + 16 = 0.$$

Ejercicios Propuestos: Derivadas de orden superior

1. Si $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, encontrar la constante a tal que para todo $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ se cumple

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{a}{u}.$$

2. Si $z = x f(x + y) + y g(x + y)$, donde f y g tienen derivadas continuas de segundo orden, probar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Sea $f(x, y, z) = g(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hallar

(a) $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

(b) La función g más general tal que $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

4. Si f es una función de x verificando la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ y g es una función de t que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2 \lambda^2 g(t) = 0.$$

Demostrar que la función $u = f(x) g(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

5. Sea $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, una función de clase C^2 en \mathbf{R}^2 . Demostrar que u es de la forma $u = f(x) g(y) \iff u$ satisface la ecuación: $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Sugerencia: Para demostrar (\Leftarrow) calcular $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ siendo $v = \ln u$.

2.19 Máximos y Mínimos

2.19.1 Máximos y Mínimos sin restricciones

La función

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

alcanza en en $(0, 0)$ su máximo valor. Es claro que

$$f(x, y) \leq f(0, 0) = 1,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Un cálculo sencillo nos indica que

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

Análogamente,

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$$

alcanza en $(0, 0)$ su mínimo valor, ésto es $f(x, y) \geq f(0, 0) = 1$. En este caso también $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Tenemos, entonces la siguiente

Definición 2.59 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, en donde Ω es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

(a) Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo local o máximo relativo de f si existe una bola $B(P_0, r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \geq f(P)$, para todo $P \in B(P_0, r)$.

(b) Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto mínimo local o mínimo relativo de f si existe una bola $B(P_0, r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.

(c) Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo global o máximo absoluto de f tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.

(d) Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo global o máximo absoluto de f tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.

(e) Decimos que f tiene extremo relativo en el punto $P_0 \in \Omega$ si f tiene un máximo o mínimo relativo en P_0 .

existe una bola $B(P_0, r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.

Definición 2.60 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene punto crítico en $P_0 \in \Omega$ si $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ o no existe algunas derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ (P_0 es un punto singular).

Definición 2.61 Decimos que f tiene un punto P_0 de ensilladura al punto crítico interior de Ω que no es ni máximo ni mínimo local. En términos generales, P_0 es un punto de silla si para todo $r > 0$ existen puntos $P, Q \in B(P_0, r)$ tales que $f(P) > f(P_0)$ y $f(Q) < f(P_0)$.

Definición 2.62 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene punto crítico en $P_0 \in \Omega$ si $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ o no existe algunas derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ (P_0 es un punto singular).

Definición 2.63 Decimos que f tiene un punto P_0 de ensilladura al punto crítico interior de Ω que no es ni máximo ni mínimo local. En términos generales, P_0 es un punto de silla si para todo $r > 0$ existen puntos $P, Q \in B(P_0, r)$ tales que $f(P) > f(P_0)$ y $f(Q) < f(P_0)$.

Teorema 2.36 Condiciones necesarias para valores extremos

La función $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene valor extremo local o absoluto en un punto P_0 de Ω si P_0 es:

- Un punto crítico de f .
- Un punto frontera de Ω . Es decir, $P_0 \in \partial\Omega$.

Demostración

Supongamos que P_0 pertenece al dominio de f . Si el punto $P_0 \notin \partial\Omega$, entonces debe pertenecer al interior del dominio y si en P_0 todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ existen, entonces existe $\nabla f(P_0)$. Por otro lado, si P_0 no es un punto crítico de f , entonces $\nabla f(P_0) \neq 0$, por lo que f tiene derivada direccional negativa en la dirección de $-\nabla f(P_0)$; es decir, f crece si nos movemos desde P_0 en una dirección y decrece si nos movemos en la dirección opuesta por consiguiente, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en P_0 . Por tanto, todo punto donde se produzca un valor extremo debe ser un punto crítico de f o un punto frontera de f .

Teorema 2.37 Condiciones suficientes para la existencia de valores extremos

Si $f : \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es continua en un conjunto cerrado y acotado \mathcal{K} en \mathbb{R}^n . Entonces f alcanza valores máximos y mínimos absolutos.

Ejemplo 2.173 Analizar si la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene valores extremos

$$f(x, y) = xy.$$

Solución

Determinación de los puntos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \dots (1) \\ y = 0 \dots (2) \end{cases}$$

Así, los puntos críticos son:

$$P.C = \{(0, 0)\}.$$

Analizando en $(0, 0) : f(0, 0) = 0$.

Observemos que en este caso $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ y no obstante el punto $(0, 0)$ no es de máximo ni de mínimo. Observe que $f(x, y) > 0$ para $x > 0$ y $y > 0$ como también para $x < 0$ y $y < 0$. En cambio, para $x < 0$ y $y > 0$, como también para $x > 0$ y $y < 0$, vemos que $f(x, y) < 0$. Esto nos indica que $(0, 0)$ no es máximo ni mínimo.

Por otro lado:

Considerando el camino $\mathcal{C}_1 := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = x\}$, se tiene que $g(x) = f(x, x) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$

la función f tiene, en $(0, 0)$, un punto mínimo en \mathcal{C}_1 .

Considerando el camino $\mathcal{C}_2 := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = -x\}$, se tiene que $g(x) = f(x, -x) = -x^2 \leq 0 = f(0, 0)$

la función f tiene, en $(0, 0)$, un punto máximo en \mathcal{C}_1 .

En este caso decimos que $(0, 0)$ es un punto silla.

Ejemplo 2.174 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $P_0 \in \Omega$ tal que existen y son continuas las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ en $B(P_0, r)$. Entonces se define la matriz hessiana de f en $P_0 \in \Omega$ como

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \right).$$

Por el teorema de Schwartz, la matriz hessiana es simétrica. Llamaremos *hessiano* de f en P_0 al determinante de la matriz hessiana.

En términos generales, P es un punto de silla si en toda bola $B(P, r)$ encontramos puntos Q tales que $f(Q) > f(P)$ y otros para los cuales $f(Q) < f(P)$.

Los puntos P tales que $\nabla f(P) = 0$ se llaman puntos críticos o estacionarios.

Vamos, ahora, a obtener un resultado que nos permita clasificar los puntos estacionarios. Antes de ello introduciremos la siguiente notación: La matriz

$$(D_{ij}f(P)) = H_f(P),$$

de orden $n \times n$, se llama la matriz hessiana de f en P_0 . Es fácil ver que, para $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$,

$$\langle H_f(P_0)H, H \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n D_{ij}f(P_0)h_i h_j.$$

Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 2.38 (Fórmula de Taylor de segundo orden) Supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en $B(P, r)$. Entonces

$$f(P + H) - f(P) = \langle \nabla f(P), H \rangle + \frac{1}{2!} \langle H_f(P)H, H \rangle + o(\|H\|^2).$$

Demostración: Sea $g(t) = f(P + tH)$. Puesto que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas la función g admite un desarrollo de Taylor de orden dos en el intervalo $[0, 1]$. Esto es,

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(s),$$

para algún $s \in (0, 1)$.

Ahora,

$$g'(s) = \langle \nabla f(P + sH), H \rangle = \sum_{j=1}^n D_j f(P + sH) y_j.$$

Entonces

$$g''(s) = \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n D_j f(P + sH) h_j \right) h_i = \langle H_f(P + sH)H, H \rangle,$$

en donde $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Ahora, sea

$$h(s) = \langle \{H_f(P + sY) - H_f(A)\} H, H \rangle.$$

Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|h(s)| \leq \|H_f(P + sH) - H_f(P)\| \|H\|^2.$$

Como f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas tenemos que

$$\frac{|h(s)|}{\|H\|^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } H \rightarrow 0.$$

Esto es, $h = o(\|H\|^2)$. Para terminar sólo nos resta reemplazarla a $g''(s)$ por $\langle H_f(P)H, H \rangle + h(s)$ y obtenemos inmediatamente.

Si las derivadas parciales de segundo orden son continuas entonces

$$D_{ij}f(P) = D_{ji}f(P)$$

y la matriz $H_f(P)$ es simétrica. Podemos, entonces, hacer un cambio de variable que nos permita presentar la matriz en forma diagonal. Sabemos que en esa diagonal aparecerán los *valores propios* de la matriz hessiana, digamos que son: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es así cómo la forma cuadrática $\frac{1}{2!} \langle H_f(P)H, H \rangle$ la podemos escribir cómo

$$\frac{1}{2!} \langle H_f(P)H, H \rangle = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 \quad (3.7.6)$$

Clasificación de los Puntos Críticos

Supongamos que P es un punto crítico, o estacionario, de f , entonces $\nabla f(A) = 0$. Por lo tanto, obtenemos

$$f(P + H) - f(P) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 + o(\|H\|^2),$$

y observamos que el signo de $f(P + H) - f(P)$, para H muy pequeño, es el signo de la forma cuadrática $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2$. Deducimos entonces que

1. Si los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz hessiana en A son todos positivos, el punto A es mínimo.
2. Si los valores propios son todos negativos, el punto A es máximo.
3. Si los valores propios son unos negativos y otros positivos, el punto A es silla.
4. Si por lo menos uno de los valores propios es cero, el criterio de los valores propios no decide.

Observación

Es evidente que la matriz Hessiana es efectivamente simétrica. La matriz Hessiana agrupa de forma ordenada todas las derivadas parciales de orden dos de una función. Igual que en el caso de una variable exigimos que la segunda derivada sea positiva o negativa para garantizar la existencia de un máximo o mínimo, aquí exigiremos que la matriz Hessiana sea definida positiva o negativa. Definamos primeramente lo que entendemos por matriz definida positiva o negativa.

Definición 2.64 Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$, decimos que A es
 (i) *definida positiva* si todos sus valores propios son números reales positivos,
 (ii) *definida negativa* si todos sus valores propios son números reales negativos.

Es evidente que, una vez que conozcamos la función f y el punto P , podremos calcular $\text{Hess}(f)(p)$ que será una matriz para la cual podremos estudiar sus valores propios y determinar si es definida positiva o negativa. En la siguiente propiedad vemos cómo los conceptos de matriz definida positiva y negativa convierten a la matriz hessiana en el análogo en varias variables de la segunda derivada.

Proposición 2.23 Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $P_0 \in \Omega$ supongamos que en una caja abierta que contiene al punto p existen y son continuas todas las derivadas parciales de segundo orden de f . Supongamos también que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = 0, \forall j = 1, \dots, n.$$

Entonces:

(i) Si la matriz $\text{Hess}(f)(P_0)$ es definida positiva, en el punto P_0 , f alcanza un mínimo relativo.

(ii) Si la matriz $\text{Hess}(f)(P_0)$ es definida negativa, en el punto P_0 , f alcanza un máximo relativo.

En la práctica resulta útil la siguiente propiedad que permite estudiar si una matriz es definida positiva o negativa sin necesidad de calcular sus valores propios.

Proposición 2.24 (Clasificación mediante menores principales). Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$, llamamos *menores principales* de A a los determinantes

$$\lambda_1 = |(a_{11})|, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \lambda_n = |A|.$$

Entonces se verifica que

(1) A es definida positiva $\iff \lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$.

(2) A es definida negativa $\iff (-1)^i \lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 2.175 Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Hallar los puntos críticos f y analizar su naturaleza.

Solución

Es claro que $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$. Por lo tanto el punto crítico de f es el vector $(0, 0)$. Por otra parte, la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} D_{11}f(0, 0) & D_{12}f(0, 0) \\ D_{21}f(0, 0) & D_{22}f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -2$. Entonces, como los *valores propios* son negativos, $(0, 0)$ es un punto máximo.

Ejemplo 2.176 Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

tiene en $(0, 0)$ un punto crítico. Los valores propios de la matriz hessiana $H_f(0, 0)$ son iguales a 0. Es fácil ver que $(0, 0)$ es un punto de silla.

Ejemplo 2.177 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2y^2$$

tiene en $(0, 0)$ un punto crítico. Los valores propios de la matriz hessiana $H_f(0, 0)$ son iguales a 0. Es fácil ver que $(0, 0)$ es un punto mínimo.

Ejemplo 2.178 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

El siguiente ejemplo nos muestra cómo una función puede tener, en un punto A , un mínimo cuando restringimos la función a cualquier recta que pasa por él y no obstante el punto P es silla.

Si hacemos $y = mx$, vemos que $f(x, mx) = m^2x^2 + 3x^4 - 3mx^3$ tiene en $x = 0$ un punto de mínimo. Esto es, sobre la recta $y = mx$ la función f tiene en $(0, 0)$ un punto de mínimo. También, sobre la recta $x = 0$ la función tiene en $(0, 0)$ un punto de mínimo. No obstante podemos encontrar puntos (x, y) en cualquier vecindad de $(0, 0)$ para los cuales $f(x, y) > 0$ y otros tales que $f(x, y) < 0$.

Ejemplo 2.179 Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$$

y analizar su naturaleza.

Solución.

Determinación de los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial (x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y)}{\partial x} = 6xy + 3x^2 = 3x(x + 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial (x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y)}{\partial y} = 3x^2 - 4y - 8y^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x + 2y) = 0 \dots (1) \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = -2y \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

De: $\begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{cases}$, se tiene $-4y - 8y^3 = 0$, $4y(1 + 2y^2) = 0 \implies y = 0$. Así, $(0, 0)$.

De: $\begin{cases} x = -2y \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{cases}$, se tiene $3(-2y)^2 - 4y - 8y^3 = 0$, $12y^2 - 4y - 8y^3 = 0$: $-4y(2y - 1)(y - 1) = 0$, entonces las soluciones de esta ecuación son $y = 0 \vee y = \frac{1}{2} \vee y = 1$, con los correspondientes puntos $(0, 0)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(-2, 1)$.

Así, los puntos críticos son:

$$P.C = \left\{ (0, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (-2, 1) \right\}.$$

Ahora:

Para clasificar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial (6xy + 3x^2)}{\partial x} = 6x + 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial (3x^2 - 4y - 8y^3)}{\partial y} = -24y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial (3x^2 - 4y - 8y^3)}{\partial x} = 6x$$

$$|Hf(x, y)| = \begin{vmatrix} 6x + 6y & 6x \\ 6x & -24y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

Luego,

P.C: (x, y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$	$Det Hf(x, y)$	Conclusión
$(0, 0)$	0	-4	0	0	Falla el criterio.
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	-3	-10	-6	-6	Silla
$(-2, 1)$	-6	-28	-12	-24	Máx. Rel.

Analizando en $(0, 0) : f(0, 0) = 0$.

Considerando el camino $C := \{(x, y) \in B_r(0, 0) : y = 0\}$, se tiene que

$$g(x) = f(x, 0) = x^3$$

Aplicando el criterio de la primera derivada:

$$g'(x) = 3x^2$$

$g'(x) = 0$ entonces $x_0 = 0$ es punto crítico de f .

$$g''(x) = 6x$$

$$g''(0) = 0$$

$g'''(x) = 6$ entonces $g'''(0) = 6 \neq 0$.

Entonces $x_0 = 0$ es un punto de inflexión.

Luego, $(0, 0)$ es un punto silla.

Ejemplo 2.180 Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

y analizar su naturaleza.

Solución.

Determinación de los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{2x+3y} (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{2x+3y} (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(8x^2 - 6xy + 3y^2) + 16x - 6y = 0 \dots (1) \dots (\text{multiplicando por } 3) \\ 3(8x^2 - 6xy + 3y^2) - 6x + 6y = 0 \dots (2) \dots (\text{multiplicando por } -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6(8x^2 - 6xy + 3y^2) + 48x - 18y = 0 \\ -6(8x^2 - 6xy + 3y^2) 12x - 12y = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta: $y = 2x$.

Reemplazando (1) : $6(8x^2 - 6x(2x) + 3(2x)^2) + 48x - 18(2x) = 0$, resulta:

$$4x(4x+1) = 0, \text{ entonces } x = 0 \text{ o } x = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ en (1), resulta } 16(0)^2 - 12(0)y + 6y^2 + 16(0) - 6y = 0 \implies 6y(y-1) = 0 \implies y = 0 \text{ o } y = 1.$$

Así, los puntos son $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

$$\text{Si } x = -\frac{1}{4}, \text{ en (1), } 16\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 12\left(-\frac{1}{4}\right)y + 6y^2 + 16\left(-\frac{1}{4}\right) - 6y = 0$$

$$\implies 6y^2 - 3y - 3 = 0, \text{ entonces } y = 1 \text{ o } y = -\frac{1}{2}.$$

$$e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y). \text{ Así, los puntos son } \left(-\frac{1}{4}, 1\right) \text{ y } \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto los P.C. son:

$$P.C. = \left\{ (0, 0), (0, 1), \left(-\frac{1}{4}, 1\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Ahora:

Calculamos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^{2x+3y}(32x^2 - 24xy + 12y^2 + 64x - 24y + 16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^{2x+3y}(72x^2 - 54xy + 27y^2 - 36x + 36y + 6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{2x+3y}(48x^2 - 36xy + 18y^2 + 36x - 6y - 6).$$

Luego,

P.C.:(x, y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$	Det(x, y)	Conclusión
(0, 0)	16	6	-6	+	Máx. Rel.
$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$	$23e^{-2}$	$42e^{-2}$	$\frac{87}{4}e^{-2}$	+	Mín. Rel.
(0, 1)	$28e^3$	$69e^3$	$9e^{\frac{5}{2}}$	+	Mín. Rel.
$\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$	$-4e^{\frac{5}{2}}$	$96e^{\frac{5}{2}}$	$9e^{\frac{5}{2}}$	-	Punto silla.

Ejemplo 2.181 Hallar los puntos críticos de

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2) - x^2$$

y analizar si en ellos hay máximo relativo, mínimo relativo ó punto silla.

Solución.

Determinación de los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} - 2x = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x(x^2 + y^2)^2}{1 + (x^2 + y^2)^2} = 0 \dots (1) \\ \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2} \dots (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Así, $(0, 0)$.

Por lo tanto los P.C. son :

$$P.C. = \{(0, 0)\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2 + 2(x^2 + y^2)(x^2 - 7y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{8xy(x^2 + y^2)}{(1 + (x^2 + y^2)^2)^2}$$

Luego

P.C:(x, y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$	Det(x, y)	Conclusión
(0, 0)	0	2	0	0	Falla el criterio.

Analizando en (0, 0) : $f(0, 0) = 0$.

Considerando el camino $C : y = 0$ en $B((0, 0), r)$ se tiene que

$$g(x) = f(x, 0) = \arctan(x^2) - x^2$$

Aplicando el criterio de la primera derivada:

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^4} - 2x = -\frac{2x^5}{1+x^4}$$

$$g'(x) = 0 \iff -\frac{2x^5}{1+x^4} = 0 \implies x = 0.$$

Entonces $g(0)$ es un máximo relativo.

Considerando el camino $C : x = 0$ en $B((0, 0), r)$ se tiene que

$$h(y) = f(0, y) = \arctan(y^2)$$

Aplicando el criterio de la primera derivada:

$$h'(y) = \frac{2y}{1+y^4}$$

$$h'(y) = 0 \iff \frac{2y}{1+y^4} = 0 \implies y = 0.$$

Entonces $h(0)$ es un mínimo relativo.

Luego, (0, 0) es un punto silla.

2.19.2 Multiplicadores de Lagrange

En esta sección estudiaremos un método, el método de los multiplicadores de Lagrange, para estudiar la existencia de extremos (máximos y mínimos) de funciones que están sometidas a restricciones. Por ejemplo, la distancia al origen de la recta $y = x + 1$ es un problema que consiste en hallar un mínimo bajo una restricción. Esto es, debemos minimizar la función distancia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ bajo la condición $y - x - 1 = 0$. Este problema es de fácil resolución si reemplazamos la variable $y = x + 1$ en la función $f(x, y)$. El problema queda reducido a un problema de mínimos de una función de una sola variable.

1

No siempre es posible reducir un problema de extremos condicionados a un problema de máximos o mínimos de una sola variable. El siguiente teorema nos proporciona una condición **necesaria** para que $P_0 \in \mathbb{R}^n$ sea un extremo condicionado de una función f .

Teorema 2.39 Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$. Considere el conjunto de nivel

$$S = \{P \in \Omega : g(P) = k\},$$

tales que $P_0 \in \Omega$ con $g(P_0) = k$ y $\nabla f(P_0) \neq 0$. Si $f_S : S \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un valor extremo relativo en S , en P_0 , existe un número real λ tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0) \cdots (1)$$

Demostración

El Teorema exige, para su demostración, herramientas más avanzadas de análisis matemático y no la haremos aquí en su forma más general. No obstante podemos proporcionar ahora una prueba para el teorema para el caso particular en que

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de dos variables y la condición $g(P_0) = 0$ determina una curva Γ que podemos parametrizar como $P = \alpha(t)$, $t \in I$, I algún intervalo de la recta real.

Supongamos que en $P_0 = \alpha(t_0)$, para algún $t_0 \in I$, $\alpha'(t_0)$ es un vector tangente a S en P_0 ; $\frac{d}{dt}g(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}k = 0$, y por la regla de la cadena

$$\left. \frac{d}{dt}g(\alpha(t)) \right|_{t=t_0} = \nabla g(P_0) \cdot \alpha'(t_0),$$

de modo que $\nabla g(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = 0$; es decir, $\alpha'(t_0)$ es ortogonal a $\nabla g(P_0)$.

Si la función $f_S : S \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un valor extremo relativo en S , en P_0 entonces $f(\alpha(t))$ tiene un valor extremo relativo en $t = t_0$ la función f alcanza un valor extremo: un máximo o un mínimo. Entonces la función

$$h(t) = f(\alpha(t)), t \in I$$

tendrá en t_0 un máximo o un mínimo y por lo tanto $\frac{dh(t_0)}{dt} = 0$. De la expresión anterior conseguimos, por la regla de la cadena, que

$$0 = \frac{dh(t_0)}{dt} = \nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0)$$

Así, el vector $\nabla f(\alpha(t))$ es ortogonal a la tangente de toda curva en S y también es ortogonal al espacio tangente a S en P_0 . Como el espacio perpendicular al espacio tangente es una recta, se tiene que $\nabla f(P_0)$ y $\nabla g(P_0)$ son paralelos. Puesto que $\nabla f(P_0) \neq 0$ se sigue que $\nabla f(P_0)$ es múltiplo de $\nabla g(P_0)$. Esto prueba el Teorema.

Observación 2.18 *Al usar el método de Multiplicadores de Lagrange, se debe hallar un punto P_0 y un escalar real λ tal que*

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

La ecuación (1) se dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las derivadas parciales de g . Hallar los puntos P_0 que cumple (1), es decir, resolver el sistemas de ecuaciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) = k \end{array} \right. \quad (2)$$

Teorema 2.40 (Multiplicadores de Lagrange). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\Omega)$. Sean $g_1, \dots, g_m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m < n$, funciones de clase $C^1(\Omega)$. Supongamos que $P_0 \in \Omega$ es un extremo de f bajo la condición que*

$$P_0 \in S = \{P \in \mathbb{R}^n, g_i(P) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Si el conjunto $\{\nabla g_i(P_0), i = 1, 2, \dots, m\}$ es linealmente independiente, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, números reales, llamados los multiplicadores, tales que

$$\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(P_0).$$

El **Teorema** nos proporciona una condición necesaria y no suficiente para la existencia de extremos condicionados. No nos proporciona información sobre la clase de extremo en cuestión, sólo con otras consideraciones, físicas o geométricas, debemos decidir si el punto P_0 es de máximo o de mínimo condicionado. El método exige resolver un sistema de $m+n$ ecuaciones, cuales son las que se derivan de (3.8.1) más las condiciones $g_i(P) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, con $m+n$ incógnitas, cuales son las n componentes de P_0 más los m multiplicadores.

Ejemplo 2.182 Sea la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2,$$

ésto es, la distancia al cuadrado de un punto (x, y, z) al eje z , bajo la condición que el punto de mínimo (x, y, z) satisfaga las ecuaciones

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z^2 - (y-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

ésto es, la distancia al cuadrado de un punto (x, y, z) al eje z , bajo la condición que el punto de mínimo (x, y, z) satisfaga las ecuaciones. Esto es,

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= z = 0 \\ g_2(x, y, z) &= z^2 - (y-1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Observemos que el punto $(0, 1, 0)$ es un extremo condicionado tal que

$$\begin{aligned} \nabla g_2(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ \nabla g_1(0, 1, 0) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

y $\nabla f(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$. Por lo tanto no se satisface (3.8.1).

Veamos un ejemplo del uso de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo 2.183 Deseamos calcular la distancia del origen $(0, 0, 0)$ al plano cuya ecuación es $x + y + z = 1$. El objetivo es hallar un punto (x_0, y_0, z_0) que satisfaga la ecuación del plano y que sea un punto de mínimo de la función distancia de un punto al origen. Esta función distancia la podemos tomar como

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

y la restricción $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$. Realmente la función distancia al origen que debemos tomar es $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pero es claro que los extremos de h son los mismos de f y con ésta última los calculos se simplifican.

En este caso sólo hay una restricción, los puntos de mínimo de f condicionados a la restricción $g = 0$ deben satisfacer el sistema

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

El sistema :

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \\ 2y &= \lambda \\ 2z &= \lambda \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema anterior y encontramos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{3} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3} \\ z &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ debe ser el punto que minimiza a f sujeto a la condición $g = 0$. Deducimos que la distancia del plano al origen es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ejemplo 2.184 Calcular el área del máximo paralelogramo que se puede inscribir en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

Solución.

Podemos suponer que los vértices del paralelogramo son: $(x, y), (x, -y), (-x, -y)$ y $(-x, y)$. Entonces la función de área que debemos maximizar es $f(x, y) = 4xy$ y la restricción que de imponemos es $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Puesto que sólo hay una restricción el Teorema nos dice que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Por lo tanto debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4y &= 2\lambda x \quad \dots (1) \\ 4x &= 2\lambda y \quad \dots (2) \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

Si eliminamos x de las ecuaciones 1) y 2) obtenemos que

$$y(4 - \lambda^2) = 0$$

Esta ecuación implica que $y = 0$ o $4 - \lambda^2 = 0$. Ahora si $y = 0$ tendríamos que concluir de las ecuaciones a) y b) que $x = 0$ y $y = 0$, lo que contradice la ecuación c). Es así cómo debemos concluir que $\lambda = \pm 2$. Si tomamos el caso $\lambda = 2$ obtenemos de las ecuaciones a) y b) que $x = y$. Y si tomamos el caso $\lambda = -2$ obtenemos que $x = -y$. En ambos casos la ecuación c) nos dice $2x^2 = 1$, ésto es, $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto los cuatro vértices del paralelogramo serán $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Esto nos indica que el valor extremo de $f(x, y)$ bajo la restricción $g(x, y) = 0$ debe ser $4 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$. Por consideraciones geométricas debemos concluir que este valor es máximo.

Ejemplo 2.185 (a) Usando el método de **Multiplicadores de Lagrange**, demostrar que el valor máximo de $x^2 y^2 z^2$ ($x, y, z > 0$), sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ($a > 0$), es

$$\left(\frac{a^2}{3}\right)^3$$

(b) Usar la parte (a) para demostrar que para números no negativos x, y, z se cumple

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Solución.

(a) Sea

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 ; x, y, z > 0$$

Sujeto a la restricción

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Puesto que :

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z), \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Usando Multiplicadores de Lagrange, existe un escalar λ tales que:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2z^2 & = \lambda(2x) & \dots (1) \\ 2x^2yz^2 & = \lambda(2y) & \dots (2) \\ 2x^2y^2z & = \lambda(2z) & \dots (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 & = a^2 & \dots (4) \end{cases} \dots (*)$$

Resolviendo el sistema se tiene :

$$x = \frac{a^2}{3}, y = \frac{a^2}{3}, z = \frac{a^2}{3}.$$

El valor $x^2 y^2 z^2$ que se obtuvo es : $\left(\frac{a^2}{3}\right)^3$.

Dicho valor es máximo (el mínimo ocurre cuando las variables x, y o z es cero) Si no fuera así, deberá hacer otros puntos críticos, pues $x^2 y^2 z^2$ alcanza su máximo y mínimo en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(b) Se deja al lector.

Ejemplo 2.186 (a) Suponga que x, y, z son positivas. Usando Multiplicadores de Lagrange, minimizar la función

$$f(x, y, z) = x + y + z, \text{ sujeta a la restricción } xyz = 1.$$

Ejemplo 2.187 (b) Aplicar el resultado del inciso (a) para deducir la desigualdad

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \text{ donde } a, b, c > 0.$$

Solución.

(a) Sean $x > 0, y > 0, z > 0$

Función objetivo: Minimizar $f(x, y, z) = x + y + z$
Sujeto a la restricción
$g(x, y, z) = xyz = 1$

Puesto que :

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) = (1, 1, 1)$$

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} \right) = (yz, xz, xy)$$

Usando Multiplicadores de Lagrange , existe un escalar λ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda(yz) \cdots (1) \\ 1 = \lambda(xz) \cdots (2) \\ 1 = \lambda(xy) \cdots (3) \\ xyz = 1 \cdots (4) \end{cases} \cdots (*)$$

Como $x > 0, y > 0, z > 0$ entonces $\lambda \neq 0$.

De (1) y (2) : $yz = xz$.Entonces se deduce : $y = x \cdots (5)$.

De (2) y (3) : $xz = xy$.Entonces se deduce : $z = y \cdots (6)$.

Luego $x = y = z$.

En (4) : $xyz = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

Así, el punto es: $(1, 1, 1)$. Luego el valor mínimo de f es: $f(1, 1, 1) = 3$.

Por tanto $3 \leq f(x, y, z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y, z > 0$

(b) Por (a) se tiene: $f(x, y, z) = x + y + z \geq 3, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y, z > 0$.

Considerando :

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}, y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}, z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$xyz = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{abc}{abc} = 1$$

Luego,

$$3 \leq x + y + z = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}; a, b, c > 0.$$

Ejemplo 2.188 Usando el método de **Multiplicadores de Lagrange**, hallar los valores máximos y mínimos del producto de tres números reales x, y, z si la suma de estos números debe ser **cero** y la suma de sus cuadrados debe ser **3**.

Solución.

Sea:

$$f(x, y, z) = xyz$$

Sujeto a las restricciones

$$g(x, y, z) = x + y + z = 0, h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

Puesto que :

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy), \nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \text{ y } \nabla h(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Usando el método de Multiplicadores de Lagrange , existen escalares λ y μ tales que:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz & = \lambda + \mu(2x) \cdots (1) \\ xz & = \lambda + \mu(2y) \cdots (2) \\ xy & = \lambda + \mu(2z) \cdots (3) \cdots (*) \\ x + y + z & = 0 \cdots (4) \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 3 \cdots (5) \end{cases}$$

De (1) - (2) : $(y - x)z = -2\mu(y - x)$. Entonces se deduce : $y = x \vee z = -2\mu \cdots (6)$.

(I) Si $y = x$:

En (4), $x + y + z = 0 \Rightarrow x + x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$.

En (5), $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Rightarrow x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 3 \Rightarrow 6x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

entonces $y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y

$z = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right)$ y $P_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$.

(II) Si $z = -2\mu$:

En (3), $xy = \lambda + \mu(2z) \Rightarrow xy = \lambda - z^2 \Rightarrow \lambda = xy + z^2$.

En (1), $yz = \lambda + \mu(2x) \Rightarrow yz = xy + z^2 - zx \Rightarrow z^2 - z(x + y) + xy = 0 \Rightarrow (z - x)(z - y) = 0 \Rightarrow z = x \vee z = y..$

(III) Si $z = x$:

En (4), $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y + x = 0 \Rightarrow y = -2x$.

En (5), $x^2 + (-2x)^2 + x^2 = 3 \Rightarrow 6x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $y = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$

y

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $P_4 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

(IV) Si $z = y$:

En (4), $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y + y = 0 \Rightarrow x = -2y$.

En (5), $(-2y)^2 + y^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 6y^2 = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$

y

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_5 \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $P_6 \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Evaluando $f(x, y, z)$ en los 6 puntos críticos hallados, el producto de tres números reales x, y, z resultan

$$f(P_1) = f(P_3) = f(P_5) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(P_2) = f(P_4) = f(P_6) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Entonces } f_{\text{Max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.20 Derivación Implícita

Las superficies en \mathbb{R}^3 se representan por medio de expresiones del tipo $F(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ representa la superficie de una esfera de centro en el origen

y radio 1. Algunas veces es posible despejar una de las variables en términos de las otras dos, por ejemplo, en el caso de la esfera podemos hacer

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Pero en general ésto no es posible. Consideremos por ejemplo la ecuación $sen\,xyz + e^{xyz} = 0$, no es posible despejar una variable en términos de las otras dos.

No obstante supongamos que de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ podemos despejar, implícitamente, a z en términos de x, y . Esto es, supongamos que $z = f(x, y)$. Tenemos entonces que

$$F[x, y, f(x, y)] = 0.$$

Si llamamos $g(x, y) = F[x, y, f(x, y)]$ entonces $g(x, y) = 0$ y por lo tanto sus derivadas parciales son iguales a cero. Si usamos la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = D_1 F \frac{\partial x}{\partial x} + D_2 F \frac{\partial y}{\partial x} + D_3 F \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = D_1 F \frac{\partial x}{\partial y} + D_2 F \frac{\partial y}{\partial y} + D_3 F \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = D_1 F(x, y, z) + D_3 F(x, y, z) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = D_2 F(x, y, z) + D_3 F(x, y, z) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Si $D_3 F(x, y, z) \neq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= -\frac{D_1 F(x, y, z)}{D_3 F(x, y, z)} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -\frac{D_2 F(x, y, z)}{D_3 F(x, y, z)}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que aunque no conocemos una expresión exacta de z en términos de x e y sí podemos conocer sus derivadas parciales. En el ejemplo $\cos\,xyz + e^{xyz} = 0$ procedemos así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{yz \cos(xyz) + yz e^{xyz}}{xy \cos(xyz) + xy e^{xyz}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{xz \cos(xyz) + xz e^{xyz}}{xy \cos(xyz) + xy e^{xyz}}, \end{aligned}$$

siempre que $-xy \operatorname{sen}(xyz) + xy e^{xyz} \neq 0$.

La anterior discusión puede generalizarse a más variables, por ejemplo, si tenemos $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ podemos obtener derivadas parciales implícitas de x_n como función de las variables x_1, \dots, x_{n-1} . Tendremos, entonces, fórmulas del siguiente tipo

$$D_k x_n = -\frac{D_k F}{D_n F}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

siempre que $D_n F \neq 0$.

La derivación implícita nos sirve para el cálculo de curvas definidas implícitamente. Sean $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ dos superficies. Su intersección determina una curva y aunque no esté determinada explícitamente podemos obtener alguna información si suponemos, por ejemplo, que $x = x(z)$ e $y = y(z)$, con z perteneciendo a algún intervalo I . Usamos la regla de la cadena como en (3.6.1) y obtenemos

$$\begin{aligned} -D_3F &= D_1F \cdot x'(z) + D_2F \cdot y'(z) \\ -D_3G &= D_1G \cdot x'(z) + D_2G \cdot y'(z) \end{aligned}$$

Para aquellos puntos en los que el discriminante del sistema anterior no se anule podemos obtener fórmulas para $x'(z)$ y $y'(z)$, así:

$$\begin{aligned} x'(z) &= \frac{\begin{vmatrix} -D_3F & D_2F \\ -D_3G & D_2G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1F & D_2F \\ D_1G & D_2G \end{vmatrix}} \\ y'(z) &= \frac{\begin{vmatrix} D_1F & -D_3F \\ D_1G & -D_3G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1F & D_2F \\ D_1G & D_2G \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Es así cómo podemos conocer el vector tangente a la curva en cada punto $z \in I$, y por lo tanto determinar la curva intersección de las dos superficies siempre y cuando conozcamos un punto que se encuentre en la intersección de las dos superficies.

Ejemplo 2.189 *Consideremos las superficies*

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x + y + z = 0 \\ G(x, y, z) &= 2x + y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.190 *Un cálculo sencillo nos dice que*

$$\begin{aligned} D_1F(x, y, z) &= 1 \\ D_2F(x, y, z) &= 1 \\ D_3F(x, y, z) &= 1 \\ D_1G(x, y, z) &= 2 \\ D_2G(x, y, z) &= 1 \\ D_3G(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} x'(z) &= 0 \\ y'(z) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x(z) &= c \\ y(z) &= -z + d, \end{aligned}$$

en donde c , d son constantes que debemos determinar.

De lo anterior obtenemos que $x = 1$. Esto es, $x(z) = c = 1$. Entonces la intersección de las dos superficies está determinada por el conjunto $\{(1, -z + d, z), z \in \mathbf{R}\}$,

en donde d debe ser determinada. Ahora, para $z = 0$ el punto $(1, d, 0)$ que está en la intersección de las dos superficies es aquel para el cual $d = -1$. Por lo tanto, la intersección de las dos superficies es el conjunto

$$\{(1, -z + -1, z), z \in \mathbf{R}\},$$

esto es, la recta

$$\{(1, -1, 0) + z(0, -1, 1), z \in \mathbf{R}\}.$$

Ejercicios propuestos: Valores extremos

1. Estudiar la naturaleza de los puntos críticos de las siguientes funciones

(a) $f(x, y) = 3x^2y^2 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

(b) $f(x, y) = (x^3 - y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$.

(d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

(e) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$.

(f) $f(x, y) = \frac{1}{3}xy|x - y|^3$.

(g) $f(x, y) = 4xy^2 - xy^3 - 2x^2y^2$.

(h) $f(x, y) = y^3 - y - x^4 - 3x^2 + 2$.

(i) $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$

2. Dada la función $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt$, determinar si f tiene extremos relativos.

3. Sea $f(x, y) = a[2xy + y^2 + x^2y + \cos(x + y)] + x^2(a^2 - y)$, $a \neq 0$.

(a) Hallar los valores de a para los cuales f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

(b) ¿Para qué valores de a , f tiene un punto de silla?

4. El plano $x - y + z = 0$ corta al cilindro $x^2 + y^2 - 8 = 0$ en una elipse ε . Hallar los puntos de ε más cercanos al origen y el punto de ε más alejado del origen.

5. Usando los Multiplicadores de Lagrange, hallar los puntos de la superficie $z^2 = xy - z^2 + 4$ más próximos al punto $P(1, 1, 1)$.

6. Encontrar los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x + z$ en la esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

7. Hallar todos los puntos de la esfera $\varepsilon : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, donde la función

$$f(x, y, z) = 2xy^2z$$

alcanza sus valores máximo y mínimo, sabiendo que dichos valores son no nulos.