

CAP. 2

**INTEGRACION POR PARTES E
INTEGRACION POR SUSTITUCION**

1. INTEGRACION POR PARTES

TEOREMA

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables.
Entonces se cumple

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

PRUEBA

La diferencial del producto de funciones $u \cdot v$ es

$$d(uv) = u dv + v du .$$

Luego $u dv = d(uv) - v du$, e integrando

$$\begin{aligned} \int u dv &= \int d(uv) - \int v du = uv + C - \int v du && \text{(pues } \int d(uv) = uv + C \text{)} \\ &= uv - \int v du && \text{(la constante } C \text{ es sumada a la constante} \\ &&& \text{de la integral indefinida } \int v du, \text{ dando lugar a otra constante)}. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $\int u dv = uv - \int v du$. ■

Ejemplo 1 Hallar $\int x \ln x \, dx$.

Solución Sean $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$.

Luego $du = \frac{1}{x}$, $v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$.

Aplicando $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, resulta

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= (\ln x) \left(\frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Integrando por partes calcular $\int x \cos nx \, dx$ y verificar la respuesta mediante diferenciación

Solución Sean $u = x$, $dv = \cos nx \, dx$.

Luego $du = dx$ y $v = \int dv = \int \cos nx \, dx = \frac{\text{sen } nx}{n}$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int x \cos nx \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = \frac{x \text{ sen } nx}{n} - \int \frac{\text{sen } nx}{n} dx \\ &= \frac{x \text{ sen } nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C. \end{aligned}$$

Verificación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x \text{ sen } nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C \right) &= \frac{\text{sen } nx}{n} + \frac{nx \cos nx}{n} - \frac{n \text{ sen } nx}{n^2} \\ &= x \cos nx = \text{función integrando.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encontrar $\int e^{x/4} \cos \pi x \, dx$ y verificar la respuesta mediante diferenciación de la solución hallada.

Solución

$$I = \int e^{x/4} \cos \pi x \, dx = e^{x/4} \frac{\text{sen } \pi x}{\pi} - \int \frac{e^{x/4}}{4\pi} \text{sen } \pi x \, dx \quad (1)$$

(tomando $u = e^{x/4}$, $dv = \cos \pi x \, dx$)

$$\text{Pero } \int e^{x/4} \text{sen } \pi x \, dx = -e^{x/4} \frac{\cos \pi x}{\pi} + \int \frac{e^{x/4}}{4\pi} \cos \pi x \, dx$$

(tomando $u = e^{x/4}$, $dv = \text{sen } \pi x \, dx$)

$$= -\frac{e^{x/4} \cos \pi x}{\pi} + \frac{I}{4\pi} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$I = e^{x/4} \frac{\text{sen } \pi x}{\pi} - \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{e^{x/4} \cos \pi x}{\pi} + \frac{I}{4\pi} \right), \quad \text{y despejando } I$$

$$I = \frac{4 e^{x/4} (4\pi \text{sen } \pi x + \cos \pi x)}{16\pi^2 + 1} + C.$$

Verificación

$$\frac{dI}{dx} = \frac{e^{x/4} (4\pi \text{sen } \pi x + \cos \pi x)}{16\pi^2 + 1} + \frac{4 e^{x/4} (4\pi^2 \cos \pi x - \pi \text{sen } \pi x)}{16\pi^2 + 1}$$

$$= e^{x/4} \cos \pi x \, dx.$$

Ejemplo 4 Hallar $I = \int \sec^3 x \, dx$.

Solución $I = \int \sec^3 x \, dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$
 (tomando $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$,
 $v = \tan x$)
 $= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$,
 $2I = \sec x \cdot \tan x + \int \sec x \, dx$
 $I = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$.

2. INTEGRACION POR SUSTITUCION O POR CAMBIO DE VARIABLE

2.1 Teorema. Fórmula del cambio de variable

Si $x = \phi(t)$ es una función diferenciable, entonces

$$\int f(x) \, dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

Nota

1. La igualdad a que se alude en esta fórmula se verifica en los puntos x, t tales que $x = \phi(t)$. Explícitamente, si

$$F(x) = \int f(x) \, dx \quad \text{y} \quad G(t) = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

entonces $F(x) = G(t)$ siempre que $x = \phi(t)$.

2. Para calcular $\int f(x) \, dx$, cuando se efectúa el cambio de variable $x = \phi(t)$, se procede de la siguiente manera:

a) se encuentra la integral $G(t) = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$;

b) se expresa $t = \psi(x)$ como una función de x , y se reemplaza $\psi(x)$ en la integral encontrada en a);

c) finalmente, $\int f(x) \, dx = C(\psi(x))$.

Prueba del Teorema

Sea $F(x) = \int f(x)dx$ y definamos $G(t) = F(\phi(t))$. (1)

Probaremos que $G(t)$ es la integral indefinida de la función $f(\phi(t))\phi'(t)$, esto es, que se cumple

$$\frac{dG}{dt}(t) = f(\phi(t))\phi'(t) \quad (2)$$

o equivalentemente $G(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ (3)

En efecto, se tiene $\frac{dG}{dt}(t) = \frac{d}{dt} F(\phi(t)) = \frac{dF}{dt}(x) \quad (x = \phi(t))$

$$= \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (\text{regla de la cadena})$$

$$= f(x) \cdot \phi'(t) \quad \left[\begin{array}{l} \text{pues } \frac{dF}{dx} = f(x) \text{ ya que} \\ F(x) = \int f(x)dx, \text{ y } \frac{dx}{dt} = \phi'(t) \end{array} \right]$$

$$= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t), \text{ lo cual demuestra (2).}$$

Para concluir, si $x = \phi(t)$ tenemos

$$\int f(x)dx = F(x) = F(\phi(t)) = G(t) \quad (\text{por (1)})$$

$$= \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad (\text{por (3)}).$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int x\sqrt{x-2} dx$.

Solución Sea $t = \sqrt{x-2}$. Luego $x = t^2+2$ y $dx = 2t dt$.

Entonces

$$I = \int (t^2+2)t(2t dt) = \int (2t^4 + 4t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + C,$$

y sustituyendo t

$$I = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C.$$

Ejemplo 2

Hallar $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}}$ efectuando la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Solución

Tenemos

Caso 1. $x > 2$ Tenemos $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Luego

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 4}} = \int -\frac{dt}{\sqrt{1 - 4t^2}}$$

(de $x > 2$ se tiene $t > 0$ y $\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4} = \frac{1}{t} \sqrt{1 - 4t^2}$)

Por lo tanto, $I = -\frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = -\frac{1}{2} \arccos(2t) + C$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C \quad \text{si } x > 2.$$

(se usó $-\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos(u) + C$)

Caso 2. $x < -2$ Tenemos $-x < 2$ y haciendo el cambio de variable $y = -x$ se tiene

$$I = \int \frac{-dy}{(-y)\sqrt{(-y)^2 - 4}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 4}} \quad \text{con } y > 2,$$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{y}\right) + C \quad \text{(por el caso (1))}$$

$$= \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{x}\right) + C.$$

En resumen

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C & \text{si } x > 2 \\ \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{x}\right) + C & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

o en forma abreviada

$$I = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{|x|}\right) + C \quad \text{si } x^2 > 2$$

2.2 Sustituciones Trigonómicas

A menudo es posible realizar el cálculo de una integral efectuando una sustitución trigonométrica lo que da lugar a una integral que contiene funciones trigonométricas.

1. La integral contiene el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \cos t$ y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$.

2. La integral contiene el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \sec t$ y $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$.

3. La integral contiene el radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, $a > 0$.

Entonces se hace la sustitución $x = a \tan t$ y $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$.

Nota

Sobre la sustitución trigonométrica para el caso $\sqrt{x^2 - a^2}$

Cuando se hace una sustitución trigonométrica del tipo 2, se procede de la siguiente manera:

- (1) se encuentra la integral cuando $x > a$;
 - (2) se encuentra la integral cuando $x < -a$, para lo cual se hace el cambio de variable $y = -x$, y así el cálculo de la integral se reduce al caso anterior;
- y
- (3) la integral resultante se compone entonces de dos integrales, una para el intervalo $x > a$ y otra para el intervalo $x < -a$. (Ver ej. 2). No obstante, a veces estas dos integrales pueden resultar iguales y dar una sola expresión para la integral buscada. (Ver ej. 3).

Ejemplo 1 Mediante sustituciones trigonométricas hallar

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-x^2}}.$$

Solución

Sea $x = \sqrt{3} \cos t$. Luego $\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3} \sin t$, $dx = -\sqrt{3} \sin t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\sqrt{3} \cos t)^3 (-\sqrt{3} \sin t dt)}{\sqrt{3} \sin t} = -3\sqrt{3} \int \cos^3 t dt \\ &= -3\sqrt{3} \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= -3\sqrt{3} \int \cos t dt + 3\sqrt{3} \int \sin^2 t d(\sin t) \\ &= -3\sqrt{3} \sin t - \sqrt{3} \sin^3 t + C, \end{aligned}$$

y sustituyendo $\sin t = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} I &= -3\sqrt{3-x^2} + \frac{1}{3}(3-x^2)^{3/2} + C, \\ &= -2\sqrt{3-x^2} - \frac{x^2}{3}\sqrt{3-x^2} + C \\ &\quad \text{(pues } (3-x^2)^{3/2} = (3-x^2)\sqrt{3-x^2} \text{)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$.

Solución

Caso 1. $x > a$. Sea $x = a \sec t$. (1)

Luego $dx = a \sec t \tan t dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a^3 \sec^3 t a \tan t} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{a^3} \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{t}{2a^3} + \frac{\sin 2t}{4a^3} + C \\ &= \frac{t}{2a^3} + \frac{\sin t \cos t}{2a^3} + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora debemos despejar t de la ecuación (1) y reemplazarlo en (2).

De (1) se tiene $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{a}{x}$, $\sec t = \frac{x}{a}$, $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$,

y sustituyendo en (2)

$$I = \frac{1}{2a^3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2}, \quad \text{si } x > a.$$

Caso 2. $x < -a$. Entonces $-x > a$, y haciendo el cambio de variable $y = -x$ se cumple $y > a$, y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-dy}{(-y)^3 \sqrt{(-y)^2 - a^2}} = \int \frac{dy}{y^3 \sqrt{y^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{2a^3} \arcsin \frac{y}{a} + \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{2a^2 y^2} \quad (\text{por el caso (1), ya que } y > a) \\ &= \frac{1}{2a^3} \arcsin \left(-\frac{x}{a}\right) + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2} \quad \text{si } x < -a. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Probar la fórmula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$.

Solución

Caso 1. $x > a$. Sea $x = a \sec t$.

Luego $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$, $dx = a \sec t \tan t dt$,

$$y \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a \tan t} = \int \sec t dt$$

$$= \ln |\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C, \quad \text{si } x > a$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1 \quad \text{donde } C_1 = C - \ln a.$$

Caso 2. $x < -a$. Entonces $-x > a$ y haciendo el cambio de variable $y = -x$, se tiene $y > a$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = - \ln |y + \sqrt{y^2 - a^2}| + C \\ &\quad \text{(por el caso (1))} \\ &= - \ln |-x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} \right| + C, \quad \text{(racionalizando)} \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1, \quad \text{si } x < -a, \\ &\quad \text{donde } C_1 = C - \ln a^2 \end{aligned}$$

Resumiendo, en ambos casos se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

Ejemplo 4 Hallar $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Solución

Sea $x = a \tan t$. Luego se tiene $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$,
 $dx = a \sec^2 t dt$.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \sec^3 t dt = a^2 \left[\frac{\sec t \tan t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \tan t|}{2} \right] + C$$

(ver ej. 4, pág.51)

y reemplazando $\tan t$ y $\sec t$

$$= \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|}{2} + C.$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int (x^2 + 2x + 3) \cos 2x \, dx$.

SOLUCION Tenemos

$$I = (x^2 + 2x + 3) \frac{\text{sen } 2x}{2} - \int \frac{(2x+2)\text{sen } 2x}{2} dx$$

(tomando $u = x^2 + 2x + 3$ y $dv = \cos 2x \, dx$, $v = -\frac{\text{sen } 2x}{2}$)

Calculamos la última integral

$$\begin{aligned} \int (x+1)\text{sen } 2x \, dx &= (x+1) \frac{(-\cos 2x)}{2} - \int \frac{(-\cos 2x)}{2} dx \\ &\text{(tomando } u = x+1 \text{ y } dv = \text{sen } 2x \, dx, v = -\frac{\cos 2x}{2}\text{)} \\ &= -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \text{sen } 2x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \frac{(x^2 + 2x + 3)\text{sen } 2x}{2} + \frac{(x+1)\cos 2x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + C \\ &= \frac{(2x^2 + 4x + 5)\text{sen } 2x}{4} + \frac{(x+1)\cos 2x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$.

SOLUCION

$$I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

(tomando $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ y $dv = dx$, entonces $v = x$,

$$du = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$\text{Luego } I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

PROBLEMA 6

Calcular $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx.$

SOLUCION

$$I = (x^2 - 2x + 5)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(2x - 2)dx$$

(tomando $u = x^2 - 2x + 5$ y $dv = e^{-x} dx$, $v = -e^{-x}$)

Calculamos la segunda integral

$$\int e^{-x}(2x - 2)dx = (2x - 2)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})2 dx$$

(tomando $u = 2x - 2$ y $dv = e^{-x} dx$)

$$= -2xe^{-x} + C.$$

Luego $I = -(x^2 + 5)e^{-x} + C.$

PROBLEMA 7 Encontrar $I = \int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^2}$

SOLUCION

$$I = \frac{-x^2}{2(x^2 + a^2)} + \int \frac{2x dx}{2(x^2 + a^2)}$$

(tomando $u = x^2$ y $dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $v = \frac{-1}{2(x^2 + a^2)}$)

$$= \frac{-x^2}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

PROBLEMA 8

Hallar $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$$

(tomando $u = e^{ax}$ y $dv = \operatorname{sen} bx \, dx$, $v = -\frac{\operatorname{sen} bx}{b}$)

Pero

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}(-\cos bx)}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} (-\cos bx) dx$$

(tomando $u = e^{ax}$ y $dv = \operatorname{sen} bx \, dx$; $v = -\frac{\cos bx}{b}$)

$$= -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} I$$

Luego $I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$

de donde $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$.

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int x^3 \sqrt{1 + 2x^2} \, dx$.

SOLUCION Tomamos $u = x^2$ y $dv = x \sqrt{1 + 2x^2} \, dx$,

$$v = \frac{1}{6} (1 + 2x^2)^{3/2}.$$

$$I = \frac{x^2 (1 + 2x^2)^{3/2}}{6} - \frac{1}{3} \int (1 + 2x^2)^{3/2} x \, dx$$

$$= \frac{x^2 (1 + 2x^2)^{3/2}}{6} - \frac{(1 + 2x^2)^{5/2}}{30} + C$$

$$= \frac{(3x^2 - 1)(1 + 2x^2)^{3/2}}{30} + C.$$

PROBLEMA 10

Encontrar $I = \int \frac{x^2 dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$.

SOLUCION Observemos que

$$d(x \cos x - \operatorname{sen} x) = (\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x) dx = -x \operatorname{sen} x dx$$

Luego tomando $u = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, $dv = \frac{x \operatorname{sen} x}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} dx$,

$v = \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x}$, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x \operatorname{sen} x dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x} - \int \frac{(\operatorname{sen} x - x \cos x) dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x) \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{x}{\operatorname{sen} x (x \cos x - \operatorname{sen} x)} - \cot x + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int x^2 \operatorname{sen}^2 x dx$.

SOLUCION De $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ tenemos

$$I = \frac{1}{2} \int (x^2 - x^2 \cos 2x) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x dx .$$

Calculamos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} - \int x \operatorname{sen} 2x dx \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} - \left[\frac{-x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx \right] \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{(2x^2 - 1) \operatorname{sen} 2x}{8} - \frac{x \cos 2x}{4} + C . \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int x e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION

$$I = -x e^x \cos x + \int (e^x + x e^x) \cos x \, dx$$

(tomando $u = x e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$; $v = -\cos x$)

$$= -x e^x \cos x + [(e^x + x e^x) \operatorname{sen} x - \int (2e^x + x e^x) \operatorname{sen} x \, dx]$$

(tomando $u = e^x + x e^x$, $dv = \cos x \, dx$).

$$= e^x (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - x \cos x) - 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx - I$$

$$\text{Luego } I = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - x \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \quad (1)$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\ &= -e^x \cos x + [e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx] \end{aligned}$$

$$\text{de donde } \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C,$$

y sustituyendo en (1) resulta

$$I = \frac{1}{2} e^x (x \operatorname{sen} x - x \cos x + \cos x) + C.$$

PROBLEMA 13 Hallar $I = \int \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \, dx$

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int x \sec^2 \frac{x}{2} \, dx + \int \tan \frac{x}{2} \, dx \\ &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} \, dx + \int \tan \frac{x}{2} \, dx = x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Calcular $I = \int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

SOLUCION

$$I = -\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

(tomando $u = x$ y $dx = \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, $v = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}$)

$$= -x \operatorname{cosec} x + \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C.$$

NOTA $\operatorname{cosec} x - \cot x = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$.

PROBLEMA 15 Encontrar $I = \int \ln^2 x dx$.

SOLUCION Tenemos $u = \ln^2 x$, $dv = dx$, $v = x$

Se tiene $I = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$

Pero por el problema (3) $\int \ln x dx = (x - 1) \ln x + C$.

Luego $I = x \ln^2 x - 2(x - 1) \ln x + C$.

PROBLEMA 16 Calcular $I = \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$.

SOLUCION

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} x dx \quad (\text{tomando } u = \operatorname{sen}(\ln x), dv = dx)$$

y calculando la segunda integral

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)x}{x} dx$$

(tomando $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$)

Luego $I = x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$,

de donde $I = \frac{x}{2} [\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.

PROBLEMA 17

Encontrar $I = \int x^3 e^{-x/3} dx$

SOLUCION

$$I = x^3 (-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3})(3x^2) dx$$

(tomando $u = x^3$ y $dv = e^{-x/3} dx$, $v = -3e^{-x/3}$)

$$= -3x^3 e^{-x/3} + 9 \int x^2 e^{-x/3} dx$$

Pero $\int x^2 e^{-x/3} dx = x^2 (-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3})(2x) dx = -3x^2 e^{-x/3} + 6 \int x e^{-x/3} dx$

$$= -3x^2 e^{-x/3} + 6 [x(-3e^{-x/3}) - \int (-3e^{-x/3}) dx]$$

$$= -3x^2 e^{-x/3} - 18x e^{-x/3} - 54 e^{-x/3} + C.$$

Luego $I = -3e^{-x/3} [x^3 + 9x^2 + 54x + 162] + C.$

PROBLEMA 18 Hallar $I = \int \frac{\operatorname{arc} \cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

SOLUCION Hagamos el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$ y $dx = 2t dx$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \int \frac{\operatorname{arc} \cot t}{t} (2t dt) = 2 \int \operatorname{arc} \cot t dt \\ &= 2 [t \operatorname{arc} \cot t - \int \left(\frac{-1}{1+t^2} \right) t dt] \\ &\quad \text{(tomando } u = \operatorname{arc} \cot t, \quad dv = dt) \\ &= 2 [t \operatorname{arc} \cot t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2)] + C \\ &= 2 \sqrt{x} \operatorname{arc} \cot \sqrt{x} + \ln(1+x) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Encontrar $I = \int \sec^5 x \, dx$.

SOLUCION

Tomamos $u = \sec^3 x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$, $v = \tan x$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \sec^3 x \tan x - \int (\tan x) (3 \sec^2 x) \sec x \tan x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \tan^2 x \sec^3 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 I + 3 \int \sec^3 x \, dx, \end{aligned}$$

y despejando I

$$I = \frac{1}{4} \sec^3 x \cdot \tan x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx.$$

Pero $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$

(ver ej. 4, pág 51)

y por lo tanto

$$I = \frac{1}{8} \sec x \cdot \tan x \cdot (2 \sec^2 x + 3) + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

PROBLEMA 20

Calcular $I = \int \arcsen x \, dx$.

SOLUCION

$$I = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

(tomando $u = \arcsen x$, $dv = dx$)

$$= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2)$$

$$= x \arcsen x + (1-x^2)^{1/2} + C.$$

PROBLEMA 21 Calcular $I = \int x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION Hagamos el cambio de variable $t = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$. Luego
 $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t \, dt$ y

$$\begin{aligned} I &= \int t \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int t \operatorname{sen} 2t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) dt \right] \\ &\quad \text{(tomando } u = t, \, dv = \operatorname{sen} 2t \, dt, \, v = -\frac{\cot 2t}{2}) \\ &= -\frac{t \cos 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{8} + C \\ &= -\frac{t}{4} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t) + \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{4} + C \\ &= -\frac{(1 - 2x^2)}{4} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 22 Calcular $I = \int x \sec^2 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= x \tan x - \int \tan x \, dx \quad \text{(tomando } u = x, \, dv = \sec^2 x \, dx, \, v = \tan x) \\ &= x \tan x - \ln |\sec x| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 23 Hallar $I = \int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= 2 \int t e^t \, dt = 2 \left[t e^t - \int e^t \, dt \right] \\ &\quad \text{(tomando } u = t, \, dv = e^t \, dt, \, v = e^t) \\ &= e(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 24 Calcular $I = \int x^2 \operatorname{sen} hx \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= x^2 \cos hx - 2 \int x \cos hx \, dx \\
 &\quad \text{(tomando } u = x^2, \, dv = \operatorname{sen} hx \, dx, \, v = \cos hx) \\
 &= x^2 \cos hx - 2 \left[x \operatorname{sen} hx - \int \operatorname{sen} hx \, dx \right] \\
 &\quad \text{(tomando } u = x, \, dv = \cos hx \, dx, \, v = \operatorname{sen} hx) \\
 &= x^2 \cos hx - 2x \operatorname{sen} hx + 2 \cos hx + C \\
 &= (x^2 + 2) \cos hx - 2x \operatorname{sen} hx + C.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 25 Hallar $I = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} \, dx$.

SOLUCION

Tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int x \ln(1-x) \, dx - \int x \ln(1+x) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(1-x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-dx}{1-x} \right] - \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x} \right] \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1+x} \\
 \text{Pero } \int \frac{x^2 \, dx}{1-x} &= \int \frac{-(1-x^2) + 1}{1-x} \, dx = - \int (1+x) \, dx + \int \frac{dx}{1-x} \\
 &= -x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x) + C_1 \\
 \text{y } \int \frac{x^2 \, dx}{1+x} &= \int \frac{-(1-x^2) + 1}{1+x} \, dx = - \int (1-x) \, dx + \int \frac{dx}{1+x} \\
 &= -x + \frac{x^2}{2} + \ln(1+x) + C_2.
 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $I = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} - x + C$.

PROBLEMA 26 Hallar $I = \int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \arcsen \sqrt{x}$.

Luego $\sen t = \sqrt{x}$, $\sqrt{1-x} = \cos t$, $x = \sen^2 t$, $dx = 2 \sen t \cos t dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t \sen t \cos t dt}{\cos t} = 2 \int t \sen t dt \\ &= 2 [-t \cot t + \int \cos t dt] = -2t \cos t + 2 \sen t + C. \end{aligned}$$

Finalmente, $I = -2 \arcsen \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} + C$.

3.2 Integración por sustitución

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$

SOLUCION Hagamos $t = \sqrt{x+1}$. Luego $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t^2-1)t dt}{t} = 2 \int (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 - 2t + C \\ &= \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

SOLUCION Hagamos $t = 1 + \sqrt{x}$. Luego $x = (t-1)^2$ y $dx = 2(t-1)dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} = 2t - 2 \ln t + C. \\ &= 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln (1 + \sqrt{x}) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln (1 + \sqrt{x}) + C_1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Calcular $I = \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$ haciendo $t = \operatorname{sen} x$.

SOLUCION Tenemos $dt = \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C \\ &= \ln |\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}| + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Hallar $I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx$.

SOLUCION Hagamos $y = \sqrt{e^x + 1}$.

Luego $e^x = y^2 - 1$, $x = \ln(y^2 - 1)$, $dx = \frac{2y \, dy}{y^2 - 1}$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(y^2 - 1)^2 2y}{y(y^2 - 1)} \, dy = 2 \int (y^2 - 1) \, dy \\ &= \frac{2}{3} y^3 - 2y + C = \frac{2}{3} y(y^2 - 3) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{e^x + 1} \cdot (e^x - 2) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \, dx$.

SOLUCION Sea $t = 1 + \sqrt{x}$. Luego $x = (t-1)^2$ y $dx = 2(t-1)dt$.

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 + (t-1)^2}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2 \int (t^2 - 3t + 4 - \frac{2}{t}) dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 - 3t^2 + 8t - 4 \ln t + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \sqrt{x})^3 - 3(1 + \sqrt{x})^2 + 8(1 + \sqrt{x}) - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 - x + 4 \sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C_1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

SOLUCION Completando cuadrados

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b) &= x^2 - (a+b)x + ab = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab \\ &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^2 - A^2,\end{aligned}$$

donde $t = x - \frac{a+b}{2}$ y $A = \frac{a-b}{2}$, $dt = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - A^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - A^2} \right| + C \\ &= \ln \left| x - \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)} \right| + C.\end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int \sqrt{25 - 9x^2} dx$.

SOLUCION Hagamos $3x = 5 \cos t$, $\sqrt{25 - 9x^2} = 5 \operatorname{sen} t$ y $dx = -\frac{5}{3} \operatorname{sen} t dt$. Luego

$$\begin{aligned}I &= -\frac{25}{3} \int \operatorname{sen}^2 t dt = -\frac{25}{3} \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= -\frac{25}{6} t + \frac{25}{12} \operatorname{sen} 2t + C = -\frac{25}{6} t + \frac{25}{6} \operatorname{sen} t \cos t + C \\ &= -\frac{25}{6} \arccos \frac{3x}{5} + \frac{x}{2} \sqrt{25 - 9x^2} + C.\end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar la siguiente integral $\int \frac{\operatorname{arc} \tan x}{1+x^2} dx$.

SOLUCION Sea $t = \operatorname{arc} \tan x$.

Luego $x = \tan t$, $1+x^2 = \sec^2 t$ y $dx = \sec^2 t dt$.

Se tiene entonces

$$\int \frac{\operatorname{arc} \tan x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \tan x)^2 + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \sec x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx$$

Sea $u = \sec x + \tan x$. Luego $du = \sec x (\tan x + \sec x) dx$ y por lo tanto

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

PROBLEMA 10 Hallar $I = \int \sec^5 x \tan^5 x \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^4 x \tan^4 x \sec x \tan x \, dx \\ &= \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \tan x \, dx. \end{aligned}$$

Sea $u = \sec x$. Luego $du = \sec x \tan x \, dx$ y se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int u^4 (u^2 - 1)^2 \, du = \int (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du = \frac{u^9}{9} - \frac{2}{7} u^7 + \frac{u^5}{5} + C \\ &= \sec^5 x \left(\frac{\sec^4 x}{9} - \frac{2}{7} \sec^2 x + \frac{1}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Calcular $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{4 - \ln^2 x}}$.

SOLUCION Sea $t = \ln x$. Luego $dt = \frac{dx}{x}$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsen \frac{t}{2} + C \\ &= \arcsen \left(\frac{\ln x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \operatorname{cos}^2 x}$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{b^2} \int \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + \left(\frac{a}{b} \tan x\right)^2}$$

Sea $t = \frac{a}{b} \tan x$. Luego $dt = \frac{a}{b} \sec^2 x \, dx$ y se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b^2} \int \frac{\frac{b}{a} \, dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \tan t + C \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 13 Hallar $I = \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{1+x}]^{1/2}}$.

SOLUCION Sea $t = 1 + \sqrt{1+x}$.

Luego $x = (t-1)^2 - 1$ y $dx = 2(t-1)dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t-1)dt}{t^{1/2}} = 2 \int (t^{1/2} - t^{-1/2}) \, dt \\ &= \frac{4}{3} t^{3/2} - 4t^{1/2} + C = \frac{4}{3} t^{1/2} (t-3) + C \\ &= \frac{4}{3} (1 + \sqrt{1+x})^{1/2} \cdot (\sqrt{1+x} - 2) + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$.

SOLUCION Sea $t = x^2$, $dt = 2x \, dx$. Luego

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 + C.$$

PROBLEMA 15 Calcular $I = \int \frac{dx}{1 + \cos 8x}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2 \cos^2 4x} = \frac{1}{2} \int \sec^2 4x \, dx = \frac{1}{8} \int \sec^2 4x \, d(4x) \\ &= \frac{1}{8} \tan 4x + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16 Hallar $I = \int \frac{dx}{3 + \sqrt{1+2x}}$.

SOLUCION Sea $t = 3 + \sqrt{1+2x}$.

Luego $2x = (t-3)^2 - 1$ y $dx = (t-3)dt$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(t-3)dt}{t} = t - 3 \ln t + C \\ &= \sqrt{1+2x} - 3 \ln(3 + \sqrt{1+2x}) + C_1 . \end{aligned}$$

PROBLEMA 17 Hallar $I = \int x^5 \sqrt{1+x^3} \, dx$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{1+x^3}$, $x^3 = t^2 - 1$ y $3x^2 \, dx = 2t \, dt$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 \, dx \\ &= \frac{2}{3} \int (t^2 - 1) t^2 \, dt = \frac{2}{3} \int (t^4 - t^2) \, dt \\ &= \frac{2}{15} t^5 - \frac{2}{9} t^3 + C \\ &= \frac{2}{15} (1+x^3)^{5/2} - \frac{2}{9} (1+x^3)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 18 Calcular $I = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

SOLUCION Sea $x = a \tan t$, $dx = a \sec^2 t dt$. Luego

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{\operatorname{sen} t}{a^2} + C$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

PROBLEMA 19 Calcular $I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$.

SOLUCION

PASO 1 Hagamos $t = \frac{1}{x}$. Entonces $x = \frac{1}{t}$ y $dt = -\frac{dx}{x^2}$. Luego

$$I = - \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt.$$

PASO 2 Hagamos $t = \cos u$. Entonces $dt = -\operatorname{sen} u du$.

$$I = - \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \int \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \operatorname{sen} u du$$

$$= 2 \int \tan \frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{u}{2} du = 2 \int \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} du$$

$$= \int (1 - \cos u) du = u - \operatorname{sen} u + C = \arccos t - \sqrt{1-t^2} + C$$

$$= \arccos \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} + C.$$

PROBLEMA 20 Calcular $I = \int \frac{dx}{x^{3/2} - x^{5/2}}$.

SOLUCION Sea $x = t^2$. Luego $dx = 2t dt$ y

$$I = 2 \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = 2 \int \frac{(1-t^2) + t^2}{t^2(1-t^2)} dt = 2 \int t^{-2} dt + 2 \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= -2t^{-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C.$$

PROBLEMA 21 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$. Luego $x = (t^2 - 1)^2$ y $dx = 4(t^2 - 1)t dt$, y por tanto

$$I = 4 \int (t^2 - 1) dx = \frac{4t^3}{3} - 4t + C = \frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{3/2} - 4(\sqrt{x} + 1)^{1/2} + C.$$

PROBLEMA 22 Encontrar $\int \frac{x dx}{[1 + x^2 + (1 + x^2)^{3/2}]^{1/2}}$

SOLUCION

Sea $t = 1 + x^2$. Luego $dt = 2x dx$ y

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2} (1 + t^{1/2})^{1/2}}$$

Haciendo ahora $t^{1/2} = u$ y $dt = 2u du$ se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{2u du}{u(1+u)^{1/2}} = \int \frac{du}{(1+u)^{1/2}} = 2(1+u)^{1/2} + C \\ &= 2(1+t^{1/2})^{1/2} + C = 2\sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

PROBLEMA 23 Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

SOLUCION

Completando cuadrados $x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$

Hagamos $t = x - \frac{1}{2}$. Luego $dt = dx$ y

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} = \arcsen \left(\frac{t}{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \arcsen (2t) + C = \arcsen (2x - 1) + C.$$

PROBLEMA 24 Aplicando sustitución trigonométrica encontrar las siguientes integrales

$$(1) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

SOLUCION

(1) Hagamos $x = \cos t$, $1-x^2 = \text{sen } t$ y $dx = -\text{sen } t dt$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= - \int \frac{\cos^2 t \text{ sen } t dt}{\text{sen } t} = - \int \cos^2 t dt = - \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2t}{4} + C = - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } t \cos t}{2} + C \\ &= - \frac{1}{2} \arccos x - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

(2) **Caso 1. $x > 1$.** Hagamos $x = \sec t$, $\sqrt{x^2-1} = \tan t$ y $dx = \sec t \tan t dt$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sec t \tan t dt}{\sec t \tan t} = \int dt = t + C \\ &= \arccos x + C, \qquad \text{cuando } x > 1. \end{aligned}$$

Caso 2. $x < -1$. Hagamos $t = -x$. Luego $t > 1$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dt}{t \sqrt{t^2-1}} = \arccos t + C \quad (\text{por el caso 1}). \\ &= \arccos(-x) + C, \quad \text{cuando } x < -1. \end{aligned}$$

4 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Calcular $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

Rpta. $\frac{-x \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C.$

PROBLEMA 2 Hallar $\int 3^x \cos x \, dx$.

Rpta. $\frac{3^x (\operatorname{sen} x + \ln 3 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 3)^2} + C.$

PROBLEMA 3 Hallar $\int \sqrt{\frac{3+x}{1-x}} \, dx$.

Sugerencia Hágase $t = \sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$.

Rpta. $4 \operatorname{arc} \tan \sqrt{\frac{3+x}{1-x}} - \sqrt{(3+x)(1-x)} + C.$

PROBLEMA 4 Integrando por sustitución calcular

$$\int x^2 (x+3)^{11} \, dx.$$

Sugerencia Hágase $t = x+3$, $x = t-3$ y $dx = dt$.

Rpta. $\frac{(x+3)^{14}}{14} - \frac{6(x+3)^{13}}{13} + \frac{3(x+3)^{12}}{4} + C.$

PROBLEMA 5

Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

Rpta. $\frac{2\sqrt{\cos x}}{5} (\cos^2 x - 5) + C.$

PROBLEMA 6

Calcular $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$

Sugerencia

Considérese $x = \tan t,$
 $dx = \sec^2 t dt.$

Rpta. $\sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} \right| + C.$