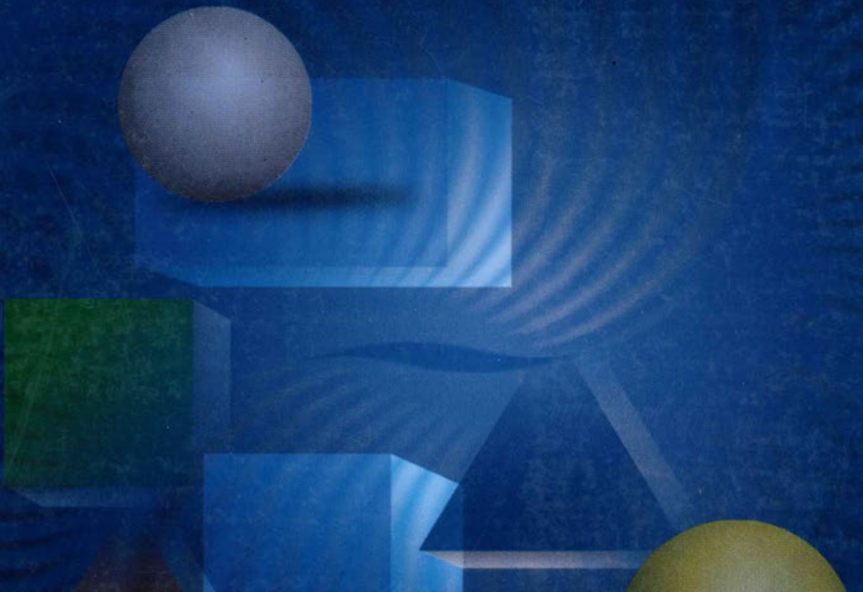
ÓSCAR TRELLES MONTERO
DIÓGENES ROSALES PAPA

Introducción a la LÓGICA

SEGUNDA EDICIÓN

Colaboradores
Juan Montealegre y Miguel Fuentes



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ FONDO EDITORIAL 2000

Introducción a la Lógica busca familiarizar al lector con el manejo de los conceptos básicos de la lógica proposicional y cuantificacional, relacionando en estas dos partes los aspectos semánticos y sintácticos. La primera parte del texto, desarrollada por el profesor Óscar Trelles Montero, contiene la vinculación del lenguaje simbólico con los lenguajes naturales, tanto en la lógica proposicional como en la lógica cuantificacional. El instrumento de la decisión usado en esta parte es el método de los diagramas semánticos. La segunda parte, expuesta por el profesor Diógenes Rosales Papa, aborda el método de la deducción natural, con el objeto de demostrar las principales fórmulas válidas de la lógica proposicional y cuantificacional.

Los autores gozan de una amplia experiencia en la enseñanza universitaria. Óscar Trelles es docente desde 1980 en la Pontificia Universidad Católica del Perú, donde estudió Filosofía y Matemática. Tiene en preparación un texto sobre Lógica Modal y ha publicado artículos sobre filosofía de la lógica. Diógenes Rosales ha sido profesor en la Universidad Nacional de San Marcos (1968-1998) y en la Universidad Católica desde 1970. Estudió filosofía en la UNMSM y en la PUCP; es autor de *Introducción a la Lógica* (Lima: Amaru, 1994), *Lógica* (UNMSM, 1996) y de artículos sobre filosofía de la lógica.

Esta segunda edición de *Introducción a la Lógica* que presentamos a los lectores ha sido debidamente revisada y corregida, así como se ha procurado hacer más clara la exposición de los temas.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Óscar Trelles Montero y Diógenes Rosales Papa

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

SEGUNDA EDICIÓN

Colaboradores:
Juan Montealegre y Miguel Fuentes

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 2000

Primera edición: 1988
Segunda edición: febrero 2000

Carátula: AVA Diseños

Diagramación: Lourdes Rodríguez Matysek
Manuel Aristondo Gárate

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Av. Universitaria, cuadra 18, San Miguel. Telefax: 460-0872
Telfs; 460-2870, 460-2291, anexos 220-356

ISBN: 9972-1-0192-4
Hecho el depósito legal: 1501052000-0469

Impreso en el Perú - Printed in Peru

Al maestro y propulsor de la lógica en el Perú
Francisco Miró Quesada Cantuarias

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

El libro intenta conducir al lector, en una primera aproximación, a los temas centrales de la lógica. Después del redescubrimiento, antes de empezar el siglo, de la capacidad de explorar nuevos campos y aplicar nuevos métodos en la investigación lógica, esta ciencia ha crecido en muchas direcciones. Sin pretender negar, en nada, la multitud de vectores diferentes en los que actualmente se desarrolla la lógica, creemos que un campo continúa siendo básico: la lógica de primer orden. En el libro apuntamos a introducir al lector en ella a través del cumplimiento de dos objetivos: por un lado, la presentación de las nociones más importantes de la lógica proposicional y cuantificacional; y, por otro, la familiarización con algunos métodos y conceptos corrientes hoy en día. No pretendemos cubrir toda la lógica de primer orden, sino aproximarnos a ella por dentro a través de sus temas más elementales.

Al concebir el libro hemos privilegiado los aspectos metodológicos compatibles con su nivel introductorio, con este fin hemos dividido el libro en dos partes: una semántica (capítulos I al VII) y otra sintáctica (capítulos VIII y IX), de modo tal que en cada una se cubran los mismos temas, lógica proposicional y cuantificación uniforme, con los enfoques distintos propios de cada parte. La primera parte estuvo a cargo de Óscar Trelles y, la segunda, de Diógenes Rosales.

La parte uno, la que presenta los aspectos semánticos, se divide a su vez en dos partes; en ambas se utiliza el método de los diagramas o árboles semánticos. Hemos elegido este método debido a que la experiencia docente nos ha mostrado que permite desmecanizar la aproximación a las consideraciones semánticas por parte del lector, comparado con el más tradicional de las tablas de verdad; y, por otro lado, al ser aplicable tanto a la parte proposicional como a la cuantificacional, brinda unidad a toda la primera parte (en el apéndice se esboza su aplicación a la última parte del libro).

Al colocar el tratamiento semántico al inicio del libro y darle especial énfasis nos hemos guiado, fundamentalmente, por nuestra experiencia en el dictado del curso introductorio en los Estudios Generales de la Universidad Católica. En general, la presentación simbólica de la lógica, propia de nuestro siglo, su carácter "matemático", puede hacer, en especial para lectores no acostumbrados al quehacer matemático, que lo específico de la lógica –la transmisión de la verdad– se reduzca a un segundo plano o pase totalmente desapercibido, llegándose a confundir la lógica con una disciplina matemática más. El emplear métodos matemáticos en física no convierte a la física en un capítulo de la matemática. Del mismo modo, la lógica no puede renunciar a su tema: la exploración formal de la verdad, investigación que se enriquece con los horizontes que le permite abordar el empleo de nuevos métodos, pero distinta de sus métodos. El enfoque semántico, al dar significado a fórmulas abstractas y resaltar el problema del sentido del manejo de cadenas de símbolos casi algebraicos, permite al lector entender que ése, y no otro, es el problema que anima y orienta el quehacer lógico. Marca el carácter de disciplina afín a la filosofía y a la preocupación más general, no sólo formal, por la verdad propia de los seres humanos.

El orden seguido en la exposición de la primera parte es el siguiente: en la parte proposicional primero presentamos el lenguaje simbólico que se utilizará, después lo interpretamos en términos de su capacidad para manejar los valores de verdad. Es decir, hasta aquí se trata de una aproximación bastante abstracta al tema, y sólo en el tercer capítulo abordamos su vinculación con los lenguajes naturales; recién ahí aparece el puente con el quehacer cotidiano del hombre. Este vínculo se presenta como un problema de traducción, o de adecuación de los conceptos desarrollados en los primeros capítulos para recoger algunos aspectos de nuestro quehacer cotidiano. No hemos querido seguir el camino más común, partir de algunos aspectos del lenguaje natural para ir hacia la lógica matemática por una suerte de "abstracción" o reducción, pues este camino puede dejar la impresión de que la única lógica "real" es aquella que hemos abstraído. Nuestra presentación, de un esquema lógico previo y la búsqueda de su adecuación a ciertas formas de razonamiento "natural", esperamos que deje al lector dispuesto a aceptar otras formas lógicas posibles, que puedan servir de modelo para algunas actividades de la razón y sean distintas de las presentadas, asimismo debe dejarlo preparado para reconocer los límites de este tipo de tratamiento formal. Pues, es sin duda un tema central, en qué medida tal o cual forma lógica es más apropiada o es la única apropiada. No corresponde discutirlo en un nivel introductorio, pues pocas herramientas se tendrían para valorar las distintas posiciones, pero sí es importante que quede abierto el problema. Luego, presentamos las nociones de consecuencia semántica, implicación y equivalencia proposicional resaltando su interrelación y terminamos mostrando su aplicación a algunas inferencias concretas. El segundo tramo de la parte semántica aborda la lógica cuantificacional en su nivel más elemental, la cuantificación uniforme, repite sin entrar en muchos detalles el orden de presentación de la parte proposicional y termina con la discusión de los supuestos existenciales en las inferencias clásicas de la lógica aristotélica, lo que constituye un excelente campo para probar las bondades de los diagramas semánticos.

El libro en su totalidad consta, como ya señalamos, de dos partes. La segunda, la sintáctica, presenta un sistema de deducción, un método infalible para generar cadenas de símbolos que interpretadas son válidas. No se puede dudar hoy en día de la importancia sustantiva del tratamiento sintáctico, en el que vive el espíritu del *calculus ratiocinator* leibniziano, y donde mejor se pueden apreciar las potencialidades de la matematización en lógica. La necesidad de cubrir ambos temas en un nivel introductorio y en un curso semestral, para el cual se ha pensado el libro, obligan a limitar los temas y la amplitud de la discusión de los que aquí se presentan. No pretendemos agotar un tema, sino introducirnos en él. Así, los interesantes problemas de la metateoría, la discusión de la adecuación entre el tratamiento sintáctico y semántico presentados, o los límites teóricos de cada uno no se tratan en el libro.

La parte dedicada a la deducción, capítulos VIII y IX, trata el problema en dos momentos. En el primero, presentamos el método de deducción natural en la lógica proposicional; hacemos hincapié en la distinción entre reglas de inferencia primitivas y derivadas; y, al final, añadimos varias reglas "adicionales" para facilitar las deducciones. Así, se espera haber conciliado un interés más teórico con la necesidad de lograr en el principiante un sentimiento de comodidad al manejar un sistema formal. El último capítulo presenta el sistema ampliado para el manejo de los cuantificadores, centra su atención en el cuidado que debe tenerse de las restricciones en algunas reglas y, nuevamente, presenta un sistema reducido y uno ampliado de reglas. No hemos abundado en el tratamiento de muchas de las leyes del nivel cuantificacional, pues hemos juzgado más pedagógico centrar la atención del lector en el manejo de los cuantificadores y su interrelación con la negación. Hemos añadido un apéndice para mostrar los vínculos entre el sistema de diagramas semánticos y la deducción natural, preparando de este modo el camino para el empleo de los diagramas sintácticos, cuya principal ventaja estriba en su absoluto paralelismo con los diagramas semánticos.

La idea de utilizar el método de los diagramas semánticos en el curso mientras lo dictamos juntos en la Universidad Católica pertenece a nuestro amigo y colega Carlos Cifuentes, hoy en el Brasil; su perseverancia y entusiasmo nos abrieron los ojos a las ventajas del mismo. No queremos dejar de manifestarle nuestro reconocimiento. En toda la redacción contamos con la inapreciable colaboración de los asistentes del curso y Juan Montealegre y Miguel Fuentes, quienes al inicio tuvieron a su cuidado sólo la confección de los ejercicios así como su solución, los que creemos enriquecen notablemente el texto. Más adelante, no sólo se limitaron a estos aspectos sino que se convirtieron, cada vez más, en inapreciables críticos y ayudantes: agudos, implacables e ingeniosos frente a las dificultades; su influencia está presente en todo el texto. No obstante, la presentación que seguimos acá es obra nuestra y, desafortunadamente, no podemos descargar en ninguno de ellos la responsabilidad que nos cabe por sus errores u omisiones. Desde que surgió la idea de confeccionar un texto para el curso introductorio contamos con el apoyo, no sólo material sino moral, del Departamento de Humanidades de la Universidad a través de su Jefe el Dr. Salomón Lerner, deseamos manifestarle nuestra profunda gratitud. Por último, ¿qué decir de nuestros alumnos que durante varios semestres "sufrieron" los primeros borradores y tanteos del texto? Lo que nos enseñaron, y esperamos haber aprendido, es más de lo que podemos agradecerles. Fueron y son causa eficiente y última de este libro.

Lima, junio de 1988

Óscar Trelles M. y Diógenes Rosales P.

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

En esta edición hemos corregido los errores de la primera; errores que una mala pasada electrónica al momento de imprimir generó en demasía. Hemos mantenido el texto con pequeños añadidos o aclaraciones que nos parecían necesarios, pero sin cambiar el sentido. Así, en lo fundamental se trata del mismo libro.

Deseamos agradecer a Mónica Cabrera, Henry Galecio, Hugo Melo, Eliana Mory, Milagros Orbegoso, Rocío Reátegui, Rosa Ana Rojas, Marco Sano y Ruth Zea, quienes tuvieron la ingrata tarea de revisar el texto y nos han permitido corregir múltiples errores. De manera muy especial deseamos agradecer a Estrella Guerra, miembro del fondo editorial, por su especial dedicación para lograr esta segunda edición. Sin embargo, los errores que quedan son de nuestra entera responsabilidad.

Lima, setiembre de 1999

LOS AUTORES

I

CONCEPTOS BÁSICOS

Normalmente, deberíamos empezar con una breve definición de lo que es la lógica. Pero, definir qué es la lógica en tres líneas es una tarea imposible e inútil para nosotros. Imposible, pues con una historia que parte por lo menos desde Aristóteles hace unos 2,500 años y con un desarrollo actual que invade y reexamina campos nuevos y antiguos con nuevas preguntas y métodos, se presenta como prácticamente imposible encontrar un grupo de palabras que quepa en tres líneas, abarque todo lo hecho en 25 siglos y sea capaz de incluir los desarrollos del futuro. Inútil, pues si existieran esas tres líneas sólo le dirían algo a quien ya tuviese una formación lógica y casi nada al que inicia su exploración. Más bien, trataremos, a través del trabajo en un área elemental pero básica de la lógica, de forjarnos una idea de lo que es, de las áreas de investigación que incorpora y de los puntos de vista que adopta. Esperamos que al final el lector haga suyos algunos resultados que le puedan servir, que valore el rigor de la aproximación lógica y logre uno que se adapte a su quehacer, y, sobre todo, que incorpore las ventajas de la aproximación formal.

Bosquejamos y desarrollamos a lo largo del libro la llamada 'lógica de primer orden monádica', que es un campo, en general, no polémico de la misma y aceptado universalmente como los cimientos o, por lo menos, los conocimientos mínimos para adentrarse en otros.

1. LA LÓGICA COMO TEORÍA DE LA INFERENCIA

Desde su origen como disciplina, la lógica está relacionada al tema de la transmisión de la verdad entre proposiciones. La consideración de un ejemplo aclarará lo dicho. Imaginemos un juicio en el que se imputa al acusado un crimen. Asumamos que los hechos que lo rodean, o mejor dicho, lo que se dice de los sucesos que lo rodean son aceptados tanto por el fiscal como por el abogado defensor. En sus alegatos ambos se refieren y utilizan los mismos conocimientos de la situación, pero uno concluye que el acusado es culpable y el otro que es inocente. No hay testigos, por ello la verdad del afirmar la inocencia o la culpabilidad reposa totalmente, no en la comprobación directa de su realización o no por parte del acusado, sino en si su participación o no en el crimen se desprende de la verdad de los hechos conocidos relativos al crimen. ¿En qué medida lo que se afirma de los hechos sostiene la verdad de la acusación o de la defensa?

Como lógicos nos diferenciamos del detective asignado al caso en que nos interesa la "corrección" de los alegatos para concluir en la inocencia o culpabilidad, mientras que al detective, al margen de los alegatos, le interesa descubrir qué fue lo que ocurrió.

La lógica persigue asir de modo firme esta capacidad, peculiar, que tiene la conclusión de una deducción bien hecha, de ser verdadera, no *per se*, sino por su dependencia de los puntos que intervienen en el razonamiento. Por decirlo de alguna manera, nos interesan las leyes de la herencia de la verdad: cómo la verdad de las premisas pasa a la conclusión. Así como en genética, al estudiar las leyes de la herencia de los seres vivos, se postula unos entes, los "genes" transmisores de las características de vida; así nosotros requerimos de unos entes que sean portadores de la verdad (o falsedad). Los llamamos generalmente 'proposiciones', en ocasiones enunciados; y en ambos casos normalmente los asociamos con oraciones afirmativas o negativas.

La lógica no es una ciencia como las otras, en el sentido de que no está interesada en averiguar qué proposiciones referidas al mundo son verdaderas o falsas. Su interés se dirige, más bien, a estudiar en qué casos la verdad de unos 'enunciados' o proposiciones se traslada a otros enunciados o proposiciones diferentes. Por esto la lógica, como las matemáticas, no tiene por objeto algún aspecto del mundo fáctico, como sí lo tienen la zoología o la mineralogía. No se ocupa de los hechos, ni siquiera de aquéllos ligados al hombre como lo hacen la historia o la antropología. Así pues, si el mundo puede considerarse compuesto de cosas, hechos u acontecimientos, poco nos importará en este contexto.

La lógica opera, por así decirlo, al interior de toda ciencia. Una ciencia no es un amasijo de proposiciones u oraciones ciertas o aceptadas, más bien es un conjunto ordenado de tales proposiciones. Ordenado no sólo por las materias que estudia, por el orden que encuentra o cree encontrar en su campo de estudio, sino también por el orden de dependencia lógica que reina entre sus proposiciones.

Las diferentes ciencias que estudian el mundo, en realidad no se ocupan de él en su totalidad. Cada ciencia recorta en la realidad un aspecto al que se aboca. Por ejemplo, la universidad puede estudiarse desde distintos puntos de vista: para la sociología será una institución con determinadas características; al derecho interesará su estatuto jurídico; a la historia, su aparición y desarrollo; a la pedagogía, su posibilidad de transmitir conocimientos, etc. Del mismo modo la lógica, en tanto ciencia, necesita recortar algún aspecto de la realidad que se constituya como su objeto de estudio. La lógica busca dentro del discurso científico, o más generalmente en el lenguaje que rodea a todas las diferentes actividades humanas, algunos aspectos: los relacionados con procesos inferenciales. Es decir, aquellos que involucran el proceso de transmisión de la verdad de una expresión a otra.

Aristóteles decía: "El razonamiento es un argumento en el que establecidas de antemano unas cosas determinadas, otras cosas distintas de ellas se siguen en virtud de ellas necesariamente" (*Tópicos* A 1,100a). Analicemos esta cita, pues en ella encontraremos lo esencial para empezar a hacernos una idea de lo que es la lógica:

a. "...establecidas de antemano unas cosas determinadas...", es decir, al razonar partimos de algo dado; algo cuya verdad es anterior o extraña al razonamiento. Un razonamiento parte aceptando determinados puntos de partida.
b. "...otras cosas distintas de ellas se siguen en virtud de ellas necesariamente". Se generan nuevas proposiciones cuya verdad es fruto del "razonamiento". Es este nexo necesario entre los puntos de partida y la conclusión –que ahora preferimos llamar 'relación de consecuencia lógica' y, en contextos introductorios como el nuestro, 'inferencia'– lo que es materia de los estudios lógicos desde hace más de 2,000 años.

Hay que tener cuidado con el lenguaje que emplea el fundador de la lógica. Cuando habla de razonamientos no debe pensarse que la lógica los estudia como lo hace la psicología, que se interesa por ellos en tanto procesos que ocurren de determinada manera en algunas especies animales. No nos interesa en cuanto proceso fáctico que ocurre en un ser inteligente, sino en la medida en que de la verdad de unas proposiciones podemos afirmar la verdad de una distinta con necesidad, al margen de cómo se realice el proceso en la mente. Por eso, también, es preferible hablar de inferencia.

Para nosotros el problema central de la lógica se tratará en una de sus facetas: la del razonamiento deductivo o razonamiento inferencial deductivo. Dejamos de lado, por ejemplo, el estudio de los procesos inductivos. Lo lejos que se ha avanzado en el análisis de la deducción hace que sea difícil ver la conexión de algunos temas de investigación lógica actual con su lejano origen.

No hablaremos de inferencia deductiva, sino sólo de inferencia a secas. Veamos algunos ejemplos de inferencias:

O estudiamos o desaprobamos el curso.
No estudiamos.
Luego, desaprobamos el curso.

O la invito al cine o a contemplar la puesta del sol.
No la invito al cine.
Luego, la invito a contemplar la puesta del sol.

Que la última proposición se sigue de las dos anteriores en cada ejemplo es obvio sin necesidad de estudiar lógica; como que $1+1=2$ no es un secreto que sólo comparten los matemáticos. Si nos detenemos un momento a compararlas vemos que tienen una forma similar:

O (proposición 1) o (proposición 2).
No (proposición 1).
Luego, (proposición 2).

Basta considerar esta forma general para intuir que al reemplazar los mismos paréntesis, en los mismos lugares, por cualesquiera otras oraciones que expresen proposiciones, llegamos a construir argumentos concretos correctos. La lógica no estudia cada inferencia concreta, sino que gana generalidad contemplando exclusivamente la forma de las mismas. Desde Aristóteles, la lógica occidental está signada por esta preeminencia de lo formal. En el siglo pasado, por influencia del desarrollo de las matemáticas, lógicos como Boole y Frege se dan cuenta de que, para poder considerar los aspectos formales que interesan a la lógica, es necesario además prescindir del lenguaje normal y buscar uno en el que sólo se expresan estos aspectos, los formales. En otras palabras, construir un lenguaje artificial para uso de la lógica. Al hacerlo se trató de que los aspectos formales de interés que se presentan en los lenguajes naturales (castellano, inglés, francés, etc.) pudieran traducirse a este nuevo lenguaje, dando así, especial importancia a los aspectos sintácticos. Esto se logra construyendo un lenguaje simbólico parecido al del álgebra, de lo que nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

2. EL CONCEPTO DE PROPOSICIÓN

Frege, principal inventor de los lenguajes simbólicos lógicos, dice lo siguiente en su artículo "Sobre la justificación científica de una conceptografía" (llamaba 'conceptografía' al lenguaje artificial que debía utilizar la lógica): "Los defectos señalados tienen su causa en cierta deleznabilidad e inestabilidad del lenguaje que, por otra parte, es condición de su múltiple utilidad y su capacidad de desarrollo. En este respecto el lenguaje puede ser comparado con la mano, la cual no basta, a pesar de su capacidad, para acomodarse a las más diversas tareas. Producimos manos artificiales, herramientas para fines específicos que trabajan con una exactitud que la mano no lograría" (Frege [4][1], p. 212).

Así como cada herramienta busca imitar alguna de las funciones de la mano descartando otras, nuestro lenguaje simbólico tendrá como objetivo reflejar el nexo entre la verdad de unas oraciones y la de otras. Debemos excluir de él algunas partes del lenguaje natural. Por un lado, hay expresiones ajenas al calificativo de verdaderas o falsas (como las preguntas o las exclamaciones) y, por tanto, al interés de la lógica; y, por otro, aun suponiendo que lográramos aislarlas, su manejo resultaría difícil. Es necesario no sólo excluir las expresiones no aseverativas (ni verdaderas ni falsas), sino también construir un lenguaje artificial en el que sólo se refleje la articulación que las oraciones mismas tienen entre sí en virtud del hecho que son verdaderas o falsas. Me explico: no interesa la materia o

---

[1] El número entre corchetes, [4], remite a la numeración de la bibliografía al final del libro.

tema del que trata la oración, no nos interesa saber de qué habla, sino sólo si es posible calificarla de verdadera o falsa.

Sólo nos interesa del lenguaje aquellas partes que se relacionan con los valores de verdad. En el castellano, por ejemplo, encontramos formas como las exclamaciones y las órdenes que no se relacionan con dichos conceptos; un ruego no es ni verdadero ni falso. En realidad no son las formas lingüísticas, las oraciones aseverativas, las que nos interesan, sino las **proposiciones**, y con este término designamos a **toda expresión lingüística susceptible de ser calificada de verdadera o falsa**.

Si la definición anterior estuviera completa, uno podría preguntarse ¿para qué el término 'proposición'?, ¿no basta acaso con el término 'oración aseverativa'?

Una de las ventajas de las proposiciones es que oraciones que pertenecen a distintos idiomas, y que por tanto son distintas, puede considerarse que expresan la misma proposición. Por ejemplo, si una persona bilingüe dice: 'Llueve o il pleut', ¿cómo consideramos su expresión si queremos formalizarla? Como:

'(proposición 1) o (proposición 1)'

o como:

'(proposición 1) o (proposición 2)'.

La primera, que bien podría recoger la intención del hablante, sólo la permite la distinción entre proposición y oración. Esto nos lleva a postular entes nuevos que son las proposiciones. No son las oraciones aseverativas, sino que son expresadas o significadas por ellas. Así, por **proposición** entenderemos **lo significado por expresiones lingüísticas susceptibles de ser calificadas de verdaderas o falsas.**

En lo anterior hemos supuesto la validez de la traducción de una lengua a otra, al igualar el significado de 'llueve' con 'il pleut'. Si no se acepta que tal cosa ocurra, como lo hace Quine[2], se pierde parte de los argumentos para postular proposiciones. Pero el asunto no es tan grave,

---

[2] Véase [91].

al fin y al cabo, porque nuestro trabajo, que estará fundamentalmente en un nivel formal y simbólico, se adapta a cualesquiera de las teorías.

Es importante recalcar que aun en oraciones interrogativas pueden expresarse afirmaciones, de acuerdo con el contexto. Por ejemplo, decirle a un acompañante a la salida de un cine: '¿No fue estupenda la película?' es una manera de comunicarle nuestra impresión de que la película fue estupenda. Lo mismo ocurre con algunas exclamaciones, que en general no expresan proposiciones.

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes oraciones expresan proposiciones. Justifique su respuesta.

   a. Júpiter gira en torno al Sol.
   b. $3^2 + 4^2 > 5^2$
   c. Cada paso del teorema de Pitágoras.
   d. No pise el césped.
   e. ¡Viva el curso de Lógica!
   f. ¿Qué hora es?

2. ¿Cuántas proposiciones distintas reconoce en la siguiente lista?

   a. El calor dilata los cuerpos.
   b. San Martín nació en Argentina.
   c. Los cuerpos son dilatados por el calor.
   d. El Santo de la Espada nació en la Tierra de los Gauchos.

3. ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan proposiciones?

   a. Mañana habrá un combate.
   b. Hay vida en la nebulosa de Andrómeda.
   c. Todos los hombres son mortales.
   d. Esta oración es falsa.

Solución:

1. Las expresiones 'Júpiter gira en torno al Sol' y '$3^2 + 4^2 > 5^2$' significan, expresan, o representan proposiciones porque son susceptibles

de ser calificadas de verdaderas o falsas, mientras que la frase 'Cada paso del teorema de Pitágoras' no expresa una proposición ya que no podemos asignarle un valor de verdad. En el mismo sentido, 'No pise el césped', '¡Viva el curso de Lógica!' y '¿Qué hora es?', si bien son oraciones, no representan proposiciones, puesto que su función es expresar una orden o una exclamación.

2. Ya que las proposiciones no son oraciones declarativas o aseverativas sino lo expresado o significado por ellas, hay dos proposiciones. (a) y (c) representan la misma proposición, así como (b) y (d).

3. Las tres primeras oraciones expresan proposiciones aunque no tengan, al escribir estas líneas, un valor de verdad conocido. En 'Mañana habrá un combate' el valor de verdad quedará fijado mañana, mientras que dependerá de los avances científicos el momento en que conozcamos el valor de verdad de 'Hay vida en la nebulosa de Andrómeda'. Del mismo modo (c) expresa una proposición.

   Respecto de la última, ¿qué opina?, ¿es verdadera o es falsa?

3. NIVELES DEL LENGUAJE

Probablemente el último ejercicio habrá causado cierto desasosiego en el lector. Vamos a introducir ahora algunas distinciones cuyo objetivo final es hacer desaparecer ésas y otras dificultades.

3.1. Uso y mención

En:

La tiza es blanca.

la palabra 'tiza' designa un objeto. En cambio, en:

Tiza es un sustantivo.

la palabra 'tiza' se autorefiere. En el primer caso usamos la palabra para referirnos a un objeto diferente de ella, en lo que constituye su empleo más común. En el segundo, para mencionar a la palabra misma. Por una cuestión de buen orden, que evite confusiones, debe distinguirse explícitamente entre ambos casos . En el primero, se dice que se usa la palabra; en el segundo, que se la menciona. **Usar una palabra es utilizarla para designar cosas distintas de ella misma; mencionar una palabra con ella misma es emplearla para designarse ella misma.** Para distinguir los dos empleos de la misma palabra en el lenguaje escrito convendremos en usar comillas (simplemente anotaremos que una palabra puede ser mencionada por otras, como cuando la deletreamos). Así, una palabra o frase entre comillas se menciona. Ejemplos de proposiciones verdaderas son las expresadas por:

Lima es más grande que Arequipa.
'Lima' es más chico que 'Arequipa'.
'¿Qué hora es?' es una oración interrogativa.

3.2. Lenguaje y metalenguaje

En algunos casos se construyen **lenguajes artificiales** en los que se prohíbe la mención dentro del lenguaje; eso haremos nosotros. Al interior de esos lenguajes no podemos referirnos a sus palabras. Para hablar de una palabra de esos lenguajes recurrimos a un lenguaje distinto, llamado 'metalenguaje', desde el cual podemos mencionar las palabras del primero. Al segundo se lo llama 'el metalenguaje del primero' (que a su vez se llama 'lenguaje-objeto'). Así, dado un lenguaje, si deseamos referirnos a él lo haremos desde su metalenguaje.

Por el convenio anterior (diferenciar uso de mención), para referirnos a una palabra desde el metalenguaje lo haremos encerrándola entre comillas (' '). Las expresiones iniciales se convierten en:

La tiza es blanca.
'Tiza' es un sustantivo.

Y podemos afirmar con corrección que si 'La tiza es blanca' es una oración del lenguaje L, entonces la oración ' 'Tiza' es un sustantivo' pertenece al metalenguaje de L.

En resumen, podemos decir que en el lenguaje simbólico, por construir, las palabras del lenguaje se usan, y en el metalenguaje se mencionan (lo que no debe entenderse como que en el metalenguaje todas las palabras sólo se mencionan). Como se ve en el caso de 'tiza' una misma palabra puede emplearse para cumplir las dos funciones de uso y mención. Generalmente el contexto permite distinguir en qué caso se está. Pero nosotros, como ya dijimos, reforzaremos el contexto con comillas. Esta práctica la aplicaremos sobre todo en los primeros capítulos; luego el contexto marcará la distinción, a veces escribiendo la oración en una línea distinta, otras cambiando el tipo de letra.

Veamos un argumento falaz que se construye por no hacer las distinciones correspondientes:

> Todos sabemos que es verdad que ‘3 es el exponente de 2^3’ y que ‘$2^3 = 8$’. Utilizando el principio de sustitución de iguales, podemos concluir que ‘3 es el exponente de 8’.

El error está en que es falso decir ‘3 es el exponente de 2^3’, pues lo correcto es ‘ ‘3’ es el exponente de ‘2^3’ ’, y como ‘ ‘2^3’ $\neq$ 8’ (porque ‘2^3’ y ‘8’ son signos distintos) no hay lugar a utilizar el principio de sustitución de iguales.

Si generalizamos lo anterior podemos considerar varios **niveles de lenguaje**. Desde un nivel 0 hasta un nivel n, siendo el lenguaje de nivel n el metalenguaje del lenguaje de nivel n-1.

Imaginemos la siguiente situación: una clase en la que los estudiantes hablan español y se está estudiando inglés; en ella el profesor se explica en castellano. En esa misma clase se toma como modelo un diálogo entre una profesora de habla inglesa y un grupo de alumnos de habla inglesa a los que ella está enseñando griego. En ese contexto, el griego está en el nivel 0, el inglés en el nivel 1 y el castellano en el 2.

Es totalmente factible que haya varios niveles de lenguaje. Ante esta profusión de niveles podemos preguntarnos si son indispensables o no. ¿Puede una palabra de nivel n aplicarse a sí misma o requerimos de su correspondiente nivel n+1? Si queremos formalizar el lenguaje del nivel n necesitaremos el nivel n+1, pero si el lenguaje n no va a ser formalizado, ni se va a usar para exponer la teoría que nos interesa, entonces podemos dejarlo en absoluta libertad y emplear un lenguaje natural. En nuestro caso el castellano cumplirá ese rol. Vamos a desarrollar un lenguaje simbólico que será el lenguaje-objeto (nivel 0) y utilizaremos el castellano como su metalenguaje (nivel 1).

3.3. El concepto de verdad

En la sección anterior vimos la importancia de distinguir entre lenguaje y metalenguaje, no veremos sus implicaciones a la hora de hablar de la noción de verdad (falsedad), sino sólo su aplicación. Así, pues, consideramos que la discusión del tema de la verdad, si bien es de importancia crucial en lógica, rebasa el marco de una introducción.

La definición clásica de verdad pertenece a Aristóteles, quien escribió: "Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero" (*Metafísica* F, 1011b26). En general, se acepta que hay que salvar en lo posible lo dicho por el Estagirita, modernizándolo. Quien se abocó a esta tarea en el presente siglo fue Tarski, estableciendo, entre otras cosas, un paradigma muy sencillo para el empleo de la palabra 'verdad' ('falsedad'):

'La tiza es blanca' es verdadera si y sólo si la tiza es blanca.

Es decir, verdad y falsedad sólo se expresan en el metalenguaje de las oraciones a las que se aplican. De este modo consideraremos mal construidas expresiones como 'Esta oración es falsa', por no expresar proposiciones; ya que 'falso' y 'verdadero' pertenecen al metalenguaje. Entiéndase, si lo que se desea es enunciar una proposición, dicha expresión está mal construida; pero como oración, que no expresa una proposición, es impecable.

No debe ocultarse que la noción de verdad es de las más discutidas en filosofía. Por ello nosotros sólo retendremos la restricción sobre su uso: **la verdad o falsedad de una proposición debe formularse en el metalenguaje,** sin profundizar más.

Ejercicios

1. Coloque en cada uno de los siguientes casos las comillas necesarias para indicar las expresiones que se mencionan.

    a. El nombre de María es hebreo y bonito.
    b. El nombre María es hebreo y bonito.
    c. Arturo es el nombre de uno de los hermanos de Juan. Sin

embargo, si Arturo fuera hermano de Pedro, entonces Juan y Pedro serían hermanos.

d. En las ecuaciones, la incógnita se indica con una x.
e. Röntgen accidentalmente descubrió los rayos x.

2. Delimite los niveles del lenguaje en cada caso.

a. La nieve es blanca consta de cuatro palabras.
b. La oración la nieve es blanca consta de cuatro palabras expresa una proposición.
c. La proposición la oración la nieve es blanca consta de cuatro palabras expresa una proposición es verdadera.
d. En la página 187, donde dice fe de erritas debe decir fe de erratas.

Solución:

1. En la primera oración se trata de un objeto cuyo nombre es 'María', es decir, una persona. En la segunda, de un objeto cuyo nombre es "María" (note la doble comilla), o sea, una palabra. En el primer caso la palabra 'María' se usa; en el segundo, se menciona. Esta diferencia la marcamos con comillas:

a. El nombre de María es hebreo y bonito.

b. El nombre 'María' es hebreo y bonito.

Por los mismos motivos ponemos comillas en (c) y (d), mas no en (e):

c. 'Arturo' es el nombre de uno de los hermanos de Juan. Sin embargo, si Arturo fuera hermano de Pedro, entonces Juan y Pedro serían hermanos.

d. En las ecuaciones, la incógnita se indica con una 'x'.

e. Röntgen accidentalmente descubrió los rayos x.

2. Analicemos cada caso:

a. Las palabras 'La nieve es blanca' se refieren a un hecho de la realidad y, por tanto, se encuentran en el nivel 0 (N0), pero 'consta de cuatro palabras' no habla de la realidad, sino del lenguaje 0, por tanto se encuentra en el nivel 1 (N1). Podemos ayudarnos con el siguiente esquema:

N0: La nieve es blanca.
N1: ---------- consta de cuatro palabras.

b. En este caso tenemos tres niveles:

N0: La nieve es blanca.
N1: ---------- consta de cuatro palabras.
N2: La oración ---------- expresa una proposición.

Lo que también podemos marcar con comillas: La oración ' 'la nieve es blanca' consta de cuatro palabras' expresa una proposición.

c. Ahora tenemos un nivel más:

N3: La proposición ---------- es verdadera.

d. En este caso tenemos el siguiente esquema:

N0: fe de erritas; fe de erratas
N1: En la página 187, donde dice ---------- debe decir ----------.

4. SINTAXIS Y SEMÁNTICA. LENGUAJE FORMAL Y LENGUAJE SIMBÓLICO

Necesitamos todavía establecer algunas nociones de nuestro vocabulario. Siendo nuestro deseo construir un lenguaje artificial, recordemos los conceptos de sintaxis y semántica.

La **sintaxis** de un lenguaje se ocupa del estudio de los signos con prescindencia de su significado, como en "María va al cine o María se queda en casa', es un enunciado disyuntivo'. La **semántica**, en cambio, se ocupa de la relación entre los signos y lo designado por ellos: "María va al cine o María se queda en casa' es un enunciado verdadero'.

Por otro lado, entenderemos por **lenguaje formal**, un lenguaje natural en el que se relievan sólo los aspectos que interesan para determinado estudio, en nuestro caso la forma lógica, y se prescinde del resto de significados que la acompañan. Veamos un ejemplo:

Si todos los hombres son mortales
y ningún ángel es mortal,
entonces ningún hombre es ángel.

Que estamos frente a una afirmación, que es verdadera por su estructura, es bastante evidente. Y si deseamos resaltar esto, es decir, poner de manifiesto su forma, prescindimos de algunas palabras que no le hacen a la forma:

Si todos los H son M
y ningún A es M,
entonces ningún H es A.

quedándonos sólo con los términos que establecen la forma lógica de la expresión. Lo que hemos hecho es eliminar los términos categoremáticos, es decir, aquéllos que por sí solos significan algo, y mantener los sincategoremáticos, aquéllos que requieren de la compañía de otro categoremático al emplearse, y en los que reside la "fuerza" lógica del argumento.

Si deseamos alejarnos aún más de los lenguajes naturales para evitar al máximo la imprecisión que los caracteriza, tenemos que desprendernos también de los términos sincategoremáticos. Es decir, quedarnos sin lenguaje o, mejor dicho, construir uno artificial, definiendo de forma muy precisa los signos que emplearemos. En otras palabras, construir lo que llamaremos un **lenguaje simbólico**, lo que haremos al inicio del siguiente capítulo. Utilizando, nuevamente, una imagen de Frege: los lenguajes naturales son como el ojo humano, instrumento de gran fineza y versatilidad, mucho más rico en usos que un telescopio, pero para determinados fines requerimos del telescopio; del mismo modo, para estudiar los temas de la lógica requerimos de un lenguaje simbólico.

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine cuáles de las siguientes expresiones representan proposiciones.

1.1. Viena es la capital de Austria.
1.2. Los personajes Isaac y Tracy de la película Manhattan de Woody Allen.
1.3. Puentecito dormido sobre la herida de una quebrada.
1.4. Penélope con su bolso de piel marrón y sus zapatos de tacón y su vestido de domingo.
1.5. Prohibido fumar en el salón.
1.6. Tráeme un vaso con agua.
1.7. ¡Eureka!
1.8. ¡Tanto amor, y no poder nada contra la muerte!
1.9. ¡Oh, más dura que el mármol, más helada que nieve, Galatea!
1.10. Pobre del cantor que en esta vida no arriesgue su cuerda por no arriesgar su vida.
1.11. ¿Soy yo acaso el guardián de mi hermano?
1.12. $\operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
1.13. Joan Manuel prefiere el rostro de una muchacha a toda la Pinacoteca Nacional.
1.14. La luz del Sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra.
1.15. Una manzana roja sobre la yerba verde es una manzana roja sobre la yerba verde.
1.16. El cráneo consta de ocho huesos.
1.17. Las estrellas Alfa tienen mayor brillo que las estrellas Beta.
1.18. Cada célula del hombre tiene 46 cromosomas.
1.19. El número de diputados es de ciento ochenta.
1.20. Martin Luther King recibió el Premio Nobel de la Paz en 1964.
1.21. Las crepitaciones de algún pan que en la puerta del horno se nos quema.
1.22. Cada loco con su tema.
1.23. Silencio: Hospital.
1.24. ¡Y dale U!
1.25. Señor Ministro de Salud; ¿qué hacer?
1.26. La marihuana es una droga que genera dependencia.
1.27. 90% de los que han usado cocaína han tratado de dejarla.
1.28. Las ballenas azules están en peligro de extinción.
1.29. Ningún camaleón es idéntico a sí mismo.
1.30. Todos los cisnes son blancos.

2. ¿Cuántas proposiciones distintas reconoce en la siguiente lista?

2.1. Cae agua de las nubes.
2.2. Llueve.
2.6. Feliz Navidad.
2.7. Merry Christmas.

2.3. It's raining.
2.4. Es regnet.
2.5. Il pleut.
2.8. Fröhliche Weihnachten.
2.9. Joyeux Nöel.
2.10. Buon Natale.

3. Encuentre situaciones en las que las siguientes oraciones expresen proposiciones.

3.1. Me gustaría tomar una taza de café caliente.
3.2. ¿No sabías que Colón llegó al continente americano recién en su tercer viaje?
3.3. ¿Te das cuenta de que estamos muy retrasados para cumplir con el cronograma?
3.4. ¿Acaso el castellano tiene dos letras mudas?
3.5. ¡La ballena había sido un mamífero!

4. Indique en cada uno de los siguientes casos las palabras que deben llevar comillas para distinguir entre el uso y la mención.

4.1. Todos los ratones comen queso. Todo queso es bisílabo. Luego, todos los ratones comen bisílabos.
4.2. Russell es coautor de *Principia Mathematica.*
4.3. Russell es un apellido inglés y tiene siete letras.
4.4. En la palabra istmo la t no se pronuncia.
4.5. Se ha roto mi regla T.
4.6. A las cinco Jaime servirá el té.
4.7. Te es una palabra monosílaba.
4.8. El Istmo de Panamá tiene la forma de una S.
4.9. En números romanos L significa cincuenta y T, ciento setenta.
4.10. Los niños van con sus guardapolvos blancos a la escuelita para aprender el ABC.
4.11. ¿Cuál es el significado de comprometido?
4.12. Si el nombre es arquetipo de la cosa y en las letras Rosa está la Rosa y todo el Nilo en la palabra Nilo, habrá un terrible nombre que cifre la esencia de Dios.
4.13. Cien años de soledad tiene 351 páginas.
4.14. El título *Cien años de soledad* es el más adecuado, puesto que narra la historia de una familia que a lo largo de un siglo vive sin amor.
4.15. $^3/_4$ es un número racional.
4.16. El denominador de $^3/_4$ es un múltiplo de 2.
4.17. La letra m minúscula significa metro.

4.18. Si Roxana no aprueba el curso, tomará DDT.
4.19. Los latinos escribían 500 con una I y una C vuelta al revés, las cuales con el tiempo se juntaron y formaron la D.

5. Indique en cada caso qué frases se usan y cuáles se mencionan.

5.1. Enrique firma así: Tu amigo Kike.
5.2. A U B se lee el conjunto A unión el conjunto B.
5.3. El orden de las palabras en seámoslo somos libres siempre no es el mismo que en el comienzo del Himno Nacional.
5.4. Llamamos a Roma, la ciudad eterna; al león, el rey de los animales y, a Ricardo Palma, el bibliotecario mendigo.
5.5. No todo el que me dice ¡Señor! ¡Señor! entrará en el reino de los cielos.

6. Delimite los niveles del lenguaje en cada uno de los siguientes casos.

6.1. Todo es según el cristal con que se mire ha dicho Campoamor, escribe Bryce.
6.2. Borges ha escrito el Jugador de ajedrez es prisionero de otro tablero de negras noches y de blancos días revela Omar.
6.3. La Constitución garantiza que toda persona es considerada inocente mientras no se haya declarado judicialmente su responsabilidad.
6.4. El padre Valverde gritó ¡Santiago!
6.5. Es verdadero que el pulmón izquierdo tiene tres lóbulos es falso.
6.6. En la página 11, línea 8, donde dice reaccionario debe decir revolucionario.
6.7. Camino de Moscú, hay una piedra en uno de cuyos lados se lee Napoleón Bonaparte pasó por aquí en 1812 con 400,000 hombres; en el lado opuesto se ha grabado otra inscripción Napoleón Bonaparte pasó por aquí en 1812 con 9,000 hombres.
6.8. Serrat se refiere a los niños llamándolos esos locos bajitos.
6.9. Un día Jesús, sonriendo mucho, le dijo tú te llamarás desde hoy Marcelino, Pan y Vino.

7. Responda:

7.1. Que una fórmula denote un número, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de la fórmula?

7.2. Que una fórmula sea falsa, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de la fórmula?

7.3. Que una fórmula pueda descomponerse en dos subfórmulas, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de la fórmula?

7.4. Que un enunciado pueda descomponerse en una oración principal y una oración subordinada, ¿es una propiedad sintáctica o semántica del enunciado?

7.5. Que una palabra sea antónima de otra, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de dicha palabra?

II

LÓGICA PROPOSICIONAL: ASPECTOS SEMÁNTICOS

1. EL LENGUAJE SIMBÓLICO DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Estudiaremos en esta sección, de manera formal y simbólica, la lógica proposicional en lo relativo a su semántica. Tratar la semántica de las proposiciones desde un punto de vista lógico significa, por ahora, ocuparse exclusivamente de si son verdaderas o falsas. Es decir, buscar sólo su "significado lógico". No nos interesa su referencia concreta al mundo, dejamos de lado lo que usualmente se denomina 'su significado'; sólo nos interesan sus valores de verdad. Para lograr esto, vale decir, concentrarnos en los valores de verdad y dejar de lado el contenido de las proposiciones, es conveniente, como ya hemos visto, disponer de un lenguaje simbólico. Un lenguaje en el que los "contenidos" no figuren. En este momento no disponemos de un lenguaje así, por lo que vamos a construirlo, se trata pues de un lenguaje artificial. Primero debemos dar una presentación sintáctica del lenguaje, para luego tener aquello que queremos interpretar.

1.1. Presentación sintáctica del lenguaje proposicional (LP)

Vamos a presentar los aspectos materiales de nuestro lenguaje, que es fundamentalmente escrito. Para esto emplearemos como lenguaje de nivel más elevado el español que permanecerá no formalizado. El español será el metalenguaje del lenguaje-objeto constituido por el lenguaje simbólico que vamos a construir. Vamos a presentar una serie de signos y a decir cómo pueden combinarse entre sí con corrección. Por tanto, hay que presentar primero todos los signos (los llamaremos 'símbolos primitivos') y, luego, decir qué cadenas de ellos están correctamente formadas y cómo construirlas (son las reglas de formación).

1.1.1. Símbolos primitivos

a) Símbolos proposicionales: 'p', 'q', 'r', 's', 't',...
b) Conectores lógicos: '~', '∧', '∨', '→', '↔'
c) Símbolos auxiliares: '(',')', '[', ']', '{', '}', '.'

Algunas aclaraciones son necesarias:

1) Consideramos que tenemos infinitas proposiciones. Para esto, si nos faltan letras, utilizaremos subíndices, ejemplo: 'p_1', 'p_2', etc.

2) A los cinco conectores lógicos se los conoce con un nombre y se les asigna una lectura que permite vocalizarlos. Así, '~' se llama 'negación' y se lee 'no'; luego '~p' se leerá 'no p'. '∧' se llama 'conjunción' y se lee 'y'; 'p ∧ q' se leerá 'p y q'. '∨' tiene por nombre 'disyunción' y se lee 'o'; luego 'p ∨ q' se leerá 'p o q'. '→' es el condicional y su lectura es 'si... entonces...'; de ahí que 'p → q' se lea 'si p entonces q'. '↔' se llama 'bicondicional' y se lee 'si y sólo si'; luego, 'p ↔ q' se leerá 'p si y sólo si q'. Por último, a la negación se la llama 'conector monádico' y a los otros, 'conectores diádicos', debido a que la primera afecta a una proposición y los segundos, a dos.

3) Los símbolos auxiliares cumplen la función de los signos de puntuación. Son los archiconocidos paréntesis, corchetes y llaves, a los que hemos añadido un punto. El empleo de este último será explicado más adelante.

4) Nuestro metalenguaje contendrá al lenguaje-objeto. Este punto de vista nos evitará el uso excesivo de comillas. Además, como es práctica común, cuando no sean indispensables, reemplazaremos las comillas de un texto destacándolo del que lo rodea, ya sea separándolo o utilizando otro tipo de letra.

Nos toca ahora dar las reglas que permitan combinar correctamente estos símbolos, para esto necesitamos referirnos de manera genérica a las cadenas que formemos con ellos. Con este fin emplearemos las primeras letras mayúsculas del alfabeto español: 'A', 'B', 'C', etc. Así 'A' pertenece a nuestro metalenguaje y designa cualquier cadena de signos del lenguaje proposicional; a estas cadenas las llamamos 'fórmulas'. En nuestro metalenguaje tienen cabida todos los signos del lenguaje, por tanto '$A \leftrightarrow B$' es una expresión del metalenguaje que designa cualquier fórmula del lenguaje proposicional resultado de colocar el signo '$\rightarrow$' entre dos cadenas de signos.

1.1.2. Reglas de formación

Estas reglas de formación (RF) permiten distinguir entre las fórmulas bien formadas (FBF) y las mal formadas (FMF), y constituyen las reglas sintácticas de nuestro lenguaje.

a. Todo símbolo proposicional es una FBF.
b. Si A es FBF, entonces $\sim A$ también lo es.
c. Si A y B son FBF, entonces

   1. $(A \wedge B)$ también lo es.
   2. $(A \vee B)$ también lo es.
   3. $(A \rightarrow B)$ también lo es.
   4. $(A \leftrightarrow B)$ también lo es.

d. Una fórmula es una FBF si y sólo si es el resultado de la aplicación de las reglas anteriores un número finito de veces.

NOTA: En la práctica suprimiremos los paréntesis más externos de una fórmula por no ser indispensables. Además, de ahora en adelante, usaremos la palabra 'fórmula' para referirnos a FBF, y reservaremos el empleo de las metavariables A, B, C,... para FBF cualesquiera.

Veamos algunos casos:

p, q, t, t_{123} son FBF por la regla de formación a (RFa). En cambio, $\vee$, $\wedge$ y $\vee\rightarrow$ no son FBF.

$(q \rightarrow p)$ es una FBF que escribiremos como '$q \rightarrow p$' para evitar el uso excesivo de paréntesis, lo mismo para los casos similares en que los paréntesis son totalmente externos.

$p \vee q$, $p \leftrightarrow t$ son FBF y por tanto las siguientes que se forman utilizándolas también lo son: $\sim(p \vee q)$, $(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow t)$,

$\sim[(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow t)]$, $[\sim(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow t)]$. En este último caso, a diferencia del penúltimo, los corchetes son innecesarios, pues siempre interpretaremos que el alcance de la negación es sólo para la primera FBF que tiene a continuación. Por lo que basta escribir '$\sim(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow t)$'.

Para aligerar la escritura, reduciremos lo más posible el número de los paréntesis. Para esto, establecemos que pondremos entre puntos a los conectores diádicos que deseamos que primen. Así,
$\{[p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (q \vee t)\} \leftrightarrow p$ podrá escribirse
$[p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (q \vee t) \;.\!\leftrightarrow\!.\; p$. Los dos puntos alrededor de '$\leftrightarrow$' evitan que su jerarquía se "confunda" con la del condicional. Hay que precisar que el alcance de los puntos no sale fuera de los paréntesis, corchetes y llaves que los encierran. Tomando en cuenta todo lo dicho llegamos a:

$$(p \;.\!\vee\!.\; \sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee t) \;.\!\leftrightarrow\!.\; p$$

El lector en cada caso debe buscar un juicioso empleo de los puntos que aligere la escritura de las fórmulas, sin caer en un uso excesivo que produce fórmulas difíciles de leer.

1.1.3. Árboles sintácticos o de construcción

Frente a una cadena de signos siempre cabe la pregunta de si se trata de una FBF o no. Para disolver las dudas lo conveniente es ir desmontándola paso a paso para descubrir cómo fue construida, y de ese modo verificar si se respetaron las RF o no. Por ejemplo analicemos:

$$[(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q) \;.\!\wedge\!.\; \sim r] \rightarrow \sim(p \leftrightarrow q) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim s$$

Por los puntos que lleva, el conector más importante es el último condicional, así nuestra fórmula es la unión de:

'$[(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q) \;.\!\wedge\!.\; \sim r] \rightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$' y '$\sim s$' por medio de '$\rightarrow$'

de acuerdo con la RFc3. Y será una FBF si lo son sus componentes, por lo que cada uno de ellos debe analizarse. '$\sim s$' proviene de poner '$\sim$' delante de 's' según RFb. Y es una FBF porque de acuerdo con RFa 's' lo es.

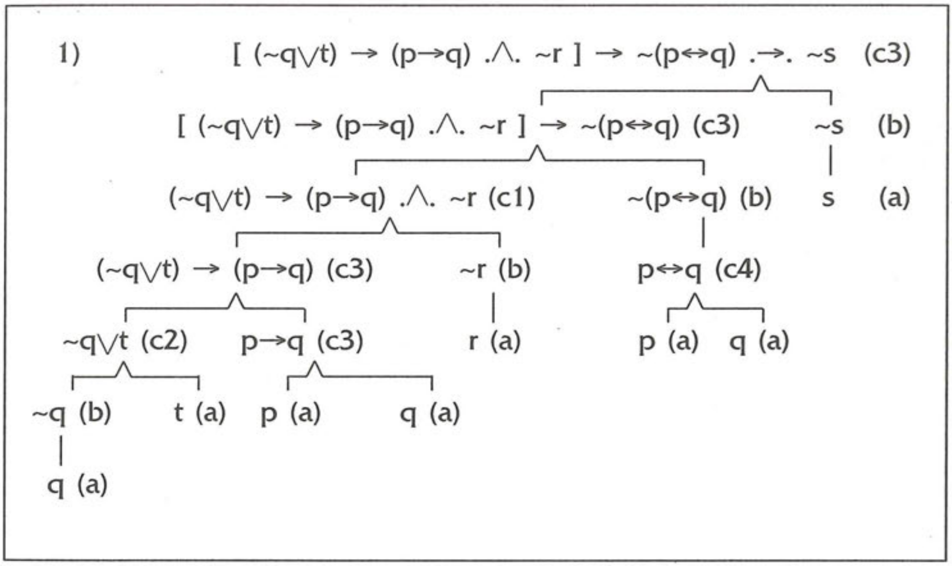
'$[(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q) \;.\!\wedge\!.\; \sim r] \rightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$' proviene por RFc3 de la unión de '$[(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q) \;.\!\wedge\!.\; \sim r]$' y de '$\sim(p \leftrightarrow q)$', por lo que será una FBF si sus partes lo son.

'$\sim(p \leftrightarrow q)$' viene de negar '$p \leftrightarrow q$' por RFb, y esta última de 'p' y 'q' por RFc4, como 'p' y 'q' son FBF por RFa, '$\sim(p \leftrightarrow q)$' es una FBF.

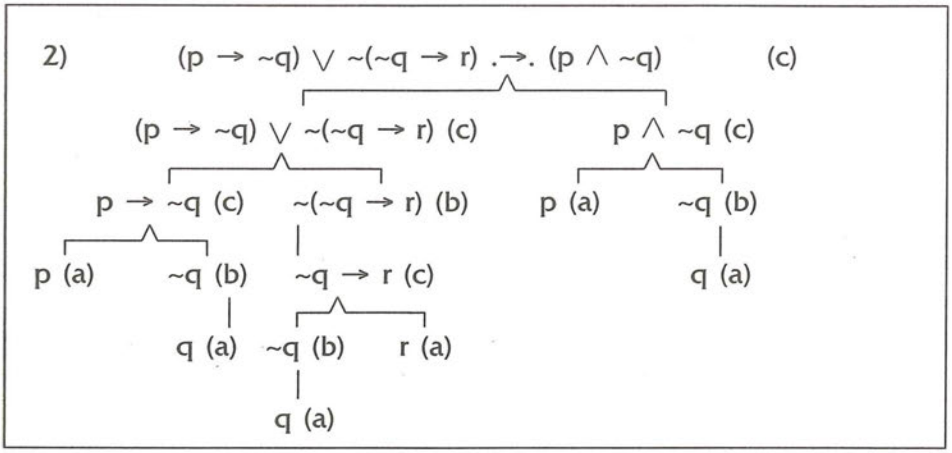
'$(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q)$ $.\wedge.$ $\sim r$' debe venir de '$(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q)$' y '$\sim r$' por RFc1. '$\sim r$' se construye de la FBF 'r' por RFb, y es FBF.

'$(\sim q \vee t) \rightarrow (p \rightarrow q)$' viene de '$\sim q \vee t$' y '$p \rightarrow q$' por RFc3. '$\sim q \vee t$' se formó con '$\sim q$' y '$t$' por RFc2 y '$t$' es FBF, '$\sim q$' de la FBF '$q$' por RFb. '$p \rightarrow q$' se compone de las FBF 'p' y 'q' por RFc3.

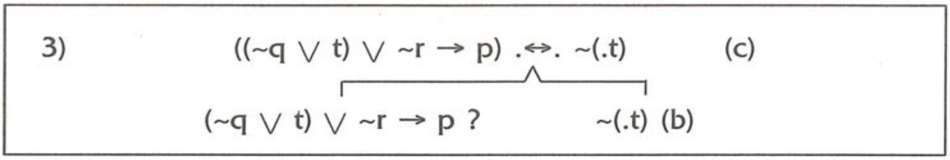
Así de este modo largo y tedioso comprobamos que nuestra fórmula proviene de FBF siguiendo las RF. Un dispositivo más cómodo y práctico para hacer lo mismo es el siguiente diagrama de árbol:



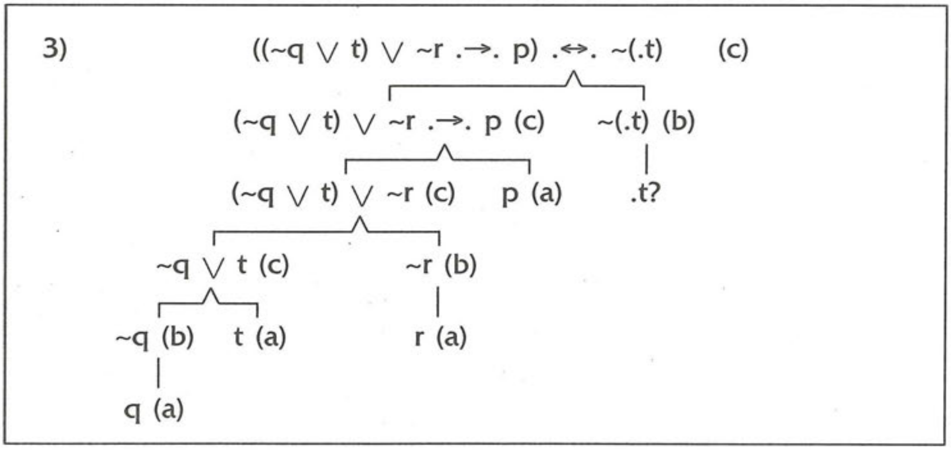
Se aprecia en el árbol cómo se genera la fórmula de la punta de las ramas hacia la estructura central (de abajo hacia arriba) a partir de FBF y utilizando sólo RF, que se señalan en cada paso. Veamos otros casos:



Nuevamente se trata de una FBF. Veamos otra:



En la parte izquierda falta indicar la jerarquía de operadores, por lo que no podemos saber que fórmulas se han unido. En este punto se ha violado la regla de formación (c) ó (d) por lo que no se trata de una FBF. Asumamos que se trató de un error de imprenta que subsanamos:



Hemos marcado todas las fórmulas mal formadas finales con '?', su presencia indica obviamente que no era una fórmula bien formada la que acabamos de analizar. Sin embargo, debe notarse que en alguna rama puede llegarse a FBF. Una fórmula se considera bien formada si y sólo si no presenta ninguna rama con '?'.

Utilizando los diagramas de construcción de fórmulas podemos definir la noción de **sub-fórmula**: una sub-fórmula de una FBF es cualquiera de las fórmulas que aparecen en el diagrama de construcción, incluída la propia fórmula. En el caso 2 anterior son sub-fórmulas de $(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(\sim q \rightarrow r) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \wedge \sim q)$ las siguientes: $(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(\sim q \rightarrow r) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \wedge \sim q)$, $(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(\sim q \rightarrow r)$, $p \wedge \sim q$, $p \rightarrow \sim q$, $\sim(\sim q \rightarrow r)$, p, $\sim q$, $\sim q \rightarrow r$, q y r (hemos eliminado las repetidas).

Ejercicios

1. Escriba las siguientes fórmulas omitiendo los signos de puntuación innecesarios.

a. $\{[\sim(p \rightarrow q)]\} \wedge \{\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)]\}$
b. $\{[q \leftrightarrow p] \wedge [(\sim(r)) \leftrightarrow p]\} \rightarrow \{p \leftrightarrow [q \wedge (\sim(r))]\}$

2. ¿Cuáles de las siguientes son FBF? Justifique su respuesta con un diagrama en árbol.

a. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim r \vee \sim q)$
b. $p \rightarrow [r \wedge \sim(q \rightarrow \sim r)]$
c. $(p \leftrightarrow q \vee q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

3. Reescriba usando el mayor número posible de puntos auxiliares.

a. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
b. $(p \wedge q) \rightarrow \{[\sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q)] \leftrightarrow \sim p\}$
c. $p \wedge \{q \rightarrow \sim[(\sim r \wedge (p \rightarrow q)) \vee r]\}$
d. $\sim[(p \wedge \sim r) \rightarrow q] \vee \{(r \leftrightarrow p) \vee [(q \rightarrow r) \leftrightarrow \sim p]\}$

Solución:

1. a. Recordemos que en la práctica suprimiremos los signos de puntuación más externos de una fórmula, siempre que no se pierda la jerarquía; así como los que afectan sólo a los signos proposicionales. De este modo resulta:

$[\sim(p \rightarrow q)] \wedge \{\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)]\}$, y luego
$\sim(p \rightarrow q) \wedge \sim[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)]$

b. De acuerdo con lo anterior y recordando que ~(A) se escribirá '~A' sólo en el caso en que A sea una símbolo proposicional o una negación, se tiene:

$\{[q \leftrightarrow p] \wedge [\sim r \leftrightarrow p]\} \rightarrow \{p \rightarrow [q \wedge \sim r]\}$

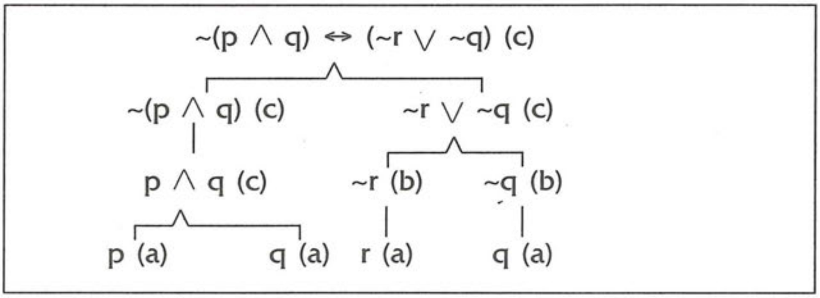
Ningún otro signo se puede suprimir sin perder la jerarquía, por ejemplo en:

$\{[q \leftrightarrow p] \wedge [\sim r \leftrightarrow p]\} \rightarrow p \rightarrow [q \wedge \sim r]$

no se puede determinar cuál de los dos condicionales tiene mayor jerarquía. Lo que sí podemos, y es recomendable, es "bajar" el nivel de los signos de puntuación:

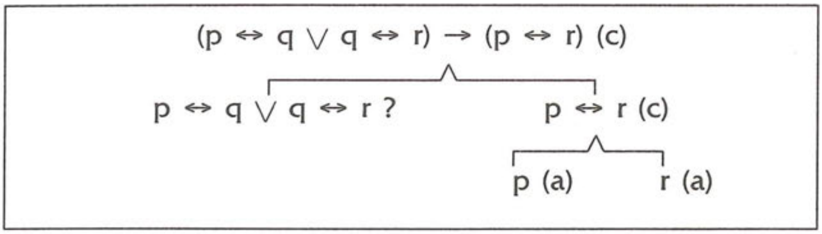
$[(q \leftrightarrow p) \wedge (\sim r \leftrightarrow p)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge \sim r)]$

2. a. Es una FBF como lo muestra el siguiente árbol:



b. Del mismo modo se encontrará que se trata de una FBF.

c) No es FBF. Hagamos el diagrama:



3. a. Utilizando puntos auxiliares:

$p \rightarrow q\ .\wedge.\ r \rightarrow s$

b. Notemos que si escribimos:

$p \wedge q\ .\!\rightarrow\!.\ \{[\sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q)] \leftrightarrow \sim p\}$

en el condicional hay mayor jerarquía debido a los puntos. Lo que también permite:

$p \wedge q\ .\!\rightarrow\!.\ [\sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q)] \leftrightarrow \sim p$

Si ahora suprimimos los corchetes:

$p \wedge q\ .\!\rightarrow\!.\ \sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim p$

perdemos la jerarquía del bicondicional. Y no es una solución escribir:

$p \wedge q\ .\!\rightarrow\!.\ \sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q)\ .\!\leftrightarrow\!.\ \sim p$

pues el primer condicional pierde su jerarquía. Esto nos obliga a usar más puntos auxiliares:

$p \wedge q\ :\!\rightarrow\!:\ \sim r \vee (p \leftrightarrow \sim q)\ .\!\leftrightarrow\!.\ \sim p$

Por un razonamiento análogo se llega a:

$p \wedge q\ .\!:\!\rightarrow\!:\!.\ \sim r\ .\!\vee\!.\ p \leftrightarrow \sim q\ :\!\leftrightarrow\!:\ \sim p$

c. Si una negación afecta un paréntesis, corchete o llave, no podemos suprimirlos, pues los puntos auxiliares no afectan conectores monádicos. Entonces:

$$p .\wedge. q \rightarrow \sim(\sim r .\wedge. p \rightarrow q :\vee: r)$$

d. La respuesta es:

$$\sim(p \wedge \sim r .\rightarrow. q) .:\vee:. r \leftrightarrow p :\vee: q \rightarrow r .\leftrightarrow. \sim p$$

Recordemos que fuera de estos ejercicios no usaremos más de un punto.

1.2. Esquemas de fórmulas

Hemos visto que la manera general de designar a las diferentes fórmulas de nuestro lenguaje es por medio de las letras 'A', 'B', 'C', etc. Pero, además, han aparecido las siguientes notaciones: '$A \rightarrow B$', '$\sim A$', '$A \wedge B$', entre otras. En estos casos nos referimos a fórmulas en las que se pone de relieve su conector principal, así '$A \rightarrow B$' se refiere indistintamente a cualquiera de las siguientes fórmulas:

$p \rightarrow q$,
$p \rightarrow p$,
$(p \vee q) \rightarrow s$,
$(p \rightarrow q .\wedge. r) \vee (t \wedge \sim q) .\rightarrow. (p \rightarrow q .\wedge. r)$, etc.

Todas fórmulas en las que el condicional es el conector principal.

Habrá observado el lector que '$p \rightarrow p$' corresponde tanto a '$A \rightarrow B$' como a '$A \rightarrow A$'. Esto se debe a que tanto 'A' como 'B' designan cualquier fórmula y, por lo tanto, fórmulas no necesariamente distintas entre sí. Cada expresión de esta notación genérica se denomina **esquema de fórmula**. Sirve, no sólo para resaltar el conector principal, sino también los secundarios, i.e. '$A \rightarrow (B \vee C) .\wedge. A$' se ejemplifica por:

$p \rightarrow (q \vee r) .\wedge. p$
$p \rightarrow (p \vee p) .\wedge. p$
$\sim p \rightarrow [(r \vee \sim r) \vee (r \rightarrow q)] .\wedge. \sim p$, etc.

Pero no se ejemplifica por:

$p \to (p \vee p)$
$\sim p \;.{\to}.\; [(r \vee \sim r) \vee (r \to q)] \wedge \sim s$

Debe notarse que A, B, C no pertenecen a LP sino a su metalenguaje, en este caso el castellano.

Ejercicios

1. Escriba dos fórmulas que correspondan al siguiente esquema.

   $A \to (B \wedge \sim A)$

2. Encuentre el esquema común a las siguientes fórmulas.

a. $(p \vee r \;.{\to}.\; \sim q) \vee \sim(p \vee r)$
b. $\sim p \to \sim(p \vee \sim q) \;.{\vee}.\; \sim\sim p$
c. $(\sim q \wedge \sim r) \to \sim r \;.{\vee}.\; \sim(\sim q \wedge \sim r)$

3. ¿Es la fórmula '$[\sim(p \leftrightarrow q) \to \sim(p \;.{\to}.\; q \to \sim r)] \vee (p \leftrightarrow q)$' una realización del esquema encontrado antes?

Solución:

1. Puesto que las metavariables A, B, C,... representan cualquier fórmula, si A es 'p' y B es '$q \vee r$' entonces '$p \to (q \vee r \;.{\wedge}.\; \sim p)$' es una realización del esquema dado. De la misma manera, la fórmula '$q \wedge r \;.{\to}.\; (q \wedge r) \wedge \sim(q \wedge r)$' es una instancia del mismo esquema tomando A y B como '$q \wedge r$'.

2. Notemos que en las fórmulas dadas la disyunción es el operador principal, por lo que el esquema buscado es de la forma: $(\ldots) \vee (\text{---})$. En las subfórmulas a la derecha de la disyunción se repite la negación que también formará parte del esquema. Además, como la negación afecta a subfórmulas que no tienen conectivos en común, la metavariable A las representará: $(\ldots) \vee \sim A$. En la parte izquierda de la disyunción se repite el condicional como conector principal, lo esquematizamos así: $(\ldots) \to (\text{---}) \;.{\vee}.\; \sim A$. En los tres casos (---) co-

rresponde a una negación, y (...) repite, en cada caso, lo que corresponde a A. Llegamos a:

$A \rightarrow \sim B .\vee. \sim A$

Obsérvese que también es posible: $A \rightarrow B .\vee. \sim A$, aunque con menor detalle.

3. No, ¿por qué?

2. INTERPRETACIÓN SEMÁNTICA DE LP

2.1. Las proposiciones simples y compuestas

Hemos dicho que las proposiciones se caracterizan por ser verdaderas o falsas. Ejemplos de oraciones que expresan o significan proposiciones son:

1. La nieve es blanca.
2. La nieve no es blanca.
3. La sangre es roja.
4. La nieve es blanca y la sangre es roja.

El primer y el segundo ejemplo tienen mucho en común, aunque difieren sustancialmente en sus valores de verdad, ya que si uno es verdadero el otro es falso y viceversa. Son **proposiciones contradictorias**, una es la negación de la otra, la segunda puede formarse a partir de la primera negándola. La cuarta se forma uniendo 1 y 3 con una conjunción. Y es claro que, a pesar de ser 4 una proposición por derecho propio, su verdad depende de alguna manera de la verdad de 1 y 3. Podemos decir que 4 es verdadera sólo si 1 y 3 lo son. Estos ejemplos muestran cómo a partir de proposiciones podemos formar otras cuyos valores de verdad dependen exclusivamente de las primeras. Este proceso de formación, que en el español logramos con 'no', 'y' y otras palabras similares, en el que el valor de verdad de la proposición compuesta es función de los valores de verdad de las proposiciones componentes, es reflejado en LP con los llamados 'conectores lógicos proposicionales'.

Vamos a estudiar el significado de los conectores lógicos. Para esto es indispensable distinguir entre **proposiciones simples o atómicas** y **pro-**

posiciones compuestas o moleculares. Las simples son aquéllas en las que no intervienen conectores lógicos en su formación; las compuestas, el resto.

Vale la pena discutir sucintamente esta caracterización de las proposiciones simples. Es negativa; se las reconoce por la ausencia de conectores y no por su presencia, lo que plantea algunos problemas. Dadas: 'La moneda es inestable' y 'La moneda es estable', ¿cuál es la proposición simple y cuál la compuesta? El prefijo 'in-' probablemente nos hará elegir la última como simple, pero esta elección se basa más en la estructura del lenguaje que en motivos lógicos. Si estamos hablando de una manzana que acabamos de probar, 'Esta manzana es buena' y 'Esta manzana es mala' son contradictorias sin lugar a dudas, pero ¿cómo decidir cuál lleva la negación? Esta arbitrariedad que ocurre, a veces, en los lenguajes naturales resalta el hecho que en ellos la decisión de qué proposiciones son simples y cuáles compuestas es relativa; es decir, parte de una base más o menos arbitraria. Pero una vez elegidas las simples, las compuestas se reconocen automáticamente.

Los lenguajes simbólicos tienen la ventaja de que no ofrecen esa ambigüedad. Las simples son las que hemos llamado 'símbolos proposicionales': 'p', 'q', 'r', etc. Además, en el lenguaje simbólico que hemos construido sólo aparecen conectores lógicos, aparte de los signos de puntuación; mientras que en un lenguaje natural aparecen miles de términos que no son conectores lógicos, peor aún, los que sirven de conectores lógicos cumplen otras funciones, como veremos cuando nos ocupemos de los lenguajes naturales. Por esto presentaremos a los conectores lógicos en su rol semántico en nuestro lenguaje simbólico y, sólo después, los buscaremos en el español.

2.2. Semántica del lenguaje simbólico proposicional

En la discusión que sigue 'proposición' significa proposición atómica o simple. Sabemos ya que una determinada proposición es verdadera si ocurre lo que enuncia:

> 'San Martín independizó al Perú' es verdadera si y sólo si San Martín independizó al Perú.

Con esta base es fácil inferir lo que ocurre con la falsedad. Así, dada una proposición, ésta será verdadera si el mundo está en un estado tal que ocurre lo que enuncia y será falsa si el estado del mundo es diferente. Para juzgar si una proposición es verdadera o falsa sólo nos interesan dos **estados posibles del mundo** con respecto a dicha proposición. Uno en que es verdadera, el estado del mundo es tal que acontece lo enunciado; y otro en el que es falsa, el mundo se halla en un estado en que no se da lo descrito por la proposición. Abreviaremos 'estados posibles del mundo' por 'EPM'.

Si consideramos dos proposiciones, por decir 'p' y 'q', tenemos que considerar dos EPM para determinar los valores de verdad de cada una. Si deseamos considerar las diferentes combinaciones de valores de verdad que pueden ocurrir tenemos:

1. 'p' verdadero y 'q' verdadero.
2. 'p' verdadero y 'q' falso.
3. 'p' falso y 'q' verdadero.
4. 'p' falso y 'q' falso.

Lo que acostumbraremos abreviar de la siguiente manera:

1. V[p] y V[q]
2. V[p] y F[q]
3. F[p] y V[q]
4. F[p] y F[q]

Es decir, que debemos interesarnos por cuatro EPM distintos cuando queremos encontrar los valores de verdad de dos proposiciones combinadas. Podemos considerar que cada uno de esos casos distingue un estado del mundo y que por lo tanto constituye una **descripción de un estado del mundo**, con dos proposiciones.

Dada una expresión A cualquiera en nuestro lenguaje también cabe que sea verdadera o falsa de acuerdo con el EPM que ocurra. Pero encontraremos proposiciones compuestas que sólo son verdaderas o sólo son falsas, al margen del EPM en que se esté.

En nuestra semántica buscamos seguir el llamado **principio de composicionalidad de Frege** que establece que el significado lógico (= valor de verdad) de una proposición compuesta depende del significado lógico de las partes que la componen. Mostraremos que la verdad o falsedad de una proposición compuesta depende de las simples que la componen, y de los conectores que en ellas aparezcan. Esto hace que los estados del mundo, que nos interesan para establecer la verdad o falsedad de nuestras fórmulas, queden descritos a partir de las proposiciones simples que aparecen en las fórmulas.

Además del principio fregueano, el lector debe saber que hay tres principios básicos que rigen nuestra semántica: (1) El de **identidad**, cada cosa es igual a sí misma, sin el cual no podríamos asignar un valor de verdad a una proposición determinada en un EPM dado. Este es un principio tan general que no deberíamos ni mencionarlo, está en la base de toda la realidad. Lo mencionamos porque deseamos diferenciarlo de una ley que tiene su nombre. (2) El de **bivalencia**, por el que sólo se consideran dos valores de verdad (verdadero y falso), también conocido como el principio del tercero excluido. (3) **El principio de no-contradicción**, una proposición no puede tener ambos valores de verdad al mismo tiempo.

Estos principios no deben confundirse con las fórmulas de nuestro lenguaje que tienen las formas:

$A \rightarrow A$ (llamada 'ley de identidad proposicional')
$A \vee {\sim}A$ (llamada 'ley del tercio excluso')
${\sim}(A \wedge {\sim}A)$ (llamada 'ley de no contradicción')

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes son proposiciones simples y cuáles compuestas.

a. Mafalda tomó sopa o helado.
b. Si los hombres son mortales entonces la especie está en extinción.
c. Los marineros besan y se van.
d. El Principito no podía comprender a la gente adulta.
e. Sal y Pimienta son hermanos.
f. Dime muchacha si no es mejor caminar hacia la muerte distraído.

2. ¿Cuántos "casos" distintos se presentan al considerar tres proposiciones atómicas? Descríbalos con la notación abreviada empleada en el orden 'p', 'q', y luego 'r'.

3. ¿Cuántos EPM distintos se presentan al considerar cuatro proposiciones atómicas? Descríbalos con la notación abreviada empleada en el orden alfabético.

4. ¿Cuántos EPM se presentan en general al considerar n proposiciones?

Solución:

1. La primera expresión 'Mafalda tomó sopa o helado' puede descomponerse en dos proposiciones simples: 'Mafalda tomó sopa' y 'Mafalda tomó helado', por lo tanto es una proposición compuesta. Lo mismo ocurre con (b) y (c).

   En la oración 'El Principito no podía comprender a la gente adulta' interviene la negación como conector lógico, por este motivo se trata también de una proposición compuesta.
   La oración 'Sal y Pimienta son hermanos' expresa una proposición simple porque no tiene sentido descomponerla en 'Sal es hermano' y 'Pimienta es hermano', pues éstas no dan lugar a proposiciones simples. Si la descomponemos en 'Sal es hermano de Pimienta' y 'Pimienta es hermano de Sal', en realidad no hemos desarmado la expresión original porque las tres tienen el mismo sentido y expresan una única proposición.
   El lector, seguramente ya se habrá percatado de que (f) no es una proposición sino una sugerencia.

2. Cada valor de 'q' puede asociarse a los dos valores de verdad de 'r', obteniéndose cuatro combinaciones. Cada una de éstas se puede combinar con cada uno de los dos valores de verdad de 'p' llegándose a ocho combinaciones: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

Las combinaciones son:

1. V[p], V[q], V[r]
2. V[p], V[q], F[r]
3. V[p], F[q], V[r]
4. V[p], F[q], F[r]

5. F[p], V[q], V[r]
6. F[p], V[q], F[r]
7. F[p], F[q], V[r]
8. F[p], F[q], F[r]

3. En este caso se tiene, por un razonamiento análogo al anterior, 16 EPM distintos. Es decir, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$. Descríbalos en el orden alfabético.

4. En general, el número de EPM que se puede distinguir con n proposiciones simples distintas es:

$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$
n veces

La prueba requiere el uso de inducción matemática.

3. LOS CONECTORES LÓGICOS

3.1. La negación y la conjunción

Nuestra semántica es muy pobre; una proposición sólo posee dos posibles valores de verdad: verdad y falsedad. Esto vale para toda proposición simple o compuesta. Sin embargo, conocido el valor de verdad de una proposición simple podemos hallar el de todas las proposiciones compuestas formadas exclusivamente con ella. Y lo mismo ocurre con las expresiones en que intervienen varias proposiciones simples. Primero estudiaremos el conector negación que sólo utiliza una proposición (una sola vez) para formar una compuesta.

3.1.1. La negación

'~p' es un ejemplo de proposición compuesta formada por un conector, la negación, que sólo utiliza una proposición simple. Es el único conector monádico de nuestro lenguaje. Y su interpretación es obvia: la proposición compuesta tiene el valor contrario que la proposición simple que la forma. Esta regla semántica puede resumirse de dos formas:

1. V[~p] F[~p]
   | |
   F[p] V[p]

Es decir, '~p' es verdadero en el EPM en que 'p' es falso y '~p' es falso en el EPM en que 'p' es verdadero. Esta disposición de la información es la que utilizan los **diagramas semánticos**. Otra manera de resumirlo es a través de la disposición en **tablas de verdad**:

2.

p	~p
V	F
F	V

en la que cada línea debajo de la raya horizontal señala qué ocurre con '~p' dado el valor de 'p'.

El lector que recuerde algunas de las fórmulas que pueden aparecer en nuestro lenguaje sabe que la negación no sólo forma nuevas proposiciones a partir de proposiciones simples, sino que también lo hace a partir de proposiciones compuestas. Por ejemplo, a partir de 'p → q' puedo formar '~(p → q)', esto y el hecho de que debo poder interpretar '~q' también (y no sólo '~p'), nos muestra que nuestra caracterización de la negación debe generalizarse de '~p' a su empleo con cualquier fórmula. En general, debemos poder interpretar una fórmula negada cualquiera ~A. Así rectificamos:

1. V[~A] F[~A]
   | |
   F[A] V[A]

2.

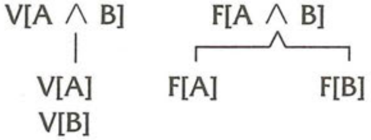
A	~A
V	F
F	V

En ambos casos se rescata lo sustantivo: la negación modifica el valor de verdad de la fórmula negada. Pero mientras A no sea una proposición simple, no llegaremos a determinar un EPM.

3.1.2. La conjunción

'p ∧ q', '~p ∧ q', '(~p → q) ∧ (r ∨ ~s)' son todas fórmulas conjuntivas, su esquema genérico es A ∧ B. La conjunción establece la verdad de ellas sólo si las dos fórmulas que la componen son verdaderas, es falsa en todo otro caso. Es decir, basta que uno de los componentes de la conjunción sea falso para que la conjunción lo sea. Resumiendo:

1.



2.

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Leamos (1) La primera parte nos dice que si la proposición representada por A ∧ B es verdadera, las expresiones representadas por A y B lo son. Dice esto poniendo V[A ∧ B] encima de V[A] y de V[B]. La segunda parte, en cambio, dice que si A ∧ B es falsa, basta que lo sea A o B. Dice esto poniendo F[A ∧ B] y debajo las dos posibilidades (F[A] o F[B]) como dos ramas, cada rama representa uno de los casos. Nótese que en el caso F[A] nada se dice sobre el valor de verdad de B; y lo mismo ocurre en la rama F[B], A puede tener cualquier valor de verdad. En particular, ninguna de las ramas se opone a que tanto A como B sean falsas.

En (2) se presenta lo que ocurre en cada uno de los 4 casos posibles. Cada línea describe el valor que toma la conjunción conocidos los valores de verdad de sus componentes.

La diferencia entre estos dos modos de definir a los conectores lógicos estriba en que en (1), **regla del diagrama semántico**, a partir del valor de la conjunción se llega a los de sus componentes, en cambio en (2), **regla de la tabla de verdad**, dados los valores de verdad de los componentes se establece el de la conjunción. El lector debe tener en cuenta que ambos son equivalentes.

Veamos dos ejemplos:

1. Encontrar los diferentes valores de verdad de '~p ∧ q' y '~(p ∧ q) ∧ r' por los dos sistemas.

Empezaremos por el sistema más conocido, las tablas de verdad. La tabla de verdad de la primera fórmula es:

p	q	~	p	∧	q
V	V	F		F	
V	F	F		F	
F	V	V		V	
F	F	V		F	

¿Cómo se ha construido la tabla? Primero se construye el esquema de la misma en función del número de proposiciones atómicas que aparecen:

p	q	~	p	∧	q
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Luego debe determinarse la estructura de la fórmula a evaluar, en este caso, es una conjunción: A ∧ B. En ella B es 'q' por tanto tenemos su valor de verdad para cada caso (para cada línea, o para cada EPM lo que usted prefiera) en la parte izquierda de la tabla. A es '~p', y no conocemos sus valores de verdad en cada caso. Como necesitamos conocer los valores de verdad de A y B en cada EPM para calcular los de la conjunción, nuestra primera tarea consiste en evaluar A. Ya que A es de la forma ~C, donde C reemplaza a una proposición simple 'p' cuyos valores de verdad se conocen, podemos evaluar A. Y procedemos a hacerlo:

p	q	~	p	∧	q
V	V	F			
V	F	F			
F	V	V			
F	F	V			

Conocidos los valores de verdad de '~p' y 'q', es fácil "calcular" los de la fórmula en su totalidad colocándolos para cada EPM bajo el conector más importante (∧):

p	q	~p	∧	q
V	V	F	F	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	F	V	F	

2. La segunda fórmula '~(p ∧ q) ∧ r' tiene la forma A ∧ B donde B es 'r' y A posee la estructura ~C siendo C una conjunción de proposiciones simples. Escribamos primero la forma de la tabla:

p	q	r	~(p ∧ q) ∧ r
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Hecho esto procedemos paso a paso, calculamos 'p ∧ q':

p	q	r	~(p	∧	q)	∧	r
V	V	V		V			
V	V	F		V			
V	F	V		F			
V	F	F		F			
F	V	V		F			
F	V	F		F			
F	F	V		F			
F	F	F		F			

luego su negación:

p	q	r	~	(p	∧	q)	∧	r
V	V	V	F		V			
V	V	F	F		V			
V	F	V	V		F			
V	F	F	V		F			
F	V	V	V		F			
F	V	F	V		F			
F	F	V	V		F			
F	F	F	V		F			

y, por último, el conector más importante en la fórmula:

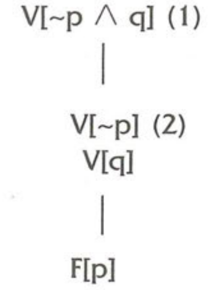
p	q	r	~	(p	∧	q)	∧	r
V	V	V	F		V		F	
V	V	F	F		V		F	
V	F	V	V		F		V	
V	F	F	V		F		F	
F	V	V	V		F		V	
F	V	F	V		F		F	
F	F	V	V		F		V	
F	F	F	V		F		F	

con lo que tenemos el valor de verdad de la fórmula en cada EPM.

En resumen, planteada la forma de la tabla se procede a evaluar los conectores en los que se conoce el valor de las proposiciones que unen (al comienzo siempre son conectores con proposiciones simples). Luego, se hace lo mismo con aquellos cuyos componentes ya han sido evaluados, y así sucesivamente hasta llegar al conector principal.

Sólo nos falta ver cómo se encuentra la forma de la tabla. En las páginas anteriores tiene el lector ejemplos para fórmulas con 1, 2 y 3 proposiciones atómicas. Reflexione sobre ellas y resuelva el caso para 4 y 5 proposiciones simples (vea los ejercicios resueltos). Debe tener cuidado en **respetar el orden alfabético de las variables proposicionales de izquierda a derecha**, porque es el que seguiremos siempre.

Evaluemos ahora las mismas fórmulas con el método de los diagramas semánticos. Este sistema nos permite elegir entre dos puntos de partida diferentes: el primero, suponiendo verdadera la fórmula, nos dirá en qué EPM lo es; el segundo, suponiendo falsa la fórmula, nos dirá cuándo es falsa. Empecemos suponiéndola verdadera:

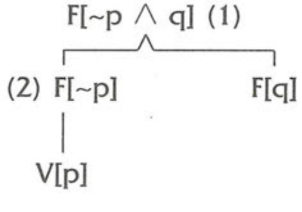


La fórmula (1) es conjuntiva; aplicamos la regla V[A ∧ B].

Aplicamos la regla V[~A] a la fórmula (2).

El diagrama termina ahí pues las únicas fórmulas no analizadas son proposiciones simples, y una fórmula compuesta sólo se analiza una vez. El diagrama consta de una sola rama, en ella, entre otras, se dice F[p] y V[q]; es decir, que la fórmula es verdadera en el EPM en que 'p' es falso y 'q' verdadero. Si se examina la tabla de verdad para esta fórmula veremos que hemos llegado al mismo resultado. Con el diagrama sabemos que de los cuatro EPM posibles relativos a nuestra fórmula con dos proposiciones simples, ésta es verdadera sólo en el tercero. Su tabla de verdad debe ser: FFVF, supuesto el convenio de respetar el orden alfabético al confeccionar la tabla.

En el caso anterior tuvimos la suerte de que la fórmula no se abriese en más de una rama, lo que es usual; y, sobre todo, que en la rama se describiese un único EPM. Generalmente, una rama puede esconder información acerca de más de un EPM. Veamos lo que ocurre con la misma fórmula partiendo de su falsedad:



Aplicamos la regla F[A ∧ B] que se descompone en dos ramas.

La primera rama (fórmula con el número 2) tiene todavía que analizarse con la regla F[~A].

Nuestro diagrama nos ofrece dos casos en que la fórmula puede ser falsa: cuando 'p' es verdadero (rama 1) ó cuando 'q' es falso (rama 2)

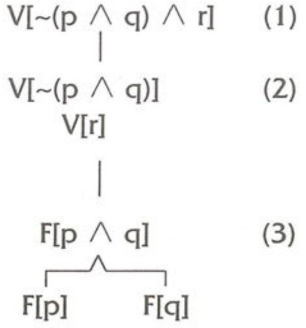
Nótese que ninguna de las ramas describe un EPM. Sabemos que hay 4 EPM para esta fórmula, ¿cuáles son aquéllos en que es falsa? Necesitamos analizar la información de cada rama. La primera nos dice cuando V[p] y esto ocurre tanto si 'q' es verdadero cuanto si es falso; por tanto, la primera rama resume los EPM V[p] con V[q], y V[p] con F[q]; es decir, los EPM 1 y 2. La segunda rama al contemplar sólo F[q] se refiere a los EPM 2 (V[p] y F[q]) y 4 (F[p] y F[q]). Juntando la información de ambas ramas tenemos que '$\sim p \wedge q$' es falsa en los EPM 1, 2 y 4. Sus valores de verdad, como era de esperar, son FFVF. Una forma más cómoda de efectuar lo anterior es poner a continuación del diagrama semántico lo siguiente:

Análisis de ramas	EPM
1. V[p], ---	1,2
2. ---, F[q]	2,4
	1,2,4: FFVF

Las líneas punteadas recuerdan que falta información en la rama acerca de una de las proposiciones y conviene ponerlas en el lugar en que debería aparecer la proposición. A la derecha de la rama se escriben los EPM que corresponden. Notará el lector que el orden de los EPM es el mismo que se estableció al hacer las tablas de verdad. Por último, debajo, resumimos la información y damos los valores de verdad de la fórmula.

Deseamos en forma muy especial que el lector note en todos los diagramas semánticos (DS) presentados, los números que acompañan a las fórmulas (no a las fórmulas atómicas, por cierto). El propósito de esa numeración es indicar en qué orden se han ido analizando las fórmulas en el diagrama, permitiendo que cualquier persona reconstruya el procedimiento. Es fundamental que el lector respete esta costumbre al efectuar un DS. Hasta ahora puede no parecer muy importante hacerlo, pero más adelante veremos diagramas más complicados por la cantidad de pasos donde, además, fórmulas que aparecen en las primeras líneas son analizadas después de otras que están en las últimas.

En general, en cada paso del DS es fácil darse cuenta de qué regla se aplica, por lo que no es necesario decirlo en el diagrama. Veámoslo con la otra fórmula.



Análisis de ramas	EPM
1. F[p], ---, V[r]	5,7
2. ---, F[q], V[r]	3,7

3,5,7: FFVF VFVF

Nuevamente, los EPM involucrados en cada rama se reconocen y numeran con el mismo orden que tendrían en la tabla de verdad. Para evitar dudas escribimos, por última vez, dicho orden numerándolo para los tres casos más usuales:

p	EPM
V	1
F	2

p q	EPM
V V	1
V F	2
F V	3
F F	4

p q r	EPM
V V V	1
V V F	2
V F V	3
V F F	4
F V V	5
F V F	6
F F V	7
F F F	8

Ejercicios

1. Usando DS reconstruya la tabla de verdad (encuentre los valores de verdad) de:

   ~[~(~r ∧ p) ∧ (~p ∧ ~q)] ∧ ~(~p ∧ q)

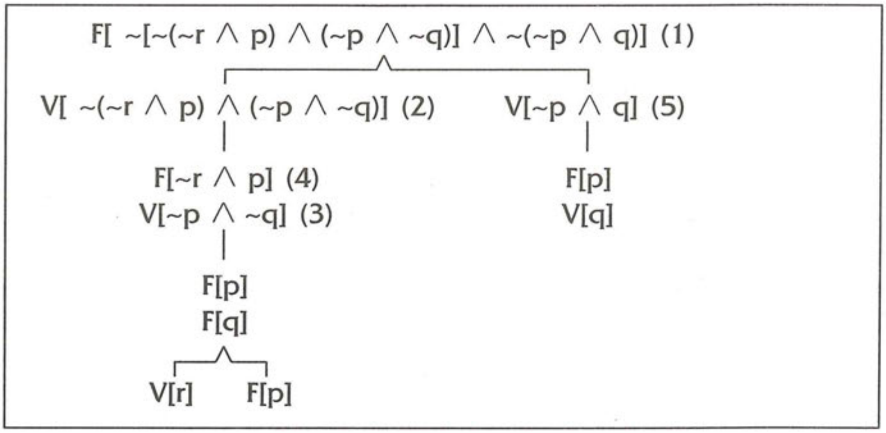
2. Si A → B tiene la misma tabla de verdad que ~(A ∧ ~B), encuentre las reglas de los DS de A → B.

3. Usando el ejercicio anterior encuentre, por DS, los EPM en los que es falsa:

$$p \wedge \sim r \;.\!\rightarrow\!.\; \sim(q \wedge r) \rightarrow q$$

Solución:

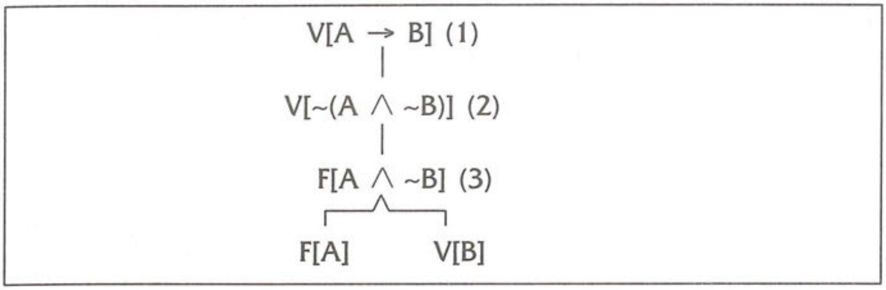
1. Si suponemos falsa la fórmula, el DS nos dirá al final en qué EPM es falsa:



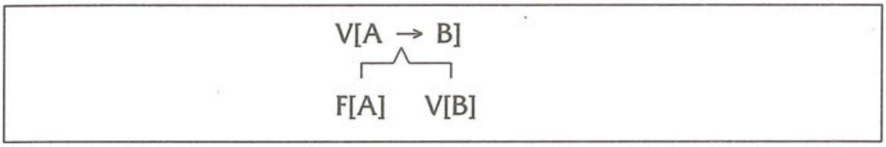
Notará el lector que, tratándose de un ejercicio, muchos pasos han sido suprimidos.

Análisis de ramas		EPM
1.	F[p], F[q], V[r]	7
2.	F[p], F[q], ---	7,8
3.	F[p], V[q], ---	5,6
		5,6,7,8: VVVV FFFF

2. Si A → B y ~(A ∧ ~B) tienen la misma tabla de verdad, también tendrán los mismos DS. Aclaremos: tendrán los mismos DS, no en tanto igual gráfico, sino en tanto análisis de sus ramas (¿por qué?); de esta manera:



En resumen:



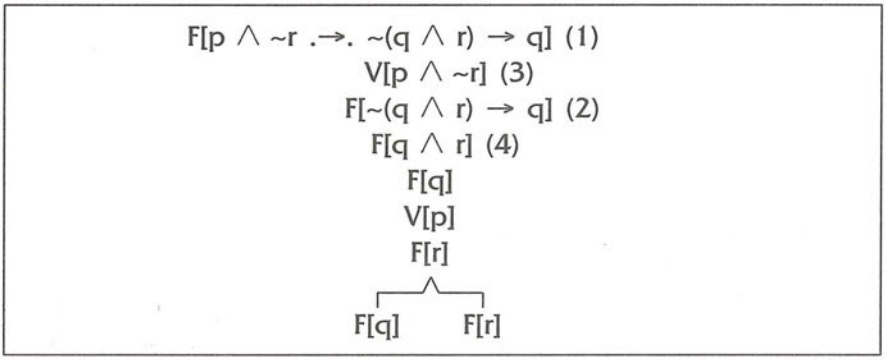
Del mismo modo se halla:

$F[A \to B]$

$V[A]$

$F[B]$

3. Supongamos que la fórmula es falsa y apliquemos el resultado anterior:



Nótese que en el DS nos ahorramos las rayas verticales, de ahora en adelante sólo señalaremos las bifurcaciones de ramas.

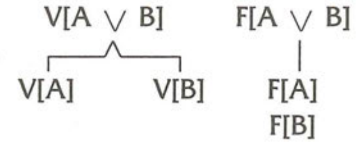
Análisis de ramas	EPM
1. V[p], F[q], F[r]	2
2. V[p], F[q], F[r]	2

La fórmula es falsa en el EPM cuya descripción es: V[p], V[q], F[r]. Nótese que si bien hay dos ramas, ambas refieren al mismo EPM.

3.2. La disyunción. Algunas propiedades

Es un conector que privilegia la verdad de las fórmulas que liga, dicho en términos más formales: es verdadero siempre que lo sea una de las fórmulas que une y, por tanto, sólo es falso si las dos fórmulas que une lo son. Esquemáticamente:

1.



2.

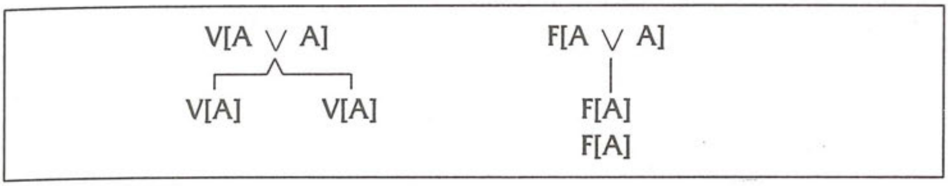
A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción se asemeja a la conjunción, en cuanto sus valores de verdad son tres iguales y uno diferente; pero se distingue en que en la conjunción se impone la falsedad de los componentes. Sin embargo, esta semejanza nos hace esperar que se comporten formalmente, en algunos aspectos, del mismo modo, pues ambas son **idempotentes, conmutativas y asociativas**. Veamos en detalle cada una de estas características:

El que a una operación se la llame 'idempotente', se usa en matemáticas para indicar que ella no modifica aquello a lo que se aplica. No hay ejemplos evidentes en la aritmética elemental; pero sí en la teoría de conjuntos, donde tanto la reunión como la intersección de conjuntos son operaciones idempotentes. En nuestro caso la idempotencia se da:

A ∧ A es lo *mismo* que A
A ∨ A es lo *mismo* que A

No decimos que 'p ∨ p' es lo mismo que 'p', sino que lo generalizamos para cualquier proposición, incluidas las compuestas. "Es lo mismo" quiere decir que tienen iguales valores de verdad; la diferencia sintáctica entre A ∨ A y A no se refleja en una diferencia semántica, son expresiones sinónimas, por así decirlo. Para probarlo analizaremos cuándo es verdadera o falsa cada una de las expresiones complejas, por ejemplo:



es decir, la disyunción es verdadera cuando lo es A y es falsa cuando lo es A, las recíprocas son inmediatas lo que completa la prueba. Puede (debe) probarse lo mismo para la conjunción.

La conmutatividad expresa que, desde un punto de vista semántico, no interesa el orden en que aparecen las fórmulas que intervienen en la conjunción y en la disyunción:

$A \vee B$ tiene los mismos valores de verdad que $B \vee A$
$A \wedge B$ tiene los mismos valores de verdad que $B \wedge A$

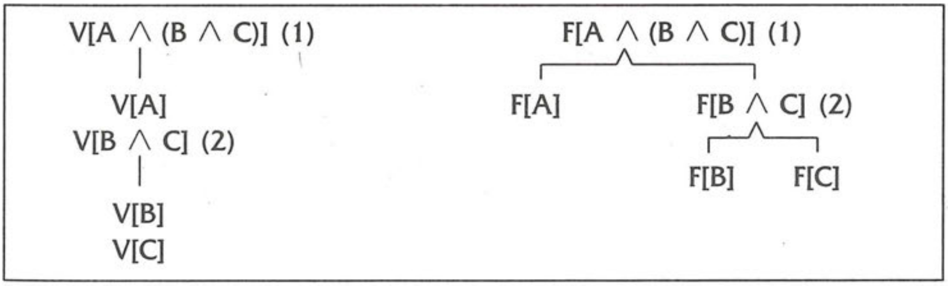
Afirmaciones que podemos probar, por ejemplo, del modo siguiente:

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

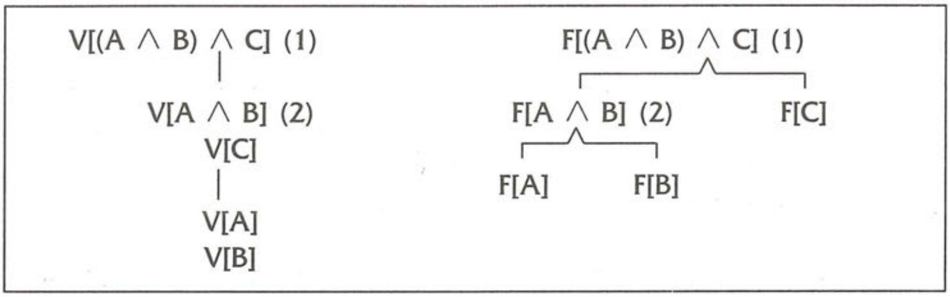
La disyunción tiene la misma propiedad, como debe comprobarlo el lector. Por último, la asociatividad establece la igualdad semántica de:

$A \wedge (B \wedge C)$ y $(A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C)$ y $(A \vee B) \vee C$.

Probemos uno de los casos:



Es verdadera si lo son las tres fórmulas que aparecen y falsa cuando por lo menos una lo es, y lo mismo ocurre con:



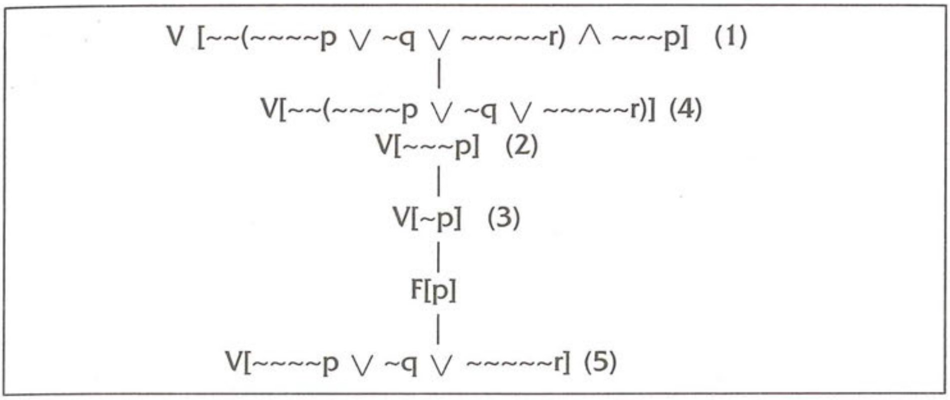
lo que cierra la prueba. La asociatividad permite ahorrar paréntesis al escribir fórmulas para su análisis semántico, pues en '$p \wedge q \wedge r$' y '$p \vee q \vee r$' puede asumirse la jerarquía que se desee; los paréntesis son innecesarios. Las consideraremos FBF a partir de ahora, así como todas aquellas generadas por los esquemas de fórmulas estudiados. La asociatividad puede generalizarse para n fórmulas, por lo que aceptaremos como FBF a: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, y a: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, o mejor dicho a todas sus instancias. Igualmente ahorraremos tiempo estableciendo desde esta línea en adelante el libre uso de la conmutatividad y la idempotencia establecidas en los análisis semánticos.

Probablemente, el lector habrá escuchado hablar de **la ley de la doble negación** que no es más que la sinonimia lógica entre '$\sim\sim A$' y 'A'. Su validez es fácil de comprobar debido a que la negación alterna los valores de verdad, por lo que la segunda negación anula el efecto de la negación que la precede. Utilizaremos esta ley de ahora en adelante.

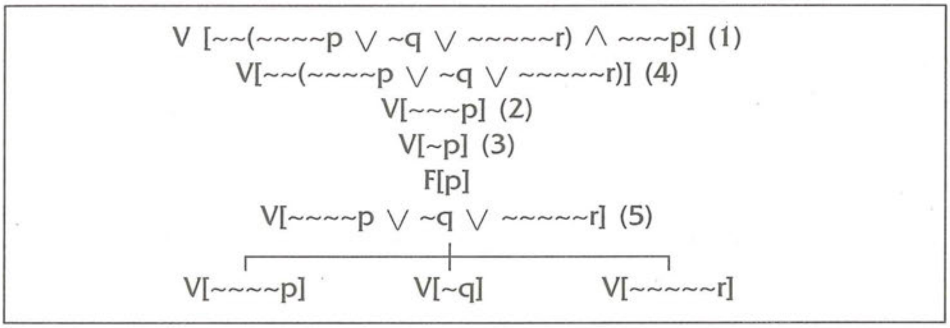
Veamos un ejemplo de aplicación de estas propiedades de los conectores analizando la verdad de '$\sim\sim(\sim\sim\sim\sim p \vee \sim q \vee \sim\sim\sim\sim\sim\sim r) \wedge \sim\sim\sim p$':

$$V\,[\sim\sim(\sim\sim\sim\sim p \vee \sim q \vee \sim\sim\sim\sim\sim\sim r) \wedge \sim\sim\sim p]\ (1)$$
$$|$$
$$V[\sim\sim(\sim\sim\sim\sim p \vee \sim q \vee \sim\sim\sim\sim\sim\sim r)]$$
$$V[\sim\sim\sim p]\ \ (2)$$

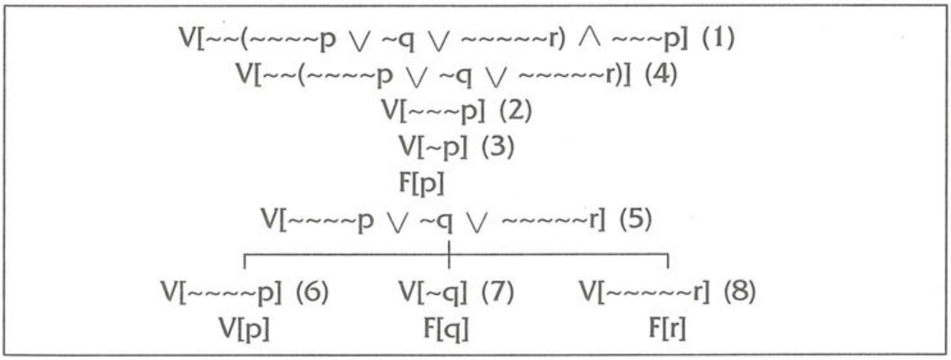
Hasta aquí no hay ninguna dificultad especial en el diagrama; pero si ahora deseamos continuar trabajando con la fórmula (2), podemos ahorrarnos esfuerzos aplicando la ley de la doble negación y después seguir con la fórmula de la segunda línea, obteniendo:



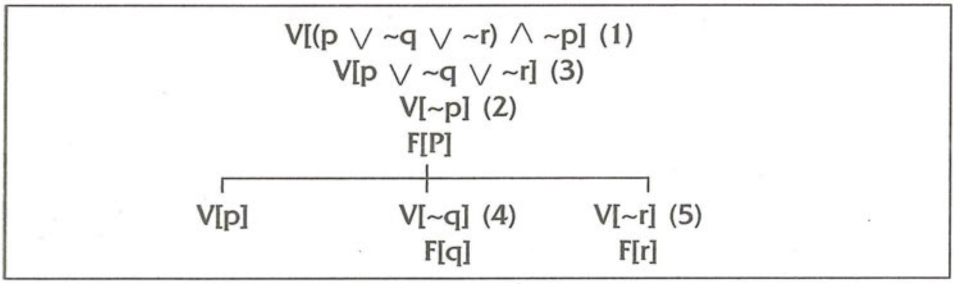
Para leer el diagrama debe recordar el lector que los números no indican el orden en que aparecieron las fórmulas, sino aquel en que han sido utilizadas de acuerdo con las reglas de los diagramas semánticos. ¿Cómo trabajar con (5)? Hay tres caminos: el primero, asumir como más importante la primera disyunción; el segundo, hacerlo con la segunda disyunción y el tercero, que seguiremos, trabajar con ambas al mismo tiempo:



Obtenemos así, en un solo paso, las tres ramas que hubiésemos obtenido con los caminos primero y segundo en dos pasos. Seguimos con lo que queda aplicando doble negación y las reglas usuales:



Note el lector lo que se ha hecho en los pasos (6) y (8), aplicando dos veces la doble negación. Lo mismo hubiese sido preferible hacer al inicio del diagrama. Es decir, propuesta la fórmula, iniciar el diagrama con la fórmula simplificada:



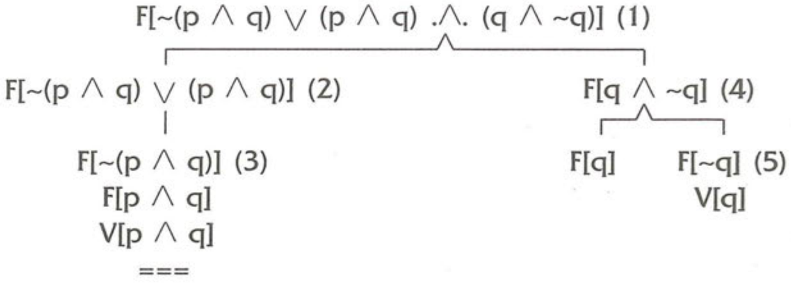
con idénticos resultados en menos pasos.

El diagrama presenta, además un hecho singular muy importante en la primera rama, que vamos a descubrir al analizarla:

Análisis de ramas					EPM
1.	F[p],	V[p],	---,	---	??
2.	F[p],	---,	F[q],	---	7,8
3.	F[p],	---,	---,	F[r]	6,8
					6,7,8: FFFF FVVV

La primera rama contiene la afirmación que 'p' es verdadera y falsa al mismo tiempo. ¿Qué significa esta violación del principio de no-contradicción que supuestamente gobierna nuestra semántica? Simplemente que no es viable, esa rama no conduce a un EPM en que la fórmula sea verdadera. Puede alterarnos el que un DS nos conduzca a aparentes callejones sin salida y hacernos desconfiar del método; pero si reflexionamos sobre el sentido de los DS, veremos que era de esperar y, más aún, es deseable. Los DS, buscan encontrar los casos (EPM) en que la hipótesis de partida se cumple y así van contruyendo las posibles alternativas (ramas) en que puede ocurrir; si una de ellas no es viable deben advertirlo. La forma como un DS nos indica que una rama no conduce a un EPM en el que se cumpla la hipótesis es presentando una contradicción; es decir, poniendo en la rama F[A] y V[A] en cualquier orden. De ahora en adelante aquellas ramas en que se presenten contradicciones las "cerraremos" poniendo '==='. Esto quiere decir que no interesan para el análisis.

Veamos otro caso:



Análisis de ramas	EPM
1. ---, F[q]	2,4
2. ---, V[q]	1,3
	1,2,3,4: FFFF

Nótese que la rama cerrada ni siquiera cuenta como primera rama para el análisis, simplemente se ignora.

Ejercicios

1. Mediante un análisis por DS, describa los EPM en que son falsas:

a. $\sim\sim[\sim\sim(p \wedge \sim\sim\sim q) \wedge r\ .\vee.\ p \wedge (\sim q \wedge \sim\sim r)] \wedge [\sim(q \vee r) \wedge \sim\sim\sim p]$
b. $\sim\sim\sim p \wedge \sim r\ .\vee.\ (\sim\sim q \vee \sim r) \wedge \sim\sim\sim q$
c. $[\sim(\sim\sim q \wedge \sim r) \vee \sim\sim\sim(q \wedge \sim\sim\sim r)] \wedge \sim\sim(p \wedge \sim q]$

2. Demuestre la propiedad asociativa de la disyunción.

Solución:

1. Aplicaremos doble negación, asociatividad e idempotencia para simplificar los DS.

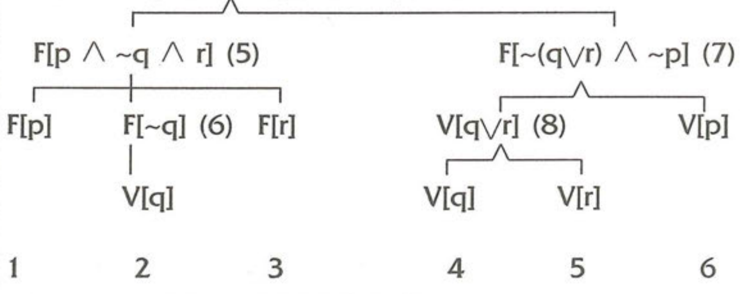
(a)

$F[\sim\sim[\sim\sim(p\wedge\sim\sim\sim q) \wedge r .\vee. p \wedge (\sim q\wedge\sim\sim r)] \wedge [\sim(q\vee r) \wedge\sim\sim\sim p]]$ (1)

$F[[(p\wedge\sim q) \wedge r .\vee. p \wedge (\sim q\wedge r)] \wedge [\sim(q\vee r) \wedge \sim p]]$ (2)

$F[[p \wedge (\sim q\wedge r) .\vee. p \wedge (\sim q\wedge r)] \wedge [\sim(q\vee r) \wedge \sim p]]$ (3) Por asoc.

$F[p \wedge (\sim q\wedge r) \wedge \sim(q\vee r) \wedge \sim p]$ (4) Por idemp.



Hemos numerado las ramas como ayuda.

Análisis de ramas				EPM
1.	F[p],	---,	---	5,6,7,8
2.	---,	V[q],	---	1,2,5,6
3.	---,	---,	F[r]	2,4,6,8
4.	---,	V[q],	---	1,2,5,6
5.	---,	---,	V[r]	1,3,5,7
6.	V[p],	---,	---	1,2,3,4
				1,2,3,4,5,6,7,8

La fórmula es falsa en todos los EPM.

b. Procediendo en forma análoga se encontrará que la fórmula es falsa en las siguientes ramas:

1.	V[p],	F[q],	V[r]
2.	V[p],	V[q],	---
3.	---,	F[q],	V[r]
4.	---,	V[q],	V[r]

Usted puede haber encontrado la misma información en otra configuración de las ramas. Verifíquelo encontrando los EPM en cada caso.

c. Llegará a que es falsa en las ramas:

1. ---, V[q], F[r]
2. F[p], ---, ---
3. ---, V[q], ---

Complete las descripciones.

2. Tenemos que probar que $A \vee (B \vee C)$ equivale a $(A \vee B) \vee C$:

$F[A \vee (B \vee C)]$ (1)	$F[(A \vee B) \vee C]$ (1)
$F[A]$	$F[A \vee B]$ (2)
$F[B \vee C]$ (2)	$F[C]$
$F[B]$	$F[A]$
$F[C]$	$F[B]$

La primera fórmula es falsa siempre que lo son las fórmulas A, B y C, y sólo en ese caso; la segunda fórmula también es falsa en el mismo caso, de ahí que son equivalentes. Luego, la disyunción es asociativa.

3.3. El condicional y el bicondicional

Procederemos a definir rápidamente los otros conectores de nuestro lenguaje con los dos métodos que disponemos para hacerlo.

3.3.1. El condicional

A este conector se le asignan los siguientes valores de verdad: $A \to B$ es verdadero en todos los casos, salvo cuando el antecedente (A) es verdadero y el consecuente (B) falso.

1. V[A → B]

F[A]   V[B]

F[A → B]

V[A]

F[B]

2.

A B	A → B
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

En el condicional lo que se desea poner de manifiesto es que si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, el condicional es falso. En todos los otros casos es verdadero, aun si el antecedente y el consecuente son falsos.

En general, es más fácil recordar las definiciones de los caracteres por sus singularidades; así, podemos resumir la conjunción como el conector que sólo es verdadero si lo son sus dos componentes, la disyunción como aquél que sólo es falso si lo son sus dos componentes, el condicional como aquél que sólo es falso si el primer componente es verdadero y el segundo falso.

Si bien el condicional tiene tres valores de verdad iguales (es verdadero en tres de los cuatro casos) se distingue de la conjunción y de la disyunción en que éstos no están juntos en la tabla de verdad, así no deben de esperarse las mismas propiedades. Por ejemplo, la idempotencia no se cumple:

F[A → A]
V[A]
F[A]
===

El DS nos dice que una fórmula con la estructura A → A no puede ser falsa; mientras que una fórmula cualquiera, por ejemplo 'p', bien puede ser falsa; lo que establece que A → A y A no tienen los mismos valores de verdad necesariamente. Tampoco cumple el condicional la conmutatividad ni la asociatividad.

3.3.2. El bicondicional

Se define como el conector que sólo es verdadero si sus dos componentes tienen igual valor de verdad (ambos verdaderos o ambos falsos), luego es falso en los otros dos casos en que difieren sus valores de verdad. Precisemos nuestra definición:

1. Por tablas de verdad.

A	B	A ↔ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2. Por diagramas semánticos.

$$\begin{array}{c} V[A \leftrightarrow B] \\ \overbrace{\begin{array}{cc} V[A] & F[A] \\ V[B] & F[B] \end{array}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F[A \leftrightarrow B] \\ \overbrace{\begin{array}{cc} V[A] & F[A] \\ F[B] & V[B] \end{array}} \end{array}$$

De la inspección ocular, más algo de imaginación geométrica, puede apreciarse una cierta simetría en los valores de verdad del bicondicional respecto de sus componentes. Simetría que parece sugerir algunas propiedades como la conmutatividad. ¿Será idempotente, conmutativo o asociativo? Por otro lado, su nombre 'bicondicional' sugiere una relación especial con el condicional. ¿Cuál? Con las herramientas que poseemos podemos responder a éstas y otras preguntas que se nos ocurran.

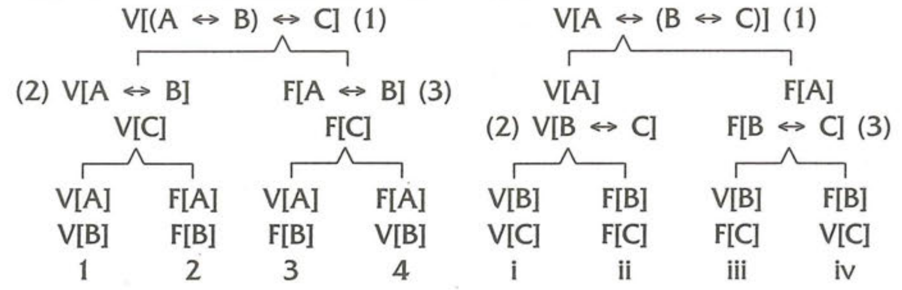
Veamos la idempotencia, ¿desde el punto de vista semántico es lo mismo A ↔ A que A, es decir, tienen los mismos valores de verdad? Apliquemos una de nuestras herramientas:

$$\begin{array}{c} F[A \leftrightarrow A] \\ \overbrace{\begin{array}{cc} V[A] & F[A] \\ F[A] & V[A] \\ === & === \end{array}} \end{array}$$

Nuevamente un resultado curioso, las fórmulas del tipo A ↔ A no pueden ser falsas. Obviamente no hay idempotencia, pues A sí puede serlo. Examinemos la conmutatividad por tablas de verdad:

A	B	$A \leftrightarrow B$	versus	$B \leftrightarrow A$
V	V	V		V
V	F	F		F
F	V	F		F
F	F	V		V

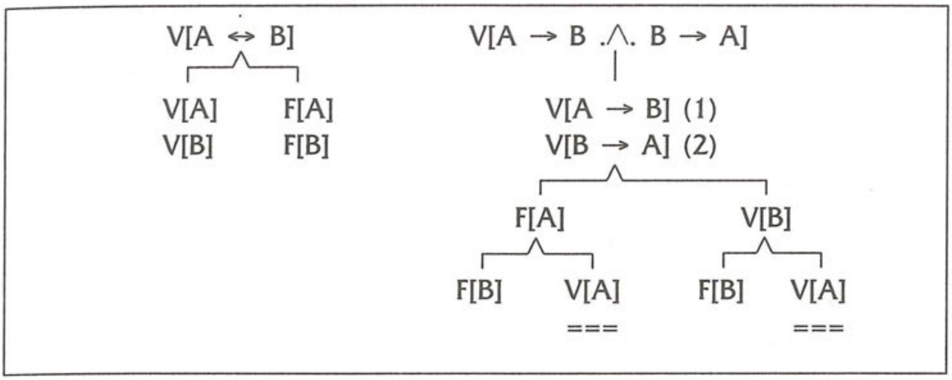
La respuesta es que es conmutativa. Veamos ahora la asociatividad:



Análisis de ramas (ordenadas para resaltar las iguales)

1.	V[A],	V[B],	V[C]	i)	V[A],	V[B],	V[C]
2.	F[A],	F[B],	V[C]	iv)	F[A],	F[B],	V[C]
3.	V[A],	F[B],	F[C]	ii)	V[A],	F[B],	F[C]
4.	F[A],	V[B],	F[C]	iii)	F[A],	V[B],	F[C]

Como se aprecia, los valores de verdad de las fórmulas son los mismos para los mismos valores de verdad de los componentes. Tal vez el lector tenga alguna duda y se pregunte: ¿no debemos examinar los mismos esquemas a partir de su falsedad? Puede hacerse y los resultados confirmarán los anteriores; pero no es necesario porque al considerar sólo dos valores de verdad, si conocemos los casos en que se produce uno (verdad), conocemos por ausencia aquellos en que aparece el otro (falso). Nos falta responder a la pregunta acerca del nombre: ¿esconde dos condicionales el bicondicional? La respuesta es sí, en el siguiente sentido: $A \leftrightarrow B$ tiene los mismos valores de verdad que $A \rightarrow B\ .\wedge.\ B \rightarrow A$. Lo que de paso permite entender la elección del símbolo '$\leftrightarrow$'. Probemos la afirmación:



A simple vista se aprecia la igualdad de los valores de verdad.

Con esto hemos definido la semántica de nuestros operadores y de paso nos hemos adiestrado en la técnica de los DS. Además, hemos demostrado algunas propiedades semánticas de los operadores que resumimos:

Negación:	$\sim\sim A$ equivale a A
Disyunción y conjunción:	idempotentes, conmutativas y asociativas.
Bicondicional:	conmutativo y asociativo.

Estas propiedades se pueden usar para simplificar los DS cuando se juzgue necesario.

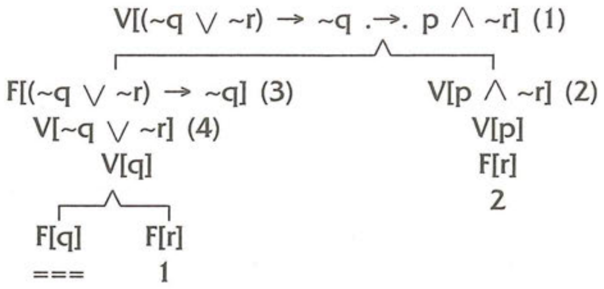
Ejercicios

1. Encuentre por DS los EPM en que son verdaderas:

a. $(\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim q \;.\!\rightarrow\!.\; p \wedge \sim r$
b. $\sim[\sim p \wedge \sim q \;.\!\vee\!.\; p \wedge (\sim p \vee q)] \rightarrow \sim(p \vee q)$
c. $\sim[p \rightarrow (q \rightarrow r) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Solución:

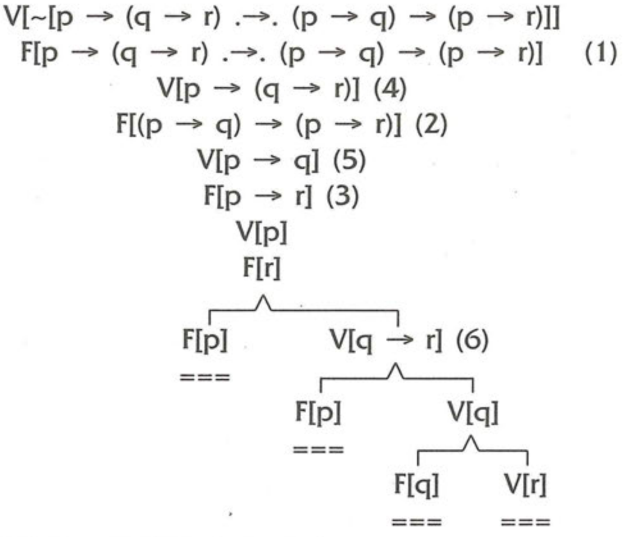
a.



Análisis de ramas				EPM
1.	---,	V[q],	F[r]	2,6
2.	V[p],	---,	F[r]	2,4
				2,4,6

b. Las descripciones de estados pedidas son los EPM 1 y 4.

c.



Como el DS queda cerrado, ninguna rama es viable. La fórmula nunca será verdadera.

4. CLASIFICACIÓN DE FÓRMULAS

Nos hemos topado con fórmulas que son verdaderas siempre, es decir, en cualquier EPM. Otras que son siempre falsas y unas que adoptan valores de verdad diferentes en los distintos EPM. Las llamaremos fórmulas **tautológicas**, **contradictorias** y **contingentes**, respectivamente. Además, utilizaremos el signo '⊨' antepuesto para las tautologías y, el mismo símbolo tarjado, '⊭' para las no tautológicas (contradictorias y contingentes). Así:

⊨ p → p,   ⊭p ∧ ~p   y   ⊭p → q

dicen que 'p → p' es una tautología y que tanto 'p ∧ ~p' como 'p → q' no lo son. En otros casos, aparecerán expresiones como '⊥ ∨ A' o 'T ∧ B' que presentan, la primera una contradicción-disyunción-A y la segunda una tautología-conjunción-cualquier fórmula B. Los símbolos '⊥' y 'T' son, para nosotros, esquemas de fórmulas contradictorias y tautológicas, respectivamente.

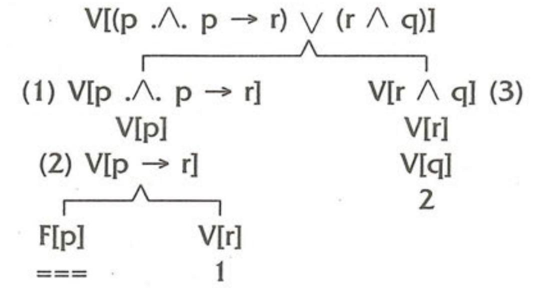
Con las definiciones dadas por diagramas semánticos para cada conector podemos llegar a determinar a qué tipo pertenece cada fórmula. Para esto, necesitamos aplicar las reglas de los DS sucesivamente al conector más importante de la fórmula. Veamos cómo podemos hacerlo con la fórmula: '(p .∧. p → r) ∨ (r ∧ q)'. Iniciemos el proceso suponiendo verdadera la fórmula.

V[(p .∧. p → r) ∨ (r ∧ q)]
∧
(1) V[p .∧. p → r]   V[r ∧ q]

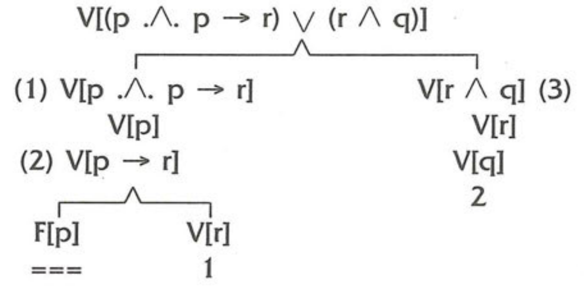
No es necesario poner (1) junto a la primera fórmula, pues ésta es siempre la primera a la que se aplican las reglas de los DS, en cambio, de las dos fórmulas a que da origen sí necesitamos decir cuál es la que se va a tratar primero, y a ésa le asignamos el número (1). A la otra no le asignamos el número (2) pues todavía no hemos decidido si será la siguiente en ser tratada:

V[(p .∧. p → r) ∨ (r ∧ q)]
∧
(1) V[p .∧. p → r]   V[r ∧ q]*
V[p]
V[p → r]*

Podemos continuar con cualquiera de las dos fórmulas que hemos marcado con un *, la decisión es nuestra. Lo que no podemos hacer más es trabajar con la fórmula (1) ya analizada o con V[p] que afirma la verdad de una proposición atómica.



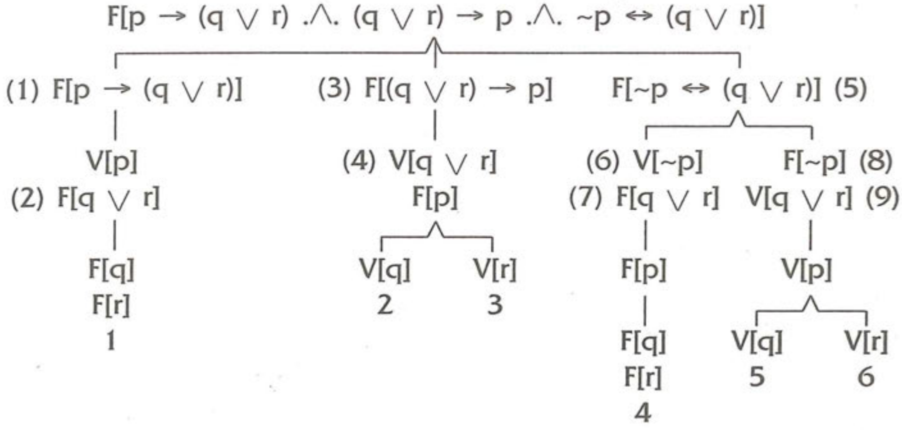
Observará el lector que hemos numerado las ramas abiertas de izquierda a derecha; esto no es indispensable por cuanto esa numeración es única, de acuerdo con lo que ya habíamos convenido. Sin embargo, como los DS pueden tener muchas ramas abiertas es cómodo colocarla para poder seguir el análisis de ramas que sigue, por eso lo haremos de ahora en adelante siempre que se siga un análisis de ramas.



Análisis de ramas	EPM
1. V[p], ---, V[r]	1,3
2. ---, V[q], V[r]	1,5
	1,3,5: VFVF VFFF

Vemos que la fórmula sólo es verdadera en tres EPM de los ocho que involucra, por tanto se trata de una fórmula contingente o contingencia.

Examinemos ahora la fórmula:
$[p \to (q \lor r)] \land [(q \lor r) \to p] \land [\sim p \leftrightarrow (q \lor r)]$.
Podemos partir, suponiendo su falsedad.



	Análisis de ramas			EPM
1.	V[p],	F[q],	F[r]	4
2.	F[p],	V[q],	---	5,6
3.	F[p],	---,	V[r]	5,7
4.	F[p],	F[q],	F[r]	8
5.	V[p],	V[q],	---	1,2
6.	V[p],	---,	V[r]	1,3
				1,2,3,4,5,6,7,8: FFFF FFFF

Se trata de una fórmula contradictoria. Averigüe el lector qué hubiese ocurrido si empezaba suponiendo la verdad de la fórmula.

Los DS pueden ser largos; sin embargo, algunos consejos prácticos pueden acortarlos. Los daremos en el próximo capítulo después de que los ejercicios de esta sección familiaricen al lector con los DS.

Ejercicios

1. Determine si es tautológica, contingente o contradictoria cada una de las siguientes fórmulas.

a. $\sim[(\sim r \rightarrow p) \wedge q \ .\vee.\ \sim p \rightarrow \sim r]$
b. $\sim p \rightarrow \sim(q \wedge r) \ .\vee.\ (r \rightarrow \sim q) \vee \sim p$
c. $\sim(p \ .\!\rightarrow\!.\ q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim(\sim r \vee p) \ .\wedge.\ \sim(q \ .\!\rightarrow\!.\ \sim p \vee r)$

2. Demuestre que la siguiente fórmula es contradictoria.

$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \wedge p)] \wedge (r .\!\rightarrow\!. \sim p \wedge q) \wedge \sim[(\sim p \vee q) \rightarrow s .\!\rightarrow\!. \sim q \rightarrow (\sim r \wedge s)]$

3. Demuestre que la siguiente fórmula es tautológica.

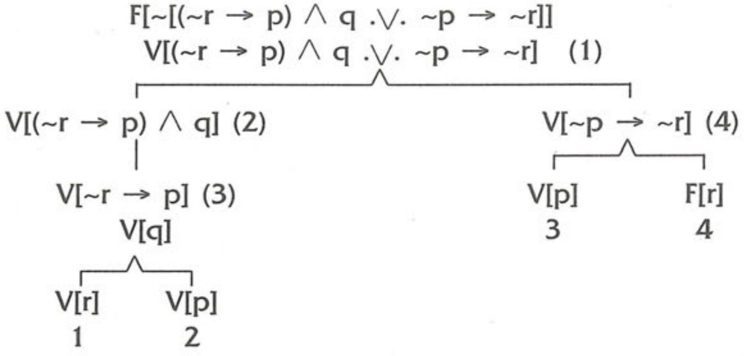
   $(\sim p \rightarrow \sim q .\!\leftrightarrow\!. q \rightarrow p) .\!\rightarrow\!. \sim q \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q .\!\leftrightarrow\!. q \rightarrow p).$

4. Pruebe que las siguientes fórmulas '$(q \wedge r) \rightarrow p .\!\vee\!. (q \rightarrow \sim r .\!\vee\!. p)$' y '$\sim(r .\!\rightarrow\!. \sim q \vee p)$' no son verdaderas a la vez.

5. Pruebe que cada vez que '$p \rightarrow q .\!\wedge\!. r \rightarrow s$' es verdadera entonces '$\sim q \vee \sim s .\!\rightarrow\!. \sim p \vee \sim r$' también lo es.

Solución:

1a)



Análisis de ramas				EPM
1.	---,	V[q],	V[r]	1,5
2.	V[p],	V[q],	---	1,2
3.	V[p],	---,	---	1,2,3,4
4.	---,	---,	F[r]	2,4,6,8
				1,2,3,4,5,6,8: FFFF FFVF

Fórmula contingente.

(b) $F[\sim p \rightarrow \sim(q \wedge r) .\vee. (r \rightarrow \sim q) \vee \sim p]$

$F[\sim p \rightarrow \sim(q \wedge r)]$ (1)

$F[(r \rightarrow \sim q) \vee \sim p]$ (2)

$F[p]$

$F[\sim(q \wedge r)]$

$F[r \rightarrow \sim q]$

$V[p]$

===

Lo que nos dice que la fórmula es una tautología (no puede ser falsa).

c. Fórmula contradictoria.

2. Lo más práctico es empezar suponiendo que la fórmula es verdadera.

3. Suponer que la fórmula es falsa.

4. Basta probar que la conjunción de las dos es una contradicción (¿Por qué?).

5. Pruebe que la siguiente fórmula es una tautología.

$(p \rightarrow q .\wedge. r \rightarrow s) \rightarrow (\sim q \vee \sim s .\rightarrow. \sim p \vee \sim r)$

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la siguiente fórmula: $r \wedge (p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) .\rightarrow. q$

1.1. ¿Cuántos estados posibles del mundo determina dicha proposición compuesta?

1.2. Encuentre, mediante diagramas semánticos, las descripciones de estados en las que es falsa la fórmula.

2. Encuentre las descripciones de estados en las que es verdadera la fórmula: $[p \leftrightarrow (r \wedge \sim q)] \wedge \sim(\sim p \rightarrow r)$. Con este dato construya su tabla de verdad.

3. Construya la tabla de verdad de las siguientes fórmula por el método de DS. Luego, señale los EPM donde las fórmulas son falsas.

3.1. $(p \leftrightarrow q) \vee \sim(p \rightarrow \sim q)$
3.2. $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
3.3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
3.4. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) .\rightarrow. r$
3.5. $(p \rightarrow \sim q .\rightarrow. \sim r) \rightarrow \sim[p \wedge \sim(q \rightarrow r)]$
3.6. $[\sim(p \leftrightarrow \sim q) \wedge p .\rightarrow. q \vee \sim p]$
3.7. $\sim(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \leftrightarrow s) \wedge (q \vee r) .\rightarrow. p \vee r$
3.8. $p .\rightarrow. \sim q \wedge [r \vee \sim(q \vee p)]$
3.9. $(\sim\sim\sim p \wedge \sim\sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
3.10. $\sim\sim(\sim\sim\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

4. Determine si es tautológica, contradictoria o contingente cada una de las siguientes fórmulas.

4.1. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) .\rightarrow. p \vee (q \wedge r)$
4.2. $[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r .\rightarrow. \sim s \vee q)] .\rightarrow. (s \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$
4.3. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) .\rightarrow. r \vee s \vee t$
4.4. $p .\rightarrow. [q .\rightarrow. (r .\rightarrow. \sim p \vee \sim q) \rightarrow p] \vee (p .\leftrightarrow. p \wedge \sim q)$
4.5. $\sim(p \rightarrow q) \wedge q \wedge \sim(\sim r \wedge s)$
4.6. $p \wedge \sim(q \vee \sim r) .\leftrightarrow. (r \wedge \sim q .\rightarrow. \sim p)$
4.7. $(p \wedge q .\rightarrow. q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim(\sim p \wedge q)$
4.8. $[(r\vee\sim t)\rightarrow(q\rightarrow\sim p)]\wedge(r\leftrightarrow s)\wedge(q\vee r)\wedge[p\rightarrow\sim(q\rightarrow r)]\wedge\sim(u\rightarrow t) .\rightarrow. \sim q\vee\sim p$
4.9. $\sim(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r) .\rightarrow. p \vee \sim q$
4.10. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) .\rightarrow. r \leftrightarrow p$

5. Si la fórmula '$p \rightarrow \sim q .\rightarrow. \sim q \rightarrow r$' es falsa, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre ciertas?

A) V(p)
B) V(q)
C) V(r)
D) F(p)
E) F(q)

6. Si la fórmula '$\sim(p \wedge q) .\vee. (r \rightarrow \sim q) \wedge p$' es falsa, ¿cuáles de las siguientes fórmulas son falsas?

6.1. $\sim(r \wedge \sim q) .\rightarrow. p \leftrightarrow q$
6.2. $\sim(s \vee \sim t .\rightarrow. \sim q \leftrightarrow \sim r)$
6.3. $s \rightarrow (t .\rightarrow. \sim u \rightarrow q)$

7. Si la proposición '$q \rightarrow r\ .\vee.\ {\sim}s \rightarrow {\sim}q$' es falsa y '$s \leftrightarrow {\sim}p$' es verdadera, halle el valor de verdad de:

$${\sim}(p \wedge s) \vee (t \leftrightarrow {\sim}q)\ .\!\leftrightarrow\!.\ (q \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow r)$$

8. Si de la conjunción de la fórmula '${\sim}(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow {\sim}p)$' con una cierta fórmula A resulta una fórmula contradictoria, ¿cuáles de las siguientes fórmulas pueden sustituir a la fórmula A?

a) $p \leftrightarrow q$
b) $p \rightarrow q$
c) $(q \wedge {\sim}p) \sim (p \wedge {\sim}q)$
d) ${\sim}p\ .\!\rightarrow\!.\ r{\sim}s$
e) ${\sim}q \vee r\ .\!\rightarrow\!.\ {\sim}(s \wedge {\sim}p)$
f) ${\sim}p$

9. Si en el esquema de fórmulas ${\sim}(B \vee A)\ .\!\rightarrow\!.\ {\sim}A \rightarrow {\sim}B$ se reemplaza A por una fórmula tautológica, ¿cómo queda el esquema?

10. Describa los EPM que invalidan el siguiente argumento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)\ .\!\rightarrow\!.\ (p \vee r) \rightarrow s$$

11. Verifique por diagramas semánticos que si en una fórmula ninguna de su variables se repite, dicha fórmula es contingente.

12. Dado el operador barra de Nicod (símbolo '$\mid$') definido del modo siguiente:

$A \mid B$ tiene la misma tabla de verdad que ${\sim}(A \wedge B)$

Encuentre las reglas de los diagramas semánticos que corresponden al operador de Nicod.

13. A partir del ejercicio anterior, encuentre por DS la tabla de verdad de: ${\sim}[(s \rightarrow {\sim}r) \mid {\sim}(q \mid r)] \mid (r \mid q\ .\!\mid\!.\ {\sim}s)$

14. Pruebe por diagramas semánticos que:

a) '$p \rightarrow (q \wedge r)\ .\!\rightarrow\!.\ (p \rightarrow q\ .\!\rightarrow\!.\ p \rightarrow r)$' es tautológica.
b) '$p \leftrightarrow q\ .\!\leftrightarrow\!.\ (p \vee q) \wedge {\sim}(p \wedge q)$' es contradictoria.
c) '${\sim}(p \vee {\sim}r)$ y $r \rightarrow q\ .\!\leftrightarrow\!.\ {\sim}p \leftrightarrow {\sim}q$' no pueden ser verdaderas a la vez.

III

SIMBOLIZACIÓN Y APLICACIONES

En este capítulo vamos a ocuparnos de las aplicaciones que se pueden dar a lo que hemos visto, para esto buscaremos tender un puente entre la lógica altamente abstracta que hemos construido y el lenguaje que empleamos a diario. Nuestro primer tema es por lo tanto la simbolización, que es propiamente el proceso de traducir una expresión de un lenguaje natural, en nuestro caso el castellano, a uno simbólico (LP). Con esto podremos aplicar los resultados que obtengamos a procesos "reales" de inferencias deductivas llevadas a cabo en castellano.

Después, mostraremos algunas aplicaciones de las definiciones de los conectores que permiten encontrar fórmulas que expresan un "significado" previamente establecido y obtendremos como subproducto, una forma de definir los conectores entre sí. Tema que de ser desarrollado permitirá reducir el número de los mismos.

1. SIMBOLIZACIÓN

Dice un viejo refrán italiano "**traduttore traditore**" (un traductor es un traidor). Más recientemente, Quine ha sostenido la indeterminación de las traducciones; es decir, dados dos lenguajes: la imposibilidad de encontrar la "Traducción" con 'T' mayúscula. Tenemos pues un trabajo delicado. De hecho vamos a perder mucho al pasar de un lenguaje natural al proposicional, sería por tanto apropiado saber qué deseamos conservar.

Nuestro lenguaje simbólico sólo "significa" verdad o falsedad, no es capaz de más significados. Las proposiciones sólo pueden interrelacionarse veritativo–funcionalmente con los conectores que conocemos. Esto nos deja una tarea simple, pero muy difícil de lograr: reducir una expresión exclusivamente a las relaciones entre proposiciones; es decir, sólo a las relaciones entre los valores de verdad. En general, el contexto en que se efectúen las traducciones será muy importante para la corrección de las mismas, pero fijar un contexto, o el contexto que interesa, no es una labor mecánica. Sólo la práctica permitirá al lector desarrollar la habilidad para reconocer lo que es pertinente en la traducción de lo accesorio. Consideramos tan importante reconocer lo que captura la traducción, como el ser conscientes de la cantidad de información que se deja de lado.

1.1. La estructura formal

LP está formado por proposiciones atómicas y conectores. Si deseamos traducir del español a LP, debemos reconocer primero que nada: qué tomaremos como proposiciones. De las oraciones que aparezcan en un determinado discurso, ¿cuáles son proposiciones?, o mejor dicho, ¿cuáles significan proposiciones y cuántas? Como siempre trataremos el tema a partir de ejemplos.

Empezaremos reconociendo en algunas afirmaciones y en algunos razonamientos deductivos sus componentes proposicionales más simples.

Ejemplo (1): Si todo hombre es mortal y Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.

En la afirmación reconocemos tres oraciones distintas que son buenas candidatas para ser tomadas como representantes de proposiciones.

Todo hombre es mortal.
Sócrates es hombre.
Sócrates es mortal.

Es importante señalar algo que por obvio puede olvidarse: 'todo hombre', 'Sócrates', 'Sócrates es' o 'es hombre' no pueden tomarse como representantes proposicionales, pues no puede calificarse de verdadera o falsa a ninguna de esas expresiones y lo mismo ocurre con 'si' o 'y'. Hecho esto, es decir, con el reconocimiento de las proposiciones que aparecen (vía la identificación de las oraciones declarativas que las expresan), podemos asumir que existe un tratamiento proposicional para el texto. Lo adecuado o inadecuado que éste puede ser para cada caso es otro problema que deslindaremos más adelante al estudiar la lógica cuantificacional.

Por ahora nos interesa que el lector se acostumbre a reconocer las distintas proposiciones que aparecen en un razonamiento para que reemplazándolas por las letras 'p', 'q', 'r', de acuerdo con el orden en que aparecen, se ponga de manifiesto lo que llamaremos la **estructura formal** del razonamiento. Nos acostumbraremos entonces a seguir el siguiente procedimiento:

1. Establecer cuáles son las proposiciones que aparecen y asignarle a la primera la letra 'p', a la segunda 'q', etc. Así, en el ejemplo:

   p: Todo hombre es mortal.
   q: Sócrates es hombre.
   r: Sócrates es mortal.

2. Poner de manifiesto la estructura formal, en este caso para ser más precisos la estructura proposicional, del texto que se analice. Para esto hay que reemplazar en el texto las proposiciones por las letras que las representan. De esta manera tenemos:

   Si p y q entonces r.

Los pasos anteriores son esenciales para una correcta simbolización y distan mucho de ser mecánicos pues hay situaciones en que el reconocimiento de las proposiciones se complica.

El primer paso captura un razonamiento dentro de la lógica proposicional, si no encontramos nada que sea una proposición, mal podremos traducirlo a LP. El segundo paso busca poner al descubierto, prescindiendo de los significados, las relaciones que se establecen entre las proposiciones que hemos encontrado.

En el segundo paso, si las relaciones entre las proposiciones son respecto de su ser verdaderas o falsas y buscan obtener una nueva proposición más compleja cuyo valor de verdad depende del valor de verdad de las que la conforman, entonces es razonable pensar que a las distintas conexiones que aparecen entre las proposiciones les conviene alguno de los conectores interproposicionales de LP, con lo que se completaría la traducción. Pero ésta, la última etapa, sólo puede resultar si llevamos a cabo la primera y, sobre todo, no puede rebasar los límites que la primera etapa establezca. Veámoslo con otros casos:

> Ejemplo (2): O el puntero izquierdo no se adelanta, o baja un mediocampista y el centro delantero no queda libre de marcación. Pero no ocurre que, si los marcadores de punta no suben, entonces el puntero izquierdo no sube. Por lo tanto, se retrasa un mediocampista y los contrarios presionan al equipo, ya que si el centro delantero no se desmarca y los defensas laterales no se adelantan, entonces los contrarios presionarán al equipo.

Además de largo, el ejemplo presenta un sinnúmero de **oraciones** aseverativas distintas, algunas de las cuales parecen "juntarse" en una misma "familia significativa", veámoslas:

Grupo 1: 'El puntero izquierdo no se adelanta', 'El puntero izquierdo no sube'.

Grupo 2: 'Baja un mediocampista', 'Se retrasa un mediocampista'.

Grupo 3: 'El centro delantero no queda libre de marcación', 'El centro delantero no se desmarca'

Grupo 4: 'Los marcadores de punta no suben', 'Los defensas laterales no se adelantan'.

Grupo 5: 'Los contrarios presionan el equipo', 'Los contrarios presionarán al equipo'.

Quien no sepa de fútbol sin lugar a dudas protestará por nuestra agrupación y probablemente, con mucha mayor fuerza respecto del grupo 4. Asumiremos que todos sabemos algo de fútbol y por lo tanto nos damos cuenta de que 'marcador de punta' y 'defensa lateral' es lo mismo, que 'subir' y 'adelantarse' también, y que lo mismo ocurre con 'bajar' y 'retrasarse', 'quedar libre de marcación' y 'desmarcarse'.

Deseamos manifestar con esto que es imprescindible asumir un marco dentro del cual se llevará a cabo la traducción. Así nuestros grupos podemos reducirlos, tomando sólo un exponente de cada uno (porque asumimos que todos dicen lo mismo en el grupo, son oraciones sinónimas).

Grupo 1: El puntero izquierdo no se adelanta.

Grupo 2: Baja un mediocampista.

Grupo 3: El centro delantero no se desmarca.

Grupo 4: Los marcadores de punta no suben.

Grupo 5: Los contrarios presionan al equipo.

Aparece ahora una dificultad que se relaciona más con las propiedades lógicas de una proposición que con el reconocimiento de la oración que la significa. Fijémonos en los grupos 1, 3 y 4. Dijimos que buscábamos las proposiciones simples o atómicas por traducir que aparecen en el razonamiento y sabemos que toda proposición puede ser negada. ¿De cuáles serían las negaciones estas oraciones? Las más simples, sin duda, son:

Grupo 1: El puntero izquierdo se adelanta.

Grupo 2: El centro delantero se desmarca.

Grupo 4: Los marcadores de punta suben.

Por lo tanto, los candidatos para representar a las proposiciones atómicas son:

p: El puntero izquierdo se adelanta.
q: Baja un mediocampista.
r: El centro delantero se desmarca.
s: Los marcadores de punta suben.
t: Los contrarios presionan al equipo.

Y la estructura formal se puede representar como:

O no p, o q y no r. Pero no ocurre que, si no s, entonces no p.
Por lo tanto, q y t, ya que si no r y no s, entonces t.

Y reemplazando los puntos por varas ladeadas '/' y cambios de línea tenemos:

O no p, o q y no r /
Pero, no ocurre que, si no s, entonces no p /
Por lo tanto, q y t, ya que si no r y no s, entonces t.

Lo que permite apreciar más ordenadamente la estructura formal.

Ejemplo (3): Si Gamarra manda atacar a los lanceros, la artillería hará fuego y los infantes pasarán a la retaguardia. En caso de que mande atacar a los lanceros, la infantería deberá abrir fuego. Luego, si los infantes no pasan a la retaguardia, abrirán fuego.

El primer problema consiste en reconocer el número de proposiciones involucradas. Un primer listado podría estar casi conformado sólo por las oraciones presentes:

1. Gamarra manda atacar a los lanceros.
2. La artillería hace fuego.
3. Los infantes pasan a la retaguardia.
4. Manda atacar a los lanceros.
5. La infantería deberá abrir fuego.
6. Los infantes pasan a la retaguardia.
7. Los infantes abren fuego.

Basta ver la lista anterior para darse cuenta de que no hemos reconocido las proposiciones, sino las oraciones (ligeramente reformuladas) que aparecen. Ya sabemos que una o más oraciones pueden expresar la misma proposición, por lo que debemos pasar a enumerarlas. La única dificultad real está en darse cuenta de que, dentro del contexto, (5) y (7) son la misma, con lo que tenemos:

p: Gamarra manda atacar a los lanceros.
q: La artillería hace fuego.
r: Los infantes pasan a la retaguardia.
s: La infantería debe abrir fuego.

Dadas las proposiciones o las letras que se usarán para cada una, necesitamos luego reconocer los conectores involucrados, para lo cual es conveniente reemplazar en el texto las oraciones por las letras proposicionales que las representan, obteniendo la estructura formal:

Si p, q y r /
En caso de que p, s /
Luego, si no r, s.

Para poder completar la traducción (simbolización) necesitamos decidir qué conectores reemplazarán a los elementos del español que todavía quedan. ¿Cómo quitar los puntos seguidos, los 'luego', los 'si', los 'no' etc.? Para esto examinaremos cada caso por separado.

1.2. Negación

Lo primero en una traducción es determinar qué oraciones aseverativas se tomarán como representantes de proposiciones atómicas y se reemplazarán por 'p', 'q', 'r', etc. Como ya nos hemos ocupado del tema, no insistiremos en él para dedicarnos a los conectores, en especial a la negación.

1. En 'Marta no llegó tarde anoche', es bastante fácil reconocer que 'Marta llegó tarde anoche' está negada. Así, para proceder ordenadamente escribimos:

   p: Marta llegó tarde anoche.

   Lo que significa que la letra 'p' reemplazará a la proposición enunciada por la oración que la sigue.

   La simbolización es: $\sim p$

2. No es el caso de que San Martín pospusiese los intereses peruanos a los argentinos.

   p: San Martín pospuso los intereses peruanos a los argentinos.

   Simbolización: $\sim p$

   Con la negación de proposiciones atómicas el asunto parece sencillo. Se trata de averiguar si se cambia el valor de verdad de una proposición.

3. 'No, no pude llegar a tiempo'. Reconocemos de inmediato la oración que expresa una proposición atómica en 'Pude llegar a tiempo'.

   p: Yo pude llegar a tiempo.

   No parece razonable dudar de que en castellano 'no' corresponde a nuestra negación lógica. Como en este ejemplo hay dos 'no' seguidos, llegamos a '~~p'. ¿Es correcta nuestra respuesta? Hemos visto antes que en LP 'p' es un sinónimo de '~~p'. Si hemos traducido bien, la afirmación original correspondería a la de 'Pude llegar a tiempo', salvo por el "color retórico". Cualquier hablante se da cuenta de que no es así: sólo hay una única negación lógica contenida en una redundancia estilística.

   La simbolización es: ~p

   Pero no pasemos tan rápido el reconocer la presencia de una proposición en 'Yo pude llegar a tiempo'. Esta oración puede ser verdadera cuando la dice Diógenes y falsa en la boca de Oscar, más aun Miguel puede pronunciarla en una ocasión con verdad y en otra, con falsedad. ¿No hay algo parecido en ella a lo que ocurría con 'Esta oración es falsa'?, o, por lo menos, frente a la imposibilidad de atribuirle un único valor de verdad, ¿no deberíamos excluirla de las oraciones que enuncian proposiciones? En realidad, lo que ocurre es que en un contexto fijo sí tiene un valor de verdad único; es decir, un significado preciso. En otro contexto, con otros referentes, bien puede corresponderle otro significado.

   Para simbolizar una proposición con toda corrección tenemos que "llenarla" con el significado que pertenece a su contexto, liberándola de la necesidad de recurrir al contexto para entenderla. Así, podemos transformarla en: 'Juan Montealegre no pudo llegar a tiempo a dictar la práctica de Lógica el 7 de setiembre a las 8:00 horas'. La oración incorpora dentro de sí su contexto descontextualizándose, se independiza del momento y lugar en que se la profiere, se torna en una oración eterna como las llama Quine[3]. Este es el mecanismo que nos permite fijar la proposición significada por la oración, salvando el problema de atribuirle un único valor de verdad. En lo que sigue

---

[3] Véase [91].

debe darse por sentado que lo que simbolizamos es la proposición enunciada por la oración eterna correspondiente.

4. 'No pude no mirarla'. En este caso la proposición simple corresponde a 'Pude mirarla' y los dos 'no' sí son relevantes:

   p: Yo pude mirarla.

   Simbolización: ~~p

   No sería correcto escribir como simbolización sólo 'p', por cuanto en esta etapa se trata de buscar sólo la forma lógica de la expresión. Claro que a continuación podemos manifestar que '~~p' es lo mismo que 'p' en lo que respecta a su valor semántico. Y sin embargo, en castellano, cada una tiene un sabor diferente que se pierde al simbolizar.

5. Un caso interesante lo presenta la oración: 'Sócrates no es analfabeto'. ¿Cuál es la proposición simple?, ¿'Sócrates es alfabeto' o 'Sócrates es analfabeto'? En los casos como el que estamos examinando, en que es claro que 'analfabeto' es sinónimo de 'no-alfabeto', tomaremos como simple a 'alfabeto'. Así:

   p: Sócrates es alfabeto.

   Simbolización: ~~p

   No debe ocultarse que esto no siempre es posible; por ejemplo, la pareja de antónimos 'húmedo'-'seco' que son uno la negación del otro, no nos impone cuál debe tomarse como simple y cuál como la negación del otro. En estos casos el fijar la proposición simple queda librado a nuestro arbitrio. Para buscar cierto orden en el libro convendremos, en estos casos, en que aquel que se presenta primero es el simple.

   Muchas otras palabras o expresiones de nuestra lengua pueden expresar negaciones: 'jamás', 'es falso que', 'es imposible que', 'nunca', etc., de acuerdo con el contexto.

6. 'Es falso que él nunca haya tenido miedo' se simboliza:

p: Él ha tenido miedo

Simbolización: $\sim\sim p$

7. Otro problema es que la misma estructura aparente no siempre cumple las mismas funciones lógicas. Consideremos las parejas de proposiciones:

   A1: Sócrates es mortal y A2: Sócrates no es mortal.
   B1: Todos los hombres son mortales y B2: Todos los hombres no son mortales.
   C1: Algunos hombres son mortales y C2: Algunos hombres no son mortales.

   Debe ser claro, a estas alturas, que A2 es la negación de A1. Lo que hemos hecho es negar el verbo 'ser', aparentemente lo mismo ocurre con las otras parejas B y C. Sin embargo, de la falsedad de B1 no se sigue la verdad de B2, como esperaríamos si uno negase al otro. De la falsedad de B1 sigue la verdad de C2. Basta que un hombre no sea mortal, (no necesariamente todos) para contradecir B1. Reflexione el lector y explique cómo es que B1 es la negación de C2 y cómo B2 lo es de C1. En estos casos, además se repite el problema de elegir cuál es la proposición simple y cuál la que lleva la negación. Este tipo de estructuras formales, llamadas 'proposiciones categóricas', serán analizadas con mayor detalle en el capítulo VI.

1.3. Conjunción

La conjunción '$\wedge$' aparece en el castellano, usualmente como 'y'. Por ejemplo en 'San Martín y Bolívar estuvieron en Guayaquil' tenemos una forma compacta de decir 'San Martín estuvo en Guayaquil y Bolívar estuvo en Guayaquil', forma en la que se aprecian mejor las dos oraciones que une 'y'. Que esta 'y' corresponda a nuestra '$\wedge$' se sigue sólo de entender que la frase anterior es verdadera en el caso de que San Martín haya estado en Guayaquil y que Bolívar también, y falsa en todo otro caso. Así podemos escribir:

p: San Martín estuvo en Guayaquil.
q: Bolívar estuvo en Guayaquil.

Simbolización: $p \wedge q$

Vale la pena adoptar explícitamente el siguiente convenio: a la primera oración que aparezca al leer (y que exprese una proposición) le asignaremos la letra 'p'; a la segunda, 'q'; a la tercera, 'r', y así sucesivamente, respetando el orden alfabético salvo con la uve ('v') que puede confundirse con la disyunción, por lo que la omitimos.

Debe notarse que la 'y' castellana cumple otro tipo de funciones además de las veritativo-funcionales, como en los casos de 'Lo traicionó y se arrepintió' versus 'Se arrepintió y lo traicionó' que se simbolizan por '$p \wedge q$' y '$q \wedge p$', respectivamente; sabemos que tienen igual significado en LP, con lo que se pierde la idea de orden temporal que separa los dos casos en el lenguaje natural.

No toda 'y' cumple las veces de una conjunción entre proposiciones, por ejemplo: 'Santa Cruz y Salaverry eran enemigos' no puede descomponerse en 'Santa Cruz era enemigo' y 'Salaverry era enemigo'. No debe perderse de vista que traducimos 'y' sólo si une oraciones aseverativas para formar otra a partir de ellas.

Otras formas lingüísticas en las que puede formularse una conjunción lógica son: 'pero', 'aunque', 'sin embargo', 'a pesar de que', 'a la vez que', 'además', 'no obstante', etc. Adicionalmente, hay que contar a los puntos. En muchos casos los puntos seguidos se utilizan para unir proposiciones, y deben entenderse como conjunciones; sobre todo si no los acompaña alguna partícula que les asigne un sentido específico.

1. María ama a Juan; pero Juan, a Rosa.

p: María ama a Juan.
q: Juan ama a Rosa. (Observe la repetición de 'ama' omitida en el discurso).

Simbolización: $p \wedge q$ (Se pierde lo trágico de este 'pero', pero se conservan los valores de verdad).

2. Darío tiene vocación de filósofo aunque no aprecie mucho a los griegos.

p: Darío tiene vocación de filósofo.

q: Darío aprecia mucho a los griegos.

Simbolización: $p \wedge \sim q$

No debe olvidarse que en estos casos traducimos por '$\wedge$' porque suponemos que la intención es que la proposición afirmada sea verdadera en el único caso en que sus componentes lo sean. Consideraciones ajenas a su verdad o falsedad no intervienen.

3. Algunas formas del lenguaje pueden "contener" más de un conector. En 'Alfonso Ugarte ni corrió frente al enemigo ni se entregó' la forma 'ni... ni...' encierra dos negaciones y una conjunción:

p: Alfonso Ugarte corrió frente al enemigo.
q: Alfonso Ugarte se entregó al enemigo.

Simbolización: $\sim p \wedge \sim q$

1.4. Disyunción

Con la disyunción ocurre un fenómeno bastante curioso. Apreciémoslo en unos ejemplos:

1. Los alumnos o los profesores de la universidad tienen acceso a la biblioteca.

2. Los que compren diez discos tienen derecho a un descuento de 10% o a un vale por un monto equivalente para otra compra.

Simbolicemos primero las proposiciones:

p: Los alumnos de la universidad tiene acceso a la biblioteca.
q: Los profesores tienen acceso a la biblioteca.
r: Los que compren diez discos tienen derecho a un descuento de 10%.
s: Los que compren diez discos tiene derecho a un vale por 10% del valor total para otra compra.

Nótese que por tratarse de un mismo contexto es necesario emplear letras distintas para los dos ejemplos, si no lo hiciéramos así confundiríamos las referencias de uno con las del otro. En el primer ejemplo, es claro que un profesor que es alumno al mismo tiempo tiene derecho a pedir libros en la biblioteca. ‘p o q’ sólo es falsa si tanto ‘p’ como ‘q’ lo son, y verdadera en los otros tres casos. En cambio, en ‘r o s’ no se admite utilizar el descuento y recibir un vale: es falsa si ‘r’ y ‘s’ son verdaderas a la vez. La misma ‘o’ cumple funciones distintas, en el primer caso coincide con ‘$\vee$’, disyunción débil; en el segundo, con la negación del bicondicional, llamada ‘disyunción fuerte’.

Se acostumbra distinguir entre disyunción débil (o disyunción a secas) y disyunción fuerte. En LP no tenemos ningún signo especial para la segunda, pues existen paráfrasis como ‘r o s, y no ambas’, simbólicamente ‘$r \vee s \;.\!\wedge\!.\; {\sim}(r \wedge s)$’, o también ‘${\sim}(r \leftrightarrow s)$’. En general basta con traducir por ‘$\vee$’, y así lo haremos. Suponemos en el libro, salvo mención expresa en contra, que todas las disyunciones son débiles.

Esta costumbre, de considerar sólo la disyunción débil, proviene del hecho de que en matemáticas, probablemente la primera ciencia en emplear explícitamente un lenguaje lógico simbólico, basta con la disyunción débil. Además, en castellano, es posible sostener que la ‘o’ es débil y es el contexto en que se emplea el que la convierte en fuerte. Así, la disyunción exclusiva provendría del contexto en que aparece, justamente de aquello que dejamos de lado en nuestro análisis[4]. Es decir, reconocemos una disyunción fuerte en el ejemplo (2) porque sabemos cómo funcionan los descuentos promocionales. La disyunción exclusiva corresponde más a una construcción con ‘a menos que’ que a una con ‘o’.

Así, simbolizamos ‘Necesito conseguir el préstamo o sacarme la lotería’ como ‘$p \vee q$’. Caso en el que ‘$\vee$’ está ampliamente justificado, pues, si ocurren ambos hechos, mis necesidades quedarán satisfechas. Lo mismo para ‘Lolita se casará con Pedro o con Juan’, sin que sea necesario asumir que Lolita está dispuesta a ser bígama.

---

[4] Véase Gamut [49], pp. 32-33.

Ejercicios

1. Simbolice los siguientes enunciados señalando las variables proposicionales.

a. En las obras de Shakespeare se exhiben amplios conocimientos de música y de derecho.
b. O la sustancia es un ácido, o es un álcali.
c. No es el caso de que Bolívar haya nacido en Colombia y San Martín haya muerto en Chile.
d. Ni todo texto literario es ficcional, ni todo texto ficcional es literario.
e. O Hansel y Gretel regresaron a su casa, o las avecillas del bosque se comieron las migas del camino.

Solución:

a. Identifiquemos primero las proposiciones atómicas que expresa este enunciado:

p: En las obras de Shakespeare se exhiben amplios conocimientos de música.
q: En las obras de Shakespeare se exhiben amplios conocimientos de derecho.

Reemplacemos estas letras proposicionales en el enunciado:

p y q.

Por tanto, la simbolización será '$p \wedge q$'.

b. p: La sustancia es un ácido.
q: La sustancia es un álcali.

Al emplear las variables en el enunciado, nos quedamos con la estructura formal: 'o p o q'. Entonces la simbolización que le corresponde es: '$p \vee q$'.

c. p: Bolívar ha nacido en Colombia.
q: San Martín ha muerto en Chile.

La estructura formal es: 'No es el caso de que p y q'.

En general, la expresión 'no es el caso de que' niega estructuras complejas. La simbolización que corresponde es:

$\sim(p \wedge q)$

d. Los símbolos proposicionales son:

p: Todo texto literario es ficcional.
q: Todo texto ficcional es literario.

La estructura formal: 'Ni p ni q'.

Gramaticalmente la expresión 'ni... ni...' es una conjunción copulativa negativa equivalente a decir 'no... y no...'; por esto simbolizamos '$\sim p \wedge \sim q$'.

e. Las constantes proposicionales a emplear son:

p: Hansel regresó a su casa.
q: Gretel regresó a su casa.
r: Las avecillas del bosque se comieron las migas del camino.

El esquema formal es: 'o p y q, o r', donde la coma divide en dos el enunciado, por lo que la simbolización es: '$p \wedge q \;.\!\vee\!.\; r$'

1.5. Condicional

Los equivalentes lingüísticos de este conector diádico son los que más dificultades ofrecen porque, en general, aparece en un contexto de causa-efecto que obviamente LP no puede recoger, ya que sólo es capaz de expresar verdad o falsedad. Veamos las dificultades con un ejemplo:

1. Si llueve entonces la cosecha será abundante.

p: Llueve.
q: La cosecha será abundante.

El problema estriba en el 'si... entonces...'. Algunos hechos son fáciles de aceptar:

- Si 'llueve' y 'la cosecha es abundante' son verdaderos, toda la expresión lo es.
- Si 'llueve' es verdadero y la cosecha no es abundante, es decir, 'q' es falso, toda la afirmación es falsa.

Pero, ¿qué ocurre en los otros dos EPM?

- No llueve y la cosecha es abundante.
- Ni llueve ni la cosecha es abundante.

Es opinión, que los autores comparten, que en la mayoría de los casos, éstos no forman parte del horizonte del hablante que formula la oración; en otras palabras, en los lenguajes naturales no se dan exclusivamente funciones de verdad (no se contemplan todos los casos) sino relaciones de verdad (lo dicho contempla sólo algunos casos). Pero como sea que debemos traducir a funciones de verdad (LP), necesitamos forzar la expresión para que contemple los EPM 3 y 4. Así, aceptaremos que en 3 la proposición es verdadera y en 4 lo mismo. El caso 3 es duro de aceptar porque suponemos una causalidad entre el llover y obtener buenas cosechas; pero al hacer esto estamos tomando en cuenta los hechos fácticos, nos estamos fijando en el contenido de la afirmación y no sólo en su aspecto formal. Pero el aspecto formal de la expresión es el único que nos interesa, por lo que la simbolización arroja: '$p \leftrightarrow q$'. Para entender nuestro "desprecio" por el contenido de lo afirmado, veamos el caso:

2. 'Si 2+2=4 entonces la cosecha será abundante' con el único cambio de:

   p: $2+2=4$

   Se simboliza por '$p \rightarrow q$'.

   Otras formas tras las que podemos reconocer un condicional son:

3. Dado que hoy es viernes, mañana será sábado.

   p: Hoy es viernes.
   q: Mañana es sábado.

   Simbolización: $p \rightarrow q$

4. Hoy es sábado dado que ayer fue viernes.

p: Hoy es sábado.
q: Ayer fue viernes.

Simbolización: $q \rightarrow p$

Nótese, en el último ejemplo, que al simbolizar se invierte el orden de aparición de las proposiciones. Puede apreciarse que la traducción es correcta considerando el caso en que el condicional es falso (EPM 3). La afirmación es falsa si ayer fue viernes y hoy no es sábado. El lector replicará que tal cosa no es posible en el mundo y nosotros nuevamente le diremos que nos interesamos por las relaciones formales entre las proposiciones y no por su contenido de "realidad". Si aún le molesta nuestra afirmación, considere 'Hoy es domingo dado que ayer fue viernes'.

Otras expresiones pueden dar lugar a condicionales directos, es decir aquellos que presentan primero el antecedente y luego el consecuente son:

'Si... entonces...',
'Si..., ...',
'... luego...',
'... por lo tanto...',
'... de ahí que...',
'... es condición suficiente...',
'... se sigue que...',
'... sólo si...', etc.

Algunas de las expresiones condicionales en las que el consecuente ocupa el primer lugar aparecen en:

'... es condición necesaria...',
'... si...',
'... siempre que...',
'... ya que...',
'... puesto que...',
'... porque...',
'... cuando...',
'... toda vez que...', etc.

No debe olvidar el lector que todas estas enumeraciones ni son completas ni son exactas. En estos temas no hay recetas.

Cuando uno se topa por primera vez con el condicional, también llamado ‘condicional material’ o ‘implicación material’, uno no puede desprenderse de una sensación de insatisfacción. ¿Por qué forzar el lenguaje encasillándolo en un condicional? ¿Por qué presentarlo como un conector importante si no parece corresponder a una expresión propia de los lenguajes naturales? Tiene bastante razón quien piensa así, la razón de presentar al condicional como un conector importante radica en el rol que juega dentro de la teoría lógica. Veremos más adelante que el condicional, más que corresponder a una (o unas) partícula del castellano, se asocia con la idea de consecuencia lógica. Es un conector que aparece de manera “natural” dentro de la formalización de la idea de fuerza lógica de un razonamiento.

Eso en cuanto a su importancia. Respecto a su tabla de verdad tal vez se vea más clara en el siguiente ejemplo tomado de Gamut[5]:

Todos los números que terminan en 0 son divisibles por 5.
que normalmente entendemos como:

> Para todo número x se cumple que si x termina en 0, entonces x es divisible por 5.

Esa expresión podemos todavía escribirla como:

> Para todo número x se cumple que (x termina en 0 → x es divisible por 5).

donde el condicional debe ser verdadero para todo número. Por ejemplo, si x=100 vemos que el condicional es verdadero y esto cuando tanto su antecedente como su consecuente lo son. Lo mismo ocurre para 90, 1010, etc.

Pero la expresión debe valer para todo número entero, también para x=3. En ese caso el antecedente y el consecuente son falsos. Así, vemos que no es tan artificial aceptar que un condicional con antecedente falso y consecuente falso es verdadero.

---

[5] Véase Gamut [49], p. 34.

Consideremos ahora el caso x=55, es decir, un número que termina en 5. El condicional es verdadero y tenemos antecedente falso y consecuente verdadero. Con esto esperamos que el lector ya no encuentre tan insólita la tabla del condicional. No sólo en las matemáticas encontramos ejemplos claros, analice el lector lo siguiente:

Para todo animal se cumple que si es mamífero entonces respira.

Ejercicios

Simbolice:

1. Si la aguja de la brújula gira, entonces ha variado el campo magnético.
2. Si no es el caso de que no salga el sol y haga frío, lloverá.
3. No es el caso de que si no sale el sol y hace frío, lloverá.
4. Si el motor funciona, entonces si la pista está libre, Marcos volará el aeroplano.
5. No es el caso de que llueva o haga viento, cuando ha terminado el invierno.
6. Diego no fuma si hace deporte y ahorra dinero si no fuma.
7. El juez no es justo ni competente, puesto que es falso que haya consultado con los peritos.
8. Si se produce una violación constitucional, los jueces del Tribunal de Garantías Constitucionales la condenarán si gozan de independencia.

Solución:

1. $p \rightarrow q$

2. Las proposiciones son:

   p: El sol sale.
   q: Hace frío.
   r: Llueve.

   Si sustituimos en el ejercicio, nos quedamos con: 'si no es el caso que de no p y q, r'. Notemos que se trata de un condicional y que 'no es el caso de que' afecta, por lo general, proposiciones moleculares:

Si [no es el caso de que (no p y q)], r.

$\sim(\sim p \wedge q) \rightarrow r$

3. Con las mismas proposiciones que en el ejercicio anterior:

No es el caso de que si p y q, r.
No es el caso de que [si (~p ∧ q), r].

$\sim[(\sim p \wedge q) \rightarrow r]$

4. Tenemos un esquema estructural con dos condicionales:

Si p, entonces si q, r.
Si p, entonces (si q, r).

'$p \;.\!\rightarrow\!.\; q \rightarrow r$' es la simbolización que corresponde.

5. Reemplazando las oraciones aseverativas tenemos: 'no es el caso de que p o q, cuando r'. Si nos damos cuenta de que 'cuando' estipula la condición como lo haría un 'si', obtenemos:

Cuando r, no es el caso de que p o q.

$r \rightarrow \sim(p \vee q)$

6. 'No p si q, y r si no p' es la forma del enunciado que ordenado da:

'Si q no p, y si no p r'. Por lo que simbolizamos:

$(q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow r)$

7. Formalmente: 'no p ni q, puesto que es falso que r'.

En símbolos: $\sim r \;.\!\rightarrow\!.\; \sim p \wedge \sim q$

8. Una vez que se ha hallado la forma 'si p, q si r', apreciamos que la coma nos indica la jerarquía de los condicionales a la vez que forma parte de la formulación del primero.

$p \;.\!\rightarrow\!.\; r \rightarrow q$

1.6. Bicondicional

Este conector, como hemos visto, recoge aquellos casos en que se desea equiparar los valores de verdad de dos proposiciones.

1. La cultura Chavín constituye un horizonte si y sólo si su influencia se extiende por casi todo el territorio peruano.

   p: La cultura Chavín constituye un horizonte.
   q: La influencia de la cultura Chavín se extiende por casi todo el territorio peruano.

   Simbolización: $p \leftrightarrow q$

2. Para que un número entero n sea divisible por 6 es condición necesaria y suficiente que lo sea por 2 y por 3.

   p: Un número entero n es divisible por 6.
   q: Un número entero n es divisible por 2.
   r: Un número entero n es divisible por 3.

   Simbolización : $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

3. Juan tiene derecho a votar cuando y sólo cuando está inscrito en el registro electoral.

   p: Juan tiene derecho a votar.
   q: Juan está inscrito en el registro electoral.

   Simbolización: $p \leftrightarrow q$

Generalmente se presentan expresiones más complejas que las que hemos considerado hasta ahora. En los ejercicios desarrollados y en la siguiente sección se proporcionan algunos ejemplos.

Ejercicios

Simbolice los enunciados:

1. La primavera entraba al jardín del gigante si y sólo si los niños podían jugar en su jardín.

2. Arturo es un gran jugador de ajedrez porque y sólo porque domina la deducción lógica, sin embargo ha perdido el campeonato.
3. Jorge construirá un segundo piso cuando y sólo cuando el banco le acepte la hipoteca, ya que él es el dueño de la casa.

Solución:

1. $p \leftrightarrow q$
2. $(p \leftrightarrow q) \wedge r$
3. $r \mathbin{.\!\rightarrow\!.} p \leftrightarrow q$

2. APLICACIONES VARIAS

2.1. Simbolizar y encontrar los valores de verdad

Veamos, aprovechando los ejemplos vistos al comenzar el capítulo (apartado 1.1), algunos casos de simbolizaciones más complejas y los valores de verdad de la fórmula resultante.

1. Simbolizar: "O el puntero izquierdo no se adelanta, o baja un mediocampista y el centro delantero no queda libre de marcación. Pero, no ocurre que, si los marcadores de punta no suben, entonces el puntero izquierdo no sube. Por lo tanto, se retrasa un mediocampista y los contrarios presionan al equipo, ya que si el centro delantero no se desmarca y los defensas laterales no se adelantan, entonces los contrarios presionarán al equipo."

   Donde:

   p: El puntero izquierdo se adelanta.
   q: Baja un mediocampista.
   r: El centro delantero se desmarca.
   s: Los marcadores de punta suben.
   t: Los contrarios presionan al equipo.

   Con estructura formal:

   O no p, o q y no r /
   Pero, no ocurre que si no s, entonces no p /
   Por lo tanto, q y t, ya que si no r y no s, entonces t.

Con lo visto acerca de los conectores, podemos iniciar la tercera y última etapa de la simbolización paso a paso.

$\sim p \ .\vee.\ q \wedge \sim r$ /
Pero, no ocurre que $\sim s \rightarrow \sim p$ /
Por lo tanto, $q \wedge t$, ya que $\sim r \wedge \sim s \ .\rightarrow.\ t$

En la segunda línea, el ‘no ocurre’ niega el condicional, y en la tercera, el ‘ya que’ anuncia el antecedente de ‘$q \wedge t$’:

$\sim p \ .\vee.\ q \wedge \sim r$ /
Pero, $\sim(\sim s \rightarrow \sim p)$ /
Por lo tanto, $(\sim r \wedge \sim s \ .\rightarrow.\ t) \rightarrow (q \wedge t)$

El ‘por lo tanto’ anuncia la conclusión de todo el razonamiento, del cual las dos líneas anteriores son las premisas. El ‘pero’ de la segunda línea refuerza la idea de que se trata de la segunda premisa, un hecho que se “adiciona” al primero para presentar la conclusión. La conjunción de las premisas constituye el antecedente de un condicional –el principal– que tiene por consecuente la conclusión (al tratar el tema de la consecuencia semántica justificaremos el por qué puede reducirse un razonamiento complejo a una sola proposición):

$$(\sim p \ .\vee.\ q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim s \rightarrow \sim p) \ .\rightarrow.\ (\sim r \wedge \sim s \ .\rightarrow.\ t) \rightarrow (q \wedge t)$$

es la simbolización buscada.

2. Simbolizar y hallar los valores de verdad: ‘Si Gamarra manda atacar a los lanceros, la artillería hará fuego y los infantes pasarán a la retaguardia. En caso de que mande atacar a los lanceros, la infantería deberá abrir fuego. Luego, si los infantes no pasan a la retaguardia, abrirán fuego.’

p: Gamarra manda atacar a los lanceros.
q: La artillería hace fuego.
r: Los infantes pasan a la retaguardia.
s: La infantería debe abrir fuego.

Si p, q y r /
En caso de que p, s /
Luego, si no r, s.

En la primera frase la ',' reemplaza a un 'entonces', y lo mismo sucede en la última (más las conjunciones y negaciones obvias) obtenemos:

$p \rightarrow (q \wedge r)$ / En caso de que p, s / Luego, $(\sim r \rightarrow s)$.

La segunda esconde un condicional también, lo que puede apreciarse del hecho de que la verdad de 'p' y la falsedad de 's' la hacen falsa.

$p \rightarrow (q \wedge r)$ / $p \rightarrow s$ / Luego, $(\sim r \rightarrow s)$.

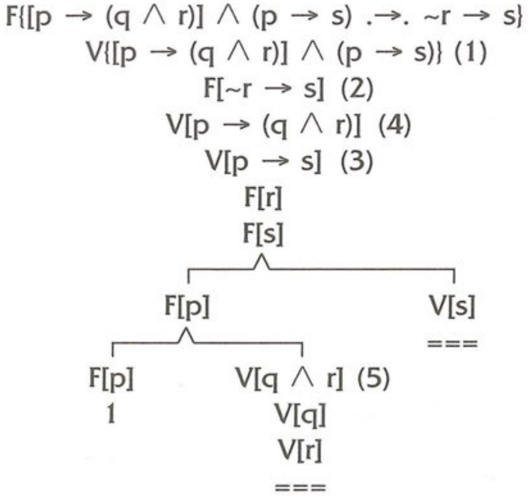
Las dos primeras frases establecen condiciones que se afirman simultáneamente como en la conjunción:

$[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge (p \rightarrow s)$ / Luego, $(\sim r \rightarrow s)$.

El 'luego' después del punto dice que dadas las anteriores no puede ocurrir que lo que sigue sea falso; por lo tanto, se trata de un condicional, y como presenta la conclusión que sigue de todo lo anterior, se trata del conector principal; se simbolizará:

$[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge (p \rightarrow s) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim r \rightarrow s$.

Los valores de verdad los buscaremos con un DS. Al iniciarlo, somos libres de escoger entre suponer que la fórmula es verdadera o falsa. Los ejercicios anteriores deben haber convencido al lector de que un DS que se ramifica mucho es más trabajoso que uno que no lo hace. Como se trata de una fórmula condicional conviene empezar suponiéndola falsa. Esta estrategia, centrada en el primer paso, no es siempre la que ofrece diagramas más simples, pero por lo general así es. Resumiendo: conviene iniciar el diagrama con un supuesto que evite la bifurcación de ramas:



Análisis de ramas	EPM
1. F[p], ----, F[r], F[s]	12,16
	12,16: VVVV VVVV VVVF VVVF

Nótese el orden de ejecución del diagrama: primero evitando trabajar con las fórmulas que se ramifican y, cuando no es posible, buscando aquéllas que cierren una de las ramas; claro que nada de esto es obligatorio y siempre interviene el "gusto" personal. Por último, es conveniente numerar explícitamente las ramas abiertas.

3. Si el calor dilata los cuerpos aunque no sean de metal entonces el calor dilata los metales. Ya que, si los cuerpos son dilatados por el calor, entonces si los cuerpos son de metal, los metales son dilatados por el calor.

Proposiciones:

p: El calor dilata los cuerpos.
q: Los cuerpos son de metal.
r: El calor dilata los metales.

Esquema:

Si p aunque no q entonces r /
Ya que, si p, entonces si q, r.

Veamos primero la estructura fundamental: A ya que B. Será falsa si se da B y no se da A. Su forma lógica es: B → A.

(Si p, entonces si q, r) → (si p aunque no q entonces r).

El primer paréntesis contiene dos condicionales de los cuales el segundo es el consecuente del principal y el otro paréntesis, un condicional con antecedente 'p aunque no q'.

(p .→. q → r) → (p aunque ~q .→. r)

'p aunque ~q' nos dice que las dos cosas ocurren simultáneamente; además que se oponen de algún modo, lo que no nos interesa, por lo que traducimos con '∧'.

(p .→. q → r) → (p ∧ ~q .→. r)

El término 'aunque' se presta bastante bien para observar las dificultades inherentes a toda simbolización. 'Te visitaré aunque llueva'. ¿Cómo entenderlo? En el sentido de 'Te visitaré, llueva o no llueva' o simplemente como 'Te visitaré y llueve'; es decir: 'p ∧ (q ∨ ~q)' o 'p ∧ q'. La última tendería a estandarizar la traducción del 'aunque' como '∧'; la primera reforzaría la idea de fuerza del 'te visitaré', pues 'p ∧ (q ∨ ~q)' tiene los mismos valores de verdad de 'p'; pero si simbolizamos sólo por 'p' nos parece perder algo. Probablemente se recoja mejor este caso con modalidades: 'necesariamente te visitaré', pero la lógica modal escapa a nuestro tema. 'Te visitaré aunque llueve' sí se traduce claramente por 'p ∧ q'. No es, pues, una labor mecánica la de simbolizar, probablemente es la más difícil e interesante de todos los temas que tocamos.

Regresemos a nuestros valores de verdad:

```
F[(p .→. q → r) → (p ∧ ~q .→. r)]
        V[p .→. q → r] (4)
        F[p ∧ ~q .→. r] (1)
           V[p ∧ ~q]  (2)
              F[r]
              V[p]
              V[~q]  (3)
              F[q]
        ┌──────∧──────┐
      F[p]        V[q → r]
      ===             i
```

Cortamos aquí el esquema por suponer llegado el final de la página, hecho que alguna vez puede ocurrirle al lector. En estos casos conviene señalar con números, o cualquier otra marca inequívoca, las ramas que deben continuar. Al iniciar la nueva página conviene empezar con las marcas en cuestión, y poner debajo de ellas las afirmaciones respecto de proposiciones simples a que se haya llegado en cada rama (en nuestro caso V[p], F[q] y F[r]). Seguimos, pues, en página "nueva":

```
                 i
               V[p]
               F[q]
               F[r]
          ┌─────∧─────┐
        F[q]        V[r]
         1          ===
```

Análisis de ramas	EPM
1. V[p], F[q], F[r]	4: VVVF VVVV

Ejercicios

1. Simbolice y determine si la fórmula resultante es una tautología.

   'Si el testigo dice la verdad, entonces el asesino hizo tres disparos; además, el revólver tenía cinco balas. Si el revólver tenía cinco balas, el asesino hizo sólo un disparo y no tres. Entonces, el testigo no ha dicho la verdad.'

2. Demuestre que cada vez que es verdad: 'Miguel tomó un microbús o un taxi. Si tomó un micro o caminó, llegó tarde y se perdió la reunión', también lo es 'Miguel llegó tarde si no tomó un taxi'.

Solución

1. Consideremos:

p: El testigo dice la verdad.
q: El asesino hizo tres disparos.
r: El revólver tenía cinco balas.
s: El asesino hizo sólo un disparo.

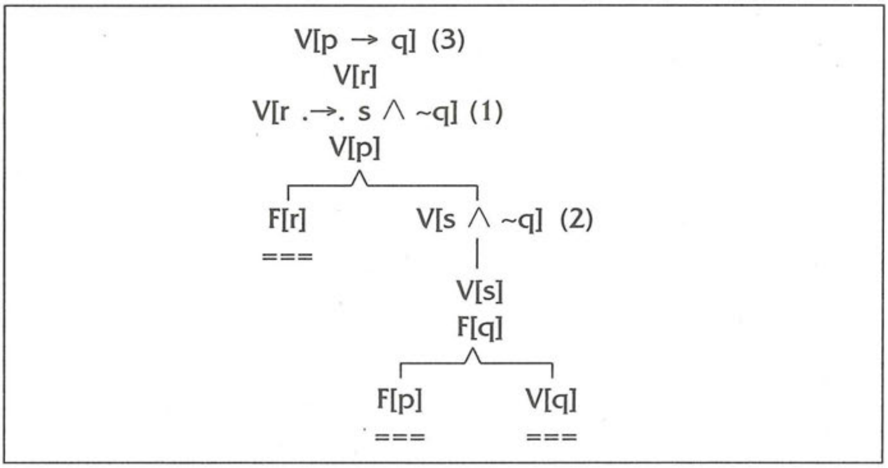
El esquema formal que obtenemos es:

Si p, entonces q; además, r / Si r, s y no q / entonces, no p.

La simbolización es:

$(p \rightarrow q) \wedge r \wedge (r .\rightarrow. s \wedge \sim q) .\rightarrow. \sim p$

Y suponiendo falsa la fórmula, después del primer desarrollo, se llega a:



Luego, la fórmula resultante es una tautología.

2. Sea:

p: Miguel tomó un microbús.
q: Miguel tomó un taxi.
r: Miguel caminó.
s: Miguel llegó tarde.
t: Miguel se perdió la reunión.

Debemos probar que cada vez que es verdadera:

$(p \vee q) \wedge (p \vee r .\rightarrow. s \wedge t)$

también lo es: '$\sim q \rightarrow s$'. Para esto es suficiente probar por DS que:

$\models (p \vee q) \wedge (p \vee r .\rightarrow. s \wedge t) .\rightarrow. (\sim q \rightarrow s)$

¿Hay otra forma de probarlo? (Sugerencia: examine EPM comunes a la fórmula de las premisas y a la de la conclusión).

2.2. Valores de verdad y descripciones de EPM

Veamos ahora cómo dados los valores de verdad de una fórmula podemos encontrar en qué estados del mundo ella es verdadera o falsa. Estos ejercicios están destinados a mostrar cómo los conectores proposicionales están vinculados entre sí. Este vínculo se aclarará al ver cómo los conectores "significan" EPM.

1. Dada la fórmula A cuyos valores de verdad son: VVVF FFVV, describir los EPM en que la fórmula es falsa.

Como nos dan ocho valores de verdad se trata de una fórmula con tres variables proposicionales, llamémoslas 'p','q' y 'r'. La fórmula es falsa en los EPM 4, 5 y 6 que de acuerdo con nuestros usos se describen por:

4: V[p], F[q] y F[r],
5: F[p], V[q] y V[r], y
6: F[p], V[q] y F[r].

2.3. Negación con conjunción o disyunción y EPM

Consideremos algunos casos:

1. ¿En qué EPM es verdadera 'p ∧ q'? En este caso conocemos la respuesta: en el EPM en que tanto 'p' como 'q' lo son; es decir, V[p] y V[q].

2. ¿En qué EPM es verdadera 'p ∧ q ∧ r'? No vale la pena hacer un diagrama para responder en V[p], V[q] y V[r].

3. ¿En qué EPM es verdadera 'p ∧ ~q'? Nuevamente ya debemos poder reconocer que en: V[p] y F[q].

4. '~p ∧ q ∧ ~r' es verdadera en F[p], V[q] y F[r].

   Una revisión de estos casos nos debe convencer de que las fórmulas compuestas por conjunciones de proposiciones simples negadas o no, sólo son verdaderas en un único EPM (no lo demostraremos). Las llamaremos 'conjunciones básicas'. Ese EPM es aquel en que las proposiciones no negadas son verdaderas y las negadas falsas. Así:

5. 'p ∧ q ∧ r ∧ s ∧ t ∧ ~u' es verdadera sólo en el EPM 32 de los 64 que constituyen su horizonte.

6. Una de las fórmulas que tienen por valores de verdad:

   FFFF FFFF VFFF FFFF

   es '~p ∧ q ∧ r ∧ s'. Fíjese en que no afirmamos que sea la única fórmula.

   En resumen, siempre podemos construir una fórmula que tenga un único V y si la negamos, tenemos una fórmula con un único F.

   Sin embargo sabemos que son comunes las fórmulas con varios valores de verdad iguales y no sólo un único V o F. Trataremos de enfrentarnos con ellas.

7. ¿En qué EPM es verdadera 'p ∧ ~q .∨. ~p ∧ ~q'? Sabemos que la disyunción preserva los valores de verdad y que 'p ∧ ~q' es verda-

dera en el EPM 2 y '~p ∧ ~q' en el EPM 4. De estas dos consideraciones obtenemos la respuesta: se trata de una fórmula verdadera en los EPM 2 y 4.

8. Buscaremos una fórmula cuya tabla de verdad sea FFFV VVFF. La fórmula consta de tres variables proposicionales. Enfoquemos el problema por partes. Primero buscaremos una fórmula con un único V en la cuarta posición (FFFV FFFF), como ya sabemos un caso es 'p ∧ ~q ∧ ~r'. En segundo lugar, una fórmula con un único V en quinto lugar: '~p ∧ q ∧ r'. Por último, una con un único V en sexto lugar: '~p ∧ q ∧ ~r'. Tenemos así los componentes de la fórmula pedida originalmente, ahora el problema se reduce a unirlos adecuadamente, es decir, preservando los valores V. El conector que realiza esa tarea es la disyunción y a él recurrimos:

   'p ∧ ~q ∧ ~r .∨. ~p ∧ q ∧ r .∨. ~p ∧ q ∧ ~r'

   es una de las posibles respuestas.

Las fórmulas compuestas por disyunciones de conjunciones básicas, llamadas 'formas normales disyuntivas' (FND), son verdaderas en todos los EPM en que lo son sus conjunciones básicas componentes.

También es cómodo este método para encontrar ejemplos de fórmulas donde abundan los valores V, sin que necesariamente obtengamos una fórmula extremadamente larga. Por ejemplo busquemos una fórmula con los valores de verdad: VVVV VVVV VVVV VVVF. Si aplicamos el método anterior directamente esperaríamos una fórmula con 15 disyuntos. Pero bien podemos considerar que la fórmula pedida A es la negación de una fórmula ~A con valores de verdad FFFF FFFF FFFF FFFV. Y ~A se obtiene como '~p ∧ ~q ∧ ~r ∧ ~s', con lo que A sería '~(~p ∧ ~q ∧ ~r ∧ ~s)'. Que puede leerse como: 'no es el caso de que ( )' o 'es falso que ( )'.

Un modo radicalmente distinto se obtiene intercambiando el rol de los valores de verdad. Es decir, fijándonos en los casos en que la fórmula es falsa, en lugar de aquellos en que es verdadera. Así, conjunciones y disyunciones intercambian sus roles al resolver este tipo de problemas. Por ejemplo: 'p ∨ q' tiene los valores VVVF; 'p ∨ ~q', VVFV; '~p ∨ q', VFVV, etc. Dejamos al lector explorar este camino, en el que se privilegia los valores F, y reflexionar ante la curiosa relación que existe entre la conjunción y la disyunción, usualmente llamada 'dualidad.'

2.4. Interdefinición de conectores

Ya que todos los conectores lógicos se definen por sus valores de verdad, pueden ser reemplazados por otros; es decir, una fórmula condicional puede reemplazarse por una que sólo contenga negación y, disyunción o conjunción. Hagámoslo, mostremos que sólo con '$\sim$' y '$\vee$' podemos tener la misma capacidad expresiva que con todos los otros conectores.

La conjunción $A \wedge B$, cuyos valores de verdad son VVVF, puede obtenerse como $\sim(\sim A \vee \sim B)$.

$A \rightarrow B$ obtendrá la misma interpretación que $\sim A \vee B$.

$A \leftrightarrow B$ se puede escribir como $A \rightarrow B \;.\!\wedge\!.\; B \rightarrow A$, es decir como:

$\sim[\sim(A \rightarrow B) \vee \sim(B \rightarrow A)]$

y cada condicional traducido da:

$\sim[\sim(\sim A \vee B) \vee \sim(\sim B \vee A)]$

Lo mismo puede hacerse con la negación y la conjunción.

Más aún, hay un conector '$|$', llamado 'barra', que puede leerse 'o no A o no B' y cuyos valores de verdad son: FVVV. Con el que se logra expresar la negación y la disyunción, con lo que él solo puede reemplazar a todos los conectores. Lo mismo ocurre con el conector '$\downarrow$', llamado 'flecha', 'ni A ni B', cuyos valores de verdad son: FFFV. Así, '$\sim p$' y '$p | p$', y '$p \wedge q$' y '$p|q \;.|.\; p|q$' tienen iguales valores de verdad.

Ejercicios

1. Si la fórmula A tiene la siguiente tabla: VVVF FVVV, describa los EPM en que es falsa.

2. Halle los valores de verdad de las siguientes fórmulas exclusivamente sobre la base de la información que explícitamente manifiestan.

   a. $(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

b. $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee \sim r$
c. $p \vee \sim q \vee r$
d. $\sim(p \wedge q \wedge \sim r) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
e. $\sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim r$
f. $p \wedge \sim q \wedge \sim r$

3. Encuentre por diagramas semánticos la forma normal disyuntiva (FND) de las fórmulas:

a. $(p \vee q \;.\!\rightarrow\!.\; r \wedge s) \wedge (\sim q \leftrightarrow \sim p \;.\!\wedge\!.\; \sim s)$
b. $[r \wedge (\sim r \vee q)] \wedge (q \leftrightarrow r \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q) \;.\!\rightarrow\!.\; p$

4. Dados los siguientes esquemas de fórmulas:

$$\sim C_1 \wedge \sim C_2 \wedge \ldots \wedge \sim C_n$$

donde C_i $(1 \leq i \leq n)$ es una conjunción básica, halle por medio de DS fórmulas con dicho esquema y que tengan los mismos valores de verdad que:

a. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \;.\!\rightarrow\!.\; \sim s \vee q) \;.\!\rightarrow\!.\; (s \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$
b. $[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee \sim s)] \wedge [\sim(t \vee q) \vee (s \rightarrow r)] \wedge [t \wedge s \wedge \sim(p \vee q)]$

5. Si '$p \downarrow q$' equivale a la expresión 'ni p, ni q',

a. Obtener las reglas de los DS para $\downarrow$.
b. Clasificar la siguiente fórmula:

$$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \;.\!\downarrow\!.\; (q \downarrow q) \downarrow p$$

Solución:

1. La fórmula A tiene tres variables proposicionales 'p', 'q' y 'r'. Las descripciones de estados (DE) pedidas son:

EPM	DE
4	V[p], F[q], F[r]
5	F[p], V[q], V[r]

2. a. Recordemos que las FND son verdaderas en todos los EPM en que lo son las conjunciones básicas componentes, de esta manera la fórmula:

$$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

es verdadera en cada uno de los EPM siguientes:

Información			EPM
1.	$p \wedge \sim q \wedge r$	V[p],F[q],V[r]	3
2.	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	F[p],V[q],F[r]	6
3.	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$	F[p],F[q],F[r]	8
			3,6,8: FFVF FVFV

b. Si bien la fórmula no es una FND en forma canónica, se puede proceder de manera similar a la anterior.

Información		(no son DE)	EPM
1.	$p \wedge q \wedge r$	V[p], V[q], V[r]	1
2.	$\sim p \wedge q$	F[p], V[q], ---	5,6
3.	$\sim r$	---, ---, F[r]	2,4,6,8
			1,2,4,5,6,8: VVFV VVFV

Notemos que la FND en forma canónica sería:

$$p \wedge q \wedge r \ .\vee.\ p \wedge q \wedge \sim r \ .\vee.\ p \wedge \sim q \wedge \sim r \ .\vee.\ \sim p \wedge q \wedge r \ .\vee.\ \sim p \wedge q \wedge \sim r \ .\vee.\ \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$$

c. Del mismo modo se obtiene VVVV VFVV.

d. Las fórmulas compuestas por conjunciones de negaciones de conjunciones básicas son falsas en los EPM en que son verdaderas las conjunciones básicas (¿por qué?). Así:

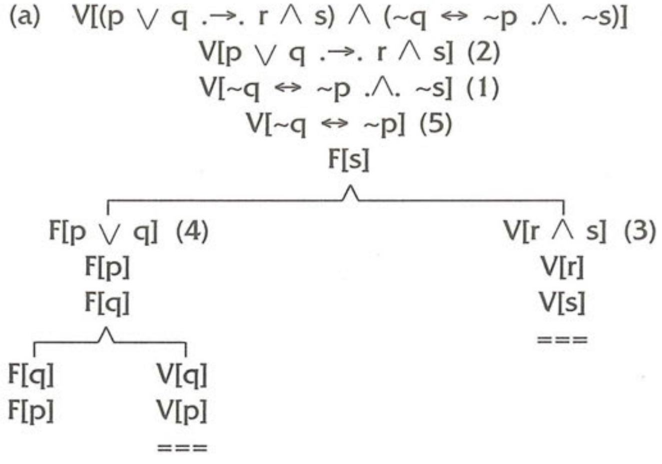
Información		(DE falsos)	EPM
1.	$p \wedge q \wedge \sim r$	V[p], V[q], F[r]	2
2.	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$	V[p], F[q], F[r]	4
3.	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$	F[p], F[q], F[r]	8
			2,4,8: VFVF VVVF

e. Por procedimientos análogos a los de (b) y (c), primero acomodemos la estructura de la fórmula para que determine los EPM falsos, esto es, una cadena de bloques de conjunciones negadas:

$\sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim(r)$ con tabla: FVFF FFFV.

f. FFFV FFFF.

3. En cada caso es suficiente conocer los EPM en que la fórmula es verdadera (¿por qué?).

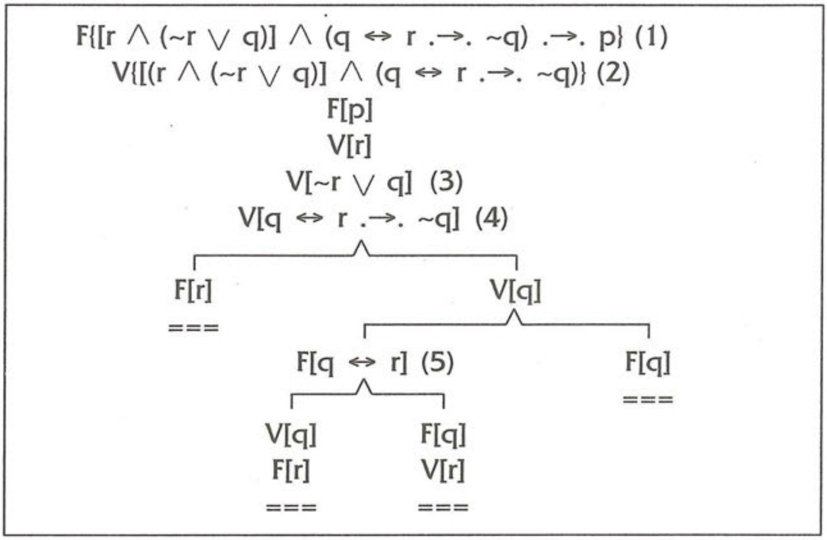


Análisis de ramas	DE
1. F[p], F[q], ----, F[s]	F[p], F[q], V[r], F[s] F[p], F[q], F[r], F[s]

Y la FND buscada es:

$(\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s)$

b. Si bien debemos encontrar los EPM en que la fórmula es verdadera, en este caso lo más práctico es desarrollar el DS partiendo de la falsedad para evitar ramificaciones:



La fórmula es siempre verdadera, su FND tiene las 16 descripciones de estados. Como la fórmula es una tautología, cualquier fórmula del tipo:

A ∨ ~A ∨ B

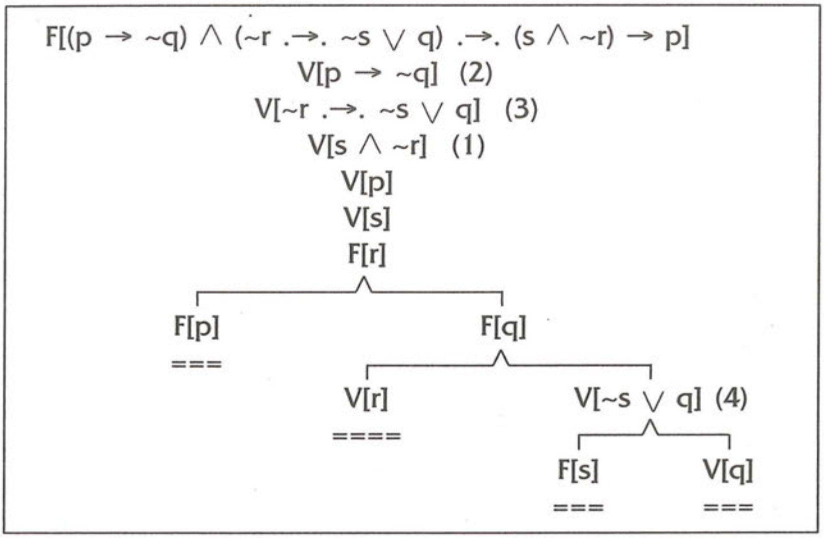
satisface la condición. Por ejemplo: (p ∧ q ∧ r) ∨ ~(p ∧ q ∧ r).

Debe quedar claro que la suposición inicial para el desarrollo de un DS depende de la fórmula particular y no se puede dar una regla simple que contemple todos los casos. El lector deberá desarrollar un olfato "semántico". Por ejemplo, para la siguiente fórmula condicional es más conveniente suponerla verdadera:

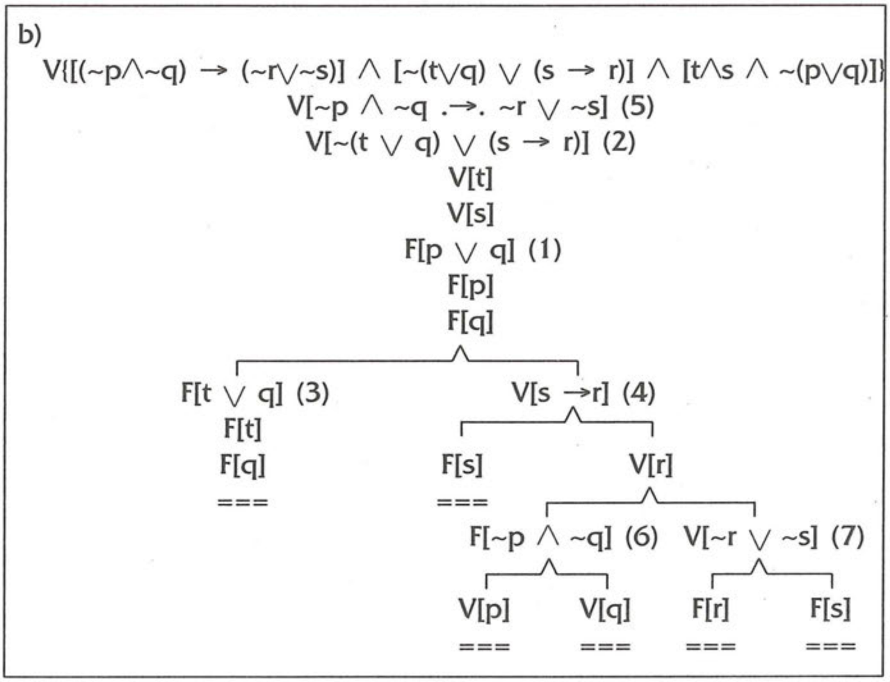
p → ~{r → [r ∨ (q ↔ r) .∨. (q ∧ r .→. ~q)]}

4. Ahora será necesario describir los estados en que las fórmulas son falsas.

   a. Conviene empezar con la falsedad de la fórmula, lo que arroja:



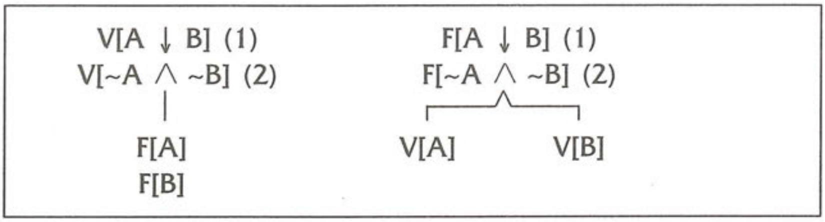
La fórmula es una tautología, ¿cuál será la respuesta?



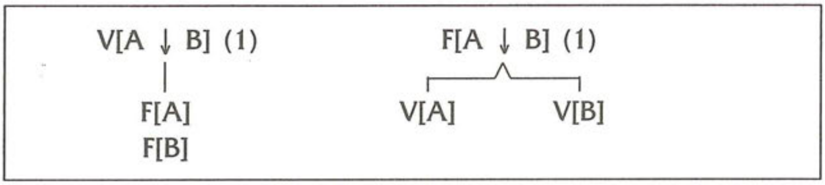
Siendo una fórmula contradictoria, ¿cuál es la respuesta? Observe que una fórmula con los mismos valores de verdad sería:

$(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t) \wedge \sim(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t)$

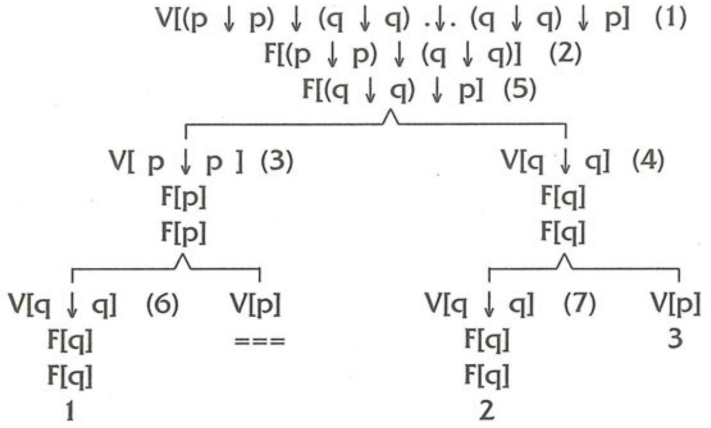
5. a. $A \downarrow B$ y $\sim A \wedge \sim B$ tendrán las mismas reglas semánticas.



En resumen,



b. Empezaremos suponiendo la verdad de la fórmula.



Análisis de ramas		EPM
1.	F[p], F[q]	4
2.	----, F[q]	2,4
3.	V[p], F[q]	2
		2,4: FVFV

La fórmula es contingente.

3. EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Simbolización

1. ¿Cuáles de las expresiones siguientes son conectores proposicionales?

1.1. 'No es el caso de que' en la oración 'No es el caso de que los alumnos garabateen los libros'.
1.2. '....Si....' en la oración 'Japón se rendiría si Roosevelt ordenara el lanzamiento de una bomba atómica sobre Hiroshima'.
1.3. '...Si....' en la oración 'Sócrates quiere saber si el oráculo de Delfos ha respondido a Platón'.
1.4. 'Entonces' en la oración 'En aquel entonces el cine era mudo'.
1.5. 'Luego' en la oración 'En las prácticas calificadas Lulú sacó 10, luego 09 y después 08'.
1.6. 'O' en la oración 'Eliana me dirá que sí o me dirá que no'.

2. Simbolice los siguientes enunciados señalando las proposiciones.

2.1. No es el caso de que Marylin sea rubia y Rafaella sea pelirroja.
2.2. Max comprará un libro o un disco, si Dora le cancela la deuda pendiente.
2.3. Nerón se romperá una pierna si salta, pero moriría con quemaduras si no salta.
2.4. Los venados sobrevivirán si y sólo si los leones no los alcanzan, sin embargo los leones sobreviven si y sólo si los venados sobreviven.
2.5. O las pirámides fueron construidas por los faraones y por los arquitectos, o fueron construidas por los esclavos.
2.6. O Carla estudia teatro y ballet, o Carla practica aeróbicos si es modelo.
2.7. Ni los niños juegan ni van al zoológico, si Barranco o San Miguel no tienen parques.
2.8. O la enfermedad es transmisible o no, sin embargo no es el caso que exista una vacuna o una epidemia.
2.9. Si Liliana presiona el botón rojo de la grabadora, entonces grabará la conferencia si el aparato tiene pilas.
2.10. Si no es el caso de que la temperatura baje o amanezca nublado, hará un día caluroso.
2.11. No es el caso que si la temperatura baja o amanece nublado, hará un día caluroso.
2.12. Si la farmacia está de turno, entonces si Diana lleva la receta, el farmacéutico preparará la medicina.

2.13. O Miriam enciende el televisor o si sabe tocar guitarra compondrá una melodía.

2.14. Pablo firmará la letra si no tiene dinero, puesto que necesita comprar el repuesto.

2.15. Tatiana bosteza si y sólo si ayer se acostó tarde, ya que Tatiana tiene sueño.

2.16. En la montaña hay fuego puesto que allí hay humo, cada vez que el clima es muy seco y la temperatura es muy alta.

2.17. Si USA construyera un submarino atómico Trident menos de los 25 programados y la URSS construyera un submarino atómico Tifón menos, se podría alfabetizar todo el mundo.

2.18. No hay anchovetas en el mar puesto que no es el caso de que abunde el plancton o no ocurra el fenómeno del Niño. Además, ocurre el fenómeno del Niño de ahí que o abunda el plancton o no hay anchovetas en el mar.

2.19. Si Romeo sonríe, entonces Julieta lo acepta si Romeo se le declara. Pero sonríe si y sólo si Julieta lo acepta. De ahí que Romeo no se declara a Julieta dado que no sonríe.

2.20. Si el sol brilla, las aves cantan si silba el viento. Ni silba el viento ni es el caso de que el sol brille o el cielo sea azul. Luego, las aves cantan si y sólo si el sol brilla, pero el cielo no es azul.

3.2. Aplicaciones varias

1. Si la fórmula A (p,q,r) tiene la siguiente tabla: VVVF VVVF, describa los estados posibles del mundo en los que dicha fórmula es falsa. Encuentre una fórmula equivalente a A, con este dato.

2. Halle una fórmula que corresponda a cada tabla de verdad.

   a) VFFF FFFF
   b) VFFF VFFF
   c) VVVV VVVV
   d) VVFV VVV
   e) VVVV VVFF
   e) FFFF FFFF
   g) FFVV VVVV VVVV VVVF

3. Halle la tabla de verdad de las siguientes fórmulas sobre la base de la información que explícitamente manifiestan:

3.1. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r)$

3.2. $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$

3.4. $(\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge r) \vee p$

3.5. $p \vee q \vee \sim r$

3.6. $\sim(p \wedge q \wedge r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

3.7. $\sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim q$

3.8. $p \wedge \sim q \wedge \sim r$

4. Halle fórmulas que tengan tablas de verdad iguales a la disyunción, condicional y bicondicional construidas sólo sobre la base de conjunciones y negaciones.

IV

CONSECUENCIA SEMÁNTICA

1. CONSECUENCIA SEMÁNTICA

1.1. Generalidades

Al inicio del libro dijimos que la noción central que nos ocuparía es la de inferencia deductiva o razonamiento deductivo; pero, si bien hemos avanzado, sólo nos hemos ocupado de averiguar cuándo una proposición compuesta es verdadera o falsa y para nada de la conexión que puede haber entre una o muchas premisas y la conclusión de un razonamiento. Esto fue necesario porque nos permitió dos cosas: primero, dominar un método, los diagramas semánticos, que determina el valor de verdad de una proposición compuesta a partir de las simples que la forman; segundo, nos acostumbró a traducir a LP expresiones de un lenguaje natural, tomando en cuenta sólo su forma lógica y prescindiendo de su contenido material. Con estas herramientas y buenas costumbres, vamos a dar ahora un paso más en la dirección que conduce al tratamiento formal de los razonamientos deductivos. No de todos los razonamientos deductivos, por ahora, sino de aquellos que se sustentan exclusivamente en relaciones veritativo-funcionales entre proposiciones.

Para abordar nuestro tema necesitamos primero fijar el molde formal dentro del que analizaremos la "transmisión" de verdad entre proposiciones. Es decir, ¿cómo o con qué reflejaremos en nuestro lenguaje artificial un razonamiento deductivo? Sin darnos cuenta ya lo hemos visto en un caso particular:

$\models p \vee \sim p$,

que nos dice: la expresión '$p \vee \sim p$' es verdadera en todos los EPM. Bien podríamos aceptar que se nos dice que '$p \vee \sim p$' hereda su verdad de ninguna premisa, o de un conjunto vacío de premisas:

$\phi \models p \vee \sim p$.

El símbolo '$\models$' sirve para designar la **relación de consecuencia semántica entre proposiciones**, que es la que corresponde en el nivel formal (de este libro) a la de razonamiento deductivo, de una manera que iremos precisando. Un ejemplo de una inferencia correcta patente es la que afirma que la verdad de una proposición se sigue de ella misma. Es decir que, por ejemplo, 'Estudiar lógica es entretenidísimo' es la conclusión válida de la premisa 'Estudiar lógica es entretenidísimo'. Esto lo reflejamos con:

$p \models p$,

donde p: Estudiar lógica es entretenidísimo.

La notación establece que 'p' es consecuencia semántica de sí misma. El lector seguramente ha confirmado con este ejemplo una duda que tal vez lo haya asaltado antes, lo correcto es escribir entre comillas las fórmulas que une el símbolo '$\models$' y tiene razón. Pero es costumbre extendida darlas por implícitas para no cargarnos de gran cantidad de comillas, del mismo modo como hemos evitado el uso excesivo de paréntesis. Hecha esta aclaración, regresemos al tema de la consecuencia semántica.

Lo que deseamos poner de manifiesto es que de un conjunto de premisas Γ (eventualmente vacío) se sigue, si son verdaderas, una conclusión que también tiene que serlo. Lo que no deseamos que ocurra es que una proposición falsa se siga "correctamente" de premisas verdaderas. Así definimos:

Consecuencia semántica: Una proposición es consecuencia semántica de un conjunto de proposiciones Γ si es verdadera en cada uno de los casos en que son verdaderas todas las proposiciones del conjunto Γ.

Es decir, si las premisas (las proposiciones de Γ) son verdaderas, la conclusión no puede ser falsa. O también, una proposición A es consecuencia semántica de un conjunto de proposiciones Γ si y sólo si **no hay** un EPM en el que A sea falso y todas las proposiciones de Γ verdaderas.

Que '$\models p \vee \sim p$' es una afirmación bien establecida lo prueba el hecho de que siendo '$p \vee \sim p$' siempre verdadera, no puede darse el caso de que sea falsa. Es más, esto no sólo cuando no hay premisas sino con cualquier premisa, como en:

$$q \models p \vee \sim p$$

que cumple con la definición. Pues, cada vez que su premisa es verdadera, la conclusión, que siempre lo es, es verdadera. Más todavía podemos escribir con verdad:

$$q, r, s \models p \vee \sim p$$

Y en general, $\Gamma \models T$, para cualquier conjunto Γ de proposiciones.

Es necesario hacer una aclaración acerca de algunos usos propios de los lógicos, más que de la lógica, respecto de expresiones en que aparece '$\models$'. Si $\Gamma = \{p, p \rightarrow (\sim r \wedge t), p \rightarrow (q \rightarrow p)\}$, por ejemplo, y A se reemplaza por '$p \wedge t$', $\Gamma \models A$ no se escribe como:

$\{p, p \rightarrow (\sim r \wedge t), p \rightarrow (q \rightarrow p)\} \models$ '$p \wedge t$', ni como:
'p', '$p \rightarrow (\sim r \wedge t)$', '$p \rightarrow (q \rightarrow p)$' $\models$ '$p \wedge t$', sino como:
$p, p \rightarrow (\sim r \wedge t), p \rightarrow (q \rightarrow p) \models p \wedge t$, simplemente.

Es decir, se busca un ahorro considerable de símbolos. También es costumbre que seguiremos: llamar a las proposiciones de Γ 'las premisas' de la conclusión y entender por 'conclusión' a A.

Otro modo usual y cómodo de hablar, es decir, que C es la consecuencia semántica de las proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$, donde se busca poner de relieve los términos 'premisa' y 'conclusión', empleando sus primeras letras.

Regresemos a nuestra relación de consecuencia semántica y veamos a través de ejemplos su significado. Consideremos tres premisas y una conclusión tales que entre todas sólo aparezcan tres proposiciones simples. En este caso las relaciones de V o F entre ellas se reducen a considerar ocho EPM, supongamos además que conocemos lo que ocurre en cada uno de esos ocho EPM:

EPM:	12	34	56	78
P_1)	VV	FF	VV	FF
P_2)	VF	VF	VF	VF
P_3)	VF	FF	VF	VF
C)	VV	VF	VV	VF

¿Podemos afirmar que hay consecuencia semántica entre las premisas y la conclusión propuesta? Veamos caso por caso. En el EPM 1 no hay problemas puesto que C es verdadera y lo mismo se puede decir de los EPMs 2, 3, 5, 6 y 7. Pero hay dos EPM, el 4 y el 8, en que C es falsa: como en esos casos las premisas son falsas, no se infringe la definición de consecuencia semántica, pues no ocurre que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Modifiquemos algo el ejemplo cambiando las premisas y la conclusión (EPM 2, 7 y 8):

EPM:	12	34	56	78
P_1)	VV	FF	VV	FF
P_2)	VF	VF	VF	VF
P_3)	VF	FF	VF	VF
C)	VF	VF	VV	FV

Examinemos los cambios. En el EPM 2 una de las premisas es verdadera (la primera) y la conclusión falsa, ¿hemos perdido la relación de consecuencia semántica? De acuerdo con la definición dada, en tanto las premisas no sean todas verdaderas y la conclusión falsa no se pierde la relación. El mismo razonamiento se aplica al EPM 7, sin importar, en este caso, que la "mayoría" de las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa; basta que una premisa sea falsa cuando lo es la conclusión, para que se mantenga la relación de consecuencia semántica. El último caso, en que la conclusión es verdadera mientras todas las premisas son falsas, tampoco escapa a la definición, por lo que en este segundo ejemplo hay consecuencia semántica como en el primero.

En cambio, en:

EPM:	12	34	56	78
P_1)	VV	FF	VV	FF
P_2)	VF	VF	VF	VF
P_3)	VF	FF	VF	VF
C)	VF	VF	FV	FV

no hay consecuencia semántica, pues en el EPM 5 las premisas son verdaderas y la "conclusión" falsa. Fíjese bien el lector que basta un EPM en el que se incumpla la consecuencia semántica para invalidar la relación.

Algunos hechos interesantes acerca de esta relación entre proposiciones que se cumplen para cualquier A y B son:

1. $\Gamma \models \top$
2. $\bot \models A$
3. $A \models A$
4. Si $\Gamma \models A$ y $A \models B$, entonces $\Gamma \models B$.

Veamos en detalle la 2 y la 4, ya que la 1 la hemos examinado al inicio del parágrafo, y la 3 es bastante evidente. La 2 afirma que una fórmula contradictoria, es decir siempre falsa, tiene como consecuencia semántica a cualquier fórmula. Que esto es verdad se sigue de la definición de consecuencia semántica y del hecho de que la fórmula $\bot$ no tiene el valor de verdad V en ningún EPM.

Podría parecer a primera vista que las fórmulas contradictorias son muy útiles puesto que tienen como consecuencia a cualquier fórmula. Son una especie de axioma ideal del cual se sigue cualquier afirmación, casi una fórmula filosofal, pero no es así. Como produce cualquier cosa, no todo lo que genera es oro. Al tener una fórmula contradictoria como consecuencia semántica cualquier fórmula, no permite estar seguro de si esta última es tautológica, contingente o contradictoria. Por esto, una teoría en la que se descubre una contradicción se abandona, pues con ella puede "explicarse" todo, tanto lo que realmente ocurre, como lo que no ocurre.

La 4, conocida como 'propiedad transitiva' de la consecuencia semántica, puede probarse fácilmente por el absurdo:

> Si suponemos que no ocurre $\Gamma \models B$ y que sí se dan $\Gamma \models A$ y $A \models B$, tendríamos para algún EPM que B es falsa y todas las fórmulas de Γ verdaderas en ese estado. En ese mismo estado, como $\Gamma \models A$, A sería verdadera y lo mismo B, pues $A \models B$. Pero en un EPM no puede ocurrir que una fórmula sea verdadera y falsa al mismo tiempo. Luego $\Gamma \models B$.

La transitividad de la consecuencia semántica es útil en la medida en que evita tener que probar que se da la relación en los casos en que se cumplen los supuestos.

Hemos visto qué es la consecuencia semántica y alguna de sus propiedades, ya es tiempo de que bajemos un tanto a terrenos más prácticos si es que los hay en nuestro tema. Estudiemos el problema más simple, pero vital, del reconocimiento de la relación de consecuencia semántica entre un conjunto de proposiciones dado y una proposición determinada.

Si deseamos averiguar si podemos afirmar o no que 'q' es consecuencia semántica de '$p \vee q$' y '$\sim p$', debemos efectuar un análisis de la relación entre las "premisas" y la conclusión que puede llevarse a cabo por dos vías:

1. Determinar en qué EPM las "premisas" ('$p \vee q$' y '$\sim p$') son simultáneamente verdaderas y verificar sólo en esos EPM lo que ocurre con la "conclusión" ('q'). Si en esos EPM la conclusión es verdadera, hay consecuencia semántica; si en por lo menos uno no es verdadera, no se da la relación.

2. Determinar en qué EPM es falsa la conclusión y ver lo que ocurre con las premisas en esos EPM. Si todas las premisas son verdaderas en uno de los EPM, entonces no hay consecuencia semántica; pero si por lo menos una de ellas (no necesariamente la misma) es falsa en cada uno de los EPM hay consecuencia semántica.

Apliquemos estos caminos al caso propuesto y al final veremos que existe un tercer enfoque que resume los anteriores:

1. Preguntar en qué EPM son verdaderas simultáneamente '$p \vee q$' y '$\sim p$' es lo mismo que preguntar por los EPM en que '$p \vee q \;.\!\wedge.\; \sim p$' es verdadera (fíjese en el uso de '$\wedge$' para unir las premisas). Hay que considerar un máximo de cuatro EPM. La conjunción es verdadera sólo si los dos términos lo son. En el ejemplo, '$p \vee q$' sólo es verdadera en los EPM 1, 2 y 3, y '$\sim p$' en los EPM 3 y 4. Así, el EPM en que las premisas son todas verdaderas es único: el 3. Sólo necesitamos preocuparnos por 'q' en el EPM 3, en el que es V. Por lo tanto, hay consecuencia semántica.

2. Si partimos del examen de la falsedad de 'q', nos circunscribimos a los EPM 2 y 4. '$\sim p$' es falsa en 2 y '$p \vee q$' en 4, por lo que hay consecuencia semántica (ambas no tienen necesariamente que ser F en los mismos EPM).

Si suponemos ahora un caso más general donde deseamos decidir si las premisas A, B tienen por consecuencia semántica a C de acuerdo con los análisis anteriores, la respuesta es negativa en un **único** caso:

$A \wedge B$ es verdadero y C falso.

Y esto puede reflejarse en nuestro lenguaje con el condicional, conector que se caracteriza, justamente, por ser falso sólo cuando es verdadero su antecedente y falso su consecuente. Es decir, que preguntarse si $A, B \models C$ existe es preguntarse por la validez de $\models A \wedge B\ .\rightarrow.\ C$. Esperamos que el lector vea con claridad la generalización a un conjunto cualquiera de premisas (la demostración utiliza inducción matemática):

$P_1, P_2, \ldots, P_n \models C$ si y sólo si $\models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n\ .\rightarrow.\ C.$

En nuestro ejemplo bastaba averiguar si '$(p \vee q) \wedge \sim p\ .\rightarrow.\ q$' era una tautología.

Ejercicios

1. Pruebe por DS que '$p \wedge \sim r$' es consecuencia semántica de las premisas '$\sim q \rightarrow p$', '$s \rightarrow \sim r$' y '$\sim q \wedge s$'.

2. Determine si la conclusión '$\sim(\sim r \wedge q) \rightarrow p$' es consecuencia semántica de las premisas '$\sim(\sim p \vee \sim q)$', '$\sim r \vee \sim s$' y '$p \rightarrow r$'.

3. Dadas las siguientes tablas de verdad de las proposiciones P_1, P_2, P_3 y C:

   P_1) VVVF VFVF VVVF VVVV
   P_2) FVVV VFVF FVVF VFVF
   P_3) VFFF VFFV VFVV FFVV
   C) VFFF VFFF VFVF VFVF

   a. Diga si $P_1, P_2, P_3 \models C$.

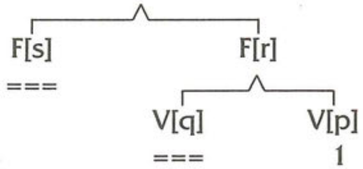
   b. Si C fuese contradictoria, ¿qué columnas de valores de verdad (EPM) alteraría usted para que fuese consecuencia semántica?

   c. Introduzca usted pequeñas modificaciones al azar en los valores de verdad y analice si se mantiene o no la relación $\models$.

Solución:

1. Determinaremos los EPM en que las premisas son verdaderas (su conjunción verdadera), para lo cual partiremos en el DS de la hipótesis de verdad.

$$V[(\sim q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow \sim r) \wedge \sim q \wedge s]$$
$$V[\sim q \rightarrow p] \quad (3)$$
$$V[s \rightarrow \sim r] \quad (2)$$
$$V[\sim q] \quad (1)$$
$$V[s]$$
$$F[q]$$



Análisis de ramas	EPM
1. V[p], F[q], F[r], V[s]	7

¿Cómo es la conclusión en el EPM 7?, es decir, ¿qué ocurre con la conclusión en el EPM en que las premisas son verdaderas?

p q r s	p ∧ ~r
V F F V	V V

La conclusión no es falsa, entonces es consecuencia semántica del conjunto de premisas.

2. Determinaremos en qué EPM la conclusión es falsa.

$F[\sim(\sim r \land q) \to p]$

$V[\sim(\sim r \land q)]$ (1)

$F[p]$

$F[\sim r \land q]$ (2)

$\land$

$V[r]$ $F[q]$

1 2

Análisis de ramas	EPM (En el problema hay cuatro variables)
1. F[p], ----, V[r], ----	9,10,13,14
2. F[p], F[q], ----, ----	13,14,15,16
	9,10,13,14,15,16

Si en estos EPM por lo menos una premisa es falsa, hay consecuencia semántica. Esto podemos verlo sin necesidad de hacer nuevos DS del modo siguiente:

p q r s	$\sim(\sim p \lor \sim q)$	$\sim r \lor \sim s$	$p \to r$
F V V V	F	F	V
F V V F	F	V	V
F F V V	F	F	V
F F V F	F	V	V
F F F V	F	V	V
F F F F	F	V	V

Lo que prueba que hay consecuencia semántica.

3. a. Las premisas son verdaderas en las columnas (EPM) 5, 11 y 15, y la conclusión también, por lo que hay consecuencia semántica.
   b. En las columnas 5, 11 y 15 hay que colocar algún F en cualquier línea.
   c. A cargo del lector.

1.2. Implicación

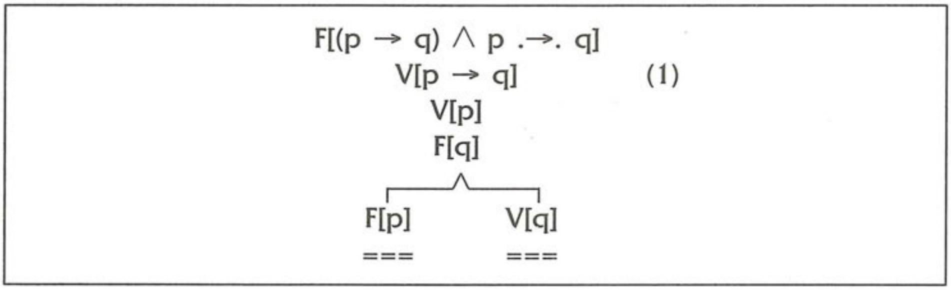
La implicación es un caso particular de la consecuencia semántica. Diremos que A implica a B si B es consecuencia semántica de A. Es decir, se trata de la relación de consecuencia semántica con una sola premisa. Por ejemplo, '$p \land q$' implica a '$q \land p$', pues $p \land q \models q \land p$, como se prueba con el análisis por diagramas semánticos que hicimos en el capítulo II, al probar la conmutatividad de la conjunción.

Si bien en nuestra presentación la implicación sigue a la consecuencia semántica como caso particular, la hemos podido tomar como primera y presentar la consecuencia semántica como una generalización de la misma. Lo importante, que debe estar siempre presente en nosotros, es su íntima vinculación. Tanto es así que bien puede uno prescindir de la relación de consecuencia semántica sustituyéndola por la de implicación, pues ocurre que:

$A, B, \ldots, F \models G$ si y sólo si $A \wedge B \wedge \ldots \wedge F$ implica a G.

Es decir, $\Gamma \models G$ si y sólo si la conjunción de los elementos de Γ implica a G. A esta relación se aplica pues todo lo dicho acerca de la consecuencia semántica, en especial los métodos o caminos de que disponemos para reconocer si hay o no hay implicación entre dos proposiciones.

Ejemplo, ¿implica '$p \rightarrow q \;.\!\wedge\!.\; p$' a '$q$'? Necesitamos ver si '$(p \rightarrow q) \wedge p \;.\!\rightarrow\!.\; q$' es una tautología.



Lo que prueba que sí hay implicación. Debe notarse que si A implica a B, no necesariamente B implica a A. En nuestro caso 'q' no implica '$(p \rightarrow q) \wedge p$'. Pero hay casos en que sí ocurre la mutua implicación.

Entre las principales propiedades de la implicación, conocidas como **leyes de la implicación**, contamos con:

1. Toda proposición siempre verdadera (tautología) es implicada por cualquier proposición: $A \models T$.
2. Toda proposición siempre falsa (contradicción) implica a cualquier proposición: $\bot \models A$.
3. Toda proposición se implica a sí misma: $A \models A$.

4. La implicación es una relación transitiva: si $A \models B$ y $B \models C$, entonces $A \models C$.

Todas ellas no son más que casos particulares o repeticiones de las propiedades vistas con la consecuencia semántica.

Ejercicios

1. Pruebe las siguientes implicaciones.

a.	$(p \rightarrow q) \wedge p \models q$	(Modus Ponens o eliminación de →)
b.	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \models \sim p$	(Modus Tollens)
c.	$(p \vee q) \wedge \sim p \models q$	(Silogismo disyuntivo)
d.	$p \wedge q \models q$	(Simplificación o eliminación de ∧)
e.	$p \models p \vee q$	(Adición o introducción de ∨)
f.	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \models r$	(Eliminación de ∨)
g.	$\perp \models p \rightarrow q$	
h.	$p \rightarrow \sim q \models T$	

2. Responda:

a. Si $A \models T$, ¿es A una tautología?
b. Si $T \models A$, ¿es A una Tautología?
c. Idem con ⊥.

Solución:

1. Probaremos por DS que los condicionales asociados son tautológicos.

a. Está desarrollado en el texto.

(b) F[(p → q) ∧ ~q .→. ~p]
V[p → q] (1)
F[q]
V[p]
∧
F[p] V[q]
=== ===

Ejemplo del esquema implicativo Modus Tollendo Tollens.

(c) $F[(p \vee q) \wedge {\sim}p \ .\!\rightarrow\!. \ q]$
$V[p \vee q]$ (1)
$F[p]$
$F[q]$
$V[p]$ $V[q]$

=== ===

Ejemplo de silogismo disyuntivo.

(d) $F[p \wedge q \ .\!\rightarrow\!. \ q]$
$V[p]$
$V[q]$
$F[q]$

===

El hecho de que una conjunción de proposiciones implique a cualquiera de ellas recibe tradicionalmente el nombre de 'simplificación', y, como veremos más adelante, en la deducción natural 'eliminación de la conjunción'.

(e) $F[p \ .\!\rightarrow\!. \ p \vee q]$
$V[p]$
$F[p \vee q]$ (1)
$F[p]$
$F[q]$

===

El hecho que una proposición implique a su disyunción con cualquier otra proposición se llama tradicionalmente 'adición' y en deducción natural 'introducción de la disyunción'.

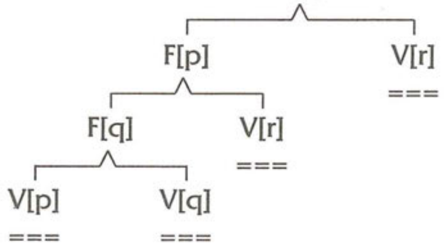
(f) $F[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) .\!\rightarrow\!. r]$

$V[p \vee q]$ (3)

$V[p \rightarrow r]$ (1)

$V[q \rightarrow r]$ (2)

$F[r]$



Ejemplifica el hecho que si en una disyunción cada una de las alternativas tiene el mismo consecuente, el consecuente es implicado. En deducción natural la llamaremos 'eliminación de la disyunción'.

(g) $F[\bot .\!\rightarrow\!. p \rightarrow q]$

$V[\bot]$

$F[p \rightarrow q]$

===

El afirmar como verdadera una contradicción cierra el diagrama.

(h) $F[p \rightarrow q .\!\rightarrow\!. \top]$

$V[p \rightarrow q]$

$F[\top]$

===

El afirmar la falsedad de una tautología constituye la contradicción que cierra el diagrama.

2. a. Como cualquier fórmula implica una tautología, A no tiene por qué serlo.

   b. Sí, A tiene que ser verdadera en todos los EPM.

1.3. Equivalencia

Dijimos en un párrafo anterior que no era necesario, pero podía ocurrir, que A implicase a B y que B implicase a A. En estos casos se dice que A equivale a B y escribimos $A \approx B$. En el capítulo II establecimos que algunas fórmulas como '$p \wedge q$' y '$q \wedge p$', '$p \vee q$' y '$q \vee p$' o '$\sim\sim p$' y 'p' tenían el mismo significado y utilizamos el término 'equivale' de un modo no técnico; ahora podemos darle su real significado.

Una reflexión rápida sobre la doble implicación con que hemos definido la equivalencia muestra que A equivale a B si y sólo si A y B tienen siempre los mismos valores de verdad. Y ése fue el camino que seguimos al probar, de modo general, que $A \vee B$ equivalía a $B \vee A$. Si, por ejemplo, deseamos saber si '$p \rightarrow q$' equivale a '$\sim q \rightarrow \sim p$', necesitamos comprobar que son tautologías:

'$p \rightarrow q \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \rightarrow \sim p$' y '$\sim q \rightarrow \sim p \;.\!\rightarrow\!.\; p \rightarrow q$'.

Recordando que el bicondicional se puede expresar a través de dos condicionales, bastará probar que:

$\models p \rightarrow q \;.\!\leftrightarrow\!.\; \sim q \rightarrow \sim p$

En general: A equivale a B ($A \approx B$) si y sólo si $\models A \leftrightarrow B$.

Algunas **leyes de la equivalencia** son:

1. La equivalencia es una relación reflexiva: $A \approx A$.
2. La equivalencia es una relación transitiva: si $A \approx B$ y $B \approx C$ entonces $A \approx C$.
3. La equivalencia es una relación simétrica: si $A \approx B$, entonces $B \approx A$.
4. Todas las fórmulas siempre verdaderas se equivalen entre sí. Lo mismo para las siempre falsas.

La ley 1 es consecuencia de la reflexividad de la implicación. La ley 2 se obtiene de la misma propiedad en la implicación, pues si A equivale a B y B a C, tenemos: $A \models B$ y $B \models A$, y $B \models C$ y $C \models B$ con lo que se obtiene $A \models C$ y $C \models A$. La ley 3 se cumple pues $A \models B$ y $B \models A$ es lo mismo que $B \models A$ y $A \models B$. La ley 4 se aprecia mejor no de la definición en términos de la implicación sino en términos del bicondicional: $A \approx B$ si y sólo si $\models A \leftrightarrow B$. Esta última propiedad es la que nos garantiza que al dividir las fórmulas en tautológicas, contradictorias y contingentes realmente las estábamos clasificando.

Hay un resultado interesante de la ley 4 respecto de los llamados principios lógicos clásicos, cuando se los formula como leyes de la lógica proposicional: el **tercio excluso** $A \vee \sim A$, el de **no contradicción** $\sim(A \wedge \sim A)$ y el de **identidad** $A \rightarrow A$. Durante mucho tiempo se los tuvo como columnas del pensamiento lógico. Y si bien es cierto que pueden expresar cosas distintas, pues siendo diferentes sintácticamente se les puede dar diferentes interpretaciones, en nuestro horizonte semántico de {V, F} son equivalentes, dicen lo mismo. Es decir, dado uno, los otros no aportan nada nuevo. Y es así, pues nuestro lenguaje artificial con una sintaxis y una semántica construidas se ha hecho con tal fin, como ya lo hemos mencionado en el capítulo II. Antes (un antes teórico) de construir LP se asumió que una proposición tendría uno y sólo uno de los dos valores V o F, lo que recoge los principios del tercio excluso y de no contradicción. El principio de identidad es más universal y lo recoge muy pobremente la lógica proposicional. Sólo mencionaremos que existen otras lógicas construidas con patrones diferentes.

En el fondo, estas cuatro leyes de la equivalencia no difieren de manera sustantiva de las de la implicación y, salvo tal vez la 3, hubiésemos podido no mencionarlas sin menoscabo mayor para el lector. Presentamos, ahora, otras que también llamaremos por comodidad 'leyes de la equivalencia'; pero que propiamente deberían llamarse algo así como 'leyes de equivalencias de conjunciones y disyunciones con fórmulas no contingentes'. Éstas sí son novedosas y muy útiles para acortar expresiones largas o para su rápida evaluación:

5. $T \wedge A \approx A$. En particular en LP: $\models T \wedge A \mathrel{.\leftrightarrow.} A$.
6. $\perp \vee A \approx A$. En particular en LP: $\models \perp \vee A \mathrel{.\leftrightarrow.} A$.
7. $T \vee A \approx T$. En particular en LP: $\models T \vee A \mathrel{.\leftrightarrow.} T$.
8. $\perp \wedge A \approx \perp$. En particular en LP: $\models \perp \wedge A \mathrel{.\leftrightarrow.} \perp$.

Todas se basan en que en la conjunción predomina la falsedad y en la disyunción, la verdad.

Por último, no podemos dejar de mencionar una ley muy importante **la ley de sustitución por equivalentes**:

9. Si A equivale a B y A aparece en la fórmula C (una o más veces), al sustituir A por B en C (una o más veces) se obtiene una fórmula D equivalente a C.

Para entenderla es cómodo presentar un ejemplo:

'$\sim p \lor q$' equivale a '$p \rightarrow q$' (son nuestras A y B). Tomemos como ejemplo de C a '$(\sim p \lor q \ .\land.\ p \rightarrow r) \leftrightarrow (\sim p \lor q \ .\rightarrow.\ t)$'. En C aparece A ('$\sim p \lor q$') dos veces, podemos reemplazarla por su equivalente B ('$p \rightarrow q$') y la fórmula que obtengamos será equivalente a C. O sea que:

$(\sim p \lor q \ .\land.\ p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \ .\rightarrow.\ t)$
$(p \rightarrow q \ .\land.\ p \rightarrow r) \leftrightarrow (\sim p \lor q \ .\rightarrow.\ t)$ y
$(p \rightarrow q \ .\land.\ p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \ .\rightarrow.\ t)$

son todas equivalentes a C y, por lo tanto, entre sí.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes equivalencias notables.

a. Distributividad (de conjunción en disyunción y de disyunción en conjunción):

$A \land (B \lor C) \approx (A \land B) \lor (A \land C)$
$A \lor (B \land C) \approx (A \lor B) \land (A \lor C)$

b. De Morgan:

$\sim(A \land B) \approx \sim A \lor \sim B$
$\sim(A \lor B) \approx \sim A \land \sim B$

c. Definiciones (condicional en disyunción y bicondicional):

$A \rightarrow B \approx \sim A \lor B$
$A \leftrightarrow B \approx (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

2. Demuestre: $\sim q \rightarrow p \approx \sim p \rightarrow q$ usando las leyes de la equivalencia y las equivalencias notables.

3. Reconstruya la tabla de verdad de $p \lor (q \land \sim p)$ usando las equivalencias notables y las leyes de la equivalencia.

Solución:

2. Puesto que $\sim q \rightarrow p \approx \sim\sim q \vee p$ de acuerdo con la definición y $\sim\sim q \approx q$, utilizando la ley de sustitución por equivalentes se tiene $\sim\sim q \vee p \approx q \vee p$; luego, por la transitividad de la equivalencia $\sim q \rightarrow p \approx q \vee p$. Por otro lado, $q \vee p \approx p \vee q$ y por sustitución de equivalentes: $p \vee q \approx \sim\sim p \vee q$, así como por definición: $\sim\sim p \vee q \approx \sim p \rightarrow q$. Finalmente, $\sim q \rightarrow p \approx \sim p \rightarrow q$. Podemos, y así se acostumbra, resumir todo lo anterior de la siguiente forma:

1	$\sim q \rightarrow p$	Hipótesis de partida
2	$\sim\sim q \vee p$	Definición en 1
3	$q \vee p$	Doble negación y sustitución en 2
4	$p \vee q$	Conmutatividad en 3
5	$\sim\sim p \vee q$	Doble negación y sustitución en 4
6	$\sim p \rightarrow q$	Definición en 5

3. Procediendo como en el ejercicio anterior:

1	$p \vee (q \wedge \sim p)$	Hipótesis
2	$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim p)$	Distribución
3	$(p \vee q) \wedge T$	¿ ?
4	$p \vee q$	¿ ?
5	$\sim\sim p \vee \sim\sim q$	Doble negación
6	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$	De Morgan

En 6 se aprecia que la tabla es VVVF. El lector debe resolver las interrogaciones.

2. LAS INFERENCIAS

2.1. Generalidades

Abordaremos ahora, aunque sea parcialmente, el tema de los razonamientos deductivos. Es costumbre en nuestro enfoque formal llamarlos 'inferencias'. No nos interesa los distintos tipos de inferencias por la materia de que se ocupan, pues al formalizarlos la materia desaparece, sino en tanto son formalmente correctos o no. Por lo tanto, necesitamos aclarar qué entendemos por inferencia correcta o "bien hecha", en nuestra jerga **inferencia válida:**

Es un conjunto de proposiciones tales que una de ellas llamada 'conclusión' debe ser consecuencia semántica de las otras llamadas 'premisas'. O, lo que es lo mismo, que la conclusión debe estar implicada por la conjunción de las premisas.

Cuando esto no ocurre hablamos de inferencia inválida. Es también corriente utilizar como sinónimos: razonamiento correcto o incorrecto.

La "gran" (por tratar de encontrar una) diferencia entre el concepto de consecuencia semántica y el de inferencia está en que una inferencia requiere de una premisa por lo menos.

Así podemos decir, dado $P_1, P_2, \ldots, P_n \models C$, que:

$n = 0, 1, 2, \ldots$	si se trata de una consecuencia semántica,
$n = 1, 2, 3, \ldots$	si se trata de una inferencia y
$n = 1$	si se trata de una implicación.

Otra cosa es discutir si nuestra noción de consecuencia semántica agota o recoge todas las acepciones que en la vida diaria o en las diferentes ciencias damos a 'razonamiento deductivo'. Nos referimos a si formalmente no podría mejorarse nuestro aparato conceptual para incluir otros valores de verdad, o valores de verdad "difusos", o modalidades, o normas, o aspectos temporales. En realidad, todos estos temas están en plena exploración hoy en día por lógicos muy notables[6], pero siempre sigue siendo una especie de base mínima o punto de referencia común, el enfoque que aquí presentamos (aunque no sea más que para criticarlo). Además, cabe mencionar las aproximaciones psicológicas al tema, sobre todo por el auge de la psicología cognitiva; pero esto sí no es lógica. Así como la discusión en torno a los aspectos formales de la inferencia jurídica[7].

2.2. Verdad vs. validez

Debe notarse que si afirmamos que una determinada inferencia es válida, no por eso su conclusión debe ser verdadera. Por lo ya visto acerca de la consecuencia semántica sabemos, por ejemplo, que si una de las

---

[6] Véanse los apéndices de Deaño [36] y Alchourrón [4].

[7] Véase Schreiber [105].

premisas es contradictoria, la inferencia es válida y la conclusión puede ser falsa.

En segundo lugar, debe quedar claro que verdad (falsedad) se aplican sólo a proposiciones y una inferencia no es una proposición sino una relación entre proposiciones.

Tercero, puede ocurrir que la inferencia sea inválida, y que tanto las premisas como la conclusión sean verdaderas en un EPM. Un ejemplo es: 'Las manzanas son comestibles ya que el Sol sale por el este'. Todas las proposiciones de este sencillo razonamiento son verdaderas, pero si lo analizamos lógicamente es obvio que no se tiene $q \models p$ y que, por tanto, la inferencia es inválida.

Por otro lado hay sí una curiosa relación entre verdad y validez: si una inferencia es válida y sus premisas son verdaderas, entonces la conclusión es verdadera. En este caso, inferencia válida y premisas verdaderas, no se requiere verificar la verdad de la conclusión, pues lo es por necesidad.

2.3. Análisis de la validez de una inferencia

Para analizar una inferencia formulada en un lenguaje natural es necesario primero distinguir la conclusión de las premisas. Esto, que es totalmente obvio, no siempre es fácil, y requiere cierta destreza. En segundo lugar, deben traducirse a notación simbólica tanto las premisas como la conclusión (normalmente ésta es la parte más delicada de todo el análisis). Hecho esto, debe demostrarse que la conclusión es consecuencia semántica de las premisas, demostración que puede seguir varios caminos; veamos:

Sean P_1, P_2 y P_3 las premisas (la generalización para más o menos premisas debe hacerla el lector) y C la conclusión. Podemos probar que $P_1, P_2, P_3 \models C$ o que la fórmula $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$ implica a C; ambas pruebas son equivalentes. En la práctica, o probamos:

1. que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 .\rightarrow. C$ es una tautología (por lo menos en la lógica proposicional), o probamos:

2. que en los EPM en los que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ es verdadera C también lo es, o, por último, probamos:

3. que en los EPM en que C es falsa también lo es una de las premisas por lo menos.

En los capítulos siguientes estudiaremos técnicas más sofisticadas que permiten analizar razonamientos que la lógica proposicional no logra captar. Es decir, razonamientos cuya validez reside en "cosas" distintas de los conectores veritativo-funcionales que hasta aquí hemos visto. Por lo que es importante resaltar que si con las herramientas actuales no probamos la validez de un razonamiento, lo único que establecemos es que no es veritativo-funcionalmente válido. Con herramientas más finas podríamos darnos cuenta de su validez. En otras palabras, la prueba de validez proposicional es una prueba de validez, su ausencia no es una prueba de invalidez, salvo para la lógica proposicional. Un ejemplo sencillo lo tenemos con 'si todos los hombres son mortales y Sócrates es hombre, debe seguirse que Sócrates es mortal'. En LP se simboliza como p, q r, que no refleja la validez del razonamiento.

Ejercicios

1. Analice la validez de las siguientes inferencias.

a. Los helados son caros si y sólo si no se venden en las fiestas o no se venden en las playas. Si hace mucho frío, entonces los helados son caros. Sin embargo, si los helados no son dulces, entonces no se venden en las fiestas. Pero, no es el caso de que no haga mucho frío y los helados sean dulces. Por lo tanto, los helados no se venden en las fiestas, a menos que no se vendan en las playas.

b. Si Josefina mueve el caballo blanco, deja sin defensa a su torre; pero si no mueve el caballo blanco, entonces no podrá adelantar su alfil. Josefina podrá adelantar su alfil si Milagros mueve su reina. Por consiguiente, si Josefina no deja sin defensa a su torre, Milagros no ha movido su reina.

c. Al paciente debe administrársele penicilina. Si es alérgico a la penicilina, entonces al paciente no se le debe administrar penicilina. Pero el paciente es alérgico a la penicilina. Luego, al paciente debe administrársele ampicilina.

d. Rolando viajará al norte, si y sólo si es un delegado estudiantil y no tiene exámenes en la universidad. Si Rolando no viaja al norte, entonces si no es un delegado estudiantil, no representará a los estudiantes en el congreso. Rolando tiene exámenes en la universidad, además no representará a los estudiantes en el congreso. En consecuencia, representará a los estudiantes en el congreso si y sólo si es un delegado estudiantil.

e. Si la "U" gana este partido, entonces gana la serie y la copa; sin embargo, si la "U" empata este partido, Alianza gana la serie si le gana al Boys. Alianza le ganó al Boys a la vez que la "U" ganó el partido. De manera que no es el caso de que la "U" perdiera el partido y no ganara la copa.

f. Si la palabra horizontal tiene siete letras, entonces si la primera letra no es 'R', la respuesta es 'NATALIA'. Si la respuesta es 'NATALIA', Miguel ha terminado el geniograma. Si la palabra vertical es 'ELIANA', entonces la primera letra no es 'R'. Además, la palabra horizontal tiene siete letras. Por consiguiente, si la palabra vertical es 'ELIANA', Miguel ha terminado el geniograma.

g. Existe violencia, si se priva a las personas del derecho a desarrollar sus capacidades personales y existe en la sociedad un estado que pretende suplantar al individuo. No obstante, en nuestra sociedad existe un estado que pretende suplantar al individuo. Por lo tanto, es imposible que si se priva a alguien del derecho a desarrollar sus capacidades personales, entonces no exista violencia.

2. Demuestre que el siguiente conjunto de premisas implica a cualquier conclusión.

'Si pago el alquiler, no me quedará dinero. Puedo ir al baile sólo si me queda dinero. Si no voy al baile, me sentiré solo. Pero si no pago el alquiler, no me dejarán salir de casa, y si no me dejan salir, no puedo ir al baile. No obstante, no es cierto que si no pago el alquiler, me sentiré solo. O pago el alquiler o no lo pago. Luego,...'

3. Demuestre la validez de cada una de las siguientes inferencias:

a. $P_1)\ p \rightarrow \sim(\sim q \vee s)$
$P_2)\ (\sim s \vee r) \rightarrow \sim t$
$P_3)\ z \wedge p$
$P_4)\ \sim(t \leftrightarrow w) \quad /\therefore\ \sim(\sim w \vee \sim q)$

b. $P_1)\ p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$P_2)\ \sim q \rightarrow (\sim r \leftrightarrow s)$
$P_3)\ (r \vee s) \rightarrow t$
$P_4)\ \sim(\sim t \leftrightarrow \sim u)\ /\therefore\ p \rightarrow t$

c. $P_1)\ \sim p \rightarrow (s \rightarrow t)$
$P_2)\ (w \rightarrow z) \rightarrow (r \rightarrow q)$
$P_3)\ \sim(p \vee q)$
$P_4)\ w \leftrightarrow z\ /\therefore\ s \leftrightarrow (\sim r \wedge s)$

4. Determine por DS cuál es la proposición simple que se debe considerar como tercera premisa para que la siguiente inferencia sea válida. ¿Es única la respuesta?

$P_1)\ p \rightarrow (q \wedge r)$
$P_2)\ (\sim s \vee t) \rightarrow p$
$P_3)\ \ldots\ldots /\therefore\ r$

5. ¿Qué ocurriría si definiésemos la relación de consecuencia semántica con un conector & diferente de →? Es decir, si definiésemos:

$P_1, P_2, \ldots, P_n \models C$ si y sólo si $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.&. C.

Solución:

1. a. Sean:
p: Los helados son caros.
q: Los helados se venden en las fiestas.
r: Los helados se venden en las playas.
s: Hace mucho frío.
t: Los helados son dulces.

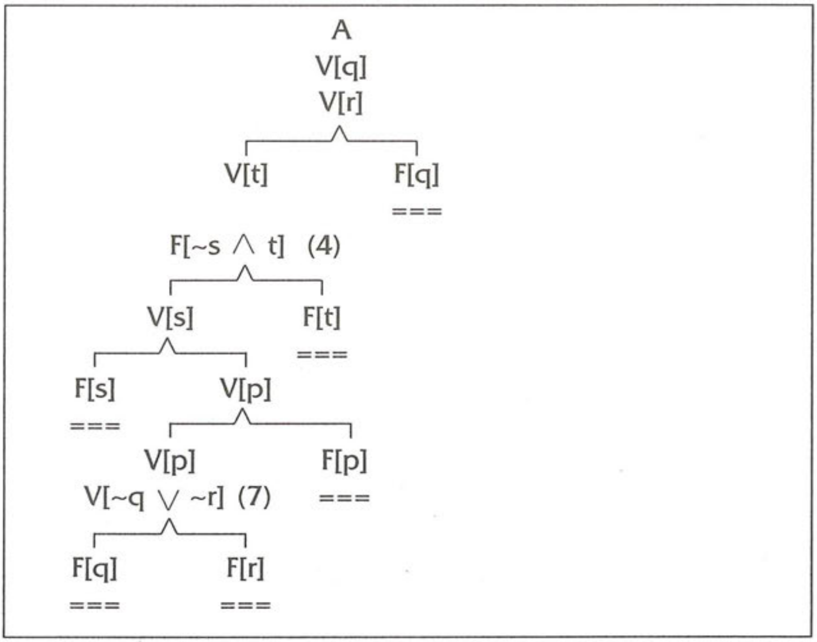
Entonces la simbolización, separadas las premisas de la conclusión, es:

$P_1)\ p \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$
$P_2)\ s \rightarrow p$
$P_3)\ \sim t \rightarrow \sim q$
$P_4)\ \sim(\sim s \wedge t)\ /\therefore\ \sim q \vee \sim r$

Es común separar la conclusión de la última premisa con '/∴' o con '//∴'.

Veremos si es tautológico el condicional:

$$F[(p .\leftrightarrow. {\sim}q \vee {\sim}r) \wedge (s \rightarrow p) \wedge ({\sim}t \rightarrow {\sim}q) \wedge {\sim}({\sim}s \wedge t) .\rightarrow. {\sim}q \vee {\sim}r]$$
$$V[p .\leftrightarrow. {\sim}q \vee {\sim}r] \; (6)$$
$$V[s \rightarrow p] \; (5)$$
$$V[{\sim}t \rightarrow {\sim}q] \; (2)$$
$$V[{\sim}({\sim}s \wedge t)] \; (3)$$
$$F[{\sim}q \vee {\sim}r] \; (1)$$
$$A$$



La inferencia es válida.

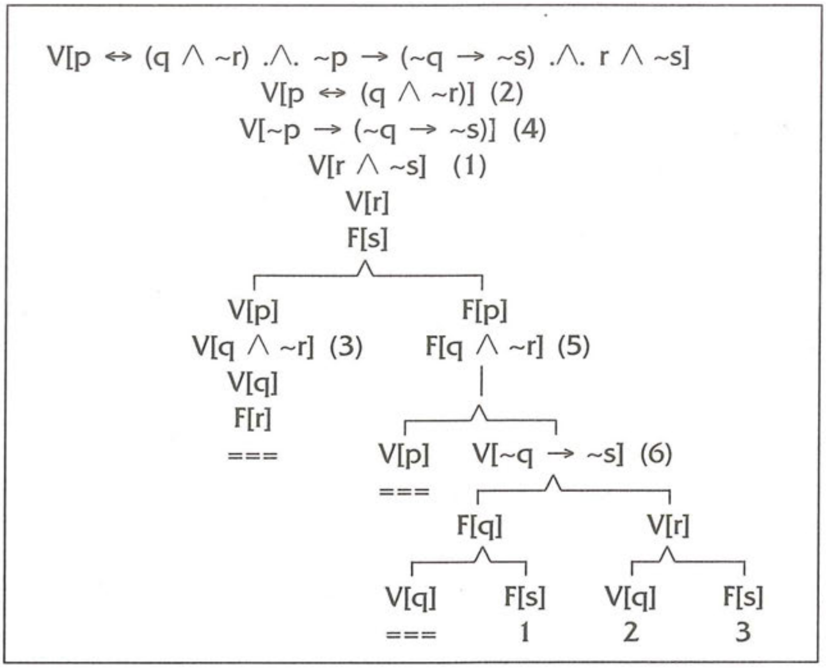
b. Inferencia válida. $(p \rightarrow q) \wedge ({\sim}p \rightarrow {\sim}r), s \rightarrow r \models {\sim}q \rightarrow {\sim}s$.

c. Inferencia válida. $p, q \rightarrow {\sim}p, q \models r$.

d. Se simboliza por:

P_1) $p \leftrightarrow (q \wedge {\sim}r)$
P_2) ${\sim}p \rightarrow ({\sim}q \rightarrow {\sim}s)$
P_3) $r \wedge {\sim}s$ $\quad /\therefore\ s \leftrightarrow q$

Buscaremos los EPM en que las premisas son verdaderas para ver qué ocurre en ellos con la conclusión.



Análisis de ramas	EPM
1. F[p], F[q], V[r], F[s]	14
2. F[p], V[q], V[r], F[s]	10
3. F[p], ----, V[r], F[s]	10,14
	10,14

La inferencia es inválida, pues la conclusión es falsa en el EPM 10.

e. Válida. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [s \rightarrow (u \rightarrow t)],\ s \wedge p \models \sim(\sim p \wedge \sim r)$.

f. Válida. $p \rightarrow (\sim q \rightarrow r),\ r \rightarrow s,\ t \rightarrow \sim q,\ p \models t \rightarrow s$.

g. Inválida. $q \wedge r \,.\!\rightarrow\!.\, p,\ r \models \sim(q \rightarrow \sim p)$.

2. Demuestre que las premisas son contradictorias.

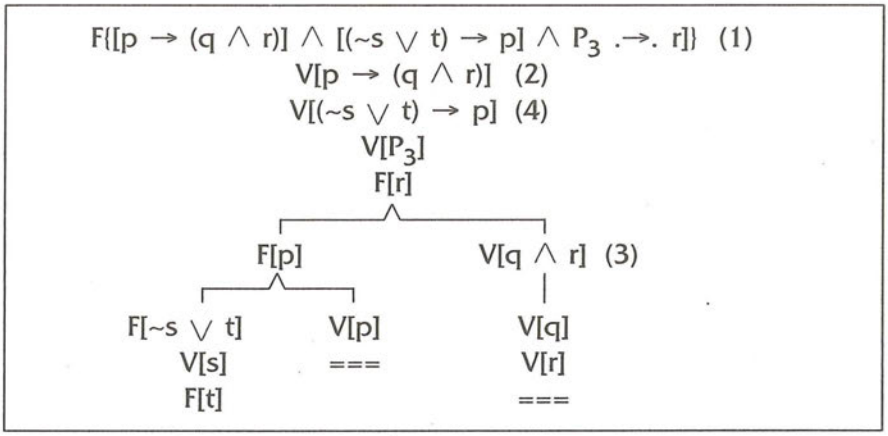
3. Se prueba por DS.

4. Supongamos la inferencia válida, entonces:

$p \rightarrow (q \wedge r), (\sim s \vee t) \rightarrow p, P_3 \models r$

Es decir, $\models [p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(\sim s \vee t) \rightarrow p] \wedge P_3 .\rightarrow. r$

Si hacemos un DS partiendo de F, este debe cerrarse.



En la rama abierta el valor de verdad de P_3 es diferente del de p, r y t. Luego, podemos tomar P_3 como cualquiera de ellos. En cambio, 's' no es una respuesta (¿por qué?).

5. Por ejemplo, ¿tomaría por & a la disyunción? ¿Al bicondicional? ¿A otro? Piense en los pros y los contras para cada uno.

3. EJERCICIOS DE REPASO

1. Dadas las siguientes expresiones:

1.1. Si en el curso de Lógica hay 415 alumnos, entonces por lo menos 50 estudiantes celebran el mismo día su cumpleaños.
1.2. Si eres vida, ¿por qué me das la muerte? Si eres muerte, ¿por qué me das la vida?
1.3. Marcos corre tras el éxito, es un hombre práctico, y reside en un piso céntrico regando flores de plástico y pendiente del teléfono.
1.4. La feria del Señor de los Milagros en homenaje al sesquicentenario de las batallas de Junín y Ayacucho.
1.5. El Principito no podía comprender a las personas adultas.
1.6. Julio Iglesias y José Luis Rodríguez se odian a muerte.

¿Cuántas son proposiciones simples?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. ¿Cuántas de las siguientes expresiones deben llevar comillas para distinguir los niveles del lenguaje?

2.1. Uno de mi calle me ha dicho que tiene un amigo que dice conocer a un tipo que un día fue feliz.
2.2. Cómo quieres que te quiera si quien quiero que me quiera no me quiere como quiero que me quiera.
2.3. Y ahora tratar de conquistar, con vano afán, este tiempo perdido, que nos deja vencidos sin poder conocer eso que llaman amor para vivir.
2.4. Pongo el pie en mi país: vuelo en alma y vuelvo en hueso a encontrar la patria herida al fin del último verso, vuelvo sin humillarme sin pedir perdón ni olvido.
2.5. ¡Gracias a la vida que me ha dado tanto! Me ha dado el sonido y el abecedario; con él, las palabras que pienso y declaro: madre, amigo, hermano y luz, alumbrando la ruta del alma del que estoy amando.
2.6. Le sonrió con los ojos llenitos de ayer: no era así su cara y su piel. Le dijo tú no eres quien yo espero. Y se quedó con su bolso de piel marrón y sus zapatitos de tacón sentada en la estación.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. No es un esquema de fórmula:

I) $\sim A$
II) $A \rightarrow B \;.\!\rightarrow\!.\; C \rightarrow \sim A$
III) $\sim[A \wedge \sim(A \wedge \sim A)]$
IV) $(A \rightarrow B) \wedge (B \vee B)$
V) $p \vee \sim p$

A) I B) V C) III D) IV E) III

4. ¿En cuántas líneas de la tabla de verdad es falsa la siguiente fórmula?

$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Ninguna de las anteriores

5. Si unimos las proposiciones: 'Los canguros son marsupiales' y 'Los osos son plantígrados' con cada una de las siguientes estructuras, ¿cuántas de ellas se simbolizarán con una conjunción lógica?

5.1. ____________ a la vez que __________
5.2. ____________ puesto que __________
5.3. ____________ sin embargo __________
5.4. ____________ cada vez que __________
5.5. Ni ____________ ni ______________
5.6. ____________ no obstante __________

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

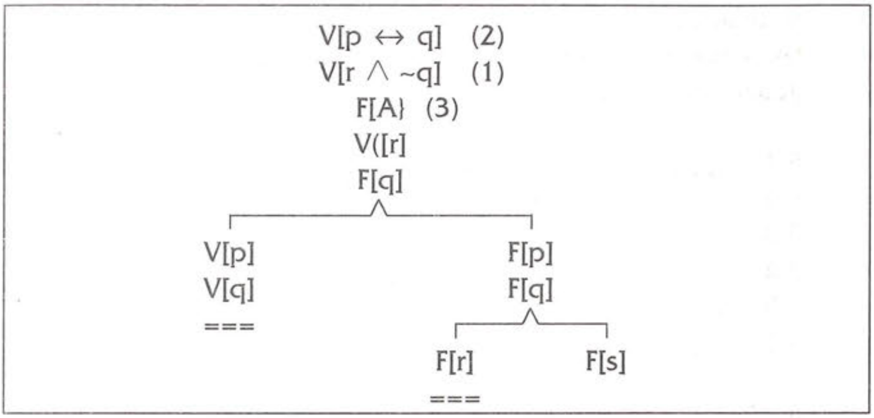
6. La fórmula '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \rightarrow \sim p)$' corresponde a la simbolización de:

A) r de ahí que no p, dado que no q si p.
B) No q puesto que p, por tanto si r, no p.
C) No p es condición necesaria de r, ya que p es condición suficiente de no q.
D) Si p, no q; luego de r se sigue no p.
E) Todas las estructuras anteriores

7. La simbolización de: 'El papel de tornasol no se vuelve rojo si no es el caso de que la solución sea un ácido o no sea un álcali; si y sólo si, la solución es un álcali, de ahí que el papel de tornasol no se vuelva rojo o la solución sea un ácido.' (p: El papel de tornasol se vuelve rojo; q: La solución es un ácido; r: La solución es un álcali) es:

A) $(\sim q \vee r) \rightarrow p \;.\!\leftrightarrow\!.\; (p \vee q) \rightarrow r$
B) $(\sim q \vee \sim r) \rightarrow p \;.\!\leftrightarrow\!.\; (\sim p \vee q) \rightarrow r$
C) $\sim(q \vee r) \rightarrow \sim p \;.\!\leftrightarrow\!.\; r \rightarrow (\sim p \vee q)$
D) $\sim(q \vee \sim r) \rightarrow \sim p \;.\!\leftrightarrow\!.\; r \rightarrow (\sim p \vee q)$
E) Ninguna de las anteriores

8. En una hoja de papel se presenta el siguiente diagrama semántico. Si la página ha sido dañada por el agua y la fórmula A es ilegible, la fórmula A puede ser:



I) $\sim(r \sim s)$
II) $\sim r \leftrightarrow s$
III) $r \wedge s$
IV) $\sim r \rightarrow s$
V) $\sim r \vee \sim s$

A) Sólo III
B) Sólo IV
C) Sólo V
D) Sólo III y IV

E) Ninguna de las anteriores

9. Dado el siguiente conjunto de premisas:

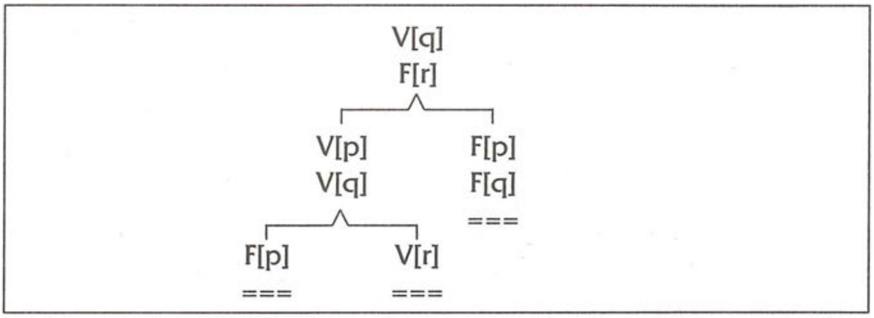
P_1) $\sim s \vee \sim(q \vee t)$
P_2) $\sim(p \wedge r \,.\!\rightarrow\!.\, \sim s)$
P_3) $\sim t \leftrightarrow k$

se infiere:

I) $p \rightarrow (k \leftrightarrow \sim q)$
II) $p \vee (\sim q \wedge \sim s)$
III) $r \rightarrow (s \leftrightarrow k)$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I, II y III
E) Ninguna de las anteriores

10. El siguiente diagrama semántico analiza la validez de una inferencia cuyas premisas son____________ y la conclusión es __________:



I) $\sim p \vee r$
II) $q \rightarrow r$
III) $p \leftrightarrow q$
IV) $\sim q \rightarrow \sim r$

A) I y II - III
B) III y IV - II
C) I y III - IV
D) I y III - II
E) Ninguna de las anteriores

11. La siguiente fórmula, después de aplicar diagramas semánticos, tiene por tabla de verdad____________ y por tanto es __________.

$\sim[(q \leftrightarrow p \;.\!\rightarrow\!.\; r \vee \sim p) \leftrightarrow \sim p \;.\!\vee\!.\; s \rightarrow \sim r]$

A) VVVV VVVV VVVV VVVV, tautológica.
B) FVVV FVVV VVVV VVVV, contingente.
C) ~(A), contradictoria.
D) ~(B), contingente.
E) Ninguna de las anteriores

12. Dadas las siguientes fórmulas, ¿cuántas son implicadas por cualquier fórmula?

12.1. $p \rightarrow q \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \rightarrow \sim p$
12.2. $\sim[p \rightarrow (\sim s \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \rightarrow \sim t)]$
12.3. $p \wedge q \;.\!\rightarrow\!.\; (t \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge \sim w)$
12.4. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim r \leftrightarrow \sim s)$
12.5. $\sim[p \leftrightarrow \sim p \;.\!\wedge\!.\; (\sim q \rightarrow \sim r) \wedge s] \wedge \sim s$

12.6. $(p \wedge q\ .{\rightarrow}.\ r) \rightarrow (p\ .{\rightarrow}.\ q \rightarrow r)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. Donald y Daisy viven en su casa de Disneylandia con sus sobrinos Hugo, Paco y Luis.

13.1. Paco y Luis juegan cartas siempre que lo hace Hugo.
13.2. Hugo o su tío juegan cartas.
13.3. No es el caso de que Luis o Daisy estén jugando cartas.
13.4. Si Paco o Hugo están jugando cartas, entonces o Luis o Daisy juegan también.

¿Quiénes están jugando cartas?

A) Donald debe estar jugando un solitario.
B) Sólo Donald y Paco están jugando cartas.
C) Sólo los sobrinos están jugando cartas.
D) Sólo Donald y Daisy juegan cartas.
E) Nadie está jugando cartas.

14. En la lógica proposicional, si se cierran todas las ramas en un diagrama semántico, entonces la fórmula analizada es:

I) Tautológica
II) Consistente
III) Contradictoria

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I y III
E) I o III

15. ¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

15.1. $T \leftrightarrow A$ equivale a A.
15.2. $A \leftrightarrow A$ equivale a $\sim A$.
15.3. $A \leftrightarrow B$ equivale a B.
15.4. $T \leftrightarrow B$ equivale a $\sim B$.
15.5. $A \leftrightarrow A$ equivale a A.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

V

LÓGICA CUANTIFICACIONAL: INTRODUCCIÓN

1. EL LENGUAJE DE LA LÓGICA CUANTIFICACIONAL MONÁDICA (LC)

1.1. Los símbolos de LC

Como hicimos para LP, vamos a presentar el lenguaje LC que nos servirá para explorar, por primera vez, la lógica cuantificacional. Tratamos de no desaprovechar lo que ya hemos adquirido acerca de la lógica proposicional, por esto, buscaremos ampliar LP, más que reemplazarlo por un lenguaje totalmente distinto. De paso, esto resaltará la preeminencia lógica de los aspectos veritativo-funcionales sobre los cuantificacionales, al tomarlos como una base indispensable. No vamos a desarrollar todos los aspectos de la lógica cuantificacional o, como también se la llama, 'Lógica de predicados', sino sólo los más elementales. Nos ocuparemos de lo que se conoce como teoría cuantificacional de primer orden monádica uniforme.

1.1.1. Símbolos primitivos

a. Símbolos proposicionales: 'p', 'q', 'r',...
b. Conectores lógicos: '~', '∧', '∨', '→', '↔'
c. Símbolos auxiliares: '(','), '[', ']', '{','}' '.'

Hasta aquí lo que teníamos en LP.

d. Variables individuales: 'x', 'y', 'z',...
e) Constantes individuales: 'a', 'b', 'c',...

f. Predicados monádicos: ‘F’, ‘G’, ‘H’,...
g. Cuantificadores: ‘(∀_)’, ‘(∃_)’

Notas:

1. Necesitamos algunos acuerdos acerca de cómo nombraremos desde nuestro metalenguaje las nuevas categorías de símbolos. Utilizaremos la letra griega ‘α’ (alfa) para referirnos indistintamente a variables individuales y constantes individuales, ‘ß’ (beta) para referirnos exclusivamente a variables individuales, ‘γ’ (gama) para constantes individuales y ‘ψ’ (psi), ‘θ’ (theta) y ‘Λ’ (lambda) para predicados (más generalmente FBF con una variable libre). ‘A’, ‘B’, ‘C’, etc. seguirán designando cualquier FBF.

2. Los cuantificadores son dos, el universal y el particular o existencial. El espacio en blanco que se ha dejado en cada uno debe ser ocupado por una variable individual: (∀ß), (∃ß). Es decir que en LC aparecerán como: ‘(∀x)’, ‘(∀y)’, ‘(∃x)’, ‘(∃z)’, etc. Los paréntesis que aparecen en los cuantificadores no deben tomarse como símbolos auxiliares sino como parte del símbolo que forma el cuantificador. Los leeremos como ‘para todo ß’ y ‘existe por lo menos un ß tal que’; de este modo ‘(∀x)(Fx)’ se lee como ‘para todo x efe x’ y ‘(∃x)(Fx)’ como ‘existe por lo menos un x tal que efe x’.

3. Se acostumbra llamar a las variables individuales ‘variables’ y a las constantes individuales ‘constantes’ o ‘individuos’.

1.1.2. Reglas de formación

a. Todo símbolo proposicional es una FBF.
b. Todo predicado seguido de una variable o de una constante es una FBF. Es decir, toda expresión del tipo $\psi\alpha$ es una FBF.
c. Si A es una FBF entonces ~A también lo es.
d. Si A y B son FBF, entonces:

    1. $(A \wedge B)$ también lo es.
    2. $(A \vee B)$ también lo es.
    3. $(A \rightarrow B)$ también lo es.
    4. $(A \leftrightarrow B)$ también lo es.

e. Si A es una FBF:

   1. (∀ß)(A) también lo es.
   2. (∃ß)(A) también lo es.

f. Una fórmula es una FBF si y sólo si es el resultado de la aplicación de las reglas anteriores un número finito de veces.

Vale la pena comentar algunos detalles:

1. Si tomamos los símbolos de las categorías a), b) y c) más las reglas de formación (a), (c), (d) y (f) tenemos LP.

2. Lo típico de LC reside en los símbolos (d), (e), (f) y (g) así como las RF (b) y (e), son los que debemos asimilar a nuestro vocabulario y aprender a usarlos.

3. 'x', 'a', 'z' o 'c' no son FBF, ni ninguna serie o combinación de variables y constantes como 'xa', 'abc', etc.

4. La RFb nos dice qué secuencias como 'Fa', 'Fx', 'Gz', 'Hy', 'Fz', 'Hc' son FBF, en cambio, 'Hxy', 'FH', 'F(x)', 'F', 'aGc', 'Fp' no lo son en LC.

5. En LC son FBF las siguientes: '~Fc', 'Hx ∧ ~Gx', 'Hz → (Gz ∧ Gx)', '~(Hx ↔ Gx)', '~p ∧ Hx', '~(Gx → q)' y todas las que resulten de combinar las RF (a), (b), (c) y (d).

6. De acuerdo con la RFe los cuantificadores se colocan delante de las FBFs, así: '(∀x)(Hx)', '(∃y)(Hy → ~Gy)' o '(∀x)(Fx ∧ ~Gx)' son FBF y, en general, los utilizamos delante de expresiones donde aparecen las variables que cuantifican.

7. También son FBF todas las que hemos citado en 5 antecedidas de un cuantificador: '(∀x)(~Fc)', '(∀y)(Hx ∧ ~Gx)', '(∀x)(Hz .→. Gz ∧ Gx)', '(∀z)[~(Hx ↔ Gx)]', '(∀x)(~p ∧ Hx)', '(∀x)[~(Gx → q)]'. También serán FBF sus uniones veritativo-funcionales, como:
'(∀x)(Hx) → (∀x)(Fx ∧ ~Gx)'.

8. Hay que notar que expresiones con más de un cuantificador, donde uno de los cuantificadores está bajo la jerarquía o alcance de otro, también son FBF, aunque nosotros no abordaremos su tratamiento (escapan a la llamada 'cuantificación uniforme'). Son ejemplos:

'$(\forall x)[Hx \land \sim Gx .\rightarrow. (\exists y)(Hy)]$',
'$(\forall x)(\exists y)(Hx \leftrightarrow Gy)$',
'$(\forall x)(\forall y)(Hx \leftrightarrow Gz)$',
'$(\exists x)(\exists y)(p \lor q)$'

y todas las que se le ocurran a la fértil imaginación de los lectores, siempre y cuando respeten las RF.

9. Decimos que el campo lógico del que nos ocuparemos es monádico, pues no contemplamos la posibilidad de que una letra predicativa sea seguida por más de una constante o una variable.

1.2. Esquemas de fórmulas

Al enriquecer nuestro lenguaje, el alcance de nuestras metavariables se ha ampliado inmensamente. 'A' puede ahora designar una fórmula con los nuevos símbolos, como '$(\forall x)(Fx \lor Hx .\rightarrow. Gx)$', tanto como '$p \lor q .\rightarrow. r$' o una combinación de ambos que sea FBF. Puede parecernos que nuestra libertad expresiva se ha ampliado cuando en realidad hay que tener cuidado, pues lo ampliado es nuestra potencia expresiva y ha disminuido nuestra libertad. Si consideramos $(\forall\alpha)(A)$, $(\forall\beta)(A)$ o $(\forall\gamma)(A)$, parecen esquemas de fórmulas distintos, pues el primero tiene entre sus instancias a '$(\forall x)(Hx)$' y '$(\forall a)(Ha)$', el segundo a '$(\forall x)(Hx)$' y el tercero a '$(\forall a)(Ha)$'. Pero como '$(\forall a)(Ha)$' no está bien formado pues sólo se cuantifica con variables, en realidad '$(\forall\gamma)(A)$' no es un esquema de fórmula y la expresión '$(\forall\alpha)(A)$' debe manejarse con pinzas ya que puede dar lugar tanto a FBF como a fórmulas mal formadas.

Dicho lo anterior, $A \lor B .\rightarrow. C$ puede instanciarse como '$p \lor q .\rightarrow. Fx$', '$(\forall x)(Fx) \lor (\forall x)(Gx) .\rightarrow. p$', '$p \lor \sim p .\rightarrow. (\exists x)(Hx)$', pero no como '$(\forall x)(Fx \lor Gx) .\rightarrow. (\exists x)(Gx)$' ni como '$(\exists x)(p \lor Fx .\rightarrow. Gx)$', para no perder jerarquías.

1.3. Alcance de los cuantificadores

El tema del alcance de los cuantificadores es, por decirlo de algún modo, el de su jerarquía. Nos enfrenta con la pregunta: ¿en qué difieren '$(\exists x)(Fx) \lor Gx .\land. Hx$' y '$(\exists x)(Fx \lor Gx) .\land. Hx$'? En la primera tenemos un esquema del tipo $A \lor B .\land. C$, en la segunda del tipo $(\exists\beta)(A) \land B$. Es decir, en la primera el alcance del cuantificador existencial no llega hasta 'Gx'; en la segunda, sí.

¿Cómo determinar el alcance de un cuantificador? La respuesta es simplísima: como el de una negación. Podemos imaginar que el cuantificador, universal o existencial, es reemplazado por una negación y su alcance será el de la negación. En otros términos, **un cuantificador alcanza o cuantifica la primera FBF que le sigue.** Así, '$(\exists x)(Fx)$' alcanza a '(Fx)', en cambio, en '$(\exists x)(Fx \vee Gx)$' no ocurre eso, pues '(Fx' no es una FBF (falta cerrar paréntesis). En '$(\exists x)(Fx \vee Gx)$' la primera fórmula que sigue es '$(Fx \vee Gx)$', por lo que toda ella cae bajo el alcance del existencial.

La definición anterior nos permite un nuevo ahorro de paréntesis, pues '$(\exists x)(Fx)$' y '$(\forall x)(Fx) \vee Gx$' pueden escribirse como '$(\exists x)Fx$' y '$(\forall x)Fx \vee Gx$' sin peligro de confusión, tal como hicimos con la negación. En cambio, en '$(\forall x)(Fx \vee Gx)$' si quitamos los segundos paréntesis cambiamos la estructura: de una estructura universal pasaría a una disyuntiva.

Es necesario, en conexión con lo anterior, aclarar lo que se entiende por **variables ligadas y libres.** Se dice que una variable que aparece en un cuantificador está ligada en todas sus apariciones en la fórmula que cae bajo su alcance. La aparición de la variable en el cuantificador también se considera ligada. En caso contrario se dice que la variable está libre. Así, en:

$$(\forall x)(Fx \vee Gx \wedge Hy)$$

las tres primeras 'x' están ligadas e 'y' está libre; en:

$$(\forall x)Fx \vee Gx \wedge Hy$$

las dos primeras apariciones de 'x' están ligadas, la tercera libre e 'y' está libre (en una fórmula una variable puede estar ligada y libre). En:

$$(\forall x)(Fx \vee Gx) \wedge (\exists x)(Gx \wedge Hy)$$

todas las 'x' están ligadas, con la diferencia que la última lo está por un cuantificador, el existencial, distinto del universal que liga las primeras.

Una fórmula con, por lo menos, una variable libre se llama **fórmula abierta**. Si todas sus variables están ligadas, **fórmula cerrada**[8].

---

[8] En lo sucesivo, los esquemas de fórmulas que enuncian reglas y definiciones deberán interpretarse como esquemas de fórmulas cerradas.

Ejercicios

1. Por medio de un diagrama de árbol determine cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas del lenguaje LC.

a. $(\exists x)(\forall y)(Rx \rightarrow Sxy)$
b. $\sim(\forall x)(Rx \rightarrow Sy) \vee (\forall x)(Hx \rightarrow My)$
c. $(\forall x)Rx \rightarrow [\sim Sx \wedge \sim(\exists x)\sim(\forall y)Ha]$
d. $(\exists x)(Ha \vee Fa) \wedge \sim p\ .\vee.\ (\exists x)(\forall y)(Px \rightarrow Hy)$

2. Elabore fórmulas que corresponden al siguiente esquema.

$[A \leftrightarrow (B \wedge \sim B)] \rightarrow \sim A$

3. Encuentre un esquema común a las siguientes fórmulas:

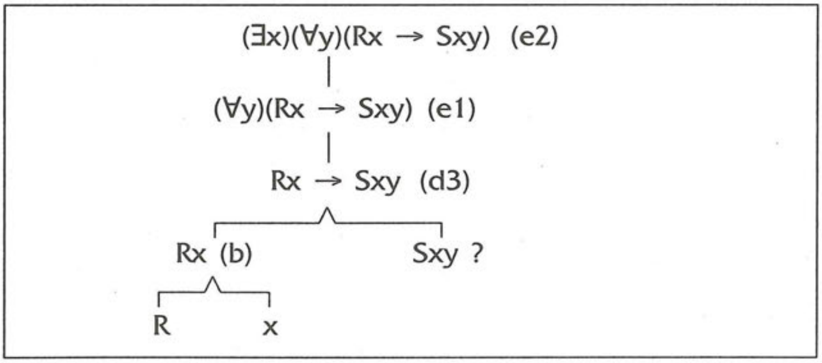
a. $(\forall y)[(Sx \rightarrow Rx) \rightarrow \sim(\exists x)\sim Sx] \rightarrow (\exists x)\sim Sx$
b. $(\forall x)(Rx \rightarrow \sim q) \rightarrow q$
c. $(\forall x)[\sim(\exists x)Fa \rightarrow \sim\sim(\forall x)Fx] \rightarrow \sim(\forall x)Fx$

4. ¿En cuáles de sus apariciones está libre x y en cuáles está ligada?

a. $(\forall y)(Rx \leftrightarrow Sy\ .\leftrightarrow.\ Ry \leftrightarrow Sa)$
b. $Rz \rightarrow \sim(\forall x)(\forall y)(Rx \rightarrow Sy\ .\wedge.\ Fa)$
c. $(\forall x)Rx \rightarrow (\forall y)(Ry \rightarrow Sy)$
d. $(\forall y)[(Fx \leftrightarrow Hy) \rightarrow Fx] \rightarrow (\forall x)(Gz\ .\wedge.\ Fx \rightarrow Gy)$

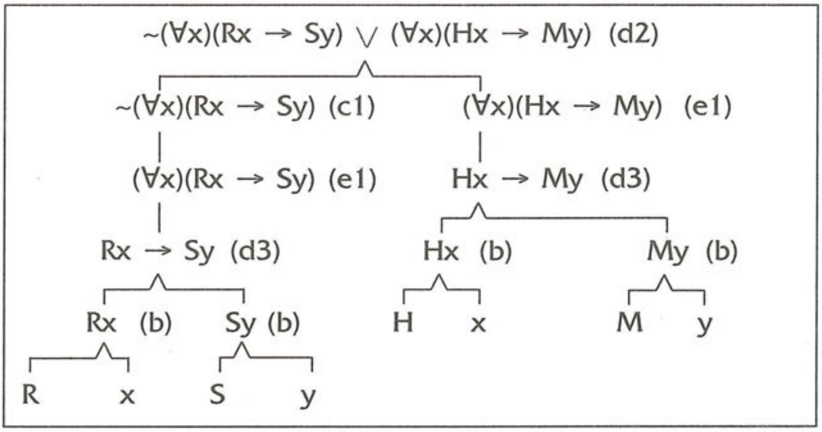
Solución

1. a. Tenemos el siguiente diagrama:



Luego, por RFf, no es una fórmula bien formada en LC.

b. Podemos decir que sí es una FBF, pues se tiene el siguiente diagrama de árbol:



c. Sí.

d. Sí.

2. Un ejemplo es: $[(\forall x)Fx \leftrightarrow (p \wedge \sim p)] \rightarrow \sim(\forall x)Fx$.

3. Es evidente que el esquema solicitado es:

$(\forall \text{ß})(A \rightarrow \sim B) \rightarrow B$

4. a. En la fórmula '$(\forall y)(Rx \leftrightarrow Sy \;.\!\leftrightarrow\!.\; Ry \leftrightarrow Sa)$' el alcance del cuantificador '$(\forall y)$' es '$Rx \rightarrow Sy \;.\!\leftrightarrow\!.\; Ry \leftrightarrow Sa$'; la variable 'x' aparece (ocurre) libre, y la variable 'y' ocurre ligada.

b. '$Rz \rightarrow \sim(\forall x)(\forall y)(Rx \rightarrow Sy \;.\!\wedge\!.\; Fa)$' es una fórmula en la cual todas las ocurrencias de 'x' e 'y' están ligadas; mientras que 'z' ocurre libre. El alcance de '$(\forall x)$' es '$(\forall y)(Rx \rightarrow Sy \;.\!\wedge\!.\; Fa)$', y el de '$(\forall y)$' es '$Rx \rightarrow Sy \;.\!\wedge\!.\; Fa$'.

c. Todas las variables están ligadas; se trata de una fórmula cerrada.

d. '$(\forall y)[(Fx \leftrightarrow Hy) \rightarrow Fx\,] \rightarrow (\forall x)(Gz \;.\!\wedge\!.\; Fx \rightarrow Gy)$' es una fórmula en la cual 'y' ocurre ligada dos veces y libre una vez, 'x' ocurre libre dos veces y ligada dos veces. El alcance de '$(\forall y)$' es '$Fx \leftrightarrow Hy \;.\!\rightarrow\!.\; Fx$', el de '$(\forall x)$' es '$Gz \;.\!\wedge\!.\; Fx \rightarrow Gy$'.

Las fórmulas (a), (b) y (d) son abiertas porque en ellas alguna variable aparece libre alguna vez.

2. SEMÁNTICA DE LC

Para darle un significado a LC, necesitamos enriquecer considerablemente nuestro horizonte de significados: a los valores de verdad añadiremos conjuntos o clases. Los términos 'conjunto' y 'clase' los usamos como sinónimos, prefiriendo 'conjunto' pues suponemos una mayor familiaridad del lector con éste. Las fórmulas cuantificadas las interpretaremos con ayuda de conjuntos del modo que establecemos a continuación:

> Necesitamos, además de los valores de verdad {V, F}, de un conjunto U, que llamaremos 'el universo del discurso', cuyas características iremos precisando.
>
> Las constantes de individuo 'a', 'b', 'c', etc. se interpretan como designando elementos fijos o determinados del conjunto U. Éstos podrían ser el mismo elemento, es decir, 'a' y 'b' designar al mismo individuo.
>
> Las variables de individuo 'x', 'y', 'z', etc. se interpretan designando de manera ambigua elementos del conjunto U. Es decir, refiriéndose indistintamente, sin mencionarlos de manera específica, a elementos de U.
>
> Los predicados se interpretan como nombres de subconjuntos de U.
>
> Y los cuantificadores refiriéndose a todos los elementos de U, el universal, o a alguno de los elementos de U, el particular.
>
> A modo de ejemplo, asumamos que:
>
> U = {Sócrates, Platón, Aristóteles}
> F = {Sócrates, Platón}
> G = {Platón, Aristóteles}
> H = {Sócrates, Platón, Aristóteles}

Intuitivamente, el universo de nuestro discurso (U) son los grandes filósofos griegos; dentro de ese universo tenemos a los maestros de un gran filósofo griego (F), a los discípulos de un gran filósofo griego (G), y a filósofos que han tenido gran influencia.

'$(\forall x)Fx$' significa que todo elemento de U es elemento de F, lo que es falso en nuestro universo. Nótese que si eligiésemos en el mismo universo otra asignación para F (por ejemplo, la que le ha correspondido a H), sería verdadera la afirmación.

'$(\exists x)(Fx \wedge Gx)$' dice que algún elemento de U está en F y en G, lo que es cierto (Platón). Es un ejemplo de una proposición verdadera.

Nos falta designar referentes para nuestras constantes:

a: Sócrates
b: Platón
c: Aristóteles

con lo que 'Fa' es verdadera y 'Fc' falsa.

Relacionados así los términos de nuestro lenguaje y los elementos y subconjuntos de un conjunto cualquiera, podemos atribuir significado o valores de verdad a nuestras FBF.

'Fa' requiere, para su interpretación, dar un conjunto U sobre el que se "entienda", especificar qué subconjunto de U nombra 'F' y, por último, el elemento de U referido por 'a'. Con estos requisitos, **interpretamos** que 'Fa' dice que el elemento 'a' pertenece al subconjunto F. Por ejemplo, si $U=\{1,2,3\}$, $F=\{1,2\}$ y $a=1$. 'Fa' dice lo mismo que '$1 \in \{1,2\}$'. Si, en cambio, interpretamos 'a' como refiriéndose a 3 en vez de 2, tenemos $3 \in \{1,2\}$ como la interpretación de 'Fa'. De este modo, se aprecia la aparición de los valores de verdad condicionada por la interpretación que esté en juego. En la primera interpretación, 'Fa' es verdadera; en la segunda, falsa.

Dados $U=\{1,2,3\}$ y $F=\{1,2\}$, 'Fx' no conduce a ninguna afirmación verdadera o falsa, pues no precisa cuáles de los elementos de U pertenecen al subconjunto F. Más adelante estableceremos un convenio para lidiar con fórmulas abiertas.

En general, '$(\forall x)Fx$' dice que todo elemento de U es elemento de F, y '$(\exists x)Fx$' que hay por lo menos un elemento de U que está en F. Estas dos fórmulas, a diferencia de la anterior, sí son V o F.

2.1. Universos finitos

Trabajemos por un momento con conjuntos U que tengan un número finito de elementos. Al designar los elementos de U, lo haremos utilizando las constantes de nuestro lenguaje, de modo que ya no sea necesario especificarlo.

Empecemos por los más simples: $U=\{a\}$, un conjunto con un único elemento que llamaremos 'a'. ¿Cómo interpretamos ahí '$(\forall x)Fx$' y '$(\exists x)Fx$'? En la primera se afirma que todo elemento del universo del discurso (de U) es elemento del subconjunto F. Ya que sólo tenemos un elemento en U, afirma que él está en F, como lo hace 'Fa'. Lo mismo ocurre con '$(\exists x)Fx$'. En resumen:

Si $U=\{a\}$, entonces:

$(\forall x)Fx$ se reduce a Fa.
$(\exists x)Fx$ se reduce a Fa.

Curiosamente se tiene que no hay distinción entre un cuantificador y otro en un universo con un único elemento.

Si ahora tomamos un universo con dos elementos, $U=\{a,b\}$, en él '$(\forall x)Fx$' dice que cualquier elemento tiene la propiedad de pertenecer al conjunto F o que de cualquier elemento se puede predicar que pertenece a F. Así, '$(\forall x)Fx$' afirma lo mismo que '$Fa \wedge Fb$'. En cambio, '$(\exists x)Fx$', al no especificar más que uno por lo menos como perteneciendo a F, sin descartar que los dos elementos pertenezcan a F, debe traducirse por '$Fa \vee Fb$'. Resumiendo:

Si $U=\{a,b\}$, entonces:

$(\forall x)Fx$: $Fa \wedge Fb$
$(\exists x)Fx$: $Fa \vee Fb$

No se requiere de mucha imaginación para percibir que:

Si U={a,b,c}, entonces:

$(\forall x)Fx$: $Fa \wedge Fb \wedge Fc$
$(\exists x)Fx$: $Fa \vee Fb \vee Fc$

y, en general, cuando $U=\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, se tiene:

$(\forall \beta)\psi\beta$: $\psi\gamma_1 \wedge \psi\gamma_2 \wedge \ldots \wedge \psi\gamma_n$
$(\exists \beta)\psi\beta$: $\psi\gamma_1 \vee \psi\gamma_2 \vee \ldots \vee \psi\gamma_n$

Sólo nos queda preguntar por el caso raro, pero posible, en que $U=\phi$; es decir, el caso en que no hablamos de nada, pues el horizonte de nuestro discurso no tiene objetos a los que referirnos. Es claro que afirmar que existe por lo menos un elemento que está en F es falso, que '$(\exists x)Fx$' es falso, y esto puede ser aceptado sin dificultad. Pero, ¿qué hacer con $(\forall x)Fx$? Convendremos que es verdadero siempre en un universo vacío. Pues, si fuese falso, tendría que haber en U un elemento que no estuviese en F y, siendo U vacío, no hay tal elemento.

Si U={ }, entonces:

$(\forall \beta)\psi\beta$ es verdadero.
$(\exists \beta)\psi\beta$ es falso.

Así, en universos con más de un elemento para analizar la verdad o falsedad de lo que ocurre con una expresión cuantificada, requerimos saber cuál es el subconjunto F del que se habla. Si en los casos que hemos visto (con uno hasta tres elementos), el lector se dedica a definir distintos subconjuntos F (eventualmente vacíos), verá que los valores de verdad que se pueden asignar a expresiones cuantificadas, una vez interpretadas, son calculables, pues las hemos reducido a conjunciones o disyunciones. Por ejemplo:

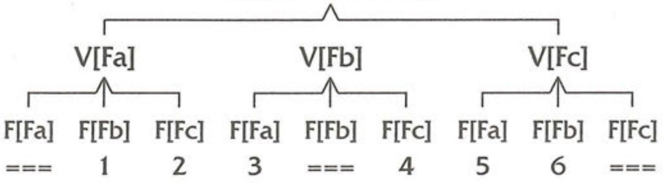
1. ¿Qué valor de verdad tendrá '$(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)Fx$' si U={a,b,c}?

Por lo visto, se tiene que:

$(\exists x)Fx$: $Fa \vee Fb \vee Fc$
$(\forall x)Fx$: $Fa \wedge Fb \wedge Fc$

Así que si reemplazamos en el DS:

$$F[(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)Fx]$$
$$F[Fa \vee Fb \vee Fc \;.\!\!\rightarrow\!\!.\; Fa \wedge Fb \wedge Fc] \quad (1)$$
$$V[Fa \vee Fb \vee Fc] \quad (2)$$
$$F[Fa \wedge Fb \wedge Fc]$$



Para efectuar un análisis de las ramas debe tomarse en cuenta que 'Fa', 'Fb' y 'Fc' son proposiciones simples.

Análisis de ramas				EPM
1.	V[Fa],	F[Fb],	----	3,4
2.	V[Fa],	----,	F[Fc]	2,4
3.	F[Fa],	V[Fb],	----	5,6
4.	----,	V[Fb],	F[Fc]	2,6
5.	F[Fa],	----,	V[Fc]	5,7
6.	----,	F[Fb],	V[Fc]	$\underline{3,7}$
				2,3,4,5,6,7

Es decir, la fórmula es verdadera sólo si F={a,b,c} o si F=ϕ que equivalen a los EPM 1 y 8; cualquier otra interpretación posible de F en U hace falsa la fórmula. Y posee valores de verdad, porque siendo un universo finito, los EPM son finitos, y éstos son: VFFF FFFV.

2. ¿Qué valor de verdad tendrá '$(\forall x)Fx \rightarrow (\exists x)(Gx \vee Fx)$', si U={a,b}?

$(\forall x)Fx$: $Fa \wedge Fb$
$(\exists x)(Gx \vee Fx)$: $(Ga \vee Fa) \vee (Gb \vee Fb)$,

o simplemente $Ga \vee Fa \vee Gb \vee Fb$.

En resumen:

$Fa \wedge Fb \;.\!\!\rightarrow\!\!.\; Ga \vee Fa \vee Gb \vee Fb$.

Como en cada caso tenemos una proposición simple (Fa, Fb, Ga y Gb), por DS podemos resolverlo:

$$
\begin{array}{c}
F[Fa \wedge Fb \;.\!\rightarrow\!.\; Ga \vee Fa \vee Gb \vee Fb]\ (1)\\
V[Fa]\\
V[Fb]\\
F[Ga \vee Fa \vee Gb \vee Fb]\ (2)\\
F[Ga]\\
F[Fa]\\
F[Gb]\\
F[Fb]\\
===
\end{array}
$$

El DS se cierra pues no es posible concebir un EPM en que sea verdadero y falso que a ∈ F. Luego, se trata de una expresión siempre verdadera y, como no hemos necesitado añadir nada nuevo a nuestras reglas de DS veritativo-funcionales, se trata de una tautología. Parecería que los cuantificadores son cómodas abreviaciones de conjunciones y disyunciones que no aportan nada sustantivamente nuevo, y no es así. Lo que ocurre es que nos hemos limitado a trabajar con universos finitos; en un universo infinito ya no tienen sentido las traducciones conjuntivas o disyuntivas hechas.

Una aclaración importante es que, salvo aviso expreso contrario, **nunca consideraremos universos de discurso vacíos**. Pues son triviales, en el sentido de que toda afirmación universal es verdadera y toda existencial falsa.

Con lo anterior, para universos finitos se tiene que todo cuantificador universal es un conjunto de conjunciones y todo existencial un conjunto de disyunciones. Es decir, los cuantificadores son accesorios, no enriquecen en nada nuestra capacidad de análisis. Pues si deseamos ser todavía más radicales en nuestro rechazo de la necesidad de una lógica distinta de la proposicional, basta darse cuenta de que hay que simbolizar:

p_1: Fa_1, p_2: Fa_2,..., p_n: Fa_n
q_1: Ga_1, q_2: Ga_2,..., q_n: Ga_n
... etc.

y reducir todo a la lógica proposicional. Desafortunadamente una conjunción o disyunción de infinitos términos no tiene sentido en la lógica veritativo-funcional. Por esto, lo propiamente nuevo de la lógica cuantificacional aparece recién cuando consideramos universos infinitos.

Ejercicios

1. Interpretar en un universo de dos elementos las siguientes fórmulas:

a. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$
b. $(\forall x)Fx \rightarrow (\exists x){\sim}Gx$
c. ${\sim}(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$

2. Mediante diagramas semánticos determine si las siguientes fórmulas son verdaderas en un universo de dos elementos.

a. $(\exists x)(Fx \wedge Gx) \rightarrow [(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx]$
b. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fc\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Fx \wedge Gx)$
c. $(\forall x)(Mx \leftrightarrow Ix) \wedge (\forall x)(Rx \rightarrow {\sim}Mx)\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)(Rx \rightarrow {\sim}Ix)$

3. En U={1,2,3,4}, determine el valor de verdad de las siguientes fórmulas.

a. $(\exists x)(x + 4 = 5)$
b. $(\forall x)(x + 4 = 5)$
c. $(\forall x)(x > 2) \rightarrow (\exists y)(y > 1)$

Solución

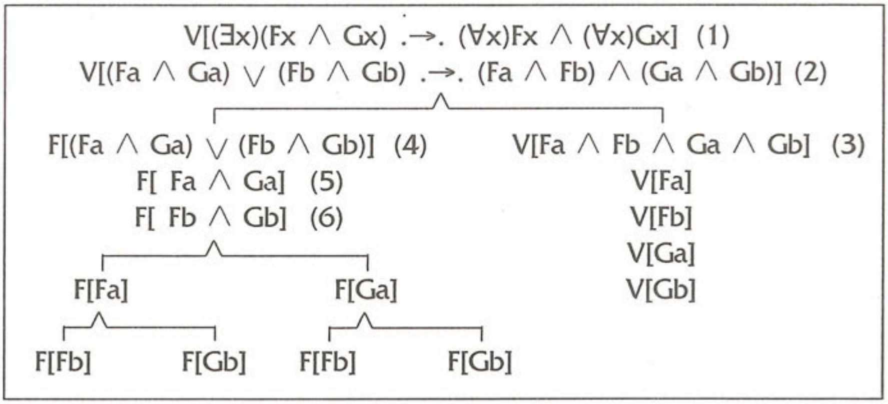
1. Supongamos que U= {a,b} es el universo, entonces tenemos:

   a. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$: $(Fa \rightarrow Ga) \wedge (Fb \rightarrow Gb)$
   b. $(\forall x)Fx \rightarrow (\exists x){\sim}Gx$: $Fa \wedge Fb\ .\!\rightarrow\!.\ {\sim}Ga \vee {\sim}Gb$
   c. ${\sim}(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$: ${\sim}[(Fa \rightarrow Ga) \vee (Fb \rightarrow Gb)]$

2. Resolveremos el ejercicio (a). Supongamos, como antes, que U={a,b}. Luego, tendríamos lo siguiente:

$(\exists x)(Fx\wedge Gx).\!\rightarrow\!.(\forall x)Fx\wedge(\forall x)Gx$: $(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Gb).\!\rightarrow\!.(Fa\wedge Fb)\wedge(Ga\wedge Gb)$

Por lo tanto:



¿Es la fórmula verdadera o no?

3. a. Consideremos Px: x+4=5, entonces tendríamos:

$(\exists x)Px$: $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4$

La interpretación que obtenemos es:

$(\exists x)(x+4=5)$: $(1+4=5) \vee (2+4=5) \vee (3+4=5) \vee (4+4=5)$

que es verdadera.

b. $(\forall x)(x+4=5)$: $(1+4=5) \wedge (2+4=5) \wedge (3+4=5) \wedge (4+4=5)$, falsa.

c. Verdadera.

2.2. Universos infinitos

Antes de empezar aclaremos que lo que se cumple en universos infinitos también se da en universos finitos. Sólo excluimos de lo que vamos a decir al universo vacío.

2.2.1. El cuantificador universal

Expresaremos las reglas semánticas que gobiernan a nuestros cuantificadores por medio de reglas de diagramas semánticos:

$$\begin{array}{cc} V[(\forall \text{ß})\psi \text{ß}] & F[(\forall \text{ß})\psi \text{ß}] \\ | & | \\ V[\psi\alpha] & F[\psi\gamma] \\ & (\gamma \text{ no aparece antes}) \end{array}$$

Así presentadas pueden parecer un tanto crípticas las reglas del universal y necesitan aclararse. Además, aparece en el caso de la falsedad del universal una restricción que no hemos justificado ni explicado.

a. Verdad del universal

Tomemos un universo del discurso U cualquiera, no vacío, y en él afirmemos que es verdad ‘$(\forall x)Gx$’. Esto quiere decir que para cualquier elemento del universo se cumple que pertenece a G o que tiene la propiedad G; si se prefiere pensar en términos de propiedades: son verdaderos ‘Ga’, ‘Gb’, ‘Gc’, etc.; y además podemos considerar como verdad ‘Gx’, ‘Gy’, ‘Gz’, etc., por cuanto hemos dicho que los consideramos como expresiones que refieren ambiguamente a cualquier elemento de U. Ya que considerar verdadera o falsa una expresión abierta, que no precisa con claridad los elementos del universo a los que se refiere, es chocante, vamos a convenir que **cuando se mencionan los valores de verdad de cualquier fórmula abierta, se está hablando de la cerradura universal que le corresponde**. Por ejemplo, decir que ‘Gx’ es verdadera propiamente se refiere a ‘$(\forall x)Gx$’, y no a ‘$(\exists x)Gx$’; del mismo modo, si calificamos de falsa a ‘$Fx \rightarrow Hx$’ nos referimos a ‘$(\forall x)(Fx \rightarrow Hx)$’.

En términos prácticos, $V[G\alpha]$ supone $V[Ga]$, $V[Gb]$, $V[Gc]$, etc. y contradice cualquiera de las siguientes: ‘$F[Ga]$’, ‘$F[Gb]$’, ‘$F[Gc]$’, [...]

En un diagrama si se pudiese mantener todo el desarrollo a nivel de la metavariable α, se simplificaría muchísimo la dificultad del mismo; desgraciadamente, como veremos al tratar la falsedad del universal, esto no es posible. Pero por ahora, veamos un ejemplo donde sólo utilicemos la verdad de universales:

Ejemplo (1): Averiguar si ‘$(\forall x)(Gx \;.\!\rightarrow\!.\; Gx \vee Hx)$’ es verdadera.

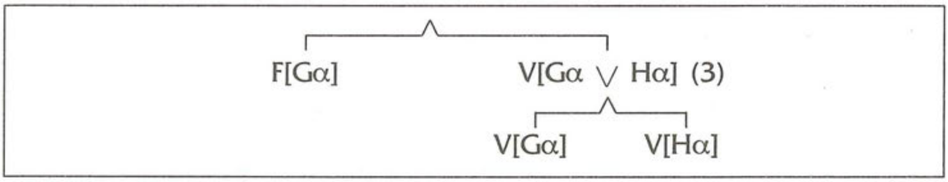
Discutiremos primero la mecánica de la prueba y luego su interpretación:

$V[(\forall x)(Gx \;.\!\rightarrow\!.\; Gx \vee Hx)]$ (1)

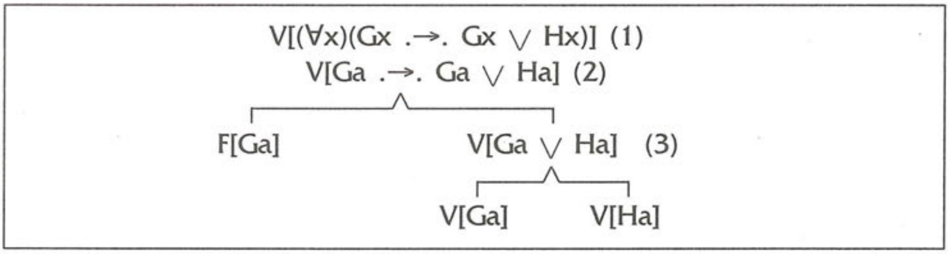
de acuerdo con la regla, esto supone que es V para cualquier $\alpha \in U$

V[Gα .→. G$\alpha \vee$ Hα] (2)

como α es un elemento de U, 'Gα' y 'Hα' son "proposiciones", con mayor propiedad, formas de proposiciones atómicas; por lo que pueden tratarse como tales y seguir, a partir de ahora, el DS con las reglas de manejo de los conectores veritativo-funcionales:



En este caso, hemos mantenido el DS con 'α', pero también hubiésemos podido desarrollarlo reemplazando 'α' por alguno de los nombres de un individuo específico, como pasamos a mostrarlo:



El desarrollo del primero, que llamaremos **en α o desarrollo general**, se distingue del segundo, que llamaremos **en a o desarrollo particular**, por abarcar el universo del discurso. Tratemos de "leerlos" para apreciar la mayor o menor generalidad de cada uno.

El desarrollo en α nos conduce a tres ramas abiertas, tres "situaciones", tres interpretaciones en las que el enunciado puede ser verdadero dado un universo del discurso cualquiera:

> En la primera rama, se nos dice que el enunciado es verdadero si en el universo de que se trata, 'Ga' es falso. Esto es, si por lo menos hay un individuo que no está en G o $G \neq U$.
> En la segunda rama, se afirma que el enunciado es verdadero si en el universo en cuestión, todo individuo posee la propiedad G, en otras palabras, si $G = U$.

En la tercera rama, se establece la verdad de la proposición si cualquier individuo está en H: si H=U.

En un DS varias ramas abiertas significan distintas condiciones que deben cumplirse, alternativamente, para la verificación de la hipótesis de partida. Resulta que entre las ramas 1 y 2 se cubren todas las posibilidades de interpretación dado un universo cualquiera. Pues, en un universo se cumplirá una de dos: U=G o U≠G. Poco o nada añade H.

La lectura cuidadosa de las ramas nos permite concluir que estamos frente a un enunciado que será verdadero en cualquier universo (no vacío), lo que usualmente se llama **fórmula válida** o ley lógica.

Tratemos ahora de "leer" el desarrollo particular (segundo diagrama) en 'a'. Llegamos por consideraciones análogas a que:

Rama 1: a no es elemento de G.
Rama 2: a es elemento de G.
Rama 3: a es elemento de H.

Razonando como lo hicimos para 'α', nos damos cuenta de que todas las posibilidades referentes al individuo 'α, han sido cubiertas. En cualquier universo, el enunciado será verdadero de un individuo por lo menos.

Lo que es difícil, es ver en este desarrollo que se trata de una ley lógica, pues sólo logramos, explícitamente, enunciados acerca de un individuo: a. Y, ¿qué pasa con b?, ¿con c?, ¿con el resto de individuos de U? Se requiere mucha atención para darse cuenta de que si hubiésemos elegido otro individuo, cualquiera que fuese, obtendríamos el mismo resultado. Y, por tanto, es un enunciado verdadero en cualquier universo, con cualquier interpretación: una fórmula válida.

Esperamos que las consideraciones anteriores hayan cimentado en el lector la idea de la superioridad de desarrollar un DS en α, es decir, con la mayor generalidad posible. Nuestra situación sería privilegiada si pudiésemos hacerlo siempre. Por desgracia, esto no es posible, ni siquiera al nivel elemental de lógica que estudiamos. Consideraciones en torno al caso de falsedad del cuantificador universal lo mostrarán.

b. Falsedad del universal

En cualquier universo no vacío, afirmar que es falso que todo individuo posea una propiedad (por ejemplo: F[(∀x)Gx]) es lo mismo que decir de por lo menos un elemento que no la posee. Basta que Sócrates no sea mortal para concluir que 'Todos son mortales' es falso en el universo de los hombres. **Una afirmación universal es falsa si un elemento concreto no tiene la propiedad que se le atribuye. ¿Qué elemento? No lo sabemos a priori.** Sabemos que hay por lo menos uno que no tiene la propiedad. Y, lo que es muy importante, tampoco sabemos qué ocurre con todos los elementos, puede que nadie la posea o puede que algunos sí. Si, en nuestro ejemplo, 'Todos son mortales' es falso, no podemos concluir la verdad de 'Todos son inmortales', pues no es una la negación de la otra (no son contradictorias).

Por eso, en los diagramas semánticos para pasar de F[(∀x)Gx] a F[Gγ], γ debe ser un individuo que no necesariamente conocemos. Sabemos que hay uno, pero no podemos determinarlo de antemano. Por eso, porque no podemos determinarlo de antemano, no debe ser uno que haya aparecido antes en la rama considerada, pues sólo sabemos que de un elemento se cumple F[Gγ]. Sería arbitrario afirmar que tenga que ser uno que ya ha sido mencionado, uno que previamente ya hayamos elegido como poseyendo alguna propiedad. En términos prácticos, conviene reemplazar 'γ' por 'a' la primera vez, por 'b' la segunda, etc. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo (2): Preguntémonos si '(∀x)(Gx .→. Gx ∨ Hx)' puede ser falso:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[(\forall x)(Gx \;.\!\rightarrow\!.\; Gx \vee Hx)] \quad (1)\\
\mathrm{F}[Ga \;.\!\rightarrow\!.\; Ga \vee Ha] \quad (2)\\
\mathrm{V}[Ga]\\
\mathrm{F}[Ga \vee Ha] \quad (3)\\
\mathrm{F}[Ga]\\
\mathrm{F}[Ha]\\
===
\end{array}$$

Vemos que el DS se cierra; concluimos que no puede ser falso. Nuestra conclusión no depende de haber elegido un individuo en lugar de otro, pues el elemento 'a' que figura fue elegido arbitrariamente. Lo mismo ocurrirá con cualquier otro que se elija.

Ejemplo (3): Examinemos '$(\forall x)Gx \rightarrow (\forall x)Gx$', que obviamente debe ser siempre verdadera.

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)Gx \rightarrow (\forall x)Gx] \quad (1) \\
V[(\forall x)Gx] \\
F[(\forall x)Gx]
\end{gathered}$$

En este punto, debemos elegir cómo seguir el DS: una de las expresiones se refiere a cualquier elemento del universo ($V[(\forall x)Gx]$), la otra a uno del cual lo único que sabemos es que existe ($F[(\forall x)Gx]$). Como no deseamos prejuzgar qué elemento particular falsea '$(\forall x)Gx$', debemos elegir primero con total libertad un elemento que lo haga. Así, lo correcto es:

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)(Gx) \rightarrow (\forall x)Gx] \quad (1) \\
V[(\forall x)Gx] \\
F[(\forall x)Gx] \quad (2) \\
F[Ga]
\end{gathered}$$

Para que todo el DS se efectúe en el mismo nivel, evitando confusiones o malinterpretaciones que puedan surgir, debe respetarse lo siguiente: si en el DS aparecen individuos específicos, todo el DS debe manejarse sobre esos individuos específicos.

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)(Gx) \rightarrow (\forall x)Gx] \quad (1) \\
V[(\forall x)Gx] \quad (3) \\
F[(\forall x)Gx] \quad (2) \\
F[Ga] \\
V[Ga] \\
===
\end{gathered}$$

c. *Problemas operativos*

Ya debe ser claro que el manejo de los DS cuantificacionales no es tan mecánico como el manejo de los proposicionales. Para evitar errores deben respetarse algunas reglas operativas, que por ahora podemos formular refiriéndonos al cuantificador universal.

Regla operativa 1. Dejar los cuantificadores al último. Es decir, desarrollar el DS resolviendo primero todos los conectores veritativo-funcionales y, sólo cuando se haya terminado con ellos (ya no quede ninguno por desarrollar), trabajar con los cuantificadores.

Ejemplo (4):

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx] \quad (1)\\
V[(\forall x)Gx]\\
F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx] \quad (2)\\
F[(\forall x)Gx]\\
F[(\forall x)Hx]
\end{gathered}$$

Está correctamente desarrollado, mal desarrollado estaría si eligiésemos la secuencia:

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx] \quad (1)\\
V[(\forall x)Gx] \quad (2)\\
F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]\\
V[G\alpha], \text{ etc.}
\end{gathered}$$

Regla operativa 2. Cuando en un DS se llega al momento en que hay que desarrollar los cuantificadores, deben desarrollarse primero aquellos que obligan a suponer la existencia de un individuo particular (por ejemplo, $F[(\forall x)Gx]$), eligiendo un individuo que no haya aparecido antes y dejando los desarrollos que podrían ser generales para después.

Ejemplo (5):

$$\begin{gathered}
F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx] \quad (1)\\
V[(\forall x)Gx]\\
F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx] \quad (2)\\
F[(\forall x)Gx] \quad (3)\\
F[(\forall x)Hx] \quad (4)\\
F[Ga]\\
F[Hb]
\end{gathered}$$

O también:

Ejemplo (6):

$F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (1)
$V[(\forall x)Gx]$
$F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (2)
$F[(\forall x)Gx]$ (4)
$F[(\forall x)Hx]$ (3)
$F[Ha]$
$F[Gb]$

Nótese que conviene elegir los individuos siguiendo el orden alfabético. Malos desarrollos serán los siguientes:

Ejemplo (7):

$F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (1)
$V[(\forall x)Gx]$
$F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (2)
$F[(\forall x)Gx]$ (4)
$F[(\forall x)Hx]$ (3)
$F[Ha]$
$F[Ga]$ **ERROR**

Pues se elige en F[Ga] un elemento determinado (que aparece antes) cuando debiese ser arbitrario. Es un elemento determinado pues ya sabemos de él que no tiene la propiedad H (por F[Ha]). También está mal:

Ejemplo (8):

$F[(\forall x)Gx\ .\!\rightarrow.\ (\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (1)
$V[(\forall x)Gx]$ (3)
$F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx]$ (2)
$F[(\forall x)Gx]$
$F[(\forall x)Hx]$
$V[G\alpha]$ **ERROR**

Pues se estaría trabajando con el desarrollo de un cuantificador que no supone la existencia de un individuo antes que con los que sí la suponen.

Regla operativa 3. Si en un DS se han desarrollado cuantificadores que suponen la existencia de algún individuo, los cuantificadores de desarrollo general (V[(∀x)Gx]) deben desarrollarse para cada uno de los individuos que han aparecido.

Ejemplo (9):

F[(∀x)Gx .→. (∀x)Gx ∨ (∀x)Hx] (1)
V[(∀x)Gx] (5)
F[(∀x)Gx ∨ (∀x)Hx] (2)
F[(∀x)Gx] (3)
F[(∀x)Hx] (4)
F[Ga]
F[Hb]
V[Ga]
V[Gb]
===

Este desarrollo en cada individuo es necesario, pues hemos visto que 'V[ψα]' contradice cualquier expresión del tipo 'F[ψγ]' y es necesario explicitarlo en el DS.

Regla operativa 4. Si en un DS sólo aparecen cuantificadores que tienen un desarrollo general, debe mantenerse el DS a nivel de α.

Ejemplo (10):

V[(∀x)Gx → (∀x)Gx] (1)

(2) F[(∀x)Gx]	V[(∀x)Gx] (3)
F[Ga]	V[Gα]
1	2

Este último ejemplo manifiesta, además, que cada rama es independiente.

Hagamos el análisis de sus ramas abiertas:

1. F[Ga]. El análisis de cada rama no se traduce mecánicamente en términos de EPM como en la lógica proposicional. Lo que nos dice esta rama debemos entenderlo como que la expresión es verdadera,

según la rama 1, cuando un elemento a de U no está en G, es decir, cuando G es distinto de U: $G \neq U$.

2. V[Gα]. La rama 2 nos dice que el supuesto de verdad del que se partió se cumple cuando todo individuo está en G, es decir, cuando $G=U$.

Así, la fórmula es verdadera en todos los casos posibles, o cuando $G=U$ (rama 2) o cuando $G \neq U$ (rama 1).

Notará el lector que si bien el análisis de ramas es más interesante ahora, porque nos indica "modelos" de verdad o falsedad más complejos que los simples EPM, no es totalmente mecánica la labor de "leer" las ramas abiertas. Esto, sumado a la complejidad que supone el acostumbrarse al manejo de las reglas operativas, hace que, en lo que respecta a los objetivos de un curso introductorio, baste con usar los DS para decidir si una fórmula es válida o no. Es decir, sólo haremos DS que partan del supuesto de falsedad, y no haremos el análisis de las ramas abiertas que puedan aparecer, pero sí sugerimos que se trate de interpretarlas.

Las fórmulas que tienen especial relevancia lógica, llamadas por muchos **leyes lógicas** o **fórmulas válidas**, son aquellas que son verdaderas en cualquier interpretación, para las que no hay una interpretación en la que sean falsas. Son fórmulas verdaderas en todo $U \neq \phi$. Un ejemplo es '$(\forall x)Fx \rightarrow (\forall x)Fx$'. Las seguiremos escribiendo:

$$\models (\forall x)Fx \rightarrow (\forall x)Fx$$

En la lógica proposicional, a las fórmulas siempre verdaderas se acostumbra llamarlas 'tautologías' para recalcar que su verdad depende exclusivamente de los conectores veritativo-funcionales. Como en la lógica cuantificacional pueden aparecer expresiones cuya verdad no dependa sólo de los conectores de verdad, no podemos llamarlas 'tautologías', y se acostumbra llamarlas 'fórmulas válidas'. Claramente, el ejemplo que hemos dado es una fórmula válida y una tautología, pues se reduce a $A \rightarrow A$. Veamos uno que no proviene de una tautología:

Ejemplo (11): $\models (\forall x)Gx \rightarrow \sim(\forall x)\sim Gx$. Prueba:

$F[(\forall x)Gx \rightarrow \sim(\forall x)\sim Gx]$
$V[(\forall x)Gx]$ (2)
$F[\sim(\forall x)\sim Gx]$ (1)
$V[(\forall x)\sim Gx]$ (3)
$V[G\alpha]$
$V[\sim G\alpha]$ (4)
$F[G\alpha]$
===

Lo que prueba su validez. Que no es una tautología se sigue de la necesidad de interpretar los conectores y los cuantificadores para que cierre el DS.

Ejemplo (12): ¿Será válida '$(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx \vee (\forall x)\ Jx$'?

$F[(\forall x)Gx \vee (\forall x)Hx \vee (\forall x)\ Jx]$
$F[(\forall x)Gx]$ (1)
$F[(\forall x)Hx]$ (2)
$F[(\forall x)\ Jx]$ (3)
$F[Ga]$
$F[Hb]$
$F[Jc]$

No cierra el DS, por lo que es inválida; no es una ley lógica.

Más que sobre el resultado, queremos llamar la atención sobre el procedimiento: la misma constante no se repite, se usa 'a' la primera vez, 'b' la segunda y 'c' la tercera, tal como indica la regla de los DS con 'γ'. Si hubiésemos elegido otro orden para examinar nuestras fórmulas, tendríamos el mismo resultado.

Ejemplo (13): ¿Es válida '$(\forall x)Fx \vee (\forall x)Hx .\wedge. (\forall x)Hx \vee (\forall x)Gx$'?

$$F[(\forall x)Fx \vee (\forall x)Hx .\wedge. (\forall x)Hx \vee (\forall x)Gx] \quad (1)$$

(2) $F[(\forall x)Fx \vee (\forall x)Hx]$	$F[(\forall x)Hx \vee (\forall x)Gx]$ (5)
(3) $F[(\forall x)Fx]$	$F[(\forall x)Hx]$ (6)
(4) $F[(\forall x)Hx]$	$F[(\forall x)Gx]$ (7)
$F[Fa]$	$F[Ha]$
$F[Hb]$	$F[Gb]$

No es válida. Nuevamente nos interesa más que el lector se fije en la independencia de las ramas. En la segunda rama, se pueden usar constantes que han aparecido en otra rama, lo que no se puede es repetir constantes que aparecen en la misma rama.

2.2.2. *El cuantificador existencial*

Las reglas del cuantificador existencial son:

$V[(\exists \beta)\psi\beta]$	$F[(\exists \beta)\psi\beta]$
|	|
$V[\psi\gamma]$	$F[\psi\alpha]$
(γ no aparece antes)	

Una lectura de las reglas de DS que gobiernan al cuantificador existencial permite distinguir dos tipos: una regla "general" (la falsedad) en α y otra particular (la verdad) en γ. Cuando estudiamos el cuantificador universal también se presentaron estos dos tipos de reglas: una en α y otra en γ, sólo que invertidas con respecto a las del existencial.

El manejo de DS con cuantificadores existenciales no ofrece ningún problema nuevo respecto al cuantificador universal, por eso recomendamos al lector que antes de seguir revise las reglas del universal. Al hacerlo deberá notar lo que es propio de una regla en α y lo que es propio de una regla en γ, más que reparar si la regla se refiere a la verdad o falsedad del cuantificador.

Veamos con un ejemplo lo que dicen las reglas relativas al existencial:

$$\begin{array}{cc} V[(\exists x)Gx] & F[(\exists x)Gx] \\ | & | \\ V[Ga] & F[G\alpha] \\ (\text{'a' no aparece antes}) & \end{array}$$

La primera, referida a la verdad del existencial, nos dice que si ocurre que es verdad en un determinado universo, entonces hay por lo menos un individuo que tiene la propiedad F. Debemos notar que no nos da ninguna pista para decidir qué individuo es, ni si son muchos o todos. Por eso, al eliminar el cuantificador, aparece 'a' con la nota de que no debe haber sido mencionada antes. Al eliminar el cuantificador existencial podemos reemplazarlo por un individuo, al que designaremos con alguna de nuestras constantes ('a', 'b', 'c', etc.). Cada vez que hagamos esto, debemos emplear una constante nueva dentro de una misma rama. Que la constante sea distinta en cada rama es un requisito dado por el hecho de que cada rama nos lleva a construir una interpretación en la que se cumple la hipótesis de partida; si en una interpretación, por ejemplo, el individuo designado por 'a' ya tiene propiedades que se le atribuyen, no tenemos motivos suficientes para asegurar que se sigue hablando de él. El siguiente ejemplo debe aclararlo:

Ejemplo (1):

$$\begin{array}{c} F[\sim(\exists x)Gx \vee \sim(\exists x)Hx] \quad (1) \\ F[\sim(\exists x)Gx] \quad (2) \\ F[\sim(\exists x)Hx] \quad (3) \\ V[(\exists x)Gx] \\ V[(\exists x)Hx] \end{array}$$

Llegamos a que, para que se cumpla la hipótesis, es necesario que en algún universo del discurso elegido sean simultáneamente verdaderas $V[(\exists x)Gx]$ y $V[(\exists x)Hx]$. Es decir, debe haber un individuo que posea la propiedad G y debe haber un individuo que posea la propiedad H. Supongamos, para ser más concretos, que se trata de seres humanos donde los G son los glotones y los H, los hacendosos. Se nos dice que hay por lo menos un glotón y por lo menos un hacendoso entre los humanos. Si continuásemos nuestro diagrama así:

$$\begin{gathered} V[Ga] \\ V[Ha] \end{gathered}$$

Lo que estaríamos suponiendo es que si sabemos que hay un glotón y un hacendoso, entonces son la misma persona; cuando es obvio que puede cumplirse $V[(\exists x)Gx]$ y $V[(\exists x)Hx]$ siendo personas diferentes las que tienen las propiedades en cuestión. Si utilizamos dos constantes distintas, dos nombres distintos, quedan abiertas las dos posibilidades, pues eventualmente ambos nombres pueden referirse al mismo individuo. Por eso, para no introducir información que no poseemos en el diagrama (que se trate del mismo individuo), la continuación correcta es:

$$\begin{gathered} V[Ga] \\ V[Hb] \end{gathered}$$

Ejemplo (2):

$$\begin{gathered} F[\sim(\exists x)Gx \lor \sim(\exists x)Hx] \quad (1) \\ F[\sim(\exists x)Gx] \quad (2) \\ F[\sim(\exists x)Hx] \quad (3) \\ V[(\exists x)Gx] \quad (4) \\ V[(\exists x)Hx] \quad (5) \\ V[Ga] \\ V[Hb] \end{gathered}$$

Y al quedar abierta la rama sabemos que la fórmula no es una instancia de una ley lógica.

En cambio, suponer que es falsa una afirmación existencial en realidad constituye una afirmación que alcanza a todo el universo del discurso. $F[(\exists x)Gx]$ afirma, siguiendo con nuestro ejemplo, que es falso que haya seres humanos glotones; se está diciendo de todas las personas que no tienen la virtud de la glotonería. Por tanto, es una afirmación "general" acerca de todos y que, justamente, no supone ningún individuo glotón. Por eso, el siguiente ejemplo se desarrolla de la siguiente manera:

Ejemplo 3)

F[(∃x)Gx ∨ (∃x)Hx] (1)
F[(∃x)Gx] (2)
F[(∃x)Hx] (3)
F[Gα]
F[Hα]

Si nos topamos con un DS que tiene una regla con desarrollo general y una con desarrollo particular o individual, debemos manejarnos a nivel individual. El análisis se lleva a cabo sobre los individuos cuya existencia es necesaria.

Ejemplo (4):

F[(∃x)Gx ∨ ~(∃x)Hx] (1)
F[(∃x)Gx] (4)
F[~(∃x)Hx] (2)
V[(∃x)Hx] (3)
V[Ha]
F[Ga]

No lo hemos dicho, pero seguramente el lector se ha percatado de que lo que estamos siguiendo son las reglas operativas que presentamos con el cuantificador universal.

2.2.3. Diagramas semánticos con cuantificadores

Resumamos lo visto agrupando nuestras reglas en función de si su desarrollo es general o particular:

Generales	**Particulares**
V[(∀ß)ψß] | V[ψα]	F[(∀ß)ψß] | F[ψγ]
F[(∃ß)ψß] | F[ψα]	V[(∃ß)ψß] | V[ψγ] (γ no debe aparecer antes)

Con las reglas operativas:

Regla operativa 1. **Dejar el desarrollo de los cuantificadores para el final.** Es decir, desarrollar el DS resolviendo primero todos los conectores veritativo-funcionales que tengan mayor jerarquía que los cuantificadores o que puedan desarrollarse antes, y sólo cuando se haya terminado con ellos (ya no quede ninguno por desarrollar) trabajar con los cuantificadores.

Regla operativa 2. Cuando en un DS se llega al momento en que hay que desarrollar los cuantificadores, **hay que trabajar primero los cuantificadores con desarrollo particular sin repetir los individuos en la misma rama.** Es decir, debe desarrollarse primero aquellos que obligan a suponer la existencia de un individuo particular (F[(∀x)Gx] o V[(∃x)Gx]) eligiendo uno que no haya aparecido antes.

Regla operativa 3. Si en una rama de un DS aparecen una o más expresiones sobre individuos, **los cuantificadores con desarrollo general deben trabajarse para cada uno de los individuos que aparecen en la rama.** Es decir, si en un DS se han desarrollado cuantificadores que suponen la existencia de algún individuo, los cuantificadores de desarrollo general (V[(∀x)Gx] y F[(∃x)Gx]) deben desarrollarse para cada uno de los individuos mencionados.

Regla operativa 4. **Si en un DS sólo aparecen cuantificadores que tienen un desarrollo general, debe desarrollarse el DS en** α.

Veremos algunos ejemplos en los que se aplicarán tanto las reglas de los DS, como las operativas. Al final daremos un ejemplo que esperamos aclare la necesidad de la regla operativa 3 que no hemos justificado suficientemente.

Ejemplo (1): Analizar '(∃x)Fx → (∀x)Fx'.

Como ya dijimos sólo trabajaremos a partir de la hipótesis de falsedad. En otras palabras sólo nos interesaremos en buscar contraejemplos.

F[(∃x)Fx → (∀x)Fx] (1)
V[(∃x)Fx] (2)
F[(∀x)Fx] (3)
V[Fa]
F[Fb]

No se trata de una ley lógica. Note el lector lo importante de respetar el que 'γ' se instancia por letras diferentes en la misma rama; si no lo hubiésemos hecho así, tendríamos en la última línea 'F[Fa]' que cerraba el DS, llevándonos al error de considerar '(∃x)Fx → (∀x)Fx' una fórmula válida.

Ejemplo (2): Confirmar la validez de '(∀x)Hx ↔ ~(∃x)~Hx'.

F[(∀x)Hx ↔ ~(∃x)~Hx]

(2) V[(∀x)Hx]	F[(∀x)Hx] (4)
(1) V[(∃x)~Hx]	F[(∃x)~Hx] (5)
(3) V[~Ha]	F[Ha]
V[Ha]	F[~Ha] (6)
F[Ha]	V[Ha]
===	===

Es válida.

Hemos empleado como sinónimos las expresiones **'fórmula válida'** y **'ley lógica'**, ahora las diferenciaremos. Conservamos para la primera su significado, pero la segunda la reservaremos para los esquemas de fórmulas válidos. Así, el lector puede probar que:

~(∃ß)ψß ↔ (∀ß)~ψß y (∀ß)ψß ↔ ~(∃ß)~ψß

son leyes, usualmente conocidas con el nombre de 'leyes de intercambio de negación y cuantificador', en unos casos, o de interdefinición de cuantificadores, en otros.

Ejemplo (3): Analizar la siguiente fórmula:

(∃x)(Hx ∧ Gx) ∧ (∃x)(Gx ∧ ~Fx) .→. ~(∀x)(Hx → Fx)

$$\begin{array}{c}
F[(\exists x)(Hx \wedge Gx) \wedge (\exists x)(Gx \wedge \sim Fx)\ .\!\rightarrow\!.\ \sim(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (1) \\
V[(\exists x)(Hx \wedge Gx)] \quad (3) \\
V[(\exists x)(Gx \wedge \sim Fx)] \quad (4) \\
F[\sim(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (2) \\
V[(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (5) \\
V[Ha \wedge Ga] \quad (6) \\
V[Gb \wedge \sim Fb] \quad (7) \\
V[Ha \rightarrow Fa] \quad (8) \\
V[Hb \rightarrow Fb] \quad (9) \\
V[Ha] \\
V[Ga] \\
V[Gb] \\
F[Fb] \\
\wedge \\
\begin{array}{cc}
F[Ha] & V[Fa] \\
=== & \wedge \\
 & \begin{array}{cc} F[Hb] & V[Fb] \\ & === \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

que prueba que no es una instancia de una ley lógica. Si no se hubiese respetado la regla operativa 3 en el paso (5), tendríamos:

$$\begin{array}{c}
F[(\exists x)(Hx \wedge Gx) \wedge (\exists x)(Gx \wedge \sim Fx)\ .\!\rightarrow\!.\ \sim(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (1) \\
V[(\exists x)(Hx \wedge Gx)] \quad (3) \\
V[(\exists x)(Gx \wedge \sim Fx)] \quad (4) \\
F[\sim(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (2) \\
V[(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)] \quad (5) \\
V[Ha \wedge Ga] \quad (6) \\
V[Gb \wedge \sim Fb] \quad (7) \\
V[H\alpha \rightarrow F\alpha] \quad (8) \\
V[Ha] \\
V[Ga] \\
V[Gb] \\
F[Fb] \\
\wedge \\
\begin{array}{cc}
F[H\alpha] & V[F\alpha] \\
=== & ===
\end{array}
\end{array}$$

Pues, obviamente F[Hα] contradice V[Ha] y lo mismo ocurre con F[Fb] y V[Fα]. No observar la regla operativa 3 puede, en muchos casos, hacernos caer en error.

Para hacer más intuitivo el ejemplo, el lector puede tomar como universo del discurso el de los seres humanos, por H a los honestos, por G a los glotones y por F a los felices, con lo que nuestra fórmula recogería el razonamiento:

> Hay honestos glotones
> y hay glotones infelices.
> Por lo tanto, no todos los honestos son felices.

que a todas luces es incorrecto.

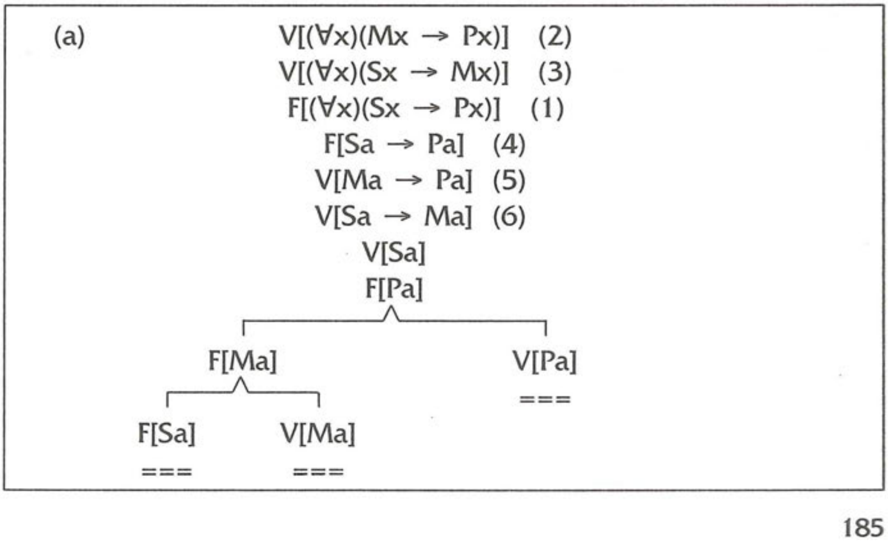
Ejercicios

1. Demuestre por DS la validez de las siguientes fórmulas.

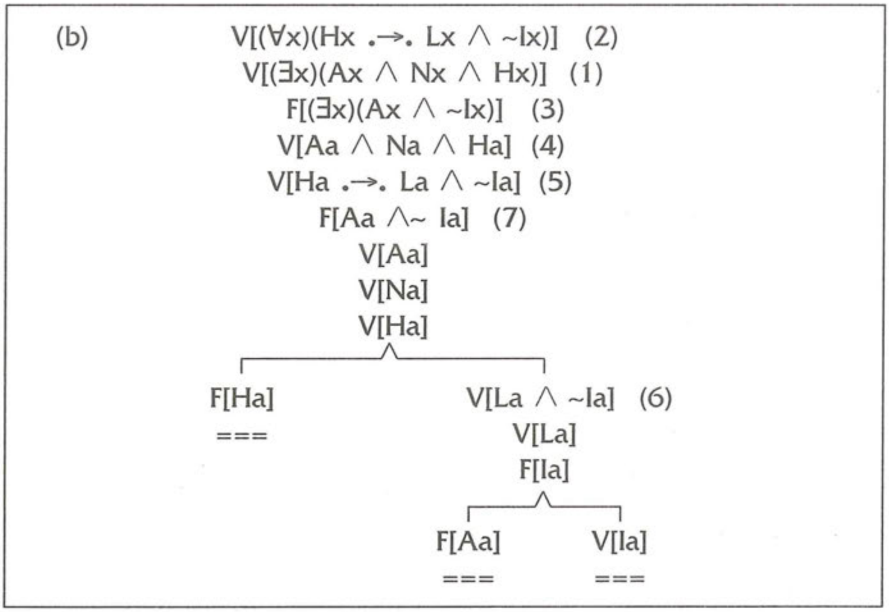
a. $(\forall x)(Mx \rightarrow Px) \land (\forall x)(Sx \rightarrow Mx) .\rightarrow. (\forall x)(Sx \rightarrow Px)$
b. $(\forall x)(Hx .\rightarrow. Lx \land {\sim}Ix) \land (\exists x)(Ax \land Nx \land Hx) .\rightarrow. (\exists x)(Ax \land {\sim}Ix)$
c. $(\forall x)(Kx \rightarrow Lx) \land (\exists x)(Kx \land Mx) \land (\forall x)(Lx \land Mx .\rightarrow. Nx) .\rightarrow. (\exists x)(Kx \land Nx)$
d. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \land Fc .\rightarrow. (\exists x)(Fx \land Gx)$
e. $[(\forall x)Fx \rightarrow (\exists x)(Gx \land Hx)] \land (\forall x)(Fx \rightarrow {\sim}Hx) .\rightarrow. (\exists x){\sim}Fx$
f. $(\forall x)(Hx \lor Lx .\rightarrow. Ix) \land (\forall x)({\sim}Ax \rightarrow {\sim}Nx) \land (\exists x)({\sim}Ax \land Lx) .\rightarrow.$ $(\exists x)(Hx \land Nx) \rightarrow (\exists x)(Ix \land Ax)$
g. $(\forall x)(Fx \lor Gx .\rightarrow. Hx) \land (\exists x)(Mx \land {\sim}Hx) .\rightarrow. (\exists x)(Sx \land Px) \rightarrow$ $(\exists x)(Mx \land {\sim}Gx)$

Solución:

Probaremos cada caso por DS:



Luego, es válida.



(b)

$V[(\forall x)(Hx \;.\!\to\!.\; Lx \wedge \sim Ix)]$ (2)

$V[(\exists x)(Ax \wedge Nx \wedge Hx)]$ (1)

$F[(\exists x)(Ax \wedge \sim Ix)]$ (3)

$V[Aa \wedge Na \wedge Ha]$ (4)

$V[Ha \;.\!\to\!.\; La \wedge \sim Ia]$ (5)

$F[Aa \wedge\!\sim Ia]$ (7)

$V[Aa]$

$V[Na]$

$V[Ha]$

$F[Ha]$ ===

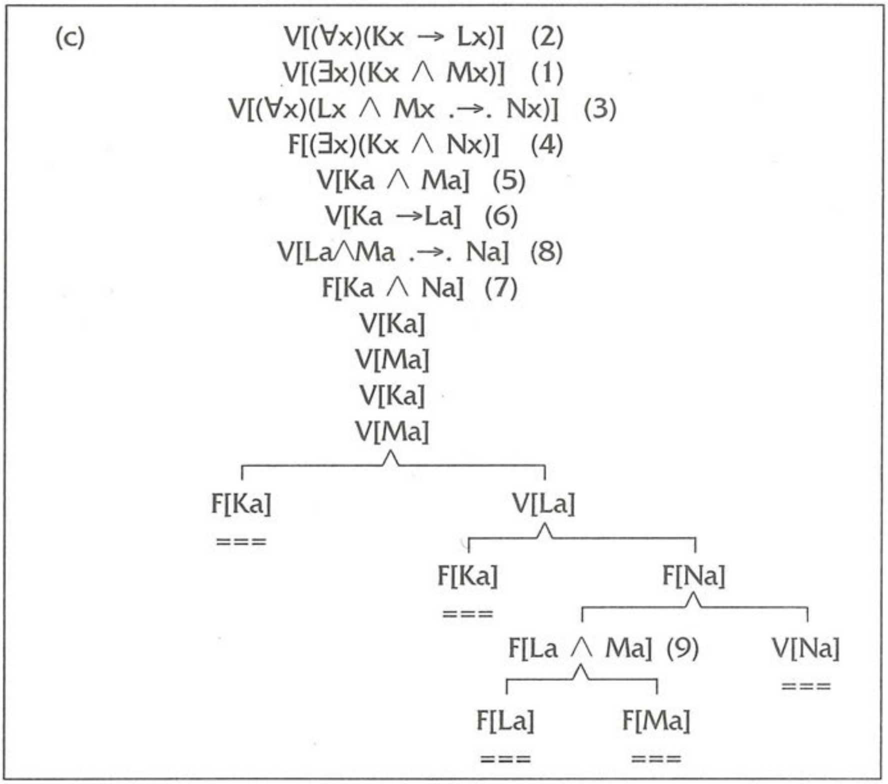
$V[La \wedge \sim Ia]$ (6)

$V[La]$

$F[Ia]$

$F[Aa]$ ===

$V[Ia]$ ===



(c)

$V[(\forall x)(Kx \to Lx)]$ (2)

$V[(\exists x)(Kx \wedge Mx)]$ (1)

$V[(\forall x)(Lx \wedge Mx \;.\!\to\!.\; Nx)]$ (3)

$F[(\exists x)(Kx \wedge Nx)]$ (4)

$V[Ka \wedge Ma]$ (5)

$V[Ka \to La]$ (6)

$V[La \wedge Ma \;.\!\to\!.\; Na]$ (8)

$F[Ka \wedge Na]$ (7)

$V[Ka]$

$V[Ma]$

$V[Ka]$

$V[Ma]$

$F[Ka]$ ===

$V[La]$

$F[Ka]$ ===

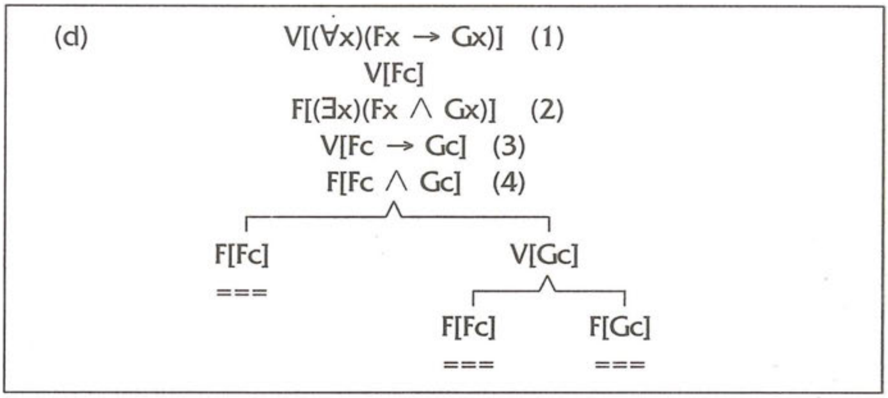
$F[Na]$

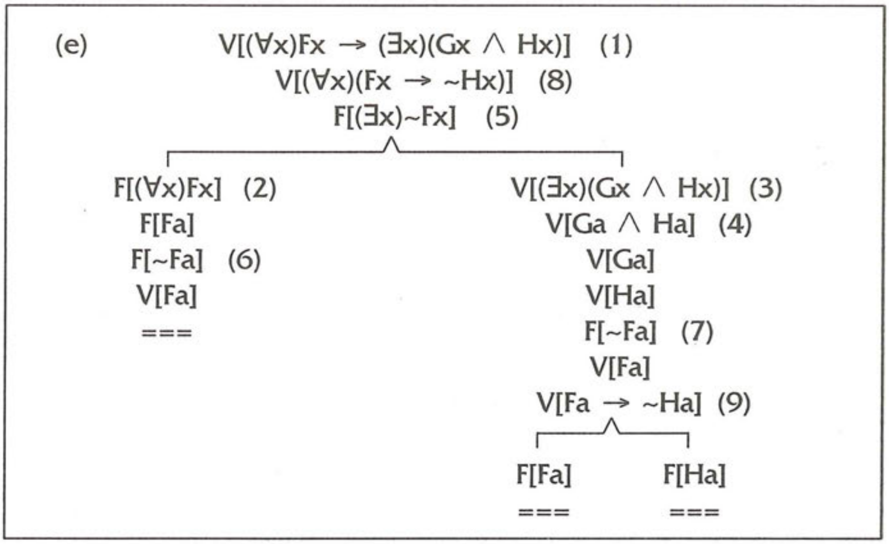
$F[La \wedge Ma]$ (9)

$F[La]$ ===

$F[Ma]$ ===

$V[Na]$ ===





¿Por qué se puede repetir o usar la letra 'a' en el paso (2) y en el paso 3, sin violar la regla operativa (3)?

(f)

$V[(\forall x)(Hx \vee Lx \,.\!\to\!.\, Ix)]$ (4)

$V[(\forall x)(\sim Ax \to \sim Nx)]$ (5)

$V[(\exists x)(\sim Ax \wedge Lx)]$ (2)

$F[(\exists x)(Hx \wedge Nx) \to (\exists x)(Ix \wedge Ax)]$ (1)

$V[(\exists x)(Hx \wedge Nx)]$ (3)

$F[\,(\exists x)(Ix \wedge Ax)]$ (6)

$V[\sim Aa \wedge La]$ (7)

$V[Hb \wedge Nb]$ (8)

$V[Ha \vee La \,.\!\to\!.\, Ia]$

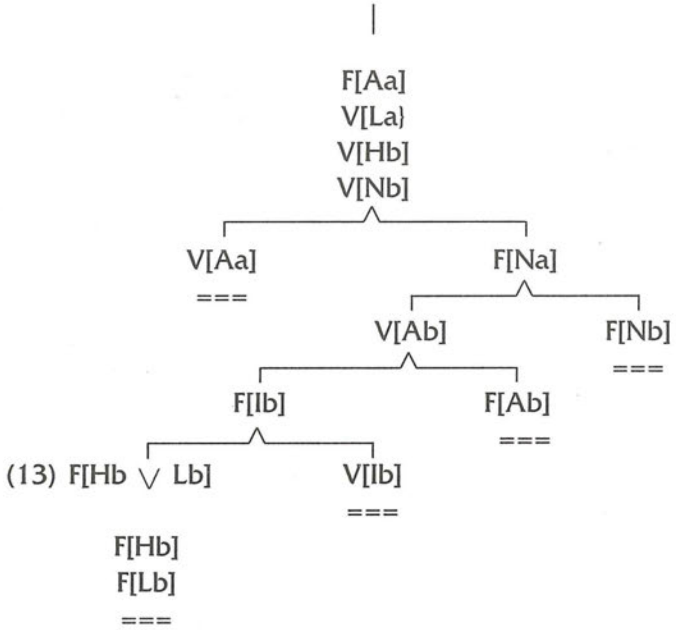
$V[Hb \vee Lb \,.\!\to\!.\, Ib]$ (12)

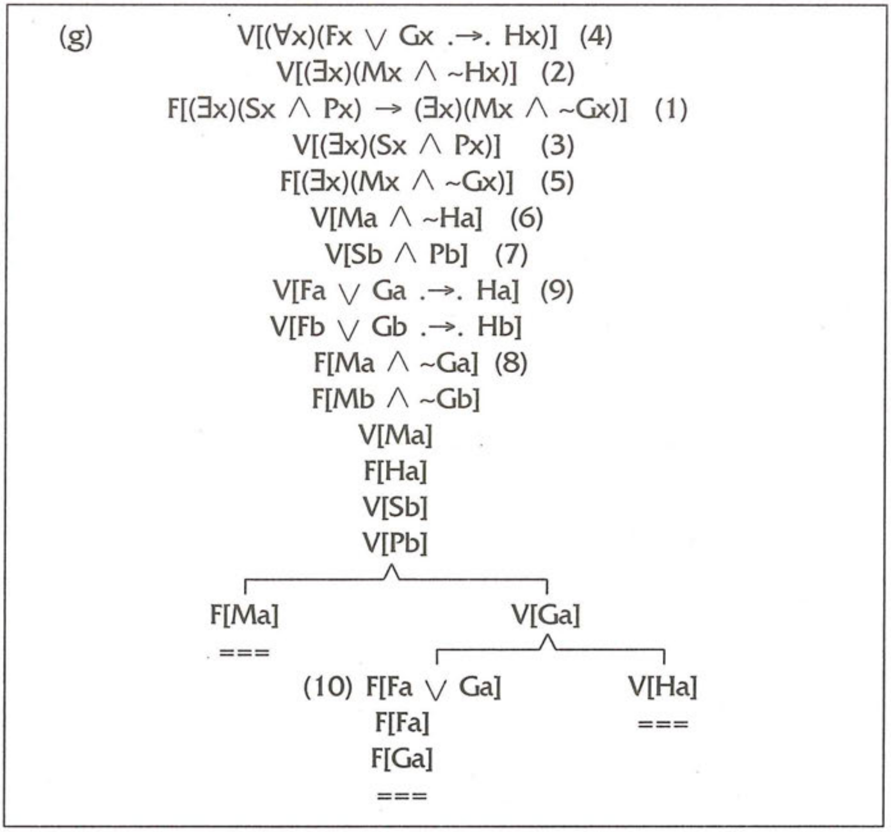
$V[\sim Aa \to \sim Na]$ (9)

$V[\sim Ab \to \sim Nb]$ (10)

$F[Ia \wedge Aa]$

$F[Ib \wedge Ab]$ (11)





3. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine por diagramas de árbol, cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de LC.

1.1. $\sim(\forall x)Fx \wedge \sim(\exists x)Fx$
1.2. $(\exists x)(Fx \wedge \sim Gx)$
1.3. $(\exists x)Ha \vee Hb \wedge \sim p$
1.4. $(\exists x)(\forall x)[Cx \rightarrow (\forall y)Cy]$
1.5. $(\exists x)(\forall y)(Px \rightarrow Hy)$
1.6. $bCm \wedge (F)(\exists x)Fx$
1.7. $\sim(\exists x)\sim Gx \vee \sim Gb$
1.8. $\sim(\forall x)\sim(\exists x)Gc$
1.9. $\sim x \rightarrow \sim R \wedge (\forall x)G$
1.10. $(\forall x)(Sx \leftrightarrow Px)$
1.11. $(\forall x)(Fx \leftrightarrow Gy)\ .\!\leftrightarrow\!.\ (\exists y)(\forall x)(Fy \vee Gx) \wedge p \rightarrow \sim Ha$
1.12. $(\forall x)(\exists x\ .\!\rightarrow\!.\ Gx \vee Hy) \wedge (\forall x)(\exists y)Fxy\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists y)Ey$

1.13. $(\forall y)p \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)Gz \wedge Fa$
1.14. $(\exists a)Fx \rightarrow (Fx)Gx$
1.15. $(\exists x)(Px \vee Qx\ .\!\rightarrow\!.\ Rx)$

2. Determine, en las siguientes fórmulas, el alcance de los cuantificadores, así como las variables libres y ligadas. ¿Son fórmulas abiertas o cerradas?

2.1. $(\forall x)[Fx \rightarrow (\exists y)(Fy \wedge Hx)]$
2.2. $Fx \rightarrow \sim Gx\ .\!\vee\!.\ (\exists y)Gx \wedge \sim Gy$
2.3. $(\exists x)Ha \wedge (\exists y)(Fx \wedge Hz)\ .\!\leftrightarrow\!.\ p$
2.4. $(\exists x)(p \vee Hx)\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)p \vee (\exists x)Hx$
2.5. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Fx\ .\!\rightarrow\!.\ Gy \wedge Hz) \rightarrow (Fx\ .\!\rightarrow\!.\ Gy \wedge Hz)$

3. Elabore tres fórmulas que correspondan al siguiente esquema.

$(\forall \beta)(\psi b \rightarrow \theta\beta) \rightarrow \sim(\exists \beta)(A \wedge \sim\theta\gamma)$

4. Elimine los cuantificadores en un universo de tres elementos, $U=\{a,b,c\}$.

4.1. $(\forall x)Gx \leftrightarrow (\exists x)\sim Fx$
4.2. $(\forall y)(Gy \rightarrow \sim Fy)$
4.3. $\sim(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Hx)$
4.4. $(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)(Gx \rightarrow \sim Fx)$
4.5. $(\exists x)(Px \wedge Ax \wedge Zx)$

5. Mediante diagramas semánticos determine si las siguientes fórmulas son verdaderas en un universo de dos elementos.

5.1. $(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Fx \wedge Gx)$
5.2. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fc\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Fx \wedge Gx)$
5.3. $(\forall x)Fx \wedge (\exists x)Gx\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Fx \wedge Gx)$

6. Determine por diagramas semánticos la validez de las inferencias que a continuación se indican.

6.1. $(\forall x)(Bx \rightarrow Ax), (\forall x)(Ax \rightarrow \sim Cx), (\exists x)(Cx \wedge Bx) \models (\forall x)\sim(Bx \rightarrow Cx)$
6.2. $(\forall x)(Cx \rightarrow Ax), (\forall x)(Rx \rightarrow \sim Lx), (\forall x)(Ox \rightarrow Tx) \models (\exists x)\sim Ax \rightarrow (\exists x)\sim Cx$
6.3. $(\forall x)(Px \leftrightarrow Qx) \models (\forall x)Px \leftrightarrow (\forall x)Qx$
6.4. $(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \models (\exists x)Px \rightarrow (\exists x)Qx$

6.5. $(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx \models (\forall x)(Fx \vee Gx)$

6.6. $(\forall x)Ax \wedge (\forall x)Bx \wedge (\forall x)(Ax \rightarrow Cx) \;/\therefore\; (\exists x)Ax \wedge (\exists x)(Bx \wedge Cx)$

6.7. $(\forall x)(Fx \;.\!\rightarrow\!.\; Gx \wedge Hx), (\exists x)(Fx \wedge Kx) \;/\therefore\; (\exists x)(Kx \wedge Hx)$

6.8. $(\forall x)(Px \;.\!\wedge\!.\; \sim Qx \rightarrow Rx), (\exists x)(Px \rightarrow Rx) \;/\therefore\; (\exists x)(\sim Qx \leftrightarrow Rx)$

6.9. $(\forall x)(Px \vee Qx \;.\!\rightarrow\!.\; \sim Rx) \wedge (\exists x)(Qx \wedge Lx) \;/\therefore\; (\exists x)[Sx \wedge \sim(Px \vee Qx)]$

6.10. $(\forall x)(Px \rightarrow Qx \;.\!\wedge\!.\; Rx \rightarrow Sx), (\forall x)[Qx \vee Rx \;.\!\rightarrow\!.\; (Tx \;.\!\rightarrow\!.\; Ux \rightarrow Tx) \rightarrow (Px \wedge Rx)] \models (\forall y)(Py \leftrightarrow Qy)$

6.11. $(\exists x)\, Ax \rightarrow (\forall x)(Mx \rightarrow Ox), (\exists x)Rx \rightarrow (\exists x)Mx \models (\exists x)(Ax \wedge Rx) \rightarrow (\exists x)Ox$

6.12. $(\forall x)(Ax \;.\!\rightarrow\!.\; Bx \vee Cx), (\forall x)Dx \rightarrow (\exists x)(Bx \wedge Cx), (\forall x)(\sim Dx \rightarrow Ax) \models (\forall x)\sim Cx \rightarrow (\exists x)Bx$

VI

SIMBOLIZACIÓN

Veremos ahora cómo traducir expresiones del español a LC. Si ya era difícil encontrar en LP equivalentes plenamente satisfactorios al español, en LC este fenómeno se acentúa y, al mismo tiempo, disminuye. Se acentúa por cuanto ahora se considera la estructura interna de las proposiciones y no sólo la conexión externa entre ellas. No siempre se percibe a primera vista la forma lógica de una proposición, por lo que podemos alejarnos mucho de su estructura aparente al efectuar la simbolización. Por otro lado, disminuye en tanto y cuanto la riqueza de la comunicación en los lenguajes naturales se basa fundamentalmente en la estructura interna de las proposiciones, y LC permite acercarnos a la misma. Si cabe la expresión, cada vez es menos mecánica la traducción.

1. LA ESTRUCTURA FORMAL

Al iniciar la discusión de la simbolización en LP hicimos hincapié en la necesidad de reconocer, antes que nada, la presencia de proposiciones, luego en determinar la forma en que estaban unidas.

Para traducir una expresión a LC necesitamos no sólo reconocer la presencia de proposiciones conectadas veritativo-funcionalmente, sino también reconocer un universo del lenguaje y, dentro de éste, subconjuntos que se relacionan. Ya no nos preocuparemos por el reconocimiento de la estructura formal proposicional, la damos por sabida. Nuestro esfuerzo se dirigirá a resaltar las propiedades que en un universo supuesto delimitan conjuntos, y las relaciones que entre éstos colaboran a establecer la conexión lógica entre premisas y conclusión.

LC aportaba a nuestro nivel de análisis la referencia a individuos dentro de un universo dado y recogía las relaciones que podían darse entre conjuntos de tales individuos. En una lengua natural, como el español, también se presentan estas características. Usualmente, todo discurso supone que se hable de "cosas" u "objetos", éstos pueden variar mucho de un contexto a otro; pero a nosotros no nos interesa su realidad material, por lo que nos basta con que puedan reunirse en un gran conjunto de individuos. De dos formas podemos referirnos a los individuos: individualmente, con nombres propios (nosotros no nos ocuparemos de otras formas llamadas 'descripciones definidas' o 'términos funcionales'), o en grupos, a través de los términos generales o comunes. Tenemos, pues, que reconocer en primer lugar a los nombres propios y luego a los comunes (los que se refieren a conjuntos de individuos).

Reconocer un nombre propio no ofrece dificultades, pero reconocer uno común sí. La dificultad de los comunes, que como imaginará el lector corresponderán a nuestras letras predicativas, estriba en las diferentes maneras en que pueden agruparse. Por ejemplo, cuando decimos: 'los tigres de Bengala', ¿deseamos referirnos a los dos conjuntos: el de los tigres y el de los bengalís, o sólo al conjunto de animales que llamamos 'tigres de Bengala'?

Los lectores que conocen la teoría de conjuntos pensarán que el problema es irrelevante, pues si ocurre que A, B y C son conjuntos, para los que vale: $(A \cap B)=C$, da lo mismo hablar del conjunto $A \cap B$, que del conjunto C. Y tienen razón. El problema no es teórico sino práctico. Al traducir, es conveniente recoger sólo lo pertinente para el razonamiento que se desea analizar. Si nos cargamos de demasiados conjuntos, se complica el análisis, pues para cada uno utilizaremos una letra predicativa y, además, cada uno tendrá relaciones con algunos de los otros que debemos recoger. Por otro lado, una fuente de incertidumbre al elegir el número de conjuntos involucrados en una simbolización proviene de la tendencia a referirnos con palabras distintas a las mismas cosas. Lo que es una virtud estilística se convierte en una fuente de dolores de cabeza para quien desea extraer la forma lógica de un texto.

> Ejemplo (1): 'Todos los ciudadanos peruanos son mayores de 18 años. Algunos ciudadanos peruanos son mujeres. Por lo tanto, algunas personas mayores de 18 años son mujeres.

La conclusión se sigue válidamente de las premisas.

Posibles candidatos para conjuntos son:

El de los ciudadanos
El de los peruanos
El de los mayores de 18 años
El de las mujeres
El de las personas

Como es bastante obvio que estamos tratando con personas, podemos tomarlo como universo del discurso y obviarlo. Al hacer esto, asumimos que todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto de las personas.

¿Es necesario distinguir entre los ciudadanos y los peruanos? En el texto no lo parece, pues en ningún lugar se hace alusión a alguno de ellos por separado. Las dos características, el ser peruano y el ser ciudadano, intervienen en el razonamiento como una sola: delimitando el conjunto de los ciudadanos peruanos. Así, reducimos el número de propiedades básicas que actúan en el razonamiento y nos quedamos con tres conjuntos:

F: El de los ciudadanos peruanos
G: El de los mayores de 18 años
H: El de las mujeres

Y asociando a cada uno una letra predicativa, en orden alfabético, nuestro razonamiento se empieza a traducir a:

Todos los F son G. Algunos F son H. Por lo tanto, algunos G son H.

Ejemplo (2): Todo limeño es ciudadano peruano. Algunos peruanos son residentes de América del Norte. Por lo tanto, algunos limeños son residentes de América del Norte.

El razonamiento es incorrecto, y en él explícitamente intervienen por separado el conjunto de los peruanos y el de los ciudadanos. Asociemos cada conjunto con una letra:

L: Limeños
C: Ciudadanos
P: Peruanos
R: Residentes de América del Norte

siguiendo la costumbre más cómoda de usar una mayúscula que sea inicial de las palabras que designan a los conjuntos. Al hacer esto, implícitamente estamos ampliando LC más de lo teóricamente permitido, pero como este uso es muy cómodo, lo aceptaremos. No siempre es posible hacerlo, pues dos palabras distintas con la misma inicial que, además, sean verdaderas de cosas distintas, pueden aparecer en un mismo texto. Nuestro razonamiento queda:

Todo L es C y P. Algunos P son R. Por lo tanto, algunos L son R.

Al escribir el párrafo anterior, ya hemos empezado a poner de manifiesto las relaciones entre los conjuntos o propiedades. Al escribir 'C y P' configuramos la vinculación entre los C y los P de un modo distinto que, por ejemplo, con 'C o P'. Para terminar de poner de manifiesto la estructura formal cuantificacional, necesitamos reconocer todas las interrelaciones entre las letras predicativas. Pero esto no es tan fácil, pues aparecen de formas muy diversas. En la siguiente sección estudiaremos, si no las más simples, sí las más comunes.

2. LAS PROPOSICIONES CATEGÓRICAS TÍPICAS

El análisis de razonamientos en los que intervienen cuantificadores acompaña al nacimiento de la lógica. Es Aristóteles, justamente, el primero en elaborar una teoría en torno a un tipo de proposiciones con cuantificadores, de modo tan "perfecto", que fue un paradigma considerado insuperable, en lo fundamental, por muchos (Kant, entre otros) durante más de 2,000 años[9]. Veremos que en un sentido tenían razón. La lógica aristotélica se organizó, después de Aristóteles, en un corpus muy completo; su traducción del griego al latín acercó su análisis de las proposiciones a nuestras lenguas y, al mismo tiempo, probablemente lo transformó. Es discutible y nosotros sólo lo mencionamos, si interpretamos las mismas proposiciones y del mismo modo como lo hacía Aristóteles (la discusión puede verse en Lukasiewicz[10]). Supondremos que sí lo hacemos como él y atribuiremos las discrepancias a fallas de la lógica aristotélica y no al hecho de enfrentar problemas distintos.

---

[9] Véase Bochenski [18] o a Blanché [16].

[10] Véase Lukasiewicz [70].

De entre los distintos tipos de proposiciones traducibles a LC nos interesaremos por las llamadas **proposiciones categóricas de forma típica**, que son cuatro: la universal afirmativa, la universal negativa, la particular afirmativa y la particular negativa. Los medievales, con mucho sentido práctico, las rebautizaron como A, E, I, O, y en torno a ellas se desarrolló la teoría del silogismo, tomada como sinónimo de lógica en algunos círculos poco informados. A partir de ahora usaremos esas cuatro vocales mayúsculas:

A: Universal afirmativa
E: Universal negativa
I: Particular afirmativa
O: Particular negativa

El origen de las letras parece encontrarse en las letras de las palabras latinas 'AffIrmo' y 'nEgO'.

Una proposición tipo A en forma típica es:

Todos los ministerios son entes burocráticos.

que nosotros entenderemos como:

Toda cosa, si es un ministerio, es un ente burocrático.

En términos conjuntistas, todo elemento del primer conjunto pertenece al segundo. Esquematizando: Todo M es B . O para evitar confusiones en el empleo de la letra 'B' como clase y como metavariable:

Todo F es G.

Y simbolizamos: $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$

Hemos mencionado 'en forma típica', pues en español, entre otras formas, puede aparecer como:

Los ministerios son entes burocráticos.
Si es un ministerio, es un ente burocrático.
Sólo los entes burocráticos son ministerios.
Cada vez que algo es un ministerio se convierte en un ente burocrático.
Los ministerios sólo son entes burocráticos.

Y seguramente al lector se le deben ocurrir muchas otras que equivalen a las anteriores.

Las proposiciones tipo E tienen como forma típica:

Ningún reglamento es generador de desarrollo.

que entendemos como:

Toda cosa, si es un reglamento, no es generadora de desarrollo.

Es decir, ningún elemento del conjunto de las cosas que son reglamentos pertenece al conjunto de las cosas que generan desarrollo. Esquemáticamente:

Ningún F es G.

simbolizado como: $(\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)$

En español, encontramos las formas:

Los reglamentos son no generadores de desarrollo.
Nada es a la vez un reglamento y generador de desarrollo.

Una proposición tipo I en forma típica es:

Algunos políticos son estatistas.

Su lectura es: 'Por lo menos una cosa es político y estatista'. Es importante recalcar que no decimos: la mayoría, la minoría, el 10% o unos dos políticos son estatistas. Entenderemos 'algún' o 'algunos' como 'hay por lo menos uno'. Si son todos, muchos o pocos los políticos estatistas, no está precisado en la proposición, en ese sentido es ambigua. Sólo aclara que el conjunto de los políticos no es vacío. El esquema que le corresponde es:

Algún F es G.

y la simbolización: $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$

En español, pueden aparecer las formas:

Hay políticos estatistas.
Existen políticos estatistas.
Un ejemplo de proposición tipo O en forma típica es:

Algunos políticos no son fanáticos.

es decir, hay por lo menos una cosa que es un político y no es fanática. Nuevamente debemos recalcar que sólo entendemos 'hay por lo menos una'. Formalmente:

Algún F no es G.

y simbolizada: $(\exists x)(Fx \wedge \sim Gx)$

Son usuales las oraciones sinónimas:

Hay políticos no fanáticos.
Existen políticos que no son fanáticos.

De muchas maneras pueden interpretarse estas proposiciones, como estableciendo relaciones entre clases, o como estableciendo relaciones entre propiedades. Trabajaremos bajo el supuesto general, y no siempre cierto[10], que toda propiedad define un conjunto: el conjunto de los objetos de los que la propiedad se predica con verdad. Por tanto, cualquiera de las dos interpretaciones nos acomodará y las usaremos alternativamente, confiados en que cualquiera de ellas es traducible a la otra.

Tradicionalmente, en la llamada 'lógica aristotélica', se acostumbraba considerar proposiciones donde aparecen nombres propios como categóricas atípicas, por el expediente de tratarlos como una propiedad. Por ejemplo, en 'Sócrates es analfabeto' se interpreta que menciona algo así como la socratidad. La socratidad reemplaza a Sócrates; el objeto referido por el nombre propio se toma como un conjunto unitario y la proposición se lee: 'Todo Sócrates es analfabeto'. Nuestro lenguaje posee constantes de individuo, por lo que no necesitamos postular este tipo de propiedades. Así, sin transformar los nombres propios en predicados, 'Sócrates es mortal' se simboliza por 'Fa', con 'F' por 'mortal' y 'a' por 'Sócrates'.

---

[11] Que no es cierta esta propiedad lo muestra la construcción de la paradoja de Russell. Véase en la bibliografía [49].

3. OTRAS PROPOSICIONES

Muchos otros tipos de proposiciones pueden ser tratados por el nivel de lógica que estamos explorando. Ya hemos citado y visto algunas, las típicas. También las atípicas, aquéllas que no tienen la forma 'Todos ... son ---', 'Ningún(a) ... es ---', 'Algún(a,o,as,os) ... es(son) ---' o 'Algún(a,o,as,os) ... no es(son) ---', son simbolizables como las típicas con los esquemas vistos.

Dentro de las atípicas hay que considerar aquéllas como 'Todos los hombres son implumes', donde para simbolizar podemos elegir 'Hx' para 'x es un hombre' y 'Gx' para 'x tiene plumas' (nótese que tomamos 'implume' como 'no plumífero'). Obtenemos como simbolización: '$(\forall x)(Hx \rightarrow {\sim}Gx)$'. Si comparamos la simbolización con la que se obtendría de una proposición tipo E, nos damos cuenta de que podemos expresarla como 'ningún hombre es plumífero'. Estos "juegos" entre proposiciones, atípicas en una forma y típicas en otra, son muy conocidos desde tiempos muy antiguos; nosotros examinaremos algunos en el capítulo siguiente. Otras proposiciones interesantes presentan sujetos o predicados compuestos. Por ejemplo:

> Los tradicionalistas y los fanáticos están seguros de sus creencias.

> Que no debe entenderse como:

> Toda persona si es tradicionalista y fanática es una persona que está segura de sus creencias.

Pues no queremos decir que sólo el que reúne las condiciones de ser tradicionalista y fanático pierde la capacidad de dudar, sino que tanto los tradicionalistas como los fanáticos poseen la seguridad en cuestión. La paráfrasis es:

> Toda persona si es tradicionalista o fanática es una persona que está segura de sus ideas.

y su simbolización: $(\forall x)(Fx \vee Gx \;.\!\rightarrow\!.\; Hx)$. Muy distinta de la que hubiésemos obtenido de la primera lectura: $(\forall x)(Fx \wedge Gx \;.\!\rightarrow\!.\; Hx)$.

El anterior es un caso ejemplar para apreciar la diferencia entre el 'y' del lenguaje natural y la conjunción de LC. Éste es un buen ejemplo de lo que dijimos al iniciar el capítulo: la forma lógica se diferencia de la gramatical. Mientras que 'Los filósofos son parcos e introvertidos', con las convenciones:

x es filósofo: Fx
x es parco: Gx
x es introvertido: Hx

origina: $(\forall x)(Fx \;.\!\rightarrow\!.\; Gx \wedge Hx)$.

Ejercicios

Simbolice cuantificacionalmente:

1. Todas las secretarias son pelirrojas.
2. Ningún álcali es ácido.
3. Algunos profesores son políglotas.
4. Algunos vertebrados no son mamíferos.
5. Todos los problemas no son insolubles.
6. Todas las mujeres no son sinceras.
7. Las colegialas son románticas.
8. Las estrellas brillan.
9. Los timbales y las campanas son instrumentos de percusión.
10. Los físicos y los astrónomos son científicos.
11. Ningún payaso que sea equilibrista es tímido.
12. Ninguna mujer indiscreta puede ser secretaria.
13. Ningún filósofo es fanático del fútbol o del box.
14. No existen envidiosos que no sean infelices.
15. No es el caso de que algunos caballos no sean equinos y mamíferos.
16. Ningún insecto es vertebrado. Por lo tanto, algunos no insectos no son invertebrados.
17. Todas las aleaciones de cobre son metales, pero ningún metal es no conductor. Luego, todas las aleaciones de cobre son conductores.
18. Todos los arequipeños son peruanos y Melgar es arequipeño. Luego, Melgar es peruano.
19. Ninguna muchacha es bella si se maquilla.
20. Algunos alumnos aprobarán el curso si estudian.

Solución:

1-4 Los cuatro primeros ejercicios no ofrecen mayor problema:

1. Sx: x es secretaria
Px: x es pelirroja $(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$

2. Ax: x es álcali
Bx: x es ácido $(\forall x)(Ax \rightarrow {\sim}Bx)$

3. Px: x es profesor
Qx: x es políglota $(\exists x)(Px \wedge Qx)$

4. Vx: x es vertebrado
Mx: x es mamífero $(\exists x)(Vx \wedge {\sim}Mx)$

Notemos que, al simbolizar, cada predicado diferente debe llevar una letra diferente y que es cómodo utilizar la primera letra de la palabra en que aparece.

5-6. Las proposiciones cuantificacionales universales que niegan el verbo copulativo (el que une los dos predicados de la proposición) se simbolizan con una negación delante del cuantificador. Así:

'Todos los S no son P' se traduce por '$\sim(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$'

Entonces, la simbolización será:

5. Px: x es un problema
Sx: x es soluble $\sim(\forall x)(Px \rightarrow {\sim}Sx)$

6. Mx: x es una mujer
Sx: x es sincera $\sim(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$

7-8. En español, las oraciones que empiezan con un artículo se refieren a totalidades, por lo que corresponde simbolizarlas con un universal:

'Los S son P' se simboliza por '$(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$'

7. Cx: x es una colegiala
Rx: x es romántica $(\forall x)(Cx \rightarrow Rx)$

8. Ex: x es una estrella
Bx: x brilla $(\forall x)(Ex \rightarrow Bx)$

9-13. La 'y' del lenguaje natural en el antecedente de una proposición de tipo universal se simboliza con una disyunción. Se utilizará una conjunción cuando el antecedente conste de dos predicados que deban cumplirse conjuntamente.

9. Tx: x es un timbal
Cx: x es una campana
Ix: x es un instrumento de percusión $(\forall x)(Tx \vee Cx\ .{\rightarrow}.\ Ix)$

10. Fx: x es físico
Ax: x es astrónomo
Cx: x es científico $(\forall x)(Fx \vee Ax\ .{\rightarrow}.\ Cx)$

11. Px: x es un payaso
Qx: x es equilibrista
Tx: x es tímido $(\forall x)(Px \wedge Qx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}Tx)$

12. Mx: x es una mujer
Dx: x es discreta
Sx: x puede ser secretaria $(\forall x)(Mx \wedge {\sim}Dx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}Sx)$

13. Fx: x es filósofo
Sx: x es fanático del fútbol
Bx: x es fanático del box $(\forall x)[Fx \rightarrow {\sim}(Sx \vee Bx)]$

14-18. En estas simbolizaciones aparecen proposiciones en las que la jerarquía principal no la tiene un cuantificador:

14. Ex: x es envidioso
Fx: x es feliz ${\sim}(\exists x)(Ex \wedge {\sim}{\sim}Fx)$

15. Cx: x es caballo
Ex: x es equino
Mx: x es mamífero ${\sim}(\exists x)[Cx \wedge {\sim}(Ex \wedge Mx)]$

16. Ix: x es insecto
Vx: x es vertebrado $(\forall x)(Ix \rightarrow {\sim}Vx) \rightarrow (\exists x)({\sim}Ix \wedge {\sim}{\sim}Vx)$

17. Ax: x es una aleación de cobre
    Mx: x es un metal
    Cx: x es conductor
    $(\forall x)(Ax \rightarrow Mx) \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow {\sim\sim}Cx) \;.{\rightarrow}.\; (\forall x)(Ax \rightarrow Cx)$

18. Ax: x es arequipeño
    a : Melgar
    Px: x es peruano $(\forall x)(Ax \rightarrow Px) \wedge Aa \;.{\rightarrow}.\; Pa$

19-20. En las siguientes proposiciones, el condicional que aparece al final afecta sólo al segundo término de las mismas:

19. Mx: x es muchacha
    Bx: x es bella
    Fx: x se maquilla $(\forall x)[Mx \rightarrow (Fx \rightarrow {\sim}Bx)]$

20. Ax: x es alumno
    Cx: x aprobará el curso
    Ex: x estudia $(\exists x)[Ax \wedge (Ex \rightarrow Cx)]$

4. CONSECUENCIA SEMÁNTICA E INFERENCIAS

Anteriormente hemos definido la consecuencia semántica en la lógica proposicional. Ahora deseamos extender la noción para englobar a la lógica cuantificacional. Perderemos algunas características de la lógica veritativo-funcional, pero ganaremos amplitud en cuanto a la aplicación de los conceptos. Al tratar la semántica de LC notamos que las fórmulas abiertas eran un tanto renuentes al calificativo de verdad (falsedad), para no entrar en las complejidades que supone su semántica, quedamos en referirnos a ellas desde un punto de vista semántico, considerándolas cerradas por un cuantificador universal. Así, sólo trabajaremos con fórmulas cerradas y nuestra definición queda:

> Decimos que un conjunto de fórmulas cerradas tiene como **consecuencia semántica** a la fórmula cerrada A si y sólo si no hay una interpretación de LC que haga verdaderas a todas las fórmulas de Γ y falsa a A.

Seguramente ha percibido el lector que lo único que hemos perdido es la noción EPM, pues en LP, una fórmula como '$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$' da origen a dos EPM, aquél en que es verdadera y aquél en que es falsa, pero dentro de cada uno de ellos caben distintas interpretaciones. Por ejemplo, esa fórmula es verdadera, dado un universo U, tanto si ocurre que el conjunto F es un subconjunto propio de G, cuanto si F=G o si F=ϕ. Cada caso merece atención especial y genera sus propias consecuencias. Probablemente el lector vea esto con mayor claridad cuando analicemos el llamado 'problema del contenido existencial' en las inferencias de la lógica aristotélica. Lo que nos interesa poner de relieve es que en LC el análisis de EPM es muy pobre y no cubre nuestras necesidades. Además de valores de verdad, necesitamos universos con una estructura de subconjuntos en los que se interpretan nuestras fórmulas.

La definición que tenemos de consecuencia semántica mantiene vigente el hecho:

$$P_1, P_2, \ldots, P_3 \models C \text{ si y sólo si} \models (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_3) \rightarrow C$$

Lo que nos permite usar los DS para averiguar si se da o no la relación de consecuencia semántica entre fórmulas de LC.

Con la definición de consecuencia semántica recuperamos de modo automático las que dependen de ella (referidas a fórmulas cerradas):

> **Implicación:** Una fórmula A implica a otra B en LC si B es la consecuencia semántica de A.

> **Equivalencia:** A equivale a B(A $\approx$ B) si y sólo si A y B se implican mutuamente. En especial, A $\approx$ B si y sólo si $\models$ A $\leftrightarrow$ B.

Sus propiedades se mantienen. Una ley de sustitución por equivalentes vale en LC. Pero requiere contemplar una gama de distinciones que no aparecen en la ley de sustitución de LP. No formularemos las modificaciones que permitan su empleo en todas las posibles fórmulas de LC, pues sólo la emplearemos en sus propiedades relativas a los conectores veritativos y no a los cuantificadores. No nos detendremos en ella.

> **Inferencia válida:** Un conjunto, no vacío, Γ de proposiciones tiene como conclusión válida a la proposición C si y sólo si $\Gamma \models$ C.

En el capítulo siguiente, trataremos algunas inferencias, llamadas 'clásicas', por provenir del mismo Aristóteles; antes de terminar deseamos que el lector vuelva a considerar las siguientes equivalencias, ya presentadas anteriormente:

1. (∀ß)ψß ≈ ~(∃ß)~ψß
2. (∃ß)ψß ≈ ~(∀ß)~ψß
3. ~(∀ß)ψß ≈ (∃ß)~ψß
4. ~(∃ß)ψß ≈ (∀ß)~ψß

Las dos primeras pueden llamarse con toda propiedad 'leyes de definición de los cuantificadores' y nos muestran su íntima relación; las dos últimas, 'leyes de intercambio de negación y cuantificador'. En realidad, en nuestro sistema, las cuatro constituyen distintas formas de la "misma" ley . Probaremos la primera por DS:

F[(∀ß)ψß ↔ ~(∃ß)~ψß] (1)

∧

(5) V[(∀ß)ψß]	F[(∀ß)ψß] (7)
(2) F[~(∃ß)~ψß]	V[~(∃ß)~ψß] (6)
(3) V[(∃ß)~ψß]	F[(∃ß)~ψß] (8)
(4) V[~ψa]	F[ψa]
F[ψa]	F[~ψa] (9)
V[ψa]	V[ψa]
===	===

El cierre de todas las ramas del DS prueba la primera ley. Las otras pueden probarse por DS o con un adecuado empleo de la primera ley y la doble negación, lo mostramos probando la última: ~(∃ß)ψß ≈ (∀ß)~ψß. En la prueba emplearemos algunas propiedades de la equivalencia, como la conmutatividad y la sustitución por equivalentes.

1.	(∀ß)~ψß	Hipótesis de partida
2.	~(∃ß)~~ψß	Ley 1 en 1
3.	~(∃ß)ψß	Doble negación y sustitución en 1

Por la transitividad de la equivalencia se prueba que los pasos (1) y (3) son equivalentes.

Hemos formulado las leyes anteriores en el metalenguaje para poder emplearlas con toda libertad en distintos tipos de fórmulas, a modo de ejemplos o instancias tenemos:

$(\forall x)Fx \approx \sim(\exists x)\sim Fx$ (definición del universal)
$(\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx) \approx \sim(\exists x)\sim(Fx \rightarrow \sim Gx)$ (definición del universal)
$(\exists x)\sim(Fx \wedge Gx) \approx \sim(\forall x)(Fx \wedge Gx)$ (ley de intercambio), etc.

En el siguiente capítulo examinaremos las inferencias más "populares" de la lógica aristotélica.

Ejercicios

1. Demostre la validez de las siguientes fórmulas.

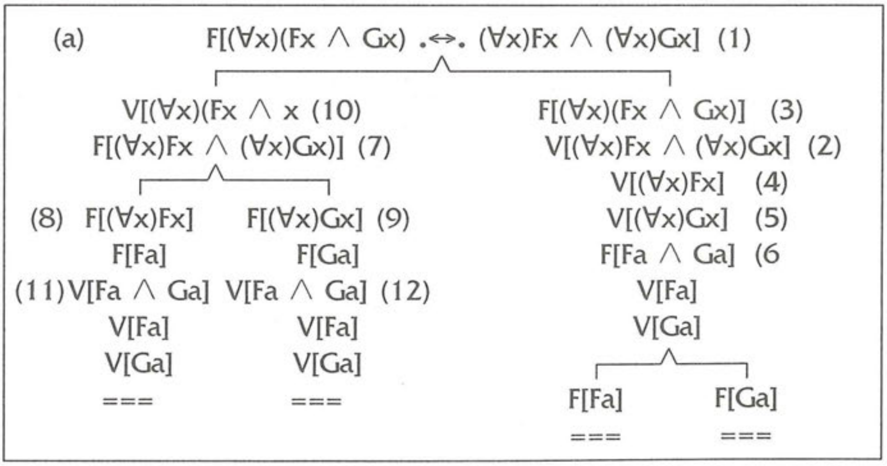
a. $(\forall x)(Fx \wedge Gx) \;.\!\leftrightarrow\!.\; (\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx$
b. $(\exists x)(Fx \vee Gx) \;.\!\leftrightarrow\!.\; (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$
c. $(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx \;.\!\rightarrow\!.\; (\forall x)(Fx \vee Gx)$
d. $(\exists x)(Fx \wedge Gx) \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Fx \wedge (\exists x)Gx$

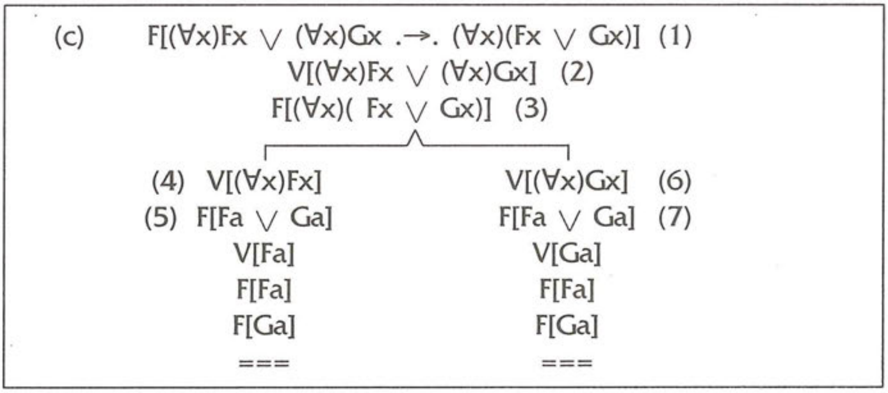
2. Determine la validez de las siguientes inferencias.

a. Todos los atletas son musculosos. Carlos no es musculoso. Por lo tanto, Carlos no es un atleta.
b. Todos los profesores son instruidos. Todos los profesores instruidos son sabios. Luego, todos los profesores son sabios instruidos.
c. Algunos médicos son impacientes, puesto que todos los médicos son pacientes y ninguna persona impaciente es médico.

Solución

1. Resolveremos (a) y (c)





2. a. La simbolización de las premisas y la conclusión es:

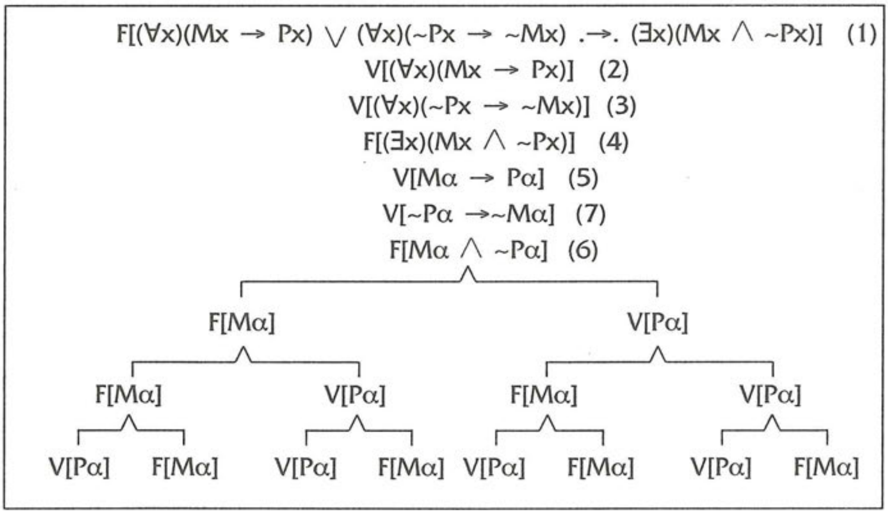
Ax: x es atleta
Mx: x es musculoso
c: Carlos

$(\forall x)(Ax \rightarrow Mx),\ {\sim}Mc \models {\sim}Ac$
Inferencia válida.

b. En este caso se encontrará:

$(\forall x)(Px \rightarrow Ix),\ (\forall x)(Px \land Ix\ .\!\rightarrow\!.\ Sx)\ (\forall x)(Px\ .\!\rightarrow\!.\ Sx \lor Ix)$
Inferencia válida.

c. El diagrama correspondiente es:



La inferencia es inválida. Antes de desarrollar el paso (7) se hubiese podido concluir que la inferencia era inválida, pues dicho paso no añadía nada nuevo. ¿Qué propiedad era necesario recordar?

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Simbolice cuantificacionalmente señalando los predicados.

1.1. Todos los estudiantes aman los libros.
1.2. Algunas fórmulas son de segundo grado.
1.3. Algunos conjuntos no son vacíos.
1.4. Algunos desconocidos son héroes.
1.5. Todos los muebles están descoloridos.
1.6. Algunos abrigos no son impermeables.
1.7. Todos los vertebrados no son aves.
1.8. Ningún anfibio es batracio.
1.9. Todos los líquidos no son aceites.
1.10. Ninguna tela es de araña.
1.11. Los amigos son leales.
1.12. Las substancias no son tóxicas.
1.13. Todos los flacos y los gordos son cómicos.
1.14. Ningún peruano y brasileño es europeo.
1.15. Todos los triángulos y pentágonos son polígonos.
1.16. Las actrices y los cantantes de ópera son histéricos.
1.17. No existen incultos que sean músicos o químicos.
1.18. No es el caso de que ningún infiel sea desafortunado o deshonesto.
1.19. Todos los trabajadores son dependientes; luego, algunos trabajadores no son independientes.
1.20. Algunos desobedientes son militares ya que algunos militares no son obedientes.
1.21. Algunos catalizadores son vitaminas si todos los catalizadores ocasionan una reacción química.
1.22. Todo lo que le gusta a Roberto Carlos, o es inmoral o es ilegal o engorda.
1.23. No hay historia de piratas que tenga un final feliz.
1.24. Las mujeres son amables.
1.25. Todos los deportistas no son campeones.
1.26. Es posible que ningún estudiante de la promoción obtenga el título profesional.

2. Simbolice cuantificacionalmente:

   2.1. Las pirámides y los sarcófagos son egipcios o asirios.
   2.2. La columna o su base es dórica o jónica.
   2.3. Algunos aviones no son bimotores y trimotores.
   2.4. Las frutas y las verduras son ricas y nutritivas.
   2.5. Ningún cristiano o mahometano es ateo. Marx era ateo. Luego, Marx no era mahometano.
   2.6. Todo miembro de la municipalidad vive dentro de los límites de la ciudad de Lima. El señor Riva Agüero no vive dentro de los límites de la ciudad de Lima. Luego, el señor Riva Agüero no es un miembro de la municipalidad.
   2.7. No hay atletas que sean lentos. En consecuencia, ningún hombre lento es maratonista puesto que todos los maratonistas son atletas.
   2.8. Todos los músicos son románticos si son poetas.
   2.9. Algunas personas no morirán de cáncer si no fuman.
   2.10. Algunos alumnos tendrán crisis de ansiedad si llevan más de diez cursos.

3. Analice la validez de las siguiente inferencias.

   3.1. Ninguna paralela es perpendicular; luego, ninguna perpendicular es paralela.
   3.2. Algunos hombres no son alfabetos; por lo tanto, algunos analfabetos son hombres.
   3.3. Si todos los amigos son leales, entonces ningún desleal es un amigo.
   3.4. Algunas personas felices no son analfabetas; luego, algunas personas analfabetas no son felices.
   3.5. Todas las personas afortunadas son felices; por tanto, todas las personas infelices son desafortunadas.
   3.6. Ningún participante en el concurso está preocupado; luego, algunas personas despreocupadas participan en el concurso.
   3.7. Algunas personas interesadas no son amigas, si todos los amigos son desinteresados.
   3.8. Ninguna figura geométrica es irregular; luego, algunas figuras regulares son geométricas.
   3.9. Todas las personas desordenadas son impuntuales; luego, algunas personas puntuales son ordenadas.

3.10. Algunas lecturas comprensibles no son coherentes; luego, algunas lecturas incoherentes no son incomprensibles.

4. Demuestre la validez de las siguientes inferencias.

4.1. Todos los turistas son derrochadores e incomprensibles. Además, algunos turistas son belgas. Por lo tanto, algunos belgas son incomprensibles.
4.2. Los físicos y los químicos son científicos. Algunos alquimistas no son científicos. Por lo tanto, si existe una sustancia que es la piedra filosofal, entonces algunos alquimistas no son químicos.
4.3. Todos los hombres son mortales y Sócrates es hombre. Luego, Sócrates es mortal.
4.4. Existen osos. Todos los osos son plantígrados. Luego, algunos osos son plantígrados.
4.5. Todos los murciélagos son quirópteros. Ningún pingüino vuela. Todos los quirópteros vuelan. Por tanto, todos los murciélagos vuelan a la vez que ningún pingüino es un quiróptero.

5 Pruebe que son equivalentes:

5.1. Los que no aman a las mujeres no aman la vida, porque los que aman la vida aman a las mujeres.
5.2. No todos aman a las mujeres.

6. Demuestre que la proposición 'Algunas circunstancias de la vida diaria no son hechos lógicos' es consecuencia semántica de las siguientes premisas: 'Algunos asuntos incomprensibles para el corazón de una mujer son circunstancias de la vida diaria. Ningún asunto incomprensible para el corazón de una mujer es examinado por los filósofos. Los hechos lógicos son problemas que tienen un razonamiento riguroso. Además, todos los problemas que tienen un razonamiento riguroso son examinados por los filósofos.'

VII

INFERENCIAS CLÁSICAS

1. EL CUADRO DE OPOSICIÓN

Se llama 'cuadro o cuadrado de oposición' a una disposición espacial de ciertas proposiciones que guardan entre sí determinadas relaciones. Se utiliza esta disposición cuando las relaciones entre las proposiciones pueden presentarse, razonablemente bien, como las relaciones que existen entre los cuatro vértices de un cuadrado, formando lo que llamamos 'un cuadro de inferencias'. Si consideramos que tienen primacía las relaciones de "oposición", tenemos el cuadro de oposición. El más famoso, probablemente, es el cuadro de Boecio, que en realidad no es de él sino que se le atribuyó en la Edad Media. En este cuadro se pretende resumir las interrelaciones entre las proposiciones A, E, I y O de la lógica aristotélica. Desafortunadamente, se presentan problemas muy serios al analizarlo.

Veremos primero lo que llamamos **cuadro de oposición contemporáneo** para familiarizarnos con la terminología, de modo tal que al estudiar el cuadro de Boecio podamos fijarnos en sus problemas sin vernos perturbados por su terminología.

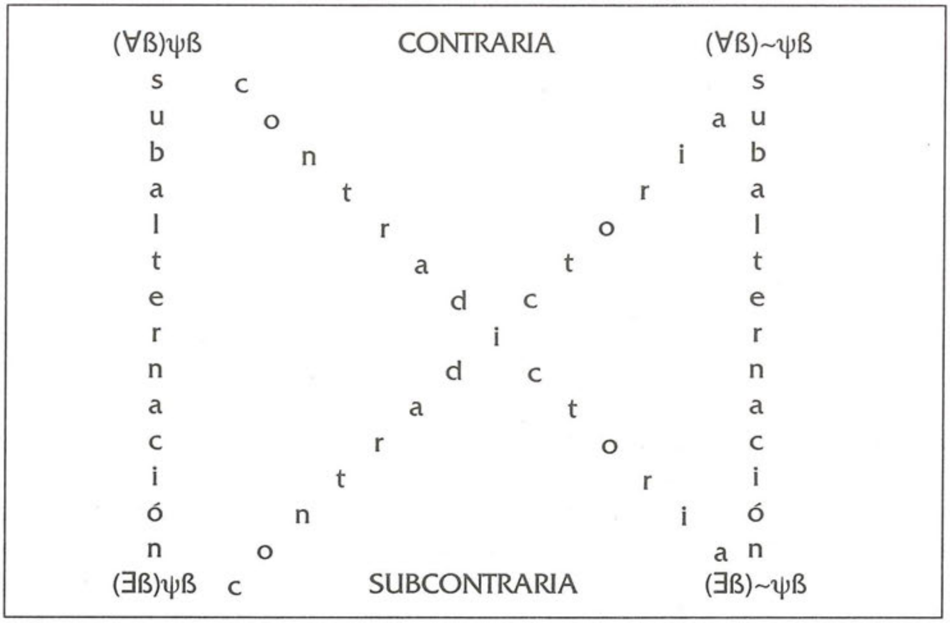
Las proposiciones más simples cuantificadas en nuestro sistema son del tipo:

un cuantificador + un predicado + la variable cuantificada

Si además consideramos la posibilidad del atributo negado, generamos cuatro proposiciones cuyos esquemas son:

'$(\forall ß)\psi ß$', '$(\forall ß){\sim}\psi ß$', '$(\forall ß)\psi ß$' y '$(\forall ß){\sim}\psi ß$'

con las que se forma el siguiente cuadro:



En este cuadro, se busca resumir las inferencias válidas que pueden establecerse entre las proposiciones más simples con cuantificadores universales y existenciales combinados con una propiedad afirmada o negada, en un universo no vacío. Veamos cada una de estas inferencias.

Dos proposiciones se llaman **contrarias**, o están en la relación de **contrariedad**, si y sólo si la verdad de una obliga a la falsedad de la otra. Nada se dice respecto de lo que se sigue de la falsedad de una de ellas. Esto podemos resumirlo diciendo que cada una de ellas implica la negación de la otra:

$(\forall ß)\psi ß \models {\sim}(\forall ß){\sim}\psi ß$ y $(\forall ß){\sim}\psi ß \models {\sim}(\forall ß)\psi ß$

Es decir, tenemos las leyes lógicas:

$\models (\forall ß)\psi ß \rightarrow {\sim}(\forall ß){\sim}\psi ß$ y $\models (\forall ß){\sim}\psi ß \rightarrow {\sim}(ß)\psi ß$

Tenemos así que, entre dos proposiciones de este tipo, como son: '$(\forall x)\ Fx$' y '$(\forall x)\ {\sim}Fx$', existe la relación de contrariedad. Probaremos que las implicaciones son verdaderas en todo universo con cualquier interpretación mostrando que su falsedad conduce a modelos contradictorios.

$$F\ [(\forall\beta)\psi\beta \rightarrow \sim(\forall\beta)\sim\psi\beta]$$
$$V[(\forall\beta)\psi\beta]\quad (2)$$
$$F[\sim(\forall\beta)\sim\psi\beta]\quad (1)$$
$$V[(\forall\beta)\sim\psi\beta]\quad (3)$$
$$V[\psi\alpha]$$
$$V[\sim\psi\alpha]\quad (4)$$
$$F[\psi\alpha]$$
$$===$$

Lo que prueba la validez de: $\models (\forall\beta)\psi\beta \rightarrow \sim(\forall\beta)\sim\psi\beta$, de modo semejante se procede con la otra ley. El lector apreciará que tras esta ley se esconde la inferencia: $(\forall\beta)\psi\beta \models \sim(\forall\beta)\sim\psi\beta$. Algo similar ocurre con las otras relaciones por lo que se habla de **cuadro de inferencias** y no de cuadro de leyes.

La subalternación: Dos proposiciones se encuentran en la relación de subalternación si y sólo si una proposición universal (llamada 'subalternante') implica a la proposición existencial correspondiente (llamada 'subalterna'). En símbolos:

$\models (\forall\beta)\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\psi\beta$ y $\models (\forall\beta)\sim\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\sim\psi\beta$

Comprobemos la primera:

$$F[(\forall\beta)\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\psi\beta]\quad (1)$$
$$V[(\forall\beta)\psi\beta]\quad (2)$$
$$F[(\exists\beta)\psi\beta]\quad (3)$$
$$V[\psi\alpha]$$
$$F[\psi\alpha]$$
$$===$$

Lo que prueba la validez de la fórmula. El lector debe notar que también puede enunciarse la subalternación como: de la falsedad de la subalterna se sigue la falsedad de la subalternante. Esto se obtiene por aplicación de contraposición:

$A \rightarrow B \approx \sim B \rightarrow \sim A$

al enunciado anterior. La segunda prueba de la fórmula se sugiere como ejercicio.

La subcontrariedad. Dos proposiciones categóricas se llaman 'subcontrarias' si y sólo si de la negación de una se sigue la otra. Lo que en nuestro cuadro ocurre entre las existenciales, en símbolos:

$$\models \sim(\exists\beta)\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\sim\psi\beta \quad \text{y} \quad \models \sim(\exists\beta)\sim\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\psi\beta$$

Por equivalencias elementales se tiene:

$$\models (\exists\beta)\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\sim\psi\beta \quad \text{y} \quad \models (\exists\beta)\sim\psi\beta \rightarrow (\exists\beta)\psi\beta$$

Es decir, dos proposiciones son subcontrarias si (1) una por lo menos es siempre verdadera, o (2) su disyunción es siempre verdadera, o (3) no son falsas a la vez.

Utilicemos DS con la segunda:

$$\begin{array}{c}
F[\sim(\exists\ \beta)\ \sim\psi\ \beta \rightarrow (\exists\ \beta)\ \psi\ \beta]\ \ (1) \\
V[\sim(\exists\ \beta)\ \sim\psi\ \beta]\ \ (2) \\
F[(\exists\ \beta)\ \psi\ \beta]\ \ (3) \\
F[(\exists\ \beta)\ \sim\psi\ \beta]\ \ (4) \\
F[\psi\ \alpha] \\
F[\sim\psi\ \alpha]\ \ (5) \\
V[\psi\ \alpha] \\
===
\end{array}$$

Para variar, dejamos la prueba de la otra fórmula al cuidado del lector.

La última, y la más importante, es la **relación de contradictoriedad**: Dos proposiciones (de cualquier tipo) se llaman 'contradictorias' si y sólo si una es la negación de la otra. En nuestro caso, dadas las proposiciones que consideramos, tenemos:

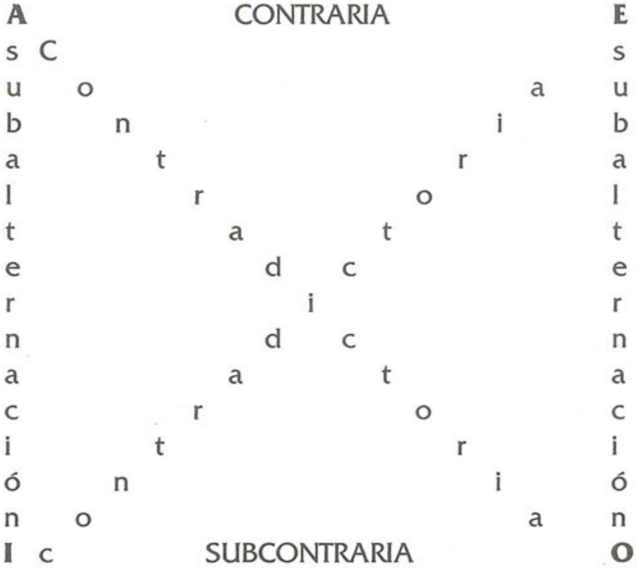
$$\models (\forall\beta)\psi\beta \leftrightarrow \sim(\exists\beta)\sim\psi\beta \quad \text{y} \quad \models (\forall\beta)\sim\psi\beta \leftrightarrow \sim(\exists\beta)\psi\beta$$

$$\models \sim(\forall\beta)\psi\beta \leftrightarrow (\exists\beta)\sim\psi\beta \quad \text{y} \quad \models \sim(\forall\beta)\sim\psi\beta \leftrightarrow (\exists\beta)\psi\beta$$

que sabemos ciertas, pues son las que rigen la relación entre la '~' y los cuantificadores.

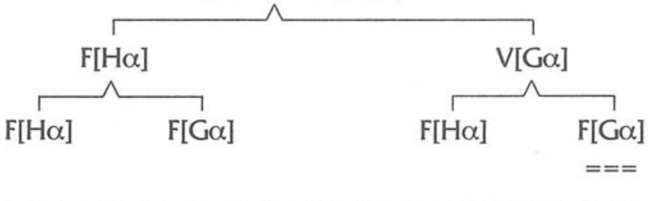
2. EL CUADRO DE OPOSICIÓN CLÁSICO

Históricamente el cuadro de oposición más famoso fue el de Boecio que, se suponía, describía las relaciones entre las cuatro proposiciones categóricas de la lógica aristotélica: A, E, I y O.



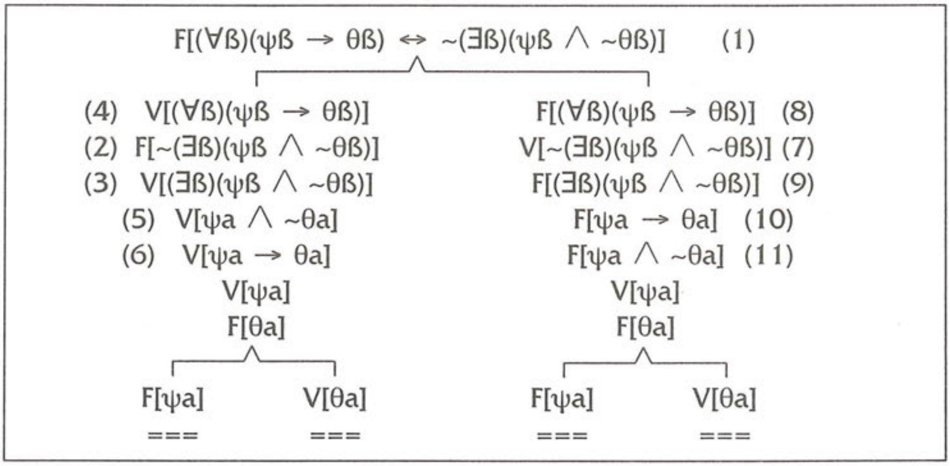
Parece, a primera vista, que todas estas inferencias son válidas. Por ejemplo, si pensamos en una subalternación ($\models A \rightarrow I$) del tipo: 'Si todos los hombres son mortales, entonces algunos hombres son mortales'. La conclusión parece seguir de la premisa. Sin embargo, al utilizar los DS encontramos:

$$F[(\forall x)(Hx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x)(Hx \wedge Gx)] \quad (1)$$
$$V[(\forall x)(Hx \rightarrow Gx)] \quad (2)$$
$$F[(\exists x)(Hx \wedge Gx)] \quad (3)$$
$$V[H\alpha \rightarrow G\alpha] \quad (4)$$
$$F[H\alpha \wedge G\alpha] \quad (5)$$



Es decir, existen modelos en los que la fórmula puede ser falsa. Luego, la subalternación entre proposiciones del tipo A→I no es una inferencia válida (queda al lector probar la no validez de las inferencias de contrariedad, subcontrariedad y subalternación). Nosotros probaremos la validez de las relaciones de contradictoriedad:

$$\models A \leftrightarrow \sim O \quad \text{y} \quad \models E \leftrightarrow \sim I$$



Del mismo modo se prueba: E ↔ ~I.

Una notación cómoda es la siguiente: 'MaP' es una proposición de tipo A con término sujeto 'M' y término predicado 'P', es decir: 'Todo M es P'. Con la misma idea, 'SoP' es 'Algún S no es P', y de modo semejante para proposiciones E: MeP e I: MiP.

Ejercicios

1. Halle la contraria de la subalternante de la subcontraria de la contradictoria de 'todos los sonetos son poemas'.

2. Determine la validez de las siguientes inferencias.

A. Es falso que ningún virus sea un protozoario si algunos virus son protozoarios.
B. Algunos metales son maleables, puesto que algunos metales no son maleables.

3. Si la conclusión de una inferencia válida es la contradictoria de la subcontraria de la subalterna de la contraria de 'Todos los S son P', y una de las premisas es tal que la contradictoria de la subalterna de su contraria es 'ningún P es S', determine si la otra premisa es 'Algunos S no son P'.

Solución:

1.

Contraria	SeP	(Ningún soneto es un poema)
Subalternante	a	
Subcontraria	i	
Contradictoria	o	
de:	SaP	(Todos los sonetos son poemas)

2. Sólo a es una inferencia válida.

3.

Premisa 1			**Conclusión**	
Contradictoria	PeS	(Ningún P es S)	Contradictoria	e
Subalterna	i		Subcontraria	i
Contraria	a		Subalterna	o
de:	PeS		Contraria	e
			de:	SaP

Es fácil ver que la conclusión resulta ser SeP, y la primera premisa es PeS. Luego, tenemos la inferencia:

PeS
SoP /∴ SeP

Construimos el siguiente diagrama:

$F[(\forall x)(Px \rightarrow \sim Sx) \wedge (\exists x)(Sx \wedge \sim Px) .\rightarrow. (\forall x)(Sx \rightarrow \sim Px)]$

$V[(\forall x)(Px \rightarrow \sim Sx)]$ (3)

$V[(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)]$ (1)

$F[(\forall x)(Sx \rightarrow \sim Px)]$ (2)

$V[Sa \wedge \sim Pa]$ (4)

$F[Sb \rightarrow \sim Pb]$ (5)

$V[Pa \rightarrow \sim Sa]$ (6)

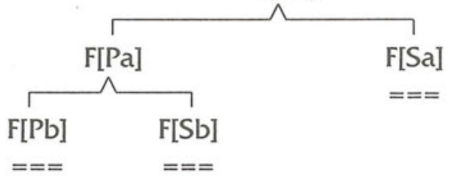
$V[Pb \rightarrow \sim Sb]$ (7)

$V[Sa]$

$F[Pa]$

$V[Sb]$

$V[Pb]$



Luego, se trata de una inferencia válida.

3. EL CONTENIDO EXISTENCIAL

Si revisamos algunos tratados clásicos, vemos que se aceptaban como válidas todas las inferencias del cuadro de Boecio. Es más, el ejemplo de subalternación que presentamos (Todos los H son M; luego, algún H es M) nos pareció válido a primera vista. Todo esto hace que valga la pena examinar más de cerca la invalidez encontrada, para tratar de hallar alguna explicación.

Al hacer el DS de A → I quedaron tres ramas abiertas:

1. $F[H\alpha]$
2. $F[H\alpha]$ y $F[G\alpha]$
3. $F[H\alpha]$ y $V[G\alpha]$

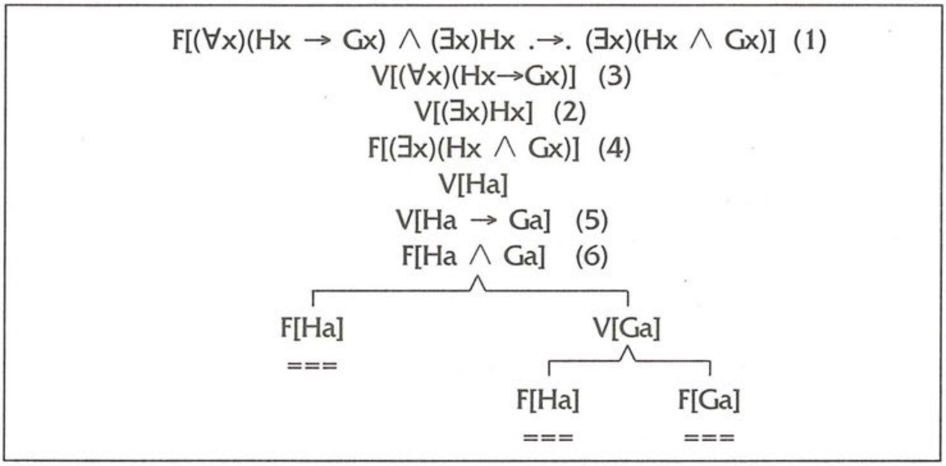
Las tres tienen en común el que se afirma la falsedad de '$H\alpha$'. Afirmar la falsedad de '$H\alpha$' es lo mismo que decir que el atributo H no es poseído por el objeto al que alude 'α' y, como α es un individuo cualquiera, el atributo o predicado H no es verdadero de ningún elemento del universo. En resumen, decir que 'Hα' es falsa (F[Hα]) equivale a decir que '($\exists$x)Hx' es falsa. Nuestro DS señala que A → I es falsa en el caso en que es falsa '($\exists$x)Hx'. En nuestro ejemplo de hombres y mortales, como no pensamos en la posibilidad de que no haya hombres, no nos percatamos de la falla formal en el razonamiento. Generalmente nos referimos a predicados que son verdaderos de algunos elementos del universo, pero este supuesto existencial no se refleja en nuestra simbolización:

$$(\forall x)(Hx \rightarrow Gx) \text{ o } \nvDash (\exists x)(Hx \wedge Gx)$$

Si deseamos trabajar con el supuesto del **contenido existencial**, debemos añadirlo explícitamente:

$$(\forall x)(Hx \rightarrow Gx),\ (\exists x)\ Hx \vDash (\exists x)(Hx \wedge Gx)$$

Veamos que ahora la subalternación es válida:



Si el lector encontró que la subcontrariedad, la contrariedad y E → I eran inválidas, revisando sus DS debe encontrar cuál es la hipótesis existencial que hay que añadir como premisa, en cada caso, para obtener inferencias válidas.

Debe aclararse que cuando se habla de premisa existencial se entiende una del tipo:

$(\exists ß)\psi ß$ o $(\exists ß)\sim\psi ß$, donde ψ es una letra de predicado.

Y no cualquier proposición que empiece con un cuantificador existencial. Si aceptácemos que se añada una premisa existencial cualquiera, la solución sería trivial, pues:

$$(\exists x)(Fx \wedge \sim Fx)$$

añadido como premisa adicional a una inferencia inválida siempre la validará, porque se trata de una premisa siempre falsa.

Ejercicios

1. Encuentre, si la hay, una hipótesis existencial que valide las siguientes inferencias.

a. Ningún insecto es invertebrado. Por eso, algunos no insectos no son vertebrados.
b. Todos los protestantes son personas felices. Por lo tanto, existen no protestantes irreligiosos, ya que ningún religioso es infeliz.
c. Ningún obrero desocupado es millonario, por lo tanto, algunos millonarios no son obreros ocupados.

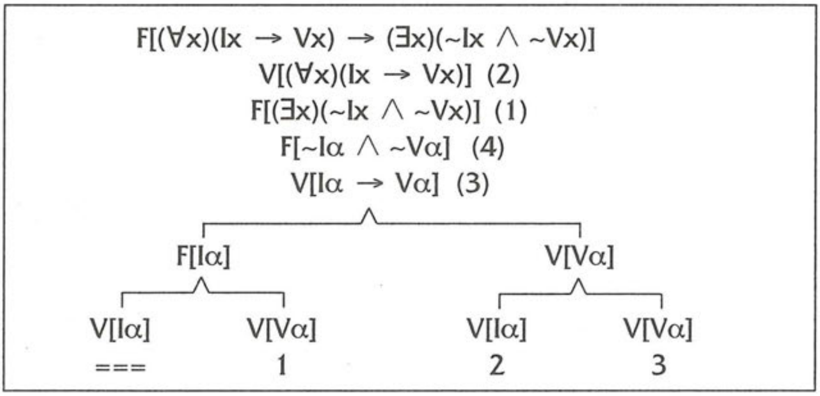
Solución:

1. a. Tomando: Ix: x es insecto
Vx: x es vertebrado

La simbolización es:

$$(\forall x)(Ix \rightarrow \sim\sim Vx) \ /\therefore\ (\exists x)(\sim Ix \wedge \sim Vx)$$

El diagrama queda:



Análisis de ramas

1. $V[V\alpha]$, $F[I\alpha]$
2. $V[V\alpha]$, $V[I\alpha]$
3. $V[V\alpha]$, ----

Luego, la premisa buscada es: $(\exists x)\sim Vx$.

b. En este caso, la premisa es: $(\exists x)\sim Fx$.

c. No hay hipótesis existencial (tal como la hemos definido nosotros) que la valide.

4. SILOGISMOS

Aplicaremos ahora los DS al análisis de los silogismos. Los silogismos fueron estudiados primero por Aristóteles. Se caracterizan por constar de dos premisas y una conclusión, todas las cuales son proposiciones categóricas (A, E, I, O). Estas tres proposiciones (dos premisas + una conclusión) contienen sólo tres predicados en total, de los cuales uno aparece en ambas premisas y se llama **término medio** (lo denotaremos con M); los otros dos aparecen cada uno en una de las premisas y en la conclusión. La estructura es:

Premisa mayor	M - P
Premisa menor	S - M
Conclusión	S - P

El término que aparece como predicado gramatical de la conclusión se llama **término mayor** (P), el que es el sujeto de la conclusión es el **término menor** (S). Se dice que un silogismo está ordenado en forma típica si se presenta primero la premisa mayor, luego la menor y, por último, la conclusión. La posición del término medio en las premisas puede variar dando lugar a las llamadas **cuatro figuras**:

I	II	III	IV
M - P	P - M	M - P	P - M
S - M	S - M	M - S	M - S

Como en cada premisa o conclusión puede aparecer una proposición A, E, I u O tenemos, para cada figura:

4	X	Posibles premisas mayores
4	X	Posibles premisas menores
4		Posibles conclusiones
64		Posibles silogismos distintos en una figura

Lo que arroja 256 silogismos distintos en total. En realidad, 256 modos distintos de silogismos, ya que consideramos que lo que los distingue es el tipo de proposición categórica que aparece y no la oración concreta. Se estila hablar de modos y a denominar cada uno de éstos con el tipo de proposiciones que intervienen en él. Un silogismo queda perfectamente identificado si conocemos su modo y figura. Por ejemplo, un silogismo AEE-IV (Premisa mayor A, premisa menor E, conclusión E de cuarta figura) es:

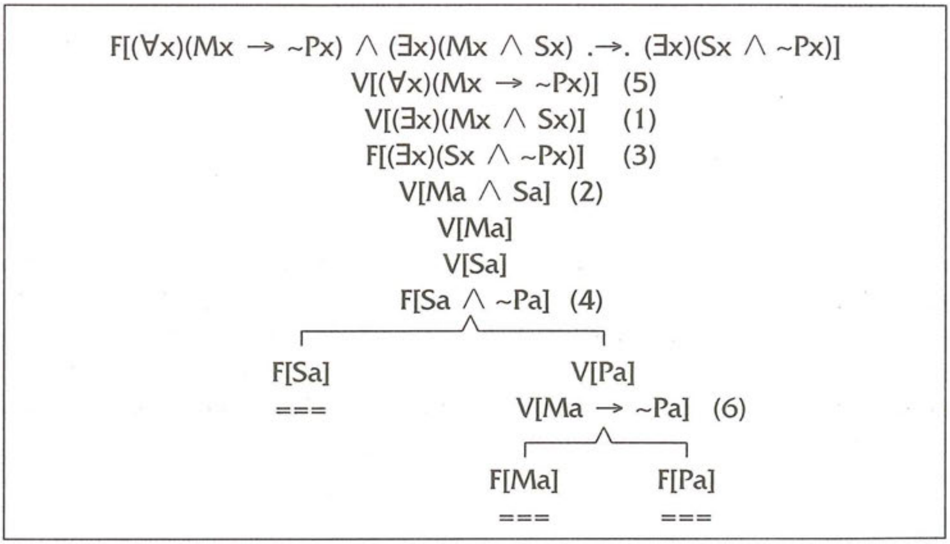
Todos los perros son mamíferos.
Ningún mamífero es reptil.
Luego, ningún reptil es perro.

De los posibles 256 modos, algunos son válidos y otros no. De entre los inválidos podemos distinguir dos grupos: los que se tornan válidos al aumentarles **una única premisa existencial** y los que no se validan con dicho procedimiento. Debe notarse que se trata de premisas existenciales simples (las que se indicaron en el párrafo anterior) únicas, pues trivialmente puede tornarse válido todo silogismo con las premisas '$(\exists x)Hx \wedge \sim(\exists x)Hx$', más aun, cualquier inferencia. Pasemos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo (1): Silogismo EIO-III.

$(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Px)$
$(\exists x)(Mx \wedge Sx)\ /\therefore\ (\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$

Veamos su validez:

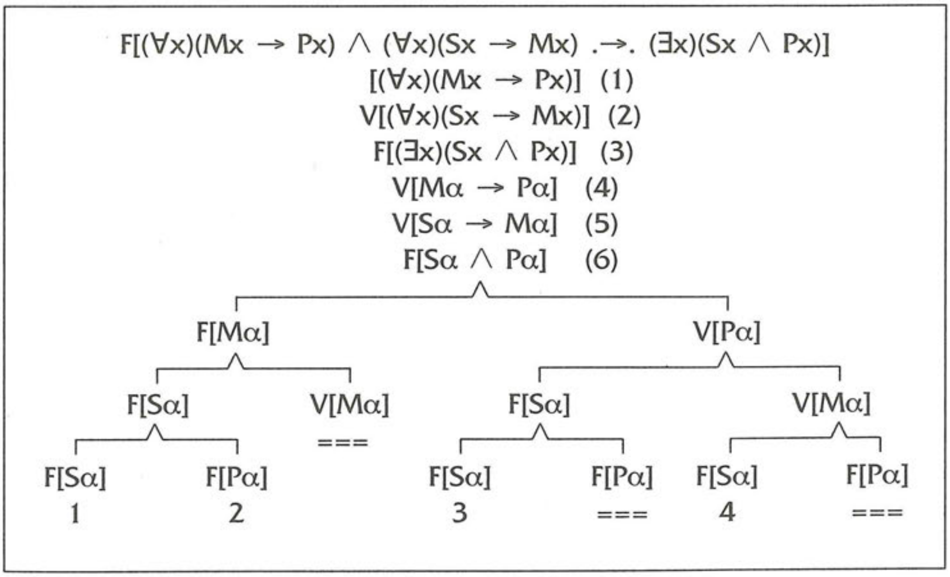


Con lo que tenemos un ejemplo de silogismo válido.

Ejemplo (2): Silogismo AAI-I.

(∀x)(Mx → Px)
(∀x)(Sx → Mx) /∴ (∃x)(Sx ∧ Px)

Analicémoslo:



El silogismo es inválido. Veamos qué ocurre en las ramas que no se cierran:

1. F[Mα], F[Sα], ----
2. F[Mα], F[Sα], F[Pα]
3. ----, F[Sα], V[Pα]
4. V[Mα], F[Sα], V[Pα]

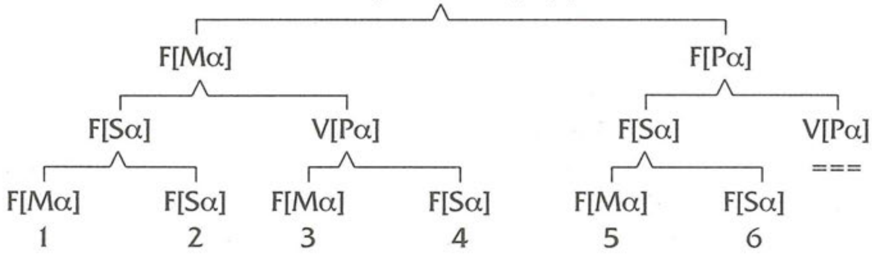
Inmediatamente se observa que F[Sα] es común a todos los casos en que el silogismo es inválido y F[Sα] quiere decir 'F[(∃x)Sx]'. Por tanto, añadamos su contradictoria V[(∃x)Sx] como premisa y evitaremos la posibilidad de que sean verdaderas las premisas y falsa la conclusión, al interpretarlo en un universo donde el predicado 'S' sea falso de todos los individuos. Compruebe el lector que:

(∃x)Sx
(∀x)(Mx → Px)
(∀x)(Sx → Mx) /∴ (∃x)(Sx ∧ Px) es una inferencia válida.

Ejemplo (3): Veamos un silogismo EEO-III inválido, inmune a la terapia existencial.

(∀x)(Mx → ~Px)
(∀x)(Mx → ~Sx) /∴ (∃x)(Sx ∧ ~Px)

F[(∀x)(Mx → ~Px) ∧ (∀x)(Mx → ~Sx) .→. (∃x)(Sx ∧ ~Px)]
V[(∀x)(Mx → ~Px)] (1)
V[(∀x)(Mx → ~Sx)] (2)
F[(∃x)(Sx ∧ ~Px)] (3)
V[Mα → ~Pα] (4)
V[Mα → ~Sα] (6)
F[Sα ∧ ~Pα] (5)



Las ramas que permanecen abiertas son:

1. F[Mα], F[Sα], ----
2. F[Mα], F[Sα], ----
3. F[Mα], ----, V[Pα]
4. F[Mα], F[Sα], V[Pα]
5. F[Mα], F[Sα], F[Pα]
6. ----, F[Sα], F[Pα]

Como puede verse, los casos en que la fórmula que corresponde a nuestro silogismo es falsa no tienen ninguna característica común. Luego, no es cuestión de descartar esa posibilidad añadiendo una hipótesis existencial simple. El silogismo no tiene cura existencial.

En esta primera parte del libro, nos hemos ocupado de los aspectos semánticos de la lógica elemental, es decir, de los temas vinculados con la verdad y la falsedad. En la segunda parte, nos abocaremos a los estudios de los aspectos sintácticos de la misma región de la lógica (proposiciones y cuantificación uniforme). Cómo puede uno aproximarse a temas lógicos sin vincularse a la verdad y la falsedad es lo que desarrollaremos en los siguientes capítulos. Aprovecharemos, en especial la parte cuantificacional, para mostrar otras inferencias (no clásicas) que pueden realizarse en la lógica cuantificacional.

Ejercicios

1. Determine el modo y la figura de los siguientes silogismos.

a. Algunas muchachas no creen en el amor, puesto que todas las colegialas creen en el amor y algunas muchachas son colegialas.
b. Todas las estrellas son astros. Ningún cometa es una estrella. Luego, algunos astros no son cometas.

2. ¿Es válido un silogismo EAO-III? Si no es válido, ¿es posible usar el contenido existencial?

3. ¿Qué se puede concluir válidamente, dadas las siguientes premisas de un silogismo?

Ninguna persona necesaria será olvidada.

Algunos profesores son personas necesarias.
Luego,...

Solución:

1. a. Luego de simbolizar se tiene:

$(\forall x)(Cx \rightarrow Ax)$
$(\exists x)(Mx \wedge Cx)\ /\therefore\ (\exists x)(Mx \wedge \sim Ax)$

Por lo tanto, el silogismo es del modo AIO y de la primera figura, lo que abreviadamente escribimos: AIO-I.

b. Es posible que respondiera AEO-I, sin embargo debe tener presente el lector que antes de clasificar el silogismo debe ordenarlo, escribiéndolo de acuerdo con la siguiente estructura:

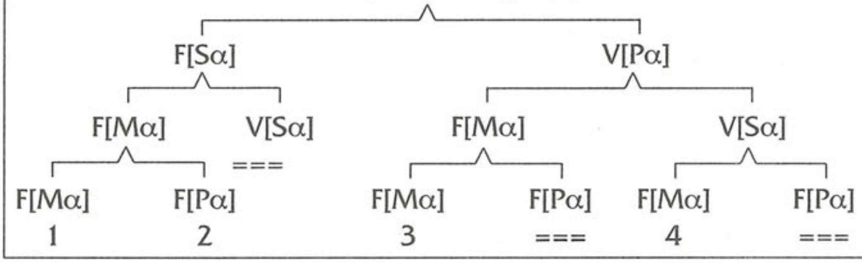
- Premisa mayor
- Premisa menor $/\therefore$ conclusión

La respuesta correcta es EAO-IV.

2. Silogismo:

$(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Px)$
$(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)\ /\therefore\ (\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$

$$F[(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Px) \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow Sx)\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Sx \wedge \sim Px)]$$
$$V[(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Px)]\quad (1)$$
$$V[(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)]\quad (2)$$
$$F[(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)]\quad (3)$$
$$V[M\alpha \rightarrow \sim P\alpha]\quad (6)$$
$$V[M\alpha \rightarrow S\alpha]\quad (5)$$
$$F[S\alpha \wedge \sim P\alpha]\quad (4)$$



Por lo tanto, el silogismo es inválido. Veamos si es posible aplicar el contenido existencial.

Ramas que no se cierran:

1. F[Mα], F[Sα], ----
2. F[Mα], F[Sα], F[Pα]
3. F[Mα], ----, V[Pα]
4. F[Mα], V[Sα], V[Pα]

Como F[Mα] se repite, entonces la premisa existencial buscada es $(\exists x)Mx$. Verifique que:

$(\exists x)Mx$
$(\forall x)(Mx \rightarrow \sim Px)$
$(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$ /∴ $(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$ es una inferencia válida.

3. La conclusión en un silogismo típico tiene como sujeto el término que aparece en la premisa menor, y como predicado el término que aparece en la premisa mayor.

N e O
P i N
P ? O

La conclusión puede ser PaO, PeO, PiO o PoO. Después de aplicar DS, la consecuencia válida es 'Algunos profesores no serán olvidados'.

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el cuadro de la oposición:

   1.1. Hallar la contraria de la subalternante de la subcontraria de 'algunos síntomas han sido analizados'.
   1.2. Halle la subalternante de la subcontraria de la subalterna de la contradictoria de la subcontraria de 'Algunos métodos no son exactos'.

2. Si la contraria de la subalternante de la contradictoria de la subalternante de la subcontraria de una proposición determinada es 'todos los alumnos podrán realizar este ejercicio', entonces la proposición en cuestión es de la forma:

   A) A B) E C) I D) O

3. Determine la validez de las fórmulas y esquemas de fórmulas que a continuación se indican.

   3.1 $(\forall ß) \sim\psi\, ß \rightarrow (\exists ß)\sim\psi ß$
   3.2 $\sim(\exists ß)\psi ß \rightarrow (\exists ß)\sim\psi ß$
   3.3 $\sim(SaP) \leftrightarrow (SoP)$
   3.4 $(SeP) \leftrightarrow \sim(SiP)$
   3.5 $\sim(SeP) \leftrightarrow (SiP)$

4. Demuestre que las siguientes inferencias no son válidas. Luego, encuentre la premisa existencial que haga válida la nueva inferencia.

   4.1. Ningún esclavo es feliz; por tanto, algunos infelices son esclavos.
   4.2. Todas las tizas son rocas calcáreas, de modo que algunas rocas calcáreas son tizas.
   4.3. Ninguna consonante nasal es fricativa, entonces algunas consonantes fricativas no son nasales.
   4.4. Todas las esdrújulas llevan tilde; luego, algunas palabras que no llevan tilde no son esdrújulas.
   4.5. Ninguna persona disciplinada es desordenada, entonces algunos desordenados no son disciplinados.
   4.6. Ningún hombre es inmortal; luego, algunos hombres no son inmortales.
   4.7. Todos los dinosaurios son fósiles y algunos reptiles eran dinosaurios; por tanto, algunos fósiles eran reptiles.
   4.8. Todas las personas felices sonríen; por lo tanto, existen personas que no sonríen y no son deportistas, ya que ningún deportista es infeliz.
   4.9. Todos los que mueren por sobredosis son adictos. Los adictos comenzaron a drogarse por una invitación de sus conocidos. De manera que algunos que comenzaron a drogarse por invitación de sus conocidos morirán por sobredosis.
   4.10. Los que ignoran los hechos pueden equivocarse. Nadie que sea verdaderamente objetivo en su enfoque puede equivocar-

se. Por consiguiente, ninguno que ignore los hechos es verdaderamente objetivo en su enfoque.

5. Encuentre la premisa existencial que haga válida cada una de las siguientes inferencias.

5.1. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \;/\therefore\; (\exists x)(Hx \wedge Mx)$
5.2. $(\forall x)(Sx \rightarrow Mx) \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow Px) \;/\therefore\; (\exists x)(Sx \wedge Px)$
5.3. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)(Gx \rightarrow {\sim}Hx) \;/\therefore\; (\exists x)(Fx \wedge {\sim}Hx)$
5.4. $(\forall x)(Mx \rightarrow Ix) \wedge (\forall x)(Ix \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)(Gx \rightarrow Ux) /\therefore (\exists x)({\sim}Ux \wedge {\sim}Mx)$

6. Determine el modo y la figura de los siguientes silogismos.

6.1. Todos los que votan en las elecciones son peruanos. Ninguno que vota en las elecciones es menor de edad. Luego, algunos menores de edad son peruanos.
6.2. Ninguna de las personas que estuvo en el baile fue al aeropuerto. Ninguna persona que fue al aeropuerto vio el programa político. Por tanto, ninguna persona que vio el programa político estuvo en el baile.
6.3. Todos los enfermos de la sala E del hospital son ancianos. Ningún paciente anémico es un enfermo de la sala E del hospital. Luego, algunos pacientes anémicos son ancianos.
6.4. Todos los alumnos leen alemán. Ninguno que lee alemán es analfabeto. Por tanto, algunos alumnos no son analfabetos.

7. Si:

$$\begin{array}{l} AB \\ \underline{CD} \\ EF \end{array}$$

es un silogismo típico, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si A=C, entonces B=F y D=E.
II. Si B=C, entonces A=F o D=E.
III. Si B=D, entonces A=E o C=F.
IV. Si B=F, entonces el silogismo es de la primera o tercera figura.

8. ¿Cuáles de los siguientes silogismos son válidos?

   a) EAE-I
   b) IAI-IV
   c) IAI-I
   d) OAO-III
   e) AIA-II
   f) IEO-II
   g) AEI-III
   h) AIO-I
   i) AIO-III
   j) EOO-II
   k) IOO-IV
   l) AEE-IV

9. ¿En cuántas figuras es válido el modo EAO?

   A) 0
   B) 1
   C) 2
   D) 3
   E) 4

10. Si un silogismo categórico típico válido tiene como conclusión 'Ningún camaleón es un cocodrilo' y una de sus premisas es 'Todos los camaleones son saurios', entonces la otra premisa es:

    A) Todos los saurios son cocodrilos.
    B) Todos los cocodrilos son saurios.
    C) Ningún saurio es un camaleón.
    D) Ningún camaleón es un saurio.
    E) Ningún cocodrilo es un saurio.

11. ¿Qué se puede concluir, dadas las siguientes premisas de un silogismo típico?

    11.1. Todos los cirujanos son médicos. Todos los cardiólogos son cirujanos. Luego,...
    11.2. Todos los mamíferos son vertebrados. Algunos mamíferos son acuáticos. Luego,...
    11.3. Todos los sonetos son poesías. Algunos artículos periodísticos no son poesías. Luego,...
    11.4. Todos los planetas son cuerpos celestes. Ningún planeta tiene luz propia. Luego,...

12. Para obtener una inferencia válida al analizar la validez del silogismo típico de la segunda figura del modo EAO, por diagramas semánticos, se tiene que introducir como hipótesis existencial:

I) $\sim(\forall x)Sx$
II) $(\exists x)Mx$
III) $(\exists x)\sim Sx$
IV) $(\exists x)Sx$

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo IV
D) I o III
E) I o IV

6. EJERCICIOS DE REPASO

1. Los predicados que corresponden a las variables libres en la fórmula:

$(\forall z)(Ay \rightarrow Mx) \wedge \sim[(\forall x)Ux \rightarrow Ox] .\!\rightarrow\!. (\exists x)Ry \vee Ya$

son:

A) MORY
B) MOR
C) MY
D) MRY
E) AMOR

2. Una alumna del curso quería saber el teléfono de su Jefe de Prácticas. El coordinador le contestó que si las formas A, E, I y O son los números 1, 2, 3 y 4, respectivamente, y una forma no típica equivale a cero, entonces el número del teléfono es:

$(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$, $(\exists x)(Sx \wedge Px)$, $(\forall x)(Sx \rightarrow \sim Px)$, $(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$, $(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$, $(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$, $(\exists x)(Sx \vee Px)$

Entonces ella llamó al:

A) 432-44-10
B) 432-04-11
C) 423-00-10
D) 432-04-12
E) Ella buscó en la guía.

3. Considerando que las siguientes afirmaciones se refieren a universos vacíos, entonces la expresión **falsa** es:

A) Los unicornios son azules.
B) Las sirenas encantan con sus canciones.

C) Todos los marcianos manejan platillos si tienen brevete.
D) Existe Santa Claus.
E) Los castores construyen diques.

4. Dado el universo U={a,b,c}, traduzca la siguiente expresión utilizando cuantificadores.

$\sim Fa \vee \sim Fb \vee \sim Fc \mathrel{.\!\rightarrow\!.} Ga \wedge Gb \wedge Gc$

A) $\sim(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)Gx$
B) $(\forall x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$
C) $(\exists x)\sim Fx \rightarrow (\forall x)Gx$
D) $(\forall x)\sim Fx \rightarrow (\exists x)Gx$
E) $(\forall x)(\sim Fx \rightarrow Gx)$

5. Dado el operador '←' definido como $(A \leftarrow B) =_{def} (B \rightarrow A)$, ¿Cuántas de las siguientes fórmulas son válidas en todo universo?

I) $(\exists x)Fx \leftarrow \sim(\forall x)Fx$
II) $\sim(\forall x)\sim Fx \leftarrow (\exists x)Fx$
III) $\sim\sim(\exists x)\sim\sim Fx \leftarrow \sim(\forall x)\sim Fx$
IV) $Fa \leftarrow (\forall y)Fy$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. La afirmación equivalente a "No todos son infelices" es:

A) Todos son felices.
B) Ninguno es feliz.
C) Algunos son felices.
D) Algunos son infelices.
E) Algunos no son felices.

7. Usted, que es abogado, en el juicio por el asesinato del profesor de Lógica ha probado que 'Ninguno de los estudiantes tiene antecedentes penales' (premisa 1). Para demostrar que 'Ninguno de los estudiantes es uno de los asesinos' (conclusión), deberá probar ante el tribunal, además, que:

A) Todos los que tienen antecedentes penales son asesinos.
B) Algunos que tienen antecedentes penales son asesinos.

C) Todos los estudiantes no tienen antecedentes penales.
D) Todos los asesinos tienen antecedentes penales.
E) Ninguna de las anteriores.

8. Si después de eliminar los cuantificadores, el diagrama semántico de una inferencia presenta los siguientes pasos:

$$\begin{array}{c} V[Fb \land Gb] \\ F[Hc \rightarrow \sim Gc] \\ V[Fb \land \sim Hb] \\ V[Fc \land \sim Hc] \end{array}$$

Entonces la inferencia cuantificacional es:

A) $(\exists x)[\sim(Hx \rightarrow \sim Gx) \land (Fx \land \sim Hx)] \models (\exists x)(Fx \land Gx \land Fx \land \sim Hx)$
B) $(\forall x)(Fx \land \sim Hx),\ (\exists x)(Fx \land Gx) \models \sim(\exists x)(Hx \rightarrow \sim Gx)$
C) $(\exists x)\sim(Hx \rightarrow \sim Gx),\ (\exists x)(Fx \land Gx) \models (\forall x)(Fx \land \sim Hx)$
D) $\sim(\exists x)\sim(Fx \land \sim Hx),\ (\exists x)(Fx \land Gx) \models (\forall x)(Hx \rightarrow \sim Gx)$
E) Ninguna de las anteriores.

9. Si A, B, C, D, E y F son términos no necesariamente distintos entre sí y:

$$\begin{array}{l} AB \\ CD \\ \hline EF \end{array}$$

es un silogismo típico de la cuarta figura, entonces:

$$\begin{array}{l} BE \\ FC \\ \hline DA \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} DB \\ FC \\ \hline EA \end{array}$$

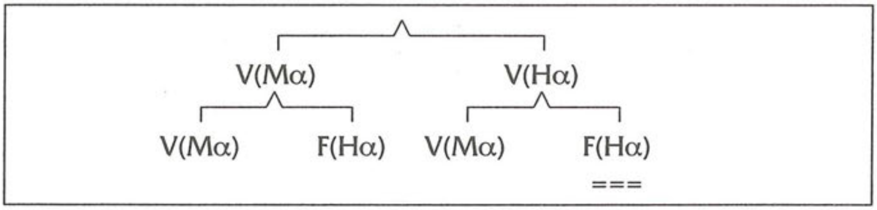
son silogismos de la ____ y la ____ figuras, respectivamente

A) I-II
B) I-III
C) IV-III
D) IV-II
E) Ninguna de las anteriores.

10. 'Si todos los canguros son marsupiales, entonces algunos canguros son marsupiales' es una inferencia ________________ siempre que - ________________.

A) válida-algunos sean marsupiales.
B) válida-algunos no sean marsupiales.
C) inválida-haya canguros.
D) válida-haya canguros.
E) Ninguna de las anteriores.

11. La premisa existencial que hace válida la inferencia que corresponde al siguiente diagrama semántico es:



A) $\sim(\forall x)Mx$
B) $(\forall x)\sim Mx$
C) $(\forall x)\sim Mx$
D) $\sim(\forall x)\sim Mx$
E) Más de una es correcta.

12. Si la conclusión de un silogismo es la subalterna de la contraria de la contradictoria de la subcontraria de la subalterna de la contraria de 'Ningún empleado de correo es mujer', y las premisas son 'Ninguna empleada de correo es amable' y 'Todas las mujeres son amables'. La premisa existencial que lo válida es:

I) Existen empleados de correo.
II) Existen mujeres.
III) Existen (personas) amables.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I o III
E) Ninguna

13. ¿En cuántas figuras es válido el modo EIO?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. Dadas las siguientes premisas de un silogismo:

'Algunos investigadores son progresistas'
'Algunos progresistas son catedráticos'

¿Cuál debería ser su conclusión para que sea válido?

A) Todos los catedráticos son investigadores.
B) Ningún investigador es catedrático.
C) Algunos catedráticos son investigadores.
D) Algunos investigadores son catedráticos.
E) Ninguna de las anteriores.

15. Como sabemos que usted desea pasar una Feliz Navidad, le sugerimos marcar como respuesta la letra que corresponde a un enunciado categórico universal negativo:

A) ¡Feliz Navidad!
B) Merry Christmas!
C) Joyeux Nöel!
D) Buon Natale!
E) Fröhliche weihnachten!

VIII

EL SISTEMA DE DEDUCCIÓN NATURAL PROPOSICIONAL

1. INTRODUCCIÓN

En la primera parte del libro nos abocamos a presentar un lenguaje simbólico (proposicional y luego cuantificacional), a construirle una semántica o interpretación y a buscar las conexiones con algunos aspectos del quehacer humano (inferencias deductivas). Si nuestros propósitos han sido logrados, la necesidad o, al menos, el interés y justificación de esta segunda parte deben ser claros. Una vez introducidos los lenguajes simbólicos, podemos preguntarnos si no son susceptibles de manipularse como un cálculo algebraico. Si esto es posible, un manejo más mecánico, traducible al lenguaje de una computadora, por ejemplo, representaría una considerable ganancia. Tendríamos, además, un modo de generar fórmulas válidas y no sólo un modo de reconocer que una fórmula ya dada lo es.

Esta idea sugerida por Leibniz fue plasmada por Frege el siglo pasado, y presentada de modo más acabado y accesible por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*. Después han aparecido innumerables presentaciones de estos cálculos para también innumerables campos que escapan a nuestro horizonte actual. En estos cálculos, se persigue generar fórmulas válidas sin preocuparse cada vez de verificar que lo son, por lo tanto deben prescindir de los aspectos semánticos. No es que prescindan en lo fundamental, en lo que los motiva, sino en el trabajo efectivo dentro de ellos (estas ideas se aclararán en la medida en que el lector maneje uno de ellos).

Los primeros cálculos que aparecieron seguían la presentación axiomática que se origina con Euclides, luego surgieron los que seguían el método llamado 'de deducción natural'. Los primeros, los axiomáticos, consisten en un conjunto (normalmente "pequeño") de fórmulas, los axiomas, que se toman como puntos de partida convenientes, y un conjunto de reglas de inferencia que son modos aceptados de transformar los axiomas. Ambos, axiomas y reglas de inferencia, son lo suficientemente simples como para garantizar su validez. Así, en un sistema axiomático toda fórmula que se genera (teorema) debe provenir sólo de los axiomas mediante las transformaciones que sus reglas permiten. Hoy en día se dispone de muchos sistemas axiomáticos para la lógica proposicional. Es decir, sistemas distintos que generan todas las fórmulas válidas de esa lógica. Decimos que tenemos sistemas distintos no tanto por sus resultados que son los mismos, sino porque parten de distintos axiomas o utilizan reglas de inferencia diferentes. Aunque también es cierto que hay lógicas proposicionales distintas.

Los sistemas llamados 'de deducción natural' se diferencian de los axiomáticos por carecer de axiomas, sólo tienen reglas de inferencia. En ellos se logra, por ejemplo, dar un conjunto de reglas que permiten construir todas las fórmulas válidas de la lógica proposicional (y sólo éstas). El método de la deducción natural, llamado también 'inferencia natural' o 'cálculo secuencial', fue propuesto por Gerhard Gentzen en 1934 y, simultáneamente, aunque de manera independiente, por Stanislav Jaskowski. En la deducción natural, casi todas las reglas son reglas de introducción y de eliminación de conectores. En su historia, el método ha sufrido modificaciones, como las propuestas por Fitch[12]. En los sistemas tipo Fitch se introduce la noción de subprueba o prueba subordinada. El sistema de deducción natural (DN) que usaremos en esta parte del libro es de este tipo (modificado en algunos aspectos de acuerdo con la presentación de Iseminger[13]).

El objetivo del sistema DN es la demostración de teoremas (del sistema) que deben ser todas las fórmulas válidas de la lógica proposicional y sólo éstas (después veremos la parte cuantificacional). A diferencia del desarrollo de la primera parte, donde las relaciones son estrictamente de carácter semántico, ahora desarrollaremos demostraciones cuya "validez formal" se basa en la obediencia de las reglas del sistema, donde lo semántico poco o nada interesa. Pues, la validez de un teorema del sis-

---

[12] Véase Fitch [43].

[13] Véase Iseminger [62].

tema está relacionada exclusivamente con su construcción de acuerdo con las reglas de este sistema.

1.1. La deducción formal o derivación

No sólo nos interesa generar todas las fórmulas válidas, sino también buscamos un procedimiento para la obtención de una consecuencia a partir de una o más fórmulas denominadas 'premisas'. El proceso de pasar de un conjunto de fórmulas, en una **secuencia finita** de pasos donde **cada paso está justificado por una regla lógica del sistema en el que se trabaje**, hasta obtener la fórmula deseada como conclusión, se denomina **deducción formal o derivación**. En este proceso, no se toma en cuenta la **verdad** o **falsedad** de cada una de las fórmulas sino únicamente la aplicación de las reglas del sistema que nos permite obtener una fórmula a partir de una o más de ellas.

Cuando logramos lo anterior decimos que la conclusión es una **consecuencia sintáctica** de las premisas (dentro del sistema en el que se esté trabajando), y escribimos:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash C,$$

donde P_1, P_2, …, P_n son las premisas, C la conclusión, y '$\vdash$' el símbolo que indica la consecuencia sintáctica. Si se trata de un teorema, es decir, de una fórmula que se demuestra de cero premisas, escribimos:

$$\vdash A$$

En general, de modo similar a la consecuencia semántica deberíamos escribir:

$$\Gamma \vdash C,$$

donde Γ es el conjunto de premisas (eventualmente vacío). Cuando Γ no es vacío se usa más el término 'derivación' que 'deducción formal'. Así, se dice que C se deriva del conjunto de premisas Γ.

A continuación, para aclarar estas ideas, enunciamos una conocida regla lógica y un ejemplo de su aplicación, como si constituyese la regla de un sistema de deducción puramente sintáctico.

Regla ***Modus Ponendo Ponens*** (MPP) **y** (ECond.)

$$\frac{\begin{array}{l}A \rightarrow B\\ A\end{array}}{B}$$

La regla MPP nos faculta para: **de una premisa (fórmula) condicional y de una premisa (fórmula) que sea el antecedente de la anterior, concluir la afirmación del consecuente**. Por ejemplo, si la fórmula '$(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)$' es una premisa de una inferencia y la otra, '$(p \vee q)$', es la afirmación del antecedente de la anterior, entonces se concluye '$(r \rightarrow s)$', que es la afirmación del consecuente. En lo sucesivo, la deducción de una fórmula a partir de una o más fórmulas se escribirá colocando cada fórmula una debajo de otra, numeradas secuencialmente. Donde, además, cada secuencia estará justificada por una regla que debe citarse. Nuestro ejemplo quedará:

1.	$(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)$	Premisa
2.	$p \vee q$	Premisa
3.	$r \rightarrow s$	(1,2) MPP

Se puede observar en esta secuencia que 1 y 2 no están justificadas por la regla MPP, como ocurre en 3, dado que 1 y 2 son admitidas como premisas (puntos de partida), y las premisas no se justifican, se declaran.

Una aplicación conjunta de esta regla será suficiente para tener una idea de la complejidad que puede presentarse cuando se tienen varias reglas en una deducción formal o derivación. Como ya hemos dicho líneas arriba, una derivación formal consiste en la obtención de una consecuencia a partir de una o más premisas. El siguiente ejemplo es una prueba de deducción formal donde se aplica la regla mencionada:

$P_{1)}$	$p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$	
$P_{2)}$	$q \rightarrow p$	
$P_{3)}$	$q \quad /\therefore\ \sim r$	
4.	p	(2,3) MPP
5.	$q \rightarrow \sim r$	(1,4) MPP
6.	$\sim r$	(3,5) MPP

(Es costumbre preceder la conclusión por '//.', '/∴' o sólo por '∴' cuando las premisas se escriben en líneas separadas). En este caso, la obtención de '$\sim r$' a partir de las fórmulas que están en P_1, P_2 y P_3 es un proceso eminentemente sintáctico y formal, donde cada secuencia o paso se deduce de una o más fórmulas anteriores al aplicarse una regla, regla que aparece justificando dicha secuencia con su respectiva abreviatura al lado derecho. Así, la secuencia 4 se deduce de 2 y 3 por MPP, 5 se deduce de 1 y 4 por MPP y 6 de 3 y 5 por MPP.

Hay muchas otras reglas lógicas más que no hemos enunciado en este acápite, ya que nuestro objetivo ha sido solamente dar una idea de lo que es una deducción formal. Si aumentásemos un número suficiente de ellas, podríamos llegar a tener un sistema que nos permita obtener todas las inferencias válidas de la lógica proposicional.

2. RELACIÓN ENTRE CONSECUENCIA SINTÁCTICA Y CONSECUENCIA SEMÁNTICA

La relación de **consecuencia sintáctica** ($\vdash$) se da cuando existe una deducción formal dentro de un sistema deductivo. Sintácticamente, una consecuencia es derivable de cero, una o más premisas por la aplicación únicamente de reglas de inferencia (del sistema).

Por otra parte, la deducción puede ser considerada desde el punto de vista semántico. Es decir, dada una relación de consecuencia sintáctica entre una fórmula y un conjunto de premisas, podemos plantearnos el problema de si también se da la relación de consecuencia semántica. Obviamente, este criterio fundamenta la validez no-formal de la deducción. Es claro que sin decirlo se busca que las reglas sintácticas preserven la verdad, para que si la conclusión se deriva correctamente de un conjunto de premisas, entonces es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

En un sistema de deducción formal, como DN, no se trata sólo de crear un conjunto de reglas para "jugar", se busca que las reglas estén hechas de tal modo que donde haya una consecuencia sintáctica haya una semántica. El gran *desiderátum* leibniziano era lograr un sistema donde también ocurriese la inversa. Es decir, lograr que a toda consecuencia semántica le correspondiese una sintáctica. Esto ocurre al nivel de los campos lógicos examinados en el texto, desgraciadamente no puede generalizarse para toda la lógica (¿o felizmente?). Éste y otros resultados limitativos pueden verse en Garrido y su demostración en Hunter[14].

---

[14] Véanse Garrido [51] y Hunter [61].

En general:

Si $\Gamma \vdash C$, entonces $\Gamma \vdash C$,

y, en algunos campos:

Si $\Gamma \vdash C$, entonces $\Gamma \vdash C$,

como aquéllos que desarrollamos en el texto.

Por esto podemos adelantar algunos resultados que entenderemos mejor al desarrollar DN. Sabemos que una **tautología** es consecuencia semántica de cualquier conjunto de fórmulas, lo que nos permite también afirmar que una tautología es derivable de cualquier conjunto de premisas. De igual modo, podemos afirmar la propiedad transitiva: si A es derivable de una fórmula B y C es derivable de la fórmula A, entonces C es derivable de B, cuya enunciación semántica es: si A es consecuencia semántica de la fórmula B y C es consecuencia semántica de A, entonces la fórmula C es consecuencia semántica de B. Así tenemos que:

$\Gamma \vdash T$ y si $B \vdash A$ y $A \vdash C$, entonces $B \vdash C$.

3. EL LENGUAJE PROPOSICIONAL (LP)

Nuestro objetivo es proporcionar un conjunto de reglas sintácticas (referidas exclusivamente a la forma de las fórmulas) que permitan efectuar todas las inferencias que semánticamente son válidas, y que además permitan deducir de cero premisas las tautologías (ahora llamadas 'teoremas del sistema'). Necesitamos, pues, el mismo lenguaje que el empleado en el capítulo II; pero, dos consideraciones nos harán modificar ligeramente su presentación: (1) es bueno que el lector constate que un lenguaje no tiene una forma única de presentarse y (2) en el sistema de deducción natural (DN) que desarrollaremos, muchas demostraciones se simplificarán si aceptamos algunas definiciones.

3.1. Símbolos primitivos

a) Símbolos proposicionales: ‘p’, ‘q’, ‘r’, ...
b) Conectores lógicos: ‘~’ , ‘→’
c) Símbolos auxiliares: ‘(‘, ’)’, ‘[‘, ’]’, ‘{‘, ’}’, ‘.’

3.2. Reglas de formación

a) Todo símbolo proposicional es una FBF.
b) Si A es una FBF, entonces ~(A) también lo es.
c) Si A y B son FBF, entonces (A → B) es una FBF.
d) Una fórmula es una FBF sí y solo sí es el resultado de la aplicación de las reglas anteriores un número finito de veces.

El uso de los símbolos auxiliares y la generación de FBF es el presentado en el cap. II.

3.3. Definiciones

Def. 1: $(A \wedge B)$ =def. $\sim(A \rightarrow \sim B)$
Def. 2: $(A \vee B)$ =def. $\sim A \rightarrow B$
Def. 3: $(A \leftrightarrow B)$ =def. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

En esta parte, se encuentra la "diferencia" respecto del capítulo II. En sentido estricto, este lenguaje difiere de LP, por ejemplo no tiene los mismos símbolos primitivos (véase la lista de conectores); pero como gracias a las definiciones toda FBF de uno lo es del otro y ahora sólo nos interesa ese aspecto, lo llamaremos también 'LP'.

4. EL MÉTODO DE DEDUCCIÓN NATURAL (DN)

Los métodos axiomáticos utilizan mecanismos artificiosos, con axiomas elegidos más o menos arbitrariamente, para demostrar que una proposición es deducible de un conjunto de premisas. Según Gentzen, el método axiomático no se ajusta al procedimiento seguido cuando se busca demostrar algo, así DN se presenta como un sistema más intuitivo o natural. Esperamos que al final del capítulo el lector concuerde con esta tesis.

Ya dijimos que el método de DN que expondremos a continuación utiliza pruebas parciales (subpruebas) dentro de las pruebas. Para diferenciarlas usa un conjunto de barras verticales. Las barras sirven para distinguir el tipo o nivel de prueba en el que se está trabajando, hay sólo una prueba principal y pueden aparecer una o más subpruebas o pruebas subordinadas.

4.1. Pruebas, subpruebas y barras

En el ejemplo de derivación presentado en la introducción (8.1.), las pruebas se llevaban a cabo en un único nivel, en el vocabulario de DN este nivel es el de la prueba principal. Para marcar que una prueba es la principal, se traza una barra entre los números de los pasos y los pasos mismos, barra que no debe tener otra a su izquierda. Así, en DN el ejemplo tendría el esquema:

$$\begin{array}{r|l} 1 & p \to (q \to \sim r) \\ 2 & q \to p \\ 3 & \underline{q} \\ & \vdots \\ n & \sim r \end{array}$$

Donde los pasos desde las premisas hasta la conclusión tienen que ser los que autorice DN y, como todavía no sabemos cuántos serán necesarios, escribimos 'n' para el número del último; asimismo, no hemos puesto las justificaciones de ninguno pues todavía no conocemos cuáles son. En DN se emplea una pequeña raya horizontal para separar las premisas (hipótesis en el lenguaje de DN) del resto. También convendremos en que '⋮' indica en una prueba un número de pasos no definido desde cero pasos hasta n (siempre un número finito).

Si, en cambio, el ejemplo fuera de una subprueba que aparece en un determinado momento (paso i) de una prueba principal, se presentaría así:

$$\begin{array}{r|c|l} & \multicolumn{2}{l}{\vdots} \\ i & & p \to (q \to \sim r) \\ j & & q \to p \\ k & & q \\ & & \vdots \\ & & \\ & & \vdots \\ n & & \sim r \\ & \multicolumn{2}{l}{\vdots} \end{array}$$

y la prueba principal continuaría. En este caso la subprueba va del paso i hasta el paso n, lo que señalaremos diciendo que se trata de la subprueba i-n.

Debemos señalar, en primer lugar, que para demostrar cualquier inferencia válida de la lógica proposicional trazaremos una barra vertical y a su derecha, empezando en la parte superior, escribiremos las premisas una debajo de otra y la conclusión deberá aparecer al final de la barra. En segundo lugar, al lado derecho las fórmulas que son admitidas como premisas serán justificadas como **hipótesis** (Hip.), y al lado izquierdo de la barra se escribirán los números que correspondan secuencialmente. Gráficamente se tiene:

I.

1	P_1	Hip.
2	P_2	Hip.
	$\vdots$	
n	$\underline{P_n}$	Hip.
	$\vdots$	
o	A	(Justif.)
	$\vdots$	
p	C	(Justif.)

En este gráfico, la barra señala la **prueba principal** y, siempre, en todas las pruebas, la primera barra indicará la prueba principal. Las premisas P_1, P_2, ...,P_n, son fórmulas bien formadas del sistema (FBF), denominadas 'hipótesis' (son los puntos de partida), razón por la cual colocaremos a su derecha 'Hip.' como justificación. Adicionalmente estas premisas o hipótesis las señalaremos separándolas por una pequeña barra horizontal, como aparece después de la línea número n.

'A' es la expresión del conjunto de FBF que aparecerán secuencialmente en el espacio reservado por los puntos. Cada una de estas fórmulas se deriva de P_1, P_2, ..., P_n de acuerdo con las reglas del sistema, por lo que cada línea estará **justificada** (Justif.) mediante la abreviatura de la regla de DN utilizada y los números de las líneas de las que se deduce cada paso.

C (conclusión) es la última FBF de la prueba y aparece al final de la barra. Que C sea derivable de P_1, P_2, ..., P_n queda demostrado en la prueba debidamente justificada y, finalmente, las letras minúsculas que aparecen al margen izquierdo de la barra indican la secuencia de cada paso que se ha seguido en la demostración; para esto los numeraremos con números naturales del 1 en adelante empezando con la primera línea.

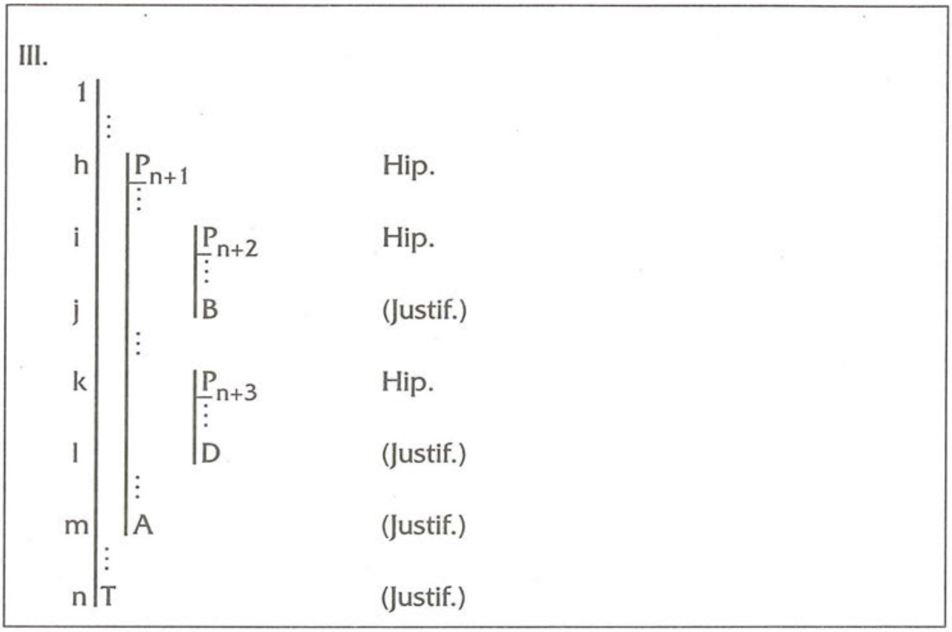
En el proceso de la demostración, dentro de la prueba principal, pueden aparecer una o más, según sea el caso, **subpruebas o pruebas subordinadas** originadas o generadas por las reglas de inferencia. Estas pruebas subordinadas serán indicadas también por barras verticales a la derecha de la barra principal, sin sobrepasarla por arriba o por debajo. Cada subprueba puede tener, eventualmente, una fórmula que es admitida como premisa o hipótesis de la subprueba. En la subprueba pueden emplearse las fórmulas que están en la prueba principal, de acuerdo con lo permitido por el sistema. A continuación el gráfico nos dará una idea de las barras subordinadas que indican las subpruebas.

II.

1	P_1		Hip.
2	P_2		Hip.
	⋮		
n	P_n		Hip.
	⋮		
i		P_{n+1}	Hip. (generalmente, no siempre)
		⋮	
j		B	(Justif.)
		⋮	
k		A	(Justif.)
	⋮		
l	C		(Justif.)

En este caso, la subprueba está señalada por la segunda barra vertical entre los pasos i y k, y a la vez se ha generado una premisa más, P_{n+1}. Por lo tanto, en este contexto se ha demostrado que la fórmula A, que está al final de la sub-barra, es derivable de P_{n+1} y, si es necesario (como iremos viendo), también de P_1, P_2, ..., P_n. Las fórmulas que intervienen en la demostración se representan con 'B' y la justificación de alguno de los pasos posteriores a k deberá mencionar la subprueba.

Cuando se demuestra un **teorema** (cualquier fórmula válida), éste debe aparecer al final de la barra principal y la prueba principal carecerá de hipótesis. Pero cualquier subprueba que pueda aparecer en la demostración, por la aplicación de las reglas de inferencia de DN, puede tener hipótesis. A continuación, un gráfico aclaratorio:



Este gráfico nos da la idea para demostrar una fórmula válida, o teorema del sistema, expresada por T. Las subpruebas que aparecen en el gráfico se generan por la decisión de utilizar tal o cual regla de inferencia en el proceso de la demostración de T. El paso 1 de la prueba principal no es una hipótesis.

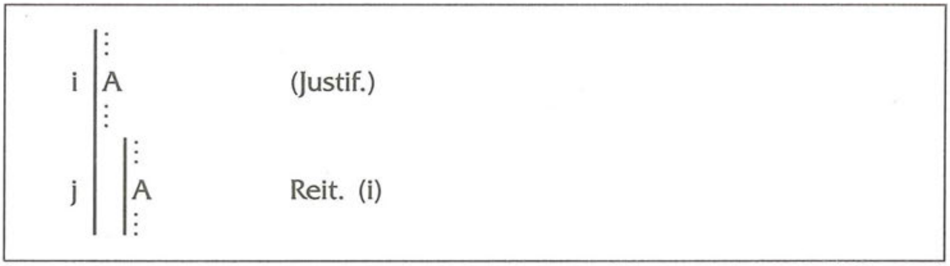
La noción de **prueba principal** es absoluta; pero no así la de 'prueba principal respecto de', ya que una subprueba puede ser principal respecto de otra. En este caso, la segunda barra es la prueba subordinada de la prueba principal que está entre h y m y demuestra que A es derivable de P_{n+1}. Pero, esta demostración ha necesitado hipotéticamente dos subpruebas (i-j y k-l) y respecto de las cuales es principal. Finalmente, el teorema quedará demostrado si toda la prueba se ha desarrollado de acuerdo con las reglas de DN.

Reiterando, la única barra que necesariamente trazaremos siempre será la de la prueba principal. Todas las otras barras, pertenecientes a subpruebas, las introduciremos sólo si se necesitan.

4.2. Reiteraciones y repeticiones

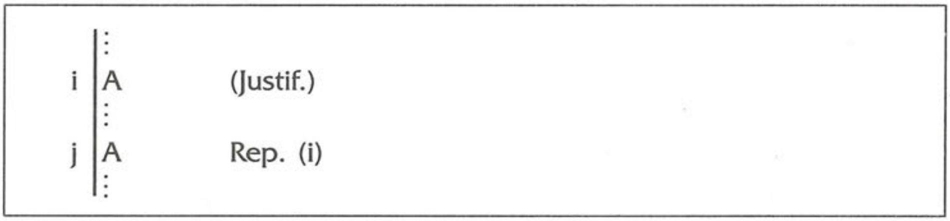
En la demostración de inferencias válidas o teoremas hay reglas de inferencia que no generan subpruebas, ni permiten la introducción o eliminación de un conector. Si en el proceso de la demostración en una subprueba se necesitan las fórmulas que aparecen en una prueba principal *respecto de ella*, podemos trasladar las fórmulas que sean necesarias a su respectiva subprueba. Este proceso lo regula la regla llamada de **reiteración**, enunciada del modo siguiente:

a. Regla de reiteración (Reit.)

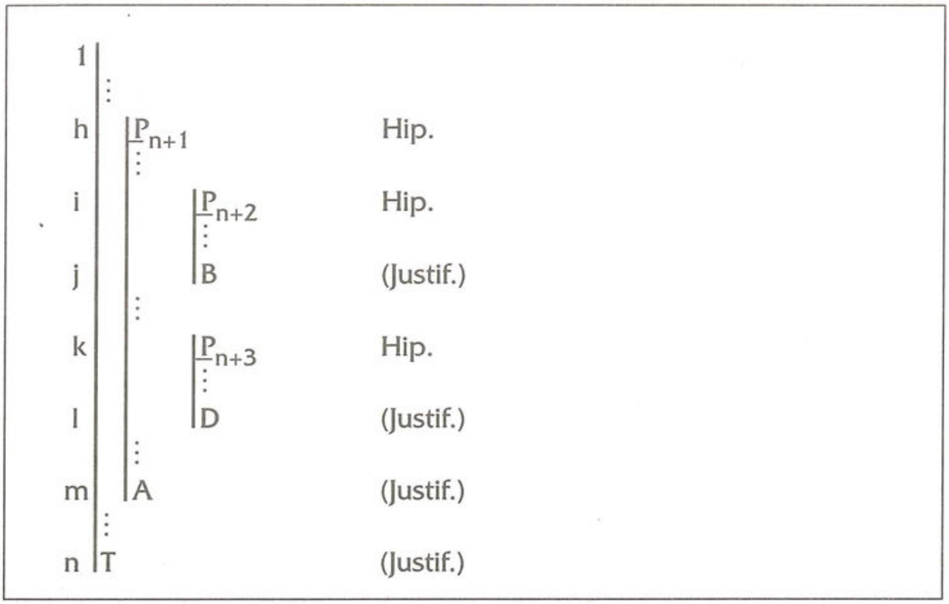


Debe recordarse que en una prueba los tres puntos (⋮) a continuación de una prueba indican cualquier número finito de pasos, inclusive cero pasos. Según esta regla, cualquier fórmula que aparezca en una prueba puede reiterarse en alguna de sus subpruebas. De igual modo, es intuitivamente válido repetir una fórmula en la misma prueba.

b. Regla de repetición (Rep.)



La necesidad de distinguir las dos reglas se apreciará en la deducción cuantificacional. Sin embargo, es importante tener cuidado cuando hay más de una subprueba dentro de la misma prueba, es decir, cuando hay más de una sub-barra que está bajo el dominio de una barra mayor. En este caso no se puede aplicar la regla Reit. de una subprueba a otra subprueba, esto es, no se puede trasladar una fórmula de una subprueba a otra subprueba que tiene el mismo rango. Por ejemplo, si nos remitimos al siguiente gráfico:



Podemos observar las dos subpruebas, una i-j y la otra k-l, que pertenecen a la primera prueba subordinada. Estas dos subpruebas tienen el mismo rango. Una fórmula de la subprueba de i-j no se puede reiterar en la subprueba de k-l. Es decir, P_{n+2}, por ejemplo, no se puede reiterar en la siguiente subprueba que tiene el mismo rango. En cambio, P_{n+1} sí puede reiterarse en cualquiera de sus subpruebas.

Hechas estas aclaraciones, a continuación expondremos el cuerpo del sistema de deducción natural proposicional presentando las reglas que permiten manejar a cada conector.

4.3. Reglas del condicional

En esencia, el método DN consiste en la aplicación de reglas de inferencia que permiten obtener uno de los componentes que aparecen en un paso anterior (reglas de eliminación) o que permiten colocar un conector entre fórmulas de pasos anteriores (reglas de introducción). Algunas de las reglas de los operadores '→' y '~' serán consideradas en este sistema como **reglas primitivas** por ser en LP símbolos primitivos, pero este tema lo discutiremos en 8.4.5.

a. R1. Eliminación del condicional (ECond.)

	⋮	
[j] i	$A \rightarrow B$	(Justif.)
	⋮	
[i] j	A	(Justif.)
	⋮	
k	B	(i,j) ECond.
	⋮	

Según ECond. se deriva el consecuente B de los pasos i (condicional $A \rightarrow B$) y j (A antecedente del condicional i). Esta regla no es otra que la conocida regla del ***Modus Ponens***. Nótese que los pasos i, j y k no tienen que ser sucesivos, lo que marcamos incluyendo pasos sin numerar con '⋮'. Pero, obviamente, se admite el caso en que lo sean ($j=i+1$ y $k=i+2$). Asimismo, aceptamos la posibilidad de que la fórmula condicional ($A \rightarrow B$) se presente después de su antecedente (A), como lo señalan los números entre '[ ]' a la izquierda. Se podrá apreciar la aplicación de esta regla en la demostración de la siguiente inferencia:

Ejemplo (1): $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$p \rightarrow q$
$r \rightarrow p$ //. q

En primer lugar, trazaremos una barra vertical, luego colocaremos las premisas una debajo de la otra, empezando en la parte superior de la barra y numeradas secuencialmente en el margen izquierdo de la barra. Al final de ésta, dejando un espacio prudencial para que entren todos los pasos necesarios, colocaremos la conclusión. Así, el esquema de nuestra prueba es:

1	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	Hip.
2	$p \rightarrow q$	Hip.
3	$\underline{r} \rightarrow p$	Hip.
	q	

Ahora vamos a demostrar que 'q' se deriva de las tres hipótesis aplicando solamente la regla ECond. Vemos que el paso 2 es la afirmación del antecedente de 1, entonces por la regla ECond. derivamos su consecuente, y lo colocamos en el paso 4, como aparece a continuación:

1	$(p \to q) \to r$	Hip.
2	$p \to q$	Hip.
3	$\underline{r} \to p$	Hip.
4	r	(1,2) ECond.
	⋮	
	q	

La justificación de 4 indica que 'r' se deriva de 1 y 2 por la regla ECond. Obtenida 'r', vemos que esta fórmula es la afirmación del antecedente de 3; aplicando ECond. obtenemos 'p' (paso 5) e inmediatamente después la conclusión:

1	$(p \to q) \to r$	Hip.
2	$p \to q$	Hip.
3	$r \underline{\to} p$	Hip.
4	r	(1,2) ECond.
5	p	(3,4) ECond.
6	q	(2,5) ECond.

Al haber obtenido 'q' en la prueba que partía de las hipótesis en cuestión, hemos demostrado que 'q' se deriva de las tres hipótesis y, por lo tanto, hemos terminado la prueba.

b. R2. Introducción del condicional (ICond.)

	⋮	
i	$\quad \underline{A}$	Hip.
	$\quad$ ⋮	
j	$\quad B$	(Justif.) **Último paso de la subprueba**
	⋮	
k	$A \to B$	(i-j) ICond.
	⋮	

Según esta regla, si se requiere una fórmula condicional (A → B) en una prueba, se puede generar una subprueba (de la prueba donde se requiere introducir el condicional) en la que se debe derivar B a partir de la Hipótesis A. Si se demuestra que B se deriva de A aplicando reglas de inferencia de DN, entonces queda demostrada la validez de la fórmula condicional (A → B) en la prueba a la izquierda. Como en la prueba interviene toda una subprueba, ésta se justifica de i a j por ICond. (i-j). Nuevamente no es necesario que k=j+1, aunque es recomendable proceder así. Es una condición de la regla que la subprueba tenga a A como hipótesis *única* y que el último paso de la misma sea B. A continuación, un ejemplo ilustrativo:

Ejemplo (2): Demostrar ⊢ p → q .→. (q → r) → (p → r).

Para demostrar la validez de esta fórmula, necesitamos que ella aparezca en la última línea de una prueba principal que carezca de hipótesis. Construyamos su demostración paso a paso tratando de mostrar una manera de construirla. Colocamos al final de la barra vertical lo que queremos probar de la siguiente manera:

```
  |
  |
  |
  |
  |
  |p → q .→. (q → r) → (p → r)
```

Trazamos una barra suficientemente larga como para contener toda la prueba. Ahora aplicaremos las reglas que hemos introducido hasta aquí. Según la regla ICond., una fórmula condicional al final de la barra debe proceder de una subprueba, donde el antecedente aparece como Hipótesis y el consecuente se haya obtenido, utilizando las reglas de DN, al final de la barra de la prueba subordinada. Así:

```
1 |  |p → q                             Hip.
  |  |‾
  |  |
  |  |
  |  |(q → r) → (p → r)
  |p → q .→. (q → r) → (p → r)
```

Observamos también otra fórmula condicional al final de la barra de la primera subprueba. La regla ICond. nos permite intuir que necesitamos elaborar otra subprueba dentro de esta prueba subordinada, subprueba en la que también se repite el proceso, como aparece a continuación:

```
1 | |p → q                              Hip.
  | |‾
  | |
2 | |  |q → r                           Hip.
  | |  |‾
  | |  |
3 | |  |  |p                            Hip.
  | |  |  |‾
  | |  |  |
  | |  |  |r
  | |  |p → r
  | |(q → r) → (p → r)
  |p → q .→. (q → r) → (p → r)
```

Nuestro problema ahora se ha reducido al de derivar 'r' en la última subprueba con hipótesis 'p'. En este caso es necesaria la participación de las hipótesis que están en las secuencias 1 y 2 para derivar 'r'. Es decir, 'r' se va a derivar de las hipótesis 1, 2 y 3. Dado que las hipótesis 1 y 2 pertenecen a una prueba distinta de la prueba en la cual está 'r', para poder efectuar la deducción trasladaremos estas dos hipótesis a la tercera subprueba en virtud de la regla de **reiteración**.

```
1 | |p → q                              Hip.
2 | |‾ |q → r                           Hip.
3 | |  |‾ |p                            Hip.
4 | |  |  |‾p → q                       (1) Reit.
5 | |  |  |q → r                        (2) Reit.
  | |  |  |:
  | |  |  |r
  | |  |p → r
  | |(q → r) → (p → r)
  |p → q .→. (q → r) → (p → r)
```

En el diagrama anterior, se puede apreciar la gran ventaja de DN: permite reducir una prueba a una o más subpruebas de nivel inferior, en las que pueden aparecer hipótesis que facilitan la labor.

Las relaciones que aparecen entre las fórmulas que están en la tercera subprueba, esto es, en 3, 4 y 5, nos permiten "ver" las reglas que vamos a aplicar para derivar 'r'. Como 'r' es el consecuente de la fórmula 5, para derivarla necesitamos 'q', que es la afirmación del antecedente de dicha fórmula y como 'q', podemos obtenerla de 3 y 4 por la regla ECond. quedará demostrado que 'r' se deriva de 3, 4 y 5. Del modo más natural justificamos las fórmulas que aparecen después de 'r' por la regla que permite introducirlas. A continuación, la demostración completa:

```
 1 | |p → q                            Hip.
 2 | |   |q → r                        Hip.
 3 | |   |   |p                        Hip.
 4 | |   |   |p → q                    (1) Reit.
 5 | |   |   |q → r                    (2) Reit.
 6 | |   |   |q                        (3,4) ECond.
 7 | |   |   |r                        (5,6) ECond.
 8 | |   |p → r                        (3-7) ICond.
 9 | |(q → r) → (p → r)                (2-8) ICond.
10 |p → q .→. (q → r) → (p → r)        (1-9) ICond.
```

Estos dos ejemplos, (1) y (2), y los ejercicios desarrollados dan una idea de cómo se puede demostrar inferencias o fórmulas válidas de la lógica proposicional; pero sólo la práctica personal permitirá el dominio de las técnicas involucradas.

En lo sucesivo, las demostraciones las presentaremos ya no mostrando su génesis, sino terminadas. Es recomendable que el lector trate de resolverlas por su cuenta. Veamos otro ejemplo:

Ejemplo (3): Probar $\vdash$ p .→. q → (r → p).

```
1 | |p                      Hip.
2 | |   |q                  Hip.
3 | |   |   |r              Hip.
4 | |   |   |p              (1) Reit.
5 | |   |r → p              (3-4) ICond.
6 | |q → (r → p)            (2-5) ICond.
7 |p .→. q → (r → p)        (1-6) ICond.
```

En este ejemplo, se puede apreciar que 'p' en la secuencia 4 se deriva únicamente de la Hipótesis que está en 1 por la regla Reit. Además, las hipótesis 2 y 3 no han intervenido en la derivación de ‘p’. Las otras secuencias están justificadas por ICond. que dio origen a las respectivas subpruebas.

Ejercicios

1. Efectúe las siguientes derivaciones en DN.

   1.1. $p \to q, {\sim}q \vdash r .\!\to\!. p \to r$
   1.2. ${\sim}p \to (q .\!\to\!. r \to s), q, r \to {\sim}p \vdash r \to s$

2. Demuestre los siguientes teoremas.

   2.1. $\vdash p \to (q \to r) .\!\to\!. (p \to q) \to (p \to r)$
   2.2. $\vdash p \to (q \to r) .\!\to\!. q \to (p \to r)$
   2.3. $\vdash (p \to p .\!\to\!. p) \to p$

Solución:

1. a. Procediendo de acuerdo con lo sugerido por la conclusión (introducción de un condicional), tenemos como posible esquema de la prueba:

1	$p \to q$	Hip.
2	${\sim}q$	Hip.
3	r	Hip.
*	$p \to r$	
	$r .\!\to\!. p \to r$	

Notemos que para intentar obtener el paso (*) podemos abrir una nueva subprueba en la cual la hipótesis sea ‘p’ y el último paso sea ‘r’, que justamente es la hipótesis que figura en 3.

Así pues:

```
 1 │p → q                Hip.
 2 │~q                   Hip.
   ├──
 3 │ │r                  Hip.
   │ ├─
 4 │ │ │p                Hip.
   │ │ ├─
 5 │ │ │r                Reit. (3)
 6 │ │p → r              ICond. (4-5)
 7 │r .→. p → r          ICond. (3-6)
```

Nótese en la prueba que la numeración que acompaña a cada justificación puede colocarse después de mencionar la regla.

b. Procediendo como antes, obtenemos:

```
 1 │~p → (q .→. r → s)         Hip.
 2 │q                          Hip.
 3 │r → ~p                     Hip.
   ├──
 4 │ │r                        Hip.
   │ ├─
 5 │ │r → ~p                   Reit. (3)
 6 │ │~p                       ECond. (4,5)
 7 │ │~p → (q .→. r → s)       Reit. (1)
 8 │ │q .→. r → s              ECond. (6,7)
 9 │ │q                        Reit. (2)
10 │ │r → s                    ECond. (8,9)
11 │ │s                        ECond. (4,10)
12 │r → s                      ICond. (4-11)
```

2. a. Es inmediata la siguiente demostración:

```
 1 │ │p → (q → r)                          Hip.
   │ ├─
 2 │ │ │p → q                              Hip.
   │ │ ├─
 3 │ │ │ │p                                Hip.
   │ │ │ ├─
 4 │ │ │ │p → q                            Reit. (2)
 5 │ │ │ │p → (q → r)                      Reit. (1)
 6 │ │ │ │q                                ECond. (3,4)
 7 │ │ │ │q → r                            ECond. (3,5)
 8 │ │ │ │r                                ECond. (6,7)
 9 │ │ │p → r                              ICond. (3-8)
10 │ │p → q .→. p → r                      ICond. (2-9)
11 │p → (q → r) .→. (p → q) → (p → r)      ICond. (1-10)
```

b. Es evidente.

c. Procediendo como antes llegamos a:

```
1| |p → p .→. p           Hip.
 | |
 | |
 | |p
 |
 |(p → p .→. p) → p
```

Para demostrar 'p' sería suficiente tener demostrado de alguna manera el antecedente 'p → p'; pues por E Cond. con 1 se obtendría 'p'. Propongamos la demostración de 'p → p'.

```
1| |p → p .→. p           Hip.
 | |
 | |
*| |p → p
 | |p
 |(p → p .→. p) → p
```

y para probar (*) por la regla de I Cond. tendríamos que abrir una subprueba de hipótesis 'p' y conclusión 'p', la cual queda probada por repetición. Así pues:

```
1| |p → p .→. p           Hip.
2| |  |p                  Hip.
 | |  |
3| |  |p                  (2) Rep.
4| |p → p                 (2-3) ICond.
5| |p                     (1,4) ECond.
6|(p → p .→. p) → p      (1-5) ICond.
```

Como se aprecia, también utilizaremos como parte del nombre de la regla el símbolo del conectar.

4.4. Reglas de la negación (y doble negación)

Presentaremos ahora las reglas del manejo del operador '~', no sólo las reglas de introducción y eliminación de la negación simple, sino también dos reglas para el manejo de la doble negación. La razón para presentar reglas para el manejo de la doble negación se discutirán en el siguiente acápite (8. 4. 5).

a. R3. Eliminación de la negación (EN)

```
      |:
[j] i |B          (Justif.)
      |:
[i] j |~B         (Justif.)
      |:
k     |A          (i,j) EN
      |:
```

La regla EN dice que si en una prueba se tienen en pasos cualesquiera (i,j), una fórmula y su negación, entonces en un paso posterior (no necesariamente inmediato) se puede escribir cualquier FBF. Entenderemos, para evitar repeticiones, que puede aparecer en un paso anterior la negación y después la fórmula que se niega (es lo que dicen [j] e [i]). En términos semánticos, podríamos decir que, según EN, se puede derivar cualquier fórmula, en este caso A, a partir de una contradicción (B y ~B).

Ejemplo (4):

```
1| |~p                 Hip.
 | |‾‾‾
2| |    |p             Hip.
 | |    |‾
3| |    |~p            (1) Reit.
4| |    |q             (2,3) EN
5| |p → q              (2-4) ICond.
6|~p → (p → q)         (1-5) ICond.
```

En este ejemplo, hemos demostrado la validez de la fórmula que aparece en la secuencia 6. La regla EN se ha aplicado en la segunda subprueba para derivar 'q' (secuencia 4) a partir de 'p' y '~p' que aparezcan en las secuencias 2 y 3, respectivamente. La elección de las hipótesis en los pasos 1 y 2 están sugeridas por la fórmula que se desea demostrar que es la última.

b. R4. Introducción de la negación (IN)

```
       |⋮
     i |  |A          Hip.
       |  |⋮
[k]  j |  |B          (Justif.)
       |  |⋮
[j]  k |  |~B         (Justif.) Ultimo paso de la subprueba
       |⋮
     l |~A            (i-j-k) IN
       |⋮
```

Si se desea obtener una fórmula negada ~A, según IN se puede generar una subprueba asumiendo como hipótesis de la subprueba la fórmula A (obsérvese que por lo que ya conocemos de la semántica de LP esta fórmula es la negación de ~A). En esta subprueba, debe obtenerse una contradicción entre dos pasos para poder aplicar la regla, esto es: dos fórmulas de los tipos B y ~B como aparecen en las secuencias j y k respectivamente. La obtención de esta contradicción en una prueba nos indica que la validez de ~A ha sido demostrada en la prueba principal (respecto de la subprueba). En su justificación se coloca '(i-j-k) por IN' que significa que la prueba está entre i y la secuencia k, y que los pasos j y k son uno la negación del otro. El uso de la regla IN en una demostración también se conoce como una **prueba por el absurdo**. Nuevamente aceptaremos en la práctica que la fórmula con el esquema ~B puede aparecer antes de B, lo que hemos indicado con los números entre corchetes. A continuación, un ejemplo donde se aplica la regla IN:

Ejemplo (5):

```
1| |p → q                  Hip.
2| | |~q                   Hip.
3| | | |p                  Hip.
4| | | |p → q              (1) Reit.
5| | | |q                  (3,4) ECond.
6| | | |~q                 (2) Reit.
7| | |~p                   (3-5-6) IN
8| |~q → ~p                (2-7) ICond.
9|p → q .→. ~q → ~p        (1-8) ICond.
```

En este ejemplo, hemos demostrado el teorema de transposición:

$$\vdash p \rightarrow q \ .\!\rightarrow\!.\ \sim q \rightarrow \sim p$$

En el procedimiento seguido en el ejemplo (5), se puede apreciar que las hipótesis 1 y 2 han sido originadas por la intención de utilizarlas en ICond. pero la hipótesis 3 que está en la tercera subprueba ha sido originada por la regla IN. Sabemos que IN se aplica cuando la fórmula es negativa y como '~p' es negativa y está al final de la barra de la segunda subprueba, entonces genera la tercera subprueba con su Hipótesis 'p'. Aplicando las reglas de inferencia hasta ahora presentadas, se ha derivado una contradicción expresada en 'q' y '~q', como aparecen en las secuencias 5 y 6, respectivamente, de la tercera subprueba. La obtención de esta contradicción demuestra que '~p' es derivable de la subprueba que se origina en 3, subprueba que está (por su rango) sometida a las hipótesis 1 y 2. Así, se justifica la línea 7 con '(3-5-6) IN'. Luego, el paso 8 indica que es derivable de la hipótesis 1 y la subprueba entre 2 y 7 con la justificación por ICond. Finalmente, se llega a la fórmula 9, que está al final de la barra principal, basada en las secuencias del 1 al 8 y justificada también por la regla ICond.

Vamos a presentar, como nuevas reglas, la introducción y la eliminación de la doble negación como reglas primitivas para facilitar el trabajo en DN y por otras razones que veremos en 8.4.5.

c. R5. Introducción de la doble negación (IDN)

$$\begin{array}{r|ll}
 & \vdots & \\
i & A & \text{(Justif.)} \\
 & \vdots & \\
j & \sim\sim A & \text{(i) IDN} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Según esta regla, a partir de una fórmula puedo derivar inmediatamente su doble negación, es decir, a partir de una fórmula de tipo A puedo derivar ~~A por IDN.

d. R6. Eliminación de la doble negación (EDN)

	⋮	
i	~~A	(Justif.)
	⋮	
j	A	(i) EDN
	⋮	

En este caso, EDN nos permite derivar inmediatamente una fórmula de tipo A a partir de ~~A, o desde el punto de vista de buscar una demostración de A, nos permite asumir que debemos buscar probar antes ~~A.

Ejemplo (6):

1	~p → q	Hip.
2	~q	Hip.
3	~p	Hip.
4	~p → q	(1) Reit.
5	q	(3,4) ECond.
6	~q	(2) Reit.
7	~~p	(3-5-6) IN
8	p	(7) EDN
9	~q → p	(2-8) ICond.
10	~p → q .→. ~q → p	(1-9) ICond.

Nuevamente describiendo el proceso seguido en el ejemplo (6): la fórmula que se ha demostrado está en 10, al final de la barra principal. Esta fórmula ha requerido generar la hipótesis que está en 1 y la consecuencia que está en 9 (en el sentido de buscar su demostración por ese camino), para aplicar la regla ICond. originando la primera subprueba. La fórmula 9, a su vez, ha dado origen a la hipótesis que está en 2 y a la fórmula que está en la secuencia 8 permitida también por ICond. con lo que se tiene la segunda subprueba.

La fórmula que aparece en 8 no parece poder derivarse de 1 y 2. En casos como éste, es bueno tantear la posibilidad de que 8 se obtenga por EDN, con lo que suponemos 7, fórmula que es la doble negación de 8. Como la fórmula en 7 es negativa, podemos tratar de probarla por IN, dando origen a una tercera subprueba, en la que debe buscarse una contradicción (una fórmula y su negación). Con las hipótesis con las que en ese momento se cuenta, derivar las dos fórmulas contradictorias es simple.

Como en los otros casos, la derivación se genera de abajo hacia arriba; pero al final, debe leerse de arriba hacia abajo.

Ejercicios

1. Demuestre las reglas *Modus Tollens* (MT) y Silogismo Hipotético (SHP).

1.1			1.2		
	⋮			⋮	
i	A → B		i	A → B	
	⋮			⋮	
j	~B		j	B → C	
	⋮			⋮	
k	~A	MT (i,j)	k	A → C	SHP (SHP) (i,j)
	⋮			⋮	

2. Efectúe las siguientes deducciones.

2.1. p → (q → ⊦), q ~r → ~p
2.2. ⊢ (p → ~r .→. p → ~q) .→. p → (~r → ~q)
2.3. (p → q) ⇸ p p
2.4. (p → r) → ~t, ~(p → r) ⇸ q ~(s → q) → (t → ~p)

Solución:

1. La demostración es:

(1)			
1	A → B		Hip.
2	~B		Hip.
3		│A	Hip.
4		│A → B	Reit. (1)
5		│B	ECond. (3,4)
6		│~B	Reit. (2)
7	~A		IN (3-5-6)

(2)			
1	A → B		Hip.
2	B → C		Hip.
3		│A	Hip.
4		│A → B	Reit. (1)
5		│B	ECond. (3,4)
6		│B → C	Reit. (2)
7		│C	ECond. (5,6)
8	A → C		ICond. (3-7)

2. (1) En este caso tenemos:

```
 1 | p → (q → r)                 Hip.
 2 | q                           Hip.
   |---
 3 |   | ~r                      Hip.
   |   |---
 4 |   |   | p                   Hip.
   |   |   |---
 5 |   |   | p → (q → r)         Reit. (1)
 6 |   |   | q                   Reit. (2)
 7 |   |   | q → r               ECond. (4,5)
 8 |   |   | r                   ECond. (6,7)
 9 |   |   | ~r                  Reit. (3)
10 |   | ~p                      IN (4-8-9)
11 | ~r → ~p                     ICond. (3-10)
```

(2) La demostración es:

```
 1 |   | p → ~r .→. p → ~q                        Hip.
   |   |---
 2 |   |   | p                                    Hip.
   |   |   |---
 3 |   |   |   | ~r                               Hip.
   |   |   |   |---
 4 |   |   |   |   | p                            Hip.
   |   |   |   |   |---
 5 |   |   |   |   | ~r                           Reit. (3)
 6 |   |   |   | p → ~r .→. p → ~q                Reit. (1)
 7 |   |   |   | p → ~r                           ICond. (4-5)
 8 |   |   |   | p → ~q                           ECond. (6,7)
 9 |   |   |   | p                                Reit. (2)
10 |   |   |   | ~q                               ECond. (8,9)
11 |   |   | ~r → ~q                              ICond. (3-10)
12 |   | p → (~r → ~q)                            ICond. (2-11)
13 | (p→~r .→. p→~q) .→. p → (~r → ~q)            ICond. (1-12)
```

Nótese que se puede intercambiar el orden de algunos pasos, como el 6 y el 7.

(3) Tenemos que:

```
 1 | (p → q) → p                 Hip.
   |---
 2 |   | ~p                      Hip.
   |   |---
   |   |
   |   |
   |  ~~p
   | p
```

Para continuar la deducción, tengamos presente la regla MT (ejercicio 1a), según la cual si aparecen una fórmula condicional y la negación de su consecuente, se puede concluir la negación del antecedente. Aplicando esta regla, es claro que de los pasos 1 y 2 será posible deducir '~(p → q)', en efecto:

```
 1 │(p → q) → p              Hip.
 2 │    │~p                  Hip.
 3 │    │    │p → q          Hip.
 4 │    │    │(p → q) → p    Reit. (1)
 5 │    │    │p              ECond. (3,4)
 6 │    │    │~p             Reit. (2)
 7 │    │~(p → q)            IN (3-5-6)
   │    │
   │    │:
   │  ~~p
   │p
```

Ahora buscaremos probar 'p → q':

```
 1 │(p → q) → p              Hip.
 2 │    │~p                  Hip.
 3 │    │    │p → q          Hip.
 4 │    │    │(p → q) → p    Reit. (1)
 5 │    │    │p              ECond. (3,4)
 6 │    │    │~p             Reit. (2)
 7 │    │~(p → q)            IN (3-5-6)
 8 │    │    │p              Hip.
 9 │    │    │~p             Reit. (2)
10 │    │    │q              EN (8,9)
11 │    │p → q               ICond. (8-10)
12 │~~p                      IN (2-7-11)
13 │p                        EDN (12)
```

No dejemos de observar la importancia del paso 12, debido a la forma de la regla IN. Otra demostración podría ser la siguiente:

1	│ (p → q) → p	Hip.
2	│ │ ~p	Hip.
3	│ │ │ p	Hip.
4	│ │ │ ~p	Reit. (2)
5	│ │ │ q	EN (3,4)
6	│ │ p → q	ICond. (3-5)
7	│ │ (p → q) → p	Reit. (1)
8	│ │ p	ECond. (6,7)
9	│ │ ~p	Rep. (2)
10	│ ~~p	IN (2-8-9)
11	│ p	EDN (10)

d. En este caso se observa que de 1 y 4 se puede deducir '~(p → r)', lo que se hace en la primera subprueba del 5 al 8.

1	│ (p → r) → ~t	Hip.
2	│ ~(p → r) → q	Hip.
3	│ │ ~(s → q)	Hip.
4	│ │ │ t	Hip.
5	│ │ │ │ p → r	Hip.
6	│ │ │ │ (p → r) → ~t	Reit. (2)
7	│ │ │ │ ~t	ECond. (5,6)
8	│ │ │ │ t	Reit. (4)
9	│ │ │ ~(p → r)	IN (5-7-8)
10	│ │ │ ~(p → r) → q	Reit. (2)
11	│ │ │ q	ECond. (9,10)
12	│ │ │ │ s	Hip.
13	│ │ │ │ q	Reit. (11)
14	│ │ │ s → q	ICond. (12-13)
15	│ │ │ ~(s → q)	Reit. (3)
16	│ │ │ ~p	EN (14,15)
17	│ │ t → ~p	ICond. (4-16)
18	│ ~(s → q) → (t → ~p)	ICond. (3-17)

¿Puede el lector obtener una prueba que difiera de la nuestra?

4.5. Reglas primitivas de DN

En la construcción de sistemas deductivos, existe un criterio "estético" y "económico" para buscar el menor número posible de reglas que generen todas las fórmulas que se pretende demostrar en el sistema. Este criterio generalmente se opone al pedagógico, pues la disminución de reglas obliga a efectuar demostraciones más largas y 'artificiosas'. Por otro lado, un número menor de reglas permite controlarlas mejor y evitar que entre ellas pueda introducirse algún conflicto. En este apartado, señalaremos un conjunto de reglas primitivas para nuestro sistema, probaremos que ellas generan el resto de reglas; pero dado que el texto busca ser introductorio, trabajaremos las deducciones o derivaciones utilizando el mayor número de reglas compatibles con el objetivo de adiestrar al lector en estas técnicas.

En el lenguaje LP, presentado en 'El lenguaje proposicional (LP)' (8.3.1), los operadores '~' y '→' son símbolos primitivos. Decimos que son primitivos porque son los únicos necesarios en el lenguaje, los otros conectores '∨', '∧' y '↔' se definen a partir de los anteriores. Remitimos al lector a 3.2.4 para más detalles. Las reglas de inferencia con respecto a los dos operadores serán admitidas como reglas primitivas, es decir, las únicas indispensables. Las otras reglas de introducción y eliminación que presentaremos a continuación serán demostradas aplicándose las definiciones introducidas y las reglas admitidas como primitivas. Más aún, de las seis reglas de introducción y de eliminación que tenemos podemos quedarnos con cuatro primitivas: ICond. ECond. IN y EDN. Para esto necesitamos probar que EN e IDN se derivan de éstas:

```
EN  1 |B                 Hip.
    2 |~B                Hip.
      |--
    3 |     |~A          Hip.
      |     |--
    4 |     |B           (1) Reit.
    5 |     |~B          (2) Reit.
    6 |~~A               (3-4-5) IN
    7 |A                 (6) EDN
```

```
IDN 1 |A                 Hip.
      |-
    2 |     |~A          Hip.
      |     |--
    3 |     |A           (1) Reit.
    4 |     |~A          (3) Rep.
    5 |~~A               (2-3-4) IN
```

El resto de reglas que introduciremos se pueden demostrar sólo con las cuatro primitivas más las definiciones de cada conector. Las reglas derivadas son teóricamente innecesarias; pero, como nos interesan consideraciones prácticas, usaremos las seis ya presentadas más las que vayamos introduciendo. Adicionalmente, no debemos olvidar nuestras dos reglas de procedimiento: Reit. y Rep.

5. REGLAS DERIVADAS

5.1. Reglas de la conjunción

a. R7. Introducción de la conjunción (IC)

```
        │⋮
[j]   i │A              (Justif.)
        │⋮
[i]   j │B              (Justif.)
        │⋮
      k │A ∧ B          (i,j) IC
        │⋮
```

La regla IC nos permite derivar la conjunción de dos fórmulas (A ∧ B) a partir de una fórmula A y de otra B. El orden en que aparecen las fórmulas A y B no interesa, como lo muestran [i] y [j]. Esta regla también nos sugiere buscar los dos componentes separadamente si la fórmula que se quiere probar es una conjunción.

Prueba de IC:

```
1 │A                      Hip.
2 │B                      Hip.
  │‾
3 │   │A → ~B             Hip.
  │   │‾
4 │   │A                  (1) Reit.
5 │   │~B                 (3,4) ECond.
6 │   │B                  (2) Reit.
7 │~(A → ~B)              (3-5-6) IN
8 │A ∧ B                  (7) Def. Conj.
```

En esta prueba, se demuestra que (A ∧ B) se deriva de las hipótesis A y B que están en 1 y 2, respectivamente. El paso 8 lo hemos admitido por definición de la conjunción (Def. 3a.) presentada en (8.3.3) aplicada a la fórmula que está en 7. No teníamos otro camino para conectar la conjunción que deseábamos demostrar con las reglas anteriores. Así, se trataba de buscar una prueba de 7. Dado que 7 es una fórmula negativa, IN nos permite elaborar una subprueba con la hipótesis que aparece en 3. Luego, aplicando las reglas de inferencia en la respectiva subprueba, se deriva la contradicción que está expresada en B y ~B, que aparecen en 5 y 6, respectivamente. Esta contradicción demuestra que la fórmula que está en 7 es derivable de las hipótesis 1, 2 y 3, cuya prueba está entre 3 y 6 justificada por IN. Como 8 se deriva de 7 por Def. Conj. (Def. 1), queda demostrada a partir de las hipótesis 1 y 2.

La prueba de $B, A \vdash A \wedge B$ sigue el mismo procedimiento. Dejamos al lector efectuar la demostración.

b. R8. Eliminación de la conjunción (EC)

	R8a.			R8b.	
	⋮			⋮	
i	$A \wedge B$	(Justif.)	i	$A \wedge B$	(Justif.)
	⋮			⋮	
j	A	(i) EC	j	B	(i) EC
	⋮			⋮	

Según esta regla, de una fórmula conjuntiva ($A \wedge B$) se puede derivar inmediatamente uno cualquiera de los dos miembros de la conjunción, es decir, o se puede derivar A por R8a, o se puede derivar B por R8b.

Prueba de EC (R8a.)

1	$\underline{A \wedge B}$	Hip.
3	$\sim A$	Hip.
4	$\underline{A}$	Hip.
5	$\underline{\sim A}$	(3) Reit.
6	$\sim B$	(4,5) EN
7	$A \rightarrow \sim B$	(4-6) ICond.
8	$\sim(A \rightarrow \sim B)$	(2) Reit.
9	$\sim\sim A$	(3-7-8) IN
10	A	(9) EDN

Esta prueba muestra que A se deriva de la Hipótesis (A ∧ B) que está en 1. El procedimiento seguido es, en primer lugar, deducir la fórmula que está en 2 por Def. Conj. (Def. 3a.). Después hemos tomado como referencia la fórmula que está al final de la barra principal, para admitir que esta fórmula A se deriva de su doble negación que aparece colocada en la secuencia 9. La regla IN nos permite elaborar una subprueba a partir de la fórmula que está en 9. Como IN requiere de dos fórmulas contradictorias y ya disponemos de 2 (reiterada en 8), buscamos probar 7. Generamos una segunda subprueba que prueba 7. De este modo queda demostrada la regla EC (R8a). La demostración de R8b sigue el mismo procedimiento con una ligera diferencia en la aplicación de las reglas de inferencia. Sin necesidad de una explicación pormenorizada, el lector podrá seguir:

Prueba de EC (R8b):

1	│A ∧ B	Hip.
2	│~(A → ~B)	(1) Def. Conj.
3	│ │~B	Hip.
4	│ │ │A	Hip.
5	│ │ │~B	(3) Reit.
6	│ │A → ~B	(4-5) ICond.
7	│ │~(A → ~B)	(2) Reit.
8	│~~B	(3-6-7) IN
9	│B	(8) EDN

A continuación demostramos algunas fórmulas válidas a manera de ejemplos, utilizando las reglas introducidas hasta este punto.

Ejemplo (7): ⊢ (p → q) ∧ p .→. (q → r) → (q ∧ r)

1	│ │p → q .∧. p	Hip.
2	│ │ │q → r	Hip.
3	│ │ │p → q .∧. p	(1) Reit.
4	│ │ │p → q	(3) EC
5	│ │ │p	(3) EC
6	│ │ │q	(4,5) ECond.
7	│ │ │r	(2,6) ECond.
8	│ │ │q ∧ r	(6,7) IC
9	│ │(q → r) → (q ∧ r)	(2-8) ICond.
10	│(p → q) ∧ p .→. (q → r) → (q ∧ r)	(1-9) ICond.

Ejemplo (8): $\vdash p \rightarrow (q \wedge r) .\rightarrow. (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

1	│ │ $p \rightarrow (q \wedge r)$	Hip.
2	│ │ │ p	Hip.
3	│ │ │ $p \rightarrow (q \wedge r)$	(1) Reit.
4	│ │ │ $q \wedge r$	(2,3) ECond.
5	│ │ │ q	(4) EC
6	│ │ $p \rightarrow q$	(2-5) ICond.
7	│ │ │ p	Hip.
8	│ │ │ $p \rightarrow (q \wedge r)$	(1) Reit.
9	│ │ │ $q \wedge r$	(7,8) ECond.
10	│ │ │ r	(9) EC
11	│ │ $p \rightarrow r$	(7-10) ICond.
12	│ │ $p \rightarrow q .\wedge. p \rightarrow r$	(6,11) IC
13	│ $p \rightarrow (q \wedge r) .\rightarrow. (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	(1-12) ICond.

Ejercicios

1. Demuestre la validez de '$\sim(r \rightarrow p) \wedge \sim(s \rightarrow q) .\rightarrow. \sim p \wedge \sim q$'

2. Efectúe la siguiente derivación:

$q, (\sim r \wedge p) \rightarrow t, (t \wedge q) \rightarrow \sim s, \sim s \rightarrow (s \wedge \sim q), r \rightarrow \sim p \vdash \sim p$

Solución:

1. Dejamos al lector completar la siguiente prueba:

1	│ │ $\sim(r \rightarrow p) \wedge \sim(s \rightarrow q)$	Hip.
2	│ │ $\sim(r \rightarrow p)$	(1) EC
3	│ │ $\sim(s \rightarrow q)$	(1) EC
4	│ │ │ p	Hip.
5	│ │ │ │ r	Hip.
6	│ │ │ │ p	(4) Reit.
7	│ │ │ $r \rightarrow p$	(5-6) ICond.
8	│ │ │ $\sim(r \rightarrow p)$	(2) Reit.
9	│ │ $\sim p$	(4-7-8) IN
10	│ │ │ q	Hip.
	│ │ │ ⋮	
	│ │ ⋮	
i	│ │ $\sim p \wedge \sim q$	
j	│ $\sim(r \rightarrow p) \wedge \sim(s \rightarrow q) .\rightarrow. \sim p \wedge \sim q$	

2. Esquema de la prueba (buscamos una contradicción en la subprueba para emplear IN):

1	q	Hip.
2	(~r ∧ p) → t	Hip.
3	(t ∧ q) → ~s	Hip.
4	~s → (s ∧ ~q)	Hip.
5	r → ~p	Hip.
6	p	Hip.
	⋮	
i	~p	

Observe el lector en 5 y 6 que por MT, es posible obtener '~r'. El lector debe completar la prueba.

5.2. Reglas del bicondicional

Aprovecharemos que el bicondicional lo hemos definido en términos de condicional y conjunción (Def. 3) en 'El lenguaje proposicional (LP)' (8. 3. 3):

$$(A \leftrightarrow B) = \text{Def. } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

para presentarlo inmediatamente a continuación de la conjunción. La definición elegida muestra claramente que requerimos dos condicionales. Así:

a. R9. Introducción del bicondicional (IB)

		⋮	
[k]	i	A	Hip.
		⋮	
[l]	j	B	(Justif.)
		⋮	
[i]	k	B	Hip.
		⋮	
[j]	l	A	(Justif.)
		⋮	
m		A ↔ B	(i-j, k-l) IB
		⋮	

Según la regla IB, si se requiere probar una fórmula bicondicional (A ↔ B) en una prueba (barra), se puede hacer (introducir el bicondicional) si previamente se tienen dos subpruebas, una de ellas para demostrar que B es derivable A y la otra para demostrar que A es derivable de B. La derivabilidad en cada una de estas subpruebas demostrará que (A ↔ B) es una fórmula válidamente construida.

Prueba de IB:

1	| A	Hip.
2	| B	Hip.
3	A → B	(1-2) ICond.
4	| B	Hip.
5	| A	Hip.
6	B → A	(4-5) ICond.
7	(A → B) ∧ (B → A)	(3,6) IC
8	A ↔ B	(7) Def. Bicond.

Esta prueba nos muestra que la fórmula que está al final de la barra principal, esto es, la fórmula que está en 8, se deriva de su respectiva definición (Def. 3) que aparece en 7; y a la vez 7, por ser una fórmula conjuntiva, se deriva de sus respectivos miembros. Ocurre que estas fórmulas –pasos 3 y 6 que son miembros de la conjunción– se generan cada una, a partir de sus respectivas subpruebas (por ICond.). En este caso, la derivabilidad de B a partir de A y de A a partir de B (1-2 y 4-5) son de las hipótesis del bicondicional. En todos los otros pasos, se puede observar la justificación respectiva.

b. R10. Eliminación del bicondicional (EB)

R10a			R10b		
	⋮			⋮	
i	A ↔ B	(Justif.)	i	A ↔ B	(Justif.)
	⋮			⋮	
j	A	(Justif.)	j	B	(Justif.)
	⋮			⋮	
k	B	(i,j) EB	k	A	(i,j) EB
	⋮			⋮	

La regla EB se conoce también como el *Modus Ponens* para el bicondicional. Según esta regla, de una fórmula bicondicional y de la afirmación de uno de sus miembros, se deriva el otro miembro. Las pruebas de EB se dejan al lector.

A continuación, algunos ejemplos ilustrativos del uso de las reglas introducidas hasta ahora.

Ejemplo (9): $\vdash p \leftrightarrow {\sim}{\sim}p$ teorema de la doble negación.

1	$\mid\ \mid \underline{p}$	Hip.
2	$\mid\ \mid {\sim}{\sim}p$	(1) IDN
3	$\mid\ \mid \underline{{\sim}{\sim}p}$	Hip.
4	$\mid\ \mid p$	(3) EDN
5	$\mid p \leftrightarrow {\sim}{\sim}p$	(1-2, 3-4) IB

Se puede apreciar en esta demostración que la fórmula bicondicional ha requerido de dos subpruebas y en cada una de ellas, la justificación de las reglas aplicadas pertenece a la doble negación.

Ejemplo (10): $\vdash p \rightarrow q \ .{\leftrightarrow}.\ {\sim}q \rightarrow {\sim}p$ teorema de transposición.

1	$\mid\ \mid \underline{p} \rightarrow q$	Hip.
2	$\mid\ \mid\ \mid \underline{{\sim}q}$	Hip.
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{p}$	Hip.
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid p \rightarrow q$	(1) Reit.
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid q$	(3,4) ECond.
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid {\sim}q$	(2) Reit.
7	$\mid\ \mid\ \mid {\sim}p$	(3-5-6) IN
8	$\mid\ \mid {\sim}q \rightarrow {\sim}p$	(2-7) ICond.
9	$\mid\ \mid \underline{{\sim}q} \rightarrow {\sim}p$	Hip.
10	$\mid\ \mid\ \mid \underline{p}$	Hip.
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{{\sim}q}$	Hip.
12	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid {\sim}q \rightarrow {\sim}p$	(9) Reit.
13	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid {\sim}p$	(11,12) ECond.
14	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid p$	(10) Reit.
15	$\mid\ \mid\ \mid {\sim}{\sim}q$	(11-13-14) IN
16	$\mid\ \mid\ \mid q$	(15) EDN
17	$\mid\ \mid p \rightarrow q$	(10-16) ICond.
18	$\mid p \rightarrow q \ .{\leftrightarrow}.\ {\sim}q \rightarrow {\sim}p$	(1-8, 9-17) IB

De la prueba anterior, queremos que el lector rescate la técnica seguida para derivar '~p' de 'p → q' y '~q', técnica que se repite al derivar de '$\sim q \rightarrow \sim p$' y 'p' la fórmula 'q' (véanse los ejercicios resueltos).

Ejemplo (11): $\vdash p \leftrightarrow q \,.\!\leftrightarrow\!.\, q \leftrightarrow p$ conmutatividad del condicional.

1	$p \leftrightarrow q$	Hip.
2	q	Hip.
3	$p \leftrightarrow q$	(1) Reit.
4	p	(2,3) EB
5	p	Hip.
6	$p \leftrightarrow q$	(1) Reit.
7	q	(5,6) EB
8	$q \leftrightarrow p$	(2-4, 5-7) IB
9	$q \leftrightarrow p$	Hip.
10	p	Hip.
11	$q \leftrightarrow p$	(9) Reit.
12	q	(10,11) EB
13	q	Hip.
14	$q \leftrightarrow p$	(9) Reit.
15	p	(13,14) EB
16	$p \leftrightarrow q$	(10-12, 13-15) IB
17	$p \leftrightarrow q \,.\!\leftrightarrow\!.\, q \leftrightarrow p$	(1-8, 9-16) IB

Este ejemplo muestra la conmutatividad de la fórmula '$p \leftrightarrow q$'; debe ser obvio demostrar en el metalenguaje de nuestro sistema que todo esquema bicondicional ($A \leftrightarrow B$) es conmutativo, siguiendo las mismas pautas.

5.3. Reglas de la disyunción

La regla de introducción de la disyunción es bastante simple y la damos en las dos versiones que la conmutatividad (véase capítulo II) de la disyunción nos hace esperar:

a. R11 Introducción de la disyunción (ID)

R11a

⋮
i A (Justif.)
⋮
j $A \vee B$ (i) ID
⋮

R11b

⋮
i B (Justif.)
⋮
j $A \vee B$ (i) ID
⋮

Así, en sus dos versiones, la regla ID nos autoriza a derivar $(A \vee B)$ de A o de B. Es decir, dada una fórmula, podemos deducir de ella su disyunción con **cualquier** otra fórmula o la de cualquier fórmula con ella.

Prueba de ID (R11a):

1	A	Hip.
2	$\sim A$	Hip.
3	A	(1) Reit.
4	B	(2,3) EN
5	$\sim A \rightarrow B$	(2-4) ICond.
6	$A \vee B$	(4) Def. Disy. (Def. 2)

De forma análoga se puede demostrar la otra versión de ID.

b. R12 Eliminación de la disyunción (ED)

		⋮	
	i	$A \vee B$	(Justif.)
		⋮	
[l]	j	A	Hip.
[m]	k	C	(Justif.)
		⋮	
[j]	l	B	Hip.
		⋮	
[k]	m	C	(Justif.)
		⋮	
n	C		(i, j-k, l-m) ED
		⋮	

La regla ED nos permite deducir de una disyunción cualquier fórmula siempre y cuando de cada miembro de la disyunción se pueda deducir la fórmula en cuestión. El lector debe percatarse de que la fórmula C puede, eventualmente, ser uno de los miembros de la disyunción, nada lo prohíbe. Por otro lado, deseamos señalar que el orden de aparición de las subpruebas no interesa, por lo que es costumbre bastante extendida, cuando el espacio lo permite, colocar las subpruebas en forma paralela.

Prueba de ED:

```
 1 | A ∨ B                     Hip.
 2 |   | A
   |   | ⋮                     Hip.
 3 |   | C
 4 |   | B
   |   | ⋮                     Hip.
 5 |   | C
 6 | A → C                     (2-3) ICond.
 7 | B → C                     (4-5) ICond.
 8 | ~A → B                    (1) Def. Disy.
 9 |   | ~C                    Hip.
10 |   |   | A                 Hip.
11 |   |   | A → C             (6) Reit.
12 |   |   | C                 (10,11) ECond.
13 |   |   | ~C                (9) Reit.
14 |   | ~A                    (10-12-13) IN
15 |   | ~A → B                (8) Reit.
16 |   | B
17 |   | B → C
18 |   | C
19 | ~~C
20 | C
```

Dejamos al lector la tarea de completar las justificaciones.

Ejemplo (12): $\vdash p \vee (q \vee r) \;.\!\leftrightarrow\!.\; (p \vee q) \vee r$ asociatividad de la disyunción.

La demostración es simple, pero larga. Es cómodo en estos casos separarla en sus dos partes:

$\vdash p \vee (q \vee r) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \vee q) \vee r$
$\vdash (p \vee q) \vee r \;.\!\rightarrow\!.\; p \vee (q \vee r)$

Haremos la primera y dejaremos la otra al cuidado del lector.

1	$p \vee (q \vee r)$	Hip.
2	p	Hip.
3	$p \vee q$	(2) ID
4	$(p \vee q) \vee r$	(3) ID
5	$q \vee r$	Hip
6	q	Hip.
7	$p \vee q$	(6) ID
8	$(p \vee q) \vee r$	(7) ID
9	r	Hip.
10	$(p \vee q) \vee r$	(9) ID
11	$(p \vee q) \vee r$	(5, 6-8, 9-10) ED
12	$p \vee (q \vee r)$	(1, 2-4, 5-11) ED
13	$p \vee (q \vee r) .\rightarrow. (p \vee q) \vee r$	(1-12) ICond.

Note el lector el modo como ED "genera" subpruebas en cantidad. En el siguiente acápite, introduciremos algunas otras reglas que faciliten el manejo del sistema acortando las demostraciones. El costo (parece que todo tiene un costo) estará en la mayor cantidad de reglas que uno tiene que conocer y manejar. Otro aspecto que deseamos resaltar es la aplicación de ID en el paso 10, donde se introduce una fórmula compuesta, frente a sus otras aplicaciones. Debemos recordar que la fórmula que podemos añadir vía ID es realmente cualquiera.

Ejercicios

1. Demostrar las reglas del silogismo disyuntivo.

	⋮			⋮	
i	$A \vee B$		i	$\sim A \vee B$	
	⋮			⋮	
j	$\sim A$		j	A	
	⋮			⋮	
k	B	(i,j) SD	k	B	(i,j) SD
	⋮			⋮	

2. Demuestre

2.1. $\vdash p \vee \sim p$
2.2. $\vdash p \vee q .\leftrightarrow. (p \rightarrow q) \rightarrow q$
2.3. $\vdash [(p \rightarrow r) \rightarrow \sim t] \wedge [\sim(\sim p \vee r) \rightarrow q] .\rightarrow. \sim(s \rightarrow q) \rightarrow (t \rightarrow \sim p)$

3. Demuestre las leyes de De Morgan.

   3.1. $\vdash \sim(A \vee B) .\leftrightarrow. \sim A \wedge \sim B$
   3.2. $\vdash \sim(A \wedge B) .\leftrightarrow. \sim A \vee \sim B$

4. Efectúe las siguientes derivaciones.

   4.1. $(s \rightarrow t) \rightarrow (r \rightarrow q), \sim(p \vee q), t \leftrightarrow s \vdash u \leftrightarrow (\sim r \wedge u)$
   4.2. $p \rightarrow \sim(\sim q \vee s), (\sim s \vee r) \rightarrow \sim t, z \wedge p, \sim t \leftrightarrow u \vdash \sim(\sim u \vee \sim q)$

Solución:

1. Efectuaremos la demostración sólo en el primer caso. El otro queda para el lector.

```
 1 |A ∨ B                     Hip.
 2 |~A                        Hip.
   |--
 3 |        |A                Hip.                  9 |B     Hip.
   |        |-                                        |-
 4 |        |       |~B       Hip.                    |
   |        |       |--                               |
 5 |        |       |~A       Reit. (2)               |
 6 |        |       |A        Reit. (3)               |
 7 |        |~~B              IN (4-5-6)              |
 8 |        |B                EDN (7)              10 |B     Rep. (9)
   |
11 |B                         ED (1, 3-8, 9-10)
```

Nótese la posición de la subprueba 9-10.

2. a. Tenemos la siguiente demostración:

```
1 |        |~(p ∨ ~p)                Hip.
  |        |---------
2 |        |         |~p             Hip.
  |        |         |--
3 |        |         |p ∨ ~p         ID (2)
4 |        |         |~(p ∨ ~p)      Reit. (1)
5 |        |~~p                      IN (2-3-4)
6 |        |p                        EDN (5)
7 |        |p ∨ ~p                   ID (6)
8 | ~~(p ∨~p)                        IN (1-1-7)
9 | p ∨ ~p                           EDN (8)
```

Nótese que suponer que se puede probar 7 es un paso clave para la demostración. También es de resaltar la manera de numerar la justificación del paso 8.

b. En este caso se tiene (dejamos marcadas con '?' algunas reiteraciones que faltan):

```
 1 |   |p ∨ q            Hip.
   |   |-----
 2 |   |    |p → q       Hip.
   |   |    |-----
 3 |   |    |    |p      Hip.                 6 |q    Hip.
   |   |    |    |-                             |-
 4 |   |    |    |p → q  Reit.(2)               |
 5 |   |    |    |q      ECond. (3,4)         7 |q    Rep. (6)
 8 |   |    |q           ED (1?, 3-5, 6-7)
 9 |   |(p → q) → q      ICond. (2-8)
   |⋮
```

Supongamos que la prueba sigue en otra página...

```
10 |   |(p → q) → q
   |   |----
11 |   |    |~(p ∨ q)
   |   |    |-------
12 |   |    |    |q
   |   |    |    |-
13 |   |    |    |p ∨ q
14 |   |    |    |~(p ∨ q)
15 |   |    |~q
16 |   |    |    |p → q
   |   |    |    |-----
17 |   |    |    |?
18 |   |    |    |?
19 |   |    |    |~(p → q)
20 |   |    |~(p → q)
21 |   |    |    |p
   |   |    |    |-
22 |   |    |    |?
23 |   |    |    |~(p ∨ q)
24 |   |    |~p
25 |   |    |    |~p
   |   |    |    |--
26 |   |    |    |    |p
   |   |    |    |    |-
27 |   |    |    |    |~p
28 |   |    |    |    |q
29 |   |    |    |p → q
30 |   |    |    |~(p → q)
31 |   |    |~~p
32 |   |    |p
33 |   |~~(p ∨ q)
34 |   |p ∨ q
35 |p ∨ q .↔. (p → q) → q          IB (1-9, 10-34)
```

Invitamos al lector a justificar los diferentes pasos de esta demostración, así como a estudiar en detalle el origen de los pasos 15, 20 y 24.

c. Proponemos al lector completar y justificar el siguiente esquema de demostración:

```
│[(p → r) → ~t] ∧ [~(~p ∨ r) → q]
│     │~(s → q)
│     │     │t
│     │     │⋮
│     │     │~(p → r)
│     │     │     │~p ∨ r
│     │     │     │⋮
│     │     │~(~p ∨ r)
│     │     │~(~p ∨ r) → q
│     │     │q
│     │     │     │q
│     │     │     │⋮
│     │     │     │~(s → q)
│     │     │~q
│     │     │~p
│     │t → ~p
│~(s → q) → (t → ~p)
```

3. Demostraremos el caso (a) dejaremos las justificaciones y el otro caso al lector (puede faltar algún paso trivial):

```
 1 | |~(A ∨ B)
   | |--------
 2 | |    |A
   | |    |--
 3 | |    |A ∨ B
 4 | |    |~(A ∨ B)
 5 | |~A
 6 | |    |B
   | |    |--
 7 | |    |A ∨ B
 8 | |    |~(A ∨ B)
 9 | |~B
10 | |~A ∧ ~B
11 | |~A ∧ ~B
   | |--------
12 | |    |A ∨ B
   | |    |--
13 | |    |~A
14 | |    |    |A              17 |B
   | |    |    |--               |--
15 | |    |    |~A               |
16 | |    |    |B              18 |B
19 | |    |B
20 | |    |~B
21 | |~(A ∨ B)
22 |~(A ∨ B) .↔. ~A ∧ ~B
```

Ahora que dispone de las reglas de De Morgan (DM), ¿puede acortar la demostración del ejercicio (2b)

4. (a)

1	$(s \to t) \to (r \to q)$	Hip.
2	$\sim(p \vee q)$	Hip.
3	$t \leftrightarrow s$	Hip.
4	$\quad u$	Hip.
5	$\quad\quad r$	Hip.
6	$\quad\quad\quad s$	Hip.
7	$\quad\quad\quad t \leftrightarrow s$	Reit. (3)
8	$\quad\quad\quad t$	EB (6,7)
9	$\quad\quad s \to t$	ICond. (6-8)
10	$\quad\quad (s \to t) \to (r \to q)$	Reit. (1)
11	$\quad\quad r \to q$	ECond. (9,10)
12	$\quad\quad q$	ECond. (5,11)
13	$\quad\quad\quad q$	Hip.
14	$\quad\quad\quad p \vee q$	ID (13)
15	$\quad\quad\quad \sim(p \vee q)$	Reit. (2)
16	$\quad\quad \sim q$	IN (13-14-15)
17	$\quad \sim r$	IN (5-12-16)
18	$\quad \sim r \wedge u$	IC (4,17)
19	$\quad \sim r \wedge u$	Hip.
20	$\quad u$	EC (19)
21	$u \;.\!\leftrightarrow\!.\; (\sim r \wedge u)$	IB (4-18, 19-20)

Proponemos al lector efectuar la demostración cambiando la fórmula del paso 3 por '$\sim t \leftrightarrow \sim s$'.

b. En este caso, tenemos:

1	$p \to \sim(\sim q \vee s)$
2	$(\sim s \vee r) \to \sim t$
3	$z \wedge p$
4	$\sim t \leftrightarrow u$
5	$\quad \sim u \vee \sim q$
	$\quad \vdots$
12	$\quad q$
	$\quad \vdots$
16	$\quad \sim s$
	$\quad \vdots$
18	$\quad \sim t$
19	$\quad u$
	$\quad \vdots$
25	$\quad \sim u$
26	$\sim(\sim u \vee \sim q)$

Los números después de 5 son una sugerencia, puede que el lector abrevie o alargue la demostración.

6. EJERCICIOS PROPUESTOS

Para aquéllos que hayan leído todo el capítulo aclaramos que los ejercicios de esta sección deben efectuarse sin emplear las llamadas 'reglas adicionales'.

1. Efectúe las demostraciones siguientes.

1.1 $\vdash p \rightarrow [s .\rightarrow. r \rightarrow (q \rightarrow p)]$
1.2 $\vdash (p \wedge r) \rightarrow q .\rightarrow. p \rightarrow (r \rightarrow q)$
1.3 $\vdash {\sim}p \rightarrow [t \leftrightarrow u .\rightarrow. (s \leftrightarrow w) \rightarrow (r \vee k .\rightarrow. p \rightarrow q)]$
1.4 $\vdash {\sim}p \rightarrow (q .\rightarrow. r \rightarrow s) .\rightarrow. q \rightarrow (r \rightarrow {\sim}p .\rightarrow. r \rightarrow s)$
1.5 $\vdash [p \rightarrow (q \wedge t)] \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s) .\rightarrow. (p \rightarrow s)$
1.6 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow t) .\rightarrow. (s \wedge q) \rightarrow t$
1.7 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r) .\rightarrow. (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1.8 $\vdash (p \rightarrow p .\rightarrow. p) \rightarrow p$
1.9 $\vdash$
1.10 $\vdash (p \rightarrow q) \wedge {\sim}(r \rightarrow q) .\rightarrow. {\sim}(r \rightarrow p)$
1.11 $\vdash {\sim}(p \vee q) \rightarrow ({\sim}p \wedge {\sim}q)$
1.12 $\vdash [p \rightarrow {\sim}(q \vee r)] \wedge (r \vee {\sim}t) .\rightarrow. (s \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow {\sim}p)$
1.13 $\vdash [(r \vee t) \rightarrow (w \wedge k)] \wedge [(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)] .\rightarrow. (q \wedge {\sim}w) \rightarrow {\sim}k$
1.14 $\vdash p \rightarrow {\sim}(s \vee r) .\rightarrow. [(q \leftrightarrow s) \rightarrow {\sim}(r \leftrightarrow t)] \rightarrow [{\sim}({\sim}s \wedge {\sim}r) \rightarrow {\sim}p]$
1.15 $\vdash {\sim}p \rightarrow (q \wedge {\sim}r) .\rightarrow. (s \vee q .\rightarrow. r) \rightarrow p$
1.16 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p .\rightarrow. (p \vee r)$
1.17 $\vdash (p \rightarrow {\sim}r) \wedge [(r \rightarrow q) \rightarrow {\sim}p] .\rightarrow. {\sim}p$
1.18 $\vdash ({\sim}p \rightarrow p) \rightarrow p$
1.19 $\vdash {\sim}p \rightarrow {\sim}q .\rightarrow. q \rightarrow p$
1.20 $\vdash {\sim}(p \rightarrow p) \rightarrow q$
1.21 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p .\rightarrow. p$

2. Derive:

2.1 $p \rightarrow r,\ q \rightarrow s \vdash (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$
2.2 $p \rightarrow (q .\rightarrow. r \leftrightarrow t) \vdash p \wedge {\sim}s .\rightarrow. (q \vee {\sim}s) \vee w$
2.3 $({\sim}p \vee q) \rightarrow r,\ ({\sim}s \vee r) \rightarrow t \vdash {\sim}p \rightarrow (t \vee w)$
2.4 $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
2.5 $p \rightarrow {\sim}q \vdash r \rightarrow q .\rightarrow. {\sim}(p \wedge r)$

2.6 $r \vee s \;.\!\rightarrow\!.\; p \wedge q,\ t \wedge r \vdash w \rightarrow \sim(\sim p \wedge \sim s)$

2.7 $r \vdash (q \rightarrow r) \wedge \sim(r \;.\!\rightarrow\!.\; \sim p \wedge \sim r)$

2.8 $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r \vdash r \rightarrow \sim p$

2.9 $q \rightarrow \sim r,\ p \;.\!\rightarrow\!.\; r \rightarrow q \vdash \sim(p \wedge r)$

2.10 $p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p$

2.11 $p \rightarrow q \vdash \sim q \rightarrow \sim p$

2.12 $\sim(p \wedge q) \vdash p \rightarrow \sim q$

2.13 $p \rightarrow \sim q \vdash \sim(p \wedge q)$

3. Derive:

3.1 $p \rightarrow q \vdash p \leftrightarrow (p \wedge q)$

3.2 $p \leftrightarrow q \vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \wedge p)$

3.3 $p \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow r \vdash p \leftrightarrow r$

3.4 $p \leftrightarrow q,\ r \leftrightarrow s \vdash (p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow s)$

3.5 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r) \;.\!\leftrightarrow\!.\; \sim r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

3.6 $\vdash (p \rightarrow t) \leftrightarrow \sim(\sim r \leftrightarrow s) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \wedge \sim t) \rightarrow \sim(r \leftrightarrow s)$

3.7 $\sim(p \leftrightarrow q) \vdash \sim q \rightarrow p$

3.8 $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (r \rightarrow s),\ r,\ \sim s \vdash \sim(q \rightarrow \sim p)$

3.9 $\vdash [(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \;.\!\leftrightarrow\!.\; (s \leftrightarrow t)] \rightarrow [(r \leftrightarrow q) \rightarrow (t \rightarrow s)]$

3.10 $\vdash (p \wedge \sim q) \rightarrow r \;.\!\leftrightarrow\!.\; \sim r \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

3.11 $\vdash s \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge [(r \leftrightarrow s) \leftrightarrow q] \;.\!\rightarrow\!.\; (p \leftrightarrow r)$

3.12 $\vdash [(s \leftrightarrow \sim r .\!\leftrightarrow\!. \sim p) \leftrightarrow \sim q] \wedge (\sim r \leftrightarrow \sim q) \wedge (\sim r .\!\leftrightarrow\!. s \leftrightarrow \sim p) \wedge s \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \leftrightarrow \sim p$

3.13 $\vdash (p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \;.\!\rightarrow\!.\; r$

3.14 $\vdash (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \;.\!\rightarrow\!.\; (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$

3.15 $\vdash (\sim p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

3.16 $(p \leftrightarrow r) \vee (q \leftrightarrow s) \vdash (r \wedge s) \rightarrow (q \vee p)$

3.17 $p \vee r \vdash (q \rightarrow p \;.\!\rightarrow\!.\; r \vee t) \rightarrow (t \vee r)$

3.18 $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \vdash (\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

3.19 $p \vee q \vdash (r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q)$

3.20 $\sim p \vee q \vdash q \leftrightarrow (p \vee q)$

3.21 $p \rightarrow \sim(s \vee r) \vdash \sim(\sim s \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$

4. Pruebe por deducción natural la validez de:

4.1 $(p \rightarrow q) \;.\!\rightarrow\!.\; (\sim p \rightarrow q) \rightarrow q$

4.2 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

4.3 $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \;.\!\vee\!.\; \sim q \rightarrow q)$

4.4 $(p \rightarrow q) \rightarrow p \;.\!\rightarrow\!.\; p$

4.5 $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \vee \sim q) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim p \vee (r \rightarrow \sim q)$

4.6 $q \leftrightarrow (p \vee q) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim p \vee q$

4.7 (~p ∨ q) → [(~r ∨ s) .→. (q → ~s) → (p → ~r)]

7. REGLAS ADICIONALES

En esta sección añadiremos algunas reglas con la finalidad de aligerar las demostraciones y que el lector se familiarice con un conjunto más amplio de reglas de inferencia que puede encontrar en otros contextos.

El problema estriba en decidir qué es un conjunto adecuado de reglas de inferencia. No todas las posibles, pues entonces el ejercitarse en derivaciones es trivial; se convierte exclusivamente en un problema de memoria. Por otro lado, muy pocas reglas alargan y hacen pesadas las demostraciones. Nuestra elección está basada en una cierta "costumbre".

a. R13. *Modus Tollens* (MT)

		⋮	
[j]	i	A → B	(Justif.)
		⋮	
[i]	j	~B	(Justif.)
		⋮	
	k	~A	(i,j) MT
		⋮	

Esta regla ya había sido presentada en los ejercicios resueltos. En la aplicación de la regla puede ocurrir que ~B se presente antes que (A → B).

Un ejemplo de su aplicación nos lo proporciona:

Ejemplo (13): ~p → q, p → r, q → r ⊢ r

No parece infundado pensar que la segunda o tercera premisa nos proporcionarán 'r', para lo cual necesitamos romper alguno de los condicionales. Ahora disponemos de dos maneras de romper condicionales: ECond. y MT. Dada la conclusión pedida y la necesidad de romper condicionales, podemos pensar en un planteamiento con una subprueba para aplicar IN. Así:

1	$\sim p \rightarrow q$	Hip.
2	$p \rightarrow r$	Hip.
3	$q \rightarrow r$	Hip.
4	$\qquad \sim r$	Hip.
5	$\qquad p \rightarrow r$	(2) Reit.
6	$\qquad \sim p$	(4,5) MT
7	$\qquad \sim p \rightarrow q$	(1) Reit.
8	$\qquad q \rightarrow r$	(3) Reit.
9	$\qquad q$	(6,7) ECond.
10	$\qquad r$	(8,9) ECond.
11	$\sim\sim r$	(4-4-10) IN
12	r	(11) EDN

La prueba es estándar, aunque cabe señalar que el paso 4 juega un doble papel en la subprueba 4-10; ya que hace de hipótesis y, al mismo tiempo, contradice al paso 10.

b. R14. Silogismo disyuntivo (SD)

Tiene dos formulaciones:

R14a

	$\vdots$	
i	$A \vee B$	(Justif.)
	$\vdots$	
j	$\sim A$	(Justif.)
	$\vdots$	
k	B	(i,j) SD
	$\vdots$	

R14b

	$\vdots$	
i	$A \vee B$	(Justif.)
	$\vdots$	
j	$\sim B$	(Justif.)
	$\vdots$	
k	A	(i,j) SD
	$\vdots$	

La prueba de R14a la hemos presentado antes. Un ejemplo de empleo de SD lo tenemos en la siguiente derivación:

Ejemplo (14):

$\sim p \vee q$
$\sim r \vee s$
$\sim q \vee \sim s \; // \therefore \; \sim p \vee \sim r$

Derivación:

1	${\sim}p \vee q$	Hip.
2	${\sim}r \vee s$	Hip.
3	${\sim}q \vee {\sim}s$	Hip.
4	${\sim}q$	Hip.
5	${\sim}p \vee q$	(1) Reit.
6	${\sim}p$	(4,5) SD
7	${\sim}p \vee {\sim}r$	(6) ID
8	${\sim}s$	Hip.
9	${\sim}r \vee s$	(2) Reit.
10	${\sim}r$	(8,9) SD
11	${\sim}p \vee {\sim}r$	(10) ID
12	${\sim}p \vee {\sim}r$	(3, 4-7, 8-11) ED

El lector recordará que en el capítulo IV (4.1.3) mencionamos un principio de sustitución por equivalentes. El reflejo (nada pálido) de esa ley en DN será la regla de intercambio.

Para enunciar la siguiente regla convengamos en la siguiente notación:

A(B) designa una fórmula dentro de la cual aparece una o más veces el esquema B. Por ejemplo, si A es ‘$(p \vee {\sim}q) \rightarrow [r \wedge (p \vee {\sim}q)]$’, entonces B puede ser ‘$p \vee {\sim}q$’ que aparece dos veces en A (también podría ser ‘p’ o ‘r’).

A(B/C) designa la fórmula que resulta de reemplazar el esquema B por el esquema C, **al menos en uno** de los lugares en que aparece B. De modo que en la fórmula A(B/C) aparece C por lo menos una vez, bien puede ocurrir que se haya reemplazado B todas las veces que aparecía, con lo que A(B/C) puede no contener ya a B.

La expresión $B \Leftrightarrow C$ afirma que $B \vdash C$ y también $C \vdash B$. Diremos que se trata de una equivalencia sintáctica.

c. R15. Intercambio (INT)

Si se sabe que $B \Leftrightarrow C$, entonces procede:

	⋮	
i	A(B)	(Justif.)
	⋮	
j	A(B/C)	(i) INT
	⋮	

Así como no probamos la sustitución por equivalentes, tampoco probaremos esta regla pues nos llevaría más allá de los límites que nos hemos impuesto. Para su aplicación, la regla de intercambio requiere que previamente se disponga de ciertos "equivalentes". Nosotros aceptaremos los siguientes:

1. $A \Leftrightarrow \sim\sim A$ Doble negación (DN)
2. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ Asociatividad de la disyunción (Asoc.)
3. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ Asociatividad de la conjunción (Asoc.)
4. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee C$ Conmutatividad de la disyunción (Conmut.)
5. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge C$ Conmutatividad de la conjunción (Conmut.)
6. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim(A \wedge \sim B)$ Definición del condicional en conjunción (Def. Cond.)
7. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$ Definición del condicional en disyunción (Def. Cond.)
8. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ Definición del bicondicional (Def. Bicond.)
9. $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$ De Morgan (DM)
10. $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$ De Morgan (DM)
11. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$ Transposición (Transp.)

La lista de "equivalencias" sintácticas (que son verdaderas equivalencias semánticas como puede comprobarse haciendo los respectivos DS) no es completa, ni siquiera con respecto a las que tradicionalmente se citan; (en los ejercicios el lector encontrará las que no figuran acá). Al presentar cada "equivalencia" para intercambio hemos colocado entre paréntesis la abreviación que se escribirá en la justificación. Se puede apreciar que "equivalencias" distintas tienen la misma abreviatura pues, por ejemplo, no vale la pena diferenciar la asociatividad de la disyunción de la asociatividad de la conjunción por la abreviación, pues será obvio cuál se utiliza.

Debemos confeccionar pruebas en el metalenguaje de DN que establezcan cada una de las once "equivalencias" entre esquemas de fórmulas citadas. Para esto debemos demostrar en cada caso que partiendo de cualquiera de los lados (izquierda o derecha) del símbolo '⇔' se puede llegar al otro.

La equivalencia 2 se establece siguiendo el ejemplo 12. Las equivalencias 1, 3, 4 y 5 son triviales. La 8 se sigue de la def.cc de forma inmediata.

Lo anterior quiere decir que el lector debe efectuar las pruebas con todo detalle. Nosotros nos ocuparemos de probar 6, 7, 9, 10 y 11 utilizando la regla de intercambio (INT).

Definición del condicional (Def. Cond.) en conjunción.

```
1 |A → B          Hip.
2 | |A ∧ ~B       Hip.
  | |
3 | |A            (2) EC
4 | |~B           (2) EC
5 | |A → B        (1) Reit.
6 | |B            (3,5)ECond.
7 |~(A∧~B)        (2-4-6) IN
```

```
1 |~(A ∧ ~B)          Hip.
2 | |A                Hip.
  | |
3 | | |~B             Hip.
4 | | |A              (2) Reit.
5 | | |A ∧ ~B         (3, 4) IC
6 | | |~(A ∧ ~B)      (1)Reit.
7 | |~~B              (3-5-6) IN
8 | |B                (7) EDN
9 |A → B              (2-8)ICond.
```

Bastan esas dos pruebas para probar la equivalencia, sólo habría que añadir una línea.

Definición de condicional (Def. Cond.) en disyunción.

```
1 |A → B          Hip.
2 |~~A → B        (1) INT DN
3 |~A ∨ B         (2) Def. Disyunc.+DN
```

```
1 |~A ∨ B         Hip.
2 |~~A → B        (1) Def. Disyunc.
3 |A → B          (2) INT DN
```

Notará el lector que INT otorga mucha holgura; pues, si bien la prueba que de ${\sim}{\sim}A \rightarrow B$ se deriva $A \rightarrow B$ es trivial sin INT, se alarga inútilmente. Equivalencias de De Morgan (DM).

Estas reglas recogen la relación entre conjunción y disyunción (su llamada dualidad). Su demostración, gracias a la regla de intercambio es bastante corta, sin ésta sería muy larga.

1	${\sim}(A \wedge B)$	Hip.
2	${\sim}(A \wedge {\sim}{\sim}B)$	(1) INT DN.
3	$A \rightarrow {\sim}B$	(2) INT Def. Cond.
4	${\sim}A \vee {\sim}B$	(3) INT Def. Cond.

1	${\sim}A \vee {\sim}B$	Hip.
2	$A \rightarrow {\sim}B$	(1) INT Def. Cond.
3	${\sim}(A \wedge {\sim}{\sim}B)$	(2) INT Def. Cond.
4	${\sim}(A \wedge B)$	(3) INT DN

Note el lector que las "equivalencias" se aplican tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda (sin alusiones políticas).

La otra forma de DM que presentamos se prueba así:

1	${\sim}(A \vee B)$	Hip.
2	$\mid\ {\sim}B$	Hip.
3	$\mid\ A \rightarrow B$	(1) Reit.
4	$\mid\ {\sim}A$	(2,3) MT
5	${\sim}B \rightarrow {\sim}A$	(2-4) ICond.

Para la demostración de la transposición, tenemos:

1	${\sim}B \rightarrow {\sim}A$	Hip.
2	$\mid\ A$	Hip.
3	$\mid\ {\sim}{\sim}A$	(2) IDN
4	$\mid\ {\sim}B \rightarrow {\sim}A$	(1) Reit.
5	$\mid\ {\sim}{\sim}B$	(3, 4) MT
6	$\mid\ B$	(5) EDN
7	$A \rightarrow B$	(2-6) ICond.

El manejo de las reglas anteriores nos parece más que suficiente para resolver, con relativa facilidad, todas las derivaciones. Veamos un ejemplo, en el que acortaremos la prueba aplicando la misma regla de intercambio más de una vez en un solo paso.

Ejemplo 15:

derivar $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$s \rightarrow (t \rightarrow u)$
$(s \rightarrow \sim t) \rightarrow \sim q$
$\sim u$ $\quad // \therefore \sim r \rightarrow \sim p.$

1	$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$	Hip.
2	$s \rightarrow (t \rightarrow u)$	Hip.
3	$(s \rightarrow \sim t) \rightarrow \sim q$	Hip.
4	$\sim u$	Hip.
5	$\sim r$	Hip.
6	$s \rightarrow (t \rightarrow u)$	(2) Reit.
7	$\sim u$	(4) Reit.
8	$\sim s \vee (\sim t \vee u)$	(6) INT Def. Cond.
9	$(\sim s \vee \sim t) \vee u$	(8) INT Asoc.
10	$\sim s \vee \sim t$	(7,9) SD

continúa...

11	$s \rightarrow \sim t$	(10) INT Def. Cond.
12	$(s \rightarrow \sim t) \rightarrow \sim q$	(3) Reit.
13	$\sim q$	(11, 12) ECond.
14	$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$	(1) Reit.
15	$\sim\sim(p \rightarrow q)$	(5, 14) MT
16	$p \rightarrow q$	(15) EDN
17	$\sim p$	(13, 16) MT
18	$\sim r \rightarrow \sim p$	(5-17) ICond.

Si el lector trata de hacer la derivación sin las reglas adicionales verá que se puede, pero por lo menos en el doble de pasos.

8. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demuestre la validez de las siguientes inferencias:

a) p1) $p \rightarrow q$
p2) $\sim q \wedge r$
p3) $\sim p \rightarrow s$
p4) $\sim(r \leftrightarrow \sim t) \quad // \therefore s$
b) p1) $(p \vee s) \rightarrow r$
p2) $\sim(q \vee \sim s)$
p3) $t \rightarrow q$
p4) $\sim(r \wedge \sim t) \vee p \; // \therefore s \rightarrow p$
c) p1) $(\sim r \wedge p) \rightarrow t$
p2) $(t \wedge q) \rightarrow \sim s$
p3) $\sim s \rightarrow (s \wedge \sim q)$
p4) p
p5) $(r \rightarrow \sim p) \; // \therefore \sim q$
d. p1) $p \leftrightarrow \sim r$
p2) $p \rightarrow (s \vee t)$
p3) $(t \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow w)$
p4) $z \rightarrow q \; // \therefore (\sim s \wedge \sim r) \rightarrow w$

Trate de hacerlas sin reglas adicionales.

2. Demuestre por Deducción Natural la validez de los siguientes argumentos:

2.1 Si hay una violación de la constitución, los jueces de la Corte Suprema renunciarían si fuesen demócratas. Además, si hay una violación constitucional o usurpación de poderes, entonces se violan los derechos ciudadanos. Por lo tanto, si se da una violación constitucional y los jueces de la Corte Suprema no han renunciado, entonces se violarán los derechos ciudadanos y los jueces de la Corte Suprema no serán demócratas.

2.2 Si no existe Santa Claus, la navidad es triste y los niños no sonreirán. Si los niños reciben regalos o son felices en su hogar, entonces los niños sonreirán. La navidad es triste aunque no nieve en Diciembre. Luego, existe Santa Claus, puesto que los niños son felices en su hogar y en diciembre no nieva.

2.3 Si la hoja tiene nervaduras paralelas, se clasifica como paralelinervadas; y si la hoja tiene nervaduras como los dedos de una mano, se clasifica como palmatinervada. Si la hoja tiene forma de punta de flecha, se clasifica como hoja asaetada; y si tiene forma de punta de lanza, se clasifica como hoja lanceolada. Por lo tanto, la hoja se clasificará como palmatinervada y hoja lanceolada, porque la hoja tiene nervaduras como los dedos de la mano y tiene la forma de punta de lanza.

2.4 Si Pamela aumenta azúcar a la receta, los niños la encontrarán deliciosa pero al abuelo le parecerá muy dulce. Si Pamela no aumenta azúcar a la receta, entonces le sobrará azúcar suficiente para preparar caramelo. Luego, a Pamela le ha sobrado azúcar suficiente para preparar caramelo si al abuelo no le parece muy dulce la receta.

3. Encuentre la premisa que falta por diagramas semánticos para que la inferencia sea válida. Después, demuestre que la conclusión se sigue del conjunto de premisas por Deducción Natural. ¿Es única la respuesta?

p1) $r \rightarrow (s \wedge q)$
p2) $(t \vee p) \rightarrow r$
p3) ... $/ \therefore q$

4. Si son ciertas las siguiente afirmaciones:

a1) Si en la tarde Claudia regresa a la zapatería donde trabaja, habrá ganado el premio a la vendedora estrella.
a2) Claudia recibirá un cheque siempre que gane el premio a la vendedora estrella.
a3) Si Claudia recibe un cheque, o bien comprará un par de zapatos que haga juego con su bolso si en la tarde regresa a la zapatería donde trabaja, o bien se comprará un bolso nuevo si en la noche va a la boutique.
a4) Claudia se comprará un par de zapatos que haga juego con su bolso si ella se compra un bolso nuevo.
a5) Además, en la tarde regresó a la zapatería donde trabaja.
a6) Sin embargo, en la noche fue a la boutique.

a) Demostrar por Deducción Natural que de lo anterior se deduce que 'Claudia se va a comprar un par de zapatos que haga juego con su bolso'.
b) Redacte un argumento explicando este razonamiento guiándose por los pasos de la deducción. Por ejemplo:

Si S: Claudia se comprará un par de zapatos que haga juego con su bolso.
F: Claudia se compra un bolso nuevo.

y en la derivación se tiene:

a4) $t \rightarrow s$
...
x) t
x+1) s (4,x) ECond.

entonces la argumentación del paso x+1 será: 'Si Claudia se compra un bolso nuevo, entonces se comprará un par de zapatos que haga juego con su bolso (4); y ya hemos demostrado que ella se comprará un bolso nuevo (x); por lo tanto, es cierto que Claudia se comprará un par de zapatos que haga juego con su bolso (x+1).'

5. En la demostración por Deducción Natural –sin reglas adicionales– de la siguiente inferencia

p1) $p \rightarrow (r \rightarrow q)$
p2) $(p \vee s) \rightarrow t \,//\therefore\, (p \wedge \sim q) \rightarrow (t \wedge \sim r)$
No se necesita utilizar la regla:

A) IC B) EC C) ICond. D) EN E) IN

6. Complete la siguiente prueba.

1	$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	
2	$s \rightarrow t$	
3	$\sim t$	
4		
5		ID (4)
6		Reit. (1)
7		ECond. (5,6)
8		EC (7)
9		Reit. (2)
10		ECond. (8,9)
11		Reit. (3)
12		IN (4-10-11)

7. Dada la siguiente deducción:

```
|      | ~p ∧ (p*q) * ~q
|      |----
|      | ~p
|      | (p*q) * ~q
|      |       | ~q
|      |       |----
|      |       | (p*q) * ~q
|      |       | ~q
|      |       | ~(p*q)
|      |       | ~p
|      |       | (p*q)
|      | ~ ~q
|      | q
| ~p ∧ (p*q) * ~q .→. q
```

¿Cuál es la regla de introducción y cuál la de eliminación del asterisco?

IX

LÓGICA CUANTIFICACIONAL: El MÉTODO DN

La aplicación del método DN a la lógica cuantificacional incluye sólo algunas reglas adicionales con respecto a las reglas ya conocidas de DN en la lógica proposicional. El procedimiento que se va a seguir también es el mismo, sin embargo el sistema de LC es independiente, porque tiene un lenguaje, reglas y definiciones propias.

1. EL LENGUAJE DE LA LÓGICA CUANTIFICACIONAL (LC)

1.1. Símbolos Primitivos

a. Símbolos predicativos: 'F^1', 'G^1', 'H^1',..., 'F^2', 'G^2', 'H^2',..., 'F^3', 'G^3', 'H^3',..., 'F^n', 'G^n', 'H^n',....
b. Variables individuales: x, y, z,...
c. Constantes de individuos: a, b, c,...
d. Operadores: ~, →, (∀_)
e. Símbolos auxiliares: (,), [,], {, } y los puntos auxiliares.

Aunque ya aparece expuesto en 5.1.1, vale recordar que en el metalenguaje a las variables individuales y a las constantes de individuos las designamos con 'α'. Así:

α: x, y, z, a, b, c,...

'ß' es el símbolo del metalenguaje para las variables individuales:

ß: x, y, z,...

y 'γ' es el símbolo del metalenguaje para las constantes de individuos:

γ: a, b, c,...

Si observamos los operadores, notaremos que aparece una pequeña línea en el cuantificador universal. La pequeña línea puede ser sustituida por cualquiera de las variables individuales, de modo que en el metalenguaje el cuantificador universal es '(∀ß)' y puede expresarse como '(∀x)', '(∀y)', o como '(∀z)' y se leerá 'para todo x', 'para todo y' y 'para todo z', respectivamente, pero de ninguna manera 'ß' puede ser sustituida por más de una variable individual o por una constante. En este sentido sólo se cuantifican las variables individuales.

Los símbolos de predicado aparecen ahora con un pequeño número como superíndice, llamado 'ariedad'. Así, no es el mismo predicado 'F^1' que 'F^2'.

Los símbolos auxiliares, como los signos de agrupación y los llamados 'puntos auxiliares' (notación Peano-Russell), se usan para determinar la jerarquía de los operadores diádicos, como ya aparece expuesto en los capítulos II, V y VIII del presente texto.

1.2. Reglas de formación

a. Un símbolo predicativo de ariedad n seguido de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es una FBF (una letra predicativa puede estar seguida de variables individuales o constantes de individuos).
b. Si A es una FBF, entonces ~(A) también es una FBF.
c. Si A y B son FBF, entonces (A → B) es una FBF.
d. Si A es una FBF, entonces (∀ß)(A) es una FBF.
e. Una fórmula es una FBF si y sólo si es el resultado de la aplicación de las reglas anteriores un número finito de veces.

1.2.1. Fórmulas monádicas y poliádicas

Las reglas de formación arriba enumeradas nos permiten obtener FBF de la lógica cuantificacional en este sistema (nótese que no aparecen letras proposicionales, ¿puede el lector imaginar los cambios necesarios para incluirlas?). Por ejemplo, según la regla (RFa) las siguientes fórmulas:

F^1x, F^2xy, F^3xyz, G^1x, G^2xy, G^3xyz, H^1x,..., etc.

son FBF de LC. Cuando una letra predicativa está seguida sólo de una variable individual, el predicado se llama 'monádico' y la fórmula cuantificacional también se llama **monádica**. Por ejemplo, son fórmulas cuantificacionales monádicas: F^1x, F^1y, F^1z, G^1x, G^1y, H^1x,..., etc.

Cuando la letra predicativa está seguida solamente de dos variables individuales, la fórmula cuantificacional se llama **diádica** y hablamos de predicado diádico. Por ejemplo, son fórmulas cuantificacionales diádicas: F^2xy, F^2yz, G^2xy, H^2xz, H^2xx,..., etc.

Así como hemos obtenido fórmulas monádicas y diádicas, también podemos obtener fórmulas **triádicas** y así sucesivamente fórmulas **n-ádicas** o fórmulas **poliádicas**. Generalmente, se introduce el término 'fórmulas poliádicas' cuando aparece una letra predicativa seguida por más de dos variables individuales. Por ejemplo, son fórmulas poliádicas:

F^3xyz, G^3xyz, H^3zxy, G^4zyxz, H^4yzxy,..., etc.

En la presente exposición nos limitaremos a usar solamente fórmulas monádicas, por lo que **no utilizaremos los superíndices**.

1.2.2. Símbolos predicativos, variables e individuos

Los símbolos o letras predicativas representarán a términos como 'griegos', 'filósofos', 'números pares', etc., es decir, las letras predicativas simbolizarán términos que indican una cualidad. Los términos mencionados pueden representarse respectivamente por 'G', 'F' y 'H'. Con la denominación de **variables** nos referimos a 'x', 'y' y 'z'. Estos símbolos representan individuos desconocidos o no específicos, de allí que pueden denominarse 'variables indefinidas'.

Por ejemplo, las expresiones 'x es griego', 'y es filósofo' o 'z es un número par' son indefinidas, es decir, no son verdaderas ni falsas. Simbólicamente vamos a representarlas así:

Gx, Fy, Hz

si mantenemos la simbolización de 'griegos' por 'G', de 'filósofos' por 'F' y de 'números pares' por 'H'. Las constantes de individuos 'a', 'b', 'c', etc.

simbolizarán nombres propios, por ejemplo, pueden representar a 'Sócrates', 'Platón' y '18', respectivamente, entonces podemos obtener:

Sócrates es griego.
Platón es filósofo.
18 es un número par.

expresiones de las que se puede decir que son proposiciones, porque podemos hablar de su verdad o falsedad. Simbólicamente:

'Ga', 'Fb', 'Hc'

Las nociones de variables libres y ligadas están relacionadas con el uso del cuantificador. La regla RFd indica que un cuantificador seguido de cualquier fórmula cuantificacional es una FBF. Esta fórmula cuantificacional constituye el alcance o dominio del cuantificador. Por ejemplo:

(∀x)Fx, (∀x)(Fy → Gx), (∀y)(Fx .→. Gy → Hy), (∀x)Fx → Gx,..., etc.

son FBF de LC. Una **variable es libre** en una fórmula cuantificacional cuando no está bajo el dominio del cuantificador, por ejemplo, cuando la letra de la variable es distinta de la variable individual cuantificada:

1. (∀x)Fx → Gx
2. Fx → Gy
3. (∀x)(Fy → Gx)
4. (∀x)(∀y)(Fy .→. Fz → Gx)
5. (∀x)Fy .→. ~Hx → (∀z)Fx

El cuantificador es un operador monádico, al igual que la negación, porque opera solamente hacia la derecha. Así, en 1 'Gx' no está bajo el dominio del cuantificador, por lo tanto 'x' es una variable libre. En 2, 'x' en 'Fx' e 'y' en 'Gy' son variables libres. En 3, 'y' en 'Fy' es una variable libre porque la variable 'y' de 'F' es distinta de la variable 'x' que está cuantificada universalmente. En 4, 'z' en 'Fz' es una variable libre, y en 5, 'y' y 'x' en 'Fy', '~Hx' y 'Fx' son variables libres. Las fórmulas cuantificacionales con variables libres se denominan 'fórmulas abiertas'.

Una variable está ligada cuando no está libre. Ejemplo:

6. $(\forall z)Fz$
7. $(\forall z)(\forall x)(Fx \rightarrow Fz)$
8. $(\forall x)Fx \rightarrow (\forall y)(Gy \rightarrow Hy)$
9. $(\forall x)[(\forall z)Gz \;.\!\rightarrow\!.\; Fx \rightarrow (\forall y)(Fy \rightarrow Gx)]$
10. $(\forall x)[(\forall y)(Fx \rightarrow (\forall z)(Fz \rightarrow (\forall w)Fw \;.\!\rightarrow\!.\; Gy))]$

Las fórmulas cuantificacionales que tienen todas sus variables ligadas se llaman 'fórmulas cerradas'. En este caso -ejemplos del 6 al 10- todas las variables están ligadas. En LC, las letras predicativas seguidas de constantes de individuos también son fórmulas cerradas, porque dichas fórmulas se pueden interpretar como verdaderas o falsas, y lógicamente los símbolos proposicionales (si se los incluye). Por ejemplo, las siguientes fórmulas son cerradas:

11. $Fa \rightarrow Fb$
12. $(\forall x)Fx \rightarrow Fa$
13. $(\forall x)Fx \rightarrow (\forall y)Fy \;.\!\rightarrow\!.\; Fb \rightarrow Fa$
14. $Gb \rightarrow (\forall y)(Fa \rightarrow Gy)$

Las fórmulas abiertas pueden cerrarse cuantificándose las variables libres por medio del cuantificador universal. Este cuantificador debe anteponerse a toda la fórmula. Por ejemplo, vamos a cerrar las fórmulas abiertas que aparecen en los números del 1 al 4:

15. $(\forall x)[(\forall x)Fx \rightarrow Gx]$
16. $(\forall y)[(\forall x)Fx \rightarrow Gy]$
17. $(\forall y)[(\forall x)(Fy \rightarrow Gx)]$
18. $(\forall z)(\forall x)(\forall y)(Fy \;.\!\rightarrow\!.\; Fz \rightarrow Gx)$

Estas fórmulas constituyen las clausuras universales de las fórmulas abiertas.

1.3. Definiciones

Def. 1: $(A \wedge B) =_{def.} \sim(A \rightarrow \sim B)$
Def. 2: $(A \vee B) =_{def.} \sim A \rightarrow B$
Def. 3: $(A \leftrightarrow B) =_{def.} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Def. 4: $(\exists ß)(A) =_{def.} \sim(\forall ß)\sim(A)$

Estas definiciones serán útiles básicamente para demostrar las reglas de inferencia derivadas. Vale recalcar lo que ya se ha dicho en la lógica proposicional, que el método DN se basta de sus reglas para demostrar cualquier fórmula válida dentro de dicho sistema.

Ejercicios

1. En cada una de las siguientes fórmulas abiertas señale las variables libres. Luego, conviértalas en fórmulas cerradas.

a. $(\exists y)(Fy \wedge Gz)$
b. $(\exists x)Fx \rightarrow {\sim}Hx$
c. $(\forall x)(Hy \vee {\sim}Fx) \rightarrow Gy$
d. $(\exists y)[Fy \vee Gx .\rightarrow. (\forall z){\sim}Fz]$
e. $(\forall x)(Gx \rightarrow Fy) \wedge (\exists y)(Hy \wedge Fx)$

2. Obtenga el equivalente de cada una de las siguientes fórmulas aplicando las respectivas definiciones de tal modo que cada fórmula tenga sólo operadores primitivos del sistema (incluya letras proposicionales en el sistema).

a. ${\sim}p \wedge {\sim}q$
b. ${\sim}p \vee (q \vee {\sim}r)$
c. $Fa \leftrightarrow (\exists y)Fy$
d. $(\exists x)({\sim}Hx \vee Gx) \vee Gb$
e. ${\sim}p \vee (\exists y)(Fx \leftrightarrow Gy) .\wedge. {\sim}(\exists x)Gx$

Solución:

1. Las variables libres en cada una de las siguientes fórmulas son como sigue:

En (a) 'z' es la variable libre en 'Gz'.
En (b) 'x' es la variable libre en '~Hx'.
En (c) 'y' es la variable libre en 'Hy' y en 'Gy'.
En (d) 'x' en 'Gx' es la variable libre.
En (e) 'y' en 'Fy' y 'x' en 'Fx' son variables libres.

Ahora convirtiéndolas en fórmulas cerradas, se tiene:

a. $(\forall z)(\exists y)(Fy \wedge Gz)$
b. $(\forall x)[(\exists x)Fx \rightarrow {\sim}Hx]$

c. $(\forall y)[(\forall x)(Hy \vee \sim Fx) \rightarrow Gy]$
d. $(\forall x)(\exists y)[Fy \vee Gx .\rightarrow. (\forall z)\sim Fz]$
e. $(\forall y)(\forall x)(Gx \rightarrow Fy) \wedge (\forall x)(\exists y)(Hy \wedge Fx)$

2. El equivalente de cada una de las fórmulas sólo con operadores primitivos y después de aplicarse las definiciones es:

a. $\sim(\sim p \rightarrow q)$
b. $p \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim r)$
c. $\sim\{[Fa \rightarrow \sim(\forall y)\sim Fy] .\rightarrow. \sim[(\forall y)\sim Fy \rightarrow Fa]\}$
d. $(\forall x)\sim(Hx \rightarrow Gx) \rightarrow Gb$
e. $\sim\{p \rightarrow \sim(\forall y)[Fx \rightarrow Gy .\rightarrow. \sim(Gy \rightarrow Fx)] .\rightarrow. \sim(\forall x)\sim Gx\}$

2. REGLAS DE INFERENCIA

A la lista de reglas de inferencia introducidas en LP, vamos a añadir las reglas de introducción y eliminación de los cuantificadores universal y existencial.

2.1. Reglas para el cuantificador universal

Las reglas referentes al cuantificador universal son admitidas en este sistema como reglas primitivas.

a. R1. Eliminación del cuantificador universal (ECU)

	⋮	
i	$(\forall \beta)\psi\beta$	Hip.
	⋮	
j	$\psi\alpha$	(i) ECU
	⋮	

Según esta regla, a partir de una fórmula que tiene como operador principal el cuantificador universal, se puede deducir inmediatamente una fórmula donde la letra predicativa puede llevar cualquier variable o constante de individuos. Por ejemplo, si decimos 'Todos están aprobados' refiriéndonos a los alumnos que están presentes en un salón de clase, entonces cualquier individuo arbitrariamente elegido estará aprobado. De igual modo, si 'Todo es materia', entonces cualquier elemento que tenemos del universo de referencia será materia. En general, qué variable o qué constante usar en cada caso dependerá de lo que se necesite, como veremos en los ejemplos.

A continuación demostramos una fórmula donde se va a aplicar ECU y las otras conocidas reglas de LP, aplicadas ahora a FBF de LC.

Ejemplo (1): Demostrar $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fa \;.\!\rightarrow\!.\; Ga$.

1	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fa$	Hip.
2	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$	(1) EC
3	Fa	(1) EC
4	$Fa \rightarrow Ga$	(2) ECU
5	Ga	(3,4) ECond.
6	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fa \;.\!\rightarrow\!.\; Ga$	(1-5) ICond.

Si apreciamos las secuencias de la demostración, el procedimiento es el mismo de LP, con el único añadido de ECU aplicada en el paso 4, donde al eliminarse el cuantificador universal, 'α' ha sido reemplazada por 'a', dado que 'a' ya aparece como parte de la premisa. Así, la fórmula de este ejemplo puede interpretarse como la expresión simbólica de 'Todos los hombres son mortales y Sócrates es hombre; luego, Sócrates es mortal'. Como se puede ver, 'Sócrates es hombre' (Fa) y 'Sócrates es mortal' (Ga) aparecen como instancia de 'Todos los hombres son mortales'.

Si aparecen dos constantes de individuos en un contexto en el que hay una generalización universal, entonces (es altamente probable que) la generalización universal tendrá que interpretarse para cada constante individual. Por ejemplo, 'Si todos los hombres son mortales, y Sócrates y Platón son hombres, entonces Sócrates y Platón son mortales' (F: Hombres, G: Mortales, a: Sócrates, b: Platón) nos permitirá explicar el modo de eliminar el cuantificador universal para cada constante de individuo. En primer lugar, su simbolización es:

Ejemplo (2): $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (Fa \wedge Fb) \;.\!\rightarrow\!.\; Ga \wedge Gb$

Demostración:

1	$\vert\ \underline{(\forall x)(Fx \to Gx) \wedge (Fa \wedge Fb)}$	Hip.
2	$\vert\ (\forall x)(Fx \to Gx)$	(1) EC
3	$\vert\ Fa \wedge Fb$	(1) EC
4	$\vert\ Fa \to Ga\ .\wedge.\ Fb \to Gb$	(2) ECU
5	$\vert\ Fa \to Ga$	(4) EC
6	$\vert\ Fa$	(3) EC
7	$\vert\ Ga$	(5,6) ECond.
8	$\vert\ Fb \to Gb$	(4) EC
9	$\vert\ Fb$	(3) EC
10	$\vert\ Gb$	(8,9) ECond.
11	$\vert\ Ga \wedge Gb$	(7,10) IC
12	$(\forall x)(Fx \to Gx) \wedge (Fa \wedge Fb)\ .\to.\ (Ga \wedge Gb)$	(1-11) ICond.

En la secuencia 4 de esta demostración se ha aplicado ECU. Se puede apreciar que nos hemos tomado cierta "libertad" al eliminar el cuantificador universal para abreviar la prueba. Al aplicar la regla, 'α' ha sido reemplazada por 'a' y por 'b', dado que en el argumento se necesitará instanciar la fórmula del paso 2 para cada uno de estos individuos constantes. En otros términos, la eliminación del universal ha sido aplicada dos veces en un paso.

Ejemplo (3): $(\forall y)Fy \wedge (\forall y)(Fy \to \sim p)\ .\to.\ p \to Ga$

Demostración:

1	$\vert\ \underline{(\forall y)}Fy \wedge (\forall y)(Fy \to \sim p)$	Hip.
2	$\vert\ \vert\ \underline{p}$	Hip.
3	$\vert\ \vert\ (\forall y)Fy \wedge (\forall y)(Fy \to \sim p)$	(1) Reit.
4	$\vert\ \vert\ (\forall y)Fy$	(3) EC
5	$\vert\ \vert\ (\forall y)(Fy \to \sim p)$	(3) EC
6	$\vert\ \vert\ Fy$	(4) ECU
7	$\vert\ \vert\ Fy \to \sim p$	(5) ECU
8	$\vert\ \vert\ \sim p$	(6,7) ECond.
9	$\vert\ \vert\ Ga$	(2,8) EN
10	$\vert\ p \to Ga$	(2-9) ICond.
11	$(\forall y)Fy \wedge (\forall y)(Fy \to \sim p)\ .\to.\ p \to Ga$	(1-10) ICond.

En la demostración de este ejemplo, al eliminarse el cuantificador, 'α' ha sido reemplazada por la variable individual 'y', como aparece en las secuencias 6 y 7 justificadas por ECU.

Ejemplo (4):
$$\sim(\forall x)\sim Fx \rightarrow (\exists y)Hy$$
$$\sim(\forall y)\sim Hy \rightarrow (\forall z)Fz$$
$$(\exists x)Fx \ \ /\therefore\ \sim(\exists z)\sim Fz$$

Como el presente ejemplo es una inferencia, para demostrarla por DN vamos a colocar las premisas una debajo de otra como hipótesis y la conclusión se colocará al final de la prueba principal. A continuación, la derivación:

1	$\sim(\forall x)\sim Fx \rightarrow (\exists y)Hy$	Hip.
2	$\sim(\forall y)\sim Hy \rightarrow (\forall z)Fz$	Hip.
3	$(\exists x)Fx$	Hip.
4	$\sim(\forall x)\sim Fx$	(3) Def. ∃
5	$(\exists y)Hy$	(1,4) ECond.
6	$\sim(\forall y)\sim Hy$	(5) Def. ∃
7	$(\forall z)Fz$	(2,6) ECond.
8	$\sim(\exists z)\sim Fz$	(7) Def. ∃

La particularidad de esta demostración es el uso de la definición del cuantificador (Def. 4), como aparece en las secuencias 4, 6 y 8.

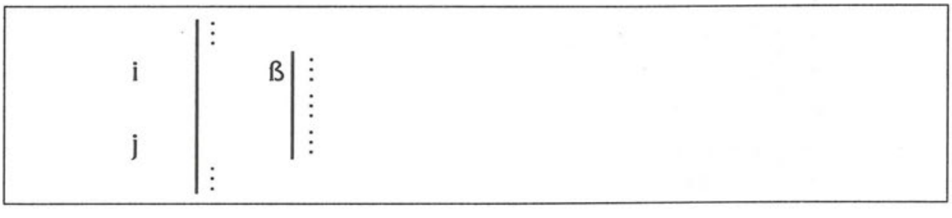
Ejemplo (5):
$$(\forall x)Fx \rightarrow (\exists y)(Hy \wedge \sim Gy)$$
$$(\forall y)(Hy \rightarrow Gy)\ .\vee.\ \sim(\exists x)\sim Hx \wedge (\forall y)Fy$$
$$\sim(\exists x)\sim Fx \ \ //\therefore\ \sim(Ha \rightarrow \sim Fb)$$

Demostración:

1	│ $(\forall x)Fx \rightarrow (\exists y)(Hy \wedge \sim Gy)$	Hip.
2	│ $(\forall y)(Hy \rightarrow Gy)\ .\vee.\ \sim(\exists x)\sim Hx \wedge (\forall y)Fy$	Hip.
3	│ $\sim(\exists x)\sim Fx$	Hip.
4	│ │ $(\forall y)(Hy \rightarrow Gy)$	Hip
5	│ │ │ $Ha \rightarrow \sim Fb$	Hip.
6	│ │ │ $\sim(\exists x)\sim Fx$	(3) Reit.
7	│ │ │ $(\forall x)Fx$	(6) Def. ∃
8	│ │ │ $(\forall x)Fx \rightarrow (\exists y)(Hy \wedge \sim Gy)$	(1) Reit.
9	│ │ │ $(\exists y)(Hy \wedge \sim Gy)$	(7,8) ECond.
10	│ │ │ $(\forall y)(Hy \rightarrow Gy)$	(4) Reit.
11	│ │ │ $\sim(\exists y)\sim(Hy \rightarrow Gy)$	(10) Def. ∃
12	│ │ │ $\sim(\exists y)(Hy \wedge \sim Gy)$	(11) Def. Conj. (Def.1)
13	│ │ $\sim(Ha \rightarrow \sim Fb)$	(5-9-12) IN
14	│ │ $\sim(\exists x)\sim Hx \wedge (\forall y)Fy$	Hip.
15	│ │ │ $Ha \rightarrow \sim Fb$	Hip.
16	│ │ │ $\sim(\exists x)\sim Hx \wedge (\forall y)Fy$	(14) Reit.
17	│ │ │ $\sim(\exists x)\sim Hx$	(16) EC
18	│ │ │ $(\forall x)Hx$	(17) Def. ∃
19	│ │ │ $(\forall y)Fy$	(16) EC
20	│ │ │ Ha	(18) ECU
21	│ │ │ Fb	(19) ECU
22	│ │ │ $\sim Fb$	(15,21) ECond.
23	│ │ $\sim(Ha \rightarrow \sim Fb)$	(15-21-22) IN
24	│ $\sim(Ha \rightarrow \sim Fb)$	(2,4-13,14-23) ED

La demostración del ejemplo 5 nos permite apreciar el uso de las reglas de DN, básicamente la regla ECU (secuencias 20 y 21) y el uso de las definiciones (secuencias 7, 11, 12 y 18) con las cuales estamos familiarizándonos.

Antes de presentar la siguiente regla necesitamos definir lo que es una **subprueba marcada**: es una subprueba en cuya primera línea a la izquierda de la barra se pone una variable. Esa variable es la llamada 'variable marcada'. En general, tenemos:



Donde la subprueba i-j tiene marcada la variable 'ß'. Esto se hace cuando se desea dar normas especiales para el empleo de fórmulas con la variable marcada dentro de la subprueba. En nuestro sistema **no puede reiterarse una fórmula con la variable marcada libre dentro de la subprueba**. Posteriormente daremos otras restricciones.

b. R2. Introducción del cuantificador universal (ICU)

	│ ⋮	
i	│ ß │ ⋮	(Justif.)
	│ │ ⋮	
j	│ │ A	(Justif.)
k	│ (∀ß)(A)	(i-j) ICU
	│ ⋮	

Según ICU, cuando la fórmula que se requiere introducir tiene como operador principal al cuantificador universal, se elabora una subprueba con la variable por cuantificar marcada y, al final de la barra de la subprueba, debe aparecer sólo la fórmula por cuantificar universalmente. No es necesario, aunque sea lo usual, que la fórmula A tenga la variable por cuantificar libre. Por último, cabe notar que ésta es la primera subprueba **sin hipótesis** que se presenta en el sistema (no que no pueda tener hipótesis, sino que no las requiere).

En el proceso de la demostración, solamente puede aplicarse la regla Reit. de la prueba principal a la subprueba con variable marcada de fórmulas que tienen ligada la variable marcada. Repetimos: **no puede reiterarse, en la subprueba marcada, una fórmula que tenga la variable marcada libre**.

A continuación, algunos ejemplos donde aparece la aplicación de las reglas ECU e ICU.

Ejemplo (6): (∀x)Fx → (∀x)(Gx ∨ Fx)

Demostración:

1	│ │(∀x)Fx	Hip.
2	│ │ x │(∀x)Fx	(1) Reit.
3	│ │ │Fx	(2) ECU
4	│ │ │Gx ∨ Fx	(3) ID
5	│ │(∀x)(Gx ∨ Fx)	(2-4) ICU
6	│ (∀x)Fx → (∀x)(Gx ∨ Fx)	(1-5) ICond.

Describiendo las reglas aplicadas en la demostración de este ejemplo, primero se tiene el uso de ICond. que da origen a la primera subprueba con su respectiva hipótesis y su conclusión (secuencias 1 al 5). Como la fórmula que está al final de la barra de la primera subprueba tiene como operador principal al cuantificador universal, entonces genera una segunda subprueba según la regla ICU. Esta regla, que busca introducir el cuantificador '(∀x)', requiere marcar la variable 'x', pues es la variable que se va a cuantificar. Al final de la barra aparece la fórmula que se cuantifica. A esta subprueba con variable marcada, sólo pueden ingresar por la regla Reit. las fórmulas que tienen la variable 'x' ligada. En este caso, se puede apreciar en la secuencia 2 la reiteración de la fórmula que está en 1 donde 'x' está ligada. A continuación, otros ejemplos.

Ejemplo (7): (∀x)(Fx → Gx)
(∀x)(Gx → Hx) /∴ (∀x)(Fx → Hx)

Demostración:

1	(∀x)(Fx → Gx)			Hip.
2	(∀x)(Gx → Hx)			Hip.
3		x	Fx	Hip.
4			(∀x)(Fx → Gx)	(1) Reit.
5			(∀x)(Gx → Hx)	(2) Reit.
6			Fx → Gx	(4) ECU
7			Gx → Hx	(5) ECU
8			Gx	(3,6) ECond.
9			Hx	(7,8) ECond.
10		Fx → Hx		(3-9) ICond.
11	(∀x)(Fx → Hx)			(3-10) ICU

En esta demostración vale la pena resaltar nuevamente que la variable 'x' está marcada en la primera subprueba, lo que permite que en la fórmula del paso 11 se introduzca como operador principal al cuantificador universal. Nuevamente, se puede apreciar que las fórmulas reiteradas, secuencias 4 y 5, tienen la variable 'x' ligada, a pesar de que la segunda subprueba no sea marcada. La marca, en la primera subprueba, impide que a través de ella se reiteren fórmulas, de la prueba principal hacia subpruebas de la subprueba marcada, con esa variable libre.

Ejemplo (8): ⊢ (∀x)(Fx ∧ Gx) .↔. (∀x)Fx ∧ (∀x)Gx

Demostración:

1		$(\forall x)(Fx \land Gx)$	Hip.
2	x	$(\forall x)(Fx \land Gx)$	(1) Reit.
3		$Fx \land Gx$	(2) ECU
4		Fx	(3) EC
5		$(\forall x)Fx$	(2-4) ICU
6	x	$(\forall x)(Fx \land Gx)$	(1) Reit.
7	Fx	$\land\ Gx$	(6) ECU
8			Gx (7) EC
9		$(\forall x)Gx$	(6-8) ICU
10		$(\forall x)Fx \land (\forall x)Gx$	(5,9) IC
11		$(\forall x)Fx \land (\forall x)Gx$	Hip.
12	x	$(\forall x)Fx \land (\forall x)Gx$	(11) Reit.
13		$(\forall x)Fx$	(12) EC
14		$(\forall x)Gx$	(12) EC
15		Fx	(13) ECU
16		Gx	(14) ECU
17		$Fx \land Gx$	(15,16) IC
18		$(\forall x)(Fx \land Gx)$	(12-17) ICU
19		$(\forall x)(Fx \land Gx)\ .\leftrightarrow.\ (\forall x)Fx \land (\forall x)Gx$	(1-10, 11-18) IB

En este ejemplo se ha demostrado la **ley de la distribución del cuantificador universal en la conjunción.** Si el lector observa detenidamente el procedimiento seguido, podrá darse cuenta del uso de las reglas ECU (secuencias 3, 7, 15 y 16) e ICU (secuencias 5, 9 y 18). Además, vale la pena destacar nuevamente en la regla ICU la importancia de generar una subprueba con variable marcada. No reparar en ello puede dar lugar en muchos casos a resultados engañosos, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo (9): $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \land Fx\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)Gx$

Demostración:

1	$\mid \mid \underline{(\forall x)}(Fx \to Gx) \wedge Fx$	Hip.
2	$\mid \mid (\forall x)(Fx \to Gx)$	(1) EC
3	$\mid \mid Fx$	(1) EC
4	$\mid \mid \quad x \mid (\forall x)(Fx \to Gx)$	(2) Reit.
5	$\mid \mid \quad \mid Fx \to Gx$	(4) ECU
6	$\mid \mid \quad \mid Fx$	(3) Reit. (INCORRECTA)
7	$\mid \mid \quad \mid Gx$	(5,6) ECond.
8	$\mid \mid (\forall x)Gx$	(4-7) ICU
9	$\mid (\forall x)(Fx \to Gx) \wedge Fx .\!\to\!. (\forall x)Gx$	(1-8) ICond.

Esta prueba es falaz, porque la fórmula que se ha derivado en la secuencia 6 a partir de 3, es incorrecta, dado que en la segunda subprueba pueden reiterarse sólo las fórmulas que tienen las 'x' ligadas. Por lo tanto, cualquier fórmula que pudiera deducirse a partir de los pasos 1 y 2 está equivocada. Además, podemos afirmar que la fórmula del ejemplo (9) es lógicamente inválida. En este sentido, vale recordar, una vez más, que el método DN sólo demuestra fórmulas válidas.

Ejemplo (10): $\sim(\exists y)Fy \to (\forall x)Gx$
$(\forall y)\sim Fy \wedge Ha \quad //\therefore\ (\forall z)Gz$

Demostración:

1	$\mid \sim(\exists y)Fy \to (\forall x)Gx$	Hip.
2	$\mid \underline{(\forall y)\sim Fy \wedge Ha}$	Hip.
3	$\mid \quad z \mid (\forall y)\sim Fy \wedge Ha$	(2) Reit.
4	$\mid \quad \mid \sim(\exists y)Fy \to (\forall x)Gx$	(1) Reit.
5	$\mid \quad \mid (\forall y)\sim Fy$	(3) EC
6	$\mid \quad \mid \sim(\exists y)Fy$	(5) Def. $\exists$ e INT DN
7	$\mid \quad \mid (\forall x)Gx$	(4,6) ECond.
8	$\mid \quad \mid Gz$	(7) ECU
9	$\mid (\forall z)Gz$	(3-8) ICU

En la demostración de este ejemplo, se puede observar que la derivación de la fórmula que está en la secuencia 9 ha requerido de una subprueba marcada con la variable 'z'. Lo que significa que, en esta subprueba, no pueden reiterarse de la prueba principal fórmulas con 'z' libre. Asimismo, cabe notar que el paso 6 es el resultado de aplicar al paso 5, primero la definición del cuantificador y, luego, el intercambio de un equivalente por DN.

Ejercicios

1. Demuestre la validez de las siguientes fórmulas por deducción natural.

a. $(\forall x)(Fx \rightarrow Fx)$
b. $(\forall x)(Mx \rightarrow Hx)\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)Mx \rightarrow (\forall x)Hx$
c. $(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \wedge (\forall x)Px\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)(Rx \rightarrow Qx)$
d. $(\forall x)(Px \rightarrow Ax) \wedge (\forall x)(Ax \rightarrow Zx)\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall x)(Px \rightarrow Zx)$
e. $(\forall x)(Ex \rightarrow Lx) \wedge (\forall x)(Lx \rightarrow Ix) \wedge Ea\ .\!\rightarrow\!.\ Ia$
f. $(\forall y)(\sim Gy \rightarrow \sim Fy) \wedge (\forall y)Fy\ .\!\rightarrow\!.\ (\forall y)Gy$
g. $p \rightarrow (\forall x)Gx \wedge (\forall x)(Gx \rightarrow Hx)\ .\!\rightarrow\!.\ p \rightarrow (\forall x)Hx$

2. Demuestre por deducción natural la validez de los siguientes razonamientos.

a. Los brontosaurios son dinosaurios. Ningún dinosaurio es un batracio. Luego, ningún brontosaurio es un batracio.
b. Los peruanos y los argentinos son sudamericanos. Ningún canadiense es sudamericano. Entonces, ningún canadiense es argentino.
c. Si los hombres son mamíferos, entonces los racionales son vertebrados. Si todos son racionales, entonces todos son mamíferos. Por tanto, todos son vertebrados si todos son racionales.
2.4 Todos los estudiantes de filosofía saben griego. Eliana es estudiante de filosofía. Luego, ella sabe griego.

Solución:

1. Presentamos las pruebas:

(a)

1		x	Fx	Hip.
2			Fx	Rep. (1)
3		$Fx \rightarrow Fx$		ICond. (1-2)
4	$(\forall x)(Fx \rightarrow Fx)$			ICU (1-3)

(b)

1	│ │ $(\forall x)(Mx \to Hx)$	Hip.
2	│ │ │ $(\forall x)Mx$	Hip.
3	│ │ │ x │ $(\forall x)(Mx \to Hx)$	Reit. (1)
4	│ │ │ │ $Mx \to Hx$	ECU (3)
5	│ │ │ │ $(\forall x)Mx$	Reit. (2)
6	│ │ │ │ Mx	ECU (5)
7	│ │ │ │ Hx	ECond. (4,6)
8	│ │ │ $(\forall x)Hx$	ICU (3-7)
9	│ │ $(\forall x)Mx \to (\forall x)Hx$	ICond. (2-8)
10	│ $(\forall x)(Mx \to Hx)\ .\!\to\!.\ (\forall x)Mx \to (\forall x)Hx$	ICond. (1-9)

(c)

1	│ │ $(\forall x)(Px \to Qx \wedge (\forall x)Px$	Hip.
2	│ │ $(\forall x)(Px \to Qx)$	EC (1)
3	│ │ $(\forall x)Px$	EC (1)
4	│ │ x │ │ Rx	Hip.
5	│ │ │ │ $(\forall x)(Px \to Qx)$	Reit. (2)
6	│ │ │ │ $Px \to Qx$	ECU (5)
7	│ │ │ │ $(\forall x)Px$	Reit. (3)
8	│ │ │ │ Px	ECU (7)
9	│ │ │ │ Qx	ECond. (6-8)
10	│ │ │ $Rx \to Qx$	ICond. (4-9)
11	│ │ $(\forall x)(Rx \to Qx)$	ICU (4-10)
12	│ $(\forall x)(Px\to Qx)\wedge(\forall x)Px\ .\!\to\!.\ (\forall x)(Rx\to Qx)$	ICond. (1-11)

(d)

1	│ │ $(\forall x)(Px\to Ax) \wedge (\forall x)(Ax\to Zx)$	Hip.
2	│ │ $(\forall x)(Px \to Ax)$	EC (1)
3	│ │ $(\forall x)(Ax \to Zx)$	EC (1)
4	│ │ x │ │ Px	Hip.
5	│ │ │ │ $(\forall x)(Ax \to Zx)$	Reit. (3)
6	│ │ │ │ $Ax \to Zx$	ECU (5)
7	│ │ │ │ $(\forall x)(Px \to Ax)$	Reit. (2)
8	│ │ │ │ $Px \to Ax$	ECU (7)
9	│ │ │ │ Ax	ECond. (4,8)
10	│ │ │ │ Zx	ECond. (6,9)
11	│ │ │ $Px \to Zx$	ICond. (4-10)
12	│ │ $(\forall x)(Px \to Zx)$	ICU (4-11)
13	│ $(\forall x)(Px\to Ax)\wedge(\forall x)(Ax\to Zx).\!\to\!.(\forall x)(Px\to Zx)$	ICond.(1-12)

(e)

1	$\mid\ \mid \underline{(\forall x)(Ex \to Lx) \land (\forall x)(Lx \to Ix) \land Ea}$	Hip.
2	$\mid\ \mid (\forall x)(Ex \to Lx)$	EC (1)
3	$\mid\ \mid (\forall x)(Lx \to Ix)$	EC (1)
4	$\mid\ \mid Ea$	EC (1)
5	$\mid\ \mid Ea \to La$	ECU (2)
6	$\mid\ \mid La$	ECond. (4,5)
7	$\mid\ \mid La \to Ia$	ECU (3)
8	$\mid\ \mid Ia$	ECond. (6,7)
9	$\mid (\forall x)(Ex \to Lx) \land (\forall x)(Lx \to Ix) \land Ea\ .\!\to\!.\ Ia$	ICond. (1-8)

(f)

1	$\mid\ \mid \underline{(\forall y)(\sim Gy \to \sim Fy) \land (\forall y)Fy}$	Hip.
2	$\mid\ \mid (\forall y)(\sim Gy \to \sim Fy)$	EC (1)
3	$\mid\ \mid (\forall y)Fy$ EC (1)	
4	$\mid\ \mid\ y \mid (\forall y)(\sim Gy \to \sim Fy)$	Reit. (2)
5	$\mid\ \mid\ \mid (\forall y)Fy$	Reit. (3)
6	$\mid\ \mid\ \mid \sim Gy \to \sim Fy$	ECU (4)
7	$\mid\ \mid\ \mid Fy$	ECU (5)
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{\sim Gy}$	Hip.
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \sim Gy \to \sim Fy$	Reit. (6)
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid Fy$	Reit. (7)
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \sim Fy$	ECond. (8,9)
12	$\mid\ \mid\ \mid \sim\sim Gy$	IN (8-10-11)
13	$\mid\ \mid\ \mid Gy$	EDN (12)
14	$\mid\ \mid (\forall y)Gy$	ICU (4-13)
15	$\mid (\forall y)(\sim Gy \to \sim Fy) \land (\forall y)Fy\ .\!\to\!.\ (\forall y)Gy$	ICond. (1-14)

(g)

1		$p \to (\forall x)Gx \land (\forall x)(Gx \to Hx)$	Hip.
2		$p \to (\forall x)Gx$	EC (1)
3		$(\forall x)(Gx \to Hx)$	EC (1)
4		p	Hip.
5		$p \to (\forall x)Gx$	Reit. (2)
6		$(\forall x)Gx$	ECond. (4,5)
7	x	$(\forall x)(Gx \to Hx)$	Reit. (3)
8		$(\forall x)Gx$	Reit. (6)
9		$Gx \to Hx$	ECU (7)
10		Gx	ECU (8)
11		Hx	ECond. (9,10)
12		$(\forall x)Hx$	ICU (7-11)
13		$p \to (\forall x)Hx$	ICond. (4-12)
14		$p \to (\forall x)Gx \land (\forall x)(Gx \to Hx) .\to. p \to (\forall x)Hx$	ICond. (1-13)

2. Presentamos las simbolizaciones, en unos casos en su forma condicional, en otros como inferencias, además de su derivación:

a. $(\forall x)(Sx \to Dx) \land (\forall x)(Dx \to \sim Bx) .\to. (\forall x)(Sx \to \sim Bx)$

1		$(\forall x)(Sx \to Dx) \land (\forall x)(Dx \to \sim Bx)$	Hip.
2		$(\forall x)(Sx \to Dx)$	EC (1)
3		$(\forall x)(Dx \to \sim Bx)$	EC (1)
4	x	Sx	Hip.
5		$(\forall x)(Dx \to \sim Bx)$	Reit. (3)
6		$Dx \to \sim Bx$	ECU (5)
7		$(\forall x)(Sx \to Dx)$	Reit. (2)
8		$Sx \to Dx$	ECU (7)
9		Dx	ECond. (4,8)
10		$\sim Bx$	ECond. (6,9)
11		$Sx \to \sim Bx$	ICond. (4-10)
12		$(\forall x)(Sx \to \sim Bx)$	ICU (4-11)
13		$(\forall x)(Sx \to Dx) \land (\forall x)(Dx \to \sim Bx) .\to. (\forall x)(Sx \to \sim Bx)$	ICond. (1-12)

b. $(\forall x)(Px \lor Ax .\to. Sx) \land (\forall x)(Cx \to \sim Sx) .\to. (\forall x)(Cx \to \sim Ax)$

Probaremos:

$(\forall x)(Px \lor Ax .\to. Sx) \land (\forall x)(Cx \to \sim Sx) \vdash (\forall x)(Cx \to \sim Ax)$

1	$\mid \underline{(\forall x)(Px \vee Ax\ .{\rightarrow}.\ Sx)} \wedge (\forall x)(Cx \rightarrow {\sim}Sx)$	Hip.
2	$\mid (\forall x)(Px \vee Ax\ .{\rightarrow}.\ Sx)$	EC (1)
3	$\mid (\forall x)(Cx \rightarrow {\sim}Sx)$	EC (1)
4	$\mid\ x \mid\ \mid \underline{Cx}$	Hip.
5	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid \underline{Ax}$	Hip.
6	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid (\forall x)(Px \vee Ax\ .{\rightarrow}.\ Sx)$	Reit. (2)
7	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid Px \vee Ax\ .{\rightarrow}.\ Sx$	ECU (6)
8	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid Px \vee Ax$	ID (5)
9	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid Sx$	ECond. (7,8)
10	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid (\forall x)(Cx \rightarrow {\sim}Sx)$	Reit. (3)
11	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid Cx \rightarrow {\sim}Sx$	ECU (10)
12	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid Cx$	Reit. (4)
13	$\mid\ \ \mid\ \mid\ \mid {\sim}Sx$	ECond. (11,12)
14	$\mid\ \ \mid\ \mid {\sim}Ax$	IN (5-9-13)
15	$\mid\ \ \mid Cx \rightarrow {\sim}Ax$	ICond. (4-14)
16	$\mid (\forall x)(Cx \rightarrow {\sim}Ax)$	ICU (4-15)

c. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \rightarrow (\forall x)(Rx \rightarrow Vx) . \wedge . (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Mx \vdash (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Vx$

1	$\mid \underline{(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \rightarrow (\forall x)(Rx \rightarrow Vx) . \wedge . (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Mx}$	Hip.
2	$\mid (\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \rightarrow (\forall x)(Rx \rightarrow Vx)$	EC (1)
3	$\mid (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Mx$	EC (1)
4	$\mid\ \mid \underline{(\forall x)Rx}$	Hip.
5	$\mid\ \mid\ x \mid (\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \rightarrow (\forall x)(Rx \rightarrow Vx)$	Reit. (1)
6	$\mid\ \mid\ \ \mid\ x \mid\ \mid \underline{Hx}$	Hip.
7	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid\ \mid (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Mx$	Reit. (3)
8	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid\ \mid (\forall x)Rx$	Reit. (4)
9	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid\ \mid (\forall x)Mx$	ECond. (7,8)
10	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid\ \mid Mx$	ECU (9)
11	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid Hx \rightarrow Mx$	ICond. (6-10)
12	$\mid\ \mid\ \ \mid (\forall x)(Hx \rightarrow Mx)$	ICU (6-11)
13	$\mid\ \mid\ \ \mid (\forall x)(Rx \rightarrow Vx)$	ECond. (5,12)
14	$\mid\ \mid\ \ \mid Rx \rightarrow Vx$	ECU (13)
15	$\mid\ \mid\ \ \mid (\forall x)Rx$	Reit. (4)
16	$\mid\ \mid\ \ \mid Rx$	ECU (15)
17	$\mid\ \mid\ \ \mid Vx$	ECond. (14,16)
18	$\mid\ \mid (\forall x)Vx$	ICU (5-17)
19	$\mid (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Vx$	ICond. (4-18)

d. $(\forall x)(Ex \rightarrow Sx) \wedge Ea .\!\rightarrow\!. Sa$

1	$(\forall x)(Ex \rightarrow Sx) \wedge Ea$	Hip.
2	$(\forall x)(Ex \rightarrow Sx)$	EC (1)
3	Ea	EC (1)
4	$Ea \rightarrow Sa$	ECU (2)
5	Sa	ECond. (3,4)
6	$(\forall x)(Ex \rightarrow Sx) \wedge Ea .\!\rightarrow\!. Sa$	ICond. (1-5)

2.2. Reglas para el cuantificador existencial

Las reglas pertinentes para la introducción y eliminación del cuantificador existencial son admitidas en nuestro sistema como reglas derivadas, por cuanto el operador existencial no es primitivo y, como tales, cada una de estas reglas se demostrará.

a. R3. Introducción del cuantificador existencial (ICE)

	⋮	
i	ψα	Hip.
	⋮	
j	(∃ß)ψß	(i) ICE
	⋮	

Según esta regla, de una fórmula cuya letra predicativa presenta una variable individual o una constante de individuo, se puede concluir inmediatamente una cuantificación existencial. Por ejemplo, de 'Fx' podemos concluir '(∃x)Fx' y a partir de 'Fa' también podemos concluir '(∃x)Fx'. Es decir, de 'x es F' podemos concluir que 'Existe por lo menos un x, tal que x es F'; de igual modo, si decimos 'Sócrates es filósofo' (a: Sócrates, F: Filósofos), podemos concluir que 'Alguien es filósofo' o que 'Hay por lo menos uno que es filósofo'.[15]

---

[15] En realidad, la regla permite el paso de A a (∃ß)(A), es decir, A por 'ψα'. No la presentamos de este modo, porque la ausencia de variable en la fórmula por cuantificar añade dificultad al tema.

Prueba de ICE:

1	$\psi\alpha$	Hip.
2	$(\forall\beta)\sim\psi\beta$	Hip.
3	$\sim\psi\alpha$	(2) ECU
4	$\psi\alpha$	(1) Reit.
5	$\sim(\forall\beta)\sim\psi\beta$	(2-3-4) IN
6	$(\exists\beta)\psi\beta$	(5) Def. $\exists$

A continuación, algunos ejemplos donde aparece la aplicación de la regla ICE.

Ejemplo (11): $(\forall x)(Hx \rightarrow Gx) \wedge Ha \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Gx$

Demostración:

1	$(\forall x)(Hx \rightarrow Gx) \wedge Ha$	Hip.
2	$(\forall x)(Hx \rightarrow Gx)$	(1) EC
3	Ha	(1) EC
4	$Ha \rightarrow Ga$	(2) ECU
5	Ga	(3,4) ECond.
6	$(\exists x)Gx$	(5) ICE
7	$(\forall x)(Hx \rightarrow Gx) \wedge Ha \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Gx$	(1-6) ICond.

La particularidad de esta demostración está en la aplicación de la regla ICE que aparece en la secuencia 6, obtenida de la secuencia 5.

Ejemplo (12): $(\exists y)Hy \rightarrow (\sim p \rightarrow Ga)$

$\sim[p \vee \sim(\exists y)Hy]$

$Fb \rightarrow Sx$

$\sim p \rightarrow Fb \quad //\therefore\ (\exists x)Sx \wedge (\exists y)Gy$

Demostración:

1	$(\exists y)Hy \rightarrow (\sim p \rightarrow Ga)$	Hip.
2	$\sim[p \vee \sim(\exists y)Hy]$	Hip.
3	$Fb \rightarrow Sx$	Hip.
4	$\sim p \rightarrow Fb$	Hip.
5	$\sim[\sim p \rightarrow \sim(\exists y)Hy]$	(2) Def. Disy. (Def. 2)
6	$\sim p \wedge (\exists y)Hy$	(5) Def. Conj.
7	$\sim p$	(6) EC
8	Fb	(4,7) ECond.
9	Sx	(3,8) ECond.
10	$(\exists x)Sx$	(9) ICE
11	$(\exists y)Hy$	(6) EC
12	$\sim p \rightarrow Ga$	(1,11) ECond.
13	Ga	(7,12) ECond.
14	$(\exists y)Gy$	(13) ICE
15	$(\exists x)Sx \wedge (\exists y)Gy$	(10,14) IC

El objetivo de este ejemplo es mostrar la aplicación de la regla ICE que aparece en los pasos 10 y 14.

Ejemplo (13): $p \vee \sim(\exists x)\sim Gx$
$p \vee \sim(\exists x)\sim Gx \ .\!\rightarrow\!. \sim p$
$\sim Fa \rightarrow \sim p \ .\!\rightarrow\!. \ Fb \quad //\therefore \ (\forall x)Gx \wedge (\exists x)Fy$

Demostración:

1	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx$	Hip.
2	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}p$	Hip.
3	${\sim}Fa \rightarrow {\sim}p\ .{\rightarrow}.\ Fb$	Hip.
4	x $p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx$	(1) Reit.
5	p	Hip.
6	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx$	(5) ID
7	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}p$	(2) Reit.
8	${\sim}p$	(6,7) ECond.
9	Gx	(5,8) EN
10	${\sim}(\exists x){\sim}Gx$	Hip.
11	$(\forall x)Gx$	(10) Def. ∃
12	Gx	(11) ECU
13	Gx	(4, 5-9, 10-12) ED
14	$(\forall x)Gx$	(4-13) ICU
15	p	Hip.
16	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx$	(15) ID
17	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}p$	(2) Reit.
18	${\sim}p$	(16,17) ECond.
19	Fx	(15,18) EN
20	$(\exists y)Fy$	(19) ICE
21	${\sim}(\exists x){\sim}Gx$	Hip.
22	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx$	(21) ID
23	$p \vee {\sim}(\exists x){\sim}Gx\ .{\rightarrow}.\ {\sim}p$	(2) Reit.
24	${\sim}p$	(22,23) ECond.
25	$Fa \vee {\sim}p$	(24) ID
26	${\sim}Fa \rightarrow {\sim}p$	(25) Def. Disy.
27	${\sim}Fa \rightarrow {\sim}p\ .{\rightarrow}.\ Fb$	(3) Reit.
28	Fb	(26,27) ECond.
29	$(\exists y)Fy$	(28) ICE
30	$(\exists y)Fy$	(1, 15-20, 21-29) ED
31	$(\forall x)Gx \wedge (\exists y)Fy$	(14,30) IC

La demostración de la validez de la inferencia del ejemplo (13) muestra la aplicación de las reglas utilizadas en el método DN de la lógica proposicional, más las cuantificacionales ECU, ICU e ICE.

b. R4. Eliminación del cuantificador existencial (ECE)

	⋮		
i	(∃ß)ψß		(Justif.)
	⋮		
j	ß	ψß	Hip.
		⋮	
k		A	(Justif.)
l	A		(i, j-k) ECE
	⋮		

La regla ECE genera una subprueba con variable marcada diferente de las que hemos visto hasta ahora. En la barra de la subprueba marcada se coloca la subfórmula cuantificada por el cuantificador existencial como hipótesis (paso j) y al final de la barra de la subprueba se ubica la fórmula A que se va a deducir (línea k). En la secuencia l, A es la fórmula que se deriva y, por lo tanto, ésta es la fórmula que se demuestra. Es importante recalcar que **A es una fórmula que no debe tener la variable marcada libre.**

La llamada 'hipótesis (Hip.) de la subprueba' no tiene la libertad de otras hipótesis, pues tiene que ser la subfórmula de la fórmula cuyo cuantificador existencial deseamos eliminar. Al ver su demostración, entenderemos las restricciones de la prueba.

Prueba de ECE:

i	(∃ß)ψß		Hip.
	⋮		
j		ß ψß	Hip.
		⋮	
k		A	Hip.
l	(∀ß)(A)		(i-j) ICU
m	A		(l) ECU

Las hipótesis de ECE son los pasos i a k. Tal vez no se vea clara la necesidad de que A no tenga ß libre, por lo que pasamos a justificarlo suponiendo que A tiene a ß libre. Por un lado, como la subprueba j-k tiene a ß marcada, ß no podría haberse introducido por reiteración de algún paso anterior a j en el que estuviese libre. Si proviniese de la reiteración de algún paso sin ß libre, distinto de j, éste tendría que tener una cuantificación universal y, en ese caso, podríamos obtener el paso m sin usar ECE, por lo que la restricción no anula la posibilidad de inferir A. Así, lo que se evita con la restricción es que el paso k sea una repetición del paso j o dependa de ese paso. Si no se impidiese esa posibilidad, fácilmente podría obtenerse '(∀ß)ψß' de '(∃ß)ψß', lo que obviamente estaría mal.

Con la presente demostración completamos las reglas de manejo de los cuantificadores en DN. Hemos utilizado ICU y ECU sin demostración por ser primitivas en el sistema.

A continuación, algunos ejemplos ilustrativos sobre el uso de las reglas mencionadas.

Ejemplo (14): (∃x)Fx → (∃x)(Fx ∨ Gx)

Demostración:

```
1|      |(∃x)Fx                       Hip.
2|      |      x |Fx                  Hip.
3|      |        |Fx ∨ Gx             (2) ID
4|      |        |(∃x)(Fx ∨ Gx)       (3) ICE
5|      |(∃x)(Fx ∨ Gx)                (1, 2-4) ECE
6|(∃x)Fx → (∃x)(Fx ∨ Gx)              (1-5) ICond.
```

En este ejemplo se puede apreciar el uso de la regla ECE en 1; dicha regla ha generado una segunda subprueba con variable marcada. Al final de la barra de esta segunda subprueba se ha colocado la fórmula que deseamos derivar (secuencia 4), luego se obtiene la fórmula deseada y la justificación de la regla ECE aparece en el paso 5, como se quería demostrar a partir de 1.

Ejemplo (15): (∃x)(Fx ∨ Gx) .↔. (∃x)Fx ∨ (∃x)Gx

Demostración:

```
 1 | |(∃x)(Fx ∨ Gx)                          Hip.
 2 | |     x|Fx ∨ Gx                          Hip.
 3 | |      |   |Fx                           Hip.
 4 | |      |   |(∃x)Fx                       (3) ICE
 5 | |      |   |(∃x)Fx ∨ (∃x)Gx              (4) ID
   | |      |
 6 | |      |   |Gx                           Hip.
 7 | |      |   |(∃x)Gx                       (6) ICE
 8 | |      |   |(∃x)Fx ∨ (∃x)Gx              (7) ID
 9 | |      |(∃x)Fx ∨ (∃x)Gx                  (2, 3-5, 6-8) ED
10 | |(∃x)Fx ∨ (∃x)Gx                         (1, 2-9) ECE
   |
11 | |(∃x)Fx ∨ (∃x)Gx                         Hip.
12 | |   |(∃x)Fx                              Hip.
13 | |   |     x|Fx                           Hip.
14 | |   |      |Fx ∨ Gx                      (13) ID
15 | |   |      |(∃x)(Fx ∨ Gx)                (14) ICE
16 | |   |(∃x)(Fx ∨ Gx)                       (12, 13-15) ECE
   | |
17 | |   |(∃x)Gx                              Hip.
18 | |   |     x|Gx                           Hip.
19 | |   |      |Fx ∨ Gx                      (18) ID
20 | |   |      |(∃x)(Fx ∨ Gx)                (19) ICE
21 | |   |(∃x)(Fx ∨ Gx)                       (17, 18-20) ECE
22 | |    (∃x)(Fx ∨ Gx)                       (11, 12-16, 17-21) ED
23 | (∃x)(Fx ∨ Gx) .↔. (∃x)Fx ∨ (∃x)Gx        (1-10, 11-22) IB
```

En este caso, hemos demostrado la validez de una fórmula bicondicional (secuencia 23). La demostración de la primera subprueba es totalmente independiente de la segunda. A partir de la fórmula 1, hemos aplicado ECE, lo que ha dado origen a una subprueba con variable marcada. En la segunda subprueba, se puede apreciar que la hipótesis es una fórmula disyuntiva y, como tal, por la regla ED da origen a dos subpruebas (del 12 al 16 y del 17 al 21). En cada una de estas subpruebas, se aplica la regla ECE.

El ejemplo (15) es la demostración de la **ley de la distribución del cuantificador existencial en la disyunción**. Nótese que, según esta ley, el cuantificador existencial se distribuye sólo en los operandos de una disyunción. Si el lector sigue con cuidado las secuencias de la demostración, podrá ver la aplicación de las reglas ECE e ICE, que es el objetivo que perseguimos con estos ejemplos.

A partir de ahora podemos demostrar cualquier fórmula válida de la lógica de primer orden monádica por el método de la deducción natural.

Ejemplo (16): (∀x)Fx ⇔ ~(∃x)~Fx

Demostración:

1	│(∀x)Fx	Hip.
2	│ │(∃x)~Fx	Hip.
3	│ │ x │~Fx	Hip.
4	│ │ │(∀x)Fx	(1) Reit.
5	│ │ │Fx	(4) ECU
6	│ │ │~(∀x)Fx	(3,5) EN
7	│ │~(∀x)Fx	(2, 3-6) ECE
8	│ │(∀x)Fx	(1) Reit.
9	│~(∃x)~Fx	(2-7-8) IN
10	│~(∃x)~Fx	Hip.
11	│ x │~(∃x)~Fx	(10) Reit.
12	│ │ │~Fx	Hip.
13	│ │ │(∃x)~Fx	(12) ICE
14	│ │ │~(∃x)~Fx	(11) Reit.
15	│ │~~Fx	(12-13-14) IN
16	│ │Fx	(15) DN
17	│(∀x)Fx	(11-16) ICU

En el ejemplo anterior hemos seguido en el paso 10 la numeración en vez de empezar de nuevo en 1, para evitar confusiones.

Ejercicios

1. Efectúe las deducciones siguientes.

a. (∀x)Mx → (∃x)(Mx ∨ Hx)
b. (∀x)(Fx → Gx) .→. (∀x)Fx → (∃x)Gx
c. ~(∃x)Fx → (∀x)~Fx
d. (∀x)(Fx ∨ Gx) .→. (∃x)Fx ∨ (∃x)Gx
e. (∀x)Ex ∧ (∀x)(Ex → Lx) ∧ Ia ∧ Na .→. (∃y)(Ey ∧ Ly) ∧ (∃z)Iz

2. Demuestre por deducción natural la validez de los siguientes razonamientos.

a. Es falso que existan analfabetos; luego, todos son alfabetos.
b. No hay videntes en el salón; luego, todos son invidentes en el salón.
c. Si todos son careyes, todos son tortugas. Todos son quelonios si todos son tortugas. Todos son reptiles, ya que todos son quelonios. Luego, si todos son careyes, entonces algunos son tortugas y algunos quelonios son reptiles.
d. Todos los que tocan guitarra cantan baladas de amor y Eliana toca guitarra. Luego, algunos cantan baladas de amor.

3. Demuestre las siguientes inferencias por deducción natural.

a. $(\exists x)(Sx \wedge Px) \rightarrow (\exists x)Sx$
b. $(\forall x)Fx \wedge (\exists x)Gx \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)(Fx \wedge Gx)$
c. $(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Px \rightarrow (\exists x)Qx$
d. $(\forall x)(Mx \rightarrow Hx) \wedge (\exists x)(Hx \vee Mx) \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Hx$
e. $(\exists x)(p \vee Bx) \wedge (\forall x)(p \rightarrow Cx \;.\!\wedge\!.\; Bx \rightarrow Cx) \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)Cx$

4. Pruebe por deducción natural que las siguientes inferencias son válidas.

a. No todos son ordenados si algunos son desordenados.
b. Si existen felices, entonces no todos son infelices.
c. O hay arroz o hay ensalada. Por lo tanto, hay arroz o ensalada.
d. Algunos hombres son felices. Todos los que son felices saben sonreír y amar. Por tanto, algunos hombres saben amar.

Solución:

1. A continuación, las pruebas. ¿Puede el lector imaginar otras posibles soluciones?

(a)

1	$(\forall x)Mx$	Hip.
2	Mx	ECU (1)
3	$Mx \vee Hx$	ID (2)
4	$(\exists x)(Mx \vee Hx)$	ICE (3)
5	$(\forall x)Mx \rightarrow (\exists x)(Mx \vee Hx)$	ICond. (1-4)

(b)

1	$\vert\ \underline{(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)}$	Hip.
2	$\vert\ \vert\ \underline{(\forall x)Fx}$	Hip.
3	$\vert\ \vert\ (\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$	Reit. (1)
4	$\vert\ \vert\ Fx \rightarrow Gx$	ECU (3)
5	$\vert\ \vert\ Fx$	ECU (2)
6	$\vert\ \vert\ Gx$	ECond. (4,5)
7	$\vert\ \vert\ (\exists x)Gx$	ICE (6)
8	$\vert\ (\forall x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$	ICond. (2-7)
9	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) .\rightarrow. (\forall x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$	ICond. (1-8)

(c)

1	$\vert\ \underline{\sim(\exists x)Fx}$	Hip.
2	$\vert\ x\ \vert\ \vert\ \underline{Fx}$	Hip.
3	$\vert\ \ \ \vert\ \vert\ (\exists x)Fx$	ICE (2)
4	$\vert\ \ \ \vert\ \vert\ \sim(\exists x)Fx$	Reit. (1)
5	$\vert\ \ \ \vert\ \sim Fx$	IN (2-3-4)
6	$\vert\ (\forall x)\sim Fx$	ICU (2-5)
7	$\sim(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)\sim Fx$	ICond. (1-6)

(d)

1	$\vert\ \underline{(\forall x)(Fx \vee Gx)}$	Hip.
2	$\vert\ Fx \vee Gx$	ECU (1)
3	$\vert\ \vert\ \underline{Fx}$	Hip.
4	$\vert\ \vert\ (\exists x)Fx$	ICE (3)
5	$\vert\ \vert\ (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	ID (4)
6	$\vert\ \vert\ \underline{Gx}$	Hip.
7	$\vert\ \vert\ (\exists x)Gx$	ICE (6)
8	$\vert\ \vert\ (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	ID (7)
9	$\vert\ (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	ED (2, 3-5, 6-8)
10	$(\forall x)(Fx \vee Gx) .\rightarrow. (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	ICond. (1-9)

(e)

1	$(\forall x)Ex \wedge (\forall x)(Ex \rightarrow Lx) \wedge Ia \wedge Na$	Hip.
2	$(\forall x)Ex$	EC (1)
3	$(\forall x)(Ex \rightarrow Lx)$	EC (1)
4	Ex	ECU (2)
5	$Ex \rightarrow Lx$	ECU (3)
6	Lx	ECond. (4,5)
7	$Ex \wedge Lx$	IC (4,6)
8	$(\exists y)(Ey \wedge Ly)$	ICE (7)
9	Ia	EC (1)
10	$(\exists z)Iz$	ICE (9)
11	$(\exists y)(Ey \wedge Ly) \wedge (\exists z)Iz$	IC (8,10)
12	$(\forall x)Ex\wedge(\forall x)(Ex\rightarrow Lx)\wedge Ia\wedge Na.\rightarrow.(\exists y)(Ey\wedge Ly)\wedge(\exists z)Iz$	ICond. (1-11)

2. Presentamos las simbolizaciones y las pruebas correspondientes.

a. $\sim(\exists x)\sim Ax \rightarrow (\forall x)Ax$

1	$\sim(\exists x)\sim Ax$	Hip.
2	$x \quad \sim Ax$	Hip.
3	$(\exists x)\sim Ax$	ICE (2)
4	$\sim(\exists x)\sim Ax$	Reit. (1)
5	$\sim\sim Ax$	IN (2-3-4)
6	Ax	EDN (5)
7	$(\forall x)Ax$	ICU (2-6)
8	$\sim(\exists x)\sim Ax \rightarrow (\forall x)Ax$	ICond. (1-7)

b. Note que el lector ya ha sido demostrado en el ejercicio (1b).

c. Equivale a:

$(\forall x)Cx \rightarrow (\forall x)Tx$
$(\forall x)Tx \rightarrow (\forall x)Qx$
$(\forall x)Qx \rightarrow (\forall x)Rx \quad /\therefore \quad (\forall x)Cx\ .\rightarrow.\ (\exists x)Tx \wedge (\exists x)(Qx \wedge Rx)$

1	$(\forall x)Cx \rightarrow (\forall x)Tx$	Hip.
1	$(\forall x)Tx \rightarrow (\forall x)Qx$	Hip.
3	$(\forall x)Qx \rightarrow (\forall x)Rx$	Hip.
4	$(\forall x)Cx$	Hip.
5	$(\forall x)Cx \rightarrow (\forall x)Tx$	Reit. (1)
6	$(\forall x)Tx$	ECond. (4,5)
7	Tx	ECU (6)
8	$(\exists x)Tx$	ICE (7)
9	$(\forall x)Tx \rightarrow (\forall x)Qx$	Reit. (2)
10	$(\forall x)Qx$	ECond. (6,9)
11	Qx	ECU (10)
12	$(\forall x)Qx \rightarrow (\forall x)Rx$	Reit. (3)
13	$(\forall x)Rx$	ECond. (10,12)
14	Rx	ECU (13)
15	$Qx \wedge Rx$	IC (11,14)
16	$(\exists x)(Qx \wedge Rx)$	ICE (15)
17	$(\exists x)Tx \wedge (\exists x)(Qx \wedge Rx)$	IC (8,16)
18	$(\forall x)Cx \ .\!\rightarrow\!. \ (\exists x)Tx \wedge (\exists x)(Qx \wedge Rx)$	ICond. (4-17)

d. $(\forall x)(Gx \rightarrow Cx) \wedge Ge \ .\!\rightarrow\!. \ (\exists x)Cx$

1	$(\forall x)(Gx \rightarrow Cx) \wedge Ge$	Hip.
2	$(\forall x)(Gx \rightarrow Cx)$	EC (1)
3	Ge	EC (1)
4	$Ge \rightarrow Ce$	ECU (2)
5	Ce	ECond. (3,4)
6	$(\exists x)Cx$	ICE (5)
7	$(\forall x)(Gx \rightarrow Cx) \wedge Ge \ .\!\rightarrow\!. \ (\exists x)Cx$	ICond (1-6)

3. Efectuamos las demostraciones:

(a)

1	$(\exists x)(Sx \wedge Px)$	Hip.
2	$x \quad Sx \wedge Px$	Hip.
3	Sx	EC (2)
4	$(\exists x)Sx$	ICE (3)
5	$(\exists x)Sx$	ECE (1, 2-4)
6	$(\exists x)(Sx \wedge Px) \rightarrow (\exists x)Sx$	ICond. (1-5)

(c)

```
 1 |   |(∀x)Fx ∧ (∃x)Gx                      Hip.
   |   |--------------
 2 |   |(∀x)Fx                               EC (1)
 3 |   |(∃x)Gx                               EC (1)
 4 |   |      x |Gx                          Hip.
   |   |        |--
 5 |   |        |(∀x)Fx                      Reit. (2)
 6 |   |        |Fx                          ECU (5)
 7 |   |        |Fx ∧ Gx                     IC (4,6)
 8 |   |        |(∃x)(Fx ∧ Gx)               ICE (7)
 9 |   |(∃x)(Fx ∧ Gx)                        ECE (3, 4-8)
10 |(∀x)Fx ∧ (∃x)Gx .→. (∃x)(Fx ∧ Gx)       ICond. (1-9)
```

(c)

```
 1 |   |(∀x)(Px → Qx)                             Hip.
   |   |-------------
 2 |   |     |(∃x)Px                              Hip.
   |   |     |------
 3 |   |     |     x |Px                          Hip.
   |   |     |       |--
 4 |   |     |       |(∀x)(Px → Qx)               Reit. (1)
 5 |   |     |       |Px → Qx                     ECU (4)
 6 |   |     |       |Qx                          ECond. (3,5)
 7 |   |     |       |(∃x)Qx                      ICE (6)
 8 |   |     |(∃x)Qx                              ECE (2, 3-7)
 9 |   |(∃x)Px → (∃x)Qx                           ICond. (2-8)
10 |(∀x)(Px → Qx) .→. (∃x)Px → (∃x)Qx            ICond. (1-9)
```

(d)

1	$\mid\ \mid \underline{(\forall x)(Mx} \rightarrow Hx) \land (\exists x)(Hx \lor Mx)$	Hip.
2	$\mid\ \mid (\forall x)(Mx \rightarrow Hx)$	EC (1)
3	$\mid\ \mid (\exists x)(Hx \lor Mx)$	EC (1)
4	$\mid\ \mid\quad x \mid \underline{Hx} \lor Mx$	Hip.
5	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid \underline{Hx}$	Hip.
6	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid (\exists x)Hx$	ICE (5)
7	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid \underline{Mx}$	Hip.
8	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid (\forall x)(Mx \rightarrow Hx)$	Reit. (2)
9	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid Mx \rightarrow Hx$	ECU (8)
10	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid Hx$	ECond. (7,9)
11	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid (\exists x)Hx$	ICE (10)
12	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid (\exists x)Hx$	ED (4, 5-6, 7-11)
13	$\mid\ \mid (\exists x)Hx$	ECE (3, 4-12)
14	$\mid (\forall x)(Mx\rightarrow Hx)\land(\exists x)(Hx\lor Mx).\rightarrow.(\exists x)Hx$	ICond. (1-13)

(e)

1	$\mid\ \mid \underline{(\exists x)(p} \lor Bx) \land (\forall x)(p \rightarrow Cx\ .\land.\ Bx \rightarrow Ca)$	Hip.
2	$\mid\ \mid (\exists x)(p \lor Bx)$	EC (1)
3	$\mid\ \mid (\forall x)(p \rightarrow Cx\ .\land.\ Bx \rightarrow Ca)$	EC (1)
4	$\mid\ \mid\quad x \mid \underline{p} \lor Bx$	Hip.
5	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid (\forall x)(p \rightarrow Cx\ .\land.\ Bx \rightarrow Ca)$	Reit. (3)
6	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid p \rightarrow Cx\ .\land.\ Bx \rightarrow Ca$	ECU (5)
7	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid p \rightarrow Cx$	EC (6)
8	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid Bx \rightarrow Ca$	EC (6)
9	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid \underline{p}$	Hip.
10	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid p \rightarrow Cx$	Reit. (7)
11	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid Cx$	ECond. (9,10)
12	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid (\exists x)Cx$	ICE (11)
13	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid \underline{Bx}$	Hip.
14	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid Bx \rightarrow Ca$	Reit. (8)
15	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid Ca$	ECond. (13,14)
16	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid\quad \mid (\exists x)Cx$	ICE (15)
17	$\mid\ \mid\quad\ \ \mid (\exists x)Cx$	ED (4, 9-12, 13-16)
18	$\mid\ \mid (\exists x)Cx$	ECE (2, 4-17)
19	$\mid (\exists x)(p \lor Bx)\land(\forall x)(p\rightarrow Cx.\land.Bx\rightarrow Ca).\rightarrow.(\exists x)Cx$	ICond. (1-18)

4. a. $(\exists x){\sim}Ox \rightarrow {\sim}(\forall x)Ox$

1	$\underline{(\exists x)}{\sim}Ox$	Hip.
2	x $\underline{{\sim}Ox}$	Hip.
3	$\underline{(\forall x)Ox}$	Hip.
4	Ox	ECU (3)
5	${\sim}Ox$	Reit. (2)
6	${\sim}(\forall x)Ox$	IN (3-4-5)
7	${\sim}(\forall x)Ox$	ECE (1, 2-6)
8	$(\exists x){\sim}Ox \rightarrow {\sim}(\forall x)Ox$	ICond. (1-7)

b. $(\exists x)Fx \rightarrow {\sim}(\forall x){\sim}Fx$

1	$\underline{(\exists x)Fx}$	Hip.
2	x $\underline{Fx}$	Hip.
3	$\underline{(\forall x)}{\sim}Fx$	Hip.
4	Fx	Reit. (2)
5	${\sim}Fx$	ECU (3)
6	${\sim}(\forall x){\sim}Fx$	IN (3-4-5)
7	${\sim}(\forall x){\sim}Fx$	ECE (1, 2-6)
8	$(\exists x)Fx \rightarrow {\sim}(\forall x){\sim}Fx$	ICond. (1-7)

c. $(\exists x)Ax \vee (\exists x)Ex\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Ax \vee Ex)$

1	$\underline{(\exists x)}Ax \vee (\exists x)Ex$	Hip.
2	$\underline{(\exists x)Ax}$	Hip.
3	x $\underline{Ax}$	Hip.
4	$Ax \vee Ex$	ID (3)
5	$(\exists x)(Ax \vee Ex)$	ICE (4)
6	$(\exists x)(Ax \vee Ex)$	ECE (2, 3-5)
7	$\underline{(\exists x)Ex}$	Hip.
8	x $\underline{Ex}$	Hip.
9	$Ax \vee Ex$	ID (8)
10	$(\exists x)(Ax \vee Ex)$	ICE (9)
11	$(\exists x)(Ax \vee Ex)$	ECE (7, 8-10)
12	$(\exists x)(Ax \vee Ex)$	ED (1, 2-6,7-11)
13	$(\exists x)Ax \vee (\exists x)Ex\ .\!\rightarrow\!.\ (\exists x)(Ax \vee Ex)$	ICond. (1-12)

d. Derivaremos: $(\exists x)(Hx \land Fx) \land (\forall x)(Fx .\rightarrow. Sx \land Ax) \vdash (\exists x)(Hx \land Ax)$

1	$\underline{(\exists x)(Hx \land Fx) \land (\forall x)(Fx .\rightarrow. Sx \land Ax)}$	Hip.
2	$(\exists x)(Hx \land Fx)$	EC (1)
3	$(\forall x)(Fx .\rightarrow. Sx \land Ax)$	EC (1)
4	$x \mid \underline{Hx \land Fx}$	Hip.
5	Hx	EC (4)
6	Fx	EC (4)
7	$(\forall x)(Fx .\rightarrow. Sx \land Ax)$	Reit. (3)
8	$Fx .\rightarrow. Sx \land Ax$	ECU (7)
9	$Sx \land Ax$	ECond. (6,8)
10	Ax	EC (9)
11	$Hx \land Ax$	IC (5,10)
12	$(\exists x)(Hx \land Ax)$	ICE (11)
13	$(\exists x)(Hx \land Ax)$	ECE (2, 4-12)

3. REGLAS ADICIONALES PARA DN

Con la finalidad de evitar un procedimiento extenso en las demostraciones, vamos a recordar algunas reglas adicionales vistas en el capítulo VIII e introducir una nueva que nos permitirá en muchos casos abreviar el número de pasos. También utilizaremos las definiciones y leyes lógicas demostradas por DN como reglas de inferencia en las futuras demostraciones.

a. R5. *Modus Tollens* (MT) (R13 del capítulo VIII)

i	$A \rightarrow B$	Hip.
j	$\underline{\sim B}$	Hip.
k	$\sim A$	(i,j) MT

Según esta regla, si negamos el consecuente de una premisa condicional, se concluye la negación de su antecedente.

b. R6. Silogismo disyuntivo (SD) (R14 del capítulo VIII)

R6a)			R6b)		
i	$A \lor B$	Hip.	i	$A \lor B$	Hip.
j	$\underline{\sim A}$	Hip.	j	$\underline{\sim B}$	Hip.
k	B	(i,j) SD	k	A	(i,j) SD

Según la regla SD, si negamos uno de los miembros de una premisa disyuntiva, se concluye la afirmación del otro miembro de la disyunción.

c. R7. Silogismo hipotético puro (SHP)

```
i |A → B  Hip.
j |B → C  Hip.
  |------
k |A → C  (i,j) SHP
```

Esta regla se conoce también como la transitividad del condicional. Según SHP, se elimina el llamado 'término medio' que es el nexo, para concluir que el antecedente de una de las premisas implica al consecuente de la otra premisa. En este caso, el nexo es 'B' y se concluye que el antecedente 'A' implica al consecuente 'C' de la otra premisa. Ésta es la regla añadida a las reglas del capítulo VIII.

Prueba de SHP:

```
1|A → B                  Hip.
2|B → C                  Hip.
 |------
3|     |A                Hip.
 |     |--
4|     |A → B            (1) Reit.
5|     |B                (3,4) ECond.
6|     |B → C            (2) Reit.
7|     |C                (5,6) ECond.
8|A → C                  (3,7) ICond.
```

A continuación, algunos ejemplos que muestran la aplicación de las reglas mencionadas. En las próximas demostraciones, creemos innecesaria la descripción del procedimiento seguido, dado que el lector ya puede seguir las respectivas secuencias a partir de las justificaciones que aparecen en cada paso.

Ejemplo (17): $(\forall x)(Rx \rightarrow Gx)$
$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)Hx$
$(\forall x){\sim}Hx \quad /\therefore\ {\sim}(\forall x)Rx$

Demostración:

1	$(\forall x)(Rx \rightarrow Gx)$	Hip.
2	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)Hx$	Hip.
3	$(\forall x){\sim}Hx$	Hip.
4	${\sim}(\exists x)Hx$	(3) Def. ∃
5	${\sim}(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$	(2,4) MT
6	$(\exists x){\sim}(Fx \rightarrow Gx)$	(5) Def. ∃
7	$(\exists x)(Fx \land {\sim}Gx)$	(6) Def. Conj.
8	x $Fx \land {\sim}Gx$	Hip.
9	$(\forall x)(Rx \rightarrow Gx)$	(1) Reit.
10	$Rx \rightarrow Gx$	(9) ECU
11	${\sim}Gx$	(8) EC
12	${\sim}Rx$	(10,11) MT
13	$(\exists x){\sim}Rx$	(12) ICE
14	${\sim}(\forall x)Rx$	(13) Def. ∃
15	${\sim}(\forall x)Rx$	(7, 8-14) ECE

Ejemplo (18): $(\forall x)Fx \lor (\exists x)Gy$

$(\forall z)Hz \rightarrow (\forall y){\sim}Gy$

$(\forall z)(Fx \land Hz)$ //∴ ${\sim}(\forall x){\sim}Fx$

Demostración:

1	$(\forall x)Fx \lor (\exists x)Gy$	Hip.
2	$(\forall z)Hz \rightarrow (\forall y){\sim}Gy$	Hip.
3	$(\forall z)(Fx \land Hz)$	Hip.
4	$(\forall x){\sim}Fx$	Hip.
5	$(\forall z)(Fx \land Hz)$	(3) Reit.
6	$(\forall z)Fx \land (\forall z)Hz$	(5) Dist. CU
7	$(\forall z)Hz$	(6) EC
8	$(\forall z)Hz \rightarrow (\forall y){\sim}Gy$	(2) Reit.
9	$(\forall y){\sim}Gy$	(7,8) ECond.
10	${\sim}(\exists x)Gy$	(9) Def. ∃
11	$(\forall x)Fx \lor (\exists x)Gy$	(1) Reit.
12	$(\forall x)Fx$	(10,11) SD
13	Fx	(12) ECU
14	${\sim}Fx$	(4) ECU
15	${\sim}(\forall x){\sim}Fx$	(4-13-14) IN

Ejemplo (19): $(\forall y)Fy \rightarrow (\exists x)(Fx \vee Gx)$
$(\exists z)Hz \rightarrow (\forall y)Fy$
$\sim(\exists x)Gx \wedge \sim(\forall z)\sim Hz \quad //\therefore \ \sim(\forall x)\sim Fx$

Demostración:

1	$(\forall y)Fy \rightarrow (\exists x)(Fx \vee Gx)$	Hip.
2	$(\exists z)Hz \rightarrow (\forall y)Fy$	Hip.
3	$\sim(\exists x)Gx \wedge \sim(\forall z)\sim Hz$	Hip.
4	$(\exists z)Hz \rightarrow (\exists x)(Fx \vee Gx)$	(1,2) SHP
5	$\sim(\forall z)\sim Hz$	(3) EC
6	$(\exists z)Hz$	(5) Def. ∃
7	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	(4,6) ECond.
8	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	(7) Dist. CE
9	$\sim(\exists x)Gx$	(3) EC
10	$(\exists x)Fx$	(8,9) SD
11	$\sim(\forall x)\sim Fx$	(10) Def. ∃

El lector puede aplicar otras reglas y obtener secuencias diferentes en cada una de las demostraciones efectuadas, dado que no es el único camino a seguir. Esta observación vale también para cualquier demostración en este sistema.

Ejercicios

1. Demuestre la validez de las siguientes por deducción natural.

a. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \wedge Hd \ .\rightarrow. \ Md$
b. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \wedge Hd \ .\rightarrow. \ (\exists x)Mx$
c. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (\exists x)Fx \wedge (\forall x)(Hx \rightarrow \sim Fx) \wedge (\exists x)(\sim Gx \wedge \sim Hx) \ .\rightarrow. \ (\exists x)Gx$
d. $[(\exists x)Hx \rightarrow (\forall x)Fx] \wedge (\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx) \ .\rightarrow. \ (\exists x)Hx \rightarrow (\exists x)\sim Gx$
e. $(\forall x)(Sx \rightarrow Px) \rightarrow (\exists x)(Vx \wedge Zx), \ (\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \rightarrow \sim(\exists x)(Vx \wedge Zx)$
$//\therefore \ (\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \rightarrow \sim(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$
f. $(\forall z)Fz \rightarrow (\forall x)Fx$
g. $(\exists z)Fz \rightarrow (\exists x)Fx$
h. $(\exists x)Fx, \ (\forall z)Gz \ //. \ (\exists y)Fy \wedge (\exists y)Gy$
i. $(\forall z)(Pz \rightarrow Rz) \wedge (\forall x)Px \wedge Ry \ .\rightarrow. \ (\forall y)Ry$
j. $(\forall x)(Sx \rightarrow Mx) \wedge (\forall x)Px \ .\rightarrow. \ (\forall x)Sx \rightarrow (Pc \wedge Sb \wedge Ma)$
k. $(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx \wedge [(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx] \ .\rightarrow. \ \sim(\exists x)Hx$

l. $Fa \wedge (\forall x)Gx \;.\!\rightarrow\!.\; (\exists x)(\exists y)Fy \wedge (\forall y)(\forall x)Gx$

m. $\sim[(\forall x)Fx \vee \sim(\exists x)Gx],\ (\forall x)Fx \vee \sim(\exists x)Fx,\ (\exists x)Hx \rightarrow (\exists x)Fx \vdash$
$(\exists x)Kx \rightarrow (\exists x)Hx \;.\!\rightarrow\!.\; \sim(\exists x)Kx$

2. Pruebe por deducción natural que los siguientes razonamientos son correctos.

a. Todo miembro de la Municipalidad vive dentro de los límites de la ciudad de Lima. El doctor Barrantes no vive dentro de los límites de la ciudad de Lima. Luego, el doctor Barrantes no es un miembro de la Municipalidad.

b. Ningún silogismo válido tiene dos premisas particulares. Algunos silogismos de este libro son válidos. Luego, algunos silogismos de este libro no tienen dos premisas particulares.

c. Los médicos y abogados son profesionales si han estudiado en la universidad. Los profesionales y los boxeadores son respetados. Luego, los abogados son respetados si han estudiado en la universidad.

3. Dada la siguiente demostración por deducción natural cuantificacional, discuta las afirmaciones acerca de ella.

$$\begin{array}{r|l}
1 & (\exists x)Fx \wedge (\exists x)Gx \\ \cline{2-2}
2 & (\exists x)Fx \\
3 & (\exists x)Gx \\
4 & \qquad x \;\big|\; \underline{Fx} \\
5 & \qquad\quad \big|\; x \;\big|\; \underline{Gx} \\
6 & \qquad\quad \big|\;\;\;\; \big|\; Fx \\
7 & \qquad\quad \big|\;\;\;\; \big|\; Fx \wedge Gx \\
8 & \qquad\quad \big|\;\;\;\; \big|\; (\exists x)(Fx \wedge Gx) \\
9 & \qquad\quad \big|\; (\exists x)(Fx \wedge Gx) \\
10 & (\exists x)(Fx \wedge Gx)
\end{array}$$

A) Es correcta, aunque se debía reiterar '(∃x)Fx' antes de 5.
B) No es correcta porque no es posible incluir una subprueba marcada dentro de otra.
C) No es correcta por los pasos 8, 9 y 10.
D) No es correcta por el paso 6
E) No es correcta por los pasos 4 y 5.

Solución:

Daremos las pruebas en casi toda su extensión.

1.

(a)

```
 1 |      | (∀x)(Hx → Hx) ∧ Hd              Hip.
   |      |-----------------
 2 |      | (∀x)(Hx → Mx)                   EC (1)
 3 |      | Hd                              EC (1)
 4 |      | Hd → Md                         ECU (2)
 5 |      | Md                              ECond. (3,4)
 6 | (∀x)(Hx → Mx) ∧ Hd .→. Md              ICond. (1-5)
```

(b)

```
 1 |      | (∀x)(Hx → Hx) ∧ Hd              Hip.
   |      |-----------------
 2 |      | (∀x)(Hx → Mx)                   EC (1)
 3 |      | Hd                              EC (1)
 4 |      | Hd → Md                         ECU (2)
 5 |      | Md                              ECond. (3,4)
 6 |      | (∃x)Mx                          ICE (5)
 7 | (∀x)(Hx → Mx) ∧ Hd .→. (∃x)Mx          ICond. (1-6)
```

(c)

```
 1 |      | (∀x)(Fx→Gx) ∧ (∃x)Fx ∧ (∀x)(Hx→~Fx) ∧ (∃x)
   |      | (~Gx∧~Hx)                                Hip.
   |      |---------
 2 |      | (∀x)(Fx → Gx)                            EC (1)
 3 |      | (∃x)Fx                                   EC (1)
 4 |      | (∀x)(Hx → ~Fx)                           EC (1)
 5 |      | (∃x)(~Gx ∧ ~Hx)                          EC (1)
 6 |      |        x | Fx                            Hip.
   |      |          |----
 7 |      |          | (∀x)(Fx → Gx)                 Reit. (2)
 8 |      |          | Fx → Gx                       ECU (7)
 9 |      |          | Gx                            ECond. (6,8)
10 |      |          | (∃x)Gx                        ICE (9)
11 |      | (∃x)Gx                                   ECE (3, 6-10)
12 | (∀x)(Fx→Gx) ∧ (∃x)Fx ∧ (∀x)(Hx→~Fx) ∧ (∃x)(~Gx∧~Hx).→.
   | (∃x)Gx                                      ICond. (1-11)
```

(d)

1	$\underline{(\exists x)Hx \rightarrow (\forall x)Fx\ .\!\wedge\!.\ (\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)}$	Hip.
2	$(\exists x)Hx \rightarrow (\forall x)Fx$	EC (1)
3	$(\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)$	EC (1)
4	$\quad \vert\ \underline{(\exists x)Hx}$	Hip.
5	$\quad \vert\ (\exists x)Hx \rightarrow (\forall x)Fx$	Reit. (2)
6	$\quad \vert\ (\forall x)Fx$	ECond. (4,5)
7	$\quad \vert\ Fx$	ECU (6)
8	$\quad \vert\ (\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)$	Reit. (3)
9	$\quad \vert\ Fx \rightarrow \sim Gx$	ECU (8)
10	$\quad \vert\ \sim Gx$	ECond. (7,9)
11	$\quad \vert\ (\exists x)\sim Gx$	ICE (10)
12	$(\exists x)Hx \rightarrow (\exists x)\sim Gx$	ICond. (4-11)

(e)

1	$(\forall x)(Sx \rightarrow Px) \rightarrow (\exists x)(Vx \wedge Zx)$	Hip.
2	$\underline{(\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \rightarrow \sim(\exists x)(Vx \wedge Zx)}$	Hip.
3	$\quad \vert\ \underline{(\forall x)(Mx \rightarrow Nx)}$	Hip.
4	$\quad \vert\ \quad \vert\ \underline{(\forall x)(Sx \rightarrow Px)}$	Hip.
5	$\quad \vert\ \quad \vert\ (\forall x)(Sx \rightarrow Px) \rightarrow (\exists x)(Vx \wedge Zx)$	Reit. (1)
6	$\quad \vert\ \quad \vert\ (\exists x)(Vx \wedge Zx)$	ECond. (4,5)
7	$\quad \vert\ \quad \vert\ (\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \rightarrow \sim(\exists x)(Vx \wedge Zx)$	Reit. (2)
8	$\quad \vert\ \quad \vert\ (\forall x)(Mx \rightarrow Nx)$	Reit. (3)
9	$\quad \vert\ \quad \vert\ \sim(\exists x)(Vx \wedge Zx)$	ECond. (7,8)
10	$\quad \vert\ \sim(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$	IN (4-6-9)
11	$(\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \rightarrow \sim(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$	ICond. (3-10)

(f)

1	$\quad \vert\ \underline{(\forall z)Fz}$	Hip.
2	$\quad \vert\ \quad x\ \vert\ (\forall z)Fz$	Reit. (1)
3	$\quad \vert\ \quad \ \vert\ Fx$	ECU (2)
4	$\quad \vert\ (\forall x)Fx$	ICU (2-3)
5	$(\forall z)Fz \rightarrow (\forall x)Fx$	ICond. (1-4)

(g)

1	$\quad \vert\ \underline{(\exists z)Fz}$	Hip
2	$\quad \vert\ \quad x\ \vert\ \underline{Fz}$	Hip.
3	$\quad \vert\ \quad \ \vert\ (\exists x)Fx$	ICE (2)
4	$\quad \vert\ (\exists x)Fx$	ECE (1,2-3)
5	$(\exists z)Fz \rightarrow (\exists x)Fx$	ICond. (1-4)

(h)

1	(∃x)Fx	Hip.
2	(∀z)Gz	Hip.
3	x │ Fx	Hip.
4	│ (∃y)Fy	ICE (3)
5	(∃y)Fy	ECE (1,3-4)
6	Gy	ECU (2)
7	(∃y)Gy	ICE (6)
8	(∃y)Fy ∧ (∃y)Gy	IC (5,7)

(i)

1	(∀z)(Pz → Rz)	Hip.
2	(∀x)Px	Hip.
3	Ry	Hip.
4	y │ (∀z)(Pz → Rz)	Reit. (1)
5	│ Py → Ry	ECU (4)
6	│ (∀x)Px	Reit. (2)
7	│ Py	ECU (6)
8	│ Ry	ECond. (5,7)
9	(∀y)Ry	ICU (4-8)

(j)

1	(∀x)(Sx → Mx)	Hip.
2	(∀x)Px	Hip.
3	│ (∀x)Sx	Hip.
4	│ (∀x)Px	Reit. (2)
5	│ Pc	ECU (4)
6	│ Sb	ECU (3)
7	│ Pc ∧ Sb	IC (5,6)
8	│ (∀x)(Sx → Mx)	Reit. (1)
9	│ Sa → Ma	ECU (8)
10	│ Sa	ECU (3)
11	│ MaECond. (9,10)	
12	│ Pc ∧ Sb ∧ Ma	IC (7,11)
13	(∀x)Sx → (Pc ∧ Sb ∧ Ma)	ICond. (3-12)

(k)

1	$(\forall x)Fx$	Hip.
2	$(\forall x)Gx$	Hip.
3	$[(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx]$	Hip.
4	$(\exists x)Hx$	Hip.
5	$(\forall x)Fx$	Reit. (1)
6	$(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx$	Reit. (3)
7	$\sim(\forall x)Gx$	ECond. (5,6)
8	$(\forall x)Gx$	Reit. (2)
9	$\sim(\exists x)Hx$	IN (4-7-8)

o también:

1	$(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx \wedge [(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx]$	Hip.
2	$(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx$	EC (1)
3	$(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx$	EC (1)
4	$\sim[(\forall x)Fx \rightarrow \sim(\forall x)Gx]$	Def. Conj. (2)
5	$\sim(\exists x)Fx$EN (3,4)	

(l)

1	Fa	Hip.
2	$(\forall x)Gx$ Hip.	
3	$(\exists y)Fy$ ICE (2)	
4	$(\exists x)(\exists y)Fy$	ICE (3)
5	y $(\forall x)Gx$	Reit. (2)
6	$(\forall y)(\forall x)Gx$	ICU (5-5)
7	$(\exists x)(\exists y)Fy \wedge (\forall y)(\forall x)Gx$	IC (4,6)

(m)

1	$\sim[(\forall x)Fx \vee \sim(\exists x)Gx]$	Hip.
2	$(\forall x)Fx \vee \sim(\exists x)Fx$	Hip.
3	$(\exists x)Hx \rightarrow (\exists x)Fx$	Hip.
4	$(\exists x)Kx \rightarrow (\exists x)Hx$	Hip.
5	$(\exists x)Kx \rightarrow (\exists x)Fx$	SHP (3,4)
6	$\sim(\forall x)Fx \wedge \sim\sim(\exists x)Gx$	DM (1)
7	$\sim(\forall x)Fx$	EC (6)
8	$\sim\sim(\exists x)Gx$	EC (6)
9	$\sim(\exists x)Fx$	SD (2,7)
10	$(\exists x)Kx$	Hip.
11	$(\exists x)Kx \rightarrow (\exists x)Fx$	Reit. (5)
12	$(\exists x)Fx$	ECond. (10,11)
13	$\sim(\exists x)Fx$	Reit. (9)
14	$\sim(\exists x)Kx$	IN (10-12-13)

2. a. (∀x)(Mx → Lx) ∧ ~Lb .→. ~Mb

```
 1 | (∀x)(Mx → Lx)              Hip.
 2 | ~Lb                        Hip.
   |-----
 3 |       | Mb                 Hip.
   |       |----
 4 |       | (∀x)(Mx → Lx)      Reit. (1)
 5 |       | Mb → Lb            ECU (4)
 6 |       | Lb                 ECond. (3,5)
 7 |       | ~Lb                Reit. (2)
 8 | ~Mb                        IN (3-6-7)
```

b. (∀x)(Vx → ~Px) ∧ (∃x)(Lx ∧ Vx) .→. (∃x)(Lx ∧ ~Px)

```
 1 | (∀x)(Vx → ~Px)             Hip.
 2 | (∃x)(Lx ∧ Vx)              Hip.
   |--------
 3 |       x | Lx ∧ Vx          Hip.
   |         |----
 4 |         | Lx               EC (3)
 5 |         | Vx               EC (3)
 6 |         | (∀x)(Vx → ~Px)   Reit. (1)
 7 |         | Vx → ~Px         ECU (6)
 8 |         | ~Px              ECond. (5,7)
 9 |         | Lx ∧ ~Px         IC (4,8)
10 |         | (∃x)(Lx ∧ ~Px)   ICE (4,8)
11 | (∃x)(Lx ∧ ~Px)             ECE (2,3-10)
```

c. (∀x)(Mx∨Ax.→.Vx→Px)∧(∀x)(Px∨Bx.→.Rx).→.(∀x)(Ax.→.Vx→Rx)

```
 1 | (∀x)(Mx ∨ Ax .→. Vx → Px)                Hip.
 2 | (∀x)(Px ∨ Bx .→. Rx)                     Hip.
   |--------
 3 |       x |   | Ax                         Hip.
   |         |   |----
 4 |         |   |      | Vx                  Hip.
   |         |   |      |----
 5 |         |   |      | (∀x)(Px ∨ Bx .→. Rx)   Reit. (2)
 6 |         |   |      | Px ∨ Bx .→. Rx         ECU (5)
 7 |         |   |      | (∀x)(Mx∨Ax.→.Vx→Px)    Reit. (1)
 8 |         |   |      | Mx ∨ Ax .→. Vx → Px    ECU (7)
 9 |         |   |      | Ax                     Reit. (3)
10 |         |   |      | Mx ∨ Ax                ID (9)
11 |         |   |      | Vx → Px                ECond. (8,10)
12 |         |   |      | Px                     ECond. (4, 11)
13 |         |   |      | Px ∨ Bx                ID (12)
14 |         |   |      | Rx                     ECond. (6, 13)
15 |         |   | Vx → Rx                      ICond. (4-14)
16 |         | Ax .→. Vx → Rx                   ICond. (3-15)
17 | (∀x)(Ax .→. Vx → Rx)                       ICU (3-16)
```

3. Si bien es posible incluir una subprueba marcada dentro de otra, el paso 6 no es correcto. Dentro de la subprueba marcada no puede ingresar 'Fx', pues no se cumple la restricción de la subprueba de permitir sólo el ingreso de fórmulas con variables 'x' ligadas.

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demuestre la validez de las siguientes fórmulas por deducción natural.

1.1. $(\exists x)Fx \rightarrow (\forall x)(Fx \rightarrow Fx)$
1.2. $(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \wedge Pb\ .\rightarrow.\ Qb$
1.3. $(\forall x)(Rx \rightarrow Sx)\ .\rightarrow.\ (\forall x)Rx \rightarrow (\forall x)Sx$
1.4. $(\forall x)(Mx \rightarrow Nx) \wedge (\forall x)Mx\ .\rightarrow.\ (\forall x)(Kx \rightarrow Nx)$
1.5. $(\forall x)(Rx.\rightarrow.Sx\rightarrow Tx)\wedge(\forall x)(Rx\rightarrow Sx).\rightarrow.(\forall x)(Rx\rightarrow Tx)$
1.6. $(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx\ .\rightarrow.\ (\forall x)(Fx \vee Gx)$
1.7. $(\forall x)(Fx\leftrightarrow Gx)\ .\rightarrow.\ (\forall x)Fx \leftrightarrow (\forall x)Gx$
1.8. $(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx\ .\leftrightarrow.\ (\forall x)(Fx \wedge Gx)$
1.9. $(\forall x)(Rx \rightarrow Px) \wedge (\forall x)(Px \rightarrow \sim Sx) \wedge (\forall x)(Rx \wedge Qx\ .\rightarrow.\ Sx)$
$.\rightarrow.\ (\forall x)(Rx \rightarrow \sim(Px \rightarrow Qx))$
1.10. $(\forall x)Mx \rightarrow (\exists x)(Mx \vee Hx)$
1.11. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx) \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow Vx) \wedge Hs\ .\rightarrow.\ Vs$
1.12. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)(Hx \rightarrow Fx)\ .\rightarrow.\ (\forall x)Hx \rightarrow (\exists x)Gx$
1.13. $(\exists x)Px \rightarrow \sim(\forall x)\sim Px$
1.14. $(\exists x)\sim Px \rightarrow \sim(\forall x)Px$
1.15. $(\forall x)\sim Px \rightarrow \sim(\exists x)Px$
1.16. $(\exists x)(Fx \wedge Gx)\ .\rightarrow.\ (\exists x)Fx \wedge (\exists x)Gx$
1.17. $(\exists x)(Hx \wedge Fx) \wedge (\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)\ .\rightarrow.\ (\exists x)(\sim Gx \wedge Hx)$
1.18. $(\forall x)(Gx \rightarrow \sim Hx) \wedge (\exists x)\sim(Fx \rightarrow \sim Hx)\ .\rightarrow.\ (\exists x)(Fx \vee Gx)$
1.19. $(\forall x)(Px \leftrightarrow Qx)\ .\rightarrow.\ (\exists x)Px \leftrightarrow (\exists x)Qx$
1.20. $(\forall x)(Jx \rightarrow Gx) \wedge (\exists x)(Hx \wedge \sim Gx) \wedge (\forall x)(Fx \rightarrow Jx)\ .\rightarrow.\ (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$

2. Simbolice y luego demuestre por deducción natural que los siguientes razonamientos son correctos.

2.1. Ningún empleado de correo es amable, sin embargo, las mujeres son amables. Luego, algunos empleados del correo no son mujeres.
2.2. Ninguna paralela es perpendicular. Luego, ninguna perpendicular es paralela.
2.3. Algunos insectos son animales vertebrados. Luego, algunos animales vertebrados son insectos.

2.4. Todos los muebles están descoloridos. Luego, ninguna cosa colorida es un mueble.

2.5. Todas las personas afortunadas son felices. Por lo tanto, todas las personas infelices son desafortunadas.

2.6. Algunos militares no son obedientes. Luego, algunos desobedientes son militares.

2.7. Todos los amigos son desinteresados. Por lo tanto, ninguna persona interesada es un amigo.

2.8. Si ninguna figura geométrica fuera irregular, todas las figuras regulares serían geométricas.

2.9. Algunos son puntuales. Las personas desordenadas son impuntuales. Luego, algunas personas puntuales son ordenadas.

2.10. Algunas lecturas comprensibles no son coherentes. Luego, algunas lecturas incoherentes no son incomprensibles.

2.11. Hay gente que trabaja. Todos los trabajadores son dependientes. Luego, algunos trabajadores no son independientes.

2.12. Ningún material combustible es impermeable. Algunos materiales combustibles son tóxicos. Luego, algunos materiales permeables son combustibles.

2.13. Algunas tiendas tienen rótulos luminosos. Todos tienen toldos. Luego, algunas que tienen rótulos luminosos tienen toldos.

2.14. Todos son irresponsables. Luego, si Juan y María se van de viaje, entonces no son responsables.

2.15. Todos los lobos marinos son pinnípedos. Algunos animales de piel fina son lobos marinos. Por tanto, algunos pinnípedos son animales de piel fina.

2.16. Los balcones de Lima son virreinales o republicanos. El balcón del Instituto Riva Agüero queda en Lima y no es virreinal. Luego, el balcón del Instituto Riva Agüero es republicano.

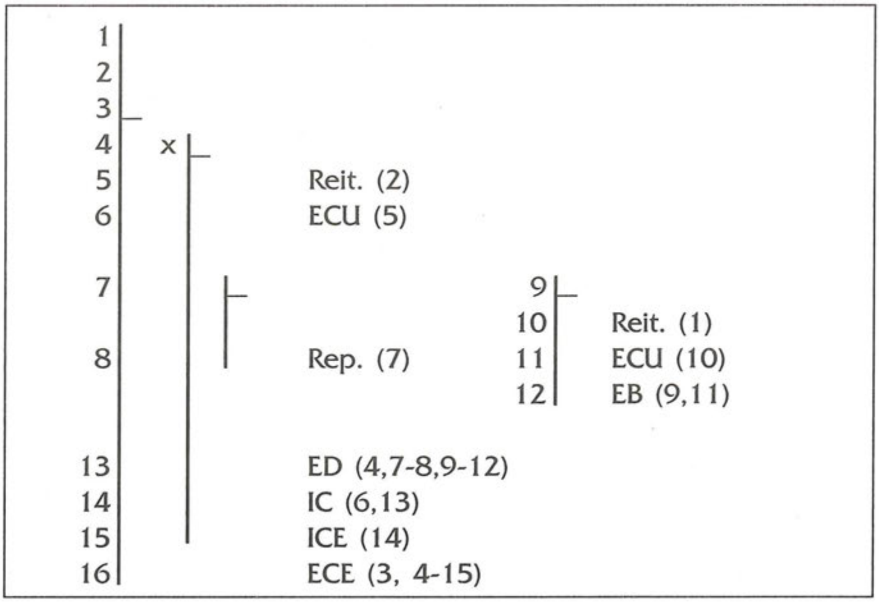
2.17. Los incas y los aztecas realizaban sacrificios humanos. Ningún pueblo que realice sacrificios humanos o que promueva guerras atómicas es pacifista. Algunos pueblos democráticos son pacifistas. Luego, algunos pueblos que no promueven guerras atómicas no son incas.

2.18. Los temblores y los terremotos destruyen viviendas y edificios públicos. El sismo de 1940 en Lima fue un terremoto. Luego, algunas viviendas han sido destruidas.

2.19. Ningún candidato será elegido si es liberal o nazi. Al menos un candidato liberal será elegido. Todos los candidatos que son políticos se sentirán decepcionados si no son elegidos. Todo candidato es un político. Todos los candidatos socialistas serán elegidos. Por tanto, algunos candidatos no se sentirán decepcionados.

2.20 Los que viven en el África sufren de malaria. Todos los que sufren de malaria tienen fiebre alta y anemia. Los que viven en la selva son mordidos por víboras. Tarzán vive en la selva si vive en el África. Luego, algunos que viven en el África son mordidos por víboras y algunos que tienen anemia viven en el África, si Tarzán vive en el continente negro.

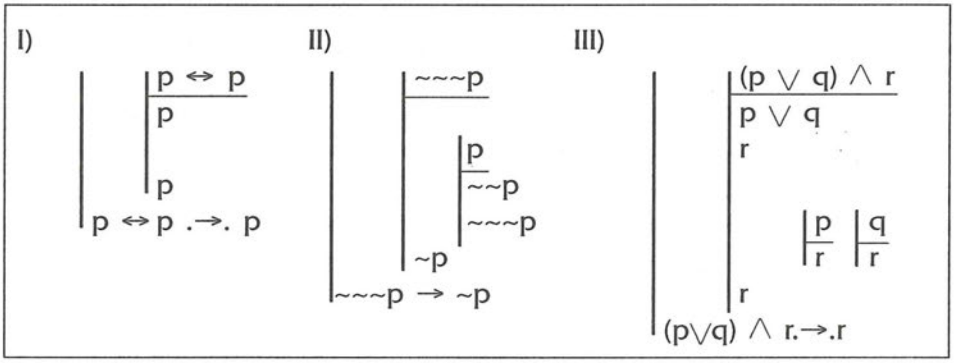
3. Las justificaciones de los pasos 2 y 4 de la siguiente demostración son:



1	
2	
3	
4	x
5	Reit. (2)
6	ECU (5)
7	
8	Rep. (7)
9	
10	Reit. (1)
11	ECU (10)
12	EB (9,11)
13	ED (4,7-8,9-12)
14	IC (6,13)
15	ICE (14)
16	ECE (3, 4-15)

5. EJERCICIOS DE REPASO

1. ¿Cuántas de las siguientes demostraciones son correctas?



IV)	$\vert \quad \vert \underline{p \vee q}$	A) 0
	$\vert \quad \vert p$	B) 1
	$\vert \quad \vert q$	C) 2
	$\vert \quad \vert p$	D) 3
	$\vert p \vee q .\rightarrow. p$	E) 4

2. ¿Cuántas reglas distintas de eliminación se tienen que aplicar para demostrar por DN la siguiente fórmula, sin emplear reglas adicionales?

$(p \vee q) \wedge (\sim r \vee \sim p) .\rightarrow. \sim r \vee q$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

3. Dados los siguientes argumentos:

I) O llueve o no llueve.
II) No es el caso de que llueva o no llueva; luego, nieva.
III) Nieva. Luego, si no nieva, llueve.

se puede demostrar por DN:

a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) I, II y III
e) Ninguna de las anteriores

4. Utilizando deducción natural y aplicando únicamente Reit., ICond. y ECond. se puede demostrar:

I) P_1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
P_2) $(q \rightarrow r) \rightarrow \sim t$
P_3) $\sim t \rightarrow \sim q$ $\quad // \therefore \sim s \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

II) P_1) $p \rightarrow (\sim r .\rightarrow. \sim q \rightarrow \sim t)$
P_2) $\sim q$
P_3) $\sim p$ $\quad // \therefore p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim t)$

III) P_1) $\sim s \rightarrow \sim t$

$P_2)\ q \rightarrow (\sim t\ .\!\rightarrow\!.\ p \wedge q)$
$P_3)\ q \rightarrow \sim s \qquad //\therefore q \rightarrow (p \wedge q)$

IV) $P_1)\ q$
$P_2)\ r \rightarrow s \qquad //\therefore(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r\ .\!\rightarrow\!.\ s$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. Utilizando deducción natural y aplicando únicamente Reit., ECond., ID y ED, se puede demostrar:

I) $P_1)\ (\sim p \vee q) \rightarrow r$
$P_2)\ (\sim s \vee r) \rightarrow t$
$P_3)\ \sim p \quad //\therefore(t \vee u) \vee \sim p$

II) $P_1)\ p \rightarrow q$
$P_2)\ r \rightarrow s$
$P_3)\ p \vee r \qquad //\therefore q \vee s$

III) $P_1)\ (p \wedge q) \rightarrow r$
$P_2)\ \sim s \quad //\therefore s \vee \sim s$

IV) $P_1)\ p \vee q$
$P_2)\ p \rightarrow \sim s \qquad //\therefore(\sim s \vee r) \vee q$

A) I y II
B) I y III
C) I, II y III
D) I, II y IV
E) I, II, III y IV

6. Dadas las siguientes fórmulas:

I) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q\ .\!\rightarrow\!.\ \sim p$
II) $p \rightarrow q\ .\!\rightarrow\!.\ \sim q \rightarrow \sim p$
III) $\sim p\ .\!\rightarrow\!.\ p \rightarrow q$

se pueden demostrar por deducción natural:

A) I y II
B) II y III

C) I y III
D) I, II y III
E) Ninguna de las anteriores

7. ¿En U={a}, cuántas inferencias se pueden demostrar por deducción natural?

I) ~(∃x)Fx → ~(∀x)Fx
II) (∀x)~Fx → (∃x)~Fx
III) (∃x)Fx → (∀x)Fx
IV) (∀x)Fx → (∃x)~Fx

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. En el siguiente esquema:

```
i │ ⋮
  │ A
  │ ⋮
  │       x │ ⋮
  │         │ A                 Reit. (i)
```

A no puede ser:

A) p
B) (∀x)(Fx → Gx)
C) (∀x)(Fy → Gx)
D) Fx → Gx
E) Ninguna de las anteriores

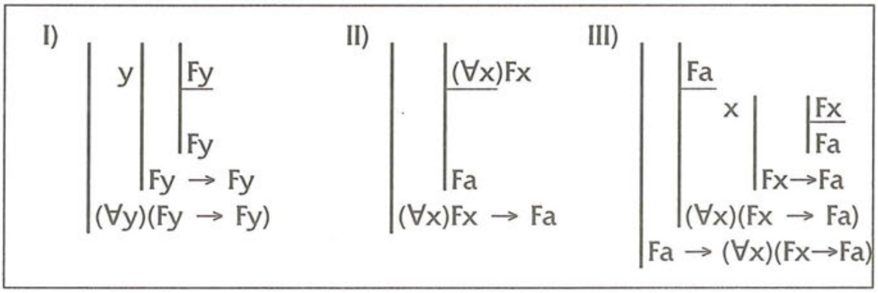
9. Está correctamente aplicada la regla de eliminación del cuantificador existencial en:

```
I)  │ (∃x)Ax
    │     x │ Ax
    │       │───
    │       │ ⋮
    │       │ Bx
    │ Bx

II) │ ~(∃x)Ax
    │────────
    │     x │ (∃x)Ax
    │       │───────
    │       │ ⋮
    │       │ (∃x)Bx
    │ (∃x)Bx

III) │ (∃x)Ax
     │     x │ ~A
     │       │───
     │       │ (∃x)Bx
     │ (∃x)Bx
```

A) Sólo I
B) Sólo II

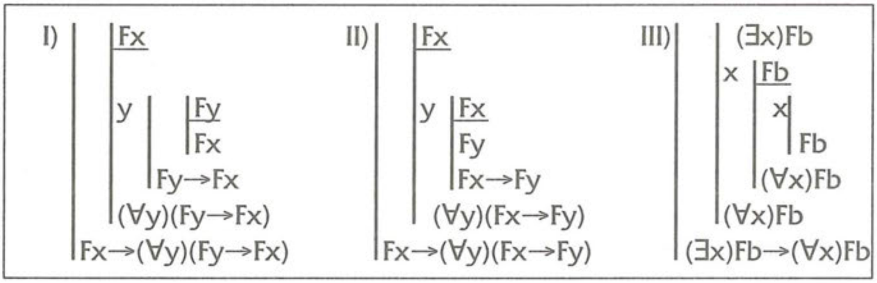
C) Sólo III
D) I, II y III
E) Ninguna de las anteriores

10. ¿Cuántas deducciones son correctas?



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I, II y III
E) Ninguna de las anteriores

11. ¿Cuántas deducciones cuantificacionales son correctas?



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I y III
E) Ninguna de las anteriores

12. La regla de eliminación que **no** se utiliza en la demostración por DN de la siguiente inferencia es:

P_1) (∃x)(Mx .∨. Fx ∧ ~Fx)
P_2) (∀x)(Mx → Hx) //∴ (∃x)Hx

A) ECU B) ECE C) EB D) a y b E) c y d

13. Del siguiente conjunto de premisas:

P_1) $\sim(\forall x)Fx$
P_2) $(\forall x)(Gx \rightarrow Fx)$

Por DN se puede demostrar que lógicamente se deduce:

A) $(\forall x)Gx$
B) $\sim(\forall x)Gx$
C) $(\exists x)Gx$
D) $\sim(\exists x)Gx$
E) Más de una respuesta es correcta

14. En la siguiente deducción natural:

```
|(∀x)(Cx → Ax .→. (Rx∨Lx) → Ox)
|(∃x)(Tx ∧ Ax)
|(∀x)(Cx → Ax)
|(∃x)Rx
|-----
|   x |Rx
|     |---
|     |(∀x)(Cx→Ax.→.(Rx∨Lx)→Ox)
|     |Cx→Ax.→.(Rx ∨ Lx)→Ox
|     |(∀x)(Cx → Ax)
|     |Cx → Ax
|     |(Rx ∨ Lx) → Ox
|     |Rx ∨ Lx
|     |Ox
|     |(∃x)Ox
|(∃x)Ox
```

Los pasos se justifican
con___hipótesis,___veces
ECU; ___veces ECond.,
___veces ID,___veces ECE
y ___veces Reit.

A) 5-2-2-1-1-2
B) 5-1-2-1-1-2
C) 5-2-2-0-1-2
D) 4-1-3-1-1-2
E) 4-3-1-1-1-2

15. Sobre la siguiente deducción se puede afirmar que:

1	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx$	Hip.
2	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$	EC (1)
3	Fx	EC (1)
4	$x \mid (\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$	Rep. (2)
5	$Fx \rightarrow Gx$	ECU (4)
6	Fx	Reit. (3)
7	Gx	ECond. (5,6)
8	$(\forall x)Gx$	ICU (4,7)
9	$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx \;.\!\rightarrow\!.\; (\forall x)Gx$	ICond. (1-8)

A) Es incorrecta pues la justificación del paso 4 es Reit. (2).

B) Es incorrecta pues el paso 8 debería ser ICU (4-7).

C) Es incorrecta pues el paso 3 no es posible.

D) Es incorrecta pues el paso 6 no es posible.

E) a, b y d

X

EL SISTEMA DE DIAGRAMAS SINTÁCTICOS (SDS)

1. LÓGICA PROPOSICIONAL

1.1. Diagramas semánticos y deducción natural

En el presente capítulo buscaremos mostrar el paralelismo que existe entre DN y DS, lo que nos permitirá "traducir" todo DS por una prueba en DN de forma automática. Dado que las "demostraciones" de DS son totalmente mecánicas, esto nos asegurará la posibilidad de encontrar una prueba en DN y, posteriormente, presentar un sistema de deducción similar a DS que llamaremos 'sistema de diagramas sintácticos' (SDS).

Con este fin requerimos las siguientes "equivalencias" sintácticas:

1. $A \Leftrightarrow {\sim}{\sim}A$ Doble negación
2. ${\sim}(A \wedge B) \Leftrightarrow {\sim}A \vee {\sim}B$ De Morgan
3. ${\sim}(A \vee B) \Leftrightarrow {\sim}A \wedge {\sim}B$ De Morgan
4. $A \rightarrow B \Leftrightarrow {\sim}A \vee B$ Def. del condicional
5. ${\sim}(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge {\sim}B$ Def. del condicional (negado)
6. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee ({\sim}A \wedge {\sim}B)$ Def. del bicondicional
7. ${\sim}(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge {\sim}B) \vee ({\sim}A \wedge B)$ Def. del bicondicional (negado)

las definiciones y la regla IN, fundamentalmente.

Todas ellas han sido establecidas en el capítulo VIII y aplicadas en los ejercicios desarrollados o en los propuestos.

El tema lo presentaremos, como es nuestra costumbre, informalmente con ejemplos. Para entenderlos, se debe recordar que en un DS las afirmaciones de una misma rama son conjuntivas, es decir, se afirman al mismo tiempo; mientras que las de dos ramas divergentes son disyuntivas.

Ejemplo (1):

F[p → p]	1	│ │ ~(p → p)	Hip.
│	2	│ │ p ∧ ~p	(1) Def. Cond.
V[p]	3	│ │ p	(2) EC
F[p]	4	│ │ ~p	(2) EC
===	5	│ ~~(p → p)	(1-3-4) IN
	6	│ p → p	(5) EDN

El paralelismo entre los dos sistemas puede reforzarse con algunos atajos. Para esto debemos "entender" la negación del condicional así:

i	│ ~(A → B)	
j	│ A	(i) Def. Cond. (negado)
k	│ ~B	(i) Def. Cond. (negado)

lo que es fácil de probar como regla derivada. Y, si además la doble negación se aplica de forma automática, logramos transformar el ejemplo (1) en:

Ejemplo (2):

F[p → p]	1	│ │ ~(p → p)	Hip.
V[p]	2	│ │ p	(1) Def. Cond.
F[p]	3	│ │ ~p	(1) Def. Cond.
===	4	│ p → p	(1-2-3) IN y EDN

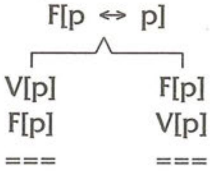
Veamos otro caso de DS que cierra.

Ejemplo (3):

F[~(p ∧ ~p)]	(1)	1	│ │ ~~(p ∧ ~p)	Hip.
V[p ∧ ~p]	(2)	2	│ │ p ∧ ~p	(1) DN
V[p]		3	│ │ p	(2) EC
F[p]		4	│ │ ~p	(2) EC
===		5	│ ~(p ∧ ~p)	(1-3-4) IN

Parecería que una rama cerrada se "traduce" como IN, pero esto sólo ocurre si el DS tiene una única rama. El siguiente ejemplo es algo más complejo y el lector debe recordar que la bifurcación de ramas corresponde a una disyunción.

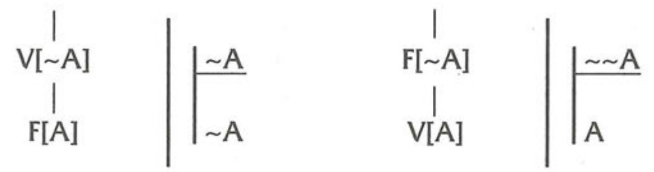
Ejemplo (4):

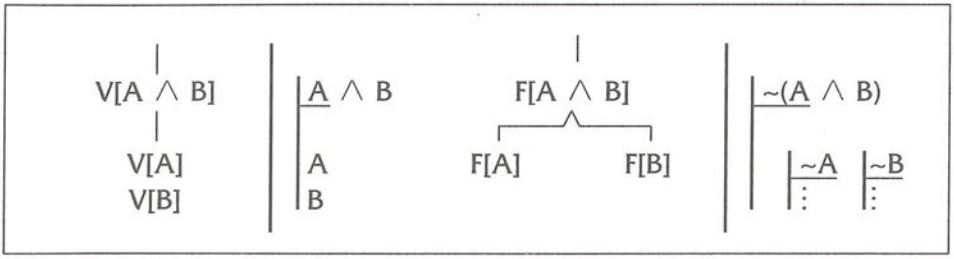


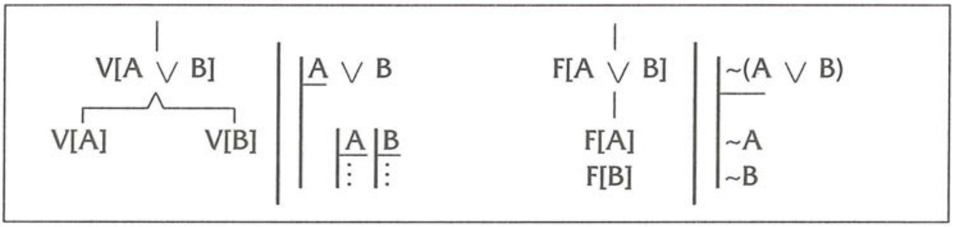
1	~(p ↔ p)	Hip.
2	(p ∧ ~p) ∨ (~p ∧ p)	(1)Def. Neg. Bic.
3	p ∧ ~p	Hip.
4	p	(3) EC
5	~p	(3) EC
6	p ↔ p	(4,5) EN
7	~p ∧ p	Hip.
8	~p	(7) EC
9	p	(7) EC
10	p ↔ p	(8,9) EN
11	p ↔ p	(2,3-6,7-10) ED
12	p ↔ p	(1-1-11) IN

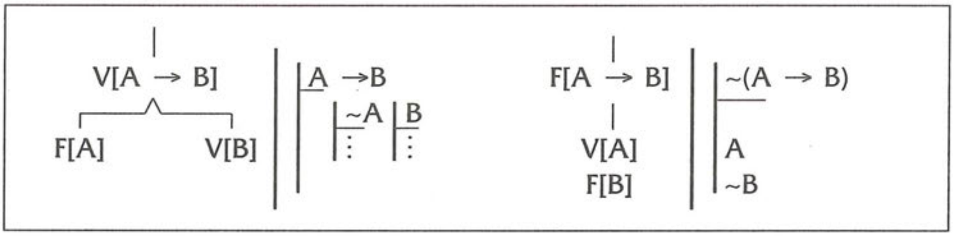
Además de las dos subpruebas de la disyunción, DN nos obliga a buscar "cerrar" la primera subprueba. De este modo, las contradicciones encontradas en las subpruebas de la disyunción se utilizan para introducir en la prueba 'p ↔ p' (pasos 6 y 10), que posteriormente permitirá "cerrar" la subprueba 1-11.

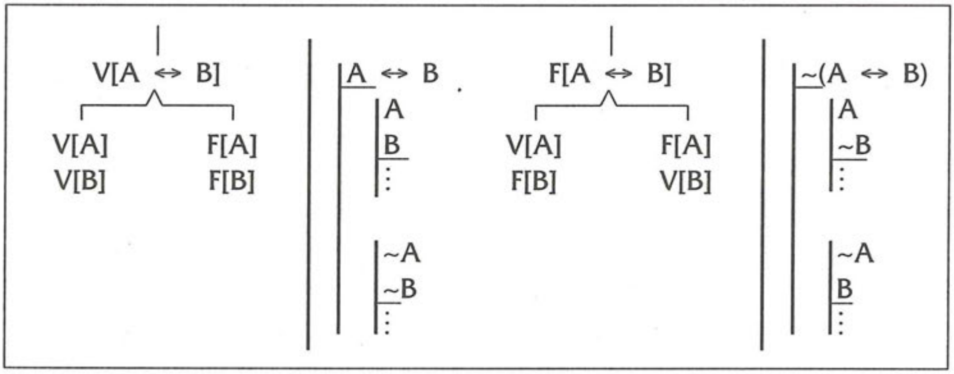
Las siguientes correspondencias entre DS y DN son correspondencias entre pasos al interior de un diagrama con pasos al interior de una prueba. Los pasos en DN se justifican fácilmente con las reglas que hemos presentado. Al final, obtendremos pautas para la traducción de todo diagrama semántico, que partiendo de la falsedad de una fórmula válida cierra, en una prueba por DN de esa fórmula.







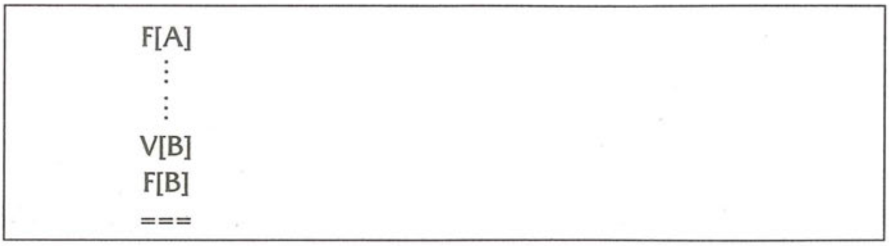




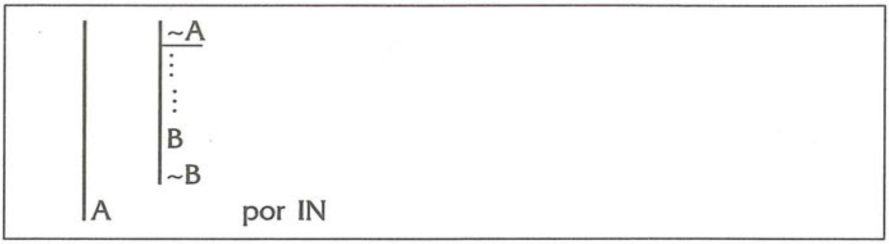
Debe recordarse, además, que F[A] en DS se transforma en ~A en DN.

Si estamos probando una tautología en DS y empezamos con la **hipótesis de falsedad**, todas las ramas cierran. Esto mismo en DN equivale a probar un teorema. ¿Qué ocurre en DN? Para responder analicemos las distintas situaciones, en cuanto al número de ramas que se presentan en el DS.

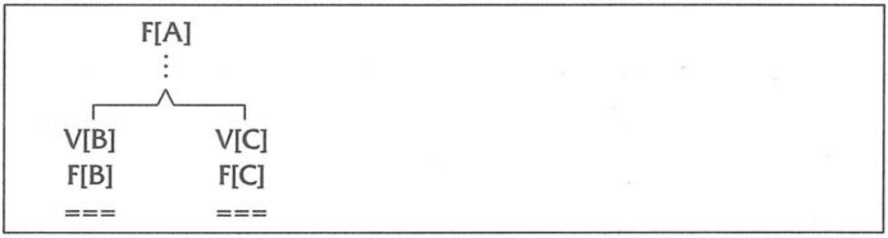
a) Una rama única que cierra. Esquemáticamente:



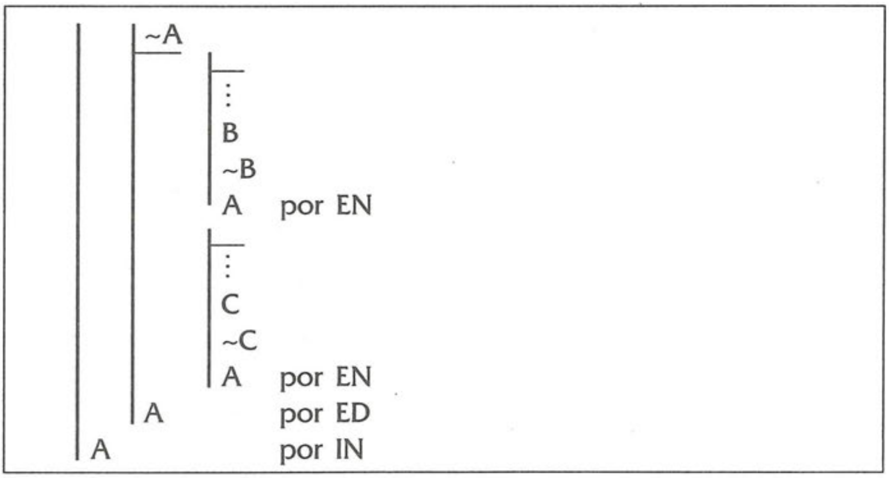
donde A es la fórmula válida. En DN tendríamos:



b) Dos ramas que cierran:

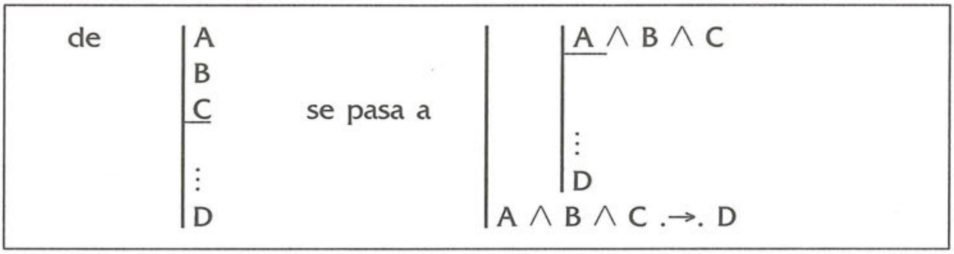


En DN:



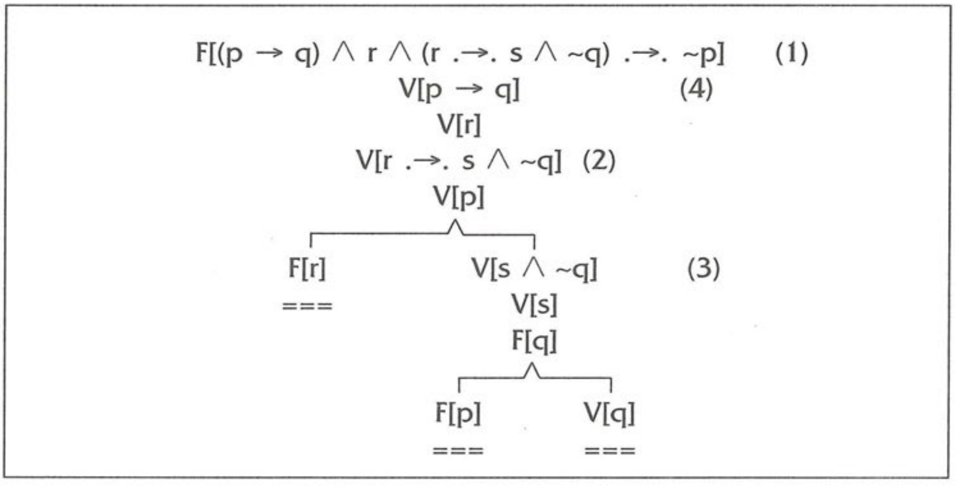
Aumentar el número de ramas que se cierran sólo conduce a un mayor número de subpruebas, que provienen de disyunciones de ramas, todas con una contradicción; lo que permite poner como último paso, por EN, la fórmula que se necesita obtener para contradecir la hipótesis de la prueba principal relativa (a la izquierda); y así sucesivamente hasta lograr por IN establecer el teorema deseado[16].

Obviamente, lo mismo puede hacerse con toda derivación, pues ya sabemos que si A, B, C $\vdash$D entonces se trata de probar $\vdash (A \wedge B \wedge C) \rightarrow D$ en esquemas de DN:



Con esto tenemos un sistema de traducción de DS a DN al nivel proposicional o veritativo-funcional.

Ejemplo (5): Traduciremos a DN el DS del primer ejercicio desarrollado de 3.2.1.



---

[16] Hemos partido de buscar ~A para contradecir A, también se podría buscar derivar $\perp$.

1	$\sim[(p \rightarrow q) \wedge r \wedge (r .\!\rightarrow\!. s \wedge \sim q) .\!\rightarrow\!. \sim p]$	Hip.
2	$p \rightarrow q$	(1) Def. Cond. (neg.) y EC
3	r	(1) Def. Cond. (neg.) y EC
4	$r .\!\rightarrow\!. s \wedge \sim q$	(1) Def. Cond. (neg.) y EC
5	p	(1) Def. Cond. (neg.) y EC
6	$\sim r .\!\vee\!. s \wedge \sim q$	(4) Def. Cond.
7	$\sim r$	Hip.
8	r	(3) Reit.
9	$\sim p$	(7,8) EN (contradirá p en la prueba de la izquierda)
10	$s \wedge \sim q$	Hip.
11	s	(10) EC
12	$\sim q$	(10) EC
13	$\sim p \vee q$	(2) Reit. y Def. Cond.
14	$\sim p$	Hip.
15	p	(5) Reit.
16	$\sim p$	(14,15) EN
17	q	Hip.
18	$\sim q$	(12) Reit.
19	$\sim p$	(17,18) EN
20	$\sim p$	(13,14-16, 17-19) ED
21	$\sim p$	(6,7-9,10-20) ED
22	$(p \rightarrow q) \wedge r \wedge (r.\!\rightarrow\!.s \wedge \sim q).\!\rightarrow\!.\sim p$	(1-5-21) IN y EDN

En el paso 9 elegimos introducir vía EN '~p', en lugar de la fórmula del paso 1 como teóricamente habíamos propuesto. La única razón es que la fórmula del paso 1 es más larga y nos pareció más cómodo elegir '~p'. El lector puede restituirle a la traducción a DN, si lo desea, su pureza doctrinal escribiendo la fórmula de 1 en el lugar de 'p' donde corresponda. Además, cabe señalar que hemos concentrado en un paso lo que en DN debería hacerse en varios para acentuar el paralelismo con el DS.

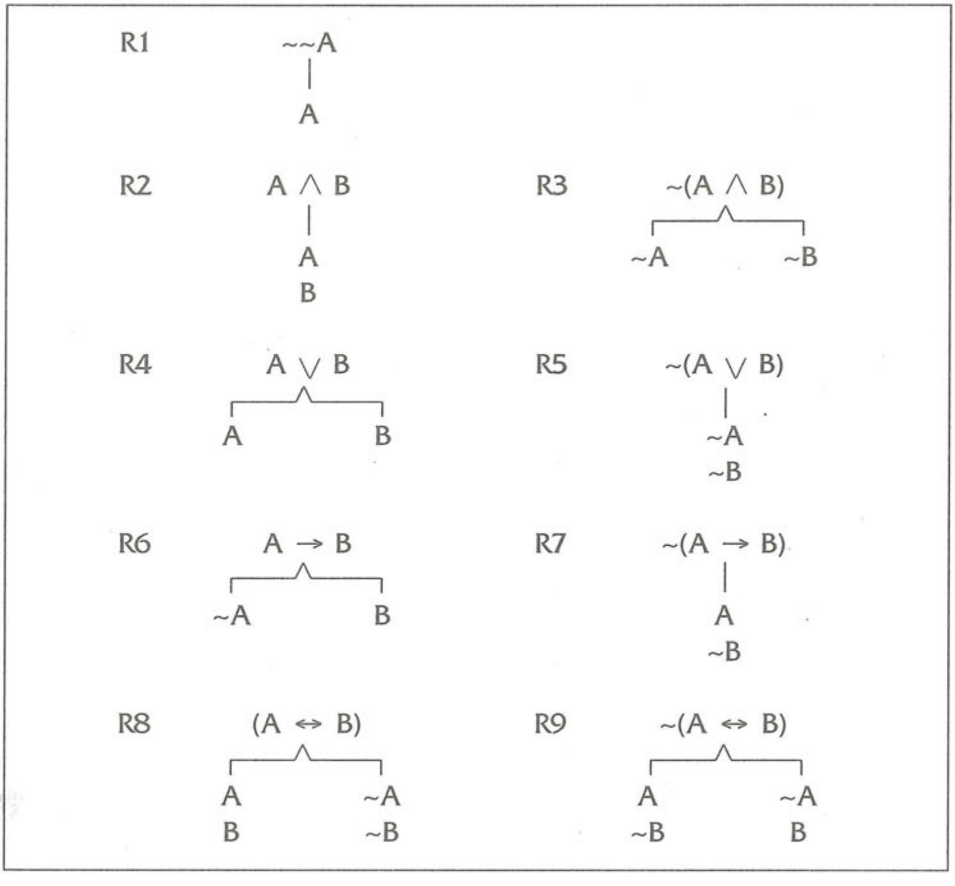
Esperamos, si no haber probado formalmente, al menos haber mostrado que toda tautología o consecuencia semántica puede traducirse a un teorema o consecuencia sintáctica en DN.

No hemos probado lo inverso, que toda consecuencia sintáctica se puede traducir a una semántica, pero también se puede demostrar. Todo esto nos lleva a proponer el sistema de diagramas sintácticos tal como lo presenta Quesada[17]. quien a su vez lo toma de R.M Smullyan (First Order Logic, Berlín, Springer 1980).

1.2. El sistema de diagramas sintácticos (SDS)

Damos a continuación las reglas de este sistema sintáctico. El lector que nos ha acompañado en el recorrido por los DS (capítulo II) estará de acuerdo con nosotros en que SDS consiste básicamente en DS: un DS en el que se han borrado las afirmaciones de verdad y las de falsedad se han reemplazado por una negación.

Reglas de SDS



---

[17] Véase Quesada [88].

En este sistema, un teorema se prueba si al aplicarle las reglas a su negación todas las ramas se cierran. Y una derivación $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash C$ es válida si $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow C$ es un teorema.

En el SDS, una rama se considera cerrada si aparecen en ella una fórmula A y su negación ~A, en cualquier orden. Y como en los DS, se considera una rama todo lo unido por trazos verticales.

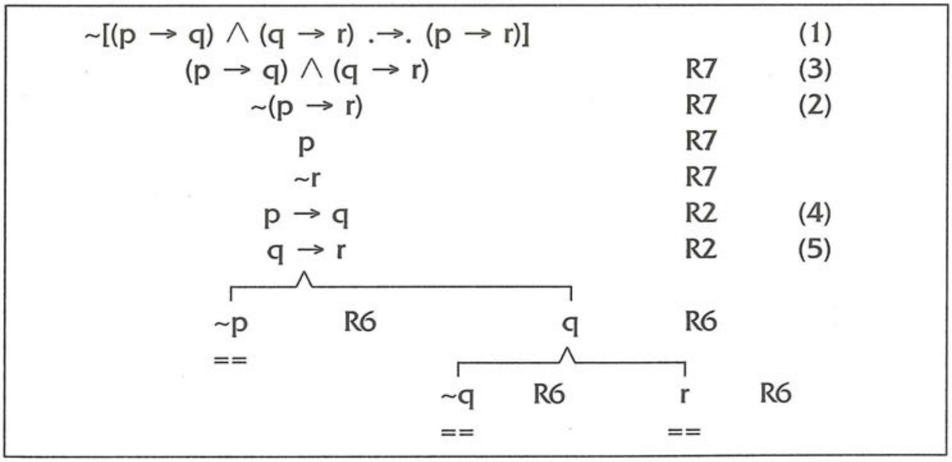
Es fácil ver que una derivación puede plantearse directamente así:

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \sim C \\ \vdots \end{array}}$$

y quedará establecida por el sistema si se cierran todas las ramas.

Probaremos con SDS un teorema y una derivación. Utilizaremos el mismo sistema de numeración de DS, y mencionaremos en los ejemplos las reglas que justifican cada fórmula (esto no es necesario pues la numeración es suficiente guía).

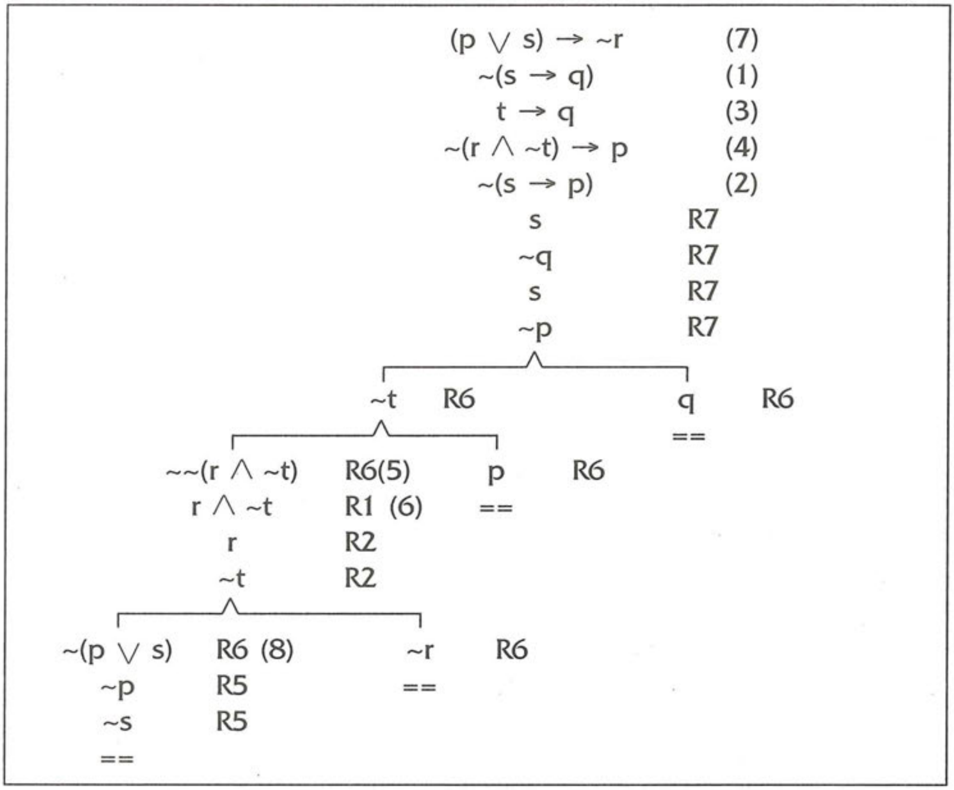
Ejemplo (6): Probar $\vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \,.\!\rightarrow\!.\, (p \rightarrow r)$



Ejemplo (7): Efectuar la derivación:

$(p \vee s) \rightarrow \sim r$
$\sim(s \rightarrow q)$
$t \rightarrow q$
$\sim(r \wedge \sim t) \rightarrow p \qquad //\therefore\ s \rightarrow p$

Diagrama:



Luego, la derivación es correcta.

2. LÓGICA CUANTIFICACIONAL

2.1. Diagramas semánticos y deducción natural

Nuevamente necesitamos establecer nexos entre los DS y DN, pero esta vez en los aspectos cuantificacionales. Para este efecto, consideraremos tantos "casos" como lo hicimos en DS. Es decir, diagramas en los que: (1) aparecen sólo cuantificadores universales verdaderos, (2) aparecen sólo universales verdaderos y un particular verdadero, (3) universales verdaderos y más de un existencial verdadero, (4) sólo existenciales verdaderos.

Recordando lo visto en la parte A del apéndice, podemos equiparar o dar igual tratamiento a:

1. V[(∀ß)A] en DS y (∀ß)A en DN,
2. F[(∀ß)A] en DS y ~(∀ß)A en DN,
3. V[(∃ß)A] en DS y (∃ß)A en DN,
4. F[(∃ß)A] en DS y ~(∃ß)A en DN.

Porque las expresiones cuantificadas, mientras no se recurra al interior de las mismas, reciben el mismo tratamiento semántico que cualquier fórmula de LP. Es decir, en esta fase no se trabaja con los cuantificadores. Por otro lado, expresiones sin cuantificadores como 'Fa' o 'Hb' se comportan también como fórmulas de LP. En general, así lo hacen todas las expresiones atómicas del tipo ψα como 'Fx', 'Gy', 'Ha', o combinaciones con conectores proposicionales de expresiones atómicas. Así, el problema que debemos abordar es el de la supresión de los cuantificadores. Ahora bien, en DN hemos probado que:

~(∃ß)ψß ⇔ (∀ß)~ψß y ~(∀ß)ψß ⇔ (∃ß)~ψß

Por lo tanto, podemos restringir nuestra atención a fórmulas con cuantificadores universales no negados y fórmulas con cuantificadores existenciales no negados.

Si sólo tenemos un cuantificador universal el paralelismo entre:

DS	DN
V[(∀ß)ψß]	(∀ß)ψß
|	⋮
ψα	ψα

permite una fácil traducción de DS a DN. Veamos dos ejemplos:

Ejemplo (8): (∀x)Fx ⊨ (∃x)Fx vs (∀x)Fx ⊢ (∃x)Fx

que trataremos en su forma: (∀x)Fx ⊨ ~(∀x)~Fx vs (∀x)Fx ⊢ ~(∀x)~Fx

$V[(\forall x)Fx]$ (2)	1	$(\forall x)Fx$	(1) Hip
$F[\sim(\forall x)\sim Fx]$ (1)	2	$\sim\sim(\forall x)\sim Fx$	(2) Hip.
|	3	$(\forall x)\sim Fx$	(2) EDN
$V[(\forall x)\sim Fx]$ (3)	4	$\sim Fa$	(3) ECU
$V[Fa]$	5	$(\forall x)Fx$	(1) Reit.
$V[\sim Fa]$ (4)	6	Fa	(5) ECU
$F[Fa]$	7	$\sim\sim\sim(\forall x)\sim Fx$	(2-4-6) IN
===	8	$\sim(\forall x)\sim Fx$	(7) EDN

En DS se podía trabajar con α, como recordará el lector, pero como α no se puede introducir en DN, hemos preferido elegir una constante 'a' que sí puede aparecer en DN. Además, este cambio no altera en nada el resultado obtenido en DS. También cabe notar que en DN se altera, en cierta medida, el orden de los pasos.

En DN, la regla de intercambio de cuantificadores permite cambiar '$(\exists x)$' en términos del universal. En DS, la falsedad de un existencial tiene las mismas condiciones que la verdad de un universal. Podemos, pues, recuperar las formas primigenias del modo siguiente: de $F[(\exists ß)A]$ a $F[\sim(\forall ß)\sim A]$ y de allí a $V[(\forall ß)\sim A]$.

Veamos el caso 2, un universal (o varios) verdadero y un existencial verdadero. Este caso en DS da lugar a una restricción: necesariamente debe eliminarse el existencial primero eligiendo una constante nueva. Luego, los universales se eliminan utilizando el mismo individuo. Lo mismo puede hacerse en DN: primero se abre una subprueba de ECE, se reiteran en ella las fórmulas con universales y luego se aplica ECU en la subprueba. En la subprueba de ECE se reproduce la contradicción de DS, con la contradicción utilizando EN escribimos la fórmula que deseamos obtener con ECE. La diferencia estará en que en DN, en vez de un individuo, se utilizará la variable que aparece en el cuantificador existencial.

Ejemplo (9):

$(\forall x)(Mx \rightarrow Hx), (\forall x)Mx \vdash \sim(\exists x)\sim Hx$ vs $(\forall x)(Mx \rightarrow Hx), (\forall x)Mx \vdash \sim(\exists x)\sim Hx$

V[(∀x)(Mx → Hx)]	│ (∀x)(Mx→Hx)	Hip.
V[(∀x)Mx]	│ (∀x)Mx	Hip.
V[(∃x)~Hx]	│ │ (∃x)~Hx	Hip.
	│ │ y │ ~Hy	Hip. (de ECE)
V[~Ha]	│ │ │ (∀x)(Mx → Hx)	Reit.
V[Ma → Ha]	│ │ │ (∀x)Mx	Reit.
V[Ma]	│ │ │ utilizamos ECU y reproducimos la situación de LP probando al final:	
y sigue veritativo-funcionalmente como en LP	│ │ │ ⋮	
	│ │ │ ~(∃x)~Hx	EN
	│ │ ~(∃x)~Hx	ECE
	│ ~(∃x)~Hx	IN

El paralelismo es obvio en ambos casos, pues tanto ‘a’ como ‘x’ sufren restricciones equivalentes: uno no puede haber aparecido antes y el otro se encuentra en una subprueba marcada.

Caso 3. Uno o varios universales verdaderos y más de un existencial verdadero. Se trata de repetir el sistema anterior tantas veces como sea necesario, recordando que:

$$(\exists x)Fx \Leftrightarrow (\exists y)Fy$$

Pondremos un ejemplo:

Ejemplo (10):

$$\models (\exists x)(Fx \wedge Hx) \wedge (\exists x)(Hx \wedge Gx) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim(\forall x)\sim(Gx \vee Fx)$$

vs

$$\vdash (\exists x)(Fx \wedge Hx) \wedge (\exists x)(Hx \wedge Gx) \;.\!\rightarrow\!.\; \sim(\forall x)\sim(Gx \vee Fx)$$

En resumen:

V[(∃x)(Fx ∧ Hx)] (1)	1	│(∃x)(Fx ∧ Hx)	Hip.
V[(∃x)(Hx ∧ Gx)] (2)	2	│(∃x)(Hx ∧ Gx)	Hip.
V[(∀x)~(Gx ∨ Fx)] (3)	3	│ │(∀x)~(Gx ∨ Fx)	Hip.
V[Fa ∧ Ha]	4	│ │ x│Fx ∧ Hx	Hip. (exist.)
V[Hb ∧ Gb] (4)	5	│ │ │(∀x)~(Gx ∨ Fx)	(3) Reit.
F[Ga ∨ Fa]		│ │ │	
F[Gb ∨ Fb] (5)	6	│ │ x│Hx ∧ Gx	Hip. (exist.)
	7	│ │ │ │(∀x)~(Gx ∨ Fx)	
V[Hb]	8	│ │ │ │~(Gx ∨ Fx)	
V[Gb]	9	│ │ │ │Gx	
	10	│ │ │ │~Gx	
F[Gb]	11	│ │ │ │~(∀x)~(Gx ∨ Fx)	EN
F[Fb]	12	│ │ │~(∀x)~(Gx ∨ Fx)	ECE
===	13	│ │~(∀x)~(Gx ∨ Fx)	ECE
	14	│~(∀x)~(Gx ∨ Fx)	IN

Nótese que no hemos reiterado las hipótesis 1 y 2 para no recargar innecesariamente la prueba. El lector debe completarla.

Caso 4. Cuando aparecen sólo existenciales verdaderos.

El DS cerrará siempre y cuando cada uno de los existenciales por separado no pueda ser verdadero de algún elemento del universo. Por tanto, sólo cerrará si alguno de ellos es falso para todo elemento del universo, i.e., es de la forma (∃x)(Fx ∧ ~Fx). Pero este caso es poco interesante pues todo el problema reside en analizar un único esquema existencial[18].

Así, pues, podemos pasar de DS a DN añadiendo:

V[(∀ß)ψß]	│ │(∀x)Fx
│	│ │⋮
V[ψα]	│ │Fα ECU
V[(∃ß)ψß]	│ │(∃ß)ψß
│	│ │⋮
V[ψγ]	│ │ ß│ψß
con γ nuevo	│ │ ⋮│

---

[18] Véase Quine [93], cap. 18 (ley IV.)

y las transformaciones:

$$\begin{array}{cc}
F[(\forall ß)\psi ß] & F[(\exists ß)\ \psi ß] \\
| & | \\
V[(\exists ß)\sim\psi ß] & V[(\forall ß)\sim\psi ß]
\end{array}$$

2.2. El sistema de diagramas sintácticos (SDS)

Añadiendo las siguientes reglas tenemos un sistema de diagramas sintácticos de igual alcance que los diagramas semánticos:

$$\begin{array}{llll}
\text{R10} & (\forall ß)\psi ß & \text{R11} & \sim(\forall ß)\psi ß \\
 & \quad | & & \quad | \\
 & \quad \psi\alpha & & \quad \sim\psi\gamma \\
\text{R12} & (\exists ß)\psi ß & \text{R13} & \sim(\exists ß)\psi ß \\
 & \quad | & & \quad | \\
 & \quad \psi\gamma & & \quad \sim\psi\alpha
\end{array}$$

donde γ está sujeto a la restricción de no aparecer antes en la misma rama del diagrama.

Resumiendo lo visto, para construir un sistema sintáctico a partir de los diagramas semánticos, basta reemplazar la afirmación de falsedad por una negación y borrar la afirmación de verdad.

CLAVE DE LOS EJERCICIOS DE REPASO

Capítulo IV

1. B
2. B
3. B
4. E
5. C
6. E
7. D
8. A
9. D
10. D
11. D
12. B
13. A
14. E
15. A

Capítulo VII

1. E
2. A
3. D
4. C
5. D
6. C
7. D
8. D
9. C
10. D
11. C
12. A
13. E
14. E
15. E

Capítulo IX

1. C
2. C
3. D
4. E
5. E
6. D
7. D
8. D
9. E
10. D
11. D
12. C
13. B
14. A
15. E

BIBLIOGRAFÍA

ABUGATTÁS, Juan

[1] "De los universales semánticos", en: *Archivos de la Sociedad Peruana de Filosofía* V. Lima, Amaru, 1986.

AGAZZI, Evandro

[2] *La lógica simbólica.* Barcelona, Herder, 1967.

[3] "La Logique et le Problème de la Rigueur", en: *Mérites et Limites des Méthodes Logiques en Philosophie.* París, Vrin, 1986.

ALCHOURRÓN, Carlos E. (ed.)

[4] *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía,* vol. 7: *Lógica.* Madrid, Trotta, 1995.

ALSTON, EDWARDS y otros

[5] *Los orígenes de la filosofía analítica. Moore, Russell, Wittgenstein.* Madrid, Tecnos, 1976.

ANSCOMBE, G. E. M.

[6] *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus.* Cambridge, Hutchinson, 1971.

ARISTÓTELES

[7] *Metafísica de Aristóteles.* Edición trilingüe por Valentín García Yebra. Madrid, Gredos, 1970.

[8] *Organon.* Traducción de J. Tricot. París, Vrin, 1977, 5 vols.

AYER, A. J. (comp.)

[9] *El positivismo lógico.* México, FCE, 1965.

BARWISE, Jon y ETCHEMENDY, John

[10] *The Language of First-Order Logic: Including the IBM-Compatible Windows Version of Tarski's World 4.0.* Standford, CSLI Lecture Notes, 1992.

BELL, David

[11] "Thoughts", en: *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 28, Nº 1, enero,1987.

BENCIVENGA, Ermanno

[12] "Analycity and Analytical Truth", en: *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 27, Nº 1, enero, 1986.

BETH, E. W.

[13] "Semantic Entailment and Formal Derivability", en: *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,* Afd. letterkunde, vol. 18, Nº 13, Amsterdam, 1955.

BLANCHÉ, Robert

[14] *Introduction à la Logique Contemporaine.* París, Armand Colin, 1968.

[15] *L'Axiomatique.* París, PUF, 1970.

[16] *La Logique et son Histoire, d'Aristote à Russell.* París, Armand Colin, 1970.

[17] "Sur la Trivalence", en: *Logique et Analyse,* año 15, Nº 59-60, París, Nauwelaerts, 1972.

BOCHENSKI, I. M.

[18] *Historia de la lógica formal.* Madrid, Gredos, 1966.

BOOLE, George

[19] *El análisis matemático de la lógica.* Madrid, Cátedra, 1979.

BOUVERESSE, Jacques

[20] *La Parole Malheureuse.* París, Minuit, 1971.

BRADLEY, Raymond y SWARTZ, Norman

[21] *Possible Worlds an Introduction to Logic and its Philosophy.* Oxford, Basil Blackwell, 1979.

BUNGE, Mario

[22] "¿Hay proposiciones?", en: *El análisis filosófico en América Latina.* México, FCE, 1985.

CARNAP, Rudolf

[23] "Empiricism, Semantics, and Ontology", en: *Revue Internationale de Philosophie*, Nº 11, enero, 1950.

CARROLL, Lewis

[24] *El juego de la lógica*. Madrid, Alianza Editorial, 1972.

[25] *Matemática demente*. Barcelona, Tusquets, 1979.

CIFUENTES, Carlos

[26] *Un sistema subyacente a la teoría de los subconjuntos difusos I.* Lima, por publicar.

[27] *Una implicación débil en lógica modal*, Lima, en publicación 1984.

CLAVELIN, Maurice

[28] "La Première Doctrine de la Signification du Cercle de Vienne", en: *Les Études Philosophiques*, Nº 4, 1973.

COPI, Irving M.

[29] *Introducción a la lógica*. Buenos Aires, Eudeba, 1968.

[30] *Lógica simbólica*. México, CECSA, 1979.

COUTURAT, Louis

[31] *El álgebra de la lógica*. Madrid, Tecnos, 1976.

CROSSLEY, I., ASH y otros

[32] *¿Qué es la lógica matemática?* Madrid, Tecnos, 1983.

CHAVES N., Alejandro

[33] *Introducción a la lógica*. Lima, Amaru, 1984.

DEAÑO, Alfredo

[34] *Las concepciones de la lógica*. Madrid, Taurus, 1980.

[35] *Introducción a la lógica formal*. Madrid, Alianza Editorial, 1983.

[36] *El resto no es silencio: escritos filosóficos*. Madrid, Taurus, 1983.

EPSTEIN, Richard L.

[37] *The Semantic Foundations of Logic: Propositional Logics*. Oxford, Oxford University Press, 2ª ed., 1995.

EPSTEIN, Richard L. y CARNIELLI, Walter A.

[38] *Computability: Computable Functions, Logic, and the Foundations of Mathematics*. Pacific Grove, Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

FERRATER MORA, José y LEBLANC, Hughes

[39] *Lógica matemática*. México, FCE, 1980.

FERRO, Juan B.

[40] *Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado* (Tesis). Lima, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 1966.

FERRO, Juan B., MIRÓ QUESADA, Francisco y otros

[41] *Lógica.* Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú, 1978.

FEYS, Robert y FITCH, Frederic B.

[42] *Los símbolos de la lógica matemática.* Madrid, Paraninfo, 1980.

FITCH, Frederic B.

[43] *Symbolic Logic.* Nueva York, The Ronald Press Company, 1952.

FORBES, Graeme

[44] *Modern Logic: A Text in Elementary Symbolic Logic.* Oxford, Oxford University Press, 1994.

FREGE, Gottlob

[45] *Conceptografía. Fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.

[46] *Escritos lógico-semánticos.* Madrid, Tecnos, 1974.

[47] *Posthumous Writings.* Chicago, University of Chicago Press, 1979.

[48] *Philosophical and Mathematical Correspondence.* Chicago, University of Chicago Press, 1980.

GAMUT, L. T. F.

[49] *Logic, Language and Meaning.* Vol. 1: *Introduction to Logic.* Vol. 2: *Intensional Logic and Logical Grammar.* Chicago, University of Chicago Press, 1991.

GARCÍA TREVIJANO, Carmen

[50] *El arte de la lógica.* Madrid, Tecnos, 1993.

GARRIDO, Manuel

[51] *Lógica simbólica.* Madrid, Tecnos, 3ª ed., 1995.

GENSLER, Harry

[52] *Symbolic Logic: Classical and Advanced Systems.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1990.

GOCHET, Paul

[53] *Quine en Perspective.* París, Flammarion, 1978.

GUERRA, Luis y GARCÍA, Hugo

[54] *Lógica matemática.* Lima, Studium, 1971.

GUTTENPLAN, Samuel

[55] *The Languages of Logic: An Introduction to Formal Logic.* Oxford, Basil Blackwell, 1989.

HAACK, Susan

[56] *Filosofía de las lógicas.* Madrid, Cátedra, 1982.

[57] *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism.* Chicago, University of Chicago Press, 1996.

HAMILTON, A. G.

[58] *Logic for Mathematicians.* Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

HASENJAEGER, Gisbert

[59] *Conceptos y problemas de la lógica moderna.* Barcelona, Labor, 1968.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W.

[60] *Elementos de lógica teórica.* Madrid, Tecnos, 1968.

HUNTER, Geoffrey

[61] *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden.* Madrid, Paraninfo, 1981.

ISEMINGER, Gary

[62] *An Introduction to Deductive Logic.* Nueva York, ACC, 1968.

KALINOWSKI, Georges

[63] *Lógica del discurso normativo.* Madrid, Tecnos, 1975.

KALISH, Donald, MONTAGUE, Richard y MAR, Gary

[64] *Logic Techniques of Formal Reasoning.* Fort Worth, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 2ª ed., 1980.

KLEENE, Stephen C.

[65] *Introducción a la metamatemática.* Madrid, Tecnos, 1974.

[66] *Logique Mathématique.* París, Editions Jacques Gabay, 1987.

KNEALE, Martha y KNEALE, William

[67] *El desarrollo de la lógica.* Madrid, Tecnos, 1972.

KÖRNER, Stephan

[68] *Introducción a la filosofía de la matemática.* México, Siglo XXI, 1969.

LARGEAULT, Jean

[69] "Les Idées Méthodologiques de Hilbert et la Théorie de la Démostration", en: *Les Études Philosophiques* 4, 1973.

LUKASIEWICZ, Jan

[70] *Estudios de lógica y filosofía.* Madrid, Revista de Occidente, 1970.

[71] *La silogística de Aristóteles: desde el punto de vista de la lógica formal moderna.* Madrid, Tecnos, 1977.

MANZANO, María

[72] *Teoría de modelos.* Madrid, Alianza Editorial, 1989.

MATES, Benson

[73] *Lógica matemática elemental.* Madrid, Tecnos, 1979.

[74] *Lógica de los estoicos.* Madrid, Tecnos, 1985.

McCAWLEY, James

[75] *Everything that Linguists Have Always Wanted to Know about Logic*: *But Were Ashamed to Ask.* Chicago, University of Chicago Press, 1981.

MENDELSOHN, Richard L.

[76] "Frege's Two Senses of "Is" ", en: *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 28, Nº 1, enero, 1987.

MIRÓ QUESADA, Francisco

[77] *Filosofía de las matemáticas.* Lima, Ignacio Prado Pastor,1980.

[78] "Sobre el concepto de razón", en: *El análisis filosófico en América Latina.* México, FCE, 1985.

[79] *Ensayos de filosofía del derecho.* Lima, Universidad de Lima, 1986.

[80] "Sobre el concepto de relevancia lógica", en: *Archivos de la Sociedad Peruana de Filosofía* V. Lima, Amaru, 1986.

MONTAGUE, Richard y KALISH, Donald

[81] "Remarks on Descriptions and Natural Deduction", en: *Archiv für matematische Logik und Grundlagenforschung,* vol. III, fasc. 1-2, 1957.

MORO SIMPSON, Thomas

[82] *Semántica filosófica: problemas y discusiones.* Prólogo, selección y notas de Thomas Moro Simpson. Buenos Aires, Siglo XXI, 1973.

NAGEL, Ernest y NEWMAN, James R.

[83] *El teorema de Gödel.* Madrid, Tecnos, 1979.

PÉREZ SEDEÑO, Eulalia

[84] *Ejercicios de lógica.* Madrid, Siglo XXI, 1991.

PIAGET, Jean

[85] *Logique, et Connaissance Scientifique*. Dirección de Jean Piaget. París, Gallimard, 1967.

PRIOR, Arthur N. y colaboradores

[86] *Historia de la lógica*. Madrid, Tecnos, 1976.

PUTNAM, Hilary

[87] "Models and Reality", en: *Notre Dame Journal of Symbolic Logic*, vol. 45, Nº 3, setiembre, 1980.

QUESADA, Daniel

[88] *La lógica y su filosofía. Introducción a la lógica*. Barcelona, Barcanova, 1985.

QUINE, Willard Van Orman

[89] *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona, Ariel, 1962.

[90] *Lógica matemática*. Madrid, Revista de Occidente, 1972.

[91] *Filosofía de la lógica*. Madrid, Alianza Editorial, 1973.

[92] *The Ways of Paradox and Other Essays*. Revisada y aumentada. Harvard, 1976.

[93] *Methods of Logic*. Cambridge, Harvard University Press, 4ª ed. , 1982.

[94] *Word and Object*. Cambridge, MIT Press, 1983.

[95] *La relatividad ontológica*. Madrid, Tecnos, 1986.

ROMANOS, George

[96] *Quine and Analytic Philosophy*. Cambridge, MIT Press, 1983.

ROSALES, Diógenes

[97] *Introducción a la lógica*. Lima, Amaru, 1979.

ROURE, Marie Louise

[98] *Éléments de Logique Contemporaine*. París, PUF, 1967.

RUSSELL, Bertrand

[99] "Logical Positivism", en: *Revue Internationale de Philosophie*, Nº 11, enero, 1950.

[100] *Ensayos sobre lógica y conocimiento (1901-1950)*. Madrid, Taurus, 1966.

[101] "La filosofía del atomismo lógico", en: *Lógica y conocimiento*. Madrid, Taurus, 1966.

[102] "Sobre las proposiciones: qué son y cómo significan", en: *Lógica y conocimiento*. Madrid, Taurus, 1966.

[103] "Atomismo lógico", en: *Lógica y conocimiento.* Madrid, Taurus, 1966.

SACRISTÁN, Manuel

[104] *Introducción a la lógica y al análisis formal.* Barcelona, Ariel, 1973.

SCHREIBER, Rupert

[105] *Lógica del derecho.* México, Distribuciones Fontanarama, 1995.

SMULLYAN, Raymond M.

[106] *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos.* Madrid, Cátedra, 1983.

[107] *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos: incluyendo una novela matemática que presenta el gran descubrimiento de Gödel.* Madrid, Cátedra, 1985.

[108] *Alicia en el país de las adivinanzas* , Madrid, Cátedra, 1986.

[109] *Les Théorèmes d'Incomplétude de Gödel,* París, Masson, 1993.

[110] *Ça y est, Je suis Fou!!* París, Dunod, 1993.

SUPPES, Patrick

[111] *Introducción a la lógica simbólica.* México, CECSA, 1981.

[112] "Congruency Theory of Propositions", en: *Mérites et Limites des Méthodes Logiques en Philosophie.* París, Vrin, 1986.

TARSKI, Alfred

[113] *Logique, Sémantique, Métamathématique.* París, Armand Colin, 1972.

[114] *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica.* Buenos Aires, Nueva Visión, 1972.

[115] *Introduction à la Logique.* Revisada y aumentada. París,1969.

TYMOCZKO, Tom y HENLE, Jim

[116] *Sweet Reason: A Field Guide to Modern Logic.* Nueva York, W.H. Freeman and Company, 1995.

VERNANT, Denis

[117] *Introduction à la Philosophie de la Logique.* París, Pierre Mardaga, 1986.

VON WRIGHT, George H.

[118] *Ensayo de lógica modal.* Buenos Aires, Rueda Filosófica, 1970.

WAGNER, Steven J.

[119] "The Rationalist Conception of Logic", en: *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 28, Nº 1, enero, 1987.

WESTON, Thomas

[120] "Approximate Truth", en: *Notre Dame Journal of Philosophical Logic*, vol. 16, Nº 2, mayo, 1987.

WHITEHEAD, Alfred N. y RUSSELL, Bertrand

[121] *Principia Mathematica*, vol. 1. Cambridge, Cambridge University Press, 1973 (1927).

WITTGENSTEIN, Ludwig

[122] *Tractatus Logico-Philosophicus*. Madrid, Alianza Editorial, 1975.

[123] *Quelques Remarques sur la Forme Logique*. París, TER, 1985.

YOURGRAU, Palle

[124] "Frege on Truth and Reference", en: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, Nº 1, enero, 1987.

ÍNDICE DE TÉRMINOS

ÍNDICE DE CONTENIDO

VI. SIMBOLIZACIÓN 193

VII. INFERENCIAS CLÁSICAS 213

VIII. EL SISTEMA DE DEDUCCIÓN NATURAL PROPOSICIONAL 239

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Se terminó de imprimir en el mes de marzo del 2000 en los
talleres de Servicio Copias Gráficas S.A. (RUC: 10069912)
Jr. Jorge Chávez 1059, Telefax: 424-9693
Lima 5, Perú

PRÓXIMAS PUBLICACIONES

Rocío Caravedo
Léxico del habla culta de Lima

Franklin Pease G. Y.
Del Tahuantinsuyo a la Historia del Perú

Elízabeth Doig
Liudmila Chaninskaia
Elementos de análisis numérico

Carlos Ramos
Codificación, Tecnología y Postmodernidad. La muerte de un Paradigma

Mario Castillo
Tratado de la venta (Colección Para Leer el Código Civil)

Fondo Editorial
Av. Universitaria cdra. 18 s/n,
San Miguel
Apartado 1761 Lima - Perú
Telfs.: 460-2870, 460-2991,
anexos 220, 356.
Telefax: 460-0872
e-mail: feditor@pupc.edu.pe