Capítulo 8

Derivación y Funciones Elementales

8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea $y = f(x)$ una función definida en cada punto del intervalo abierto I. Decimos que $f(x)$ es *diferenciable (o derivable) en un punto* x de I si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En este caso, dicho límite se designa por $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ o $D_x f(x)$, y se llama *la derivada de* $f(x)$ *en el punto* x. Por definición se tiene entonces que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si la derivada $f'(x)$ existe para cada x de I, la función $f'(x)$ *se llama la derivada de la función* $f(x)$; y decimos que $f(x)$ *es diferenciable en todo el intervalo* I.

El valor de la derivada de y en el punto a se suele denotar con

$$\frac{dy}{dx}(a) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = f'(a) = y'(a) = \left[y'(x)\right]_{x=a}$$

8.2 REGLA PARA CALCULAR LA DERIVADA EN UN PUNTO.

De la definición $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, donde $\Delta x = h$, podemos extraer la siguiente regla para calcular la derivada de $f(x)$ en el punto x.

Paso 1. Se suma a la variable x un incremento $\Delta x \neq 0$, y se calcula el valor $f(x+\Delta x)$.

Paso 2. Se forma el incremento Δy de la función correspondiente al incremento Δx de la variable x, es decir, se calcula la diferencia $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Paso 3. Se divide ambos miembros entre el incremento de la variable x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Paso 4. Se calcula $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por definición, el límite resultante es $f'(x)$, la derivada de $f(x)$ en x.

EJEMPLO. Hallar la derivada de $y = 3x^2 + x - 5$ en el punto x.

SOLUCION. Escribimos $f(x) = 3x^2 + x - 5$.

Paso 1. $f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 5 = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 5$

Paso 2. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 5\right] - \left[3x^2 + x - 5\right]$

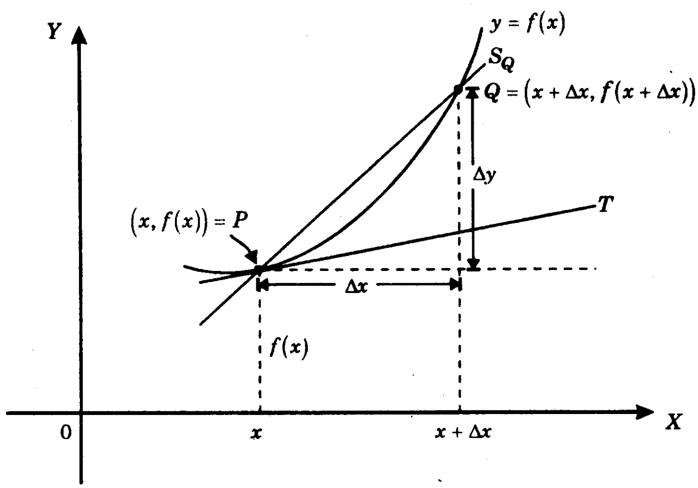
$= 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Paso 3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x + 1$.

Paso 4. $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 1$. Luego $\dfrac{dy}{dx} = 6x + 1$.

8.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA. Recta tangente a una curva.

La derivada $f'(x)$ puede ser interpretada como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. En efecto, consideremos un punto $P = (x, f(x))$ de la gráfica de $y = f(x)$.



Para un incremento Δx se obtiene el punto $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ de la gráfica de la curva, y la recta secante S que pasa por P y Q tiene pendiente

$$m_Q = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$

Fijemos el punto P y hagamos que Δx tienda hacia cero. Entonces el punto Q se aproxima al punto P y la recta secante S_Q gira al rededor del punto P. Si esta recta secante S_Q tiende a una posición límite T, entonces consideramos a la recta T como la recta tangente a la curva en el punto P.

Ahora bien, puesto que el punto P y la pendiente m_Q determinan completamente a la recta secante S_Q para que ésta se aproxime a una posición límite, y ya que P está fijo, bastará que exista

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_Q = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

y tomar este número como la pendiente de T.

Con esta discusión procedemos a dar las siguientes definiciones.

Dada la función $y = f(x)$, llamamos *recta tangente a la curva* $y = f(x)$ en x_1 (o a *la gráfica de* $f(x)$ *en el punto* $(x_1, f(x_1))$ a la recta T que cumple las dos condiciones siguientes:

$$T \text{ pasa por } (x_1, f(x_1)) \ ,$$

y

$$T \text{ tiene pendiente } f'(x_1).$$

Es decir, T es la recta cuya ecuación es $T: \dfrac{y - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$.

Se llama *recta normal* a la curva $y = f(x)$ en x_1 (o *a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto* $(x_1, f(x_1))$ a la recta N que cumple las dos condiciones siguientes:

N pasa por $(x_1, f(x_1))$,

y N es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto $(x_1, f(x_1))$.

Es decir, N tiene pendiente $-\dfrac{1}{f'(x_1)}$ y su ecuación es

$$N: \frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

EJEMPLO. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ en el punto P, donde la pendiente de la normal es $-1/4$.

SOLUCION. Escribimos $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

En primer lugar debemos calcular la derivada $f'(x)$.

Paso 1. $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 8(x + \Delta x) + 5$

$$= 2x^2 + 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8x - 8\Delta x + 5.$$

Paso 2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[2x^2 + 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8x - 8\Delta x + 5\right] - \left[2x^2 - 8x + 5\right]$

$$= 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8\Delta x$$

Paso 3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 8.$

Paso 4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 8$. Luego $f'(x) = 4x - 8$.

Hallamos el punto $P = (x_1, f(x_1))$ en el cual la recta normal tiene pendiente $-1/4$:

$$-\frac{1}{f'(x_1)} = -1/4 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 - 8 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 ,$$

y

$$f(x_1) = f(3) = 2(3)^2 - 8(3) + 5 = -1.$$

Luego, la recta tangente a la curva en $P=(3,-1)$ es

$$\frac{y-3}{x+1}=f'(3)=4 \qquad \text{o} \qquad y=4x+7\ ,$$

y la recta normal a la curva en $(3,-1)$ es

$$\frac{y-3}{x+1}=-\frac{1}{4} \qquad \text{o} \qquad y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}\ .$$

8.4 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones

1) $y=mx+b$ 2) $y=\dfrac{x^3-1}{x}$ 3) $y=-\dfrac{4}{x^2}$

4) $y=(Ax+B)(Cx+D)$ 5) $y=x^n$.

SOLUCION.

1) Tenemos $y=mx+b$, $y+\Delta y=m(x+\Delta x)+b$,

$$\Delta y=\left[m(x+\Delta x)+b\right]-\left[mx+b\right]=m\,\Delta x\ .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=m$, ya que m es constante.

2) Se tiene $y=\dfrac{x^3-1}{x}$, $y+\Delta y=\dfrac{(x+\Delta x)^3-1}{x+\Delta x}$.

$$\text{Luego}\quad \Delta y=\frac{(x+\Delta x)^3-1}{x+\Delta x}-\frac{x^3-1}{x}$$

$$=\frac{x\left[x^3+3x^2.\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-1\right]-(x+\Delta x)\left(x^3-1\right)}{x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{2x^3.\Delta x+3x^2(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x^3+3x^2.\Delta x+x(\Delta x)^2+1}{x(x+\Delta x)}\ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

3) Tenemos $y = -\dfrac{4}{x^2}$, $y + \Delta y = -\dfrac{4}{(x+\Delta x)^2}$.

Luego
$$\Delta y = \left[-\frac{4}{(x+\Delta x)^2}\right] - \left[-\frac{4}{x^2}\right] = -\frac{4\left[x^2-(x+\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2}$$
$$= -\frac{4\left[x^2-x^2-2x.\Delta x-(\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{4\left[2x.\Delta x+(\Delta x)^2\right]}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

y
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\,(2x+\Delta x)}{x^2\,(x+\Delta x)^2}\ .$$

Tomando límites resulta $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3}$.

4) Tenemos $y = (Ax+B)(Cx+D)$, $y + \Delta y = \left[A(x+\Delta x)+B\right]\left[C(x+\Delta x)+D\right]$.

Luego
$$\Delta y = 2ACx.\Delta x + AC(\Delta x)^2 + AD.\Delta x + BC.\Delta x$$

y
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ACx + AC.\Delta x + AD + BC\ .$$

Tomando límites se tiene $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2ACx + AD + BC$.

5) Tenemos $y = x^n$, $y + \Delta y = (x+\Delta x)^n$.

Luego
$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = \left[x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n$$
$$= nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$.

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de $y=\sqrt{x}$.

SOLUCION. Tenemos $y=\sqrt{x}$, $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$.

Luego $$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} .$$

Por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

PROBLEMA 3. Sea $f(x)=\begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Hallar $f'(0)$.

SOLUCION. Tenemos $x=0$, $f(0)=0$, $f(0+\Delta x)=(\Delta x)^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{\Delta x}$.

Luego $$\Delta y = f(0+\Delta x)-f(0) = (\Delta x)^3 . \operatorname{sen}\frac{1}{\Delta x}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\Delta x)^2 . \operatorname{sen}\frac{1}{\Delta x} .$$

Tomando límites cuando $\Delta x\to 0$ obtenemos

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 . \operatorname{sen}\frac{1}{\Delta x} = 0 ,$$

Puesto que de $\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{\Delta x}\right|\leq 1$ se sigue que $\left|(\Delta x)^2 . \operatorname{sen}\dfrac{1}{\Delta x}\right| \leq (\Delta x)^2 \to 0$ cuando $\Delta x\to 0$.

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de la función $y=\operatorname{tg} x$.

SOLUCION. Tenemos $y=\operatorname{tg} x$, $y+\Delta y=\operatorname{tg}(x+\Delta x)$.

Luego $$\Delta y = \operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\Delta x}{1-\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}\Delta x} - \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\Delta x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x . \operatorname{tg}\Delta x}{1-\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}\Delta x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{1-\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}\Delta x}$$

y $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}.$$

Ahora bien $$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\cos \Delta x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}}{\cos \Delta x} = \frac{1}{1} = 1,$$

y por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}$$

$$= 1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x .$$

PROBLEMA 5. Hallar las rectas tangente y normal a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi,0)$.

SOLUCION. En primer lugar calculamos la derivada de $y = \operatorname{sen} x$

$$\Delta y = (y+\Delta y) - y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x . \cos \Delta x + \operatorname{sen} \Delta x \cdot \cos \Delta x - \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen} x \, \frac{(1-\cos \Delta x)}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}.$$

Ahora bien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right]^2 = 0.1 = 0$$

y $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{x} = 1.$$

Por lo tanto se tiene $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$

$$= -(\operatorname{sen} x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x .$$

Así $$\frac{dy}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x .$$

La recta tangente en el punto $(\pi, 0)$ es

$$\frac{y-0}{x-\pi} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)(\pi) = \cos\pi = -1 \quad \text{o} \quad y = -x+\pi ,$$

y la recta normal en el punto $(\pi, 0)$ es $\dfrac{y-0}{x-\pi} = 1$ o $y = x - \pi$.

PROBLEMA 6. Hallar las pendientes de las tangentes a las curvas $y = \dfrac{1}{x-1}$ e $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto en que se intersecan. ¿Cuál es el ángulo entre estas tangentes?

SOLUCION.

(1) Determinamos el punto de intersección.

Tenemos $\dfrac{1}{x-1} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$,

de donde $1 = (x-1)^3$ y $x = 2$,

y por lo tanto $y = \dfrac{1}{2-1} = 1$.

Luego $(2, 1)$ es el punto en el que las dos curvas se intersecan.

(2) Calculamos la derivada de $y = \dfrac{1}{x-1}$:

$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)-(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = -\frac{\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)} .$$

Por lo tanto $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x-1)^2} .$$

(4) Calculamos la derivada de $y = x^2 - 2x + 1$.

Tenemos $y = x^2 - 2x + 1$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1$$

$$\Delta y = \left[(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)+1\right] - \left[x^2-2x+1\right] = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x \ ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 2 \ .$$

Tomando límites obtenemos $\dfrac{d}{dx}\left(x^2-2x+1\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x-2$.

(5) Sea m_1 la pendiente de la tangente de $y = \dfrac{1}{x-1}$ en (2, 1).

Luego $$m_1 = \frac{dy}{dx}(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1 \ .$$

Sea m_2 la pendiente de la tangente de $y = x^2 - 2x + 2$ en (2, 1).

Luego $$m_2 = \frac{dy}{dx}(2) = 2(2) - 2 = 2 \ .$$

(6) Si θ designa el ángulo comprendido entre las tangentes obtenidas entonces se cumple

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \ ,$$

y por lo tanto $$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1-(2)}{1+(-1)(2)} = 3 \ .$$

PROBLEMA 7. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 + x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 4x$.

SOLUCION.

Escribimos $y = f(x) = x^3 + x$.

Buscamos los puntos x_1 tales que $f'(x_1) = 4 = \textit{pendiente de la recta } \ y = 4x$.

Debemos calcular $f'(x)$:

$$y = x^3 + x \ ,$$

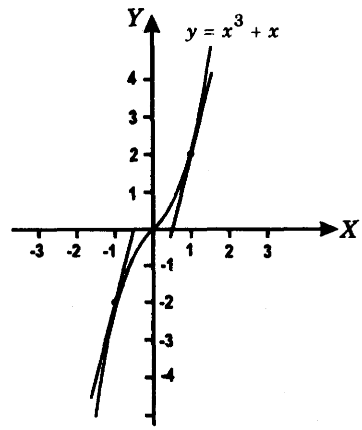
$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) \ ,$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - \left(x^3 + x\right) = 3x^2.\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + \Delta x \ ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 \ .$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 1 .$$



Si x_1 satisface la condición $f'(x) = 0$ entonces tenemos la ecuación

$$3x_1^2 + 1 = 4 ,$$

cuyas raíces son $x_1 = \pm 1$, y los valores de $f(x)$ correspondientes son

$$f(1) = (1)^3 + 1 = 2 , \qquad \text{para } x_1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2 , \ \text{para } x_1 = -1 .$$

PROBLEMA 8. Si $f(x) = (x-a)g(x)$ donde $g(x)$ es una función continua en a, hallar $f'(a)$.

SOLUCION. Tenemos $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h-a)\,g(a+h) - 0}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} g(a+h) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) .$$

PROBLEMA 9. Si $f(x)$ tiene derivada en el punto a, probar que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} .$$

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \frac{1}{2} \left[f'(a) + f'(a) \right] = f'(a) .$$

PROBLEMA 10. Sea $f(x)$ una función que cumple

a) $f(x+y)=f(x).f(y)$ para todo x, y, y

b) existe la derivada $f'(0)$ y $f(0)=1$.

Probar que existe $f'(x)$ para toda x y que se tiene $f'(x)=f'(0).f(x)$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x).f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x)\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| .$$

$$= f(x).f'(0) .$$

PROBLEMA 11. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)|\le x^2$ para todo x.

Probar que $f(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0)=0$.

SOLUCION. Haciendo $x=0$ en $|f(x)|\le x^2$ obtenemos $|f(0)|=0$ y por lo tanto $f(0)=0$.

Tenemos $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0$$

pues $$0 \le \left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h| \to 0 .$$

Así hemos probado que $f'(0)=0$.

PROBLEMA 12. Sea $f(x)$ una función diferenciable tal que $f(x)=f(-x)$ para todo x.

Probar que $f'(x)=-f'(-x)$.

SOLUCION. Tenemos $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h} ,$$ y

haciendo $k=-h$, $$f'(x) = -\lim_{k\to 0}\frac{f(-x+k)-f(-x)}{k} = -f'(-x) .$$

PROBLEMA 13. Sea $f(x)$ una función diferenciable tal que $f(x+a)=f(x)$ para todo x. Probar que $f'(x+a)=f'(x)$ para todo x.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x+a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+a+h)-f(x+a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\,.$$

8.5 CONTINUIDAD Y DERIVACION.

TEOREMA. Si $f(x)$ tiene derivada en el punto a, entonces $f(x)$ es continua en tal punto. Es decir, que se cumple

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

PRUEBA. Tenemos $\quad f(x)-f(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)\,, \qquad$ si $x\neq a$, y

puesto que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ y $\displaystyle\lim_{x\to a}(x-a)=0$,

se concluye que $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0$, esto es $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

EJEMPLO. Demostrar mediante un ejemplo que si $f(x)$ es continua en un punto a, entonces no siempre $f(x)$ tiene derivada en ese punto.

SOLUCION. Basta considerar la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x\leq 0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Consideramos el punto $a=0$, donde $f(0)=0$.

Paso 1. *la función propuesta es continua en* 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = f(0),$$

y $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)\,,$$

y por lo tanto, existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, y así $f(x)$ es continua en el punto 0.

Paso 2. *La función propuesta no tiene derivada en* 0.

En efecto, calculamos los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

y $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

y como estos límites laterales son distinos se sigue que no existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) .$$

8.6 DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA.

DEFINICION. Sea la función $f(x)$. Definimos

1) *La derivada por la derecha de* $f(x)$ *en el punto* a

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} ,$$

si tal límite lateral existe.

2) *La derivada por la izquierda de* $f(x)$ *en el punto* a

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

si tal límite lateral existe.

Nota. Es una consecuencia inmediata de la definición de límites laterales que *existe la derivada* $f'(a)$ *si y solamente si existen y son iguales las derivadas laterales* $f'_+(a)$ *y* $f'_-(a)$. Si se cumplen tales condiciones, entonces se verifica la igualdad

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) ,$$

es decir que las tres derivadas son iguales.

EJEMPLO. Sea $f(x)=|\operatorname{sen} x|$. Calcular $f'_{+}(0)$ y $f'_{-}(0)$.

SOLUCION. Tenemos $f(0)=|\operatorname{sen} 0|=0$.

Luego $$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Y también $$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = -1.$$

8.7 PROPIEDADES DE LA DERIVACION.

TEOREMA. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones que poseen derivadas en el punto x. Entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. **Derivada de la suma y diferencia de dos funciones.**

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \quad . \text{ y } \quad \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

2. **Derivada del producto de una función por una constante.**

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}, \quad c \text{ es un número real,}$$

3. **Derivada del producto de dos funciones. Regla del producto.**

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} \quad ,$$

4. **Derivada del cociente de dos funciones.**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\dfrac{du}{dx} - u\cdot\dfrac{dv}{dx}}{v^2}, \quad \text{si } v(x)\neq 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}, v(x)\neq 0,$$

5. **Derivada de una potencia de función.**

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

6. Derivada de una raíz de una función.

$$\frac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

En forma más general se cumple

7. Derivada de u^r.

$$\frac{d}{dx}\left(u^r\right) = r\,u^{r-1}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad r \text{ es un número real.}$$

8.8 DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BASICAS.

1. Derivada de una función constante $f(x) = c$.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \qquad c \text{ es un número real.}$$

Ejemplos a) $\frac{d}{dx}\left(3+\sqrt{2}\right) = 0$, b) $\frac{d}{dx}(2\pi) = 0$.

2. Derivada de x^n. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Ejemplos

a) $\frac{dx}{dx} = 1$, b) $\frac{d}{dx}\left(x^7\right) = 7x^6$, c) $\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4}$.

3. Derivada de una función polinomial.

$$\frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n\right) = b_1 + 2b_2x + \dots + nb_nx^{n-1}$$

Ejemplos

a) $\frac{d}{dx}\left(1-2x+4x^5\right) = -2+20x^4$, b) $\frac{d}{dx}\left(-x^6+4x^3+2x\right) = -6x^5+12x^2+2$.

4. Derivada de $\sqrt[n]{x}$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1} \quad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

En general se cumple

5. Derivada de x^r.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{r}\right) = r\, x^{r-1} , \qquad \text{donde } r \text{ es un número real .}$$

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,.x^{\sqrt{2}-1}$, b) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{3/4}\right) = \dfrac{3}{4}\, x^{3/4-1} = \dfrac{3}{4} x^{-1/4}$,

c) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 2\right)^{3/2} = \dfrac{3}{2}\left(x^2 - 2\right)^{3/2-1} \dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 2\right) = \dfrac{3}{2}\left(x^2 - 1\right)^{1/2}(2x) = 3x\left(x^2 - 1\right)^{1/2}$.

6. Derivadas de funciones trigonométricas.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable. Se cumple

I. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) = \cos v.\dfrac{dv}{dx}$,

II. $\dfrac{d}{dx}(\cos v) = -\operatorname{sen} v.\dfrac{dv}{dx}$,

III. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v.\dfrac{dv}{dx}$,

IV. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v) = -\operatorname{cosec}^2 v.\dfrac{dv}{dx}$,

V. $\dfrac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \,.\, \operatorname{tg} v.\dfrac{dv}{dx}$,

VI. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} v) = -\operatorname{cosec} v \,.\, \operatorname{ctg} v \,.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ pues $\dfrac{dx}{dx} = 1$,

b) $\dfrac{d}{dx}\cos\left(x^2 - 2x - 1\right) = -\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right).\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 2x - 1\right)$

$= -\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right)(2x - 2) = 2(1 - x)\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x - 1\right).$

7. Derivada de las funciones exponencial y logaritmo.

I. $\dfrac{d}{dx}\left(e^v\right) = e^v.\dfrac{dv}{dx}$, **II.** $\dfrac{d}{dx}(\ln v) = \dfrac{1}{v}.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$,

b) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln x^2\right) = \dfrac{1}{x^2}.\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$,

d) $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}.\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{ctg} x$.

8. Derivada de las funciones hiperbólicas.

La función *seno hiperbólico* se define por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ para cada número real x .

La función *coseno hiperbólico* se define por $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ para cada número real.

Se cumple

I. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} v) = \cosh v.\dfrac{dv}{dx}$, **II.** $\dfrac{d}{dx}(\cosh v) = \operatorname{senh} v.\dfrac{dv}{dx}$.

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}\left(1 + 3x^2\right) = \cosh\left(1 + 3x^2\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(1 + 3x^2\right) = 6x\cosh\left(1 + 3x^2\right).$

b) $\dfrac{d}{dx}\cosh\left(x^{5/4}\right) = \operatorname{senh}\left(x^{5/4}\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^{5/4}\right) = \dfrac{5}{4}x^{1/4}\operatorname{senh}\left(x^{5/4}\right)$.

9. Derivada de las funciones trigonométricas inversas.

I. La función *arco seno* se define por $y = \operatorname{arc\,sen} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, y $-\dfrac{1}{2}\pi \le y \le \dfrac{1}{2}\pi$.

Se cumple $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}, \quad |v| < 1.$

II. La función *arco coseno* se define por $y = \operatorname{arc\,cos} x$ si y sólo si $x = \cos y$, y $0 \le y \le \pi$.

Se cumple $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} v) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}, \quad |v| < 1.$

III. La función *arco tangente* se define por $y = \operatorname{arc\,tg} x$ si y sólo si $x = \operatorname{tg} y$, y $-\dfrac{1}{2}\pi < y < \dfrac{1}{2}\pi$.

Se cumple $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} v) = \dfrac{1}{1+v^2}\cdot\dfrac{dv}{dx}.$

IV. La función *arco cotangente* se define por $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ si y sólo si $x = \operatorname{ctg} y$, y $0 \le y < \pi$.

Se cumple $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,ctg} v) = -\dfrac{1}{1+v^2}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

Ejemplos.

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} 2x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot\dfrac{d(2x)}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos}\left(x^{3/2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^{3/2}\right)^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right) = -\dfrac{3x^{1/2}}{2\sqrt{1-x^3}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\left(e^x\right) = \dfrac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

d) $$\frac{d}{dx}\left(\text{arc ctg}\sqrt{2x+x^2}\right) = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{2x+x^2}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{1+2x+x^2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x+x^2}}$$

8.9 NOTA. Hemos dado una lista de derivadas de algunas funciones básicas en el análisis matemático con el propósito de poder hacer uso inmediato de ellas en el cálculo de derivadas. Gran parte de estas fórmulas serán demostradas en los problemas que siguen. Otras resultarán de la regla de derivación en cadena y, finalmente, las fórmulas correspondientes a las funciones exponencial, hiperbólicas y trigonométricas inversas, serán establecidas como una aplicación de los resultados de la derivación de funciones inversas.

8.10 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Derivada de una función constante.

Probar que si $u(x) = c$ es una función constante, entonces $\frac{d}{dx}(c) = 0$.

SOLUCION.

Tenemos $u(x) = c$, $u(x+\Delta x) = c$, $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) = c - c = 0$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$,

y por lo tanto $$\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

PROBLEMA 2. Derivada de una suma de funciones.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones diferenciales en el punto x, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

SOLUCION. Llamemos $w = w(x) = u(x) + v(x)$.

Tenemos $w(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)$,

y $\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = [u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$

Luego $\dfrac{\Delta w}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, y tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{dw}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Por lo tanto $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$.

PROBLEMA 3. Derivada del producto de una función por una constante.

Si $u = u(x)$ tiene derivada en el punto x, y c es un número real, entonces $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c\frac{du}{dx}.$$

PROBLEMA 4. Derivada de un producto de funciones. Regla del producto.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones diferenciables en el punto x, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}(u, v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

SOLUCION. Llamemos $w = w(x) = u(x).v(x)$.

Se tiene $w(x+\Delta x) = u(x+\Delta x).v(x+\Delta x)$

y
$$\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = u(x+\Delta x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x)$$
$$= \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right].v(x+\Delta x) + u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right].$$

Luego $\Delta w = \Delta u.v(x+\Delta x) + u(x).\Delta v$

y
$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Finalmente, haciendo uso de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

obtenemos $$\frac{dw}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\,.\,\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x)\,.\,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \frac{du}{dx}\,.\,v(x) + u(x)\,.\,\frac{dv}{dx},$$

y por tanto

$$\frac{d}{dx}(u\,.\,v) = \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dx}\,.\,v + u\,.\,\frac{dv}{dx}.$$

PROBLEMA 5. Derivada de una potencia.

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable en el punto x, y $n = 1, 2, 3, ...$

Probar que $$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\,.\,\frac{du}{dx}.$$

SOLUCION. Procedemos por inducción sobre n

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{n-1}.u\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{n-1}\right).u + \frac{du}{dx}.u^{n-1}$$

$$= (n-1)u^{n-2}\frac{du}{dx}.u + \frac{du}{dx}u^{n-1} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

PROBLEMA 6. Probar que si $v = v(x)$ tiene derivada en el punto x y $v(x) \neq 0$, entonces se cumple $\dfrac{d(1/v)}{dx} = -\dfrac{1}{v^2}\,.\,\dfrac{dv}{dx}$.

SOLUCION. Tenemos $$\Delta(1/v) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\,.\,v(x)}$$

y $$\frac{\Delta(1/v)}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x+\Delta x)\,.\,v(x)}\,.\,\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Haciendo uso de $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$, y como $v(x) \neq 0$, aplicando la propiedad de límite de cociente obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(1/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{v(x+\Delta x).v(x)}.\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= -\frac{1}{\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\right].v(x)}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x)^2}.\frac{dv}{dx},$$

y por lo tanto $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{v}\right) = -\dfrac{1}{v^2}.\dfrac{dv}{dx}.$

PROBLEMA 7. Derivada de un cociente de funciones.

Probar que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ tienen derivadas en el punto x, y $v(x) \neq 0$, entonces se cumple

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

SOLUCION. Escribimos u/v como el producto de las funciones u y $1/v$.

Tenemos $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(u\dfrac{1}{v}\right) = \dfrac{d}{dx}(u).\dfrac{1}{v} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{v}\right).u$

$$= \frac{du}{dx}.\frac{1}{v} + \left[-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}\right]u = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Por lo tanto $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$

PROBLEMA 8. Derivada de una raíz.

Sea $u = u(x)$ una función diferenciable en el punto x. Para cualquier entero $n = 1, 2, 3, \ldots$, se cumple

$$\frac{d}{dx}\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\frac{du}{dx}.$$

SOLUCION. Sea $v = v(x) = u^{1/n}(x) = \sqrt[n]{u(x)}$.

Tenemos $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)} - \sqrt[n]{u(x)}$.

Empleando la identidad $a - b = \dfrac{a^n - b^n}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}}$

con $a = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)}$ y $b = \sqrt[n]{u(x)}$, obtenemos

$$\Delta v = \sqrt[n]{u(x+\Delta x)} - \sqrt[n]{u(x)} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} + \ldots + \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

y
$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} + \ldots + \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (1)$$

Ahora bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{du}{dx}$ y puesto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$

tenemos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-1}} = \sqrt[n]{\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\right]^{n-1}} = \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt[n]{u(x+\Delta x)^{n-2}.u(x)} = \sqrt[n]{\left[\lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\right]^{n-2} .\, u(x)}$$
$$= \sqrt[n]{u(x)^{n-2}.\, u(x)} = \sqrt[n]{u(x)^{n-1}} ,$$

y así sucesivamente. Tomando límites en (1) cuando $\Delta x \to 0$ tenemos,

$$\frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}} \cdot \frac{du}{dx} ,$$

o sea $\dfrac{d}{dx}\left(u^{n}\right) = \dfrac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

PROBLEMA 9. Derivada de una potencia con exponente fraccionario.

Sea $u = u(x)$ una función diferenciable en el punto x.

Si $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y $q = 1, 2, 3, \ldots$, probar que $\dfrac{d}{dx}\left(u^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\, u^{\frac{p}{q}-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

SOLUCION.

Caso 1: $p \geq 0$.

Tenemos $$\frac{d}{dx}\left(u^{p/q}\right) = \frac{d}{dx}\left[\left(u^{1/q}\right)^p\right] = p\left(u^{1/q}\right)^{p-1} \frac{d}{dx}\left(u^{1/q}\right)$$

$$= pu^{\frac{p-1}{q}} . \frac{1}{q} u^{\frac{1}{q}-1} \frac{du}{dx} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} . \frac{du}{dx} .$$

Caso 2: $p < 0$. Escribimos $s = -p > 0$. Se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(u^{p/q}\right) = \frac{d}{dx}\left(u^{-s/q}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^{s/q}}\right) = -\frac{1}{\left(u^{s/q}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(u^{s/q}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(u^{s/q}\right)^2} \frac{s}{q} u^{\frac{s}{q}-1} . \frac{du}{ds} = \quad \text{(Por el caso 1, pues } s > 0\text{)}$$

$$= \left(-\frac{s}{q}\right) u^{\frac{s}{q}-1-2\frac{s}{q}} . \frac{du}{ds} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} \frac{du}{ds} .$$

PROBLEMA 10. Derivada de una función polinomial.

Probar que

1) $\frac{dx}{dx} = 1$ 2) $\frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n\right) = b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1}$.

SOLUCION.

1) Tenemos $$\frac{dx}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 .$$

2) Tenemos $\frac{d(b_0)}{dx} = 0$,

y para $m \geq 1$, $$\frac{d}{dx}\left(b_mx^m\right) = b_m \frac{d}{dx}\left(x^m\right) = b_m mx^{m-1} . \frac{dx}{dx} = mb_mx^{m-1}.$$

Luego $\frac{d}{dx}\left(b_mx^m\right) = mb_mx^{m-1}$, para $m = 1, 2, \ldots , n$.

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n\right) = \frac{d}{dx}(b_0) + \frac{d}{dx}(b_1x) + \frac{d}{dx}\left(b_2x^2\right) + \ldots + \frac{d}{dx}\left(b_nx^n\right)$$

$$= b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1}$$

PROBLEMA 11. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = 3x^5 - 2x^2 + 4$ **2)** $u = ax^4 - 3bx^5$ **3)** $v = -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^7}{7}$.

SOLUCION.

1) Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(3x^5 - 2x^2 + 4\right) = 15x^4 - 4x$.

2) Tenemos $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(ax^4 - 3bx^5\right) = 4ax^3 - 15bx^4$.

3) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^7}{7}\right) = -\dfrac{1}{2}2t + \dfrac{1}{7}7t^6 = -t + t^6$.

PROBLEMA 12. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = x^{4/3} + x - 1$ **2)** $y = \sqrt{b^2 - x^2}$

SOLUCION.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{4/3}\right) + \dfrac{d}{dx}(x) + \dfrac{d}{dx}(-1) = \dfrac{4}{3}x^{4/3-1}\dfrac{dx}{dx} + 1 + 0 = \dfrac{4}{3}x^{1/3} + 1$

2) Sea $u = b^2 - x^2$. Tenemos $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u^{1/2}\right) = \frac{1}{2}u^{1/2-1}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left[b^2 - x^2\right]^{1/2}\frac{d}{dx}\left(b^2 - x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} .$$

PROBLEMA 13. Derivar la función $y = \dfrac{a + bx + cx^2}{x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x} + b + cx\right) = a\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) + \frac{d}{dx}(b) + c\frac{dx}{dx}$$

$$= (-1)a\,x^{-1-1}\frac{dx}{dx} + 0 + c = -ax^{-2} + c = c - \frac{a}{x^2}$$

PROBLEMA 14. Diferenciar cada una de las siguientes funciones

1) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 2) $y = x\sqrt{2+3x}$ 3) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^4}$

SOLUCION.

1) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/3} + x^{-1/2}$.

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) + \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - \dfrac{1}{2}x^{-3/2}$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} .$$

2) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{2+3x}\right) = \frac{dx}{dx}\sqrt{2+3x} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right).x$$

$$= \sqrt{2+3x} + x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right) \qquad (1)$$

Pero $\sqrt{2+3x} = \sqrt{u} = u^{1/2}$, donde $u = 2 + 3x$, y por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+3x}\right) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(2+3x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(2+3x)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+3x}}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}} .$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2+3x} + x.\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} = \frac{2(2+3x)+3x}{2\sqrt{2+3x}} = \frac{9x+4}{2\sqrt{2+3x}}$$

3) $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = 2x^{-1} - 3x^{-4}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) - 3\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right) = -2x^{-2} + 12x^{-5} = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^5} .$$

PROBLEMA 15. Calcular la derivada de las siguientes funciones

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2) $y = \left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right)^3$

3) $y = x\sqrt{a^2 + x^2}$

4) $y = \dfrac{a-t}{a+t}$

SOLUCION.

1) Sea $u = a^2 - x^2$. Tenemos

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)' = \left(u^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}.u' = -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-3/2}\left(a^2 - x^2\right)'$$

$$= -\frac{1}{2\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}(-2x) = \frac{x}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} .$$

2) Sea $u = 1 + \frac{5}{x^2} = 1 + 5x^{-2}$. Tenemos

$$y' = \left(u^3\right)' = 3u^2u' = 3\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2\left(1 + 5x^{-2}\right)'$$

$$= 3\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2\left(-10x^{-3}\right) = -\frac{30}{x^3}\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^2 .$$

3) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{a^2+x^2}\right) = \frac{dx}{dx}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)x$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + x\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right)$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + \frac{x}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x) = \frac{\left(a^2+x^2\right)+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

4) Aplicando $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u'-u.v'}{v^2}$ con $u=a-t$, $v=a+t$.

Tenemos

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(a+t)(a-t)'-(a-t)(a+t)'}{(a+t)^2}$$

$$= \frac{-(a+t)-(a-t)}{(a+t)^2} = -\frac{2a}{(a+t)^2}$$

PROBLEMA 16. Derivar la función $y = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(a^2-x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right) - \left(a^2+x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2-x^2\right)(2x) - \left(a^2+x^2\right)(-2x)}{\left(a^2-x^2\right)^2} = \frac{4a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}.$$

PROBLEMA 17. Calcular la derivada de $y = 2\sqrt{px}$.

SOLUCION. Sea $u = px$. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2u^{1/2}\right) = 2.\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^{1/2}}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{px}}\frac{d}{dx}(px) = \frac{p}{\sqrt{px}}$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{\sqrt{px}}\sqrt{\dfrac{p}{x}}$.

PROBLEMA 18. Calcular la derivada de la función $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

SOLUCION. Haciendo $u = a^2 - x^2$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\sqrt{u}\right) = \frac{1}{2}\frac{b}{a\sqrt{u}}\frac{du}{dx} = \frac{b}{2a\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} ,$$

que también puede expresarse en la forma siguiente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

al sustituir $\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{ay}{b}$.

PROBLEMA 19. Hallar la derivada de la función $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$.

SOLUCION. Sea $u = a^{2/3} - x^{2/3}$ de manera que $y = u^{3/2}$.

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u^{3/2}\right) = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{d}{dx}\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right) = \frac{3}{2}y^{1/3}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} .$$

PROBLEMA 20. Derivar la función $y = \sqrt[3]{\dfrac{3 + 2x}{3 - 2x}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)^{1/3}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)^{-2/3}\frac{d}{dx}\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3-2x}{3+2x}\right)^{2/3}\frac{(3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x) - (3+2x)\frac{d}{dx}(3-2x)}{(3-2x)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3-2x)^{2/3}}{(3+2x)^{2/3}}\cdot\frac{12}{(3-2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^{2/3}(3-2x)^{4/3}}\ .$$

PROBLEMA 21. Hallar la derivada de $y = (x+2)^2\sqrt{x^2+2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x+2)^2\sqrt{x^2+2}\right] = \frac{d}{dx}\left[(x+2)^2\right]\sqrt{x^2+2} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+2}\right).(x+2)^2$$

$$= 2(x+2)\sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(x+2)^2 = \frac{(x+2)\left[2\left(x^2+2\right)+x(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(3x^2+2x+4\right)}{\sqrt{x^2+2}}\ .$$

PROBLEMA 22. Calcular la derivada de $y = x^2\sqrt{3-4x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2\sqrt{3-4x}\right] = x^2\frac{d}{dx}\sqrt{3-4x} + \sqrt{3-4x}\,\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \frac{-2x^2}{\sqrt{3-4x}} + \sqrt{3-4x}.(2x) = \frac{-2x^2+2x(3-4x)}{\sqrt{3-4x}}$$

$$= \frac{6x-10x^2}{\sqrt{3-4x}}\ .$$

PROBLEMA 23. Hallar la derivada de $y = ax^m + bx^{m+n}$.

SOLUCION. $$\frac{dy}{dx} = m\,a\,x^{m-1} + (m+n)\,b\,x^{m+n-1}.$$

PROBLEMA 24. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-2}$ 2) $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$ 3) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

SOLUCION.

1) $$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) - 2\frac{d}{dx}\left(x^{5/2}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} - 2\left(\frac{5}{2}\right)x^{3/2} - 2x^{-3}$$

$$= 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 2x^{-3}.$$

2) Tenemos $y = x^2\sqrt[3]{x^2} = x^2\,x^{2/3} = x^{8/3}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{8/3}\right) = \frac{8}{3}x^{5/3}.$$

3) Tenemos $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}} = ax^{-2/3} - bx^{-4/3}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) - b\frac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\frac{2}{3}ax^{-5/3} - \frac{4}{3}bx^{-7/3}.$$

PROBLEMA 25. Derivar la función $y = \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{x}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 3\left[-\frac{1}{(2x-1)^2}\frac{d}{dx}(2x-1)\right] - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-6}{(2x-1)^2} + \frac{2}{x^2}.$$

PROBLEMA 26. Hallar la derivada de $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Pero $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

Y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{2\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}{2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

PROBLEMA 27. Derivar la función $y = \left(1 + 2x - 3x^2\right)^{20}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{20} = 20\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{19}\frac{d}{dx}\left(1 + 2x - 3x^2\right)$$

$$= 40(1 - 3x)\left(1 + 2x - 3x^2\right)^{19}.$$

PROBLEMA 28. Derivar la función $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right) = \frac{(c + dx)\frac{d}{dx}(a + bx) - (a + bx)\frac{d}{dx}(c + dx)}{(c + dx)^2}$$

$$= \frac{(c + dx)b - (a + bx)d}{(c + dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c + dx)^2}.$$

PROBLEMA 29. Hallar la derivada de $y = \dfrac{-11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$y = \frac{-11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} = \frac{-11 - 8(x-2)}{2(x-2)^2} = \frac{-8x+5}{2(x-2)^2}$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(x-2)^2\dfrac{d}{dx}(-8x+5) - (-8x+5)\dfrac{d}{dx}(x-2)^2}{(x-2)^4}$$

$$= -\frac{(x-2)\left[4(x-2)+(-8x+5)\right]}{(x-2)^4} = \frac{4x+3}{(x-2)^3} .$$

PROBLEMA 30. Calcular la derivada de $y = \left(\dfrac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^m$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^m = m\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)^{m-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right)$$

Pero $$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^n+b}{ax^n-b}\right) = \frac{\left(ax^n-b\right)\dfrac{d}{dx}\left(ax^n+b\right) - \left(ax^n+b\right)\dfrac{d}{dx}\left(ax^n-b\right)}{\left(ax^n-b\right)^2}$$

$$= \frac{\left(ax^n-b\right)\left(nax^{n-1}\right) - \left(ax^n+b\right)\left(nax^{n-1}\right)}{\left(ax^n-b\right)^2} = -\frac{2abnx^{n-1}}{\left(ax^n-b\right)^2}.$$

Luego $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2abmnx^{n-1}\left(ax^n+b\right)^{m-1}}{\left(ax^n-b\right)^{m+1}} .$$

PROBLEMA 31. Hallar la derivada de cada una de la siguientes funciones

1) $y = \left| x^2 - 4 \right|$ 2) $y = x\left|x\right|$ 3) $y = \sqrt[3]{|x| + x}$

SOLUCION. Hacemos uso de la identidad $|x| = \sqrt{x^2}$.

1) $y = \left| x^2 - 4 \right| = \sqrt{\left(x^2 - 4\right)^2}$. Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)^2 = \frac{2x\left(x^2-4\right)}{\left|x^2-4\right|}.$$

2) $y = x|x| = x\sqrt{x^2}$.

Tenemos $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}\,\frac{dx}{dx} = x\frac{x}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{|x|} + |x| = |x| + |x| = 2|x| .$$

Nota. No podemos introducir x directamente bajo el signo radical pues x puede ser negativo.

3) Tenemos $y = \sqrt[3]{|x| + x} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2} + x}$.

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2} + x\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2} + x\right)^{-2/3}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2} + x\right)$$

$$= \frac{1}{3\left(|x| + x\right)^{2/3}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot 2x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3\left(|x| + x\right)^{2/3}}\cdot\frac{\left(x + |x|\right)}{|x|} = \frac{\left(|x| + x\right)^{1/3}}{3|x|},$$

o también $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{|x|}$.

PROBLEMA 32. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

y simplificando el numerador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

PROBLEMA 33. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.

SOLUCION. Tenemos

$$f'(x) = \left[\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)^2\right]' = 2\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}\right)'$$

$$= 2\left(|x+1| - |x|\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)$$

y $\quad f'(x) = 2\left(|x+1| - |x|\right)\left(\dfrac{x+1}{|x+1|} - \dfrac{x}{|x|}\right)$.

PROBLEMA 34. Encontrar la derivada de $f(x)=(3x+2)^4\left(x^2-1\right)^{2/3}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= (3x+2)^4\,\frac{d\left(x^2-1\right)^{2/3}}{dx} + \left(x^2-1\right)^{2/3}\,\frac{d(3x+2)^4}{dx} \\
&= (3x+2)^4\left[\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}2x\right] + \left(x^2-1\right)^{2/3}\left[4(3x+2)^3.3\right] \\
&= \frac{4x(3x+2)^4}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}} + 12(3x+2)^3\left(x^2-1\right)^{2/3} = \frac{4(3x+2)^3}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}}\left[x(3x+2) + 9\left(x^2-1\right)\right] \\
&= \frac{4(3x+2)^3\left(12x^2+2x-9\right)}{3\left(x^2-1\right)^{1/3}}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 35. Sean $u=u(x)$ y $v=v(x)$ dos funciones diferenciables en el punto s. Si r y s son dos números racionales, probar que

$$\frac{d\left(u^r.v^s\right)}{dx} = u^{r-1}.v^{s-1}\left(r.\frac{du}{dx}.v + su.\frac{dv}{dx}\right)$$

SOLUCION. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(u^r.v^s\right)}{dx} &= \frac{d\left(u^r\right)}{dx}.v^s + u^r.\frac{d\left(v^s\right)}{dx} \\
&= ru^{r-1}\frac{du}{dx}.v^s + su^r v^{s-1}.\frac{dv}{dx} = u^{r-1}v^{s-1}\left(r.\frac{du}{dx}.v + su\frac{dv}{dx}\right).
\end{aligned}$$

PROBLEMA 36. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{2}{\left(x^2-2x-4\right)^2}$ en el punto $(3,2)$.

SOLUCION. La ecuación de la recta tangente tiene la forma $\dfrac{y-2}{x-3}=\dfrac{dy}{dx}(3)$.

Calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto 3.

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\left(x^2-2x-4\right)^{-2} = -4\left(x^2-2x-4\right)^{-3}\frac{d}{dx}\left(x^2-2x-4\right)$$
$$= -4\left(x^2-2x-4\right)^{-3}(2x-2).$$

Luego $\dfrac{dy}{dx}(3) = 16$, y por lo tanto $\dfrac{y-2}{x-3} = 16$ o $y = 16x-46$.

PROBLEMA 37. Hallar la ecuación de una recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x-6}}$ que sea perpendicular a la recta $48x-7y+1=0$.

SOLUCION. La pendiente de la recta $48x-7y+1=0$ es $m = 48/7$.

Luego, la recta tangente tiene pendiente $-7/48$. Buscamos los puntos x_1 tales que
$$\frac{dy}{dx}(x_1) = -\frac{7}{48} \qquad \textbf{(1)}$$

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x-6)^{-1/3} = -\frac{7}{3}(7x-6)^{-4/3} \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2)
$$-\frac{7}{3}(7x_1-6)^{-4/3} = -\frac{7}{48},$$
$$16 = (7x_1-6)^{4/3}$$
$$2 = (7x_1-6)^{1/3}$$
$$8 = 7x_1-6,$$

obtenemos $x_1 = 2$, $y(x_1) = y(2) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7(2)-6}} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es $\dfrac{y-1/2}{x-2} = -\dfrac{7}{48}$ o $y = \dfrac{1}{48}(-7x+38)$.

PROBLEMA 38. Encontrar la ecuación de la curva $y = x^2 + Ax + B$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$.

SOLUCION. Puesto que el punto $(1, 1)$ se encuentra en la curva tenemos una primera ecuación

$$1 = (1)^2 + A(1) + B \qquad \text{o} \qquad A + B = 0 \tag{1}$$

Y como la recta $y = x$, con pendiente 1, es tangente a la curva dada en el punto $(1, 1)$ se debe cumplir que

$$\textit{pendiente de la recta} = \frac{dy}{dx} = 2x + A \text{ , en } x = 1 \text{ ,}$$

o sea $\quad 1 = 2(1) + A$, $\;A = -1$

Luego, de (1) resulta $\quad B = 1$.

PROBLEMA 39. Hallar los puntos en los cuales las tangentes a la curva

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 1 \text{ ,} \quad \text{son paralelas a la recta } \; y = 2x + 5 \text{ .}$$

SOLUCION. Tenemos $\quad \dfrac{dy}{dx} = x^3 + 2x^2 - x.$

Buscamos los puntos x_1 tales que $\quad \dfrac{dy}{dx}(x_1) = \textit{pendiente de la recta} \;\; y = 2x + 5$

o sea $\; x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 = 2 \;$ y factorizando $\; (x_1 + 1)(x_1 - 1)(x_1 + 2) = 0$

Luego $x_1 = -1, 1, -2$, que sustituidos en la ecuación de la curva dan las ordenadas

$$y_1 = 1/12 \text{ , para } x_1 = -1,$$

$$y_1 = 17/12 \text{ , para } x_1 = 1,$$

$$y_1 = -7/3 \text{ , para } x_1 = 2.$$

PROBLEMA 40. Hallar la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt[5]{7 + x^2}$ en el punto (5, 2).

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(7+x^2\right)^{1/5} = \frac{1}{5}\left(7x+x^2\right)^{-4/5}\frac{d}{dx}\left(7+x^2\right) = \frac{2x}{5\left(7+x^2\right)^{4/5}} .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx}(5) = \dfrac{2(5)}{5(7+25)^{4/5}} = \dfrac{1}{8}$, y la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto (5, 2) es

$$\frac{y-2}{x-5} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}(5)} = -8 \qquad \text{o} \qquad y=-8x+42 .$$

PROBLEMA 41. Dada

$$y(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b de modo que $y'(1)$ exista

SOLUCION. Sean $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$.

Para que $y'(1)$ exista se requiere que se cumplan

(I) $f(1)=g(1)$ (ya que si $y(x)$ tiene derivada en $x=1$, entonces debe ser continua en ese punto).

(II) $\dfrac{df}{dx}(1) = \dfrac{dg}{dx}(1)$.

De (I) obtenemos $\qquad a(1)^2+b=1 \qquad$ o $\qquad a+b=1$

Por otro lado $\qquad \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(ax^2+b\right) = 2ax$,

y como $\quad g(x) = \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}\quad$ si $x>1$, tenemos que

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} ,$$

y por tanto en (II) $\qquad 2a(1)=-1 \qquad$ o $\qquad a=-1/2$, $\qquad$ de donde $\quad b=3/2$.

PROBLEMA 42. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en todo número real y tales que

(1) $g(x) = x f(x) + 1$,

(2) $g(x+y) = g(x).g(y)$

y (3) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Probar que $g'(x) = g(x)$.

SOLUCION. Tenemos

$$g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x).g(\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad \text{(Por la condición (2))}$$

$$= g(x).\lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x} = g(x).\lim_{\Delta x\to 0} \frac{[\Delta x.f(\Delta x)+1] - 1}{\Delta x} \qquad \text{(Por la condición (1))}$$

$$= g(x).\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = g(x).1 \qquad \text{(Por la condición (3))}$$

$$= g(x) .$$

PROBLEMA 43. Hallar la derivada de $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,.\sqrt{(x+3)^3}}$.

SOLUCION. Tenemos $y = (x-1)^{1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-3/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-3/2}$$

$$-\frac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-3/2} - \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}(x+2)^{-2/3}(x+3)^{-5/2}$$

$$= (x-1)^{-1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-5/2}\left[\frac{1}{2}(x+2)(x+3) - \frac{2}{3}(x-1)(x+3) - \frac{3}{2}(x-1)(x+2)\right]$$

$$= (x-1)^{-1/2}(x+2)^{-5/3}(x+3)^{-5/2}\left[\frac{-5x^2-x+24}{3}\right] = -\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}} .$$

PROBLEMA 44. Hallar el punto de la curva $y^2 = 2x^3$ en el que la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

SOLUCION. Tenemos $y = \pm\sqrt{2x^3}$ y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2}\left(2x^3\right)^{-1/2}.6x^2 = \frac{3x^2}{\pm\sqrt{2x^3}} = \frac{3x^2}{y}.$$

Buscamos el punto (x_1, y_1) tal que

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1} = -\frac{1}{\textit{pendiente de la recta dada}}, \qquad \frac{3x_1^2}{y_1} = -\frac{1}{4/3},$$

o sea $\qquad y_1 = -4x_1^2. \qquad$ **(1)**

Además se cumple $\qquad y_1^2 = 2x_1^3, \qquad$ **(2)**

pues (x_1, y_1) pertenece a la gráfica de la curva.

Resolviendo (1) y (2) obtenemos $x_1 = 0,\ 1/8$, y también

$y_1 = 0$ para $x_1 = 0$, y $y_1 = -\frac{1}{16}$ para $x_1 = \frac{1}{8}$.

De donde vemos que solamente el punto $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ cumple $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{4}$.

8.11 PROBLEMAS PROPUESTOS.

PROBLEMA 1. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^6} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

b) $y = 6\sqrt[3]{t + \sqrt{t}}$

c) $y = \sqrt{(x-1)\,x\,(x+1)}$

d) $y = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2bx - x^2}}$

PROBLEMA 2. Hallar $y(2)+(x-2)y'(2)$ de la función $y(x)=\sqrt{1+2x^2}$.

PROBLEMA 3. Probar que las hipérbolas $xy=4$, $x^2-y^2=5$ se intersecan en un ángulo recto.

PROBLEMA 4. Probar que si $(x-a)^2$ es un factor del polinomio $p(x)$, entonces $p'(a)=0$

PROBLEMA 5. Hallar los valores de A y B de modo que la función

$$y(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\leq 2 \\ Ax+B & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en el punto 2.

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de la función y si $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$.

PROBLEMA 7. Derivando la ecuación $1+x+x^2+\ldots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Hallar **a)** $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

b) $1^2+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}$

PROBLEMA 8. Probar que la ecuación de una recta tangente a la parábola $y^2=4px$ es de la forma $y=mx+\dfrac{p}{m}$.

PROBLEMA 9. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$, y son paralelas a la recta $16y-15x+3=0$.

PROBLEMA 10. Probar que la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en el punto (x_1,y_1) es $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

PROBLEMA 11. Si $y(x+1)=\sqrt[3]{x^2+10x+24}$, hallar $y'(-1)$.

PROBLEMA 12. Sea $y(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$, donde $[\![x]\!]=n$ si $n\leq x<n+1$. Probar que:

a) $y'_+(2)=\infty$ **b)** $y'_-(2)=\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA 13. Sea $y(x) = \left| \sqrt[3]{x^2 - 2x} \right|$. Calcular $y'(x)$.

PROBLEMA 14. Hallar los ángulos que forman con el eje X, las normales a la curva $y = x - x^2$ en los puntos cuyas abscisas son $x = 0$, $x = 1$.

RESPUESTAS.

1. **(a)** $\dfrac{x^2 - 1}{(2x-1)^8}$ **(b)** $\dfrac{1 + 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}\,.\sqrt[3]{\left(t + \sqrt{t}\right)^2}}$

(c) $\dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{(x-1)x(x+1)}}$ **(d)** $-x^5 . \sqrt[3]{\left(1 + x^3\right)^2}$ **(e)** $\dfrac{x - b}{\sqrt{\left(2bx - x^2\right)^3}}$

2. $\dfrac{4x+1}{3}$ **5.** $A = 4$, $B = -3$ **6.** $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

11. $\dfrac{1}{2}$ **13.** $y' = \dfrac{2(x-1)}{3y\left(x^2 - 2x\right)^{1/3}}$ **14.** 135°, 45°.

8.12 REGLA DE DERIVACION EN CADENA.

TEOREMA. Sean $y = y(x)$, $z = z(y)$ dos funciones tales que

1) $y(x)$ **es diferenciable en el punto** a, **y**

2) $z(y)$ **es diferenciable en el punto** $y(a)$.

Entonces la función compuesta $z = z(y(x))$ es diferenciable en el punto a y se cumple

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(y(a)) . \frac{dy}{dx}(a)$$

Esta fórmula suele expresarse también con las siguientes notaciones

$$z(y)'(x) = z'(y(x)).y'(x), \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad D_x(z(y)) = D_y z \, . \, D_x y$$

Prueba de la regla de la cadena.

Debemos probar que se cumple

$$\lim_{h\to 0} \frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = z'(y(a)) \,.\, y'(a).$$

Paso 1. Si $h \neq 0$ escribimos $p(h) = \dfrac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a)$.

Se cumple entonces

$$y(a+h) = y(a) + h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h) \qquad \textbf{(1)}$$

y

$$\lim_{h\to 0} p(h) = 0 \,.$$

En efecto, la primera ecuación resulta de dar común denominador h y despejar $y(a+h)$. Observemos que es válida aún si $h = 0$, pues entonces ambos miembros son iguales a $y(a)$. Por otro lado la segunda ecuación se deduce como sigue

$$\lim_{h\to 0} p(h) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} - \lim_{h\to 0} y'(a)$$

$$= y'(a) - y'(a) = 0 \,.$$

Paso 2. En forma análoga, para la función $z(y)$ definimos

$$q(k) = \frac{z(b+k) - z(b)}{k} - z'(b) \,, \qquad k \neq 0 \,,$$

donde $b = y(a)$, y se cumple

$$z(b+k) = z(b) + k \,.\, z'(b) + kq(k)$$

y

$$\lim_{k\to 0} q(k) = 0 \,. \qquad \textbf{(2)}$$

Paso 3. Tomando $k = h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h)$ tenemos

$$z(y(a+h)) = z(y(a) + h \,.\, y'(a) + h \,.\, p(h)) \qquad \textbf{(por (1))}$$

$$= z(b+k) = z(b) + k.z'(b) + kq(k) \qquad \textbf{(por (2))}$$

$$= z(b) + [hy'(a) + h \,.p(h)].z'(b) + [hy'(a) + h \,.\, p(h)].q(k)$$

$$= z(b) + hz'(b).y'(a) + h[p(h) + y'(a).q(k) + p(h).q(k)] \,.$$

Luego

$$\frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = z'(b).y'(a) + \left[p(h)+y'(a).q(k)+p(h).q(k)\right]. \qquad \textbf{(3)}$$

Paso 4. $\lim\limits_{h\to 0}\left[p(h)+y'(a).q(k) + p(h).q(k)\right] = 0$.

En efecto $\lim\limits_{h\to 0} p(h)=0$, (por (1))

$$\lim_{h\to 0} y'(a).q(k) = y'(a).\lim_{h\to 0} q(k) = y'(a).\lim_{k\to 0} q(k) = 0$$

y $\lim\limits_{h\to 0} p(h).q(k) = 0$

Paso 5. Conclusión de la prueba.

Tomando límites en (3), cuando $h\to 0$, tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{z(y(a+h)) - z(y(a))}{h} = \lim_{h\to 0} z'(b).y'(a) = z'(b)\cdot y'(a) = z'(y(a))\cdot y'(a) \ ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO. Empleando la regla de la cadena, calcular

$$\frac{dy}{dx} \text{ si } y=\left(1+3x-5x^2\right)^{16}.$$

SOLUCION. Sea $u=1+3x-5x^2$. Tenemos

$$y=u^{16}, \qquad \frac{dy}{du}=16u^{15}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1+3x-5x^2\right) = 3-10x \ .$$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx} = 16\,u^{15}(3-10x) = 16\left(1+3x-5x^2\right)^{15}(3-10x)$

o

$$\frac{dy}{dx} = 16(3-10x)\left(1+3x-5x^2\right)^{15} .$$

8.13 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Derivada de la función seno.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos v \cdot \frac{dv}{dx}$$

SOLUCION. En primer lugar, probaremos que $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$. (1)

Tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x \cdot \cos h + \operatorname{sen} h \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \\ &= -(1-\cos h)\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h \cdot \cos x = -2\operatorname{sen}^2(h/2) \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h \cdot \cos x\end{aligned}$$

Dividiendo entre $h \neq 0$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \operatorname{sen}(h/2) \cdot \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x\ ,$$

y puesto que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = 1$$

tomando límites cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = -(1)(0) \cdot \operatorname{sen} x + (1) \cdot \cos x = \cos x\ .$$

El caso general se sigue ahora de la regla de la cadena y (1).

PROBLEMA 2. Derivada de la función coseno.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

$$\frac{d}{dx}\cos v = -\operatorname{sen} v \cdot \frac{dv}{dx}\ .$$

SOLUCION. En primer lugar, probaremos que $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$ (1)

Tenemos

$$\cos(h+x) - \cos x = \cos x \, . \cos h - \operatorname{sen} x \, . \operatorname{sen} h - \cos x$$
$$= -(1-\cos h)\cos x - \operatorname{sen} x \, . \operatorname{sen} h$$
$$= -2\operatorname{sen}^2(h/2) \, . \cos x - \operatorname{sen} h \, . \operatorname{sen} x \, .$$

Dividiendo entre $h \neq 0$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2\operatorname{sen}^2(h/2) \, . \cos x}{h} - \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \operatorname{sen} x$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} \, . \operatorname{sen}(h/2) \, . \cos x - \frac{\operatorname{sen} h}{h} \, . \operatorname{sen} x \, ,$$

y puesto que $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

y $\quad \lim\limits_{h \to 0} \operatorname{sen}(h/2) = 0 \, ,$

tomando límites cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -(1)(0)\cos x - (1)\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \, ,$$

y esto demuestra (1).

El caso general sigue de la regla de la cadena y de (1)

$$\frac{d}{dx}\cos v = \frac{d}{dv}(\cos v) \, . \frac{dv}{dx} = -\operatorname{sen} v \, . \frac{dv}{dx} \, .$$

PROBLEMA 3. Derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Sea $v = v(x)$ una función diferenciable en el punto x. Probar que

1) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} v = \sec^2 v \, . \dfrac{dv}{dx}$

2) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctg} v = -\operatorname{cosec}^2 v \, . \dfrac{dv}{dx}$

3) $\dfrac{d}{dx}\sec v = \sec v \, . \operatorname{tg} v \, . \dfrac{dv}{dx}$

4) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} v = -\operatorname{cosec} v \, . \operatorname{ctg} v \, . \dfrac{dv}{dx} \, .$

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} v = \frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right) = \frac{\cos v \,.\, \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) - \operatorname{sen} v \,.\, \dfrac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos v \,.\, \cos v \,.\, \dfrac{dv}{dx} - \operatorname{sen} v\,(-\operatorname{sen} v) \,.\, \dfrac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \frac{\left[\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v\right]}{\cos^2 v} \,.\, \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 v} \,.\, \frac{dv}{dx} = \sec^2 v \,.\, \frac{dv}{dx} \,.$$

2) Tenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}\right) = \frac{\operatorname{sen} v \,.\, \dfrac{d}{dx}(\cos v) - \cos v \,.\, \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} v)}{\operatorname{sen}^2 v}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} v \,.\, (-\operatorname{sen} v)\, \dfrac{dv}{dx} - \cos v \,.\, \cos v \,.\, \dfrac{dv}{dx}}{\operatorname{sen}^2 v} = \frac{-\left[\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v\right]}{\operatorname{sen}^2 v} \,.\, \frac{dv}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v} \,.\, \frac{dv}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 v \,.\, \frac{dv}{dx} \,.$$

3) y 4) se establecen en forma análoga. Omitimos los detalles.

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = 2\operatorname{sen} x - 3\cos x^2$ 2) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$ 3) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - 3\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos x - 3\left(-\operatorname{sen} x^2\right) . \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= 2\cos x + 6\,x\operatorname{sen} x^2 \,.$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x - \frac{d}{dx}\operatorname{ctg}.\frac{x}{3} = \sec^2 x - \left[-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{3}\right)\right].\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= \sec^2 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{3}\right).$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

y simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

PROBLEMA 5. Hallar la derivada de las siguientes funciones

1) $y = \operatorname{sen}^3 5x$ **2)** $y = \operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

3) $y = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

SOLUCION.

1) Hagamos $u = \operatorname{sen} 5x$,

Luego $y = u^3$, $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dx} = \cos 5x.\frac{d}{dx}(5x) = 5\cos 5x$,

y por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 3u^2.(5\cos 5x) = 3.\operatorname{sen}^2 5x.(5\cos 5x) = 15\operatorname{sen}^2 5x.\cos 5x.$$

2) Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) - \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}^3 x\right) + \frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}^5 x\right)$$

$$= \sec^2 x - \frac{2}{3}\left(3\operatorname{tg}^2 x\right)\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{5}\left(5\operatorname{tg}^4 x\right)\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) .$$

$$= \sec^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x \,.\, \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \,.\, \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x \left(1 - 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x\right) = \sec^2 x \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^2 .$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 2x) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)$$

$$= \cos 2x \,.\, \frac{d}{dx}(2x) + \sec^2\sqrt{x} \,.\, \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = 2\cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x} .$$

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de $y = \operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^2 x\right) + \frac{d}{dx}\left(\sec^2 x\right)$$

$$= 2\operatorname{cosec} x \,.\, \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + 2\sec x \,.\, \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2\operatorname{cosec} x \,.\, (-\operatorname{cosec} x \,.\, \operatorname{ctg} x) + 2\sec x \,.\, (\sec x \,.\, \operatorname{tg} x)$$

$$= -2\operatorname{cosec}^2 x \,.\, \operatorname{ctg} x + 2\sec^2 x \,.\, \operatorname{tg} x = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

$$= 2 \cdot \frac{-\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^3 x \,.\, \cos^3 x} = 16 \cdot \frac{-\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 + \operatorname{sen}^4 x}{(2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x)^3}$$

$$= 16 \,.\, \frac{-1 + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} = 16 \,.\, \frac{-1 + 1 - \cos 2x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} = \frac{-16\cos 2x}{(\operatorname{sen} 2x)^3} .$$

PROBLEMA 7. Derivar las siguientes funciones

1) $y = \operatorname{sen} x \, . \operatorname{sen}(x + A)$ 2) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ 3) $y = -\frac{1}{20}\cos\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\cos x^2$.

SOLUCION.

1) Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \, . \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x + A) + \operatorname{sen}(x + A) \, . \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$$

$$= \operatorname{sen} x \, . \cos(x + A) + \operatorname{sen}(x + A) \, . \cos x = \operatorname{sen}(x + x + A) = \operatorname{sen}(2x + A) \; .$$

2) Sea $v = \operatorname{sen} x$. Tenemos $y = \operatorname{sen} v$, $\frac{dy}{dv} = \cos v$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$.

Luego, por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \, . \frac{dv}{dx} = \cos v \, . \cos x = \cos(\operatorname{sen} x) \, . \cos x \; .$$

3)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{20} \, . \frac{d}{dx}\cos\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\cos x^2$$

$$= -\frac{1}{20}\left(-\operatorname{sen}\left(5x^2\right)\right) . \frac{d}{dx}\left(5x^2\right) - \frac{1}{4}\left(-\operatorname{sen} x^2\right) . \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} x \operatorname{sen}\left(5x^2\right) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x^2 \; .$$

PROBLEMA 8. Calcular la derivada de

(1) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ (2) $y = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

SOLUCION.

(1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right) = \frac{(1 - \operatorname{tg} x)\frac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x) - (1 + \operatorname{tg} x)\frac{d}{dx}(1 - \operatorname{tg} x)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{tg} x)\sec^2 x - (1 + \operatorname{tg} x)\left(-\sec^2 x\right)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = \frac{2\sec^2 x}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} \; .$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = x\,.\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,.\frac{dx}{dx}$$

$$= x\cos\frac{1}{x}\,.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\ .$$

PROBLEMA 9. Hallar la derivada de $y = \cos^3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^3\left(\sqrt[3]{1-x}\right) = 3\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[\cos\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\right]$$

$$= 3\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right).\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\right].\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\cos^2\left(\sqrt[3]{1-x}\right).\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-x}\right).$$

PROBLEMA 10. Calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$.

SOLUCION. Tenemos $y = \dfrac{(\cos x)^{-3}}{3} - (\cos x)^{-1}$

Luego $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(\cos x)^{-3} - \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-3(\cos x)^{-4}\right].\frac{d}{dx}\cos x - (-1)(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= -\frac{1}{\cos^4 x}(-\operatorname{sen} x) + \frac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\,.\cos^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x\,.\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\ .$$

PROBLEMA 11. Derivar $y = \sqrt{A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x}$

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\left(A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x\right).$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x\right) &= 2A\,\text{sen}\,x\,.\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x) + 2B\cos x\,.\frac{d}{dx}(\cos x)\\ &= 2A\,\text{sen}\,x\,.\cos x - 2B\cos x\,.\,\text{sen}\,x\\ &= (A-B)\,\text{sen}\,2x\ ,\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(A-B)\,\text{sen}\,2x}{2\sqrt{A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x}}.$$

PROBLEMA 12. Hallar la derivada de $y = |\cos 3x|$.

SOLUCION. Haciendo uso de $|a| = \left(a^2\right)^{1/2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}|\cos 3x| = \frac{d}{dx}\left(\cos^2 3x\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 3x\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\cos^2 3x\\ &= \frac{1}{2y}\,.\,2\cos 3x\,.\frac{d}{dx}(\cos 3x) = -\frac{3\ \text{sen}\,3x\,.\cos 3x}{y} = -\frac{3}{2}\,.\frac{\text{sen}\,6x}{y}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 13. Derivar la función $x = \dfrac{\text{sen}\,t}{\sqrt{1-3\cos t}}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\text{sen}^3 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\right) = \frac{\sqrt{1-3\cos t}\,.\frac{d}{dt}\left(\text{sen}^3 t\right) - \text{sen}^3 t\,.\frac{d}{dt}\sqrt{1-3\cos t}}{\left(\sqrt{1-3\cos t}\right)^2}$$

Pero el numerador es igual a

$$\sqrt{1-3\cos t}\cdot 3\operatorname{sen}^2 t\cdot\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{2\sqrt{1-3\cos t}}\cdot\frac{d}{dt}(1-3\cos t)$$

$$= \sqrt{1-3\cos t}\,.\,3\operatorname{sen}^2 t\,.\cos t - \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 t\,.\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-3\cos t}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left[2(1-3\cos t)\cos t - \operatorname{sen}^2 t\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left(2\cos t - 6\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-3\cos t}}\left(2\cos t - 5\cos^2 t - 1\right)$$

Por tanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t\,.\left(2\cos t - 5\cos^2 t - 1\right)}{(1-3\cos t)^{3/2}}\,.$$

PROBLEMA 14. Hallar la derivada de $y = \operatorname{sen}\left(\cos x^2\right)$.

SOLUCION. Hagamos $v = \cos x^2$.

Tenemos $y = \operatorname{sen} v$, $\dfrac{dy}{dv} = \cos v$,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\cos x^2\right) = -\operatorname{sen}\left(x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}(x) = -2\,x\operatorname{sen} x^2.$$

Luego, por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dx} = \cos v\left(-2\,x\operatorname{sen} x^2\right) = -2\,x\operatorname{sen} x^2\,.\cos\left(\cos x^2\right).$$

PROBLEMA 15. Derivar la función $z = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 2x}{1+x^2}$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(1+x^2\right)\dfrac{d}{dx}\text{ctg}^2\,2x \;-\; \text{ctg}^2\,2x\cdot\dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\ .$$

Pero el numerador es igual a

$$\left(1+x^2\right).\,2\,\text{ctg}\,2x\,.\left(-2\,\text{cosec}^2\,2x\right)-\text{ctg}^2\,2x\,.\,2x$$

$$= -4\left(1+x^2\right)\text{ctg}\,2x\,.\,\text{cosec}^2\,2x - 2x\,.\,\text{ctg}^2\,2x$$

$$= -2\,\text{ctg}\,2x\,.\left[2\left(1+x^2\right)\text{cosec}^2\,2x + x\,\text{ctg}\,2x\right].$$

Por tanto $$\frac{dz}{dx} = -\frac{2\,\text{ctg}\,2x\,.\left[2\left(1+x^2\right)\text{cosec}^2\,2x \;+\; x\,\text{ctg}\,2x\right]}{\left(1+x^2\right)^2}\ .$$

PROBLEMA 16. Derivar las siguientes funciones

1) $y = \dfrac{A\,\text{sen}\,Bx \;-\; B\cos Ax}{A^2+B^2}$ **2)** $y = \text{tg}^5\,5x$

3) $y = \dfrac{1}{3}\text{tg}^3\,x - \text{tg}\,x + x$

SOLUCION.

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{A^2+B^2}\left[A\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,Bx \;-\; B\frac{d}{dx}\cos Ax\right] = \frac{AB}{A^2+B^2}(\cos Bx + \text{sen}\,Ax)\ .$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{tg}^5\,5x = 5\,\text{tg}^4\,5x\,.\frac{d}{dx}(\text{tg}\,5x) = 25\,\text{tg}^4\,5x\,.\,\text{sec}^2\,5x\ .$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\text{tg}^3 x \;-\; \frac{d}{dx}\text{tg}\,x \;+\; \frac{dx}{dx} = \text{tg}^2 x\,.\,\text{sec}^2\,x \;-\; \text{sec}^2\,x \;+1$$

$$= \text{tg}^2 x\,.\,\text{sec}^2\,x - \text{tg}^2 x = \text{tg}^2 x\,.\left(\text{sec}^2\,x - 1\right) = \text{tg}^4 x\ .$$

PROBLEMA 17. Derivar la función $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x\,.\left(3\cos^2 x - 5\right)$.

SOLUCION.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15}\cos^3 x\,.\frac{d}{dx}\left(3\cos^2 x - 5\right) + \frac{1}{15}\left(3\cos^2 x - 5\right)\frac{d}{dx}\cos^3 x$$

$$= \frac{6}{15}\cos^4 x\,.(-\operatorname{sen} x) + \frac{3}{15}\left(3\cos^2 x - 5\right).\cos^2 x\,.(-\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{5}\cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[-2\cos^2 x - \left(3\cos^2 x - 5\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[-2\cos^2 x - 3\cos^2 x + 5\right]$$

$$= \cos^2 x\,.\operatorname{sen} x\,.\left[1 - \cos^2 x\right]$$

$$= \cos^2 x\,.\operatorname{sen}^3 x\ .$$

PROBLEMA 18. Hallar la derivada de $y = 3\operatorname{sen} x\cos^2 x + \operatorname{sen}^3 x$.

SOLUCION. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3\operatorname{sen} x\frac{d}{dx}\cos^2 x + 3\cos^2 x\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{d}{dx}\operatorname{sen}^3 x$$

$$= -6\operatorname{sen}^2 x\,.\cos x + 3\cos^3 x + 3\operatorname{sen}^2 x\,.\cos x$$

$$= 3\cos x\left[-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right] = 3\cos x\,.\cos 2x\ .$$

PROBLEMA 19. Derivar la función $y = -\dfrac{\cos x}{3\operatorname{sen}^3 x} + \operatorname{ctg} x$.

SOLUCION. Tenemos $y = -\dfrac{1}{3}\cos x\,.(\operatorname{sen} x)^{-3} + \operatorname{ctg} x$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\cos x\left[-3(\operatorname{sen} x)^{-4}\cos x\right] - \operatorname{cosec}^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 x}\ .$$

PROBLEMA 20. Dadas las funciones $u(x) = 1 - x$ y $v(x) = 1 - \text{sen}\,\dfrac{\pi x}{2}$, hallar $\dfrac{v'(1)}{u'(1)}$.

SOLUCION.

$$u'(1) = \frac{d}{dx}(1-x)\bigg|_{x=1} = -1$$

$$v'(1) = \frac{d}{dx}\left(1 - \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}\right)\bigg|_{x=1} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\bigg|_{x=1} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Luego

$$\frac{v'(1)}{u'(1)} = 0\,.$$

PROBLEMA 21. Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones

1) $y = \text{sen}\,mx\,\text{sen}^m x$ 2) $y = (3 - 5\,\text{sen}\,x)^{2/5}$.

SOLUCION.

1) $$\frac{dy}{dx} = \text{sen}\,mx\,.\frac{d}{dx}\left(\text{sen}^m x\right) + \text{sen}^m x\,.\frac{d}{dx}\text{sen}\,mx$$

$$= m\,\text{sen}\,mx\,.\,\text{sen}^{m-1}x\,.\cos x + m\,\text{sen}^m x\,.\cos mx$$

$$= m\,\text{sen}^{m-1}x\,.\left[\text{sen}\,mx\,.\cos x + \text{sen}\,x\,.\cos mx\right]$$

$$= m\,\text{sen}^{m-1}x\,.\,\text{sen}\,(m+1)\,x\,.$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{5}(3 - 5\,\text{sen}\,x)^{-3/5}\frac{d}{dx}(3 - 5\,\text{sen}\,x) = -\frac{2\cos x}{(3 - 5\,\text{sen}\,x)^{3/5}}\,.$$

PROBLEMA 22. Derivar la función $y = \sqrt{\text{ctg}\,x} - \sqrt{\text{ctg}\,A}$.

SOLUCION. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ctg}\,x}}\,.\frac{d}{dx}(\text{ctg}\,x) = -\frac{\text{cosec}^2 x}{2\sqrt{\text{ctg}\,x}}\,.$$

PROBLEMA 23. Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{\sec 2x\,\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec}^3 x}$

SOLUCION. Tenemos

$$y = \frac{\sec 2x\,\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec}^3 x} = \frac{\dfrac{1}{\cos 2x}\sqrt{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - 1}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos 2x}\sqrt{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}\sqrt{\cos 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}\ .$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(\cos 2x)^{3/2}}\operatorname{sen} 2x + \frac{2\operatorname{sen} x\,.\cos x}{(\cos 2x)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sen} 2x\,.\cos^2 x}{(\cos 2x)^{3/2}}\ .$$

PROBLEMA 24. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = \operatorname{tg} 3x$ en el punto $(0, 0)$.

SOLUCION. Tenemos $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \left[3\sec^2 3x\right]_{x=0} = 3$.

Luego, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la recta dada en el punto (0, 0) son

$$\frac{y-0}{x-0} = 3 \quad \text{o} \quad y = 3x\ , \quad \text{y} \quad \frac{y-0}{x-0} = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{3}x\ ,$$

respectivamente.

PROBLEMA 25. ¿Qué ángulo forman las curvas $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

SOLUCION. Tenemos

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{4\sqrt{3}}{\pi}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \ , \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{dg}{dx}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = [\cos x]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Luego, la tangente a $f(x)$ en el punto dado forma un ángulo de 60° con el eje X, y la tangente a $g(x)$ en el mismo punto forma un ángulo de 45°. Por tanto, el ángulo comprendido entre las dos curvas en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es de 15°.

PROBLEMA 26. Hallar todos los puntos en los cuales la recta $y = 4x$ es paralela a la curva $y = \operatorname{tg} x$.

SOLUCION. Buscamos todos los x_1 tales que

$$\frac{d}{dx}|4x|_{x=x_1} = \frac{d}{dx}|\operatorname{tg} x|_{x=x_1} \qquad 4 = \sec^2 x_1 \qquad \text{o} \qquad \cos x_1 = \pm\frac{1}{2} \ .$$

Luego $$x_1 = \frac{\pi}{6} + n\pi \ , \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

PROBLEMA 27. Probar que la función $y = |\operatorname{sen} x|$ no es derivable solamente en los puntos $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

SOLUCION.

1. *Calculamos la derivada de la función.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}|\operatorname{sen} x| = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x}{|\operatorname{sen} x|} \ .$$

Luego, la función es derivable en todos los puntos x tales que $\operatorname{sen} x \neq 0$, o sea cuando $x \neq n\pi$.

2. ***Probaremos que y no es derivable en $x = n\pi$.***

Calculamos las derivadas laterales

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ (n\pi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\text{sen}\,(n\pi + h)| - |\text{sen}\,(n\pi)|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\cos n\pi \, . \, \text{sen}\, h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|\text{sen}\, h|}{h} \qquad\qquad \text{(Pues } \cos n\pi = \pm 1\text{)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\text{sen}\, h}{h} = 1\,,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- (n\pi) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\text{sen}\,(n\pi + h)| - |\text{sen}\,(n\pi)|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\cos n\pi \, . \, \text{sen}\, h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|\text{sen}\, h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{\text{sen}\, h}{h} = -1\,.$$

Luego, las derivadas laterales $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ (n\pi)$ y $\left(\frac{dy}{dx}\right)_- (n\pi)$ son distintas y por consiguiente no existe la derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)(n\pi)$.

PROBLEMA 28. Haciendo uso de la regla de la cadena, hallar

1) $\frac{d}{dx} f(x + a)$ 2) $\frac{d}{dx} f(ax)$ 3) $\frac{d}{dx} f\left(\cos\left(x^2 - 1\right)\right)$.

SOLUCION.

1) Sea $u = x + a$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{df}{du}(x + a) . \frac{d}{dx}(x + a) = f'(x + a)\,.$$

2) Sea $u = ax$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{df}{du}(ax) . \frac{d}{dx}(ax) = f'(ax) . a = a . f'(ax)\,.$$

3) Sea $u = \cos\left(x^2 - 1\right)$. Tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)$$

$$= f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)\right)\cdot 2x = -2x\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)\cdot f'\left(\cos\left(x^2-1\right)\right).$$

PROBLEMA 30. Sean $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 3\operatorname{sen} x$.

(1) Hallar la derivada de $g(f(x))$. (2) Hallar la derivada de $f(g(x))$.

SOLUCION.

1) Tenemos $g(f(x))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Pero $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $g'(x) = 3\cos x$,

y por tanto $g'(f(x)) = 3\cos(f(x)) = 3\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

Luego $g(f(x))' = -\dfrac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

2) Tenemos $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Pero $g'(x) = 3\cos x$, $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$,

y por lo tanto $f'(g(x)) = -\dfrac{2\,g(x)}{\left(1+g(x)^2\right)^2} = -\dfrac{6\operatorname{sen} x}{\left(1+9\operatorname{sen}^2 x\right)^2}$.

Luego $f(g(x))' = -\dfrac{9\operatorname{sen} 2x}{\left(1+9\operatorname{sen}^2 x\right)^2}$