Capítulo 4

- Retículos
- Álgebras de Boole

Retículos

Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que cada subconjunto $\{a,b\}$, de dos elementos, tiene supremo e ínfimo.

Al supremo de $\{a,b\}$ se lo denota por: $a \vee b$, y al ínfimo de $\{a,b\}$ se lo denota por: $a \wedge b$.

Ejemplo

Sea S un conjunto y sea $L = P(S)$ el conjunto potencia de S.

Si A y B son elementos del conjunto parcialmente ordenado $(L, \subset)$, se tiene que:

$$A \vee B = A \cup B \in L$$

y $$A \wedge B = A \cap B \in L,$$

entonces $(L, \subset)$ es un retículo.

Ejemplo

Sea n un entero positivo, y sea D_n el conjunto de todos los divisores positivos de n.

Entonces $(D_n, |)$, donde $a \mid b$ significa "a es divisor de b", es un retículo, ya que si a y b son elementos de D_n se tiene que:

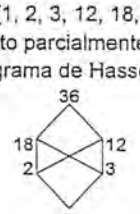
$$a \vee b = \text{M.C.M.}(a,b) \in D_n,$$

y $$a \wedge b = \text{M.C.D.}(a,b) \in D_n.$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$.

El conjunto parcialmente ordenado $(A, |)$, cuyo diagrama de Hasse es:



No es un retículo, ya que no existe $(2 \vee 3)$.

Sub-retículo

Sea $(L, \leq)$ un retículo y sea S un subconjunto no vacío de L.

S es un sub-retículo de L si :

$$(a \vee b) \in S \;\; y \;\; (a \wedge b) \in S,$$

para todo a y b que pertenecen a S.

Ejemplo

El conjunto D_n de todos los divisores positivos, de un entero positivo n, es un sub-retículo de Z^+ bajo la relación de divisibilidad.

Retículo producto

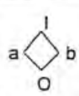
Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
El retículo producto de L_1 por L_2 es el retículo $(L_1 \times L_2, \leq)$, donde $\leq$ es el orden parcial producto.

En $(L_1 \times L_2, \leq)$, se verifica que:

$$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2) \in L_1 \times L_2$$
$$(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2) \in L_1 \times L_2$$

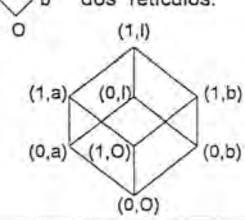
Ejemplo

Sean L_1: 

y L_2: 

dos retículos.

Entonces el retículo producto $L_1 x L_2$ es:



isomorfismos

Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
Una función biyectiva f de L_1 en L_2 es un isomorfismo de L_1 en L_2 si:

$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$

y $f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$

para todo a y b en L_1.

Retículos isomorfos

Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos.
Si existe un isomorfismo de L_1 en L_2, se dice que L_1 y L_2 son isomorfos.

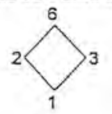
Teorema

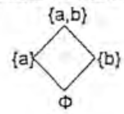
Si $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ son retículos isomorfos y f es un isomorfismo de L_1 en L_2, entonces:

$a \leq_1 b$ si y sólo si $f(a) \leq_2 f(b)$, $\forall\, a, b \in L_1$.

Ejemplo

Sea L_1 el retículo $(D_6, |)$ y sea L_2 el retículo $(P(\{a,b\}), \subset)$.
Los diagramas de Hasse de estos retículos son:

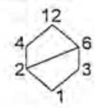


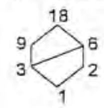


Entonces la función f de L_1 en L_2 definida por:
$f(1) = \varnothing$, $f(2) = \{a\}$, $f(3) = \{b\}$ y $f(6) = \{a,b\}$
es un isomorfismo de L_1 en L_2, luego L_1 y L_2 son isomorfos.

Ejemplo

Los retículos $(D_{12}, |)$ y $(D_{18}, |)$, cuyos diagramas son:





Son retículos isomorfos.

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a y b elementos de L, entonces:

(1) $a \vee b = b \leftrightarrow a \leq b$
(2) $a \wedge b = a \leftrightarrow a \leq b$
(3) $a \vee b = b \leftrightarrow a \wedge b = a$

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a, b y c elementos de L, entonces:
(1) (Propiedad de Idempotencia)
$a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$.
(2) (Propiedad Conmutativa)
$a \vee b = b \vee a$ y $a \wedge b = b \wedge a$.
(3) (Propiedad Asociativa)
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ y $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.
(4) (Propiedad de Absorción)
$a \vee (a \wedge b) = a$ y $a \wedge (a \vee b) = a$.

Teorema

Sea $(L, \leq)$ un retículo
y sean a, b y c elementos de L, entonces:
(1) $(a \leq b)$ entonces $(a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c)$.
(2) $(a \leq c$ y $b \leq c)$ si y sólo si $(a \vee b \leq c)$.
(3) $(c \leq a$ y $c \leq b)$ si y sólo si $(c \leq a \wedge b)$.
(4) $(a \leq b$ y $c \leq d)$ entonces
$(a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d)$.

Retículos acotados

Un retículo es acotado,
si tiene un elemento máximo I
y un elemento mínimo O.

Teorema

Si L es un retículo acotado y $a \in L$, entonces:

(1) $O \leq a \leq I$
(2) $a \vee O = a$ y $a \wedge I = a$
(3) $a \vee I = I$ y $a \wedge O = O$

Teorema

Si L es un retículo finito, entonces L es acotado.

Complementos

Sea L un retículo acotado y sea $a \in L$.

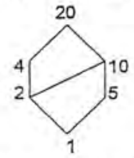
Un elemento $a' \in L$ es un complemento de a, si $a \vee a' = I$ y $a \wedge a' = O$.

Retículos Complementados

Un retículo L es complementado, si es acotado y cada elemento de L tiene complemento.

Ejemplo

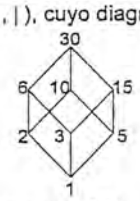
El retículo $(D_{20}, \mid)$, cuyo diagrama de Hasse es:



Es acotado, pero no es complementado ya que los elementos 2 y 10 no tienen complemento.

Ejemplo

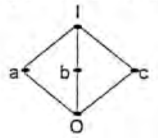
El retículo $(D_{30}, \mid)$, cuyo diagrama de Hasse es:



Si $a \in D_{30}$ entonces $a' = 30/a$, luego es un retículo complementado.

Ejemplo

El retículo cuyo diagrama de Hasse es:



es complementado.

El complemento de c no es único ya que a y b son complementos de c .

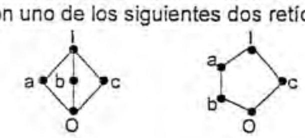
Retículos distributivos

Un retículo L es distributivo si para todo a, b y c en L, se cumplen las leyes distributivas:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Teorema

Un retículo L es distributivo si y sólo si L no contiene un sub-retículo isomorfo con uno de los siguientes dos retículos:



Teorema

Sea L un retículo acotado y distributivo .

Si el complemento de $a \in L$ existe, entonces el complemento de a es único .

Teorema

Sea L un retículo complementado y distributivo.

Si $a \in L$, entonces el complemento de a existe y es único .

Retículos Booleanos

Un retículo es booleano, si es complementado, distributivo y con al menos dos elementos.

Ejemplo

El retículo $(P(U), \subset)$, donde $P(U)$ es el conjunto potencia de un conjunto no vacío U y $\subset$ es la relación de inclusión, es booleano.

En este retículo: $O = \varnothing$, $I = U$
y si $A \in P(U)$ entonces $A' = A^c$.

Teorema

Todo retículo booleano finito es isomorfo con el retículo $(P(U), \subset)$, para algún conjunto U.

Teorema

Todo retículo booleano finito tiene 2^n elementos, para algún entero positivo n.

Teorema

Sea L un retículo booleano y sean a y b elementos de L, entonces:

(1) (Propiedad de involución)
$(a')' = a$.

(2) (Leyes de De Morgan)
$(a \vee b)' = a' \wedge b'$
$(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Teorema

Sea $n = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \ldots P_k^{r_k}$
donde $P_1, P_2, \ldots, P_k$ son números primos distintos y $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son enteros positivos, entonces:
El retículo $(D_n, |)$ es booleano si y sólo si
$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 1$.

Ejemplo

El retículo $(D_{20}, |)$ no es booleano, ya que: $20 = 2^2 . 5^1$

Ejemplo

El retículo (D_{30} , |) es booleano,
ya que: $30 = 2^1.3^1.5^1$.

Teorema

Sean $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$ dos retículos booleanos, entonces $(L_1 \times L_2, \leq)$, donde $\leq$ es el orden parcial producto, es un retículo booleano.

Algebras Booleanas

Una álgebra booleana es un séxtuple (A, +, *, ', 0, 1)
Donde:
A es un conjunto,
0 y 1 son elementos de A $(0 \neq 1)$,
+ y * son operaciones binarias en A,
' es una operación unaria en A.

De manera que para todo a, b y c elementos de A se tiene:

(I) (Propiedad conmutativa)
$a + b = b + a$, $a * b = b * a$.

(II) (Propiedad de identidad)
$a + 0 = 0 + a = a$, $a * 1 = 1 * a = a$.

(III) (Propiedad del complemento)
$a + a' = 1$, $a * a' = 0$.

(IV) (Leyes distributivas)
$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$, $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$.

Ejemplo

Sea P(U) la colección de subconjuntos de un conjunto no vacío U y sean A y B elementos de P(U).
Si definimos las operaciones + , * y ' por:

$A + B = A \cup B$
$A * B = A \cap B$
$A' = A^c$

y definimos los elementos 0 y 1 de P(U) por:

$0 = \varnothing$ y $1 = U$,

entonces P(U) es un álgebra booleana.

Ejemplo

Sea π el conjunto de las proposiciones lógicas y sean p y q elementos de π.
Si definimos las operaciones + , * y ' por:

$p + q$ = p o q
$p * q$ = p y q
$p' = \sim p$

y definimos los elementos 0 y 1 de π por:

0 = F y 1 = V ,

entonces π es un álgebra booleana.

Ejemplo

Sea D_n el conjunto de todos los divisores positivos del entero positivo n, con $n = P_1 \dots P_k$ donde $P_1, \dots, P_k$ son números primos distintos y sean a y b elementos de D_n

Si definimos las operaciones + , * y ' por:

$a + b = MCM(a,b)$

$a * b = MCD(a,b)$

$a' = n / a$

y definimos los elementos 0 y 1 de D_n por:

$0 = 1$ y $1 = n$,

entonces D_n es un álgebra booleana.

Teorema

Sea A un álgebra booleana y sean a, b y c elementos de A , entonces:

(1) (Propiedad de idempotencia)
$a + a = a$, $a * a = a$.

(2) (Propiedad de acotamiento)
$a + 1 = 1$, $a * 0 = 0$.

(3) (Propiedad de absorción)
$a + (a * b) = a$, $a * (a + b) = a$.

---

(4) (Propiedad asociativa)
$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(5) (Unicidad del complemento)
Si $a + x = 1$ y $a * x = 0$, entonces $x = a'$.

(6) (Propiedad de involución)
$(a')' = a$.

(7) (Propiedad de los opuestos)
$0' = 1$, $1' = 0$.

(8) (Leyes de De Morgan)
$(a + b)' = a' * b'$, $(a * b)' = a' + b'$.

Teorema

(1) Dada un álgebra booleana $(A, +, *, ', 0, 1)$, es posible definir un retículo booleano $(A, \leq)$ donde para a y b elementos de A:

$a \leq b$ si y sólo si $a + b = b$.

---

(2) Dado un retículo booleano $(A, \leq)$, es posible definir un álgebra booleana $(A, +, *, ', 0, 1)$ donde para a y b elementos de A:

$a + b = a \vee b$

$a * b = a \wedge b$

$a' = a'$

$1 = I$

$0 = O$.

Ejemplo

Sea $L = P(U)$, donde U es un conjunto no vacío.

Si A y B son elementos de L, entonces:

$A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

$A + B = A \vee B = A \cup B$

$A * B = A \wedge B = A \cap B$

$A' = A^c$

$0 = O = \varnothing$

$1 = I = U$.

Ejemplo

Sea D_n el conjunto de los divisores positivos de n,
con $n = P_1 \dots P_k$,
donde $P_1, \dots, P_k$ son números primos distintos.
Si a y b son elementos de D_n, entonces:

$a \mid b$ si y sólo si $MCM(a,b) = b$.

$a + b = a \vee b = M. C. M. (a,b)$

$a * b = a \wedge b = M. C. D. (a,b)$

$a' = n / a$

$0 = O = 1$

$1 = I = n$.

Teorema

Sean $(A_1, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ y $(A_2, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ dos álgebras booleanas, entonces $(A_1 \times A_2, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ es un álgebra booleana si:

$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2)$

$(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2)$

$(a_1, a_2)' = (a'_1, a'_2)$

$0 = (0, 0)$

$1 = (1, 1)$.

Ejemplo

Sea $B = \{0, 1\}$, si definimos $\vee$, $\wedge$ y $'$ por:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$'$
0	1
1	0

entonces $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$
es un álgebra booleana.

Si $B^1 = B$ y $B^n = B \times B^{n-1}$ para $n > 1$, entonces B^n es un álgebra booleana.

Expresiones booleanas

Sea A un álgebra booleana, una expresión booleana se define recursivamente por:

1) Cualquier elemento de A es una expresión booleana.
2) Cualquier variable que represente un elemento de A es una expresión booleana.
3) Si E_1 y E_2 son expresiones booleanas entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E'_1 son expresiones booleanas.

Expresiones equivalentes

Dos expresiones booleanas E_1 y E_2 son equivalentes, si es posible convertir una expresión en la otra usando un número finito de propiedades del álgebra boolena.

Ejemplo

Las expresiones booleanas:

$E_1(X, Y) = ((X \vee 0) \vee (Y' \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y)' \wedge 1)$

$E_2(X, Y) = X \wedge Y'$

son equivalentes .

Mintérminos y Maxtérminos

Sea $E(X_1, \dots, X_n)$ una expresión booleana.

- E es un mintérmino si es de la forma:
  $E(X_1, \dots, X_n) = \underline{X}_1 \wedge \dots \wedge \underline{X}_n$,
  donde $\underline{X}_i = X_i$ o $\underline{X}_i = X'_i$ $(i = 1, \dots, n)$
- E es un maxtérmino si es de la forma:
  $E(X_1, \dots, X_n) = \underline{X}_1 \vee \dots \vee \underline{X}_n$,
  donde $\underline{X}_i = X_i$ o $\underline{X}_i = X'_i$ $(i = 1, \dots, n)$

Formas Normales

Sea $E(X_1, \dots, X_n)$ una expresión booleana.

- E está en forma normal disyuntiva, si es una disyunción de mintérminos.
- E está en forma normal conjuntiva, si es una conjunción de maxtérminos.

Ejemplo

$E_1(X, Y, Z) = (X \wedge Y' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z') \vee (X' \wedge Y \wedge Z')$
está en forma normal disyuntiva.

$E_2(X, Y, Z) = (X \vee Y' \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee Z')$
está en forma normal conjuntiva.

Funciones booleanas en B^n

Dado el álgebra booleana $B = \{0,1\}$, una función booleana en B^n es una función $f : B^n \to B$.

Ejemplo

Dada la expresión booleana
$E(X, Y, Z) = (X' \vee Y) \wedge (X \vee (Y' \wedge Z))$.
Si $f(X, Y, Z)$ es la función boleana en B^3 definida por: $f(X, Y, Z) = E(X, Y, Z)$, entonces la tabla de la función $f(X, Y, Z)$ es:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	1	0	0	0	0	1	1

Teorema

Toda función booleana en B^n puede definirse por una expresión booleana en forma normal disyuntiva y por una expresión booleana en forma normal conjuntiva.

Ejemplo

Sea $f: B^2 \to B$ una función booleana en B^2, definida por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	0	1	1	0

Entonces:

$f(X, Y) = (X' \wedge Y) \vee (X \wedge Y')$ (F.N.D.)

$f(X, Y) = (X \vee Y) \wedge (X' \vee Y')$ (F.N.C.)

Ejemplo

Sea $f : B^3 \to B$ una función booleana definida por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	1	0	1	0	0	1	0

Entonces:

- f puede expresarse en F.N.D.

  $f(X,Y,Z) = (X' \wedge Y' \wedge Z) \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z')$
- f puede expresarse en F.N.C.

  $f(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y' \vee Z) \wedge (X' \vee Y \vee Z) \wedge (X' \vee Y \vee Z') \wedge (X' \vee Y' \vee Z')$
- Una expresión equivalente para f es:

  $f(X,Y,Z) = (X' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z')$

Mapas de Karnaugh

Los mapas de Karnaugh se utilizan para simplificar las expresiones de las funciones boolenas.

- Se colocan los unos de la tabla de verdad en la tabla de mintérminos.
- Se cubren los unos de la tabla de mintérminos por el menor número de rectángulos de área 2^k con la mayor suma de áreas.

- Si un rectángulo tiene área 2^k su expresión tiene (n-k) variables.
- La expresión para f es la disyunción de las expresiones correspondientes a cada rectángulo

Tabla de mintérminos para n = 2

	y'	y
x'		
x		

Tabla de mintérminos para n = 3

	y'	y'	y	y
x'				
x				
	z'	z	z	z'

Tabla de mintérminos para n = 4

	z'	z'	z	z	
x'					y'
x'					y
x					y
x					y'
	w'	w	w	w'	

Ejemplo

Si f: $B^2 \to B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	0	1	0	0

El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y
x'	0	1
x	0	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (x' \wedge y)$.

Ejemplo

Si f: $B^2 \to B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	1	0	1	0

El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y
x'	1	0
x	1	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (y')$.

Ejemplo

Si f: $B^2 \to B$ se define por la tabla:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
f(X,Y)	1	1	1	0

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

La expresión para f es: $f(x,y) = (x') \vee (y')$.

Ejemplo

Si f: $B^3 \to B$ se define por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	1	1	0	1	1	0	0	1

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y'	y	y
x'	1	1	1	0
x	1	0	1	0
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (Y' \wedge Z') \vee (X' \wedge Y') \vee (Y \wedge Z)$.

Ejemplo

Si $f: B^3 \rightarrow B$ se define por la tabla:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	1	0	1	0	1	0	1	1

El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y'	y	y
x'	1	0	0	1
x	1	0	1	1
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (Z') \vee (X \wedge Y)$.

Ejemplo

Dado el mapa de Karnaugh de una función $f: B^4 \rightarrow B$

	z'	z'	z	z	
x'	1	0	0	1	y'
x'	0	1	1	0	y
x	0	1	1	0	y
x	1	0	0	1	y'
	w'	w	w	w'	

La expresión para f es:

$f(X, Y, Z, W) = (Y \wedge W) \vee (Y' \wedge W')$.

Ejemplo

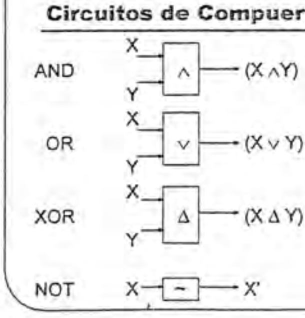
Dado el mapa de Karnaugh de una función $f: B^4 \rightarrow B$

	z'	z'	z	z	
x'	1	1	1	1	y'
x'	0	0	0	0	y
x	0	0	1	0	y
x	1	1	0	0	y'
	w'	w	w	w'	

La expresión para f es:

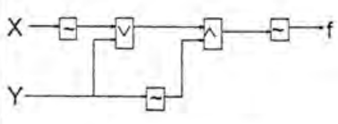
$f(X,Y,Z,W) = (X \wedge Y \wedge Z \wedge W) \vee (Y' \wedge Z') \vee (X' \wedge Y')$.

Circuitos de Compuertas



Ejemplo

Dado el circuito:



La expresión corrrespondiente es:

$f(X,Y) = [\,(X' \vee Y) \wedge Y'\,]'$

La tabla de f es:

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f(x,y)	0	1	1	1

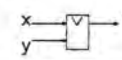
El mapa de Karnaugh de f es:

	y'	y
x'	0	1
x	1	1

Entonces una expresión más simple para f es:

$f(X,Y) = (X) \vee (Y)$

y el circuito correspondiente es:



Ejemplo

Si la tabla de f(X,Y,Z) es:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(X,Y,Z)	0	0	0	1	0	1	1	1

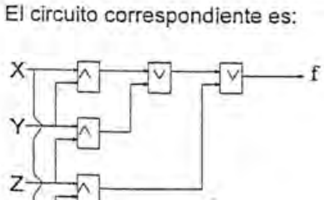
El mapa de Karnaugh de f es :

	y'	y'	y	y
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1
	z'	z	z	z'

La expresión para f es:

$f(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.

El circuito correspondiente es:



Ejemplo

Un circuito recibe como entrada un número entero representado en complemento a uno en tres bits, y entrega como salida el mismo número pero representado en signo y magnitud en tres bits.

a. Expresar cada bit de salida como una función de los bits de entrada, en forma normal disyuntiva.

b. Simplificar las funciones, usando mapas de Karnaugh.

X	Y	Z	N	A	B	C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	3	0	1	1
1	0	0	-3	1	1	1
1	0	1	-2	1	1	0
1	1	0	-1	1	0	1
1	1	1	-0	1	0	0

$A = (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y' \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z') \vee (X \wedge Y \wedge Z)$.

	y'	y'	y	y
x'	0	0	0	0
x	1	1	1	1
	z'	z	z	z'

$A = (X)$.

$B = (X' \wedge Y \wedge Z') \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y' \wedge Z)$.

	y'	y'	y	y
x'	0	0	1	1
x	1	1	0	0
	z'	z	z	z'

$B = (X \wedge Y') \vee (X' \wedge Y)$.

$C = (X' \wedge Y' \wedge Z) \vee (X' \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y' \wedge Z') \vee (X \wedge Y \wedge Z')$.

	y'	y'	y	y
x'	0	1	1	0
x	1	0	0	1
	z'	z	z	z'

$C = (X \wedge Z') \vee (X' \wedge Z)$.