

MIGUEL PIAGGIO HENDERSON

FISICA con ejercicios

VOLUMEN 3

EDICION COLECCION



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1998

FISICA
con ejercicios



FISICA

CON EJERCICIOS

VOLUMEN 3

1998

MIGUEL PIAGGIO HENDERSON



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1998

Primera edición, Noviembre de 1998

FISICA CON EJERCICIOS

Copyright © 1998 por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Av. Universitaria, cuadra 18, San Miguel. Lima / Perú.

Tlfs. 460-0872 y 460-2291-460-2870 anexo 220 y 356

Derechos reservados

ISBN 9972-42-148-1 (De colección)

9972-42-149-X

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Impreso en el Perú-Printed in Peru

PREFACIO

Este es un libro dirigido a estudiantes universitarios tanto de Ciencias como de Ingeniería. La diferencia que a menudo se da, esto es, en ingeniería con preponderancia a las aplicaciones y a la resolución de una gran cantidad de problemas a costa de tratar menos temas y con menor profundidad, en cambio, en ciencias se tiende a cubrir un número mayor de temas e insistiendo con mayor profundidad en los principios, pero dedicando menos esfuerzo a los problemas y aplicaciones prácticas. Una separación o tendencia diferenciadora, en uno u otro sentido, creo que es perjudicial e inconveniente en los primeros ciclos, por el contrario, debe buscarse un sano equilibrio, para que los estudiantes de ciencias se beneficien con la tendencia a la aplicación práctica de los de ingeniería y éstos con una mayor preocupación por los principios, desarrollando con suficiente profundidad y amplitud los temas a los cuales se orientan las diversas ramas de la ingeniería.

La resolución de problemas es parte muy importante en el estudio de cualquier disciplina científica. No debe pensarse que es solo una tarea académica sin mayor trascendencia, por el contrario, la solución de problemas es imprescindible para desarrollar el sentido autocrítico y la capacidad creativa, ambos necesarios para que el estudiante se pueda enfrentar a las numerosas dificultades que le planteará su futura ocupación ya sea profesional o de investigación. Por eso el título Física con ejercicios, las leyes físicas son pocas y las situaciones que se nos presentan, muchas veces denominada teoría, solo son soluciones de importantes casos particulares. Por supuesto que es absurdo desarrollar una gran cantidad y no variedad de problemas, como también lo es querer aprenderse de memoria las soluciones. Se advierte a los estudiantes, muy seriamente, que se desvirtuará todo objetivo si pretende hacerlo y que, a la corta o a la larga, lo conducirá inevitablemente al fracaso.

Las matemáticas necesarias para desarrollar el curso, sin ser elementales, tampoco son de muy alto nivel ni se requiere demasiado formalismo, más bien se precisa familiaridad para manejar con soltura algunos elementos, como el manejo de las operaciones fundamentales del álgebra vectorial, geometría analítica y teoría de funciones, sobre todo derivación e integración, así como también las nociones sobre las ecuaciones diferenciales; temas que paralelamente deben profundizarse en un curso de análisis matemático. Es poco conocido que Euler fue el primero en escribir la segunda ley de Newton en la forma hoy conocida: «Fuerza igual a masa por aceleración», es decir, en forma de ecuación diferencial, en el curso estas ecuaciones se manejan sin formalismos de un modo intuitivo. En cursos posteriores, además, no hay que dejar de lado el enfoque propio de estos tiempos con el cálculo numérico y la utilización, cada vez

más popular, de las computadoras, que hacen posible el manejo de ecuaciones que los métodos analíticos son poco eficaces.

La descripción de los fenómenos físicos combina la reflexión teórica con el análisis matemático y el método experimental moderno. Consecuentemente, para el desarrollo del curso es también indispensable la ejecución paralela de trabajos experimentales en el laboratorio.

En este volumen 3, primero se desarrollan los conceptos de la elasticidad para luego atacar dos importantísimos movimientos: oscilaciones y ondas, y se finaliza presentando una breve introducción a la teoría especial de la relatividad de Einstein. Este capítulo, si se prefiere, puede dejarse de lado para desarrollarlo al final, después del electromagnetismo, como física moderna.

Son muchas las personas que han contribuido de un modo o de otro para poder escribir este libro, no quisiera omitir a ninguna de ellas. Reconociendo la deuda en que estoy con los autores que me han precedido en este campo, doy las gracias a todos los alumnos, profesores, colegas y amigos que han hecho posible la edición de este nuevo volumen.

Miguel Piaggio Henderson
Departamento de Ciencia-Sección Física.
Pontificia Universidad Católica del Perú.
1998

FISICA CON EJERCICIOS

INDICE DE MATERIAS

CAPITULO IX ELASTICIDAD	11
9.1 Introducción.....	13
9.2 Tracción y comprensión uniforme longitudinal: Módulo elástico - Ley de Hooke - Deformación lateral.	13
9.3 Comportamiento elástico y plástico de los materiales.	20
9.4 Energía de deformación.	23
9.5 Elasticidad volumétrica.	24
9.6 Cizalladura - Elasticidad transversal.	25
9.7 Relaciones entre constantes elásticas.	30
APENDICES	
A.1 Módulos elásticos.....	37
T.A.I.1 Módulo de Young.	37
T.A.I.2 Módulo volumétrico	38
T.A.I.3 Módulo de esfuerzo constante.	39
T.A.I.4 Módulo de Poisson.	40
EJERCICIOS	
P.IX Problemas de 1al 45.	41
CAPITULO X OSCILACIONES	107
10.1 Introducción y definiciones.	109
10.2 Movimiento oscilatorio armónico simple - Oscilación libre lineal - Oscilación libre angular.	113
10.3 Oscilador armónico con acción externa constante.	133
10.4 Oscilador amortiguado - Oscilador subamortiguado - Oscilador sobreamortiguado - Oscilador críticamente amortiguado.	138
10.5 Oscilaciones forzadas.	148
10.6 Movimiento armónico en dos dimensiones.	157
10.7 Movimiento oscilatorio de dos cuerpos acoplados.	163

APENDICES	
A-I La familia de las funciones trigonométricas seno y coseno	166
A. II Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal con coeficientes constante - Homogéneas - no homogéneas.	170
A. III Leonhard Euler.....	179
EJERCICIOS	
P.X Problemas del 1 al 61	181
CAPITULO XI ONDAS.....	
	291
11.1 Introducción y tipo de ondas	293
11.2 Cinemática de la propagación.	297
11.3 Ecuación de onda unidimensional - Ondas transversales en una cuerda. Ondas longitudinales en una barra. Ondas longitudinales en aire confinado en un ducto.	306
11.4 Solución general de la ecuación de onda.	319
11.5 Superposición de ondas.	322
11.6 Interferencia	325
11.7 Reflexión de ondas.	333
11.8 Ondas estacionarias	338
11.9 Ondas acústicas.....	348
11.10 Efecto Doppler	353
11.11 Polarización lineal en una onda transversal	358
APENDICES	
A.I Propiedades físicas de la materia.	360
T.A.I.1 Gases	360
T.A.I.2 Líquidos.....	361
T.A.I.3 Sólidos.	362
A.II Niveles de intensidad sonora en decibelios A para algunos ruidos comunes.	363
EJERCICIOS	
P. XI Problemas del 1 al 52	364
CAPITULO XII TEORIA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD	
	441
12.1 Introducción.....	443
12.2 Los postulados de Einstein de la teoría de la relatividad	444
12.3 Transformaciones de coordenadas y de velocidades.	445
12.4 Algunas consecuencias de la transformación de Lorentz: Contracción de la longitud - Dilatación del tiempo.	448
12.5 Dinámica relativista	450
APENDICES	
A.I Albert Einstein	453
EJERCICIOS	
P.XXII problemas del 1 al 13	455

ELASTICIDAD

- INTRODUCCION.
- TRACCION Y COMPRESION UNIFORME LONGITUDINAL:
 - MODULO ELASTICO - LEY DE HOOKE - DEFORMACION LATERAL.
- COMPORTAMIENTO ELASTICO Y PLASTICO DE LOS MATERIALES.
- ENERGIA DE DEFORMACION.
- ELASTICIDAD VOLUMETRICA.
- CIZALLADURA - ELASTICIDAD TRANSVERSAL.
- RELACIONES ENTRE CONSTANTES ELASTICAS.



9.1 INTRODUCCION.-

En el capítulo VII, se ha analizado el movimiento y equilibrio de un cuerpo rígido, es decir, se asumió que los cuerpos son indeformables. Esto no es cierto, es sólo una abstracción que se justifica cuando la presencia de las deformaciones carecen de importancia.

En este capítulo trataremos sobre los cambios de forma o volumen que se producen en un cuerpo cuando está sometido a la acción de fuerzas exteriores. Estos cambios están determinados por las fuerzas entre sus moléculas. Cuando se aplican fuerzas exteriores a un cuerpo, sus partículas se desplazan hasta que se establece un equilibrio entre las fuerzas exteriores y las fuerzas interiores. En estas condiciones, decimos que tenemos al cuerpo en un estado de deformación.

Si se retiran las fuerzas externas que causan la deformación, el cuerpo puede volver a recuperar totalmente su forma primitiva o puede hacerlo solo parcialmente. En el primer caso se dice que el cuerpo es perfectamente elástico y en el segundo solo parcialmente elástico.

La propiedad que tienen los cuerpos de recuperar su forma primitiva al descargarlos se denomina elasticidad.

Nosotros, describiremos este comportamiento utilizando cantidades macroscópicas medibles directamente, sin analizar el comportamiento molecular interno.

9.2 TRACCION Y COMPRESION UNIFORME LONGITUDINAL:

MODULO ELASTICO - LEY DE HOOKE - DEFORMACION LATERAL.

Consideremos una barra prismática homogénea, de longitud l y sección transversal A , sometida en sus extremos a fuerzas F iguales

y opuestas, como se muestra en la fig. 9.1: a) tracción y b) compresión.

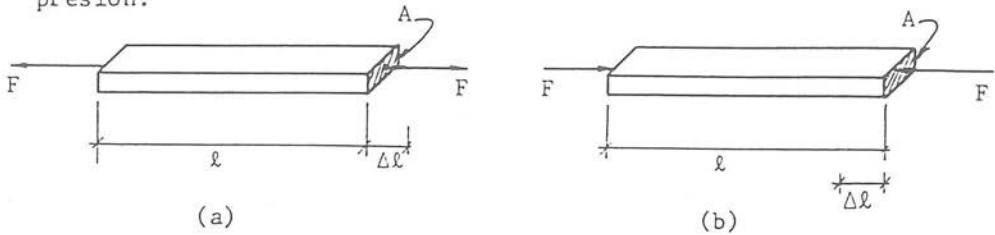


Fig. 9.1- Barra en: a) Tracción y b) Compresión.

La barra experimenta una deformación longitudinal $\Delta\ell$, la cual, asu miremos que siempre es relativamente una pequeña fracción de la longitud original. Para muchos materiales se encuentra que, bajo las mismas condiciones, esta deformación es igual tanto para tracción como para compresión, en el primer caso la barra se alarga y en el segundo se acorta. Por lo tanto, en adelante nos referiremos solo a la tracción, pero comprendiendo también a la compresión.

Nuestra experiencia diaria nos dice que la deformación producida dependerá de la fuerza externa aplicada, de las dimensiones geométricas de la pieza en particular y del material que la constituye. Precizando, experimentos de laboratorio nos muestran que el alargamiento longitudinal de la barra mostrada en la fig. 19.1-a) cuando se le somete a la acción de una fuerza externa, dentro de ciertos límites, presenta un comportamiento particular. Comportamiento que fue planteado por primera vez por Robert Hooke en 1678. Cuando un cuerpo presenta el comportamiento que a continuación vamos a detallar, se dice que presenta un comportamiento elástico.

En primer lugar se encuentra que el estiramiento es proporcional a la fuerza aplicada: $\Delta\ell \propto F$.

Segundo, el estiramiento depende de la longitud de la barra. Consideremos que la barra está constituida por bloques idénticos, unidos extremo a extremo uno a continuación de otro, sobre cada bloque actúan las mismas fuerzas y cada una se estirará en igual can-

tividad. Luego, cada elemento contribuye por igual para obtenerse el estiramiento total. Por lo tanto, esta cantidad depende directamente de la longitud que tiene la barra, esto es: $\Delta l \propto l$.

El estiramiento también depende de la sección transversal. Obteniéndose que, a mayor área menor estiramiento y a menor área mayor estiramiento. Luego, el estiramiento de la barra depende inversamente del área de su sección transversal: $\Delta l \propto \frac{1}{A}$.

Hasta aquí hemos considerado todas las cantidades que intervienen, las cuales son directamente medibles. Teniéndose la siguiente relación:

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

Finalmente, solo nos falta considerar como intervienen las propiedades internas del material con el cual está hecha la pieza. También experimentalmente se encuentra que cada material presenta un comportamiento característico representado simplemente por una constante de proporcionalidad que permite establecer la igualdad en la expresión anterior, esto, para cualquier pieza del mismo material y para cualquier carga aplicada, siempre y cuando la deformación producida no sea demasiado grande, como hemos asumido desde el inicio.

A esta constante se le denomina módulo de Young (Y) o, como en muchos otros textos, módulo de Elasticidad (E). Con esta constante se tiene la siguiente ecuación para las deformaciones:

$$\Delta l = \frac{Fl}{YA}$$

Analicemos un poco más esta expresión, pongamosla en la siguiente forma:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F/A}{Y}$$

Cada sección transversal de la barra está en equilibrio y la fuerza aplicada se distribuye uniformemente sobre el área de la sección recta. Luego, se define el "esfuerzo unitario- s" o simplemente esfuerzo, como la fuerza por unidad de área en la sección recta:

$$s = \frac{F}{A}$$

teniendo como unidad: N/m^2 - (kg/cm^2 en el sistema técnicos, todavía bastante usado en la práctica de este campo).

Si consideramos a la barra dividida en elementos de igual longitud, como hemos mencionado anteriormente, cada uno de ellos se estira la misma cantidad. Luego, definimos la "deformación unitaria - ϵ ", como el alargamiento de la barra por unidad de longitud:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Como Δl y l deben expresarse con la misma unidad, esta cantidad ϵ es un número adimensional. Simplemente mide la relación por cociente de dos longitudes.

Con estas definiciones, la expresión anterior de la ecuación de deformación presenta la siguiente forma:

$$\epsilon = \frac{s}{Y}$$

De modo tal, que con ella, nos liberamos de las características geométricas particulares de una determinada pieza. Teniéndose que "la deformación unitaria es proporcional al esfuerzo", relación cuya igualdad depende exclusivamente del material, expresada numéricamente por el módulo de Young, el cual hay que determinarlo experimentalmente.

Despejando el módulo de Young, se tiene:

$$Y = \frac{s}{\epsilon}$$

Vemos que, el módulo de Young es la relación del esfuerzo a la deformación unitaria. Esto se representa gráficamente en la fig.9.2.

Mejor dicho, esta relación de esfuerzo a deformación, es el comportamiento que presenta un determinado material cuando es sometido a experimentación y que nosotros expresamos matemáticamente, en este caso felizmente, con una relación sencilla lineal $s = y\epsilon$. Note que este comportamiento macroscópico podría haber sido diferente, la naturaleza así lo determina dentro de ciertos límites como veremos más adelante.

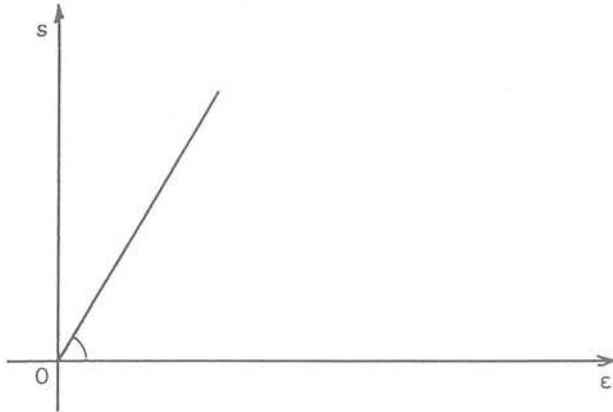


Fig. 9.2-Relación lineal de esfuerzo a deformación unitaria $s=Y\epsilon$. La pendiente de la recta es el módulo de Young.

De la expresión planteada, se deduce que el módulo de Young tiene las mismas unidades que el esfuerzo, es decir, N/m^2 (o kg/cm^2). En el apéndice I, Tab. AI-1, se dan valores típicos de Y para algunos materiales. Luego, estas cantidades nos especifican las propiedades elásticas de un determinado material. Si queremos determinar la deformación de una pieza construida con el material escogido, debemos recurrir a la ecuación de deformación que incluye las características geométricas de la pieza dada, esto es:

$$\Delta l = \frac{F l}{Y A}$$

Adicionalmente, despejando F , se obtiene:

$$F = \frac{Y A}{l} \Delta l$$

Si reunimos las características geométricas y del material en una sola constante, tal como:

$$k = \frac{YA}{l}$$

se tiene:

$$F = k \Delta l$$

La constante k se denomina constante de rigidez, teniendo como unidad: N/m. Esta constante se determina experimentalmente para cada pieza dada y corresponde solo a ella. En el caso de tener una pieza prismática como la indicada en la fig. 9.1, la constante de rigidez de la pieza se puede determinar utilizando la relación arriba encontrada justamente para este caso, $k = YA/l$. Una pieza con un valor k elevado se dice que es rígida, es decir, esta constante nos mide la propiedad que tiene de oponerse a ser deformada. p.e., una pieza de acero es elástica pero bastante rígida.

Es importante resaltar aquí, que en la práctica es relativamente simple fabricar piezas para diversos valores de la constante k , tal es el caso de los resortes. En ellos, considerados como un todo, se mantiene la proporcionalidad directa entre la deformación y la fuerza aplicada. Esto, a pesar que no depende intrínsecamente del esfuerzo de tracción o compresión, sino más bien de otro tipo de esfuerzo que estudiaremos a continuación, y por supuesto, depende también de las características geométricas de su fabricación.

Volviendo sobre la expresión de la fuerza, si representamos la deformación por la distancia x a partir de la longitud no deformada, pieza no cargada, se tiene:

$$F = kx$$

Expresión frecuentemente conocida como la Ley de Hooke. En efecto, originalmente fue establecida en estos términos, el estiramiento de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada.

Esta forma que acabamos de expresar es apropiada cuando estamos interesados en el tipo de fuerza que actúa sobre una determinada partícula o cuerpo, el cual estamos estudiando. Por ejemplo, la acción de un resorte sobre él. En este caso decimos que actúa una fuerza que matemáticamente es líneal. Esta fuerza ya lo hemos considerado en el capítulo III y nos extenderemos más aun en el siguiente capítulo al estudiar el movimiento oscilatorio.

En el presente capítulo, más bien, hemos estado interesados en estudiar las características de la deformación de una pieza bajo carga, en el comportamiento que hemos denominado elástico. Tener conocimiento de este fenómeno nos proporcionará una poderosa e indispensable arma que nos permitirá poder enfrentarnos con éxito a una amplia variedad de situaciones, p.e.: determinación de la deformación de una pieza e incluso iniciarnos en la técnica de diseño, determinación de la variación y cálculo de esfuerzos en una configuración geométrica de varios elementos, solución de problemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos), etc. En la sección de problemas se presentan un buen número de ejemplos que contemplan estas situaciones, es indispensable que el lector se enfrente a ellas y compruebe la solidez de los conocimientos fundamentales que ha adquirido sobre la teoría de la elasticidad.

Para completar nuestro análisis de la deformación producida en una barra prismática cuando se le somete a tracción o compresión axial, consideremos nuevamente la barra mostrada en la fig. 9.1 e identifiquemos las dimensiones de su sección transversal, denominándolas: ancho a y espesor b . Ya hemos establecido que cuando se le somete a tracción la barra sufre un alargamiento longitudinal. También se ha encontrado experimentalmente que al mismo tiempo se presenta una contracción lateral que acompaña el estiramiento, teniéndose que: la contracción unitaria de los lados laterales es directamente proporcional al alargamiento unitario longitudinal. Esta relación es constante para un mismo material dentro de los límites -

elásticos y es conocida como la "Relación de Poisson", que expresa remos en la siguiente forma:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = - \sigma \frac{\Delta l}{l}$$

Se ha introducido el signo negativo para expresar que un alargamiento (positivo) longitudinal va acompañado por una contracción (negativo) transversal, e inversamente, para un acortamiento (negativo) longitudinal se tiene una dilatación (positivo) transversal.

La constante σ , llamada módulo de Poisson, es un número adimensional que puede considerarse igual, tanto, para tracción como para compresión.

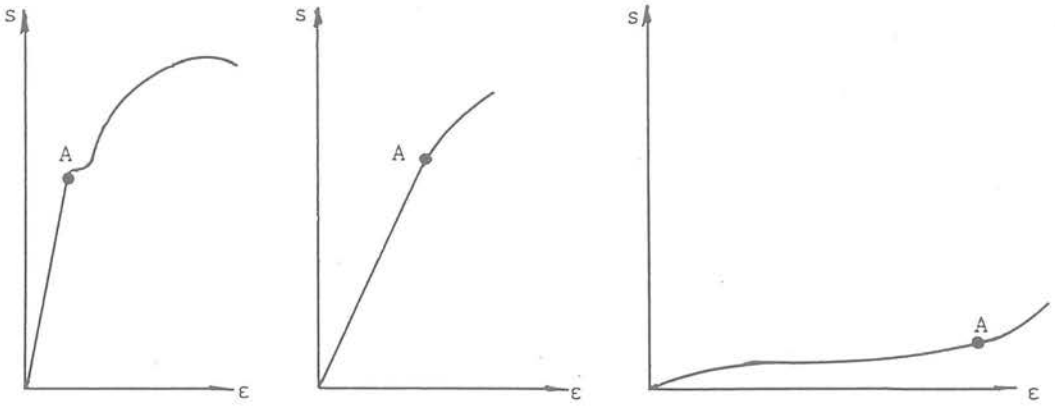
En el apéndice I, tabla AI.4, se dan valores típicos de σ para algunos materiales.

Debe resaltarse que la determinación directa de esta constante, midiendo la contracción lateral cuando se somete una pieza a tracción, es muy difícil, por su pequeñez se requiere equipos de muy alta precisión. Más bien, se encuentra generalmente mediante ensayos de torsión y relaciones que existen entre constante elásticas, que veremos más adelante, ítem 9.7.

9.3 COMPORTAMIENTO ELASTICO Y PLASTICO DE LOS MATERIALES.-

Los resultados de los experimentos en los cuales, por medición, se busca analizar la relación entre el esfuerzo aplicado y la deformación producida, muestran diferentes tipos de comportamiento para diferentes materiales. Esto es familiar ya que si nosotros jalamos acero, caucho, vidrio o plásticos, algunos se estiran considerablemente mientras que otros apenas.

En la fig. 9.3 se muestran algunos gráficos, esfuerzo vs: deformación unitaria, para diferentes materiales.



a) Acero

b) Hierro Forjado
(o plástico laminado)

c) Caucho

Fig. 9.3-Diagramas de Tensión: esfuerzo-deformación (s vs ϵ) - Ejemplos típicos. El punto A nos señala el límite elástico.

Se observa que la parte inicial es lineal, el esfuerzo es proporcional a la deformación, o sea, obedece la relación de Hooke. Este comportamiento termina cerca del llamado límite elástico, hasta el cual, si se efectúa una descarga la pieza recobra su longitud original. Pasado este límite se entra en la denominada zona plástica del material, a partir de este punto se presenta una deformación permanente al retirar la carga. En la fig. 9.4 se muestran gráficos durante la aplicación y remoción de los esfuerzos.

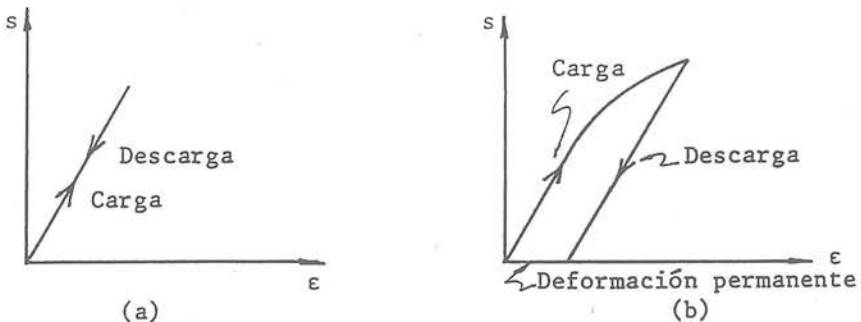


Fig. 9.4-Gráficos de carga y descarga en zonas: elástica (a) y plástica (b)

Otra cantidad importante para un material es el valor máximo del esfuerzo, este es conocido como el último esfuerzo o carga de ruptura del material. Pasado este punto, en algunos casos la barra continúa alargándose con disminución de la carga, se presenta finalmente la fractura de la pieza. Hay materiales, como el hierro fundido, que tienen una región plástica muy pequeña de tal forma que pasan casi directamente de la zona elástica a la ruptura sin deformación. Estos materiales son muy difíciles de cambiar de forma, mientras que hay otros que son fácilmente moldeables.

Indudablemente que en la naturaleza no existen materiales perfectamente elásticos ni tampoco perfectamente plásticos.

Por otro lado, en general, el comportamiento de los materiales bajo esfuerzos de compresión es diferente que cuando está sometido a esfuerzos de tensión. Sin embargo, en muchos casos, podemos usar el mismo módulo de elasticidad, tanto para tensión como para compresión, pero el límite elástico es diferente para las regiones de tensión y compresión, como muestra la fig. 9.5(a). Hay otros materiales, como es el caso del caucho, que tienen diferencia considerable en estas dos regiones como muestra la fig. 9.5(b).

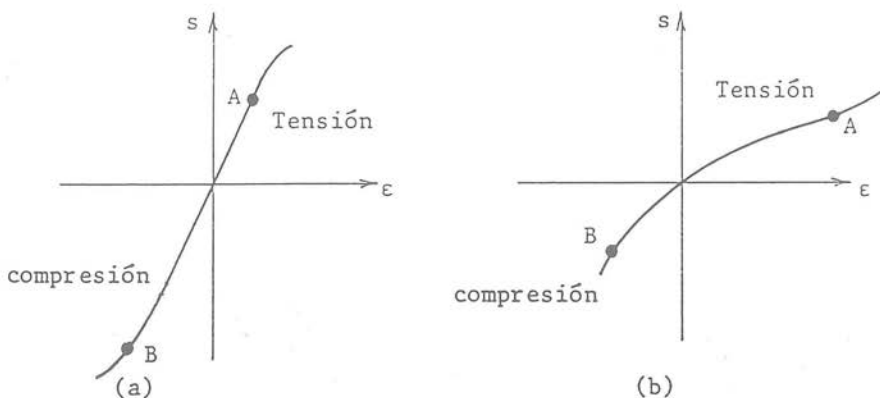


Fig. 9.5-Diferentes comportamientos de materiales sometidos a esfuerzos de tensión y compresión. Los puntos A y B nos señalan el límite elástico, respectivamente, para ambas regiones y para ambos casos (a) y (b).

Teniendo en cuenta los valores del límite elástico y el del último es fuerzo se relaciona la denominada carga de trabajo o de diseño, mediante un factor de seguridad. En este factor de seguridad se debe tomar en cuenta muchos efectos, como por ejemplo: variaciones en las propiedades de los materiales, proceso de fabricación, aproximaciones en la teoría usada para el cálculo de esfuerzos, incluso condiciones de la carga aplicada (estática o dinámica), etc.

Como referencia, para el acero se puede considerar para el límite elástico $2,800 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ a la tracción y $2,400 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ en compresión, como último esfuerzo $5,000 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ y como carga de trabajo (diseño) $1,400 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

9.4 ENERGIA DE DEFORMACION.-

Consideremos nuevamente la barra mostrada en la fig. 9.1, sometida a tracción o compresión. Durante la deformación gradual bajo la acción de una carga, la fuerza exterior aplicada realiza trabajo. Y, este trabajo se transforma completa o parcialmente en energía potencial de deformación. Si la deformación se lleva a cabo en la zona elástica, el trabajo se transforma por completo en energía potencial. Cuando se retira gradualmente la carga, la barra sufre una deformación inversa y la energía potencial de deformación acumulada en la barra se recupera totalmente como trabajo exterior. En este trabajo, al actuar el sólido deformado como resorte al cesar el esfuerzo que producía la deformación, estaremos interesados en el próximo capítulo de oscilaciones.

Cuando la deformación pasa del límite elástico, entrando en la zona plástica, parte del trabajo realizado se transforma en el calor desahogado en el cuerpo durante la deformación no elástica. Solo la energía potencial de deformación se recupera directamente como trabajo exterior.

Si la muestra es de un material con constante de rigidez k , la energía potencial U almacenada por la barra durante la deformación en una cantidad x , bajo la acción de una fuerza F en la región elástica ($F = kx$), será:

$$U = W = \int_0^x F \, dx = k \int_0^x x \, dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} Fx$$

Y, la energía por unidad de volumen $u = U/V$, para la barra prismática de volumen $V = Al$, será:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2} Fx}{Al} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{x}{l} = \frac{1}{2} s\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{s^2}{y} = \frac{1}{2} y\varepsilon^2$$

9.5 ELASTICIDAD VOLUMÉTRICA. - .-

Consideremos ahora un volumen de material sujeto a un esfuerzo unitario P_0 igual sobre todos los puntos de la superficie. Cuando el esfuerzo se incrementa a P , es decir, cuando se somete a una presión $p = \Delta P = P - P_0$, el volumen V sufre una disminución ΔV . Luego, encontramos experimentalmente que el esfuerzo a presión p es proporcional a la deformación volumétrica unitaria $\Delta V/V$, esto es:

$$p = - B \frac{\Delta V}{V}$$

Donde la constante de proporcionalidad B , llamada módulo volumétrico, depende solamente del material. El módulo volumétrico tiene las dimensiones de la presión, esto es, fuerza/área y es aplicable tanto para sólidos como para líquidos. Los gases tienen un comportamiento diferente que será considerado posteriormente.

En la expresión planteada se ha introducido el signo menos para expresar que un incremento de la presión produce una reducción del volumen y viceversa.

En el apéndice I, Tab. AI.2, se dan valores típicos de B para algunos materiales.

Cuando a una barra se le aplican fuerzas iguales, opuestas y paralelamente próximas una sección transversal de ella, como se muestra en la fig. 9.6, se dice que la barra está sometida a cizalladura o corte. La deformación producida distorsiona la forma de la pieza sin modificar sustancialmente su volumen.

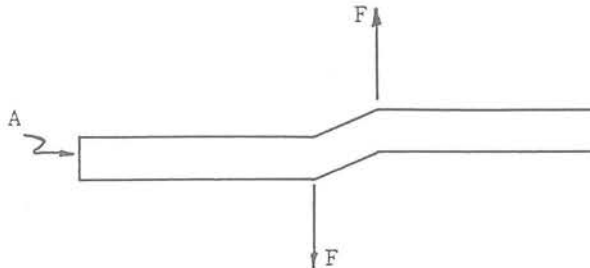


Fig. 9.6-Barra sometida a cizalladura o corte. Se aplican fuerzas F iguales y opuestas tangencialmente próximas sobre una sección transversal de área A .

Si asumimos una distribución uniforme de la fuerza F sobre el área A , definimos el esfuerzo cortante s , como la fuerza tangencial por unidad de área, esto es:

$$s = \frac{F}{A}$$

Para analizar la deformación, consideremos un elemento aislado y en equilibrio bajo la acción de esfuerzos cortantes solamente, es decir, sometido a esfuerzo cortante puro, dado que no actúan esfuerzos normales sobre sus caras. Tomemos un bloque prismático recto, cuya sección transversal cuadrada $abcd$, de lado l , se muestra en la fig. 9.7(a). Sobre él, actúan dos cuplas iguales y opuestas producidas por dos pares de fuerzas F distribuidas uniformemente sobre sus superficies como se muestra en la misma figura. Luego, el bloque está en equilibrio.

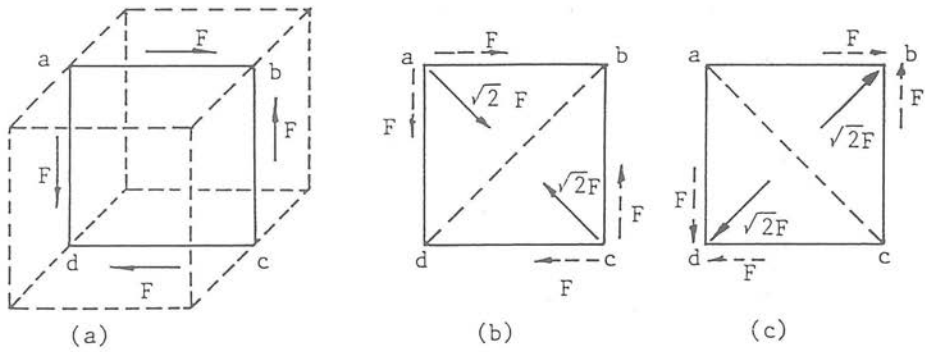


Fig. 9.7-(a) Bloque sometido a esfuerzo constante puro.
 (b) La diagonal ac se acortará. Y, la sección transversal coincidente con la diagonal bd , está sometida a compresión pura.
 (c) La diagonal bd se alargará. Y, la sección transversal coincidente con la diagonal ac , está sometida a tracción pura.

Al no existir esfuerzos normales a las caras del bloque, los lados no modificarán su longitud en la deformación. Pero las diagonales sí modificarán su longitud. La diagonal ac se acortará, observe que la sección transversal, coincidente con la diagonal bd , está sometida a compresión pura como se muestra en la fig.9.7(b). Y, la diagonal bd se alargará, en este caso la sección transversal, coincidente con la diagonal ac , está sometida a tracción pura como se muestra en la fig. 9.7(c).

Luego, el cuadrado $abcd$ se transforma en un rombo $a'b'c'd'$, manteniendo sus centros coincidentes, como se muestra en la fig. 9.8(a).



Fig.9.8-Cambio de forma de un bloque sometido a esfuerzo cortante puro.
 (a) El cuadrado $abcd$ se transforma en el rombo $a'b'c'd'$, el centro O , de ambos, son coincidentes.
 (b) El rombo se ha girado, coincidiendo los lados $c'd'$ y cd . La distorsión se mide por el ángulo ϕ .

Al producirse la deformación, los ángulos en los vértices varían, antes de la deformación todos eran iguales a 90° , después de la deformación en un caso, como el vértice a, aumenta y en otro caso, como el vértice b, disminuye. Este ángulo, pequeño, nos medirá la distorsión sufrida por el elemento al someterlo a esfuerzo constante puro.

Para definirla, mejor giremos el rombo, de forma tal, que el lado c'd' coincida con el lado cd, como se muestra en la fig. 9.8(b). Ya hemos dicho que las longitudes de los lados no varían, solo varían todas las dimensiones paralelas a las diagonales, en ac disminuyen y en bd aumentan.

La deformación unitaria se define como la relación del desplazamiento δ ($\overline{aa'}$) con la longitud l del lado. Pero, δ/l es la tangente del ángulo ϕ y, adicionalmente, como las deformaciones que consideramos son pequeñas, podemos tomar la deformación por corte, como el ángulo ϕ expresado en radianes. Esto es,

$$\phi = \frac{\delta}{l}$$

Como en los casos anteriores, tensión o compresión, esta cantidad ϕ para la deformación por corte, es un número adimensional.

Definido el esfuerzo cortante y la deformación unitaria, cuando se somete un material a esfuerzo cortante puro puede establecerse experimentalmente la relación existente entre el esfuerzo cortante aplicado y la deformación producida. En la fig. 9.9 se muestra una curva típica del resultado que se obtiene, este diagrama es análogo al mostrado en la fig. 9.3 para el caso de tracción.

Fig. 9.9 - Siguiendo página.

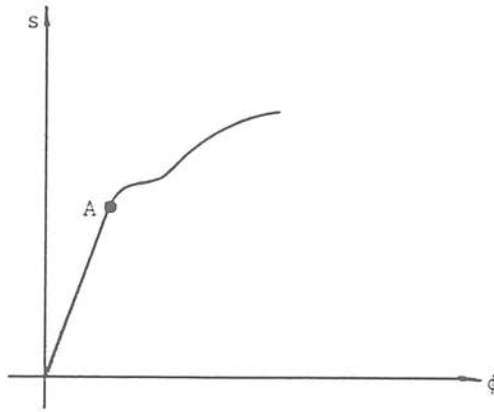


Fig. 9.9-Curva típica de esfuerzo cortante-deformación (s vs ϕ).
El punto A nos señala el límite elástico.

Se observa, nuevamente, que en la parte inicial la relación es lineal, esto es, se encuentra que el esfuerzo es proporcional a la deformación en la zona elástica. Luego,

$$s = C \phi \quad \rightarrow \quad C = \frac{s}{\phi}$$

Esta constante de proporcionalidad C depende solamente de las propiedades elásticas del material y se le denomina frecuentemente como módulo elástico en corte, o, algunas veces, como módulo de rigidez, teniendo como dimensiones fuerza/área (N/m^2 o kg/cm^2). En el apéndice I, Tab. AI.3, se dan valores típicos de C para algunos materiales.

El bloque considerado es muy apropiado para el estudio teórico de la deformación producida por esfuerzo cortante, sin embargo, en la práctica, es muy difícil poder aplicar uniformemente el esfuerzo cortante en sus caras. De igual forma, también lo es, el caso de una aplicación directa tangencial del esfuerzo por medio de una cizalla sobre una pieza como la mostrada en la fig. 9.6, en este caso, no solo la distribución del esfuerzo cortante no es uniforme, si no que, incluso va acompañado de otros esfuerzos normales.

Mas bien, el esfuerzo cortante puro se tiene generalmente por torsión de un tubo circular como se muestra en la fig. 9.10. La pie-

za está empotrada en un extremo y sometida a la acción de una cu-pla aplicada en el otro extremo, en un plano perpendicular al eje longitudinal de simetría. Un elemento abcd de la superficie cilíndrica, formado por dos generatrices y por dos secciones rectas adyacentes, sufre una deformación transformándose en a'b'c'd' al establecerse el equilibrio elástico, como se muestra en la fig -

9.10(a). Esta deformación es análoga a la considerada anteriormente en la fig. 9.8(b).

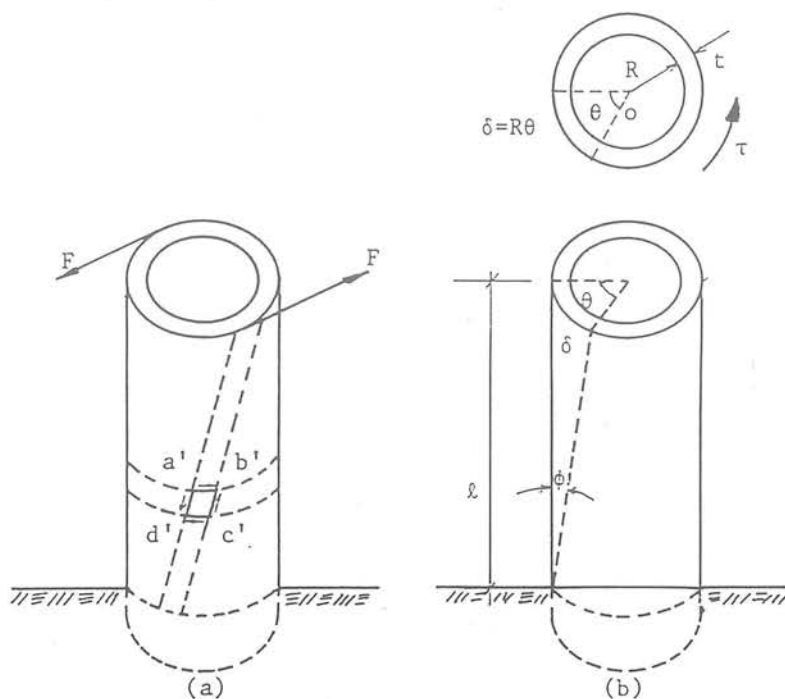


Fig. 9.10-Pieza cilíndrica sometida a torsión.

- (a) El elemento a'b'c'd' está en un estado de equilibrio elástico de esfuerzo constante puro.
- (b) Dentro de los límites elásticos se produce una pequeña rotación de un extremo del tubo respecto del otro.
 θ = ángulo de torsión.

Luego, analicemos la relación entre el torque aplicado y la deformación producida al someter a torsión un tubo circular de radio R , longitud l y espesor t pequeño, tal como se muestra en la fig.9.10(b). En particular, encontremos el módulo elástico de esfuerzo cortante del material, en función del torque aplicado, del ángulo de torsión producido y de las características geométricas de la pieza

considerada.

Manteniendo el extremo inferior fijo, aplicamos un torque τ que gira al extremo superior un ángulo θ , denominado ángulo de torsión. Observando la fig. 9.10(b), podemos establecer inmediatamente que la deflexión producida es:

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{R\theta}{\ell}$$

El asumir que el espesor t es pequeño permitirá considerar, con adecuada aproximación, al esfuerzo cortante, y consecuentemente al torque, como cantidades constantes en el espesor. Luego, si el esfuerzo cortante s es constante en la sección transversal de área $2\pi Rt$, el torque resistente es $s(2\pi Rt)R$ y por la condición de equilibrio será igual al torque aplicado τ , esto es:

$$\tau = s(2\pi Rt)R = 2\pi R^2 ts$$

de aquí se obtiene el esfuerzo en función del torque aplicado (conocido) :

$$s = \frac{\tau}{2\pi R^2 t}$$

Luego, finalmente, el módulo en corte es:

$$C = \frac{s}{\phi} = \frac{\frac{\tau}{2\pi R^2 t}}{\frac{R\theta}{\ell}} = \frac{\tau \ell}{2\pi R^3 t \theta}$$

En la sección de problemas (P.Nº 39), se considera el caso de una barra circular, en donde el esfuerzo cortante ya no es constante en la sección transversal.

9.7 RELACIONES ENTRE CONSTANTES ELASTICAS.-

Las diferentes constantes o módulos elásticos son cantidades que están relacionadas. A continuación estableceremos estas relaciones. Encontraremos dos expresiones, una referida al módulo volumé

trico y otra al módulo de corte, ambas en función de los módulos de Young y Poisson. Para esto, consideremos los siguientes casos:
 - Muestra sometida a una presión uniforme en tres direcciones perpendiculares.

Consideremos un bloque prismático recto, de dimensiones l , a y b , sometido a una presión uniforme p en toda su superficie exterior, como se muestra en la fig. 9.11. Al ser la presión uniforme, el esfuerzo unitario en cada cara del bloque es el mismo. Los cambios en las dimensiones del bloque dependen no solamente del esfuerzo en la dirección considerada, sino también de los esfuerzos en las direcciones perpendiculares a ella. Luego, estos cambios pueden obtenerse por superposición de las deformaciones producidas por los esfuerzos en tres direcciones independientemente como se muestra también en la misma fig. 9.11(x, y, z).

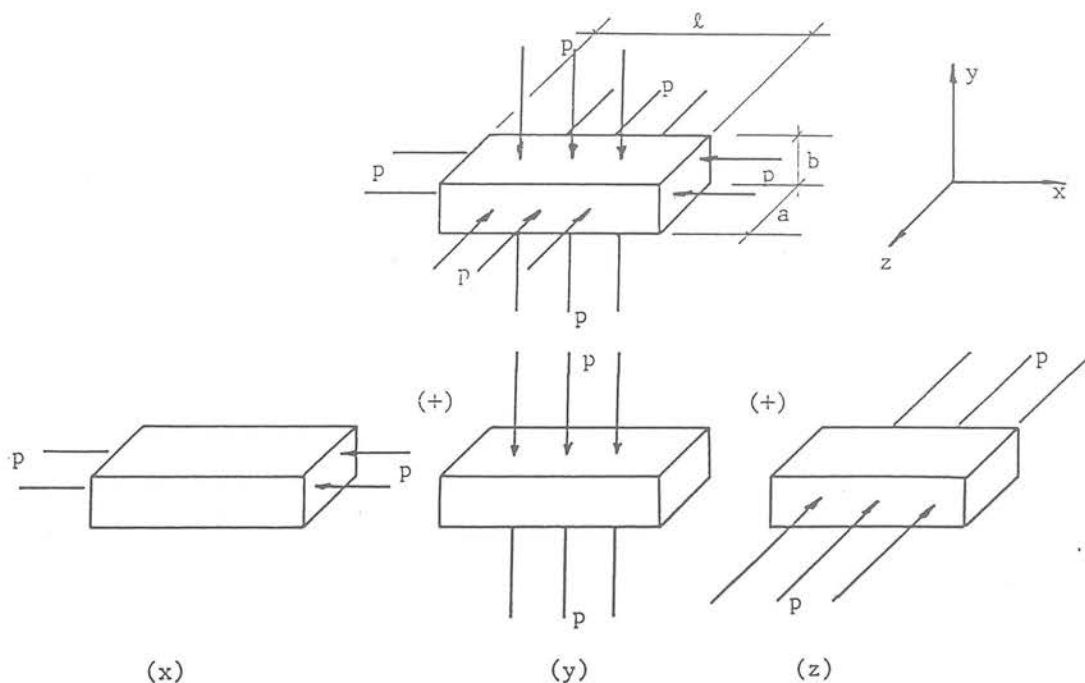


Fig. 9.11-Bloque sometido a presión uniforme en tres direcciones perpendiculares.
 Superposición de las deformaciones producidas por los esfuerzos en las tres direcciones (x, y, z).

Tomando como convención de signos : menos para acortamientos y más para alargamientos. Se tiene,

- . Deformaciones unitarias producidas por el esfuerzo en la dirección (x):

$$\frac{\Delta l}{l} = - \frac{p}{Y}$$

y con la relación de Poisson:

$$\frac{\Delta a}{a} = - \sigma \frac{\Delta l}{l} = \sigma \frac{p}{Y}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = - \sigma \frac{\Delta l}{l} = \sigma \frac{p}{Y}$$

- . Deformaciones unitarias producidas por el esfuerzo en la dirección (y):

$$\frac{\Delta b}{b} = - \frac{p}{Y}$$

y con la relación de Poisson:

$$\frac{\Delta a}{a} = - \sigma \frac{\Delta b}{b} = \sigma \frac{p}{Y}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = - \sigma \frac{\Delta b}{b} = \sigma \frac{p}{Y}$$

- . Deformaciones unitarias producidas por el esfuerzo en la dirección (z):

$$\frac{\Delta a}{a} = - \frac{p}{Y}$$

y con la relación de Poisson:

$$\frac{\Delta b}{b} = - \sigma \frac{\Delta a}{a} = \sigma \frac{p}{Y}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = \sigma \frac{p}{Y}$$

Sumando todos los cambios producidos, se tiene:

. longitud l :

$$\epsilon_l = -\frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y} = -\frac{p}{Y} (1 - 2\sigma)$$

. ancho a :

$$\epsilon_a = \sigma \frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y} - \frac{p}{Y} = -\frac{p}{Y} (1 - 2\sigma)$$

. espesor b :

$$\epsilon_b = \sigma \frac{p}{Y} - \frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y} = -\frac{p}{Y} (1 - 2\sigma)$$

Las tres expresiones son similares, esto es, debido a que la presión es uniforme se tiene simetría en las tres direcciones. Luego, en este caso, se puede escribir que:

$$\epsilon = \epsilon_l = \epsilon_a = \epsilon_b = -\frac{p}{Y} (1 - 2\sigma)$$

Calculemos, ahora, la deformación unitaria volumétrica.

El volumen total después de la deformación es:

$$V + \Delta V = l(1 + \epsilon_l) \cdot a(1 + \epsilon_a) \cdot b(1 + \epsilon_b)$$

como: $V = lab$, se tiene:

$$1 + \frac{\Delta V}{V} = (1 + \epsilon_l)(1 + \epsilon_a)(1 + \epsilon_b)$$

Considerando que las deformaciones unitarias ϵ son pequeñas, al efectuar el producto podemos desprestigiar los términos cuadráticos y superiores, quedando:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_l + \epsilon_a + \epsilon_b$$

Con las deformaciones encontradas anteriormente, se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = -\frac{3p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Relacionando con la expresión de compresibilidad volumétrica:

$$p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

Finalmente queda:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}$$

Expresión que nos relaciona el módulo de compresibilidad volumétrica con los módulos de Young y Poisson.

- Muestra sometida a esfuerzo cortante puro.

Tomemos nuevamente el mismo bloque considerado en el ítem anterior (9.5) y cuyo análisis de la deformación, sometido a esfuerzo cortante puro, se mostró en las figs. 9.7 y 9.8.

Como se mencionó, la diagonal ac se acortará y la diagonal bd se alargará, al estar sometidas a compresión y tracción, respectivamente. Para determinar la deformación unitaria de las diagonales, consideremos un elemento prismático sometido a esfuerzos de compresión y tracción puros en las dos direcciones de las diagonales, perpendiculares entre sí, tal como se muestra en la fig. 9.12. Las caras del bloque abcd, que forma parte de él, están sometidas a esfuerzo cortante puro, como también se muestra en la misma figura.

Figura en la siguiente página.

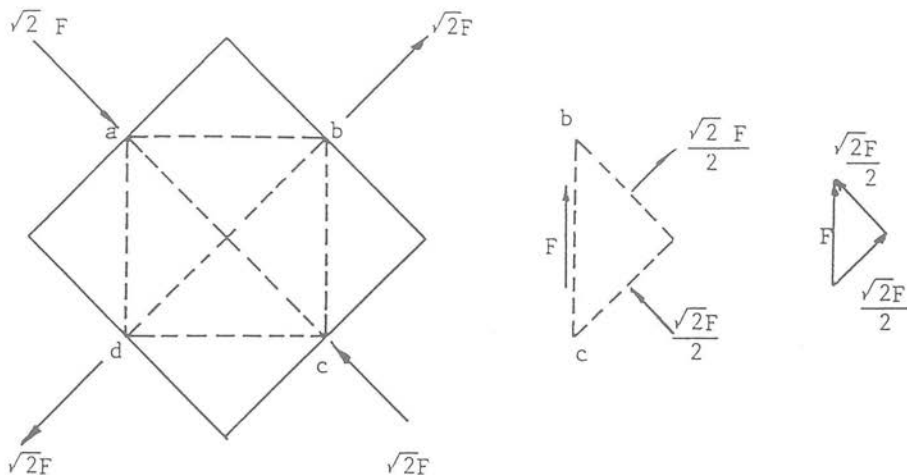


Fig. 9.12-Prisma sometido a esfuerzos de compresión y tracción puros. El elemento abcd está sometido a esfuerzo cortante puro.

Los esfuerzos de compresión y tracción son de igual magnitud, e igualmente el de corte. Llamando A al área de las caras laterales del elemento $abcd$, el área en las diagonales será $\sqrt{2} A$. Luego, el esfuerzo será:

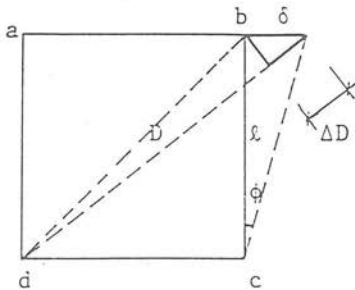
$$s = \frac{\sqrt{2} F}{\sqrt{2} A} = \frac{F}{A} = s$$

Al determinar la deformación longitudinal de la diagonal, hay que tener en cuenta los efectos de ambos esfuerzos, de tracción y compresión en las dos direcciones perpendiculares mediante la relación de Poisson. Similarmente, como vimos anteriormente para el caso de tres dimensiones perpendiculares, considerando los signos correspondientes para este caso, se tendrá:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{s}{Y} + \sigma \frac{s}{Y} = \frac{s}{Y} (1 + \sigma)$$

Por supuesto, para la diagonal ac es un acortamiento y para la otra, bd, alargamiento.

Conociendo la deformación unitaria de la diagonal, podemos determinar la deformación ϕ , definida para el bloque. De la figura 9.13 se pueden obtener fácilmente las relaciones entre las cantidades D , ℓ , ΔD y δ . Teniéndose:



$$\delta = \sqrt{2} \Delta D$$

$$\ell = \frac{D}{\sqrt{2}}$$

Fig. 9.13-Deformación del prisma (abcd).
Relación entre las cantidades D , ℓ , ΔD y δ .

Luego, la deformación ϕ por corte será:

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{\sqrt{2} \Delta D}{D/\sqrt{2}} = 2 \frac{\Delta D}{D} = 2 \frac{s}{Y} (1 + \sigma)$$

y el módulo de esfuerzo cortante :

$$C = \frac{s}{\phi} = \frac{s}{2 \frac{s}{Y} (1 + \sigma)}$$

Finalmente queda:

$$C = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}$$

Expresión que nos relaciona al módulo de esfuerzo cortante con los módulos de Young y Poisson.

A P E N D I C E I

MODULOS ELASTICOS

Valores Referenciales (Promedio aproximado)

TABLA AI.1 - MODULO DE YOUNG (Y)

MATERIAL	Y. 10 ¹⁰ (N/m ²)
Acero	20
Aluminio	7
Bronce	9
Cobre	11
Níquel	21
Plomo	1.5
Tungsteno	35
Vidrio	6
Madera	1

Nota: Si queremos tener Y en kg/cm², tratándose de valores referenciales, podemos tomar como factor de conversión aproximado 10⁻⁵.

TABLA AI.2 MODULO VOLUMETRICO (B)

MATERIAL	B . 10 ¹⁰ (N/m ²)
Acero	17
Aluminio	7
Bronce	8
Cobre	14
Níquel	26
Plomo	1
Tungsteno	20
Vidrio	4
Agua	0.2
Alcohol	0.1
Mercurio	2.7

(Ver nota en Tab. AI.1)

TABLA AI.3 - MODULO DE ESFUERZO CORTANTE (C).

MATERIAL	$C \cdot 10^{10}$ (N/m ²)
Acero	8
Aluminio	2.5
Bronce	3.5
Cobre	4
Níquel	7.5
Plomo	0.5
Tungsteno	15
Vidrio	2.3
Madera	0.4

(Ver nota en Tab. AI.1)

TABLA A1.4 MODULO DE POISSON (σ)

MATERIAL	σ
Vidrio	0.24
Acero	0.28
Níquel	0.31
Aluminio	0.33
Cobre	0.35
Plata	0.37
Plomo	0.44
Caucho	0.50

1. Dos alambres del mismo material e igual longitud, tienen diámetros diferentes que guardan una relación n . ¿Qué diferencia de alargamientos tendrán bajo la misma carga?

El alargamiento del alambre de diámetro d es:

$$\Delta \ell_a = \frac{F \ell}{Y \pi d^2 / 4} = \frac{4F \ell}{Y \pi d^2}$$

El alargamiento del alambre de diámetro nd es:

$$\Delta \ell_b = \frac{F \ell}{Y \pi n^2 d^2 / 4} = \frac{4F \ell}{Y \pi n^2 d^2}$$

Luego, la diferencia de alargamientos es:

$$\Delta = \Delta \ell_a - \Delta \ell_b = \frac{4F \ell}{Y \pi d^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

2. Un ascensor es suspendido por un cable de acero. Posteriormente este cable es reemplazado por dos cables de acero, cada uno con la misma longitud que el original pero con la mitad de su diámetro. Compare el alargamiento de estos cables con el del cable original.

El alargamiento del cable original es:

$$\Delta \ell_1 = \frac{F \ell}{Y \pi d^2 / 4} = \frac{4F \ell}{Y \pi d^2}$$

Cuando se ponen dos cables se tiene que:

$$F' = \frac{F}{2}$$

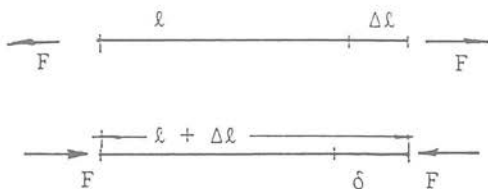
$$d' = \frac{d}{2}$$

y, el alargamiento de cada cable será:

$$\Delta l_2 = \frac{\frac{F}{2} \ell}{Y d^2 / 16} = \frac{8F\ell}{Y\pi d^2}$$

Luego, el alargamiento se duplica: $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$

3. Una barra de longitud ℓ , sección A y módulo de elasticidad Y , sufre un estiramiento $\Delta \ell$. ¿Cuánto se comprimirá una barra similar a la anterior, pero de longitud: $(\ell + \Delta \ell)$, cuando se somete a la compresión de una fuerza de igual magnitud que la tracción hecha sobre la otra barra?



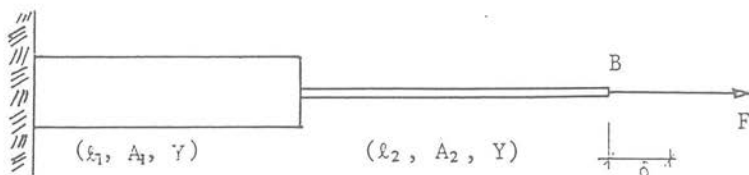
se tiene:

$$\left. \begin{aligned} F &= AY \frac{\Delta \ell}{\ell} \\ \delta &= \frac{F(\ell + \Delta \ell)}{AY} \end{aligned} \right\} \delta = \frac{\Delta \ell}{\ell} (\ell + \Delta \ell) = \Delta \ell \left(1 + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$$

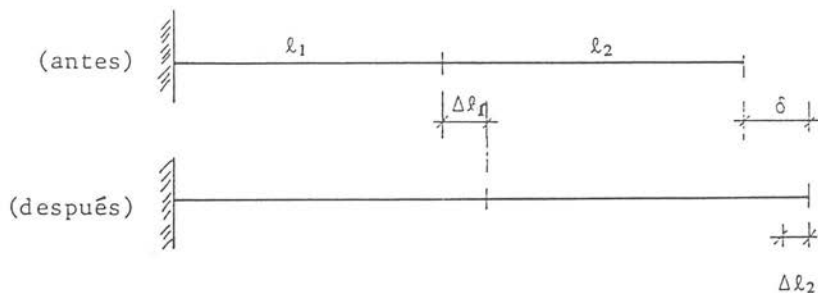
4. Se tienen dos barras de diferentes dimensiones, pero del mismo material, unidos como se muestra en la figura.

En el extremo B se aplica una fuerza F desconocida y se mide el desplazamiento δ , de este extremo.

Determinar los alargamientos que se producen en cada una de las barras. ¿Cuál es la fuerza aplicada?



Relación geométrica de las deformaciones:



Luego, se tiene: $\Delta l_2 = \delta - \Delta l_1$

Deformaciones elásticas de cada una de las barras:

$$\Delta l_1 = F \left(\frac{l_1}{A_1 Y} \right), \quad \Delta l_2 = F \left(\frac{l_2}{A_2 Y} \right)$$

Como la fuerza es igual, de ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{\Delta l_1}{l_1 / A_1 Y} = \frac{\Delta l_2}{l_2 / A_2 Y}$$

e introduciendo la relación de deformaciones, queda:

$$\Delta l_1 \left(\frac{A_1}{l_1} \right) = (\delta - \Delta l_1) \left(\frac{A_2}{l_2} \right)$$

despejando Δl_1 :

$$\Delta l_1 = \delta \left(\frac{\frac{A_2 / l_2}{\frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2}}} \right) = \delta \left(\frac{l_1 A_2}{l_2 A_1 + l_1 A_2} \right) = \frac{\delta}{1 + \frac{l_2 A_1}{l_1 A_2}}$$

y Δl_2 será:

$$\Delta l_2 = \delta - \Delta l_1 = \delta \left(\frac{l_2 A_1}{l_2 A_1 + l_1 A_2} \right) = \frac{\delta}{1 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{A_2}{A_1}}$$

El valor de la fuerza aplicada, se determinará de cualquiera de las dos expresiones de deformación elástica, esto es:

$$F = \Delta l_1 \left(\frac{A_1 Y}{l_1} \right) = \delta \left(\frac{A_1 A_2 Y}{l_2 A_1 + l_1 A_2} \right) = \frac{Y \delta}{\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}}$$

5. N barras diferentes están unidas firmemente, una a continuación de otra, y el conjunto así formado se estira hasta alcanzar una longitud total L, mayor que la original L₀.

Determinar la fuerza necesaria.

Sean las barras:

$$(l_1 A_1 Y_1), (l_2 A_2 Y_2), \dots, (l_n A_n Y_n)$$

Como la fuerza es la misma para todas las barras, el alargamiento de cada una es:

$$\Delta l_n = \frac{T l_n}{A_n Y_n}$$

y la deformación total:

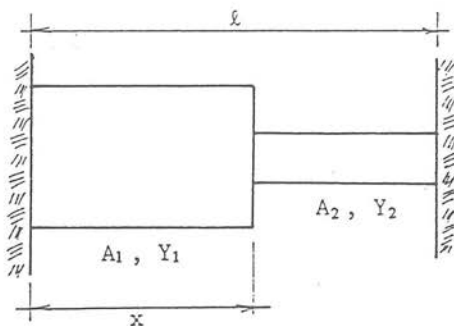
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n = L - L_0$$

Luego, resolviendo para la fuerza T :

$$T \left(\frac{l_1}{Y_1 A_1} + \frac{l_2}{Y_2 A_2} + \dots + \frac{l_n}{Y_n A_n} \right) = L - L_0$$

$$T = \frac{L - L_0}{\frac{l_1}{Y_1 A_1} + \frac{l_2}{Y_2 A_2} + \dots + \frac{l_n}{Y_n A_n}}$$

- 6.- Dos barras de longitud $(\frac{l}{2} + \delta)$, cada una, áreas A_1 y A_2 y módulos de elasticidad Y_1 e Y_2 , respectivamente, se comprimen hasta introducirse entre dos paredes rígidas separadas una distancia l , como se muestra en la figura. ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?



Relaciones geométricas de las deformaciones:

$$x = \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - \Delta l_1$$

$$2\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Por elasticidad:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{T \left(\frac{l}{2} + \delta \right)}{A_1 Y_1} \\ \Delta l_2 &= \frac{T \left(\frac{l}{2} + \delta \right)}{A_2 Y_2} \end{aligned} \right\} \Delta l_2 = \Delta l_1 \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}$$

Luego: $\Delta l_1 = 2\delta - \Delta l_2 = 2\delta - \Delta l_1 \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}$

Despejando Δl_1 :

$$\Delta l_1 = \frac{2\delta}{1 + \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}}$$

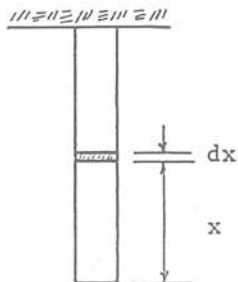
Reemplazando en la expresión de x:

$$x = \frac{l}{2} + \delta - \left(\frac{2\delta}{1 + \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}} \right)$$

Finalmente, la distancia pedida es:

$$x = \frac{l}{2} + \delta \left(\frac{A_1 Y_1 - A_2 Y_2}{A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \right)$$

7. Determinar la deformación producida en una barra debido a su peso propio.



Características:

w = Peso por unidad de longitud.

Y = módulo de Young.

A = sección transversal

l = longitud inicial

El elemento diferencial dx soporta el peso de la porción de barra que está bajo de él. Si la longitud de esta porción es x , la fuerza que actúa sobre el elemento es:

$$F_x = wx$$

y su deformación será:

$$\Delta(dx) = \frac{F_x dx}{AY} = \frac{wx dx}{AY}$$

Integrando esta expresión encontraremos la deformación total de la barra de longitud l . Esto es:

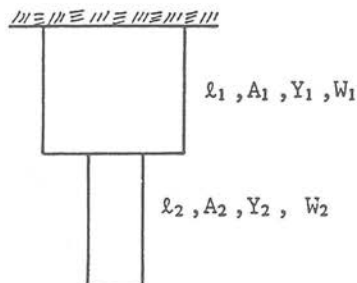
$$\Delta l = \frac{w}{AY} \int_0^l x dx = \frac{wl^2}{2AY}$$

Si llamamos W al peso total de la barra, con $wl = W$, podemos escribir:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{Wl}{AY}$$

Observe por mera comparación, que ésta deformación es igual a la mitad de la deformación que se produciría, como si, el peso estuviera concentrado en el extremo inferior.

8. Dos barras diferentes están unidas y colgadas, disposición que se muestra en la figura. Determinar cuánto desciende el extremo libre, por efecto de sus propios pesos.



Nota: Resolver primero el problema anterior P. N° 7

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el problema anterior P. N° 7, podemos escribir directamente :

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2} \frac{W_2 l_2}{A_2 Y_2}$$

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2} \frac{W_1 l_1}{A_1 Y_1} + \frac{W_2 l_1}{A_1 Y_1} = \frac{l_1}{A_1 Y_1} \left(\frac{W_1}{2} + W_2 \right)$$

y la deformación total será:

$$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\delta = \frac{l_1}{A_1 Y_1} \left(\frac{W_1}{2} + W_2 \right) + \frac{l_2}{A_2 Y_2} \left(\frac{W_2}{2} \right)$$

9. Se tienen dos barras de las siguientes características:

Barra (I) \Rightarrow Y, ρ , l , A

Barra (II) \Rightarrow Y, ρ , l , 2A

Luego, las barras se cuelgan independientemente, sujetandolas de uno de sus extremos.

¿Cuál se estira más? ¿Cuánto?

Posteriormente, en el extremo libre inferior se colocan los siguientes pesos:

Barra (I) \Rightarrow W

Barra (II) \Rightarrow 2W

En esta situación, ¿cuál se estira más? y ¿cuánto?

Nota: Resolver primero el problema P N° 7

Consideremos, en forma genérica, una barra de área A , longitud ℓ y densidad ρ . Su peso propio P , será:

$$P = \rho g A \ell$$

Su deformación por su propio peso, de acuerdo al resultado obtenido en el problema P. N° 7, será:

$$\Delta \ell = \frac{1}{2} \frac{P \ell}{YA} = \frac{1}{2} \frac{\rho g \ell^2}{Y}$$

Vemos que la deformación $\Delta \ell$ es independiente del área A . Luego, concluimos que ambas barras, que solo se diferencian en el área, se estirarán igual cantidad.

El estiramiento de las barras, debido a los pesos aplicados, serán :

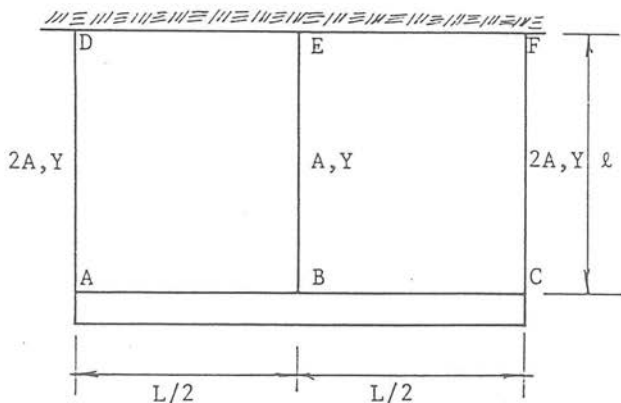
$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell'_{(I)} &= \frac{W \ell}{YA} \\ \Delta \ell'_{(II)} &= \frac{2W \ell}{Y 2A} = \frac{W \ell}{YA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \ell'_{(I)} = \Delta \ell'_{(II)}$$

Vemos que estos estiramientos también son iguales. Luego, el estiramiento total de las dos barras son iguales, con un valor:

$$\delta = \Delta \ell + \Delta \ell' = \frac{1}{2} \frac{\rho g \ell^2}{Y} + \frac{W \ell}{YA}$$

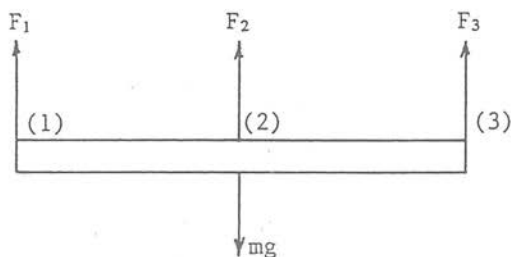
10. El sistema mostrado en la figura está constituido por la barra indeformable AC de masa m y por los cables DA, EB y FC de longitudes iniciales iguales. Encontrar cuanto se estiran los cables al colgarse la barra. Y, ¿cuál es la fuerza en cada cable?

(Fig. en la siguiente página)



Sean F_1 , F_2 y F_3 las fuerzas en cada uno de los cables. Como hay si metría, el estiramiento Δl es igual para los tres cables y las fuerzas: $F_1 = F_3$.

D.C.L.



Para los cables (1) y (3) se tiene que: $\Delta l = \frac{F_1 \ell}{2AY}$

y para el cable (2) es: $\Delta l = \frac{F_2 \ell}{AY}$

Como Δl es común, se tiene: $\frac{F_1 \ell}{2AY} = \frac{F_2 \ell}{AY}$

Luego: $F_1 = 2F_2$ y también: $F_3 = 2F_2$

Del D.C.L., aplicando la Ley de Newton, en equilibrio estático se tiene: $F_1 + F_2 + F_3 = mg$

reemplazando los valores de F_1 y F_3 , queda: $5F_2 = mg$

obteniéndose: $F_2 = \frac{mg}{5}$ y $F_1 = F_3 = \frac{2}{5} mg$

Utilizando la expresión: $\Delta l = \frac{F_2 l}{\Delta Y}$

el estiramiento de los cables es: $\Delta l = \frac{mg l}{5AY}$

- Comentario.

Como mencionamos en la exposición teórica, este es un ejemplo de un problema "estáticamente indeterminado". Como hemos visto en la solución, la condición de equilibrio vertical, al aplicar la Ley de Newton, solo nos da una ecuación, que es insuficiente para determinar las tres tensiones desconocidas de los cables.

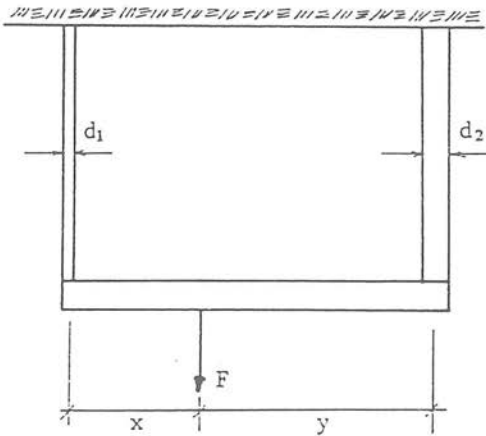
De acuerdo a la estática una sola fuerza bastará para mantener a la barra en equilibrio vertical, por lo tanto, en este problema se tiene una situación "hiperestática".

Los conocimientos que hemos adquirido sobre la teoría de la elasticidad, nos han permitido resolverlo. Considerando las deformaciones elásticas con la simetría geométrica, se pudieron obtener las dos ecuaciones que faltaban.

A continuación, en esta sección, encontrará otros ejemplos en los cuales también se presenta la situación hiperestática.

11. Una viga se cuelga por sus extremos de dos barras de igual longitud, módulo de Young y densidad, pero de diferentes diámetros (d_1 y d_2). La viga se carga con una fuerza F en la posición mostrada en la figura. La viga es suficientemente rígida para no deformarse por flexión. Considerando que el peso propio de la viga, en comparación a la fuerza F , es despreciable. Pero no así, los pesos propios de cada una de las barras. Encontrar la relación x/y para que la viga permanezca horizontal.

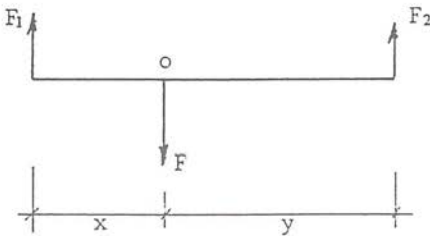
Fig. en la siguiente página.



Nota: Resolver primero el problema P. N^o 9.

. Equilibrio Rotacional:

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_1 x = F_2 y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{F_2}{F_1}$$



La deformación de cada barra consta de dos partes: la deformación debida a la carga que soporta en su extremo, más la deformación producida por su propio peso.

En el problema P.N^o 9, hemos visto que para barras que solo difieren en el área, la deformación que experimentan por su propio peso son siempre iguales. Por lo tanto, nos olvidaremos de ella, dado que la viga se mantendrá horizontal, cumpliendo con el requerimiento del problema. Luego, solo se necesitará que las deformaciones producidas por la carga sean iguales. Teniéndose:

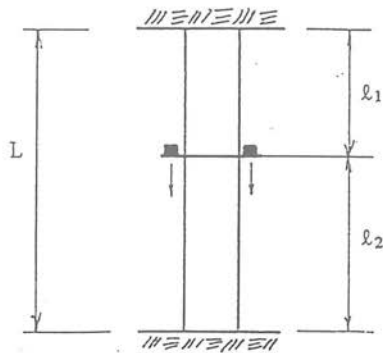
$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{F_1 \ell}{YA_1} \\ \Delta \ell_2 &= \frac{F_2 \ell}{YA_2} \end{aligned} \right\} \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Luego, con la relación obtenida por equilibrio, y en función de los diámetros, se obtiene:

$$\frac{x}{y} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

12. Un peso W se encuentra sujeto entre dos barras de peso propio comparativamente despreciables, ambas tienen las mismas características pero de diferente longitud. Los extremos de las barras están ligados al peso y a los apoyos, los cuales son indeformables, tal como se muestra en la figura.

Encontrar las reacciones que se producen en los apoyos.



D.C.L.



Por equilibrio estático, $\sum F_y = 0$,
se tiene:

$$R_1 + R_2 - W = 0$$

Por la disposición geométrica dada, tiene que cumplirse que las deformaciones de ambas barras sean iguales:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

y con la teoría de la elasticidad, podemos escribir:

$$\frac{R_1 \ell_1}{AY} = \frac{R_2 \ell_2}{AY}$$

$$R_1 \ell_1 = R_2 \ell_2$$

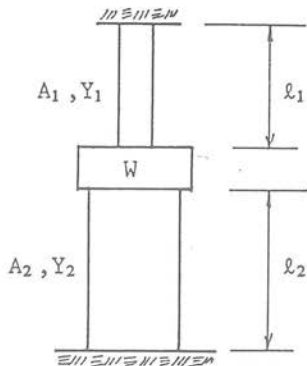
Luego, resolviendo las ecuaciones encontradas, se obtienen R_1 y R_2 :

$$R_1 = \frac{W\ell_2}{L} \quad \text{y,} \quad R_2 = \frac{W\ell_1}{L}$$

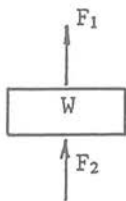
Nota: Leer comentario problema PNº 10.

13. Un peso W se encuentra sujeto mediante dos barras verticales, como se muestra en la figura.

Los extremos de las barras están firmemente ligados al peso y a los apoyos. Determinar la fuerza que actúa en cada barra.



D.C.L.



$$\text{Equilibrio Estático: } F_1 + F_2 = W$$

Relación geométrica de las deformaciones: $\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2$

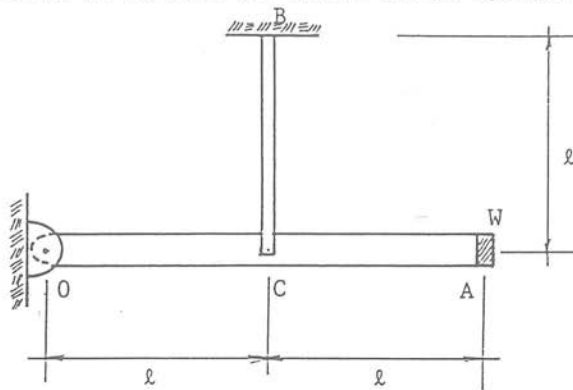
Luego, por elasticidad:

$$\frac{F_1 \ell_1}{A_1 Y_1} = \frac{F_2 \ell_2}{A_2 Y_2}$$

y, resolviendo ambas ecuaciones, se obtienen las fuerzas pedidas:

$$F_1 = \frac{W}{1 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \frac{A_2 Y_2}{A_1 Y_1}} \quad F_2 = \frac{W}{1 + \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}}$$

14. En el sistema mostrado en la figura, ¿cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual el tensor BC no estaba deformado?

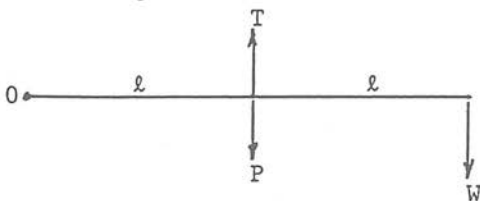


Características:

La Barra OA es indeformable y de peso propio P .

El Tensor BC es de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y .

Equilibrio Rotacional: $\sum M_o = 0$

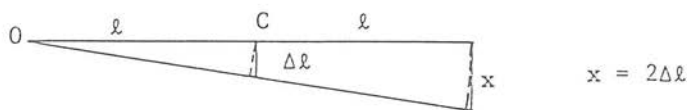


$$T\ell - P\ell - W2\ell = 0 \quad (\text{La reacción } R \text{ en } O \text{ no produce torque})$$

$$T - P - 2W = 0$$

$$T = P + 2W$$

Geométricamente, considerando que el giro que se produce es pequeño, podemos escribir:



Por elasticidad, el estiramiento Δl del tensor es:

$$\Delta l = \frac{Tl}{AY}$$

luego,

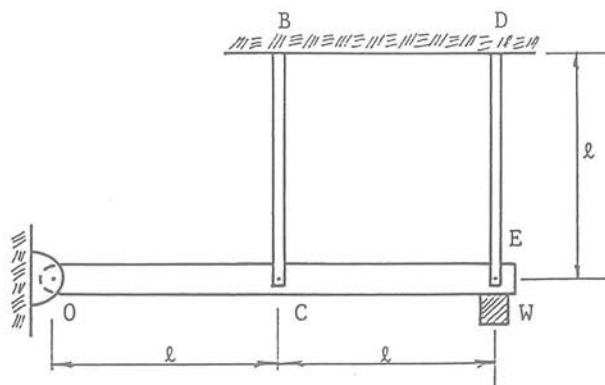
$$x = \frac{2Tl}{AY}$$

Finalmente, con el valor obtenido de T, se obtiene:

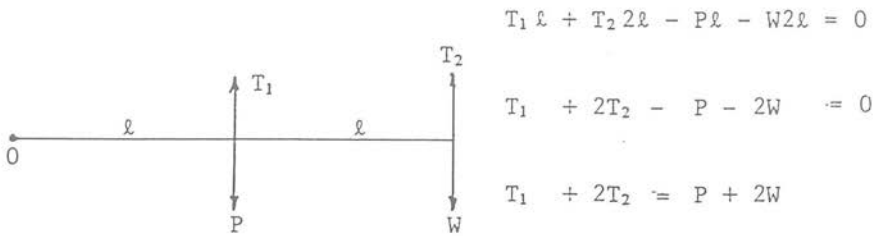
$$x = \frac{2(P + 2W)l}{AY}$$

15. En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y de peso P; los tensores BC y DE son de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y.

- Encontrar cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.
- Determinar la reacción en el pivote O.



Equilibrio Estático de rotación: $\sum M_o = 0,$



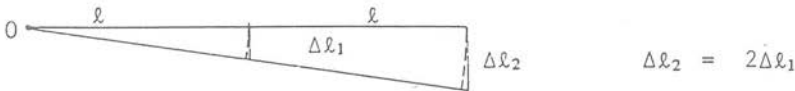
$$T_1 \ell + T_2 2\ell - P\ell - W2\ell = 0$$

$$T_1 + 2T_2 - P - 2W = 0$$

$$T_1 + 2T_2 = P + 2W$$

(La reacción R en O no produce torque o momento)

Relación geométrica de alargamientos:



Por elasticidad:

$$\Delta l_1 = \frac{T_1 \ell}{AY} \quad \text{y,} \quad \Delta l_2 = \frac{T_2 \ell}{AY}$$

Resolviendo estas expresiones, se tiene :

$$T_2 = 2T_1 = \frac{2}{5} (P + 2W)$$

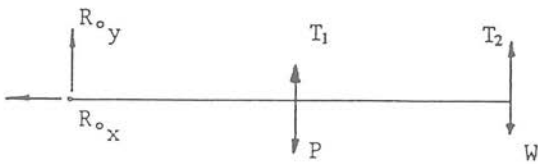
Luego, el descenso pedido δ será:

$$\delta = \Delta l_2 = \frac{2\ell}{5AY} (P + 2W)$$

Para determinar la reacción R_o , consideremos la posibilidad que tenga componentes en la dirección horizontal R_{o_x} y en la dirección vertical R_{o_y} , aplicando la condición de equilibrio estático en ambas direcciones, se tiene:

Figura en la sgte. página.

D.C.L.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{o_x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{o_y} + T_1 + T_2 - P - W = 0$$

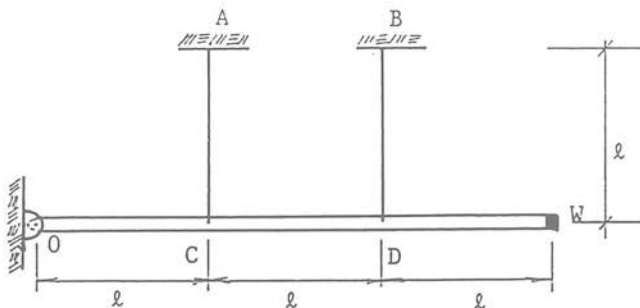
$$R_{o_y} = (P + W) - (T_1 + T_2)$$

Reemplazando en esta expresión los valores de T_1 y T_2 , arriba obtenidos, la reacción pedida $R_o = R_{o_y}$, puesto que $R_{o_x} = 0$, será:

$$R_o = (P + W) - \left(\frac{T_1}{2} + T_2 \right) = P + W - \frac{3}{2} T_2 = P + W - \frac{3}{5} (P + 2W) = \frac{2}{5} P - \frac{1}{5} W$$

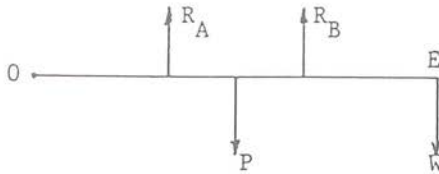
$$R_o = \frac{1}{5} (2P - W)$$

16. En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y de peso propio P , pudiendo girar libremente en el extremo O y en el otro extremo E cuelga un peso W . Los tensores AC y BD son iguales, de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y . Determinar las reacciones R_A , R_B y el descenso del peso W en el extremo E respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.



Condición de equilibrio: $\Sigma M_o = 0$

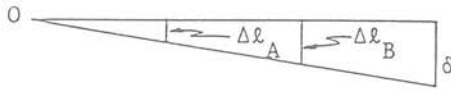
(La reacción R_o no produce torque)



$$l R_A + 2l R_B - \frac{3}{2} lP - 3lW = 0$$

$$R_A + 2R_B = \frac{3}{2} P + 3W = 3\left(\frac{P}{2} + W\right)$$

Tenemos una situación estática indeterminada.



Relación geométrica de alargamiento:

$$2 \Delta l_A = \Delta l_B \quad \text{y} \quad 3\Delta l_A = \delta$$

Por elasticidad en los tensores, se tiene:

$$\Delta l_A = \frac{R_A l}{AY} \quad \text{y,} \quad \Delta l_B = \frac{R_B l}{AY}$$

igualando, con la relación de deformaciones, queda:

$$2 \frac{R_A l}{AY} = \frac{R_B l}{AY} \quad \Rightarrow \quad 2R_A = R_B$$

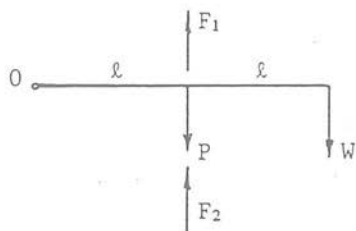
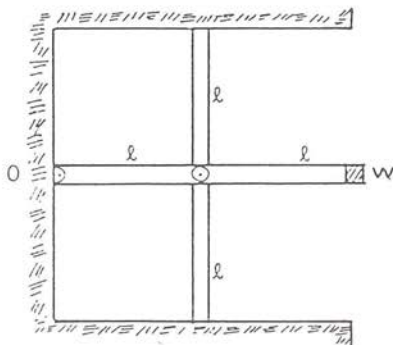
reemplazando en la ecuación de equilibrio y resolviendo:

$$R_A + 4R_A = 3\left(\frac{P}{2} + W\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A = \frac{3}{5} \left(\frac{P}{2} + W\right) \\ R_B = \frac{3}{5} (P + 2W) \end{cases}$$

El descenso δ , será:

$$\delta = 3\Delta l_A = \frac{3R_A l}{AY} = \frac{9}{5} \frac{l}{AY} \left(\frac{P}{2} + W\right)$$

17. En el sistema mostrado en la figura, determinar cuanto desciende el peso W , respecto a la posición en la cual las barras verticales no estaban deformadas.
- La barra horizontal es rígida e indeformable y de peso P . Las barras verticales son de peso despreciable, sección A y módulo de elasticidad Y .



Equilibrio rotacional:

$$F_1 l + F_2 l = P l + W 2l$$

(La reacción R en O no produce torque)

$$F_1 + F_2 = P + 2W$$

Como ambas barras se deforman por igual:

$$F_1 = F_2 = F$$

Se tiene:

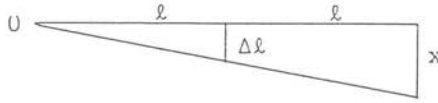
$$F = P/2 + W$$

Por elasticidad:

$$\Delta l = \frac{F l}{Y A} = \frac{(P/2 + W) l}{A Y}$$

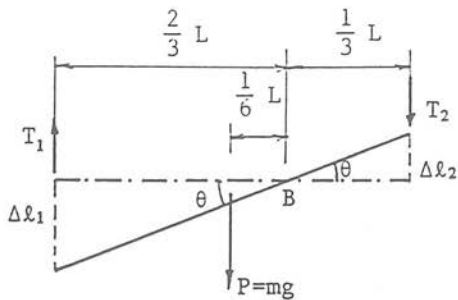
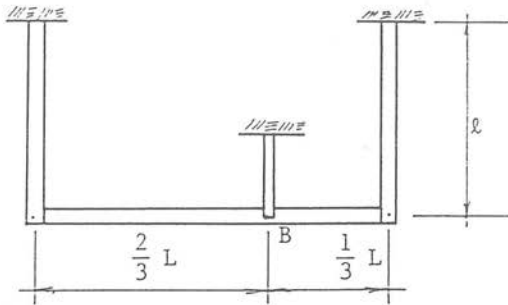
Luego:

$$x = 2\Delta\ell = \frac{(P + 2W)\ell}{AY}$$



18. Una barra de longitud L y masa m se encuentra suspendida por un pivote B indeformable y por dos tensores en sus extremos, como se muestra en la figura. Los tensores de peso despreciable, son iguales, de área A , longitud ℓ y módulo de elasticidad Y , cada uno.

Determinar el ángulo que gira la barra.



Equilibrio : $\Sigma M_B = 0$

(La reacción en el pivote B no produce torque)

$$T_1 \frac{2}{3} L + T_2 \frac{1}{3} L - P \frac{1}{6} L = 0$$

$$2T_1 + T_2 = \frac{P}{2}$$

Relación geométrica de las deformaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{2}{3} L\theta \\ \Delta \ell_2 &= \frac{1}{3} L\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = 2$$

Por elasticidad:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{T_1 \ell}{AY} \\ \Delta \ell_2 &= \frac{T_2 \ell}{AY} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_1 = 2T_2$$

Reemplazando en la ecuación de equilibrio:

$$T_2 = \frac{P}{10} = \frac{1}{10} \text{ mg}$$

Luego,

$$\Delta \ell_2 = \frac{1}{10} \frac{\text{mg}\ell}{AY}$$

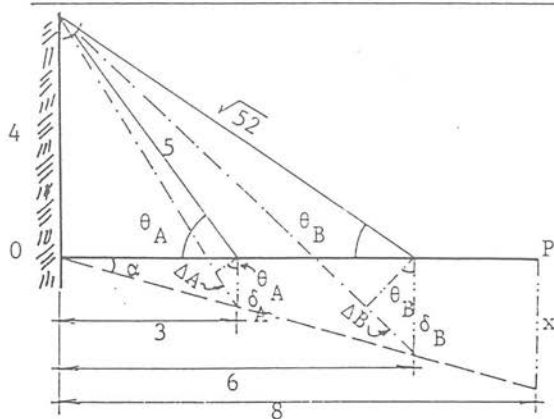
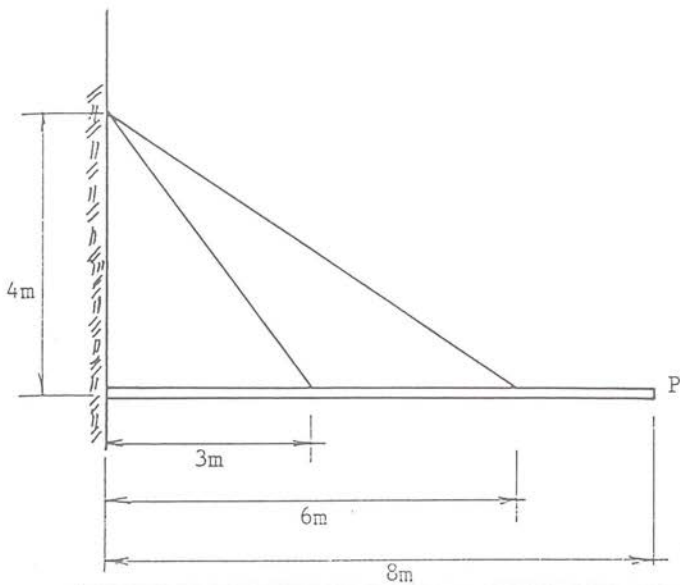
y, finalmente:

$$\theta = \frac{3}{10} \frac{\text{mg}\ell}{AYL}$$

19. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuanto asciende el extremo P de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 Ton. en ese extremo.

Los tirantes son de acero y de 2cm^2 de sección cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se puedan hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.

(Fig. en la sgte. página).



$$\text{sen } \theta_A = \frac{4}{5}$$

$$\text{sen } \theta_B = \frac{4}{\sqrt{52}}$$

Relaciones geométricas de las deformaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 8\alpha = x \\ 3\alpha = \delta_A \\ 6\alpha = \delta_B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \delta_A = \frac{3}{8} x \\ \delta_B = \frac{3}{4} x \end{cases}$$

$$\frac{\Delta A}{\delta_A} = \text{sen } \theta_A \quad \Rightarrow \quad \Delta A = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} x = \frac{3}{10} x$$

$$\frac{\Delta B}{\delta_B} = \text{sen } \theta_B \quad \Rightarrow \quad \Delta B = \frac{4}{\sqrt{52}} \cdot \frac{3}{4} x = \frac{3}{\sqrt{52}} x$$

Por elasticidad, las fuerzas en los tirantes para estas deformaciones, serán:

$$F_A = YA \frac{\Delta A}{L_A} = YA \frac{\frac{3}{10} x}{5} = YA \frac{3}{50} x$$

$$F_B = YA \frac{\Delta B}{L_B} = YA \frac{\frac{3}{\sqrt{52}} x}{\sqrt{52}} = YA \frac{3}{52} x$$

El equilibrio estático, $\Sigma M_o = 0$, proporciona una expresión, de la cual obtenemos el valor pedido x :

$$3F_A \text{ sen } \theta_A + 6F_B \text{ sen } \theta_B = 8F \quad (\text{La reacción R en O no produce torque}).$$

$$YA \left(\frac{3 \times 3 \times 4}{5 \times 50} \right) x + YA \left(\frac{6 \times 3 \times 4}{52 \sqrt{52}} \right) = 8 F$$

con :

$$\begin{cases} F = 1 \times 10^4 \text{ kg} \\ Y = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ A = 2 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

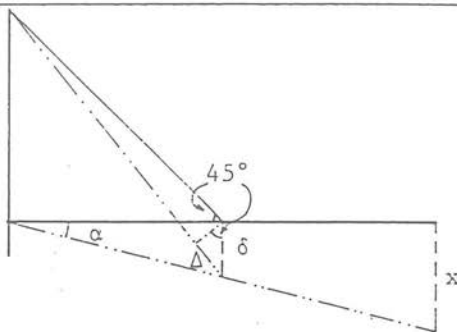
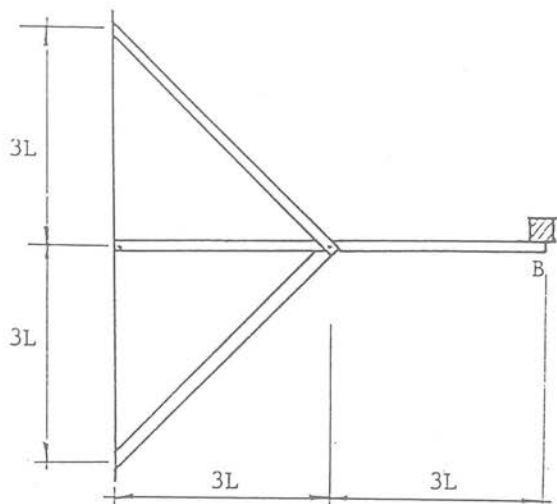
queda:

$$\frac{2 \times 2 \times 18}{8} x 10^2 \left(\frac{1}{125} + \frac{1}{13 \sqrt{52}} \right) x = 1$$

$$x = \frac{1}{16.8} = 0.0595 \text{ m} \implies x = 5.95 \text{ cm}$$

20. En el sistema mostrado en la figura. Calcular cuanto desciende el extremo B de la barra horizontal, rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa M en ese extremo.

Las barras inclinadas son iguales, de área A y módulo de elasticidad Y. Asuma pequeñas deformaciones, o sea, que se pueden hacer las aproximaciones geométricas usuales.



(Por claridad, solo se ha dibujado unas de las barras inclinadas.-
Para ambas es similar).

Relaciones geométricas de las deformaciones:

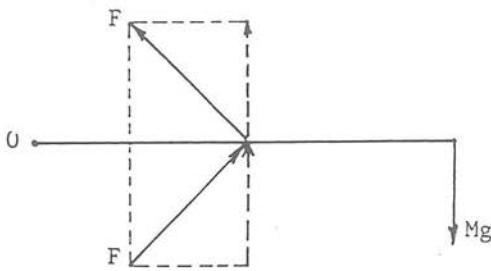
$$\left. \begin{array}{l} 6L\alpha = x \\ 3L\alpha = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \text{sen } 45^\circ \Rightarrow \Delta = \frac{x}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} x$$

Por elasticidad:

$$F = \frac{YA}{3L\sqrt{2}} \Delta = \frac{YA}{3L\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{4} x = \frac{YA}{12L} x$$

Equilibrio rotacional: $\sum M_o = 0$



$$Mg \cdot 6L = 2F \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3L$$

$$Mg = F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(La reacción R en O no produce torque).

Reemplazando el valor de F, despejamos el valor buscado, x:

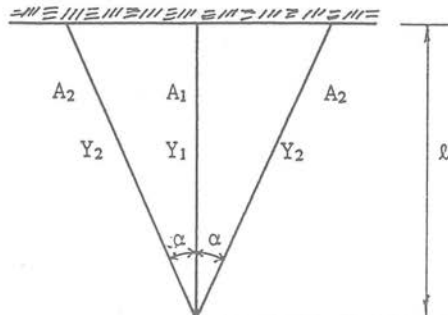
$$Mg = \frac{YA}{12L} \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

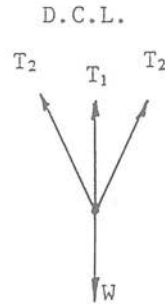
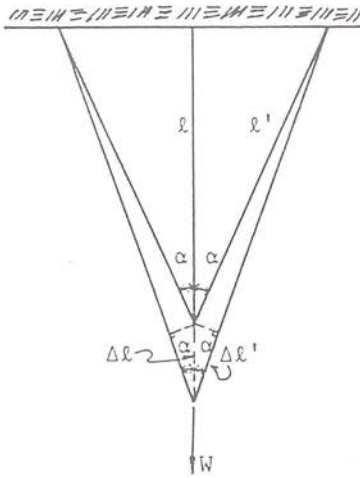
$$x = \frac{12\sqrt{2} MgL}{AY}$$

21. Se tiene tres cables como se muestra en la figura, en un estado sin deformaciones.

El cable vertical de longitud ℓ tiene área A_1 y módulos de elasticidad Y_1 . Los cables inclinados un ángulo α , son iguales y tienen un área A_2 y módulo de elasticidad Y_2 cada uno.

¿Cuánto bajará el punto de unión cuando de él se suspende un peso W? Asumir que las deformaciones son pequeñas, por tanto, se podrán hacer las aproximaciones apropiadas de uso frecuente.





$$T_1 + 2T_2 \cos \alpha = W$$

Considerando: $\left\{ \begin{array}{l} \Delta l \ll l \\ \Delta l' \ll l' \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \approx \alpha'$

Relaciones geométricas de las deformaciones unitarias:

$$\left. \begin{array}{l} l' = \frac{l}{\cos \alpha} \\ \Delta l' = \Delta l \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta l'}{l'} = \frac{\Delta l}{l} \cos^2 \alpha$$

Por elasticidad:

$$T_1 = A_1 Y_1 \frac{\Delta l}{l}$$

$$T_2 = A_2 Y_2 \frac{\Delta l'}{l'} = A_2 Y_2 \frac{\Delta l}{l} \cos^2 \alpha$$

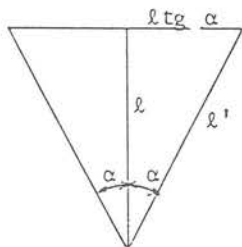
Reemplazando estos valores de T_1 y T_2 en la ecuación de equilibrio, se obtiene el descenso pedido:

$$\Delta l = \frac{Wl}{A_1 Y_1 \left(1 + 2 \frac{A_2 Y_2}{A_1 Y_1} \cos^3 \alpha \right)}$$

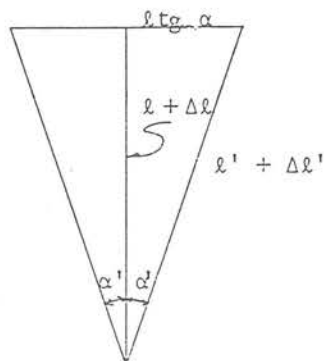
- Aclaraciones referentes a las aproximaciones.

Como ilustración, creemos conveniente, en este problema, justificar con mayor rigurosidad matemática las aproximaciones en las relaciones geométricas utilizadas.

Sistema no deformado



Sistema deformado



Para comenzar, observe que el cateto horizontal de los triángulos mostrados no varía con la deformación.

Luego, apliquemos Pitágoras a ambos triángulos.

En el triángulo deformado:

$$(l' + \Delta l')^2 = (l + \Delta l)^2 + (l \operatorname{tg} \alpha)^2$$

Considerando, dentro de los límites elásticos, que: $\Delta l \ll l$ y $\Delta l' \ll l'$, al elevar al cuadrado, podemos desprestigiar los términos cuadráticos en Δl y $\Delta l'$. Teniéndose:

$$l'^2 + 2l'\Delta l' \approx l^2 + 2l\Delta l + l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$l'^2 + 2l'\Delta l' \approx 2l\Delta l + l^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

En el triángulo no deformado:

$$l'^2 = l^2 + (l \operatorname{tg} \alpha)^2$$

$$l'^2 = l^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Reemplazando esta expresión en la anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}l'^2 + 2l'\Delta l' &= 2l\Delta l + l'^2 \\l'\Delta l' &= l\Delta l \\ \Delta l' &= \frac{l}{l'} \Delta l\end{aligned}$$

Como: $\cos \alpha = \frac{l}{l'}$ (Ver triángulo no deformado)

Luego, queda: $\Delta l' = \Delta l \cos \alpha$

Vemos pues, que la aproximación geométrica utilizada corresponde a una aproximación al despreciar términos cuadráticos de las deformaciones.

En la solución aproximada se planteó esta expresión considerando que $\alpha' \approx \alpha$. En realidad bastaría haber considerado que: $\cos \alpha' \approx \cos \alpha$, puesto que geoméricamente la relación de deformaciones es:

$$\cos \alpha' = \frac{\Delta l'}{\Delta l}$$

Luego, si $\cos' \alpha \approx \cos \alpha$, se tiene la relación utilizada:

$$\Delta l' \approx \Delta l \cos \alpha$$

Adicionalmente, la igualdad de cosenos también se utilizó al establecer el equilibrio estático. Por lo tanto, es conveniente, como ilustración, considerar la expresión exacta del $\cos \alpha'$ en el sistema deformado y proceder a su expansión reteniendo solo los términos de primer orden. Veamos:

. En el triángulo deformado se tiene:

$$\cos \alpha' = \frac{l + \Delta l}{l' + \Delta l'}$$

o bien:

$$\cos \alpha' = (l + \Delta l)(l' + \Delta l')^{-1} = \frac{l}{l'} \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) \left(1 + \frac{\Delta l'}{l'}\right)^{-1}$$

Como, $\Delta l' \ll l' \implies \frac{\Delta l'}{l'} \ll 1$, por lo tanto podemos expandir o desarrollar el binomio de Newton:

$$\cos \alpha' = \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \left(1 - \frac{\Delta \ell'}{\ell'} + \dots \right)$$

Limitando la expansión hasta el primer orden:

$$\cos \alpha' \approx \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \left(1 - \frac{\Delta \ell'}{\ell'} \right)$$

Efectuando y despreciando nuevamente los términos de 2° orden (como:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} \times \frac{\Delta \ell'}{\ell'}), \text{ queda:}$$

$$\cos \alpha' \approx \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\Delta \ell}{\ell} - \frac{\Delta \ell'}{\ell'} \right)$$

Considerando adicionalmente que el ángulo α no es excesivamente grande, se tendrá que las deformaciones unitarias: $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ y $\frac{\Delta \ell'}{\ell'}$, son aproximadamente del mismo orden de magnitud y como están restándose en esta expresión se anulan, quedando:

$$\cos \alpha' \approx \frac{\ell}{\ell'}$$

-Como en el triángulo no deformado se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{\ell}{\ell'}$$

finalmente obtenemos:

$$\cos \alpha' \approx \cos \alpha$$

Nuevamente vemos que esta aproximación también corresponde a una aproximación al despreciar términos cuadráticos.

Por lo tanto se justifica el haber considerado en el equilibrio estático, en lugar de la expresión exacta:

$$T_1 + 2T_2 \cos \alpha' = W$$

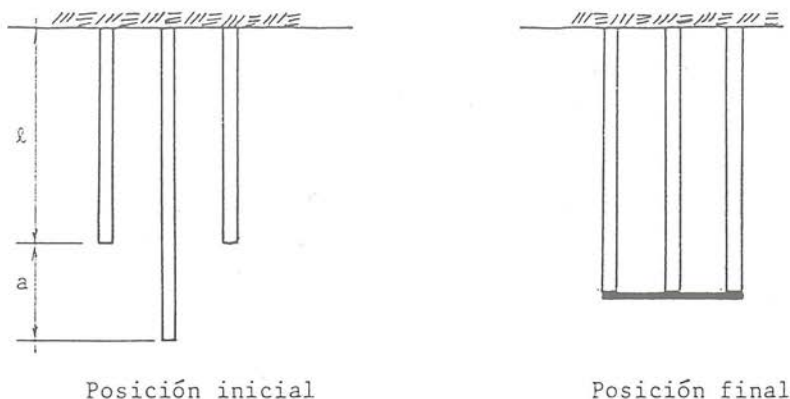
La expresión aproximada:

$$T_1 + 2T_2 \cos \alpha \approx W$$

Finalmente, observe que las expresiones elásticas aplicadas en este problema son exactas, no habiéndose considerado ninguna aproximación en ellas mismas. Solo se introducen en ellas las aproximaciones geométricas del problema en particular.

22. Tres barras de iguales características, pero una de ellas ligeramente más larga que las otras dos se fuerzan para que sus extremos libres permanezcan solidariamente juntos, tal como se muestra en la figura.

Calcular las fuerzas que actúan en las barras.



Llamando F a la fuerza de compresión que actuará sobre la barra central y T a la tensión sobre cada una de las otras dos barras, por equilibrio estático se tiene:

$$2T = F$$

Por elasticidad, podemos escribir:

. Para la barra central: $\Delta(\ell + a) = \frac{F(\ell + a)}{AY}$

considerando que: $a \ll \ell \implies \Delta(\ell + a) = \frac{F\ell}{AY}$

. Para las barras laterales: $\Delta(\ell) = \frac{T\ell}{AY}$

Teniéndose : $2T = F \implies \Delta(\ell) = \frac{F\ell}{2AY}$

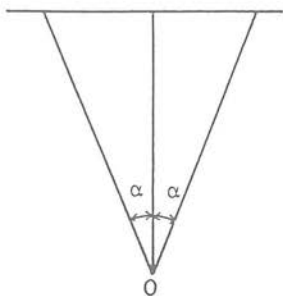
Como en la posición final los extremos libres permanecerán solidamente juntos podemos relacionar geoméricamente las deformaciones y escribir la siguiente relación entre sus módulos:

$$\Delta(\ell + a) + \Delta(\ell) = a$$

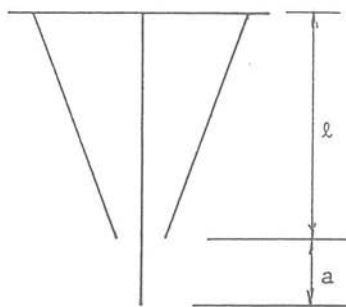
Reemplazando los valores encontrados anteriormente:

$$\frac{F\ell}{AY} + \frac{F\ell}{2AY} = a \implies F = \frac{2aAY}{3\ell}, \quad \text{y} : \quad T = \frac{aAY}{3\ell}$$

23. Calcular las fuerzas que actúan en las barras dispuestas como se muestra en la figura (a). Teniendo en cuenta que antes de unirse las tres barras en el punto "O", la longitud de la barra vertical era ligeramente mayor ($\ell + a$) como se muestra en la figura (b).

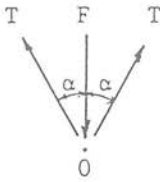


(a) Posición Final



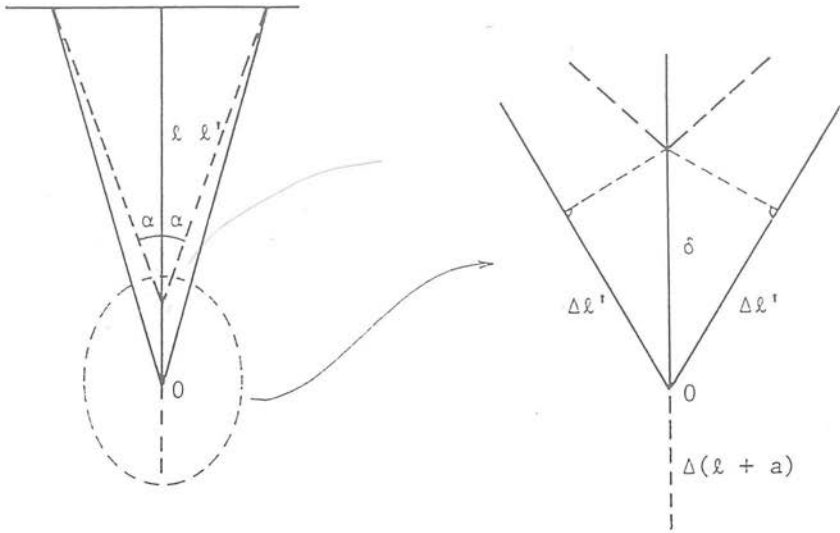
(b) Posición Inicial

Equilibrio estático, considerando que las dos barras inclinadas son iguales, se tiene:



$$2T \cos \alpha = F \quad \dots\dots\dots (I)$$

Relaciones geométricas de las deformaciones, considerando $a \ll l$:



$$l' = \frac{l}{\cos \alpha}$$

$$\delta = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}$$

$$\Delta(l + a) + \delta = a$$

$$\dots\dots\dots (II)$$

Por elasticidad, teniendo las tres barras igual área A y módulo de elasticidad Y, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\ell + a) &= \frac{F(\ell + a)}{AY} \\ \Delta\ell' &= \frac{T\ell'}{AY} \end{aligned} \right\} \dots\text{(III)}$$

Resolviendo simultáneamente a las expresiones I, II y III, se obtiene:

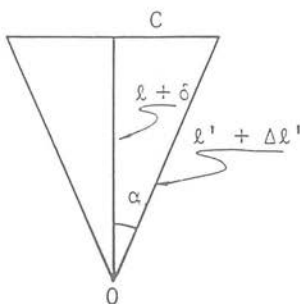
$$F = \frac{2aAY \cos^3 \alpha}{\ell + 2(\ell + a)\cos^3 \alpha}, \quad \text{y} : \quad T = \frac{aAY \cos^2 \alpha}{\ell + 2(\ell + a)\cos^3 \alpha}$$

O, finalmente, para $a \ll \ell$:

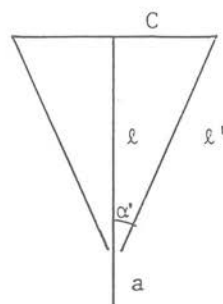
$$F = \frac{2aAY \cos^3 \alpha}{\ell(1 + 2\cos^3 \alpha)}, \quad \text{y} : \quad T = \frac{aAY \cos^2 \alpha}{\ell(1 + 2\cos^3 \alpha)}$$

- Aclaraciones referentes a las aproximaciones.

Nuevamente, como en el problema P.Nº 21, con el objeto de aclarar, justificaremos matemáticamente las aproximaciones geométricas utilizadas.



(a) Situación deformada



(b) Situación no deformada

Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos,

$$\cdot \text{ Fig (a)} \implies (\ell' + \Delta\ell')^2 = (\ell + \delta)^2 + c^2$$

$$\cdot \text{ Fig (b)} \implies \ell'^2 = \ell^2 + c^2$$

eliminando el término c^2 , queda:

$$(\ell' + \Delta\ell')^2 = (\ell + \delta)^2 + (\ell'^2 - \ell^2)$$

Teniendo en consideración que: \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\ell' \ll \ell' \\ \delta \ll \ell \end{array} \right.$

al elevar al cuadrado los binomios, podemos despreciar los términos cuadráticos en $\Delta\ell'$ y δ , teniéndose:

$$\ell'^2 + 2\ell'\Delta\ell' \approx \ell^2 + 2\ell\delta + \ell'^2 - \ell^2$$

Simplificando:

$$\ell'\Delta\ell' \approx \ell\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\ell'}{\delta} \approx \frac{\ell}{\ell'}$$

Expresión que es justamente la aproximación utilizada, como puede verse al compararla con las expresiones (II), esto es:

$$\cos \alpha = \frac{\ell}{\ell'} = \frac{\Delta\ell'}{\delta}$$

Por lo tanto, esta aproximación es equivalente a asumir que:

$$\cos \alpha \approx \cos \alpha' \quad \text{ó} \quad \alpha \approx \alpha'$$

Sin embargo, también como aclaración, insistamos sobre esta aproximación.

Consideremos la expresión de $\cos \alpha$, de la fig. (a), se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{\ell + \delta}{\ell' + \Delta\ell'} = \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\delta}{\ell}\right) \left(1 + \frac{\Delta\ell'}{\ell'}\right)^{-1}$$

teniéndolo en cuenta que:

$$\frac{\Delta\ell'}{\ell'} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\delta}{\ell} \ll 1$$

Expandiendo por el binomio de Newton y reteniendo solamente términos de primer orden:

$$\cos \alpha \approx \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\delta}{\ell} \right) \left(1 - \frac{\Delta \ell'}{\ell'} \right)$$

Efectuando y despreciando términos cuadráticos (en productos: $\frac{\delta}{\ell} \times \frac{\Delta \ell'}{\ell'}$), queda:

$$\cos \alpha \approx \frac{\ell}{\ell'} \left(1 + \frac{\delta}{\ell} - \frac{\Delta \ell'}{\ell'} \right)$$

Considerando que $\frac{\delta}{\ell}$ y $\frac{\Delta \ell'}{\ell'}$ son del mismo orden de magnitud, que se restan y son menores que uno, se tiene que:

$$\cos \alpha \approx \frac{\ell}{\ell'}$$

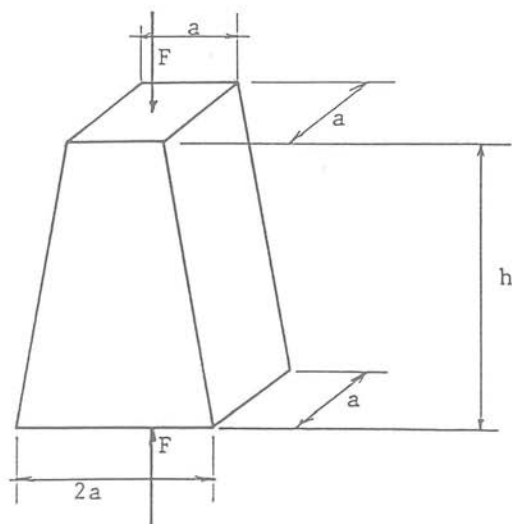
Por otro lado como, de la fig. (b):

$$\cos \alpha' = \frac{\ell}{\ell'}$$

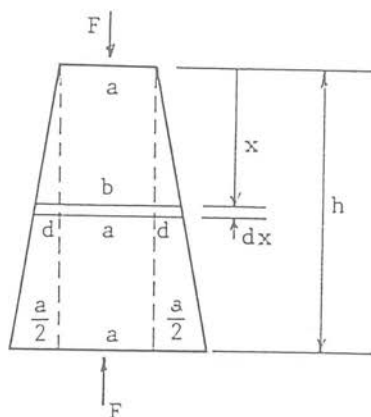
Luego, finalmente se obtiene:

$$\cos \alpha \approx \cos \alpha' \quad \text{ó} \quad \alpha \approx \alpha'$$

24. Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza F . Módulo de elasticidad Y . No considerar el peso propio del bloque.



Determinación del área a una distancia x:



Se tiene que:

$$\frac{x}{h} = \frac{d}{a} \Rightarrow d = \frac{ax}{2h} \quad \text{y, } b = a + 2d = a + \frac{ax}{h} = a\left(1 + \frac{x}{h}\right)$$

Luego, el área transversal de la base a una distancia x será:

$$A_{(x)} = ab = a^2\left(1 + \frac{x}{h}\right)$$

Variación de longitud del elemento dx:

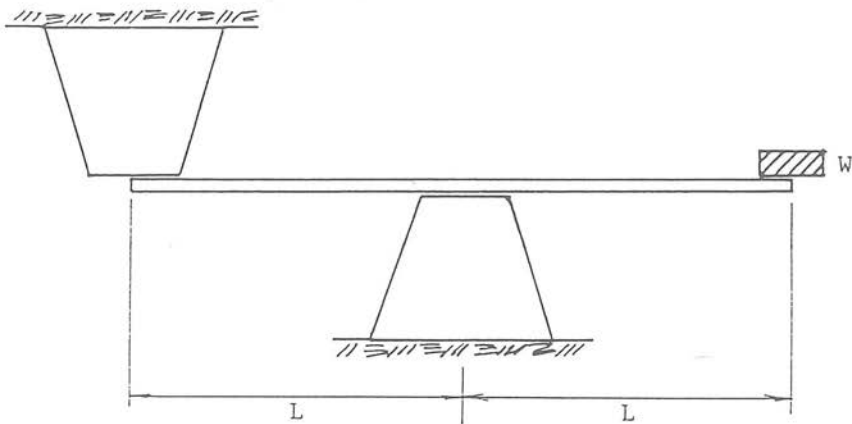
$$\Delta(dx) = \frac{Fdx}{YA_{(x)}} = \frac{Fdx}{Ya^2\left(1 + \frac{x}{h}\right)}$$

Luego, la deformación total será:

$$\Delta h = \int_0^h \frac{F dx}{Ya^2\left(1 + \frac{x}{h}\right)} = \frac{Fh}{Ya^2} \int_0^h \frac{dx}{h+x} = \frac{Fh}{Ya^2} \left[\text{Ln}(x+h) \right]_0^h$$

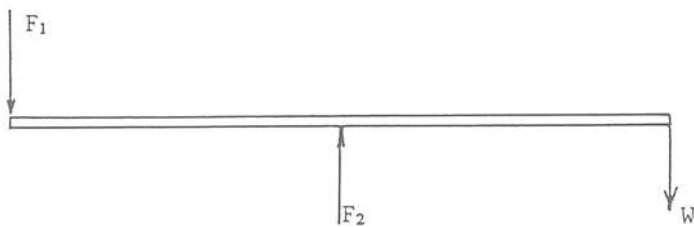
$$\Delta h = \frac{Fh}{Ya^2} \text{Ln}(2)$$

25. Si se utilizan dos bloques de apoyo como los del problema anterior P. N^o 24, dispuestos como se muestran en la figura, encontrar el desplazamiento del extremo libre de la barra, de peso despreciable, rígida e indeformable; al aplicársele un peso W en ese mismo extremo.



Nota: Resolver primero el problema anterior P.Nº 24

Por equilibrio estático:



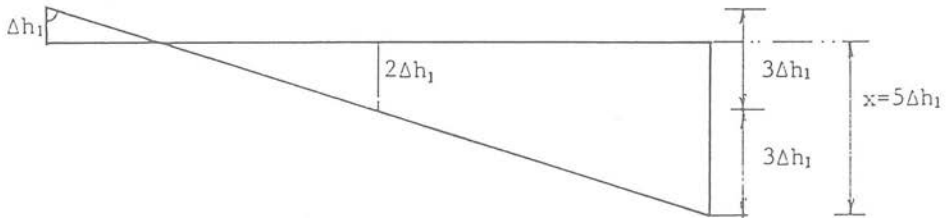
$$\left. \begin{aligned} \sum F = 0 &\Rightarrow F_1 + W = F_2 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow 2F_1 = F_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = W \\ F_2 = 2W \end{cases}$$

Por elasticidad, teniendo el resultado del problema anterior P.Nº24 y considerando que ambos bloques son iguales:

$$\Delta h_1 = \frac{Wh}{Ya^2} \ln(2)$$

$$\Delta h_2 = 2\Delta h_1$$

Relación geométrica de las deformaciones:



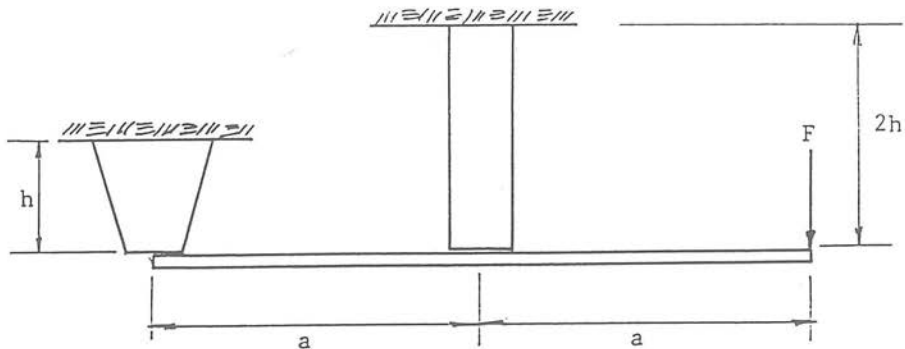
Luego:

$$x = \frac{5Wh}{Ya^2} \ln(2)$$

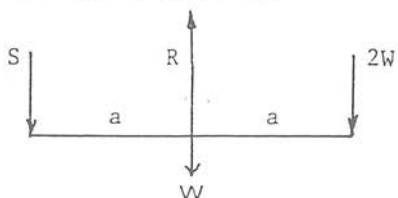
26. Una barra, rígida e indeformable, tiene un peso W y longitud $2a$. Está suspendida en su punto medio por un tirante de área $4A$, longitud $2h$ y módulo de elasticidad Y . En uno de sus extremos se encuentra un tope tronco cónico de bases $4A$ y A , altura h y módulo de elasticidad $2Y$. En el otro extremo se le aplica una fuerza igual al doble del peso de la barra.

Determinar cuanto desciende este extremo.

Ver figura:



Equilibrio estático:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma \bar{F} = 0 &\implies S + 3W = R \\ \Sigma M_o = 0 &\implies S = 2W \end{aligned} \right\} R = 5W$$

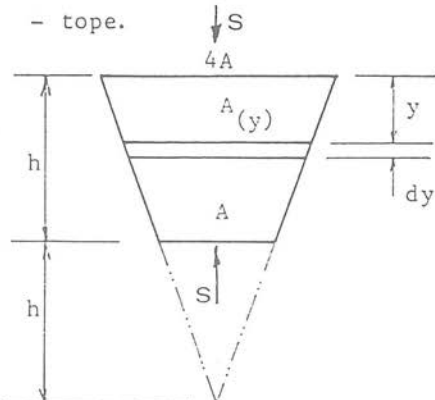
Elasticidad:

- tirante..



$$\Delta(2h) = \frac{5W \cdot 2h}{Y4A} = \frac{5Wh}{2YA}$$

- tope.



De la geometría del problema:

$$A(y) = A \frac{(2h - y)^2}{h^2}$$

Luego, para el elemento dy:

$$\Delta(dy) = \frac{2Wdy}{2YA(y)} = \frac{W dy h^2}{YA (2h - y)^2}$$

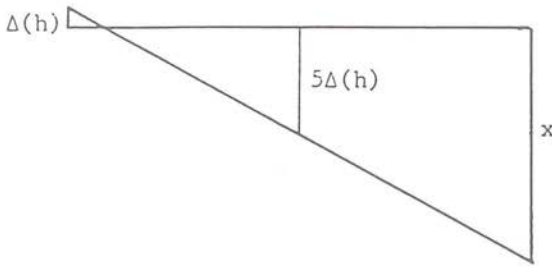
integrando:

$$\Delta(h) = \frac{Wh^2}{YA} \int_0^h \frac{dy}{(2h - y)^2} = \frac{Wh^2}{YA} \left[\frac{1}{2h - y} \right]_0^h = \frac{Wh}{2YA}$$

Comparando los valores obtenidos en estas deformaciones, se tiene:

$$\Delta(2h) = 5\Delta(h)$$

Luego, geométicamente:

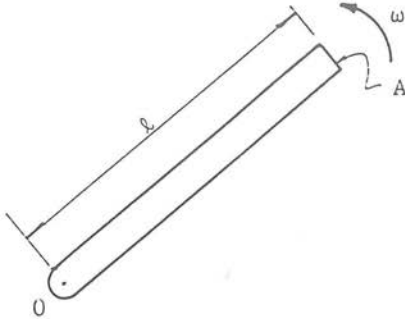


$$x = 2[\Delta(h) + 5\Delta(h)] - \Delta(h)$$

$$x = 11\Delta(h) = \frac{11}{2} \frac{WA}{YA}$$

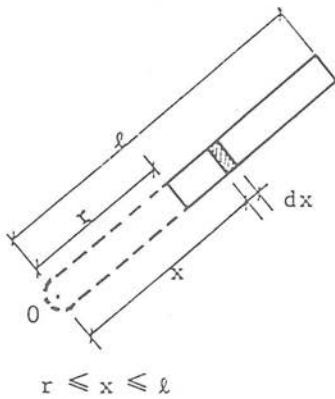
$$x = 10.5 \frac{WA}{YA}$$

27. Una barra de longitud ℓ , área A , peso Q y módulo de Young Y , gira con una velocidad angular ω constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivoteando libremente en uno de sus extremos alrededor de un eje perpendicular a la mesa. Determinar el alargamiento longitudinal producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?



El peso por unidad de longitud es: $\lambda = \frac{Q}{\ell}$

Debido a la aceleración radial, para el elemento diferencial considerado dx , se tiene una fuerza:



$$dF = (dm) \omega^2 x$$

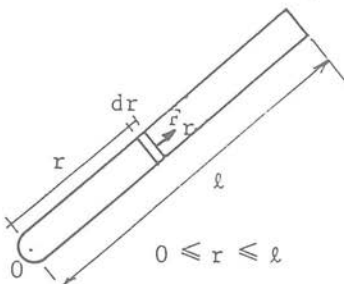
$$dF = \left(\frac{\lambda}{g} dx \right) \omega^2 x = \frac{\lambda \omega^2}{g} x dx$$

La fuerza total sobre una sección transversal a una distancia r del pivote O , será:

$$F_r = \int_r^l \frac{\lambda \omega^2}{g} x dx = \frac{\lambda \omega^2}{g} \int_r^l x dx$$

$$F_r = \frac{\lambda \omega^2}{2g} (\ell^2 - r^2) = \frac{Q \omega^2}{2\ell g} (\ell^2 - r^2)$$

El alargamiento de un elemento diferencial dr , sometido a esta fuerza F_r , será:



$$\Delta(dr) = \frac{F_r dr}{YA} = \frac{\lambda \omega^2}{2gYA} (\ell^2 - r^2) dr$$

Luego, para el alargamiento total de la barra, se obtendrá:

$$\Delta \ell = \int_0^l \frac{F_r dr}{YA} = \frac{\lambda \omega^2}{2gYA} \int_0^l (\ell^2 - r^2) dr = \frac{\lambda \omega^2}{2gYA} \left(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3} \right) = \frac{\lambda \omega^2}{2gYA} \frac{2\ell^3}{3}$$

$$\Delta \ell = \frac{\lambda \omega^2 \ell^3}{3gYA} = \frac{Q \omega^2 \ell^2}{3gYA}$$

La fuerza máxima se da para $r = 0$, esto es:

$$F_{\text{máx}} = \frac{\lambda \omega^2 \ell^2}{2g} = \frac{Q \omega^2 \ell}{2g}$$

Por consiguiente, el esfuerzo máximo pedido es:

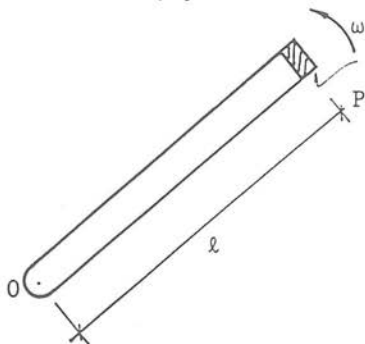
$$S_{\text{máx}} = \frac{F_{\text{máx}}}{A} = \frac{\lambda \omega^2 \ell^2}{2gA} = \frac{Q \omega^2 \ell}{2gA}$$

28. A la barra del problema anterior, P.Nº 27, considere que, adicionalmente, se le fija en el extremo libre un peso puntual P. Determinar la deformación longitudinal total que experimenta la barra en su movimiento de rotación.

La deformación inercial por su propia masa, de acuerdo al resultado obtenido en el problema anterior, es:

$$\Delta \ell' = \frac{Q \omega^2 \ell^2}{3g YA}$$

Para determinar la deformación inercial por la masa concentrada en su extremo libre, primero encontraremos la fuerza inercial:



$$F = ma = \frac{P}{g} \omega^2 \ell$$

y la deformación será:

$$\Delta \ell'' = \frac{(P/g \omega^2 \ell) \ell}{YA} = \frac{P \omega^2 \ell^2}{gYA}$$

Finalmente, la deformación total es:

$$\delta = \Delta \ell' + \Delta \ell'' = \frac{Q \omega^2 \ell^2}{3gYA} + \frac{P \omega^2 \ell^2}{gYA} = \frac{\omega^2 \ell^2}{gYA} \left(\frac{Q}{3} + P \right)$$

29. Con relación al problema P.N^o 27, determinar el valor máximo de la velocidad angular para un valor dado S_o del esfuerzo unitario de trabajo. Expresar su resultado, ω_m , en función del peso específico γ de la barra y en revoluciones por minuto (r.p.m.).
Encontrar también, en este caso, el alargamiento de la pieza.

Para una velocidad angular ω , en el problema anterior, hemos encontrado que la fuerza máxima, para $r = 0$, es:

$$F_m = \frac{Q\omega^2 \ell}{2g}$$

como: $Q = \gamma A \ell$, en función de γ , es:

$$F_m = \frac{\gamma A \ell^2}{2g} \omega^2$$

Ahora, este valor F_m se fija por el esfuerzo de trabajo dado S_o , quedando por determinar el valor correspondiente ω_m de la velocidad angular. Esto es:

$$A S_o = F_m = \frac{\gamma A \ell^2}{2g} \omega_m^2 \Rightarrow \omega_m^2 = \frac{2g S_o}{\gamma \ell^2} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2g S_o}{\gamma}}$$

y, expresado en r.p.m. :

$$\text{r.p.m.} = \omega_m \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi} \omega_m = \frac{30}{\pi \ell} \sqrt{\frac{2 S_o g}{\gamma}}$$

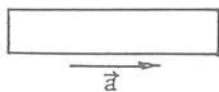
El alargamiento, encontrado también en el problema anterior, es:

$$\Delta \ell = \frac{Q\omega^2 \ell^2}{3gYA}$$

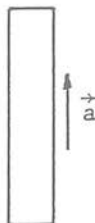
y, en función de γ y para el valor ω_m , se tiene:

$$\Delta \ell = \frac{\ell^3}{3gY} \omega_m^2 = \frac{2}{3} \frac{\ell}{Y} S_o$$

30. Determinar la deformación producida en una barra de longitud ℓ , área A , módulo de Young Y y densidad lineal de masa λ , cuando se le imprime longitudinalmente una aceleración \vec{a} constante. Analizar todas las situaciones posibles en cada uno de los dos casos: horizontal y vertical. (ver figuras). Indicar si se alarga o se acorta la barra acelerada.

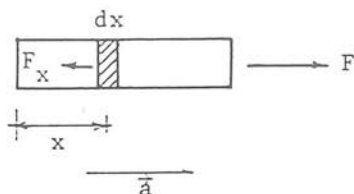


Horizontal



Vertical

- \vec{a} Horizontal:



$$F_x = \lambda x a$$

$$\Delta(dx) = \frac{a\lambda x dx}{YA}$$

$$\Delta\ell = \frac{a\lambda}{YA} \int_0^{\ell} x dx = \frac{1}{2} \frac{a\lambda\ell^2}{YA}$$

Si llamamos F a la fuerza externa aplicada sobre la barra, con $F = \lambda\ell a$ podemos escribir:

$$\Delta\ell = \frac{1}{2} \frac{F\ell}{YA}$$

La aceleración \vec{a} se puede comunicar con la fuerza F , jalando o empujando la barra. En cada caso se tiene:

Jalando



se alarga

Empujando



se acorta

- \vec{a} vertical:

La fuerza F necesaria para comunicarle una aceleración a vertical, de acuerdo a la 2ª ley de Newton, será:

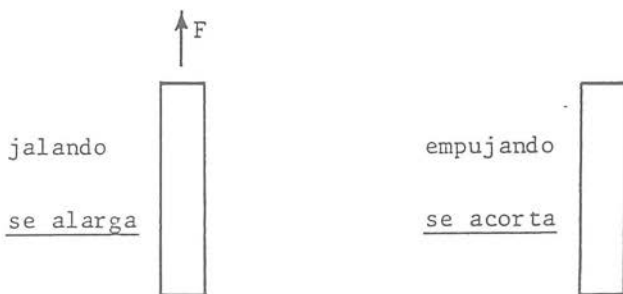
$$\begin{array}{c}
 \downarrow mg \\
 (+) \uparrow \bullet M \quad F - mg = ma \Rightarrow F = m(a + g) = \lambda \ell (a + g) \\
 \uparrow F
 \end{array}$$

Como acabamos de encontrar, la deformación producida en una barra acelerada en función de la fuerza F aplicada es: $\Delta \ell = \frac{1}{2} \frac{F \ell}{YA}$, donde F es el módulo de la fuerza, es decir $|F|$. Luego, como verticalmente la aceleración a puede ser hacia arriba (positiva) o hacia abajo (negativa), el módulo de la deformación será:

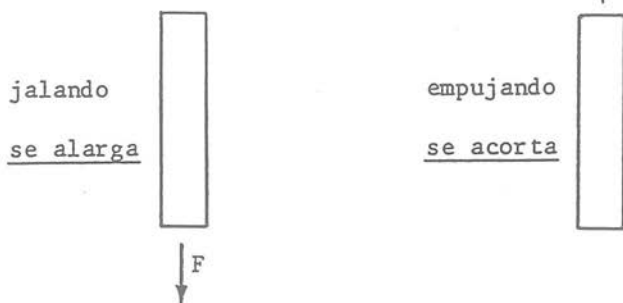
$$\Delta \ell = \frac{1}{2} \frac{|F| \ell}{YA} = \frac{1}{2} \frac{\lambda \ell^2 |(a + g)|}{YA}$$

La aceleración se puede conseguir jalando o empujando la barra. En cada caso, según el sentido, se tendrá:

Para $F > 0$, sentido positivo hacia arriba.



Para $F < 0$, sentido negativo hacia abajo.



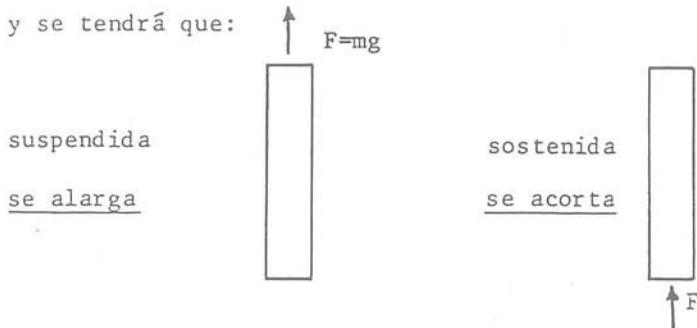
Es importante analizar los siguientes casos particulares:

- si $a = 0$, se tendrá que $F = mg = W$.

La barra se deformará por su propio peso, es decir:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{Wl}{YA} = \frac{1}{2} \frac{\lambda l^2 g}{YA}$$

y se tendrá que:



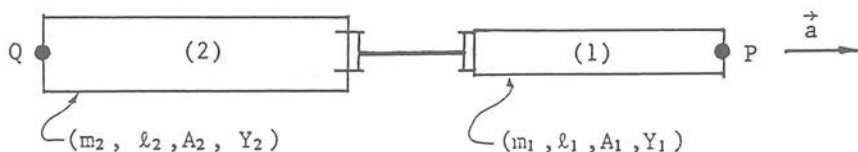
- Si $a = -g$, se tendrá que: $F = 0$ y la deformación será nula: $\Delta l = 0$.
La barra no se alarga ni se acorta, conservando su longitud l .

Podríamos decir que es equivalente a una barra en reposo en ausencia de campo gravitatorio.

31. Dos barra diferentes se unen mediante una pequeña barra ideal, indeformable y de masa despreciable, tal como se muestra en la figura. El sistema así formado, se jala del extremo P comunicándole una aceleración \vec{a} constante. Determinar la deformación total producida. (fig. en la pág. sgte.)

Si se empuja del extremo Q, ¿se acorta o se alarga?, ¿la deformación producida será la misma anterior?.

Considere también el caso cuando el sistema solamente se suelta verticalmente, descendiendo con la aceleración constante de la gravedad. ¿Cuál es la deformación en este caso?



Nota: Resolver primero el problema anterior. P.Nº 30

En el problema anterior hemos encontrado la deformación de una sola barra, cuando tiene una aceleración. Este es el caso de la barra (2):

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 a l_2}{A_2 Y_2}$$

La barra (1), además, arrastra concentrada en su otro extremo a la barra (2), luego su deformación será:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 a l_1}{A_1 Y_1} + \frac{m_2 a l_1}{A_1 Y_1} = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) \frac{a l_1}{A_1 Y_1}$$

Y, la deformación total del sistema, en este caso cuando se jala del extremo P, será un alargamiento:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{m_2 a l_2}{A_2 Y_2} + \frac{1}{2} \frac{m_1 a l_1}{A_1 Y_1} + \frac{m_2 a l_1}{A_1 Y_1}$$

Si se empuja del extremo Q, se producirá, ahora, un acortamiento. La deformación de la barra (1) será:

$$\Delta l'_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 a l_1}{A_1 Y_1}$$

La deformación de la barra (2) será:

$$\Delta \ell_2' = \frac{1}{2} \frac{m_2 a \ell_2}{A_2 Y_2} + \frac{m_1 a \ell_2}{Y_2 A_2} = \left(\frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) \frac{a \ell_2}{A_2 Y_2}$$

Y, el acortamiento total del sistema será:

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{m_1 a \ell_1}{A_1 Y_1} + \frac{1}{2} \frac{m_2 a \ell_2}{A_2 Y_2} + \frac{m_1 a \ell_2}{A_2 Y_2}$$

Observe que: $\delta' \neq \delta$. La longitud de acortamiento cuando se empuja es diferente a la de alargamiento cuando se jala. Las expresiones difieren en el último término.

Cuando el sistema se suelta verticalmente, la tierra atrae individualmente todas las partículas, comunicándoles por igual la aceleración g constante, además, tampoco ninguna barra arrastra o empuja a la otra. Luego, el sistema no se deformará, $\delta = 0$.

32. Una cierta fuerza se requiere para romper un alambre. ¿Qué fuerza se requiere para romper un alambre del mismo material el cual es:

- del doble de longitud
- el doble en diámetro y de la misma longitud?

Considere que la fractura se presenta justamente en el límite elástico.

Como la fractura se presenta en el límite elástico, se cumple la relación de Hooke, esto es:

$$\frac{F}{A} \text{ es proporcional a } \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Como ambas piezas son del mismo material, se tendrá:

- Cuando la longitud ℓ se duplica a 2ℓ , el estiramiento será el doble, pero la fuerza será la misma F .
- Cuando el diámetro se duplica a $2d$; el área A es igual a $4A$. Para conservar la proporcionalidad la fuerza F tiene que ser igual a $4F$.

33. ¿Cuál es más elástico?

- a) Caucho o Acero
- b) Aire o Agua

Entendiéndose por más elástico el material que con un menor esfuerzo presenta una mayor deformación, se tiene:

a) El caucho es más elástico que el acero.

Ver los diagramas de tensión mostrados en la Fig. 9.3 a) y c).

b) El aire es más compresible que el agua.

34. ¿Cuál es el objeto del refuerzo de acero en un elemento de concreto?
¿El concreto necesita mayor refuerzo bajo compresión o bajo tensión?

El concreto se logra por la unión de piedras, arena y cemento.

El concreto solo puede resistir bien los esfuerzos de compresión.

El objeto del refuerzo de acero es hacerlo resistente a los esfuerzos de tracción. Por ello, cuando una pieza de concreto va a ser sometida a tracción es indispensable el refuerzo de acero. Cuando se le somete a compresión, el refuerzo de acero se coloca para mejorar su comportamiento a la compresión.

Cuando el concreto lleva refuerzo de acero se le denomina Concreto Armado.

35. Determinar el diámetro que debe tener un tirante de acero de 2m de longitud, para que soporte 2,700 kg.

Además, encontrar su alargamiento. Trabajar con los siguientes valores:

Carga de trabajo del acero = $1,400 \text{ kg/cm}^2$

Módulo de Young del acero = $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Como se conoce la fuerza que actuará sobre el tirante y la carga máxima de trabajo que se nos permite hacerlo trabajar, inmediatamente

te se puede encontrar el área mínima que necesita tener el tirante en tales condiciones. Esto es:

$$\text{Como: } S_T = \frac{F}{A} \implies A = \frac{2,700}{1,400} = 1.93 \text{ cm}^2$$

$$\text{Como: } A = \frac{\pi d^2}{4} \implies d = 1.57 \text{ cm}$$

Pero, como comercialmente las barras de acero se fabrican todavía con diámetros en fracciones de pulgadas, el que más se aproxima por exceson es:

$$D = \frac{5''}{8} = 1.59 \text{ cm.}$$

Luego, el alargamiento deberá determinarse con el área correspondiente a este diámetro y no al calculado. Teniéndose:

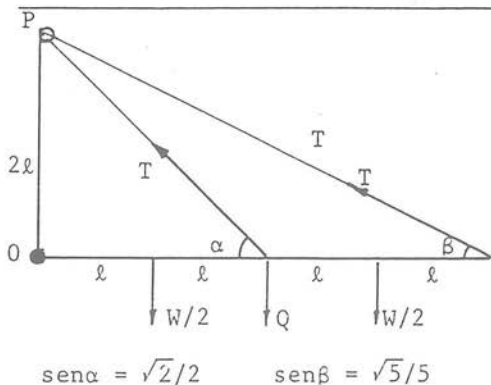
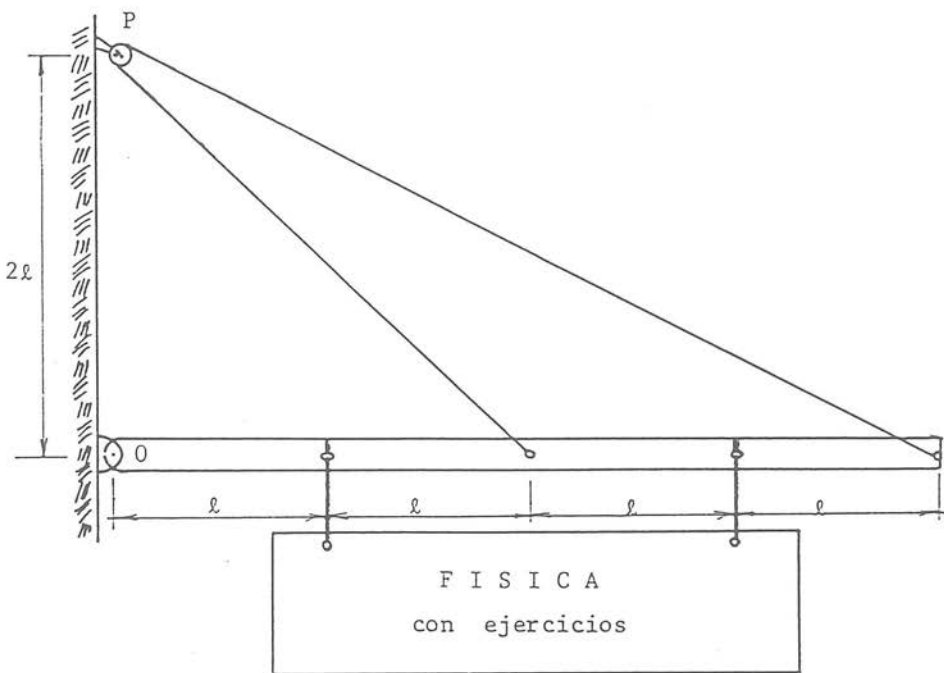
$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 1.98 \text{ cm}^2$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{AY} = \frac{2,700 \times 200}{1.98 \times 2 \times 10^6} = 0.137 \text{ cm}$$

36. Un cartel que pesa 200 kg cuelga del sistema mostrado en la figura. La barra horizontal es rígida e indeformable, de peso 40 kg y puede girar libremente en el extremo O. Determinar el diámetro del alambre, el cual pasa por una polea P que gira libremente, para una carga máxima de trabajo de $1,400 \text{ kg/cm}^2$. Los diámetros disponibles del alambre a usar, en centímetros, son: 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9.

Teniendo en cuenta que el giro máximo permitido a la barra en el punto O es de $0^\circ 2' 0''$ (2 minutos), comprobar el diámetro determinado anteriormente, o rediseñar, si fuera necesario. El módulo elástico de los alambres es de $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Fig. en la sgte. página.



Equilibrio, $\Sigma \tau_o = 0$

$$2\ell Q + \frac{W}{2} \ell + \frac{W}{2} 3\ell - 2\ell T \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\ell T \frac{\sqrt{5}}{5} = 0$$

$$2 \times 40 + 2 \times 200 = T(\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{5})$$

$$T = \frac{480}{3.2} = 150 \text{ kg}$$

Observe que se tiene un solo alambre a través de la polea. Por lo tanto, la tensión es la misma a lo largo del cable, en ambas ramas.

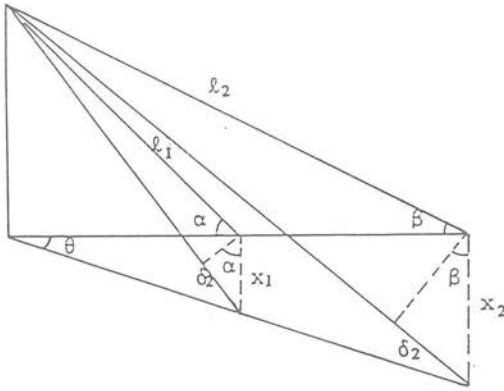
Conociendo T y S_o , el diámetro necesario será:

$$A = \frac{T}{S_o} = \frac{150}{1400} = 0.107 \text{ cm}^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4A}{\pi} = 0.136 \Rightarrow d = 0.369 \text{ cm}.$$

Luego, colocaremos un alambre disponible con un diámetro por exceso, superior al encontrado, esto es:

$$d = 0.5 \text{ cm}$$

Calculemos, ahora, el diámetro necesario, consistente con la deformación máxima permitida.



$$l_1 = 2\sqrt{2} \ell$$

$$l_2 = 2\sqrt{5} \ell$$

$$\delta_1 = x_1 \text{ sen } \alpha$$

$$\delta_2 = x_2 \text{ sen } \beta$$

$$x_1 = 2\ell\theta$$

$$x_2 = 4\ell\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = 2\ell\theta \text{ sen } \alpha = \ell\theta\sqrt{2} \\ \delta_2 = 4\ell\theta \text{ sen } \beta = \frac{4}{5} \ell\theta\sqrt{5} \end{array} \right\}$$

$$\theta = 2 \frac{\pi}{180 \times 60} = \frac{\pi}{5400} \text{ rad.}$$

La deformación total del alambre es:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \ell\theta \left(\sqrt{2} + \frac{4}{5} \sqrt{5} \right) = 3.2\ell\theta$$

$$\delta = 3.2 \frac{\pi}{5400} \ell = 1.862 \times 10^{-3} \ell$$

La longitud total inicial del alambre es:

$$L = l_1 + l_2 = 2\sqrt{2} \ell + 2\sqrt{5} \ell = 7.3\ell$$

Luego, el diámetro necesario será:

$$A = \frac{TL}{\delta Y} = \frac{150 \times 7.3\ell}{1.862 \times 10^{-3} \ell \times 2 \times 10^6} = 0.294$$

$$d^2 = \frac{4A}{\pi} = 0.374 \Rightarrow d = 0.612 \text{ cm}$$

Considerando los diámetros disponibles, por exceso, se tomará:

$$d = 0.7 \text{ cm}$$

Finalmente, comparando los dos valores obtenidos por tensión y por deformación, debemos poner el mayor. Esto es: $d = 0.7 \text{ cm}$.

37. ¿Qué incremento de presión se requiere para disminuir el volumen de $V \text{ m}^3$ de agua en un 0.005% ?

- Por elasticidad volumétrica tenemos:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

El módulo de compresibilidad del agua es: $B = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

La reducción de volumen es: $\Delta V = - 0.00005 V$

$$\text{Luego: } \Delta p = - 2 \times 10^9 \left(- \frac{0.00005 V}{V} \right) = 1 \times 10^5 \text{ N/ m}^2$$

38. Un metro cúbico de agua se somete a una presión de 4 kg/cm^2 . Si el módulo de compresibilidad del agua es $0.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, ¿cuál es su volumen?
-

Como se tiene una compresión, el cambio de volumen ΔV es negativo, luego:

$$\Delta p = -B \left(- \frac{\Delta V}{V} \right)$$

despejando $\Delta V/V$ y reemplazando valores, teniendo en cuenta la nota de la tab. AI.: , se tiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta P}{B} = \frac{4 \text{ kg/cm}^2}{0.2 \times 10^{10} \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2} = 2 \times 10^{-4}$$

escribiendo:

$$\frac{V - \Delta V}{V} = 1 - \frac{\Delta V}{V} = 1 - 2 \times 10^{-4}$$

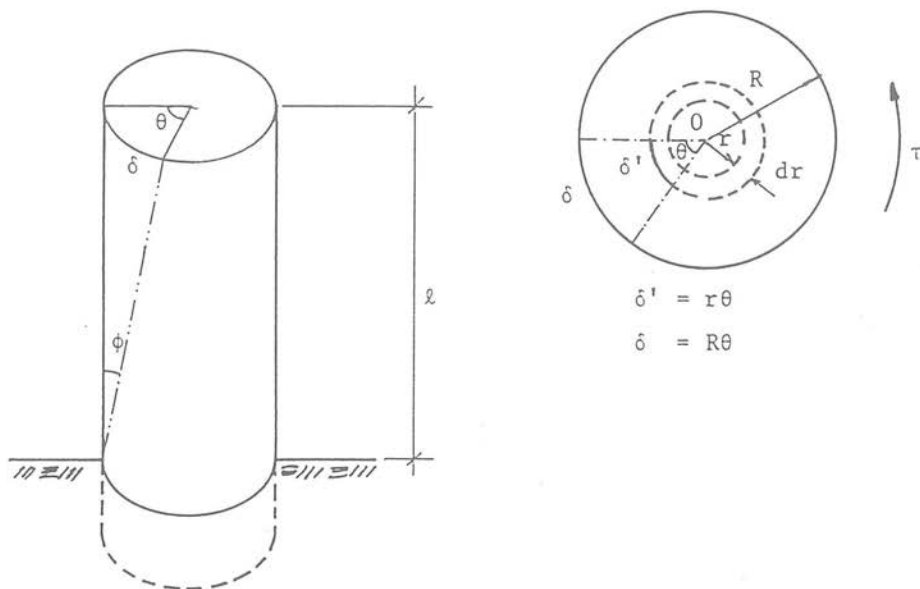
el volumen comprimido será:

$$V - \Delta V = V(1 - 2 \times 10^{-4})$$

y el volumen pedido, para lm^3 , será:

$$V - \Delta V = 1 \times (1 - 2 \times 10^{-4}) = 0.9998 \text{ m}^3$$

39. Al someter a torsión una barra circular, de radio R y longitud ℓ , encontrar el módulo elástico de esfuerzo cortante del material, en función del torque aplicado, del ángulo de torsión producido y de las características geométricas de la barra.



Manteniendo el extremo inferior fijo, aplicamos un torque τ que gira el extremo superior un ángulo θ , denominado ángulo de torsión. Este ángulo es relativamente pequeño dentro de los límites de la zona elástica.

Consideremos una capa diferencial cilíndrica concéntrica con el eje, de radio r y espesor dr , como se muestra en la figura.

La deflexión producida es directamente proporcional al radio:

$$\delta' = r\theta \implies \phi' = \frac{\delta'}{\ell} = r \frac{\theta}{\ell}$$

La variación lineal definida por esta expresión, especifica que la deflexión varía desde cero en el centro O , hasta el valor máximo al borde exterior:

$$\delta = R\theta \implies \phi = \frac{\delta}{\ell} = R \frac{\theta}{\ell}$$

Luego, podemos escribir:

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{R}{r} \implies \frac{\phi}{\phi'} = \frac{R}{r} \implies \phi' = \frac{r}{R} \phi$$

El esfuerzo cortante no es constante en la sección transversal.

Considerando el resultado experimental, expresado por la proporcionalidad elástica, podemos escribir:

$$S' = C \phi' \implies S' = Cr \frac{\theta}{\ell}$$

Esto es, el esfuerzo cortante es directamente proporcional al radio, variando linealmente desde cero en el centro O , hasta el valor máximo al borde exterior:

$$S = C \phi \implies S = CR \frac{\theta}{\ell}$$

Luego, podemos escribir:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\phi}{\phi'} \implies \frac{S}{S'} = \frac{R}{r} \implies S' = \frac{r}{R} S$$

Al tener el elemento un espesor diferencial, tomamos S' constante en el espesor dr . Como el esfuerzo cortante es la fuerza tangencial por unidad de área, multiplicando S' por el área de la sección transversal del elemento $dA = 2\pi r dr$, nos dará la fuerza tangencial $dF = S' 2\pi r dr$ y el torque será: $d\tau = r dF = S' 2\pi r^2 dr$.

Integrando de cero a R , obtendremos el torque total resistente. Y, por la condición de equilibrio lo igualamos al torque aplicado τ , teniéndose:

$$\tau = \int_0^R S' 2\pi r^2 dr$$

con : $S' = \frac{r}{R} S$

$$\tau = \int_0^R S \frac{r}{R} 2\pi r^2 dr = \frac{2\pi S}{R} \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi S}{R} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi R^3 S$$

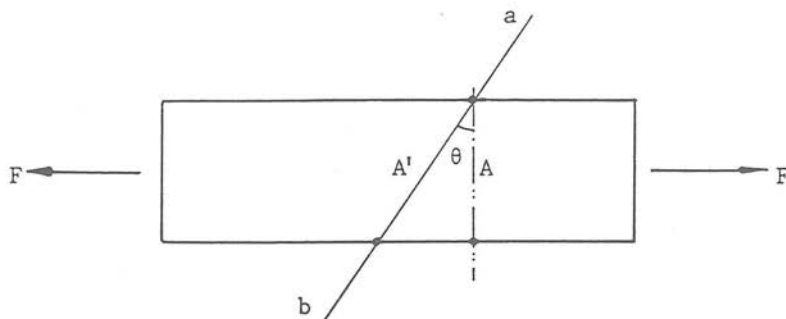
De aquí, se obtiene el esfuerzo en función del torque aplicado:

$$S = \frac{2\tau}{\pi R^3}$$

Luego, finalmente, el módulo en corte es:

$$C = \frac{S}{\phi} = \frac{\frac{2\tau}{\pi R^3}}{R \frac{\theta}{\ell}} = \frac{2\tau \ell}{\pi R^4 \theta}$$

40. Una barra prismática de sección transversal recta A está sometida a tensión axial mediante fuerzas F aplicadas en sus extremos. Considerando una sección oblicua al eje de la barra y que forma un ángulo θ con la sección normal al mismo, determinar los esfuerzos normal y tangencial o cortante en el plano oblicuo considerado. En cuales secciones, esto es, para que valores del ángulo θ , se presentan los máximos esfuerzos normal y cortante, y, ¿cuánto valen?



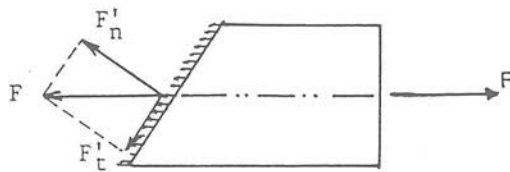
El esfuerzo de tracción S en la sección recta A de la barra es:

$$S = \frac{F}{A}$$

El área A' de la sección oblicua ab , con ángulo θ , es:

$$A' = \frac{A}{\cos \theta}$$

La resultante de las fuerzas distribuidas en el área A' , por equilibrio, es igual a la fuerza aplicada F . Esta fuerza la podemos descomponer en dos como se muestra en la figura, teniéndose, las componentes F'_n normal y F'_t tangencial a la sección A' .



Con valores:

$$F'_n = F \cos \theta \quad \text{y} \quad F'_t = F \sin \theta$$

Luego, los esfuerzos pedidos serán:

. El esfuerzo normal S'_n , a la sección oblicua de área A' , es:

$$S'_n = \frac{F'_n}{A'} = \frac{F \cos \theta}{A/\cos \theta} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta = S \cos^2 \theta$$

. El esfuerzo cortante S'_t , tangente a la sección oblicua de área A' , es:

$$S'_t = \frac{F'_t}{A'} = \frac{F \sin \theta}{A/\cos \theta} = \frac{F}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} S \sin 2\theta$$

y, con máximos:

. El máximo esfuerzo normal se presenta justamente en la sección recta, para $\theta = 0$, con valor : $S'_{n\text{máx}} = S$

. El máximo esfuerzo cortante se presenta para secciones oblicuas de ángulo $\theta = 45^\circ$, con valor: $S'_{t\text{máx}} = \frac{1}{2} S$.

41. Para una barra dada se encuentra experimentalmente los módulos:

$$Y = 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \text{y} \quad C = 4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Determinar los módulos B y σ .

Sabemos que: $C = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}$

Luego:

$$\sigma = \frac{Y}{2C} - 1 = \frac{10^{11}}{2 \times 4 \times 10^{10}} - 1 = 0.25$$

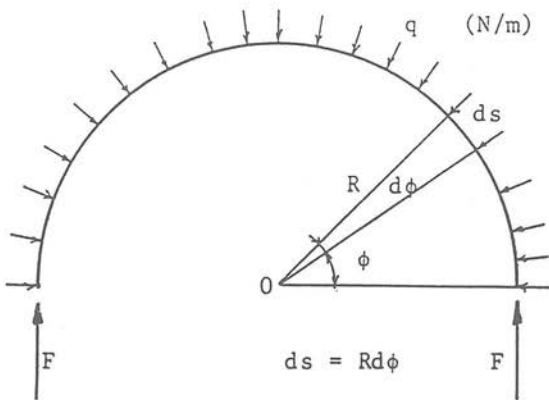
También sabemos que:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}$$

Luego:

$$B = \frac{10^{11}}{2(1 - 0.25)} = 6.67 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

42. Un anillo de radio R, sección transversal A y módulo de Young Y, se somete a compresión con una fuerza radial uniformemente repartida de q N/m. Determinar la deformación radial ΔR que experimenta el anillo.



Primero encontremos la fuerza F longitudinal en la circunferencia del anillo. Para ello, consideremos la mitad del anillo y por equilibrio en la dirección vertical, se obtiene:

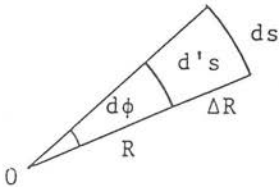
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2F = 2 \int_0^{\pi/2} qR d\phi \text{sen}\phi$$

$$F = qR \int_0^{\pi/2} \text{sen}\phi \, d\phi = qR$$

y la deformación de un elemento longitudinal dS , será:

$$\Delta(ds) = \frac{Fds}{YA} = \frac{qR Rd\phi}{YA} = \frac{qR^2 d\phi}{YA}$$

Para determinar la deformación radial, determinemos la relación geométrica que tiene con la deformación del elemento :



$$\left. \begin{aligned} ds &= R d\phi \\ d's &= (R - \Delta R) d\phi \end{aligned} \right\} ds - d's = \Delta R \cdot d\phi$$

Pero, como: $ds - d's = \Delta(ds)$

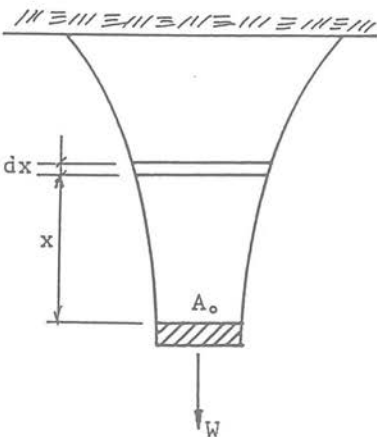
$$\text{Queda: } \Delta(ds) = \Delta R d\phi$$

Luego, finalmente, se obtiene:

$$\Delta R = \frac{\Delta(ds)}{d\phi} = \frac{q R^2 d\phi / YA}{d\phi} = \frac{qR^2}{YA}$$

43. Se desea colgar del techo un peso W , mediante una pieza de sección variable A_x , de modo tal, que el esfuerzo de tracción S_o sea siempre igual en todas las secciones transversales de la pieza.

El peso específico del material es γ .



Primero calculemos el área A_o , necesaria en el extremo para que so porte el peso W con el valor dado S_o , por equilibrio se tiene:

$$S_o A_o = W \implies A_o = \frac{W}{S_o}$$

Para calcular la variación del área, tomemos un elemento diferencial a una distancia x del extremo.

Al aumentar x en dx , el área A aumenta en dA y la fuerza aumenta en $S_0 dA$. Esta fuerza debe ser igual al peso del elemento dx , teniendo se:

$$dP = S_0 dA = \gamma A dx \implies \frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{S_0} dx$$

integrando entre los límites: $\begin{cases} x \implies 0 \text{ a } x \\ A \implies A_0 \text{ a } A_x \end{cases}$

$$\int_{A_0}^{A_x} \frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{S_0} \int_0^x dx$$

$$\ln A \Big|_{A_0}^{A_x} = \frac{\gamma}{S_0} x \Big|_0^x$$

$$\ln \frac{A_x}{A_0} = \frac{\gamma}{S_0} x$$

$$A_x = A_0 e^{(\gamma/S_0)x}$$

con el valor encontrado para A_0 , finalmente, se tiene:

$$A_x = \frac{W}{S_0} e^{(\gamma/S_0)x}$$

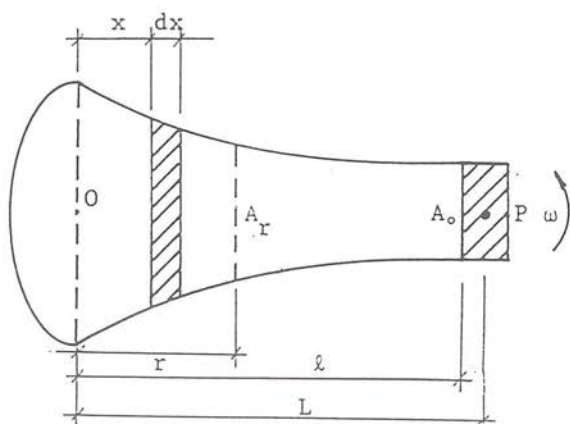
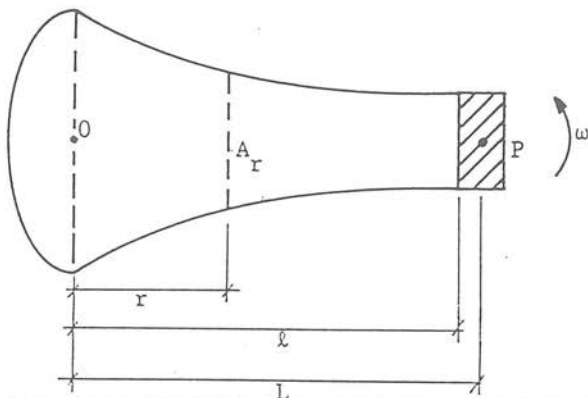
Valores extremos:

para: $x = 0 \implies A_x = A_0 = \frac{W}{S_0}$

para: $x = \ell \implies A_\ell = \frac{W}{S_0} e^{(\gamma/S_0)\ell}$

44. En el elemento mostrado en la figura, encontrar la variación del área A_x , a una distancia r del punto de giro O , para que el esfuerzo en la pieza sea siempre igual a un valor dado S_0 . Considerar la rotación en un plano horizontal sin fricción.

El peso específico de la barra es γ . Fig. en la siguiente página.



Primero calculemos el área A_0 en el extremo, que consiste con el valor dado del esfuerzo, es necesaria para igualar a la fuerza inercial centrífuga del peso P . Esto es:

$$F = S_0 A_0 = \frac{P}{g} \omega^2 L \Rightarrow A_0 = \frac{P \omega^2 L}{S_0 g}$$

Calculemos, ahora, el área A_r . Tomemos un elemento diferencial a una distancia x de O . Al aumentar x en dx , el área A disminuye en $-dA$ y la fuerza en $-S_0 dA$. Esta fuerza debe ser igual a la fuerza inercial centrífuga del elemento dx , de masa $dm = \frac{\gamma A dx}{g}$. Teniéndose:

$$dF = -S_0 dA = \frac{\gamma A dx}{g} \omega^2 x \Rightarrow -\frac{dA}{A} = \frac{\gamma \omega^2}{g S_0} x dx$$

integrando entre los límites: $\left\{ \begin{array}{l} x \Rightarrow r \text{ a } L \\ A \Rightarrow A_r \text{ a } A_0 \end{array} \right.$

$$- \int_{A_r}^{A_o} \frac{dA}{A} = \frac{\gamma \omega^2}{g S_o} \int_r^{\ell} x dx$$

$$- \ln A \Big|_{A_r}^{A_o} = \frac{\gamma \omega^2}{g S_o} \frac{x^2}{2} \Big|_r^{\ell}$$

$$\ln \frac{A_r}{A_o} = \frac{\gamma \omega^2}{2g S_o} (\ell^2 - r^2)$$

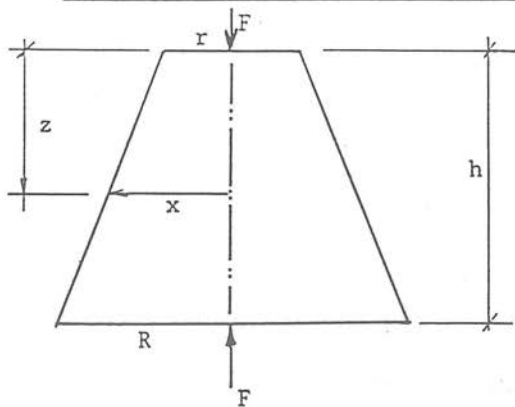
$$A_r = A_o \ell^{\frac{\gamma \omega^2}{2g S_o} (\ell^2 - r^2)}$$

Para: $r = \ell$, se obtiene $A_r = A_o$, valor que ya determinamos.

Obteniéndose finalmente:

$$A_r = \frac{P \omega^2 L}{S_o g} \ell^{\frac{\gamma \omega^2}{2g S_o} (\ell^2 - r^2)}$$

45. Un tronco de cono de peso específico γ , altura h y radios de las bases R y r , está sometido a una fuerza de compresión F . Hallar el radio x de la sección menos cargada, es decir de menor compresión. Precisar la condición requerida.



Relación geométrica :

$$x = r + (R - r) \frac{z}{h}$$

Teniéndose una variación diferencial:

$$dx = \frac{(R-r)}{h} dz \Rightarrow dz = \frac{h}{(R-r)} dx$$

El peso propio sobre la superficie de radio x , será:

$$P_x = \gamma V = \gamma \int_0^z \pi x^2 dz = \pi \gamma \int_r^x x^2 \frac{h}{(R-r)} dx = \frac{\pi \gamma h}{(R-r)} \int_r^x x^2 dx = \frac{\pi \gamma h}{3(R-r)} (x^3 - r^3)$$

Tomando como constante: $k = \frac{\pi \gamma h}{3(R-r)}$, se tiene: $P_x = k(x^3 - r^3)$

Luego, la compresión en la superficie de radio x , será:

$$S_x = \frac{F + P_x}{\pi x^2} = \frac{F + k(x^3 - r^3)}{\pi x^2}$$

Para encontrar el radio x en el mínimo, hacemos $\frac{dS_x}{dx} = 0$, teniéndose:

$$\frac{dS_x}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[k - 2 \frac{(F - kr^3)}{x^3} \right] = 0 \implies x^3 = \frac{2(F - kr)}{k}$$

Luego, el radio pedido será:

$$x = \sqrt[3]{2 \left(\frac{F}{k} - r^3 \right)} = \sqrt[3]{\frac{6F(R-r)}{\pi \gamma h} - 2r^3}$$

La condición para que este valor sea mínimo, se requiere que

$$\frac{d^2 S_x}{dx^2} > 0, \text{ teniéndose :}$$

$$\frac{d^2 S_x}{dx^2} = \frac{6(F - kr^3)}{\pi x^4} > 0 \implies F > kr^3 = \frac{\pi \gamma h r^3}{3(R-r)}$$

y, además, debe verificarse que: $r \leq x \leq R$, con la cual, de la expresión encontrada para x , se obtienen los valores:

$$\cdot \text{ para } x = r \implies F = \frac{3}{2} kr^3 = \frac{\pi \gamma h r^3}{2(R-r)}$$

$$\cdot \text{ para } x = R \implies F = \frac{1}{2} k(R^3 + 2r^3) = \frac{\pi \gamma h (R^3 + 2r^3)}{6(R-r)}$$

Esto es:

$$\frac{\pi \gamma h r^3}{2(R-r)} \leq F \leq \frac{\pi \gamma h (R^3 + 2r^3)}{6(R-r)}$$

o bien, en función del peso propio total, para $x = R$, $P_R = k(R^3 - r^3)$,

se tiene:

$$\frac{3}{2} \frac{P_R r^3}{(R^3 - r^3)} \leq F \leq \frac{1}{2} \frac{P_R (R^3 + 2r^3)}{(R^3 - r^3)}$$

C A P I T U L O X

O S C I L A C I O N E S

- INTRODUCCION Y DEFINICIONES.

- MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMONICO SIMPLE.

- OSCILADOR ARMONICO CON ACCION EXTERNA CONSTANTE.

- OSCILADOR AMORTIGUADO.

- OSCILACIONES FORZADAS.

- MOVIMIENTO ARMONICO EN DOS DIMENSIONES.

- MOVIMIENTO OSCILATORIO DE DOS CUERPOS ACOPLADOS.

10.1 INTRODUCCION Y DEFINICIONES.-

Es uno de los movimientos más importantes de la física clásica, tanto teórica como aplicada.

En general, cualquier movimiento o evento que se repita a intervalos de tiempo iguales se le denomina "Periódico". Cuando observamos el universo en nuestra vida diaria la experiencia muestra que nos encontramos frecuentemente en un sin número de movimientos periódicos.

Cuando una partícula realiza un movimiento periódico de ida y vuelta sobre la misma trayectoria alrededor del punto de equilibrio, lo llamamos movimiento "oscilatorio" o "vibratorio", que consideraremos sinónimos. A un sistema que oscila se le suele llamar "oscilador".

La importancia de este problema radica en el hecho que iguales ecuaciones matemáticas se presentan en una amplia variedad de problemas en Física. En verdad, poco podríamos saber del mundo físico sin comprender la dinámica de los sistemas osciladores.

Como ejemplos que pretenden corroborar la presencia permanente de las oscilaciones o vibraciones, citaremos los siguientes:

- En general cualquier cuerpo, como las campanas y tambores vibran al ser golpeados por un objeto como podemos comprobar por la onda sonora que llega a nuestros oídos, al transmitirse su movimiento al aire que los rodea. Es decir, las partículas del aire y nuestros tímpanos también vibran.
- Además de las vibraciones de nuestros tímpanos cuando escuchamos o de las vibraciones de nuestras cuerdas vocales en la laringe cuando hablamos, hay también otras importantes funciones fisiológicas que implican vibraciones como en los pulmones cuando respiramos y los latidos del corazón. Incluso cuando tenemos frío

"titiritamos"

- Cuando se escucha la radio hay circuitos eléctricos y electrónicos, en los emisores y receptores, que oscilan.
- Los terremotos producen vibraciones en la tierra (o en cualquier planeta que se produzcan) que se registran en los sismógrafos y que a veces tienen efectos devastadores.
- El péndulo de un reloj oscila, la cuerda de una guitarra vibra, etc. En general toda estructura mecánica cuando se le disturba es susceptible de vibrar.
- Las vibraciones también están presentes en los átomos, el núcleo, las moléculas de un cristal, etc, y también en la astrofísica.
- Las mareas debidas fundamentalmente a la atracción de la Luna, la superficie del mar oscila bajando y subiendo con un período característico.
- A la luz que nos permite leer esta oración corresponde también una oscilación, no mecánica como las citadas en casos anteriores correspondientes a las vibraciones de las partículas de un cuerpo, en este caso corresponden a una oscilación del campo electromagnético.
- Para finalizar, diremos que la idea dinámica de la oscilación también se aplica a contextos muy diversos desde una perspectiva general, p.e.: los sistemas económicos muestran una tendencia a oscilar con subidas y bajadas de la actividad económica, conocidos como ciclos económicos. También puede observarse en el rendimiento de los alumnos de un curso, como este de Física General, la tendencia a oscilar con subidas y bajadas del promedio de notas semestral.

La característica fundamental de las oscilaciones es que el movimiento se repite a intervalos de tiempo iguales, es decir periódico. Luego se define:

- El "Periodo" τ de un movimiento oscilatorio es el tiempo en el cual el movimiento se repite.
- Un "Ciclo", u oscilación completa, es el movimiento completo de ida y vuelta que se realiza en un periodo.
- La "Frecuencia" ν del movimiento oscilatorio es el número de ciclos u oscilaciones que se dan en una unidad de tiempo. Por lo tanto, observamos que la frecuencia es el recíproco del período, esto es:

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

La unidad de la frecuencia es el ciclo por segundo (c/s, cps, o simplemente s^{-1}). Esta unidad recibe el nombre de hertz (Hz).

Fijemos nuestra atención para comenzar, en el movimiento oscilatorio de una partícula de masa m que está limitada a moverse en línea recta. Esto es, en una dimensión y por lo tanto solo necesitaremos una coordenada x para especificar la posición de la partícula en cualquier instante (posteriormente incluiremos el movimiento oscilatorio angular y para especificarlo tomaremos una variable angular θ). Asu mimos que existe para la partícula una posición de equilibrio estable y designamos a este punto como el origen de coordenadas ($x = 0$). Luego, en este movimiento se denomina:

- "Posición de equilibrio" es la posición en la cual no actúa ninguna fuerza neta sobre la partícula.
- "Desplazamiento" es la distancia a la que se encuentra la partícula desde su posición de equilibrio en cualquier instante.

- La "Amplitud" A del movimiento oscilatorio es la magnitud del desplazamiento máximo. Es decir, ya sea el desplazamiento positivo o negativo se torna siempre positivo, en valor absoluto.

Si se saca a la partícula de su posición de equilibrio en cualquier dirección y se le libera, una fuerza la jala hacia la posición de equilibrio. Esto es, la fuerza trata de reponer a la partícula en su posición original de reposo y, por lo tanto, se le denomina "Fuerza Restauradora". Consideraremos que esta fuerza es función solamente del desplazamiento $F(x)$ y en particular una relación matemáticamente lineal, luego: $F_R = -kx$. La constante de proporcionalidad k es una constante positiva que se denomina de "Recuperación" y el signo negativo se establece debido a que la fuerza recuperadora siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio u origen. Como hemos visto en el capítulo anterior este tipo de fuerzas involucran deformaciones elásticas de cuerpos o dispositivos que obedecen la Ley de Hooke.

En un caso físico real también hay que considerar la presencia de fuerzas resistivas que disipan la energía amortiguando el movimiento oscilatorio. Asumiremos que la "Fuerza Amortiguadora" es directamente proporcional a la velocidad y opuesta a ella, esto es:

$F_A = -bv$. El parámetro b es una constante positiva que se denomina de "Disipación" o "Amortiguamiento".

Adicionalmente a un oscilador se le puede suministrar energía sometiéndolo o forzándolo mediante la acción de una fuerza externa $F(t)$.

Para finalizar esta introducción presentaremos un cuadro resumen de las cantidades dinámicas y parámetros físicos que intervienen en la solución de los movimientos oscilatorios que estudiaremos a continuación:

- x Coordenada o desplazamiento	- k Recuperación
- \dot{x} Velocidad	- b Disipación o Amortig.
- m Masa	- $F(t)$ Fuerza Externa

10.2 MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMONICO SIMPLE.-

El término armónico se aplica en general a las expresiones que contienen términos con las funciones seno y coseno. Como veremos, un movimiento oscilatorio siempre puede ser descrito por estas funciones y al más sencillo de estos movimientos se le denomina: movimiento oscilatorio armónico simple.

. Oscilación Libre Lineal.-

Para que una partícula ejecute un movimiento oscilatorio armónico simple debe estar sometido solo a la acción de una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento. Si se le comunica una energía inicial a la partícula y se le libera, ejecutará un movimiento de oscilación libre lineal alrededor de la posición de equilibrio. Después de estudiar detalladamente este movimiento consideraremos la oscilación libre angular.

El ejemplo, prototipo o modelo, más sencillo de un oscilador armónico simple es el sistema masa-resorte sujeto a una pared como se muestra en la fig. 10.1 y teniendo en cuenta las siguientes idealizaciones:

- Pared

La pared es rígida y está fija en el espacio.

- Masa

La partícula está sometida solo a la acción recuperadora producida por el resorte. No actúa sobre ella ningún otro tipo de fuerza, en particular se desprecian, comparadas con la del resorte, las fuerzas amortiguadoras disipativas de fricción con el apoyo horizontal y la resistiva viscosa del aire.

- Resorte

La masa del resorte es despreciable comparada con la masa de la partícula, asumimos que no tiene masa.

No existen fricciones internas ni externas en el resorte que

produzcan acciones disipativas.

La relación elástica fuerza vs deformación del resorte es exactamente lineal, es decir, obedece a la Ley de Hooke. Y, por lo tanto, las deformaciones del resorte deben ser relativamente pequeñas para que no se produzcan efectos permanentes y la relación elástica con la fuerza sea en todo momento estrictamente lineal.

A pesar que comenzamos con muchas simplificaciones o aproximaciones, como los aspectos esenciales del problema no se han comprometido, la solución de este problema es muy importante y útil pues en muchos casos reales esta aproximación puede darnos resultados satisfactorios.

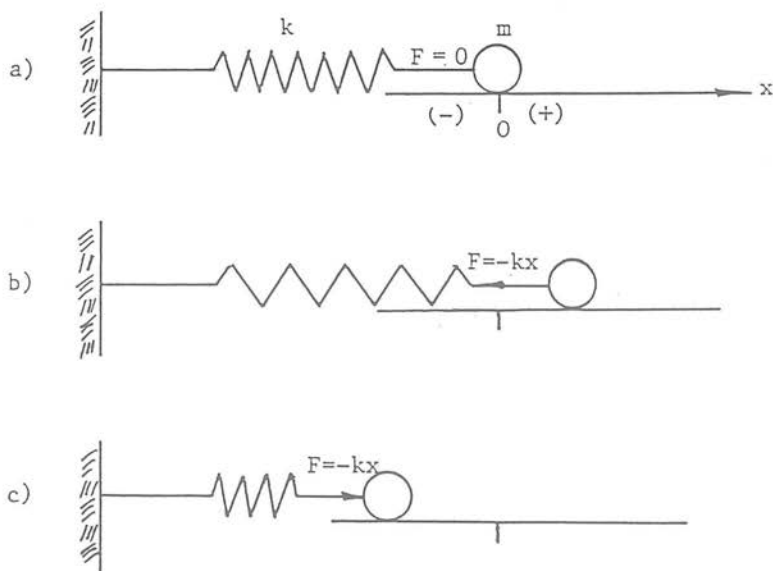


Fig. 10.1.- Oscilador armónico simple: Masa-Resorte.

En la posición a) el resorte está "Relajado", en b) Es tirado y en c) Comprimido. En ambos casos se muestra la fuerza que ejerce sobre la masa.

Si la constante de rigidez elástica del resorte es k y el desplazamiento x de la partícula se mide a partir de la posición relajada del resorte (sin estirar, ni comprimir), la fuerza restauradora que ejerce sobre la partícula es:

$$F = - kx$$

Aplicando la ley de Newton se obtendrá la ecuación diferencial del movimiento del oscilador armónico simple. Sustituyendo la Ley de Hooke $F = -kx$ en la ecuación de Newton $F = ma$, horizontalmente se tiene:

$$m \ddot{x} = - kx$$

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Como m y k son cantidades constantes características del sistema en este caso particular del oscilador masa-resorte y teniendo en cuenta que en la ecuación diferencial aparece el cociente entre ellas (k/m), podemos definir una nueva cantidad constante:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La conveniencia del radical introducido en esta definición, y su interpretación física, la apreciaremos al plantear el desarrollo para encontrar la solución de la ecuación diferencial. Sin embargo, establezcamos ahora dimensionalmente su unidad:

$$\left(\frac{N/m}{kg} \right)^{1/2} = \left(\frac{N}{kg \cdot m} \right)^{1/2} = \left(\frac{kg \cdot m/s^2}{kg \cdot m} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{s^2} \right)^{1/2} = (s^{-2})^{1/2} = s^{-1}$$

y la unidad de ω_0^2 será s^{-2} , la cual multiplicada por x en metros nos da m/s^2 , unidad de aceleración como lo establece la ecuación de Newton ($\ddot{x} = - \frac{k}{m} x$).

Con esta cantidad ω_0 podemos escribir la ecuación diferencial del oscilador con una sola constante. Luego,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Resolviendo esta ecuación encontraremos $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

Esta ecuación corresponde a las llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales con coeficientes constantes, que se presentan repetidas veces en el estudio de la Física. La matemática nos enseña la metodología para encontrar sus soluciones, técnica que como extensión presentamos al finalizar este capítulo, en el apéndice II.

Para el caso particular del oscilador armónico simple podemos aquí efectuar explícitamente las integrales correspondientes partiendo de la aceleración que la ecuación diferencial de Newton establece, esto es:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

como:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

podemos escribir:

$$v \frac{dv}{dx} = -\omega_0^2 x$$

Separar variables (x y v) e integrar:

$$\int_{v_0}^v v \, dv = -\omega_0^2 \int_{x_0}^x x \, dx$$

Estableciendo "condiciones iniciales" a $t = 0$: x_0 y v_0 , efectuando y despejando la velocidad se tiene:

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2} \omega_0^2 (x^2 - x_0^2)$$

$$v^2 = \omega_0^2 \left[\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right) - x^2 \right]$$

Si definimos para el término entre paréntesis:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

queda:

$$v^2 = \omega_0^2 (A^2 - x^2)$$

Obteniéndose la velocidad en función del desplazamiento, $v = f(x)$:

$$v = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}$$

Note que A tiene dimensión de longitud, lo cual puede muy fácil comprobarse dimensionalmente de la definición.

Continuando con el desarrollo de la solución, como $v = \frac{dx}{dt}$ se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}$$

Separando variables (x-t) e integrando:

$$\omega_0 \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$\omega_0 t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Para efectuar la integral del segundo miembro cambiemos de variable:

$$x = A \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad dx = A \cos \theta \, d\theta$$

con límites de integración:

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{A} \quad \text{y} \quad \theta_0 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x_0}{A}$$

teniéndose,

$$\omega_0 t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A \cos \theta d\theta}{A \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0$$

luego,

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

Por lo tanto, como $x = A \sin \theta$, finalmente obtenemos la solución buscada, $x = f(t)$:

$$x = A \sin (\omega_0 t + \theta_0)$$

y, emplazandola en las expresiones anteriores que tenemos de $v(x)$ y $a(x)$, o más fácilmente derivándola consecutivamente dos veces con respecto al tiempo, se obtienen $v(t)$ y $a(t)$:

$$v = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$a = -A \omega_0^2 \sin (\omega_0 t + \theta_0)$$

En la fig. 10.2 se grafican estas funciones: $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

(fig. en la pág. sgte.)

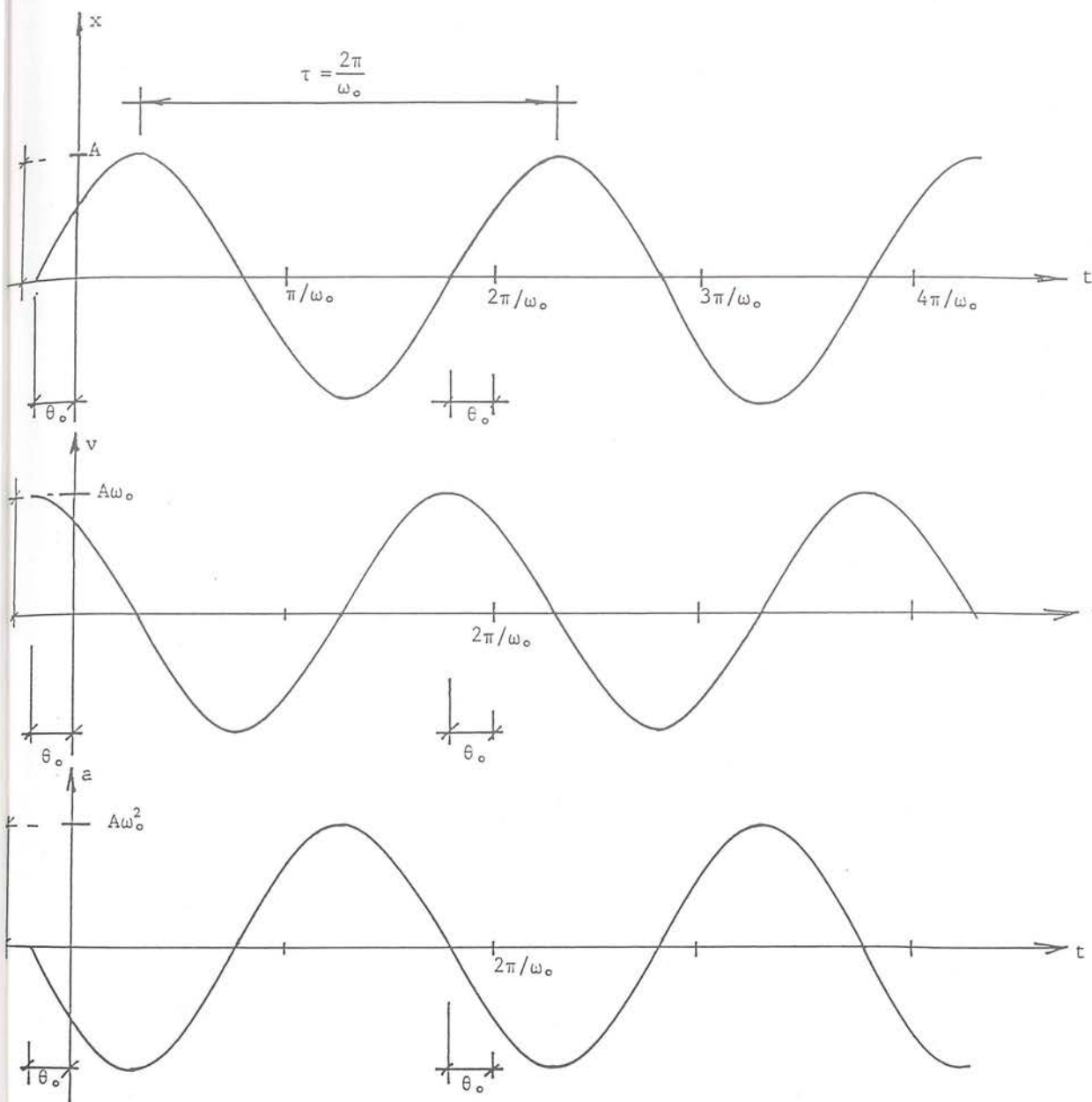
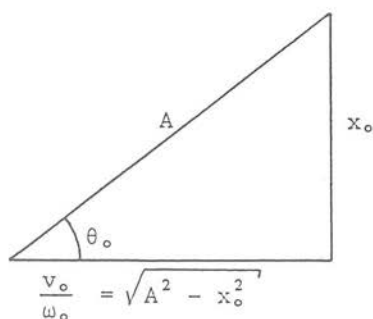


Fig. 10.2.- Gráficas del desplazamiento x , velocidad v , y aceleración a , en función del tiempo t , en el movimiento armónico simple. Cuando el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración tiene también un valor máximo pero en sentido opuesto al desplazamiento. Cuando el desplazamiento es cero, la rapidez es un máximo y la aceleración es cero.

Nota: Solo por consideraciones de dibujo se han tomado escalas verticales diferentes para x , v y a .

Las cantidades A y θ_0 de acuerdo a las expresiones utilizadas para establecerlas, como puede verse, dependen de las condiciones iniciales, es decir de la posición inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0 . Físicamente podemos decir, de las energías potencial y cinética que se le comunica inicialmente al oscilador para luego liberarlo y que inicie su movimiento oscilatorio. Como la fuerza ejercida por el resorte es conservativa, la energía mecánica total (potencial más cinética) se conserva durante todo el movimiento de oscilación libre. Más adelante insistiremos con mayor detalle sobre este aspecto.

Es conveniente y particularmente útil resaltar que estas dos cantidades (A y θ_0) están relacionadas trigonométricamente y geoméricamente mediante un triángulo rectángulo. Esto es:



$$x_0 = A \operatorname{sen} \theta_0 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{x_0}{A}$$

$$v_0 = A\omega_0 \operatorname{cos} \theta_0 \Rightarrow \operatorname{cos} \theta_0 = \frac{v_0/\omega_0}{A}$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = A^2 - x_0^2$$

$$\frac{v_0}{\omega_0} = \sqrt{A^2 - x_0^2} = A\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_0} = A \operatorname{cos} \theta_0$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{x_0}{v_0/\omega_0} \Rightarrow \theta_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0} \right)$$

Antes de continuar es indispensable que el lector repase y estudie cuidadosamente el comportamiento y las características de las funciones trigonométricas que se presentan al final del presente capítulo en el Apéndice I.

Hemos obtenido que el desplazamiento de la partícula está expresado mediante una función matemática senoidal:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega_0 t + \theta_0)$$

Analícemos ahora el significado físico de la constante ω_0 . La función trigonométrica que tenemos es periódica en el tiempo (t), si $\omega_0 = 1$ el período es 2π y si $\omega_0 \neq 1$ el período es $2\pi/\omega_0$ (ver Apd. I). Luego, como $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, el período (τ) del movimiento armónico simple del oscilador será:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

y, consecuente la frecuencia (ν) estará dada por:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

de modo que,

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}$$

Luego la cantidad ω_0 difiere de la frecuencia ν solo en un factor 2π , teniendo como dimensión s^{-1} y su unidad será el radián/segundo (rad/s).

Al argumento de la función trigonométrica, es decir a $(\omega_0 t + \theta_0)$, se le llama la "Fase" del movimiento. Es claro que la derivada de la fase respecto al tiempo en este caso es igual a ω_0 y por ello se expresa en radianes por segundo (ver Apd. I).

En un "Diagrama Fazor o Rotor" la fase $(\omega_0 t + \theta_0)$ es el ángulo que forma, en el instante t , el "Fazor" o "Rotor" con el eje horizontal de referencia y la rapidez de giro o velocidad angular del fazor será ω_0 , es decir la misma cantidad que tenemos en el movimiento armónico simple (ver Apd. I).

Por lo tanto, a la cantidad ω_0 se le suele llamar "Frecuencia Angular", sin embargo, debe quedar claro que tanto ω_0 como ν miden la misma magnitud en distintas unidades: ω_0 en rad/s y ν en c/s.

Además, observe que en la solución encontrada del oscilador armónico simple la frecuencia del movimiento es única y que la cantidad ω_0 es una constante que depende solo y exclusivamente del oscilador dado, es decir, de las características físicas de los elementos que conforman el sistema: la constante de recuperación k y la masa m , e independiente de las condiciones iniciales (x_0 y v_0). Por eso, físicamente nos referimos a ella como la "Frecuencia Natural del Sistema".

El ángulo θ_0 para el instante inicial $t = 0$ es la fase inicial del movimiento y se le llama la "constante de fase". Y, $x_0 = A \text{ sen } \theta_0$ es el correspondiente desplazamiento inicial con respecto al origen de coordenadas $x = 0$. En general al ángulo θ_0 en $(\omega_0 t + \theta_0)$ lo entendemos por "Desfasaje", p.e.: si se tienen dos movimientos con diferente constante de fase decimos que están "defasados" entre ellos.

La cantidad A tiene un significado físico sencillo, como :

$|A \text{ sen } (\omega_0 t + \theta_0)| \leq A$ se tiene que $x_{\text{máx}} = A$, es decir, el desplazamiento máximo medido desde la posición de equilibrio $x = 0$ es igual a A . Por lo tanto, decimos que A es la "Amplitud" del movimiento.

La constante de fase θ_0 y la amplitud A de la oscilación, como ha quedado claramente establecido anteriormente, dependen de las condiciones iniciales que se le imprimen arbitrariamente a la partícula y no se determinan mediante la ecuación diferencial. Por eso, también reciben el nombre genérico de "constantes arbitrarias". Mientras que, por otro lado, la frecuencia ω_0 queda completamente determinada por la ecuación diferencial, siendo una constante que depende solo del sistema oscilador e independiente de las condiciones iniciales.

Esto significa que para un oscilador dado el movimiento de la partícula tendrá solo una frecuencia fija e inamovible característica natural, pero en cuanto a fase y amplitud podrán presentarse una gran

variedad de movimientos que dependerán de las diversas posibles condiciones iniciales. Sin embargo, una vez iniciado el movimiento la partícula oscilará con frecuencia, amplitud y fase constantes, continuando así mientras no se le perturbe.

Para reforzar estos conceptos y al mismo tiempo familiarizarnos con la solución de ecuaciones diferenciales, es conveniente encontrar nuevamente la solución del movimiento oscilatorio armónico simple a partir del análisis, observación y requerimientos que plantean la propia ecuación diferencial, la solución esperada y el movimiento que describe.

Al aplicar la ecuación de Newton hemos encontrado la ecuación diferencial del movimiento: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; donde hemos definido, para el oscilador dado, la constante $\omega_0^2 = k/m$. Esta ecuación diferencial establece una relación entre la función $x(t)$ y su segunda derivada con respecto al tiempo $\ddot{x}(t)$, escribiendola de la siguiente manera:

$$\ddot{x} = - \omega_0^2 x$$

La expresión requiere que la segunda derivada de la función sea proporcional con signo negativo a la función que buscamos, siendo ω_0^2 la constante de proporcionalidad. Físicamente, este requerimiento establece que la aceleración de la partícula sea proporcional y de sentido opuesto a su desplazamiento.

Por otro lado, al observar el movimiento del oscilador vemos que es un movimiento periódico y limitado. Por lo tanto, la función $x(t)$ que lo describa debe cumplir también con estos requerimientos.

Dentro de las funciones matemáticas que conocemos las únicas que tienen las propiedades o características para satisfacer todos los requerimientos exigidos, son las funciones trigonométricas seno y coseno o alguna combinación de ellas. Luego, escribamos la expresión más general que podemos para representar a toda la familia de estas fun-

ciones (ver Apd. I):

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

Asumamos tentativamente que esta función $x(t)$, con las constantes A , ω y δ todavía desconocidas, es solución de la ecuación diferencial. Para que realmente lo sea, al reemplazar en ella $x(t)$ y $\ddot{x}(t)$ debe satisfacerla y nos podrá fijar las constantes restringiendo como solución a algunos miembros de la familia que representa. Derivando la sucesivamente dos veces con respecto al tiempo, tenemos:

$$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t + \delta) \implies \ddot{x} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene:

$$A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = -\omega_0^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

y, simplificando obtenemos que:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \implies \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

con esta condición $x(t)$ es efectivamente solución de la ecuación diferencial y podemos escribir que la solución es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

Note que la familia se ha reducido, solo los miembros que tienen una frecuencia angular con valor igual a $\sqrt{k/m}$ son admitidos como solución. Dado que ω_0 es una cantidad constante que solo depende de las características del oscilador la llamamos frecuencia natural. La partícula de ninguna manera podrá oscilar con otra frecuencia, podremos decir, porque la Ley de Newton así lo exige.

Las constantes A y δ están aún indeterminadas, la ecuación diferencial no las determinan. Esto significa que para cualquier elección arbitraria de estas constantes la función propuesta como solución satisfacerá la ecuación diferencial, o sea, con la frecuencia de oscilación determinada (ω_0) muchos movimientos diferentes son posibles para el oscilador.

Realmente esto es característico de una ecuación diferencial de movimiento, estas no describen un movimiento único, sino más bien a un grupo de posibles movimientos que tienen alguna (o algunas) característica en común establecida por los coeficientes de la ecuación diferencial, en este caso, la frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, pero que difieren en otras (A y δ). La expresión que describe a todos los miembros de la familia que satisfacen la ecuación diferencial se denomina "Solución General" (ver Apd. II).

Para una ecuación diferencial de segundo orden, como lo es la ecuación de movimiento de Newton, la solución general siempre contiene dos constantes arbitrarias (n para n°). Pero en un problema físico no hay arbitrariedad, estas constantes dependen de la energía inicial con la cual se pone en movimiento al oscilador, esto es, dependen de las condiciones iniciales dadas x_0 y v_0 . Luego A y δ deben escogerse para que correspondan justamente al problema físico oscilatorio particular.

Determinemos A y δ para la c.i. genérica a $t=0$; $x=x_0$ y $\dot{x} = v_0$, reemplazando estos valores en la solución general, se tiene:

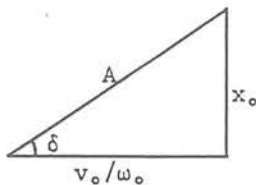
$$x = A \text{ sen}(\omega_0 t + \delta) \quad \Rightarrow \quad x_0 = A \text{ sen } \delta$$

$$\dot{x} = A \omega_0 \text{ cos}(\omega_0 t + \delta) \quad \Rightarrow \quad v_0 = A \omega_0 \text{ cos } \delta$$

resolviendo simultáneamente ambas expresiones, o más fácilmente mediante la ayuda geométrica de un triángulo rectángulo, se encuentra:

$$\text{sen } \delta = \frac{x_0}{A}$$

$$\text{cos } \delta = \frac{v_0/\omega_0}{A}$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\delta = \text{arctg} \left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0} \right)$$

Con estos valores de A y δ , el movimiento particular del oscilador queda determinado completamente. Por supuesto que estos valores son los mismos que establecimos anteriormente (salvo que a δ la denominamos θ_0).

Para finalizar mostraremos que la constante de fase δ nos permite escribir también la solución como una combinación lineal de seno y coseno de $\omega_0 t$, (ver Apd. I), utilizando la identidad trigonométrica del seno suma de dos ángulos se tiene:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta) = (A \cos \delta) \sin \omega_0 t + (A \sin \delta) \cos \omega_0 t = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$$

$$\text{con:} \quad B = A \cos \delta = A \frac{v_0 / \omega_0}{A} = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$C = A \sin \delta = A \frac{x_0}{A} = x_0$$

Luego, la solución es:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

En realidad esto es una propiedad de las ecuaciones diferenciales (ver Apd. II). Como $\sin \omega_0 t$ y $\cos \omega_0 t$ independientemente satisfacen a la ecuación diferencial, lo cual pueden fácilmente comprobar por sustitución, para dos constantes arbitrarias B y C también $B \sin \omega_0 t$ y $C \cos \omega_0 t$ la satisfacen cada uno independientemente y la solución general es una combinación lineal de ambas, es decir: $B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$.

Las constantes B y C quedan determinadas por las condiciones iniciales.

$$* \text{Resumiendo:} \left\{ \begin{array}{l} x = A \sin(\omega_0 t + \delta) \\ x = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2} \\ \delta = \arctg (x_0 \omega_0 / v_0) \\ B = v_0 / \omega_0 \\ C = x_0 \end{array} \right.$$

Pasemos ahora a estudiar la energía en este movimiento lineal armónico simple.

Como hemos visto en el ítem 5.4 (Pág. 26, vol. 2) la fuerza elástica es una fuerza conservativa, luego, $dU/dx = -F(x) = kx$ e integrando, la energía potencial que se obtiene es:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Función que se grafica en la fig. 10.3.

Para el oscilador hemos obtenido que $x = A \sin(\omega_0 t + \delta)$, luego la energía potencial en función del tiempo será:

$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) = U_m \sin^2(\omega_0 t + \delta)$$

teniendo un valor máximo: $U_m = \frac{1}{2} k A^2$

La energía cinética, por definición (ver ítem 5.2), es:

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

Para el oscilador hemos obtenido que $v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$, luego:

$$K = \frac{1}{2} kA^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

Con: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, se tiene:

$$K = \frac{1}{2} kA \cos^2(\omega_0 t + \delta) = K_m \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

teniendo un valor máximo: $K_m = \frac{1}{2} kA^2$

Y, la energía mecánica total $E = K + U$ será:

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2} kA \cos^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{1}{2} kA^2$$

Valor constante como era lo esperado, por ser conservativa la única fuerza que actúa sobre la masa, e igual a los valores máximos de las energías potencial y cinética. Por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \text{constante} = U_m = K_m$$

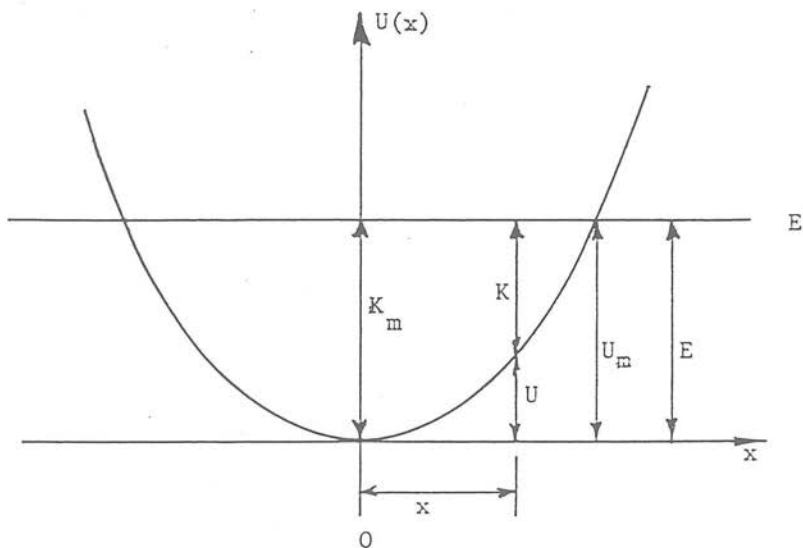


Fig. 10.3.- Energía potencial en el movimiento oscilatorio armónico simple, como función de la posición o desplazamiento a partir de la posición de equilibrio.

Para una energía mecánica total E , se muestran los valores de U y K correspondientes a una posición x .

Cuando el desplazamiento es máximo la energía cinética es cero ($K=0$) y la energía potencial es máxima ($U_m = \frac{1}{2} kA^2 = E$). En cambio, cuando la partícula en su movimiento se encuentra en la posición de equilibrio ($x = 0$) la energía potencial es cero ($U=0$) y la energía cinética es máxima ($K_m = \frac{1}{2} kA^2 = E$).

. OSCILACION LIBRE ANGULAR .-

Para que un cuerpo ejecute un movimiento angular oscilatorio armónico simple debe estar sometido solo a la acción de un torque o momento restaurador proporcional al desplazamiento angular. Si se le comunica una energía inicial y luego se le libera, ejecutará un movimiento de oscilación libre angular alrededor de la posición de equilibrio.

Desde el punto de vista oscilatorio este caso es semejante al que acabamos de tratar, con la diferencia que ahora utilizamos una variable angular para describir el movimiento. Como veremos a continuación ambos son matemáticamente idénticos.

En este caso el prototipo físico más sencillo es el sistema denominado "Péndulo de Torsión", que consiste en un cuerpo rígido suspendido de su centro de masa por un eje o alambre como se muestra en la Fig. 10.4.

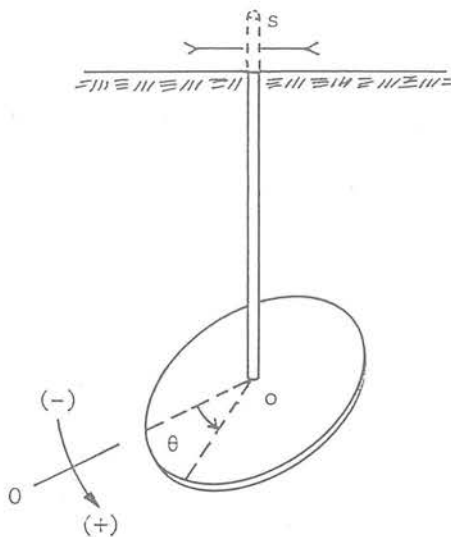


Fig. 10.4.- Péndulo de Torsión. En el sistema mostrado se ha tomado como cuerpo rígido un disco, pero en general, puede ser cualquier otro cuerpo, p.e. : una varilla o una mancuerna (varilla con masas en sus extremos). El eje vertical está asegurado firmemente en ambos extrems, el soporte (s) y el C.M. (o) del disco. Como idealización se considera que su masa es despreciable comparada con la del cuerpo.

Cuando se gira el cuerpo un ángulo θ en el plano horizontal, el eje vertical se torcerá y ejercerá un torque o momento recuperador sobre el cuerpo que tiende reponerlo a su posición de equilibrio, y si se deja libre oscilará resultando un movimiento armónico simple angular.

El torque restaurador, para torcimientos relativamente pequeños dentro de los límites elásticos como vimos en el ítem 5.9 y P.Nº 39 del capítulo anterior, es proporcional al ángulo de torsión, o sea al desplazamiento angular θ del cuerpo, de acuerdo a la Ley de Hooke, esto es:

$$T_o = - K\theta$$

A la constante de proporcionalidad K se le llama de "Torsión" y depende de las propiedades elásticas y características geométricas del eje. Esta constante es positiva y el signo negativo establece la "Recuperación angular" hacia la posición de equilibrio u origen.

Aplicando la ecuación de Newton para rotaciones de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo (ver Cap. 7, pág. 165 - Vol 2):

$$T_o = I_o \ddot{\theta}$$

Donde, I_o es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje.

Reemplazando T_o , se tiene:

$$I_o \ddot{\theta} = - K\theta$$

$$I_o \ddot{\theta} + K\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{I_o} \theta = 0$$

llamando:

$$\omega_o^2 = \frac{K}{I_o} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{K}{I_o}}$$

la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$$

ecuación que matemáticamente es idéntica a la lineal. Luego, la solución angular, armónica simple, será:

$$\theta = \Theta \cdot \text{sen}(\omega_o t + \delta)$$

Donde Θ es la amplitud angular de la oscilación y δ la constante de fase. Cantidades que, como anteriormente establecimos, dependen de las condiciones iniciales a $t = 0$: posición angular θ_0 y velocidad angular $\dot{\theta}_0$. Note que aquí utilizamos ω_0 para denotar a la frecuencia angular natural de la oscilación ($\omega_0 = \sqrt{-k/I_0}$) y no la hemos utilizado para la velocidad angular inicial ($\dot{\theta}_0$). Y, el período y la frecuencia del movimiento serán:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{K}} \quad , \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I_0}}$$

Para un disco, como en el péndulo mostrado en la Fig. 10.4, de masa M y radio R , su inercia rotacional o momento de inercia con respecto al eje que pasa por su centro de masa, es:

$$I_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

Finalmente para terminar, resumamos comparativamente las cantidades lineales y angulares que intervienen en las oscilaciones armónicas simples que acabamos de estudiar.

<u>DESCRIPCION</u>	<u>LINEAL</u>	<u>ANGULAR</u>
COORDENADA	x	θ
INERCIA	m	I_o
CONSTANTE ELASTICA DE RECUPERACION	k	K
ACCION DINAMICA RES TAURADORA	$F = - kx$	$T_o = - K\theta$
ECUACION DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO	$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$	$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$
DESPLAZAMIENTO, f(t)	$x = A \text{sen}(\omega_o t + \delta)$	$\theta = \Theta \text{sen}(\omega_o t + \delta)$
FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACION	$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{I_o}}$
POSICION INICIAL	x_o	θ_o
VELOCIDAD INICIAL	v_o	$\dot{\theta}_o$
AMPLITUD	$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)^2}$	$\Theta = \sqrt{\theta_o^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_o}{\omega_o}\right)^2}$
CONSTANTE DE FASE	$\delta = \text{arctg}\left(\frac{x_o \omega_o}{v_o}\right)$	$\delta = \text{arc tg}\left(\frac{\theta_o \omega_o}{\dot{\theta}_o}\right)$

10.3 OSCILADOR ARMONICO CON ACCION EXTERNA CONSTANTE.-

Analicemos el movimiento que se presenta cuando se tiene un oscilador armónico y la presencia adicional de una acción externa ejercida por una fuerza constante F_0 . Si a la partícula se le imprime energía inicial y se la libera, ahora, además de la acción restauradora del resorte actúa sobre ella la fuerza constante F_0 .

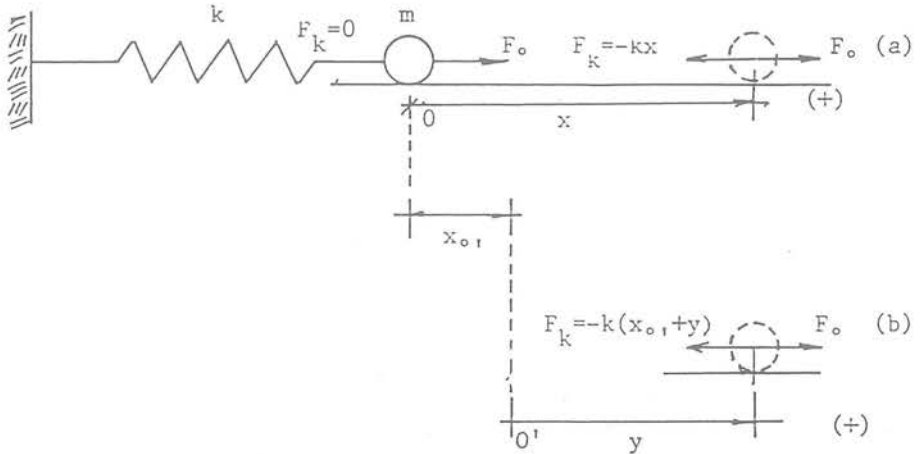


Fig.10.5.- Oscilador armónico masa-resorte sometido a la acción externa de una fuerza constante F_0 .

En a) el desplazamiento de la partícula lo da la coordenada x respecto a la posición 0 , cuando el resorte está relajado (sin deformación elástica).

En b) el desplazamiento de la partícula lo da la coordenada y respecto a una posición $0'$ cualquiera, situada a una distancia x_{01} , de 0 .

En ambos casos se muestran las fuerzas que actúan horizontalmente sobre la partícula de masa m , (D.C.L.).

Resolvamos primero con respecto a la posición 0 , cuando el resorte está relajado (sin deformación elástica), como se muestra en la figura 10.5-a). La ecuación diferencial del movimiento será:

$$\ddot{m} x = - kx + F_0$$

$$m \ddot{x} + kx = F_0$$

$$x + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m}$$

como definimos anteriormente, tomando:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

queda,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}$$

El primer miembro de esta ecuación diferencial es idéntico al obtenido anteriormente y corresponde al oscilador simple, es decir, a la acción del resorte sobre la masa. El segundo miembro aparece por la presencia de la fuerza externa al sistema masa-resorte. Por lo tanto, deben superponerse ambas acciones.

Para el oscilador armónico simple la ecuación diferencial correspondiente es $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (sin segundo miembro) y su solución, que llamaremos "complementaria", es: $x_c = A \sin(\omega_0 t + \delta)$.

Ahora, debemos buscar una solución de la ecuación diferencial tal cual, es decir, correspondiente al segundo miembro en particular que tenemos y la denominaremos "Particular" x_p . Luego, esta solución debe ser tal que satisfaga la ecuación diferencial con el segundo miembro.

Inspeccionando la ecuación diferencial que tenemos, en este caso, el segundo miembro es constante (F_0/m) y la solución que propongamos debe ser tal, que multiplicada por ω_0^2 y sumada con su segunda derivada sea constante. Esto será así, solo si es constante y cuyo valor debemos determinar.

Luego, tomemos $x_p = C$ ($\ddot{x}_p = 0$) y reemplazemos en la ecuación diferencial para encontrar su valor, se tiene:

$$0 + \omega_0^2 C = \frac{F_0}{m}$$
$$C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k}$$

y la solución particular buscada será:

$$x_p = \frac{F_o}{k}$$

Finalmente, la solución general es: (ver apéndice II).

$$x = x_c + x_p$$

$$x = A \text{ sen}(\omega_o t + \delta) + \frac{F_o}{k}$$

Resolvamos ahora con respecto a una posición arbitraria O' situada a una distancia x_{o1} de O , como se muestra en la fig. 10.5-b). En este caso la deformación del resorte está dada por: $(x_{o1} + y)$ luego, la ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\ddot{y} = -k(x_{o1} + y) + F_o$$

$$m\ddot{y} + ky = F_o - kx_{o1}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_o}{m} - \frac{k}{m}x_{o1}$$

$$\ddot{y} + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{m} - \omega_o^2 x_{o1}$$

Observamos que nuevamente el primer miembro de esta ecuación es matemáticamente idéntico al obtenido anteriormente y que el segundo miembro es también constante, pero igual a $(\frac{F_o}{m} - \omega_o^2 x_{o1})$. Luego, la solución complementaria será: $y_c = A \text{ sen}(\omega_o t + \delta)$ y debemos buscar la solución particular para el segundo miembro que tenemos. Tomando: $y_p = C$ ($\ddot{y}_p = 0$) y reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene:

$$0 + \omega_o^2 C = \frac{F_o}{m} - \omega_o^2 x_{o1}$$

$$C = \frac{F_o/m}{\omega_o^2} - x_{o1} = \frac{F_o/m}{k/m} - x_{o1} = \frac{F_o}{k} - x_{o1}$$

y la solución particular será:

$$y_p = \frac{F_o}{k} - x_o'$$

teniéndose como solución general:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = A \text{ sen } (\omega_o t + \delta) + \frac{F_o}{k} - x_o'$$

Pero, esta solución se simplifica considerablemente si escogemos convenientemente la referencia o' , justamente en la posición de equilibrio y no en forma arbitraria.

Calculemos la posición de equilibrio estático (x_e) con respecto a la posición 0, cuando el resorte está relajado,

$$k x_e = F_o \implies x_e = \frac{F_o}{k}$$

Tomando: $x_o' = x_e = \frac{F_o}{k}$, los términos constantes de la solución se cancelan y solo queda el término armónico.

Luego, la solución general respecto a la posición de equilibrio será:

$$y = A \text{ sen } (\omega_o t + \delta)$$

Teniéndose un movimiento oscilatorio armónico simple alrededor de la posición de equilibrio.

Movimiento igual al obtenido en el ítem anterior 10.2, pero allí, la posición de equilibrio corresponde cuando el resorte está relajado. Generalmente ambas se tratan idénticamente refiriéndose con respecto a la "posición de equilibrio" puesto que tienen la misma ecuación diferencial, observe que:

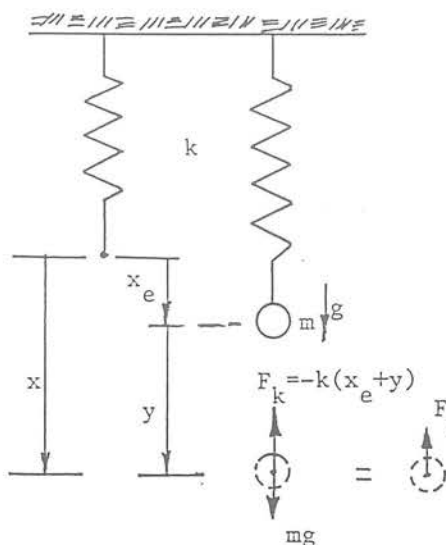
$$\Sigma F = -k(x_e + y) + F_o = -F_o - ky + F_o = -ky$$

Por lo tanto, la fuerza restauradora que actúa sobre la partícula es

proporcional a la coordenada y , medida a partir de la posición de equilibrio. Y, la ecuación diferencial del movimiento de Newton será matemáticamente idéntica, esto es:

$$m\ddot{y} = -ky \implies \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \implies y = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$$

Por ejemplo, si se tiene un cuerpo de masa m soportado (suspendido o apoyado) verticalmente por un resorte (ideal sin masa) de constante elástica k en el campo gravitacional uniforme constante g de la tierra, cuando se le imprime una energía inicial al liberarlo, realizará un movimiento oscilatorio armónico simple alrededor de la posición de equilibrio (ver fig. 10.6).



En este caso, la fuerza constante externa al oscilador, que actúa sobre la partícula, será:

$$F_0 = mg$$

Teniendo como posición de equilibrio estático:

$$x_e = \frac{F_0}{k} = \frac{mg}{k}$$

La solución respecto a este punto será:

$$y = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$$

Y, como $y = x - x_c$, con respecto a la posición relajada del resorte, la solución será:

$$x = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta) + \frac{mg}{k}$$

Fig.10.6 Cuerpo suspendido de un resorte vertical en un campo gravitacional constante.

La fuerza restauradora es $F_r = -ky$.

El cuerpo ejecuta un movimiento armónico simple respecto a la posición de equilibrio.

10.4 OSCILADOR AMORTIGUADO.-

En el oscilador libre, que hemos considerado en el ítem 10.2, el movimiento oscilatorio de la masa perdura indefinidamente. En realidad, esto es una idealización del verdadero caso físico, en el cual, se tiene la presencia de fuerzas resistivas de fricción que disipan la energía amortiguando el movimiento y conforme transcurre el tiempo van disminuyendo hasta desaparecer.

La fuerza amortiguadora es causada, a menudo, por la resistencia viscosa que ofrece el aire, oponiéndose al movimiento de la masa dentro de él. La magnitud de esta fuerza depende de la rapidez de la partícula, experiencia que es común para nosotros, p.e., cuando nos desplazamos en una motocicleta, al aumentar la velocidad sentimos que la resistencia del aire es mayor.

En la mayoría de los casos, la fuerza amortiguadora puede tomarse como proporcional a la velocidad y de sentido opuesto a ella. Esto es, linealmente: $F_A = -bv = -b\dot{x}$. La constante de proporcionalidad b es positiva y cuantifica la disipación o amortiguamiento. Cuando deseamos tener un valor determinado de ella, para tal fin, hay que fabricar un dispositivo mecánico, como lo es un pistón dentro de un fluido viscoso, llamado "Amortiguador" (recuerde que el resorte también es un dispositivo mecánico para producir una fuerza elástica con un valor deseado de la constante de recuperación k).

En la fig. 10.7 se muestra un prototipo esquematizado de un oscilador amortiguado.

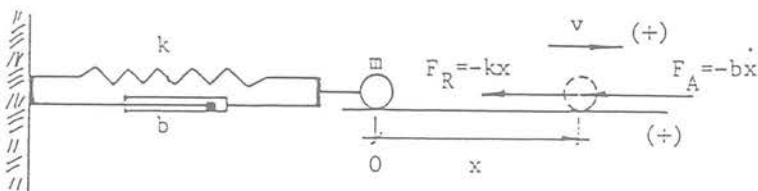


Fig. 10.7.- Oscilador Amortiguado.

La masa m está sometida en la dirección x a la acción del resorte: $F_R = -kx$ y del amortiguador: $F_A = -b\dot{x}$. Por comodidad de dibujo se han separado del eje al resorte y al amortiguador. En realidad deben montarse coaxialmente, el amortiguador al eje del resorte.

Aplicando la ecuación de la ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento de la masa será:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{x} &= -kx - b\dot{x} \\
 m \ddot{x} + b\dot{x} + kx &= 0 \\
 \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x &= 0
 \end{aligned}$$

Observando la ecuación diferencial es conveniente definir solo dos constantes (β y ω_0) con las características del sistema masa (m) - resorte (k) - amortiguador (b):

$$\begin{aligned}
 2\beta &= \frac{b}{m} & + & & \beta &= \frac{b}{2m} \\
 \omega_0^2 &= \frac{k}{m} & + & & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}
 \end{aligned}$$

Con ellas, se tiene la ecuación diferencial escrita de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La conveniencia de introducir el factor (2) y el exponente (2) en la definición de las constantes β y ω_0 se apreciará al encontrar la solución de la ecuación. Con relación a las unidades, encuentre

mos la unidad de β puesto que ya hemos establecido anteriormente que la unidad de ω_0 es s^{-1} , dimensionalmente se tiene:

$$\frac{\frac{N}{m/s}}{kg} = \frac{\frac{kg \cdot m/s^2}{m/s}}{kg} = s^{-1}$$

resultado esperado conforme lo establece la ecuación diferencial, pues al multiplicar $b(s^{-1})$ por $\dot{x}(m/s)$ nos da aceleración (m/s^2).

La solución de la ecuación diferencial que tenemos depende del valor relativo de la acción del amortiguador con respecto a la del resorte. Consideremos primero el caso cuando hay poco amortiguamiento, denominado subamortiguado.

. Oscilador Subamortiguado:

Cuando la acción amortiguadora es pequeña, ella va reduciendo poco a poco el movimiento oscilatorio producido por la acción restauradora del resorte. El movimiento se hace más lento, mayor período con menor frecuencia, y la amplitud va reduciéndose gradualmente hasta llegar a cero. Por lo tanto, es razonable esperar que la solución siga siendo armónica pero amortiguada que corresponda a un Movimiento Armónico Amortiguado, tal como se le denomina. Luego, plantearemos una solución armónica con frecuencia angular ω_1 diferente y menor que ω_0 , constante de fase δ y amplitud A que decrece exponencialmente en el tiempo $A e^{-rt}$. Esto es:

$$X = A e^{-rt} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

Las constantes r y ω_1 deberán determinarse para que satisfagan la ecuación diferencial que establece la ley de Newton y las constantes A y δ seguirán siendo arbitrarias para satisfacer las condiciones iniciales particulares dadas en cada caso.

Para poder reemplazar en la ecuación diferencial la solución pro -

puesta (x), primero encontremos \dot{x} y \ddot{x} :

$$\dot{x} = A\omega_1 e^{-rt} \cos(\omega_1 t + \delta) - Ar e^{-rt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -A\omega_1^2 e^{-rt} \sin(\omega_1 t + \delta) - A\omega_1 r e^{-rt} \cos(\omega_1 t + \delta) - A\omega_1 r e^{-rt} \cos(\omega_1 t + \delta) \\ & + Ar^2 e^{-rt} \sin(\omega_1 t + \delta) \end{aligned}$$

reemplazando y factorizando, se tiene:

$$Ae^{-rt} [-\omega_1^2 + r^2 - 2\beta r + \omega_0^2] \sin(\omega_1 t + \delta) + Ae^{-rt} [-2\omega_1 r - \omega_1 r + 2\beta\omega_1] \cos(\omega_1 t + \delta) = 0$$

$$[-\omega_1^2 + r^2 - 2\beta r + \omega_0^2] \sin(\omega_1 t + \delta) + [-2\omega_1 r + 2\beta\omega_1] \cos(\omega_1 t + \delta) = 0$$

Como hemos agrupado coeficientes de seno y coseno del mismo argumento en el tiempo $(\omega_1 t + \delta)$, la igualdad a cero para todo instante de tiempo t se cumplirá, solo si, los términos entre corchetes son, si multánea e independientemente, iguales a cero. Por lo tanto, se ten drá que:

$$-2\omega_1 r + 2\beta\omega_1 = 0 \rightarrow r = \beta$$

$$-\omega_1^2 + r^2 - 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\beta r + r^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 + \beta^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Luego, la solución que satisface la ecuación diferencial será:

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

En esta expresión ω_1 debe ser real, por lo tanto, como $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ la solución será válida siempre y cuando: $\beta^2 < \omega_0^2$. Es decir, cuando se tiene poco amortiguamiento.

Al referirnos a ω_1 la llamamos "frecuencia" angular del oscilador amortiguado a pesar que el movimiento no es periódico, pues no se repite exactamente igual en el tiempo. El término frecuencia solo tiene significado preciso cuando el movimiento es periódico, nos acercamos cuando $\beta \approx 0$ y $\omega_1 \approx \omega_0$.

Observe que $\omega_1 < \omega_0$ como habíamos previsto al inicio de la discusión y que la amplitud del movimiento decrece exponencialmente con el tiempo, $e^{-\beta t}$ con amortiguamiento $\beta > 0$.

En la fig. 10.8 se muestra una gráfica de la solución. Como esta solución está expresada por el producto de dos funciones, una periódica senoidal y otra exponencialmente decreciente que la limita, por comodidad del dibujo es conveniente trazar primero la curva en volvente que limita el desplazamiento en el tiempo, esto es.

$$x_{\text{env.}} = \pm Ae^{-\beta t}$$

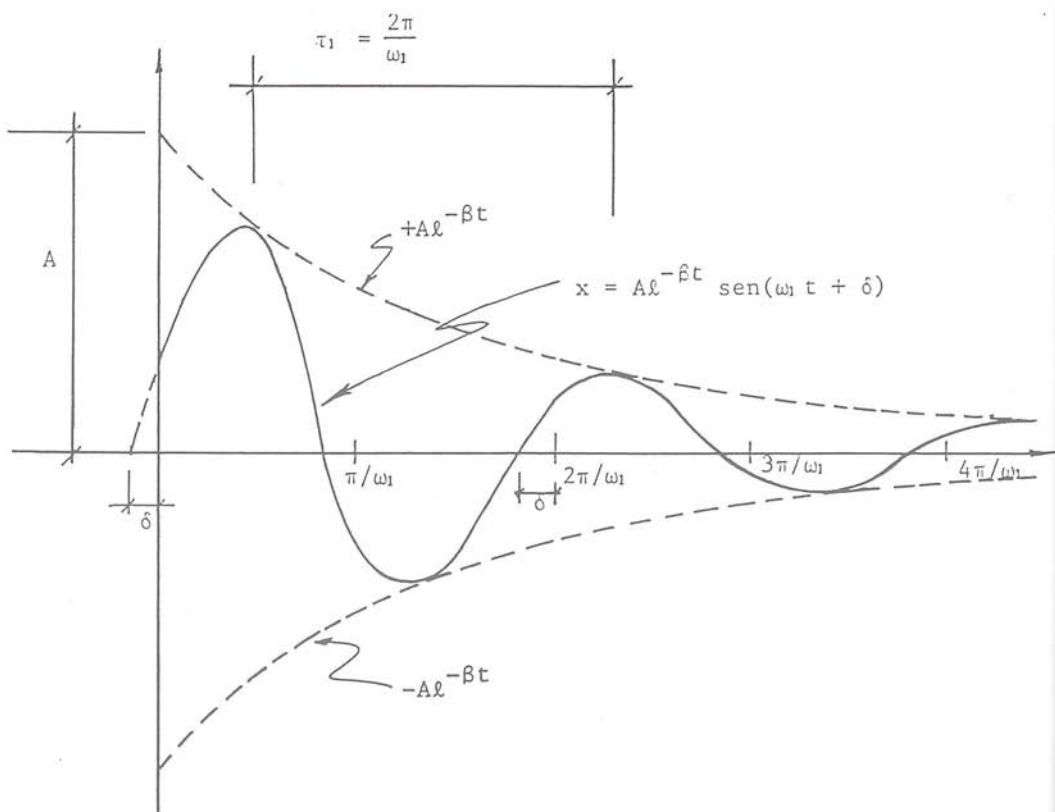


Fig. 10.8.- Oscilador subamortiguado $\beta^2 < \omega_0^2$.
 Movimiento Armónico Amortiguado.
 Gráfica del desplazamiento x en función del tiempo t .

$$x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta) \quad \text{con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Determinemos ahora las constantes arbitrarias A y δ para la condición inicial genérica a $t = 0$: $x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$, reemplazando estos valores en la solución general, se tiene:

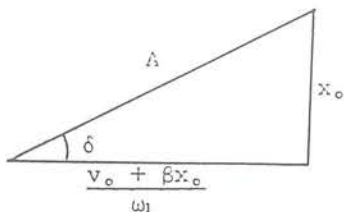
$$x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta) \quad + x_0 = A \text{sen} \delta$$

$$\dot{x} = A\omega_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta) - A\beta e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta) \rightarrow v_0 = A\omega_1 \cos \delta - A\beta \text{sen} \delta$$

resolviendo simultáneamente ambas expresiones, o más fácilmente mediante la ayuda geométrica de un triángulo rectángulo, se encuentra:

$$x_0 = A \text{sen} \delta \rightarrow \text{sen} \delta = \frac{x_0}{A}$$

$$v_0 = A\omega_1 \cos \delta - A\beta \frac{x_0}{A} \rightarrow \cos \delta = \frac{(v_0 + \beta x_0)/\omega_1}{A}$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1} \right)^2}$$

$$\delta = \text{arc tg} \left(\frac{x_0}{(v_0 + \beta x_0)/\omega_1} \right) = \text{arctg} \left(\frac{x_0 \omega_1}{v_0 + \beta x_0} \right)$$

Con estos valores de A y δ , el movimiento particular del oscilador amortiguado queda determinado completamente.

Cuando la acción del amortiguador es lo suficientemente grande, tal que $\beta^2 > \omega_0^2$, la frecuencia angular $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ se torna imaginaria y la ecuación $x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$ ya no es una solución válida de la ecuación diferencial del movimiento. La solución en este caso, denominado sobre-amortiguado, deja de ser armónica como veremos a continuación.

. Oscilador Sobreamortiguado:

Cuando la acción del amortiguador es grande comparada con la del resorte ($\beta^2 > \omega_0^2$) no permitirá movimiento oscilatorio alguno, al ir disipando la energía inicial, el cuerpo simplemente tenderá a su posición de equilibrio. La solución no será armónica y, más bien, podemos plantear que el desplazamiento decrezca exponencialmente en el tiempo. Esto es:

$$x = e^{-rt}$$

derivando: $\dot{x} = -r e^{-rt}$ y $\ddot{x} = r^2 e^{-rt}$

reemplazando en la ecuación diferencial del movimiento:

$$r^2 e^{-rt} - 2\beta r e^{-rt} + \omega_0^2 e^{-rt} = 0$$

$$e^{-rt}(r^2 - 2\beta r + \omega_0^2) = 0$$

Luego, para todo tiempo, se tendrá que:

$$r^2 - 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Ecuación algebraica de segundo grado que se denomina "auxiliar", y resolviéndola sus raíces son:

$$r = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

valores que serán reales, siempre y cuando $\beta^2 > \omega_0^2$ conforme consideramos previamente. Y, definiendo:

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \text{ para } \beta^2 > \omega_0^2$$

podemos escribir las raíces:

$$r_1 = \beta + \omega_2 \text{ y } r_2 = \beta - \omega_2$$

y las dos soluciones que satisfacen la ecuación diferencial, son:

$$e^{-r_1 t} = e^{-(\beta + \omega_2)t} \quad \text{y} \quad e^{-r_2 t} = e^{-(\beta - \omega_2)t}$$

tomando dos constantes arbitrarias cualesquiera B y C, que dependen de las condiciones iniciales de cada caso particular, la solución general será: (ver Ap. II)

$$x = B e^{-r_1 t} + C e^{-r_2 t}$$

$$x = e^{-\beta t} (B e^{-\omega_2 t} + C e^{\omega_2 t})$$

Observe que $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ no representa a "frecuencia" alguna, aunque su unidad es también s^{-1} . En la fig. 10.9 se muestra una gráfica de la solución.

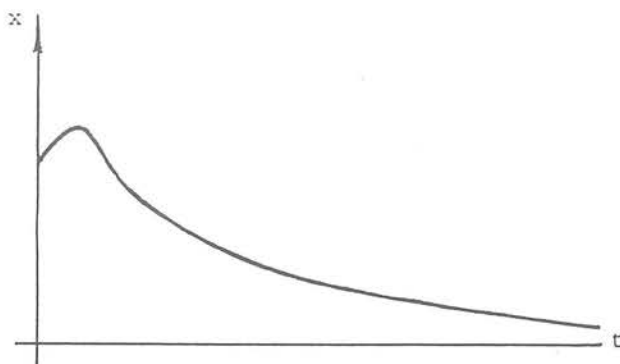


Fig. 10.9.- Oscilador sobreamortiguado $\beta^2 > \omega_0^2$.

Gráfica del desplazamiento x en función del tiempo t.

$$x = e^{-\beta t} (B e^{-\omega_2 t} + C e^{\omega_2 t}), \quad \text{con:} \quad \omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Cuando ocurre que β^2 es precisamente igual a ω_0^2 , ($\beta^2 = \omega_0^2$), se tiene que ω_2 es igual a cero, ($\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$), y las raíces de la ecuación auxiliar son iguales, ($r_1 = r_2 = r = \beta$), por lo tanto, queda solo una solución, ($e^{-\beta t}$). Luego, para conformar la solución general, con dos constantes arbitrarias, debemos buscar otra solución que satisfaga también a la ecuación diferencial en este caso

particular, conocido como "crítico," y que a continuación encontramos.

. Oscilador Críticamente Amortiguado:

Cuando $\beta^2 = \omega_0^2$, tampoco se producirá movimiento oscilatorio alguno, pero en este caso, el cuerpo tenderá a su posición de equilibrio más rápidamente que en el sobre-amortiguado e incluso que a un oscilador subamortiguado. La ecuación diferencial acepta también en este caso como solución a: $t e^{-\beta t}$, además de $e^{-\beta t}$ como acabamos de establecer arriba. Veamos para:

$$x = t e^{-\beta t}$$

derivando :

$$\dot{x} = -\beta t e^{-\beta t} + e^{-\beta t}$$

$$\ddot{x} = \beta^2 t e^{-\beta t} - \beta e^{-\beta t} - \beta e^{-\beta t} = \beta^2 t e^{-\beta t} - 2\beta e^{-\beta t}$$

reemplazando en la ecuación diferencial del movimiento:

$$\beta^2 t e^{-\beta t} - 2\beta e^{-\beta t} - 2\beta^2 t e^{-\beta t} + 2\beta e^{-\beta t} + \omega_0^2 t e^{-\beta t} = 0$$

$$\beta^2 t e^{-\beta t} - 2\beta^2 t e^{-\beta t} + \omega_0^2 t e^{-\beta t} = 0$$

$$t e^{-\beta t} (\beta^2 - 2\beta^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$t e^{-\beta t} (-\beta^2 + \omega_0^2) = 0$$

La igualdad a cero para todo instante de tiempo t se cumplirá, si:

$$-\beta^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \beta^2 = \omega_0^2$$

Luego, bajo esta condición $\beta^2 = \omega_0^2$, se tendrá que: $t e^{-\beta t}$ será también solución de la ecuación diferencial del movimiento.

Finalmente, teniendo dos soluciones: $e^{-\beta t}$ y $t e^{-\beta t}$, con dos constantes arbitrarias cualesquiera B y C , que se determinarán en cada caso particular para las condiciones iniciales dadas, podemos conformar

mar la solución general (ver Ap. II). Esto es:

$$x = Be^{-\beta t} + Cte^{-\beta t}$$

$$x = e^{-\beta t} (B + Ct)$$

En la fig. 10.10 se muestra una gráfica de la solución.

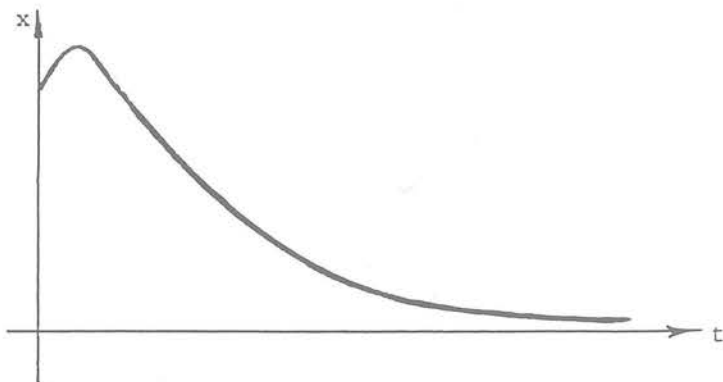


Fig. 10.10. Oscilador críticamente amortiguado $\beta^2 = \omega^2$.
Gráfica del desplazamiento x en función del tiempo t.
 $x = e^{-\beta t} (B + Ct)$

* Resumen de los tres casos que se presentan en el oscilador amortiguado:

- Sub-amortiguado: $\beta^2 < \omega_0^2$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ $\rightarrow x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$
- Sobre-amortiguado: $\beta^2 > \omega_0^2$, $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ $\rightarrow x = e^{-\beta t} (Be^{-\omega_2 t} + Ce^{\omega_2 t})$
- Críticamente amortiguado: $\beta^2 = \omega_0^2$, $\omega_1 = \omega_2 = 0 \rightarrow x = e^{-\beta t} (B + Ct)$

10.5 OSCILACIONES FORZADAS.-

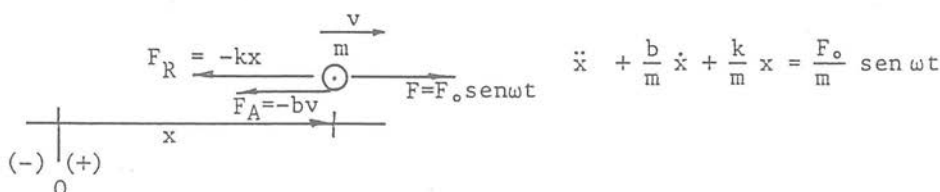
Consideremos ahora un oscilador amortiguado y forzado. Es decir, cuando además de las fuerzas restauradora y amortiguadora, la masa también está sometida a la acción de una fuerza externa F . Estudiaremos el movimiento que se presenta, como caso importante, cuando esta fuerza es periódica en el tiempo, senoidal de amplitud F_0 y frecuencia angular ω . Esto es:

$$F = F_0 \text{ sen } \omega t$$

Aplicando la ley de Newton de movimiento para el cuerpo de masa m , la ecuación diferencial será:

$$\text{D.C.L.} \qquad m \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \text{ sen } \omega t$$

$$\text{D.C.L. (m)} \qquad m \ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \text{ sen } \omega t$$



(se muestran solo las fuerzas horizontales que actúan en la dirección x)

Como definimos anteriormente,

$$2\beta = \frac{b}{m} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La ecuación diferencial del movimiento que queda es:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t$$

Como discutimos en el ítem 10.3 para el oscilador armónico con fuerza externa constante, la solución de la ecuación diferencial que ahora tenemos, también constará de dos partes, la complementaria y la particular, $x = x_c + x_p$ (ver Ap. II).

La solución complementaria $x_c(t)$ corresponde al oscilador amortiguado sin fuerza externa, es decir, a la solución de la ecuación diferencial con el segundo miembro igual a cero ($\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$), solución que hemos encontrado en el ítem anterior (10.4) para cualquiera de los tres casos que se pueden presentar. Para el caso subamortiguado ($\beta^2 < \omega_0^2$), el más interesante desde el punto de vista oscilatorio, la solución correspondiente será:

$$x_c = Ae^{\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

Con $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ y constantes arbitrarias A y δ que dependen de las condiciones iniciales.

La solución particular $x_p(t)$ corresponde a la presencia de la fuerza externa al oscilador amortiguado, es decir, a la solución de la ecuación diferencial con el segundo miembro que en particular tenemos:

$\frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t$. Luego, la solución debe ser tal, que al reemplazarla en el primer miembro de la ecuación diferencial reproduzca este segundo miembro, por lo tanto, propondremos como solución una función también senoidal con la misma frecuencia angular ω , de amplitud D y constante de fase, digamos $-\phi$. Esto es:

$$x_p = D \text{sen}(\omega t - \phi)$$

Luego, debemos encontrar los valores de D y ϕ que harán que $x_p(t)$ satisfaga la ecuación diferencial. Por lo tanto, observe que al determinar estos valores, D y ϕ no serán constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales.

Para reemplazar la solución propuesta en la ecuación diferencial, primero derivemosla:

$$\dot{x}_p = D \omega \cos(\omega t - \phi) \quad \text{y} \quad \ddot{x}_p = -D\omega^2 \sin(\omega t - \phi)$$

reemplazando, se tiene:

$$-D\omega^2 \sin(\omega t - \phi) + 2\beta D\omega \cos(\omega t - \phi) + \omega_o^2 D \sin(\omega t - \phi) = \frac{F_o}{m} \sin \omega t$$

$$D(\omega_o^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \phi) + D(2\beta\omega) \cos(\omega t - \phi) - \frac{F_o}{m} \sin \omega t = 0$$

Desarrollando seno y coseno de $(\omega t - \phi)$ y factorizando $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$, queda:

$$D(\omega_o^2 - \omega^2) (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) + D(2\beta\omega) (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) - \frac{F_o}{m} \sin \omega t = 0$$

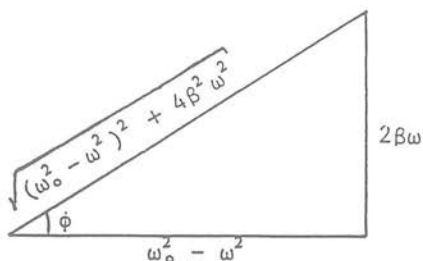
$$[D(\omega_o^2 - \omega^2) \cos \phi + D(2\beta\omega) \sin \phi - \frac{F_o}{m}] \sin \omega t - D[(\omega_o^2 - \omega^2) \sin \phi - 2\beta\omega \cos \phi] \cos \omega t = 0$$

Al agrupar coeficientes de seno y coseno de ωt , la igualdad a cero para todo t se cumplirá solo si ambos coeficientes entre corchetes son idénticamente iguales a cero. Luego,

. Del coeficiente correspondiente al término en $\cos \omega t$, se tiene:

$$(\omega_o^2 - \omega^2) \sin \phi - 2\beta\omega \cos \phi = 0 \implies \operatorname{tg} \phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

y, con la ayuda geométrica de un triángulo rectángulo podemos encontrar también $\sin \phi$ y $\cos \phi$, esto es:



$$\sin \phi = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\cos \phi = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

. Del coeficiente correspondiente al término en $\sin \omega t$, se tiene:

$$D(\omega_o^2 - \omega^2) \cos \phi + D(2\beta\omega) \sin \phi - \frac{F_o}{m} = 0$$

$$D[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + 2\beta \omega \operatorname{sen} \phi] = \frac{F_0}{m}$$

reemplazando los valores encontrados de $\operatorname{sen} \phi$ y $\cos \phi$ y simplificando, queda:

$$D[(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} + 2\beta \omega \frac{2\beta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}] = \frac{F_0}{m}$$

$$D \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right] = \frac{F_0}{m}$$

$$D \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = \frac{F_0}{m} \implies D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Habiendo encontrado D y ϕ que, como puede verse, son valores constantes que quedan completamente determinados independientemente de cualquier condición inicial, podemos escribir la solución particular $x_p(t)$:

$$x_p = D \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\text{con: } D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \text{ y } \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Siendo D la amplitud de x_p y ϕ el ángulo constante de fase que establece la diferencia de fase o defasaje entre la fuerza externa aplicada y el desplazamiento correspondiente al término particular. En el caso que la fuerza F tenga un defasaje inicial con respecto al instante inicial $t = 0$, es decir:

$$F = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

la solución particular solo variará en este ángulo θ_0 , esto es:

$$x_p = D \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0 - \phi)$$

Finalmente, la solución general, considerando ambos términos, será:

$$x = x_c + x_p$$

En esta solución podemos observar que el término $x_c(t)$ decae con el tiempo en e^{-pt} y corresponde a los efectos transitorios que dependen de las condiciones iniciales. Mientras que, por otro lado, el término $x_p(t)$ no decae en el tiempo y corresponde a los efectos estables que dependen de la fuerza externa aplicada e independientes de las condiciones iniciales. Por consiguiente, frecuentemente se identifica a estos términos, respectivamente, como: solución transitoria $x_t(t)$ y solución estable $x_e(t)$. Cuando $t \gg 1/\beta$, la solución general se reduce en este caso a: $x = x_e(t)$.

Si se tiene el caso ideal sin amortiguamiento ($b=0$), es decir, un oscilador armónico forzado senoidalmente, ya no se puede hablar de término transitorio alguno porque la solución complementaria no desaparece al transcurrir el tiempo. Esta solución complementaria es:

$$x_c = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$$

Y, la solución particular se puede encontrar fácilmente tomando $\beta = 0$. Las constantes D y ϕ se reducen a:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad \text{y} \quad \phi = 0$$

teniéndose como solución particular:

$$x_p = D \text{ sen } \omega t$$

La solución general $x(t)$, en este caso será:

$$x = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta) + D \text{ sen } \omega t$$

$$\text{con: } D = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Las constantes A y δ son arbitrarias que dependen de la condición inicial dada.

Como las constantes D y ϕ que conforman el término particular de la solución son cantidades que dependen de ω , es muy importante anali

zar el comportamiento del sistema oscilatorio amortiguado y forzado para diferentes valores de la frecuencia angular correspondiente a la fuerza externa aplicada al sistema.

. Variación de la amplitud D con ω :

$$\text{Para, } \omega = 0 \implies D = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

Cuando, $\omega \rightarrow \infty \implies D \rightarrow 0$

Entre, $0 < \omega < \infty$, la amplitud D tiene un máximo.

Al valor de ω que hace D máxima, se le denomina frecuencia para la resonancia de amplitud o frecuencia de resonancia de amplitud, o simplemente, "frecuencia de resonancia". A esta frecuencia se le identifica con ω_R y para encontrarla habrá que derivar D con respecto a ω e igualar a cero, esto es:

$$\left. \frac{dD}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

Pero, al tener D numerador constante (F_0/m), el denominador que es función de ω debe ser mínimo para D máximo. Luego, bastará derivar el denominador e igualar a cero, es decir, solo la cantidad bajo el radical y se obtendrá el valor de ω_R , esto es:

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_R^2)(-2\omega_R) + 8\beta^2 \omega_R = 0$$

$$-(\omega_0^2 - \omega_R^2) + 2\beta^2 = 0$$

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \implies \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Para que este valor ω_R sea real se debe tener que: $\omega_0^2 > 2\beta^2$, caso contrario se torna imaginario y no hay resonancia. Observe también que: $\omega_R < \omega_1 < \omega_0$.

La amplitud máxima D_m se obtendrá para $\omega = \omega_R$, reemplazando:

$$D_m = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_o^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2 \omega_o^2 - 8\beta^4}} = \frac{F_o/m}{\sqrt{4\beta^2 \omega_o^2 - 4\beta^4}} = \frac{F_o/m}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}} = \frac{F_o/m}{2\beta\omega_1}$$

Cuando no hay amortiguamiento ($\beta = 0$) la frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia natural del oscilador armónico ($\omega_R = \omega_o$) y la amplitud máxima tiende hacerse infinita ($D_m \rightarrow \infty$).

. Variación de la constante de fase ϕ con ω :

Para, $\omega = 0 \implies \phi = 0$

Para, $\omega = \omega_o \implies \phi = \frac{\pi}{2}$

Cuando, $\omega \rightarrow \infty \implies \phi \rightarrow \pi$

En la fig. 10.11 a) y b) se muestran respectivamente las variaciones de la amplitud D y fase ϕ en la oscilación forzada con ω .

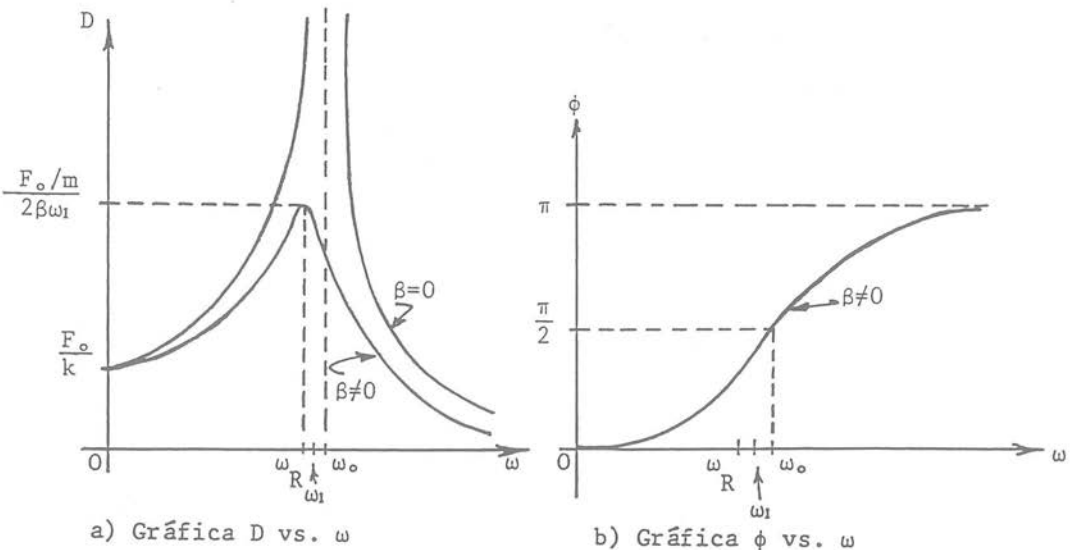


Fig. 10.11 Oscilación forzada. Variación de la amplitud D y constante de fase ϕ en función de la frecuencia angular ω de la fuerza impulsora.
 $\beta \neq 0$ Oscilador amortiguado forzado.
 $\beta = 0$ Oscilador armónico forzado.

Si la frecuencia angular externa aplicada es igual, precisamente, a la frecuencia de resonancia del sistema, es decir si: $F = F_0 \text{ sen } \frac{t}{R}$, el desplazamiento tendrá una amplitud D relativamente grande, aún cuando el valor de F_0 sea pequeño, y decimos que el sistema entra en "Resonancia". Hay que advertir que los términos de resonancia y frecuencia de resonancia también se utilizan y definen para otras cantidades físicas con relación a un máximo valor, p.e. de: rapidez, energía cinética, transferencia de potencia, etc. En cada caso habrá que obtener el correspondiente valor de la frecuencia de resonancia.

Por lo tanto, si se quiere lograr una gran respuesta en un sistema oscilante lo más apropiado es forzarlo a una frecuencia lo más cercana posible a su frecuencia de resonancia. p.e.: un niño en un columpio o un saltimbanqui sobre una lona elástica, mediante la sucesión de pequeños impulsos logran considerables amplitudes en sus movimientos cuando se aproximan a las frecuencias de resonancia de los respectivos sistemas (columpio o lona elástica).

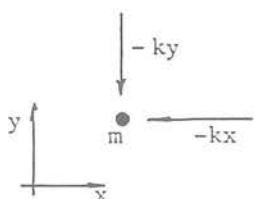
Cuando se presenta resonancia sobrepasando el comportamiento elástico de los materiales, fácilmente puede ocurrir el colapso del sistema, produciendo daños irreparables en estructuras y en algunos casos considerables desastres como ocurrió en el año 1940 con el puente Tacoma en Washington - U.S.A., puente de gran envergadura que comenzó a oscilar por acción del viento, que a pesar de soplar con velocidad relativamente moderada lo exitó entrando en resonancia, produciéndose un movimiento con gran amplitud hasta que el puente colapsó, rompiéndose el tramo central que cayó al agua. Es conocido también el hecho que una columna de soldados rompe el paso de marcha antes de ingresar sobre un puente, para evitar posibles efectos de resonancia que se producirían si la frecuencia de los impulsos del paso de marcha coincide con la frecuencia natural del puente. También son bastante frecuentes las fallas que se presentan por vibraciones en Máquinas y Motores.

En general, podemos decir que las oscilaciones forzadas y resonancia es uno de los fenómenos físicos más importantes con múltiples aplicaciones. Adicionalmente podemos citar p.e. en los circuitos eléctricos de corriente alterna, electro-acústica, audio, vibraciones en cristales, resonancias o modos de ondas acústicas en locales, óptica, física atómica, etc.

10.6 MOVIMIENTO ARMONICO EN DOS DIMENSIONES.-

Consideremos ahora una partícula de masa m que puede moverse con dos grados de libertad sobre un plano horizontal sin fricción y que esta sometida a la acción de una fuerza radial centrípeta y elástica de constante k , esto es:

D.C.L. (m)



$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\hat{i} + y\hat{j}) = -kx\hat{i} - ky\hat{j}$$

luego: $F_x = -kx$ y $F_y = -ky$

Aplicando la ley de Newton de movimiento en ambas direcciones, como hemos visto anteriormente, se tiene:

. En la dirección x :

$$F_x = -kx$$

$$mx + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = A \text{ sen}(\omega_0 t + \alpha)$$

. En la dirección y :

$$F_y = -ky$$

$$my + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \text{ con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$y = B \text{ sen}(\omega_0 t + \beta)$$

Luego, en ambas direcciones (x e y) el movimiento es oscilatorio armónico simple con la misma frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ pero con diferentes amplitudes y constantes de fase. Estas: A , α y B , β , son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales: x_0 , v_{0x} y y_0 , v_{0y} , respectivamente.

Estas ecuaciones de movimiento también nos expresan la trayectoria de la partícula en forma paramétrica, con parámetro t . Para obtener la ecuación de la trayectoria solo función de las coordenadas x e y , debemos eliminar este parámetro tiempo de ambas ecuaciones. Veamos:

Sumando y restando la constante de fase α en el argumento de la fun

ción seno en y, se tiene:

$$y = B \operatorname{sen} [(\omega_0 t + \alpha) + (\beta - \alpha)]$$

llamando a la diferencia de fase $\delta = (\beta - \alpha)$ y desarrollando el seno suma de dos ángulos, queda:

$$y = B \operatorname{sen} [(\omega_0 t + \alpha) + \delta] = B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) \cos \delta + B \cos(\omega_0 t + \alpha) \operatorname{sen} \delta$$

Utilizando la otra ecuación, en x, podemos encontrar seno y coseno de $(\omega_0 t + \alpha)$ en función de x, esto es:

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) = \frac{x}{A}, \quad \cos(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \alpha)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

reemplazando en la expresión encontrada de y, se tiene:

$$y = B \frac{x}{A} \cos \delta + B \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} \operatorname{sen} \delta$$

Despejando el radical, elevando el cuadrado y reordenando, queda:

$$B \sqrt{A^2 - x^2} \operatorname{sen} \delta = Ay - Bx \cos \delta$$

$$B^2 A^2 \operatorname{sen}^2 \delta - B^2 x^2 \operatorname{sen}^2 \delta = A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 \cos^2 \delta$$

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 (\operatorname{sen}^2 \delta + \cos^2 \delta) = A^2 B^2 \operatorname{sen}^2 \delta$$

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 = A^2 B^2 \operatorname{sen}^2 \delta$$

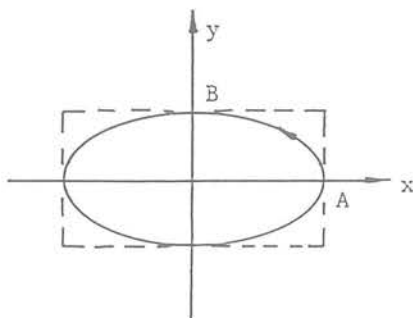
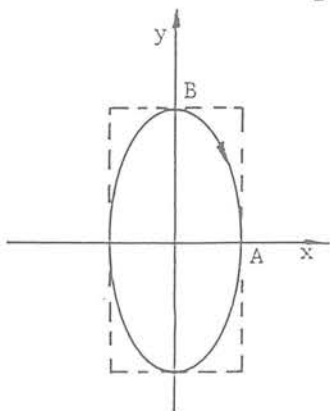
$$x^2 - 2 \frac{A}{B} xy \cos \delta + \frac{A^2}{B^2} y = A^2 \operatorname{sen}^2 \delta$$

Esta expresión $f(x, y)$ es la ecuación de la trayectoria de la partícula en el plano (x, y) . En general, esta ecuación corresponde a una elipse, incluyendo como casos particulares al círculo y a la recta. La forma de la trayectoria particular depende de la diferencia de fase $\delta = (\beta - \alpha)$ y de la relación de las amplitudes A y B. Analicemos algunos casos:

Para, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Elipse: $B > A, \beta > \alpha (\delta = \frac{\pi}{2} > 0)$

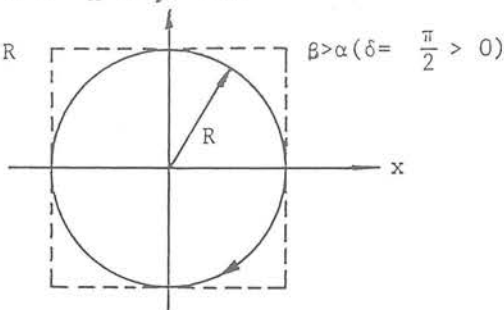
Elipse: $A > B, \beta < \alpha (\delta = -\frac{\pi}{2} < 0)$



La flecha sobre la trayectoria indica el sentido del movimiento. El sentido depende de cual componente adelanta en la fase, es decir, del signo de δ . Para $\delta > 0$ ($\beta > \alpha$) el movimiento es en el sentido horario y para $\delta < 0$ ($\beta < \alpha$) en el sentido antihorario.

Si, además: $A = B \rightarrow x^2 + y^2 = A^2$

círculo: $A = B = R$



Para, $\delta = 0 \rightarrow A^2 y^2 - 2ABxy + B^2 x^2 = 0$

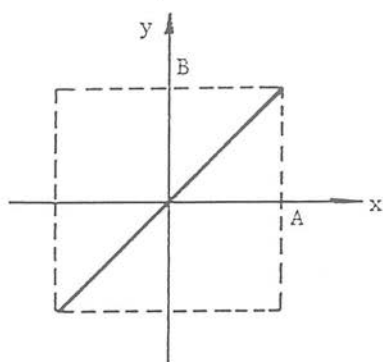
$(Ay - Bx)^2 = 0 \rightarrow Ay = Bx \rightarrow y = \frac{B}{A} x$, Recta

Para, $\delta = \pm \pi \rightarrow A^2 y^2 + 2ABxy + B^2 x^2 = 0$

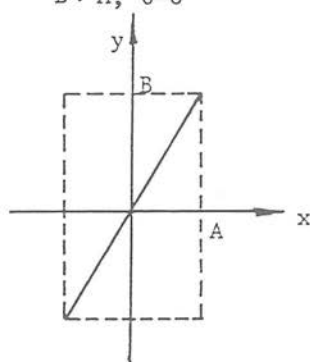
$(Ay + Bx)^2 = 0 \rightarrow Ay = -Bx \rightarrow y = -\frac{B}{A} x$, Recta

(ver fig. pág. sgte.)

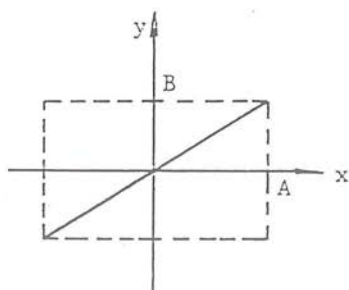
$$A=B, \delta=0$$



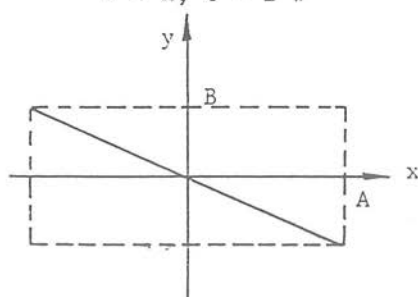
$$B > A, \delta=0$$



$$B < A, \delta=0$$



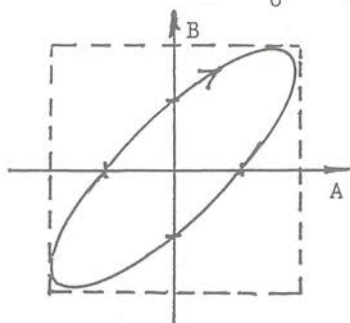
$$B < A, \delta = \pm \pi$$



Para, $\delta = \pm \frac{\pi}{6}$

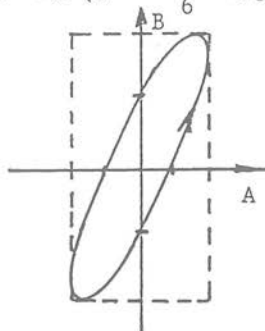
Elipse: $A=B$

$$\beta > \alpha \quad (\delta = \frac{\pi}{6} > 0)$$



Elipse: $B > A$

$$\beta < \alpha \quad (\delta = -\frac{\pi}{6} < 0)$$



Adicionalmente, consideremos la misma partícula pero ahora sometida a la acción de dos fuerzas, cuyas direcciones son mutuamente perpendiculares, restauradoras y elásticas con diferentes constantes, k_x y k_y . Esto es: $F_x = -k_x x$ y $F_y = -k_y y$.

Aplicando la ley de Newton de movimiento en las dos direcciones, se tiene:

. En la dirección x:

$$F_x = -k_x x$$

$$m\ddot{x} + k_x x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_{o_x}^2 x = 0, \text{ con: } \omega_{o_x}^2 = \frac{k_x}{m}$$

$$x = A \text{ sen}(\omega_{o_x} t + \alpha)$$

. En la dirección y:

$$F_y = -k_y y$$

$$m\ddot{y} + k_y y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_{o_y}^2 y = 0, \text{ con: } \omega_{o_y}^2 = \frac{k_y}{m}$$

$$y = B \text{ sen}(\omega_{o_y} t + \beta)$$

Luego, nuevamente se tienen dos oscilaciones armónicas simples, si multáneas en ambas direcciones, pero ahora con diferentes frecuencias angular: $\omega_{o_x} = \sqrt{k_x/m}$ y $\omega_{o_y} = \sqrt{k_y/m}$. En general, las amplitudes y constantes de fase difieren en las dos direcciones, al ser constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales:

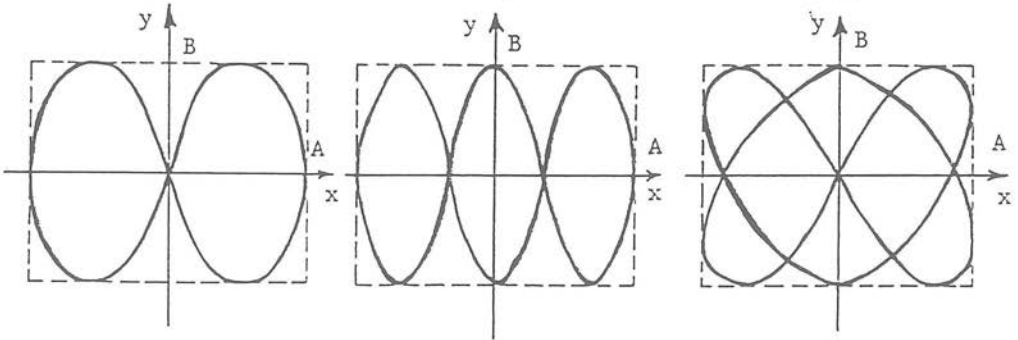
En este caso la trayectoria del movimiento resultante es más complicada, ya no es una elipse, ni círculo ni recta. Si las frecuencias de las dos componentes están en relación de dos números enteros, es decir, si la relación de frecuencias angulares ω_x/ω_y es un número racional, entonces la trayectoria es una curva cerrada que la partícula la retrasa en el tiempo a intervalos regulares. A estas curvas se les conocen como las curvas o figuras de "Lissajous". Si la relación de frecuencias no es un número racional, el camino recorrido por la partícula no se cierra y la figura será extremadamente complicada, aun que esta comprendida dentro de un rectángulo A x B.

Como ejemplo, a continuación se presentan algunas figuras de Lissajous:

$$\frac{\omega_{ox}}{\omega_{oy}} : \frac{1}{2}$$

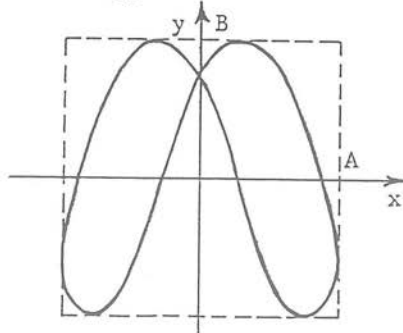
$$\frac{\omega_{ox}}{\omega_{oy}} : \frac{1}{3}$$

$$\frac{\omega_{ox}}{\omega_{oy}} : \frac{2}{3}$$



En los tres casos: $A = B$ y $\delta = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$

Otro ejemplo, para: $\frac{\omega_{ox}}{\omega_{oy}} = \frac{1}{2}$, $A = B$ y $\delta = \frac{\pi}{6}$



Estas curvas se pueden observar utilizando un péndulo doble que oscile, con diferentes longitudes, en dos direcciones perpendiculares. Pero la forma más sencilla y precisa es eléctricamente mediante un osciloscopio, en el cual, se producen dos campos eléctricos perpendiculares con variación senoidal de diferentes frecuencias, intensidades y fases, que actúan sobre el haz de electrones que los atraviesa e impactan la pantalla fluorescentes donde aparece la curva de Lissajous.

Por su simplicidad relacionada con lo tratado anteriormente para el oscilador armónico simple y por su importancia en física, analizaremos en este texto el movimiento oscilatorio de un "sistema de dos cuerpos acoplados elásticamente" por un solo resorte, ideal sin masa, que une a ambos cuerpos. El tratamiento de "osciladores acoplados" es bastante complicado, aún el más simple, que consiste en dos osciladores armónicos iguales acoplados por un resorte que une las masas.

En la fig. 10.12 se muestran a las dos masas m_1 y m_2 interconectadas mediante un resorte de constante elástica k . El sistema se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal sin fricción.

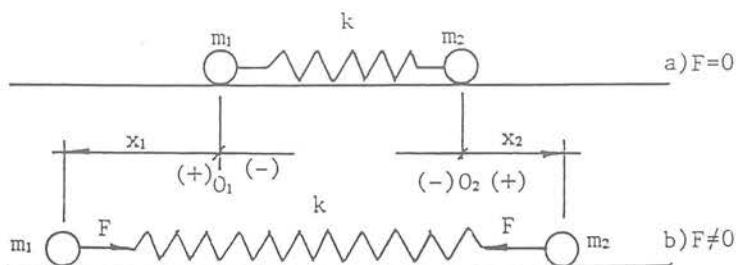


Fig. 10.12 Sistema de dos cuerpos acoplados elásticamente.

Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 interconectados por un resorte de constante k . En la posición:

- a) el resorte está relajado, $F = 0$.
- b) el resorte está estirado, $F \neq 0$.

Si las partículas se localizan con las coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de la posición relajada del resorte y con los sentidos de dirección como se muestran en la fig. 10.12, la deformación o cambio de longitud del resorte, estirado o comprimido, estará dada por:

$$x = x_1 + x_2 \rightarrow \text{si, } \begin{cases} x > 0, & \text{el resorte está estirado.} \\ x = 0, & \text{el resorte está relajado.} \\ x < 0, & \text{el resorte está comprimido.} \end{cases}$$

Luego, la fuerza elástica queda determinada por: $F = -kx$.

Aplicando la ley de Newton del movimiento a ambas masas, se tiene:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -kx \quad \text{y} \quad m_2 \ddot{x}_2 = -kx$$

Para resolverlas simultáneamente multipliquemos la primera por m_2 y la segunda por m_1 y, sumando ambas, queda:

$$\begin{array}{r} m_1 m_2 \ddot{x}_1 = -m_2 kx \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -m_1 kx \\ \hline m_1 m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -(m_1 + m_2) kx \end{array}$$

como: $x = x_1 + x_2$, derivando dos veces, se tiene que: $\ddot{x} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, reemplazando:

$$m_1 m_2 \ddot{x} = -(m_1 + m_2) kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} x = 0$$

llamando "masa reducida" a: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (ver ítem 6.4- Vol. 2), pue
de escribirse:

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu} x = 0$$

definiendo: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, queda:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial matemáticamente idéntica a la obtenida en el ítem 10.2, para el oscilador armónico simple con una sola masa y cuya solución conocemos, esta es:

$$x = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$$

Hay que tener presente que hemos logrado obtener el cambio de longitud del resorte $x(t)$, es decir, el desplazamiento relativo de los

dos cuerpos respecto a la posición de equilibrio del sistema y que, la frecuencia angular ω_0 depende de la masa reducida μ del sistema conformado por ambas masas.

Observe que la masa reducida también puede escribirse como:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

teniéndose siempre que: $\mu < m_1$ y $\mu < m_2$.

El resultado obtenido, ecuación diferencial en x y su solución $x(t)$, puede interpretarse, por ser equivalentes, a un oscilador armónico simple con una masa μ y resorte de constante elástica k , tal como se mostró en la fig. 10.1, cambiando m por μ .

APENDICE I

LA FAMILIA DE LAS FUNCIONES TRIGNOMETRICAS SENO Y COSENO

Recordemos y tengamos presente que las funciones matemáticas trigonométricas quedan definidas circularmente mediante el denominado "círculo trigonométrico" y que en el caso de ángulos agudos pueden interpretarse geométricamente mediante un triángulo rectángulo.

Consideremos primero la función trigonométrica senoidal variable en el tiempo, expresada por:

$$x = \text{sen } t$$

Las características fundamentales de esta función son las siguientes:

- Es periódica en el tiempo con un período 2π .
- Toma valores comprendidos entre -1 y 1 , es decir, $|\text{sen } t| \leq 1$. Por lo que decimos que tiene una amplitud igual a uno.
- Para $t = 0$, tomado como el instante inicial, el valor correspondiente de la función es inicialmente cero.

Para ampliar el rango de estas tres características procedemos, progresivamente, de la siguiente manera:

- Si queremos permitir diferentes períodos multiplicamos la variable t por un número constante arbitrario, digamos ω . Luego:

$$x = \text{sen } \omega t$$

donde t se expresa en segundos y ω en radianes por segundo.

En este caso el período será $2\pi/\omega$.

- Para obtener una mayor amplitud multiplicamos la función por un número constante arbitrario, digamos A . Esto es:

$$x = A \text{ sen } \omega t$$

Como ahora se tiene que $|A \text{ sen } \omega t| \leq A$, la función toma valores comprendidos entre $-A$ y A .

- Si además requerimos que x tenga un determinado valor inicial x_0 para $t = 0$, agregamos un ángulo constante arbitrario δ . Y, finalmente se tiene la siguiente expresión:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \delta)$$

Esta expresión senoidal generalizada, nos permite formular con precisión la descripción cinemática de los diferentes movimientos periódicos. De acuerdo a nuestros requerimientos, tomando valores apropiados de ω , A y δ podremos expresar cualquier función senoidal particular.

Incluso como el coseno tiene idéntico comportamiento matemático al seno, solo que difieren en $\pi/2$ porque en el círculo trigonométrico las referencias son rectas perpendiculares entre sí, el ángulo δ nos permite pasar fácilmente del seno al coseno. Si tomamos $\delta = \phi - \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \delta) = A \text{ sen}(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) = A \text{ cos } (\omega t + \phi)$$

También podemos decir que mediante el ángulo δ estamos expresando una combinación lineal de $\text{sen } \omega t$ y $\text{cos } \omega t$. Veamos, desarrollando el seno suma de dos ángulos (ωt y δ) se tiene:

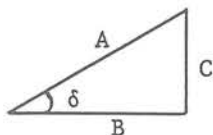
$$x = A \text{ sen}(\omega t + \delta) = A [\text{sen } \omega t \text{ cos } \delta + \text{cos } \omega t \text{ sen } \delta]$$

$$x = A \text{ cos } \delta \text{ sen } \omega t + A \text{ sen } \delta \text{ cos } \omega t$$

Definiendo dos nuevas constantes B y C en reemplazo de A y δ , relacionadas entre ellas geométricamente mediante un triángulo rectángulo como se muestra:

$$B = A \text{ cos } \delta$$

$$C = A \text{ sen } \delta$$



$$A^2 = B^2 + C^2$$

$$\text{tg } \delta = \frac{C}{B}$$

queda,

$$x = B \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{cos} \omega t$$

Luego, por todo lo expuesto decimos que:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \omega)$$

nos expresa a toda la familia de las funciones trigonométricas seno y coseno. O, en forma equivalente alternativa representarlas por:

$$x = A \operatorname{cos} (\omega t + \delta)$$

No está demás aclarar adicionalmente que como el ángulo δ lo introducimos arbitrariamente, también podemos hacerlo con signo negativo y en este caso se escribirá:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t - \delta)$$

Analicemos un poco más la expresión planteada aprovechando la oportunidad para extenderlo en relación al denominado, muy útil y práctico, "Diagrama Fazor o Rotor".

Al argumento de una función trigonométrica, es decir a $(\omega t + \delta)$ se le llama "Fase" y al ángulo δ "constante de fase". En el círculo trigonométrico la fase $(\omega t + \delta)$ es el ángulo que forma, en un instante t , el radio con el eje horizontal de referencia y la constante de fase δ es el ángulo o fase inicial para $t = 0$.

Derivando la fase con respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (\omega t + \delta) = \omega$$

luego ω es la rapidez con la cual cambia la fase y se expresa en radianes/segundo.

Si se toma un círculo trigonométrico de radio A , el cual, en este caso, llamamos "Fazor" o "Rotor", es claro que ω es la rapidez o "velocidad angular" con la cual gira el fazor que genera la función senoidal:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$$

con período $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Luego como $\omega = 2\pi\nu$, también ω recibe el nombre de "Frecuencia angular".

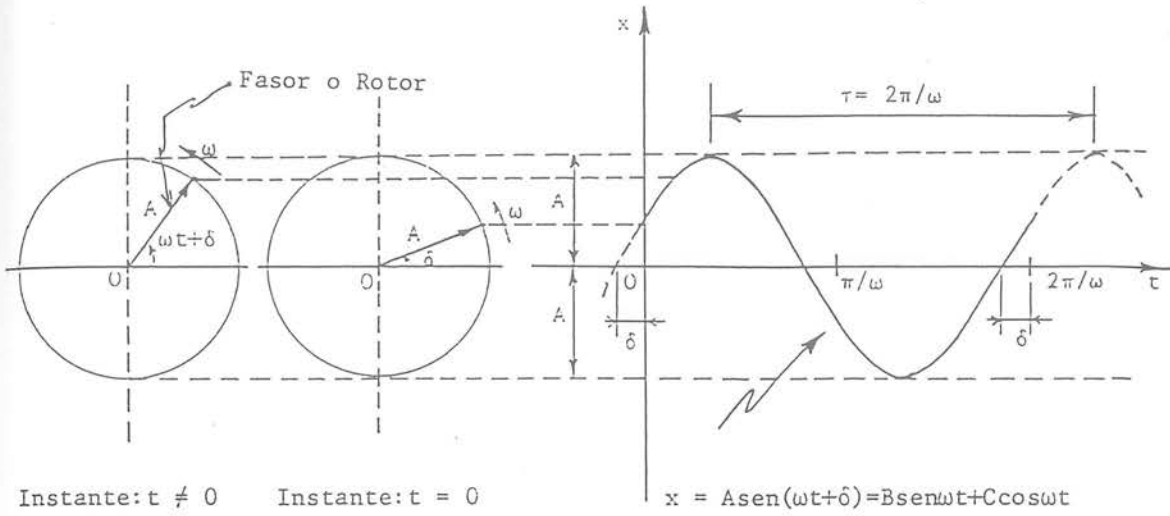


Diagrama Fasor o Rotor

Gráfica de la Función (x vx t)

Observe que si δ es positivo, caso que se muestra, la referencia se adelanta y la gráfica de la función se atrasa en desfasaje con relación a $\delta = 0$. Inversamente si δ es negativo, la referencia se atrasa y la gráfica de la función se desfasa, con relación a $\delta = 0$, adelantándose.

APENDICE II

ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES

A) HOMOGENEA (sin segundo miembro).

Esta ecuación es la más importante que encontramos en física clásica. En general, una ecuación de este tipo tiene la siguiente forma:

$$c_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = 0$$

Para resolverla debemos conocer las siguientes propiedades de esta ecuación:

- Si $x_1(t)$ es una solución y a_1 es una constante, luego $a_1 x_1(t)$ es también una solución.
- Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes, la solución general de la ecuación es una combinación lineal de x_1 y x_2 , esto es:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

Es también importante observar que:

- La ecuación tiene la propiedad de obedecer el "Principio de Superposición". Esto es, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, también es solución de la ecuación.
- La solución general de cualquier ecuación diferencial de segundo orden siempre contiene dos constantes arbitrarias. Se llaman "arbitrarias" porque para cualquier valor que se les asigne a ellas (a_1 y a_2), la solución general satisfecerá la ecuación diferencial. Pero en un problema físico no hay arbitrariedad, depende de las condiciones iniciales. Luego, la solución general contiene en ella todas las posibles soluciones que describen a un grupo, o familia de posibles movimientos que tienen algunas características en común establecidas, por los coeficientes de la ecuación diferencial, pero que difieren en otras y los valores de las dos constantes deben escogerse apropiadamente para que correspondan a las dos condiciones iniciales del problema físico.

Escribamos la ecuación diferencial utilizando los coeficientes β y ω_0 , físicamente definidos en los ítems 10.1 y 10.4, esto es:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Para esta ecuación siempre existe una solución de la forma:

$$x = e^{rt}$$

con derivadas:

$$\dot{x} = r e^{rt}$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0$$

y factorizando e^{rt} , obtenemos una ecuación algebraica de segundo grado en r , llamada ecuación auxiliar:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Esta ecuación tiene, en general, dos raíces, que son:

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{array} \right.$$

Según los valores particulares que tengan los coeficientes β y ω_0 , se presentan dos casos:

* Para : $\omega_0^2 \neq \beta^2 \implies r_1 \neq r_2$ (dos raíces diferentes)

* Para : $\omega_0^2 = \beta^2 \implies r_1 = r_2$ (dos raíces iguales)

Analícemos ambos casos:

* Si las raíces son diferentes se tiene dos funciones independientes ($e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$) que satisfacen la ecuación diferencial. Luego, la

solución general es:

$$x = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t}, \quad \text{para: } r_1 \neq r_2$$

o,

$$x = e^{-\beta t} (a_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + a_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t})$$

En esta solución debemos además considerar cuando se presenta en particular un término imaginario, esto es, cuando: $\omega_0^2 > \beta^2$. Este es el caso físicamente más importante desde el punto de vista oscilatorio.

Para este caso, definiendo:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \text{donde: } \omega_1^2 > 0$$

podemos escribir las raíces de la ecuación auxiliar en su forma compleja:

$$r = -\beta \pm i\omega_1$$

y la solución general tendrá la siguiente forma:

$$x = e^{-\beta t} (a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_1 t})$$

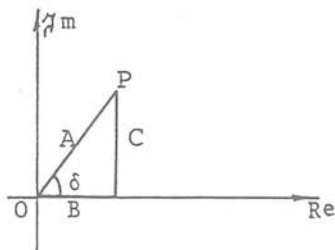
Luego, en este caso, las constantes arbitrarias a_1 y a_2 en general serán también complejas.

Sin embargo, debemos tener en cuenta lo siguiente:

- La solución de un problema físico debe ser real, luego las constantes a_1 y a_2 deben escogerse de tal manera para que x sea real.
- Un número complejo, representado en su forma polar o cartesiana, consta de dos elementos independientes (A, δ) o (B, C):

$$a = A e^{i\delta} \quad (\text{polar})$$

$$a = B + iC \quad (\text{cartesiana})$$



$$B = A \cos \delta$$

$$C = A \sin \delta$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C}{B}$$

Como en la solución general se tiene dos números complejos a_1 y a_2 , se tendrán cuatro constantes arbitrarias en vez de las dos requeridas. Por lo tanto, los cuatro elementos no podrán ser todos independientes, el número de elementos independientes podrá reducirse a los dos requeridos tomando uno de los números complejos como el complejo conjugado del otro.

Por simplicidad usemos la representación polar de un número complejo y tomemos como radio polar $\frac{1}{2} A$:

$$a_1 = \frac{1}{2} A e^{i\delta} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\delta}$$

- Como en la solución general $e^{i\omega_1 t}$ es el conjugado complejo de $e^{-i\omega_1 t}$, si usamos $a_1 = \frac{1}{2} A e^{i\delta}$ con su conjugado complejo $a_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\delta}$, se tendrá que x será enteramente real.

Veamos, con estas consideraciones se tiene:

$$x = e^{-\beta t} \left(\frac{1}{2} A e^{i\delta} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} A e^{-i\delta} e^{-i\omega_1 t} \right)$$

$$x = e^{-\beta t} \frac{1}{2} A \left[e^{i(\omega_1 t + \delta)} + e^{-i(\omega_1 t + \delta)} \right]$$

Utilizando las denominadas relaciones de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

Sumándolas o restándolas y resolviendo para $\cos\theta$ o $\operatorname{sen}\theta$ respectivamente:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

luego con:

$$\cos(\omega_1 t + \delta) = \frac{e^{i(\omega_1 t + \delta)} + e^{-i(\omega_1 t + \delta)}}{2}$$

se tiene que:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta)$$

Esta es la solución general real de la ecuación diferencial para $\omega_1^2 > 0$ ($\omega_0^2 > \beta^2$), con constantes arbitrarias A y δ .

Como ejercicio encontremos también esta solución utilizando la representación cartesiana de un número complejo.

Desarrollando los exponenciales de la solución general encontrada, se tiene:

$$x = e^{-\beta t} (a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_1 t})$$

$$x = e^{-\beta t} [a_1 (\cos \omega_1 t + i \operatorname{sen} \omega_1 t) + a_2 (\cos \omega_1 t - i \operatorname{sen} \omega_1 t)]$$

$$x = e^{-\beta t} [(a_1 + a_2) \cos \omega_1 t + i(a_1 - a_2) \operatorname{sen} \omega_1 t]$$

Tomando las constantes arbitrarias a_1 y a_2 como complejas conjugadas:

$$a_1 = \frac{1}{2} (B + iC) \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} (B - iC)$$

la suma y diferencia de ellas serán:

$$a_1 + a_2 = B \quad , \quad a_1 - a_2 = iC$$

reemplazandolas en la solución:

$$x = e^{-\beta t} (B \cos \omega_1 t - C \operatorname{sen} \omega_1 t)$$

Utilizando las relaciones, arriba establecidas, entre B y C con A y δ :

$$x = e^{-\beta t} (A \cos \delta \cos \omega_1 t - A \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \omega_1 t)$$

$$x = A e^{-\beta t} (\cos \omega_1 t \cos \delta - \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} \delta)$$

la expresión entre paréntesis es el desarrollo trigonométrico del coseno suma de los ángulos, luego, finalmente se tiene:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta)$$

Es importante observar que dependiendo de la definición exacta de la constante arbitraria δ , podemos escribir la solución alternativamente como:

$$x = A e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi)$$

que corresponde a un cambio del ángulo de fase, δ y ϕ difieren en $\frac{\pi}{2}$.

Si: $\phi = \delta + \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$\text{sen}(\omega_1 t + \phi) = \text{sen}(\omega_1 t + \delta + \frac{\pi}{2}) = \text{cos}(\omega_1 t + \delta)$$

Físicamente, un cambio de fase corresponde a un cambio del instante que hemos designado como $t = 0$.

Por lo tanto, como la designación del ángulo de fase es arbitraria (ϕ o δ), podemos escribir indistintamente la solución como:

$$x = A e^{-\beta t} (\text{sen}(\omega_1 t + \delta))$$

También es conveniente observar que esta solución la podemos expresar como una combinación lineal de las funciones seno y coseno de $\omega_1 t$. Desarrollando trigonométricamente el seno suma de dos ángulos, se tiene:

$$x = A e^{-\beta t} (\text{sen } \omega_1 t \text{ cos } \delta + \text{cos } \omega_1 t \text{ sen } \delta)$$

$$x = e^{-\beta t} (A \text{ cos } \delta \text{ sen } \omega_1 t + A \text{ sen } \delta \text{ cos } \omega_1 t)$$

Como: $B = A \text{ cos } \delta$ y $C = A \text{ sen } \delta$, se obtiene:

$$x = e^{-\beta t} (B \text{ sen } \omega_1 t + C \text{ cos } \omega_1 t)$$

Expresión que es también solución general real de la ecuación diferencial para $\omega_1^2 > 0$ ($\omega_0^2 > \beta^2$), pero con constantes arbitrarias B y C .

Finalmente, dentro de este caso ($\omega_0^2 > \beta^2$), consideremos cuando $\beta = 0$, que corresponde a la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se tiene que: $\omega_1 = \omega_0$, y las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$r = \pm i \omega_0$$

Teniéndose como solución general real de la ecuación diferencial:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

o bien:

$$x = B \operatorname{sen} \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$$

Consideremos ahora el otro caso.

* Si las dos raíces para r son iguales: $r_1 = r_2 = r = -\beta$, solo se tiene una solución: $e^{-\beta t}$. Luego, debemos encontrar otra solución. En este caso, otra solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x = t e^{-\beta t}$$

Con derivadas:

$$\dot{x} = e^{-\beta t} - \beta t e^{-\beta t}$$

$$\ddot{x} = -2\beta e^{-\beta t} + \beta^2 t e^{-\beta t}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-2\beta e^{-\beta t} + \beta^2 t e^{-\beta t} + 2\beta e^{-\beta t} - 2\beta^2 t e^{-\beta t} + \omega_0^2 t e^{-\beta t} = 0$$

factorizando y simplificando:

$$-\beta^2 + \omega_0^2 = 0$$

Como en este caso: $\omega^2 = \beta^2$, se tiene que: $t e^{-\beta t}$ también es una solución de la ecuación.

Luego, como $e^{-\beta t}$ y $t e^{-\beta t}$ son independientes, la solución general para raíces idénticas estará dada por:

$$x = a_1 e^{rt} + a_2 t e^{rt}, \quad \text{para: } r_1 = r_2 \rightarrow r = -\beta$$

o,

$$x = e^{-\beta t} (a_1 + a_2 t)$$

B) No homogénea (con segundo miembro).

Ecuaciones de este tipo tienen la forma:

$$c_2 \frac{d^2x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = f(t)$$

o bien, escribiéndola de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = q f(t)$$

Para resolver esta ecuación debemos conocer la siguiente propiedad:

- Si $x_p(t)$ es una solución cualquiera de la ecuación diferencial dada (con un segundo miembro $f(t)$ en particular), y sea $x_e(t)$ la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (sin segundo miembro), la solución general es:

$$x(t) = x_e(t) + x_p(t)$$

podemos comprobar fácilmente reemplazando esta expresión y sus derivadas (\dot{x} y \ddot{x}) en la ecuación:

$$\ddot{x}_c + \dot{x}_p + 2\beta(\dot{x}_c + \dot{x}_p) + \omega_0^2 (x_c + x_p) = q f(t)$$

reordenando:

$$(\ddot{x}_c + 2\beta\dot{x}_c + \omega_0^2 x_c) + (\ddot{x}_p + 2\beta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p) = q f(t)$$

Como el primer paréntesis es igual a cero y el segundo igual a $q f(t)$, se cumple la igualdad.

Luego, la solución general de una ecuación diferencial no homogénea es:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

A x_c se le denomina la parte complementaria o "solución complementaria" y al término x_p , particular o "solución particular".

En el acápite A de este apéndice II se ha planteado el método general para encontrar la solución complementaria x_c , luego, solo falta encontrar, por inspección, una solución particular x_p de la ecuación diferencial tal cual, es decir, con la función particular $f(t)$ dada.

Observe que la solución complementaria x_c contiene las dos constantes arbitrarias (a_1 y a_2) y que la solución particular x_p no contiene constante arbitraria alguna. Esta última queda completamente definida al encontrarla para satisfacer específicamente a la función del segundo miembro de la ecuación.

APENDICE III

LEONHARD EULER (1707 - 1783)

Nació en Basilea (Suiza), hijo de un matemático y pastor protestante, empezó a estudiar para ser clérigo, pero dejó el seminario para dedicarse a las ciencias exactas, aunque continuó siendo creyente muy devoto.

Estudió en la Universidad de Basilea donde fue un alumno muy destacado, a los 19 años recibió una invitación, del por entonces importante centro intelectual, de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, trasladándose allí en 1727 hasta 1741 en una primera época, que interrumpió entre 1741 y 1766 para trabajar en la Academia de Ciencias de Berlín, retornando a San Petersburgo en 1766 en una segunda época hasta su muerte en 1783.

Euler, además de ser uno de los grandes de la historia de la matemática, fué el mejor físico teórico del siglo XVIII. A lo largo de muchas obras, un siglo después de Newton, desarrolló la forma matemática de la mecánica y sus aplicaciones, dándole su forma actual. Por esto, se le considera el fundador de la mecánica analítica.

Introdujo el concepto de masa puntual, haciendo notar que las Leyes de Newton solo se aplican, en sentido estricto, a masa puntuales. Newton había usado la palabra cuerpo de manera vaga. Fué el primero en considerar la aceleración y usar la idea de vector, permitiéndole emplear ejes de coordenadas y por lo tanto, tal vez poco conocido, el primero en escribir la famosa segunda Ley de Newton como "fuerza igual a masa por aceleración", en la forma hoy conocida $\vec{F} = m\vec{a}$. Es decir, en forma de ecuación diferencial.

También fué el primero en estudiar los sistemas de partículas, in-

trodujo el concepto de momentum angular, planteando la expresión, que hemos utilizado ya en el volumen anterior, $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$. Otro concepto que introduce es el de velocidad angular y desarrolla prolíficamente el estudio del cuerpo rígido, obteniendo importantes ecuaciones que hoy en día llevan su nombre. También realizó importantes contribuciones en la mecánica de flúidos y al cálculo de variaciones, resolviendo problemas mecánicos usando máximos y mínimos, metodología perfeccionada más tarde por Lagrange (1736 - 1813).

Para concluir, cabe destacar que además de su prolífica labor científica, se dió tiempo para ocuparse de muchas tareas administrativas en las dos instituciones que trabajó y para el gobierno. También hay que mencionar que a su muerte dejó muchos trabajos inéditos que fueron publicados posteriormente por la academia de ciencias.

PROBLEMAS

1. Plantear la solución general del oscilador armónico simple utilizando la función coseno y, en este caso, determinar las constantes arbitrarias para las condiciones iniciales genéricas a $t=0: x=x_0$ y $\dot{x} = v_0$.

Para el o.a.s. la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{con: } \omega_0^2 = k/m$$

teniendo como solución general, utilizando la función coseno, digamos:

$$x = A \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$$

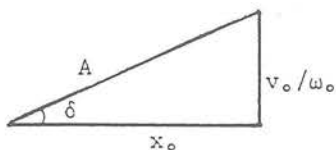
Para las c.i. dadas, se tendrá:

$$x_0 = A \cos(-\delta) = A \cos \delta$$

$$v_0 = -A \omega_0 \sin(-\delta) = A \omega_0 \sin \delta$$

Resolviendo simultáneamente se encuentran las constantes arbitrarias A y δ , procediendo geométricamente:

$$\cos \delta = \frac{x_0}{A}$$



$$\sin \delta = \frac{v_0/\omega_0}{A}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\delta = \arctg\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)$$

Compare con los valores obtenidos en el ítem 10.2.

Como ejercicio pasemos la solución a combinación lineal de $\sin \omega_0 t$ y $\cos \omega_0 t$, esto es:

$x = A \cos(\omega_0 t - \delta) = (A \sin \delta) \sin \omega_0 t + (A \cos \delta) \cos \omega_0 t = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$, con:

$$B = A \sin \delta = A \frac{v_0/\omega_0}{A} = \frac{v_0}{\omega_0}$$

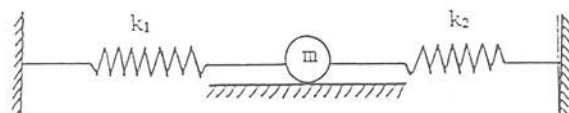
$$C = A \cos \delta = A \frac{x_0}{A} = x_0$$

Luego, se tendrá como solución:

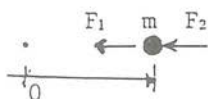
$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t + x_0 \text{ cos } \omega_0 t$$

2. Una masa m se encuentra apoyada sobre una mesa horizontal sin fricción y unida, en sentidos opuestos, a dos resortes sujetos a soportes fijos tal como se muestra en la figura.

Encontrar la frecuencia de la oscilación horizontal.



D.C.L. (m)



La ecuación diferencial del movimiento, será:

$$m\ddot{x} = -F_1 - F_2 = -k_1 x - k_2 x$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

Con: $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

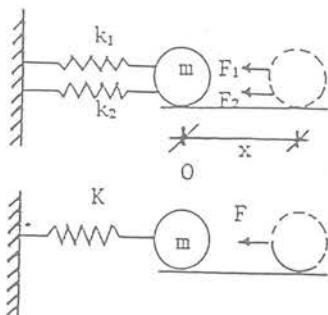
y la frecuencia del movimiento oscilatorio armónico, será:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

- 3.- En un sistema oscilatorio con varios resortes, algunas veces, se requiere reemplazar todos los resortes por solo uno, con la condición de que el cuerpo ejecute idéntico movimiento oscilatorio.

En particular, encontrar la constante K del resorte elásticamente equivalente cuando se tienen dos, o más, resortes montados de la siguiente manera: a) en Paralelo y b) en Serie.

a) Resortes en Paralelo:



Para el sistema en paralelo se tiene:

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x \Rightarrow m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

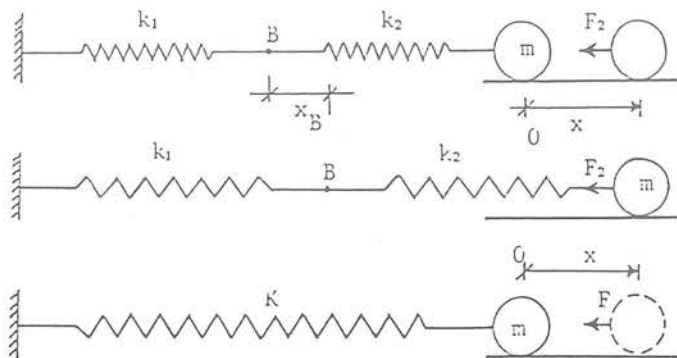
Para un oscilador simple equivalente se tiene:

$$m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

Luego, la constante K del resorte elásticamente equivalente, será:

$$K = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^N k_i$$

b) Resortes en Serie:



En el sistema en serie, sobre la masa m actúa la acción directa del resorte k_2 , cuya deformación es: $(x - x_B)$. Luego, aplicando la ley de Newton del movimiento, se tiene:

$$m\ddot{x} = -k_2(x - x_B)$$

Como en esta ecuación aparece x_B , deformación del resorte k_1 , debemos encontrar una relación entre x_B y x .

Para cualquier posición x , la fuerza es la misma para ambos resortes y podemos tener la siguiente relación:

$$F = k_2(x - x_B) = k_1 x_B \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene:

$$m\ddot{x} = -k_2(x - x_B) = -k_1 x_B = -k_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2} x$$

$$m\ddot{x} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x = 0$$

Teniéndose para el oscilador simple:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

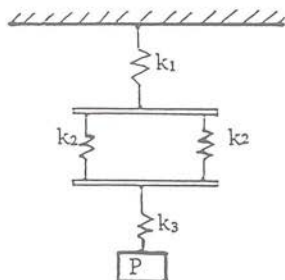
La constante K del resorte elásticamente equivalente, será:

$$K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i}}$$

Generalmente se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{K} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i}$$

- 4.- Una carga P está colgada del techo mediante un sistema de resortes dispuestos como se muestra en la figura. Las barras horizontales son muy livianas, de peso despreciable comparadas con el peso P.



Determinar la ecuación del movimiento oscilatorio de P cuando se le saca de su posición de equilibrio vertical. Encontrar el período de oscilación.

Utilizando los resultados obtenidos en el problema anterior, encontremos primero la constante elástica K equivalente del sistema de suspensión. Esta será:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{(k_2 + k_2)} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{2k_2 k_3 + k_1 k_3 + 2k_1 k_2}{2k_1 k_2 k_3}$$

$$K = \frac{2k_1 k_2 k_3}{2k_2 k_3 + k_1 k_3 + 2k_1 k_2}$$

y, la ecuación del movimiento será:

$$\frac{P}{g} \ddot{y} + Ky = 0 \quad \Rightarrow \quad y = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

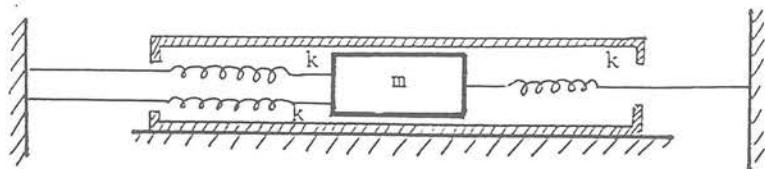
con frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{P/g}} = \sqrt{\frac{gK}{P}}$

El período de oscilación es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gK}} = 2\pi \sqrt{\frac{P(2k_2 k_3 + k_1 k_3 + 2k_1 k_2)}{2g k_1 k_2 k_3}}$$

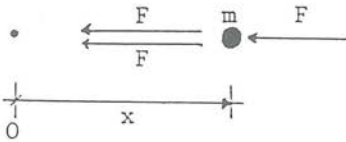
5. Un pistón se mueve sin fricción dentro de un cilindro y sometido a la acción de tres resortes iguales, dispuestos como se muestra en la figura.

Encontrar la solución para el sistema así formado, bajo condiciones iniciales a $t = 0$: $x_0 = A_0$ y $v_0 = 0$.



La ecuación diferencial del movimiento del pistón de masa m , de acuerdo a la Ley de Newton, será:

D.C.L. (m)



$$m\ddot{x} = -3F = -3kx$$

$$m\ddot{x} + 3kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x = 0$$

Con: $\omega_o^2 = \frac{3k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$

Teniendo como solución general:

$$x = A \text{ sen } (\omega_o t + \delta)$$

y velocidad : $\dot{x} = A \omega_o \text{ cos } (\omega_o t + \delta)$

Para las c.i. dadas, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} A_o &= A \text{ sen } \delta \\ 0 &= A \omega_o \text{ cos } \delta \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = A_o$$

Luego: $x = A_o \text{ sen } (\omega_o t + \frac{\pi}{2}) = A_o \text{ cos } \omega_o t$

Recomendación: cuando la c.i. de velocidad es nula $v_o = 0$ como en este caso, es mejor, más simple, plantear la solución general con la función coseno, como en el problema N° 1, porque se tendrá que $\delta = 0$.
Veamos:

$$x = A \text{ cos } (\omega_o t - \delta) \Rightarrow x_o = A \text{ cos } (-\delta) = A \text{ cos } \delta$$

$$\dot{x} = -A \omega_o \text{ sen } (\omega_o t - \delta) \Rightarrow 0 = -A \omega_o \text{ sen } (-\delta) = A \omega_o \text{ sen } \delta$$

se tiene:

$$\text{sen } \delta = 0 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow \text{cos } \delta = 1 \rightarrow A = x_o$$

Luego:

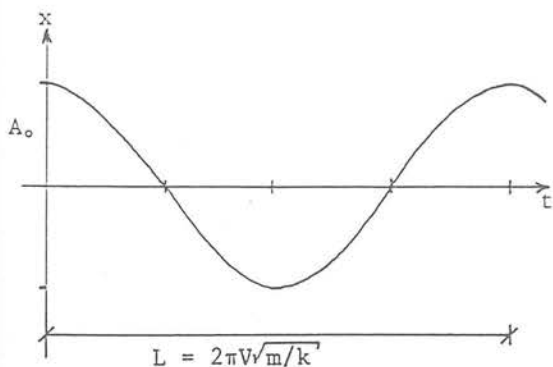
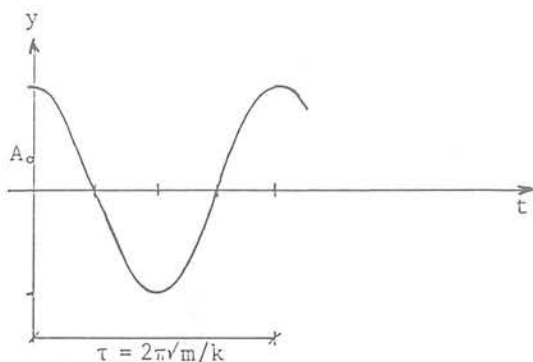
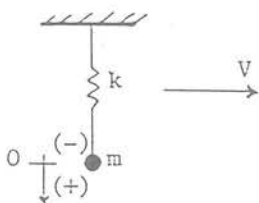
$$x = x_o \text{ cos } \omega_o t$$

Por supuesto, como esperamos, se obtiene la misma solución.

6. Una masa m cuelga del techo mediante un resorte de constante elástica k . Determinar la oscilación alrededor de la posición de equilibrio con condiciones iniciales $t = 0: y_o = A_o, v_o = 0$.

Graficar y vs t .

Si el oscilador se desplaza horizontalmente con velocidad V constante, determinar la distancia recorrida cuando la masa alcanza nuevamente la condición inicial vertical $y_0 = A_0$. Graficar y vs. x , indicando en este croquis la longitud L de la distancia calculada.



Aplicando la ley de Newton y resolviendo para las c.i. dadas, se tiene:

$$m\ddot{y} = -ky \rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \text{ con: } \omega_0^2 = k/m$$

$$y = A \sin(\omega_0 t + \delta) \rightarrow A_0 = A \sin \delta$$

$$\dot{y} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \rightarrow 0 = A \omega_0 \cos \delta$$

Las constantes arbitrarias δ y A , serán:

$$\cos \delta = 0 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \delta = 1 \rightarrow A = A_0$$

Luego:

$$y = A_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = A_0 \cos \omega_0 t$$

con período:

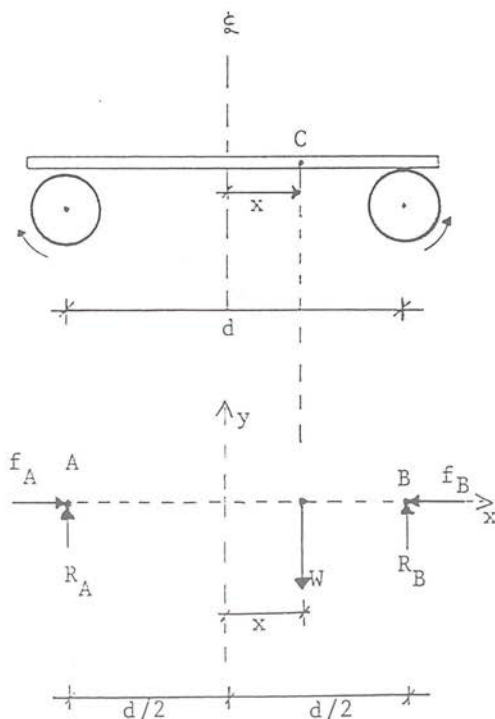
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{m/k}$$

Finalmente, la distancia L horizontal recorrida en el tiempo τ , esto es, en el período τ para que la masa m alcance nuevamente la posición vertical A_0 , será:

$$L = V\tau = V 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$L = 2\pi V \sqrt{\frac{m}{k}}$$

7. Dos cilindros de radio R , cuyos ejes están separados una distancia $d > 2R$, giran en sentidos opuestos. Una tabla de peso W y longitud $L > d$, se coloca encima de los cilindros. Si el coeficiente de fricción entre la tabla y los cilindros es μ , demostrar que el movimiento de la tabla es oscilatorio armónico con respecto al eje de simetría del sistema.



Si el centro C de la tabla coincide con el eje de simetría, las reacciones R_A y R_B son iguales y consecuentemente, las fuerzas de fricción con los cilindros también lo serán. Pero, además como los cilindros giran en sentidos opuestos, las fuerzas de fricción que actúan horizontalmente sobre la tabla tendrán también sentidos opuestos. Por lo tanto, el punto C se encuentra en su posición de equilibrio. Si se le saca de su posición de equilibrio, las reacciones ya no serán iguales, ni tampoco las fuerzas de fricción, dando origen al movimiento de vaiven horizontal de la tabla.

Determinemos las reacciones y las fuerzas de fricción para una posición x del punto C , medida a partir de la posición de equilibrio.

$$\Sigma \Gamma_B = 0 \rightarrow R_A d = W \left(\frac{d}{2} - x \right) \rightarrow R_A = W \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d} \right) \Rightarrow f_A = \mu R_A = \mu W \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d} \right)$$

$$\Sigma \Gamma_A = 0 \rightarrow R_B d = W \left(\frac{d}{2} + x \right) \rightarrow R_B = W \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d} \right) \Rightarrow f_B = -\mu R_B = -\mu W \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d} \right)$$

Luego, la fuerza de rozamiento total que actúa sobre la tabla es:

$$F = f_A + f_B = \mu W \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d} \right) - \mu W \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d} \right) = \mu W \left(-2 \frac{x}{d} \right) = - \left(\frac{2\mu W}{d} \right) x$$

Si llamamos M a la masa de la tabla: $F = - \left(\frac{2\mu g M}{d} \right) x$ y, aplicando la ley de Newton del movimiento, se tiene:

$$M\ddot{x} = - \left(\frac{2\mu g M}{d} \right) x \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{2\mu g}{d} \right) x = 0$$

Por lo tanto, el movimiento es oscilatorio armónico simple:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta), \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}}$$

A y δ son las constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales dadas horizontalmente a la tabla para sacarla de su posición de equilibrio.

8. Demuestre que el movimiento de una partícula a través de un túnel imaginario excavado diametralmente en la tierra, supuesta de densidad uniforme, es armónico simple. Encuentre la frecuencia natural del movimiento y compárela con la frecuencia de rotación de un satélite alrededor de la tierra, en su superficie.

El movimiento de una partícula en un túnel, más aún, no limitado al caso diametral, ya se ha estudiado anteriormente en el Cap. 8, prob.8, Vol. 2, pág. 340.

Se encontró que la fuerza restauradora que actúa sobre la partícula dentro del túnel es lineal con el desplazamiento, en particular:

$$F = - \left(\frac{GMm}{R^3} \right) x$$

y en función de la aceleración de la gravedad: $g = \frac{GM}{R^2}$, es:

$$F = - \left(\frac{mg}{R} \right) x$$

llamando: $k = \frac{mg}{R}$, se tiene: $F = - kx$.

Luego, el movimiento de la partícula será oscilatorio armónico simple, teniéndose:

$$m\ddot{x} = - \left(\frac{mg}{R} \right) x \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{g}{R} \right) x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

Por lo tanto, la frecuencia natural de la oscilación es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

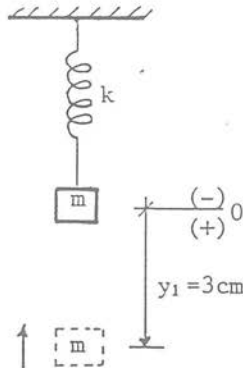
Por otro lado, para un satélite que gira con un radio R alrededor de la tierra, problema también resuelto anteriormente ver prob. 13, cap. 8, Vol. 2, pág. 347, la velocidad angular o frecuencia de rotación, es:

$$m \omega^2 R = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{R^3} = \frac{g}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Finalmente, comparando ambos resultados: $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$

9 . Un bloque de masa 22kg esta suspendido verticalmente mediante un resorte de constante elástica 22N/cm.

El bloque se pone a oscilar libremente en la vertical y cuando está pasando a 3cm por debajo de la posición de equilibrio, su velocidad medida es de 18cm/s hacia arriba. Determinar la amplitud del movimiento, velocidad y aceleración máximas del bloque.



$$v_1 = -18 \text{ cm/s}$$

$$C_{on} = k = 22 \text{ N/cm} = 2200 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2200}{22}} = \sqrt{100} = 10 \text{ rad/s}$$

El desplazamiento del movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio 0, en general, esta dado por:

$$y = A \text{ sen}(\omega_0 t + \delta)$$

Consecuentemente, la velocidad y aceleración por:

$$v = \dot{y} = A \omega_0 \text{ cos}(\omega_0 t + \delta)$$

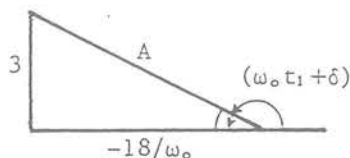
$$a = \ddot{y} = -A \omega_0^2 \text{ sen}(\omega_0 t + \delta)$$

Se sabe que para un tiempo t_1 , se tiene que: $y_1 = 3\text{cm}$ y $v_1 = -18\text{cm/s}$.

Reemplazando:

$$3 = A \sin(\omega_0 t_1 + \delta) \Rightarrow \sin(\omega_0 t_1 + \delta) = \frac{3}{A}$$

$$-18 = A \omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \delta) \Rightarrow \cos(\omega_0 t_1 + \delta) = \frac{-18/\omega_0}{A}$$



Luego:

$$A = \sqrt{3^2 + \left(\frac{18}{10}\right)^2} = \sqrt{12.24} = 3.5\text{cm}$$

$$v_{\text{máx}} = A \omega_0 = 3.5 \times 10 = 35\text{ cm/s}$$

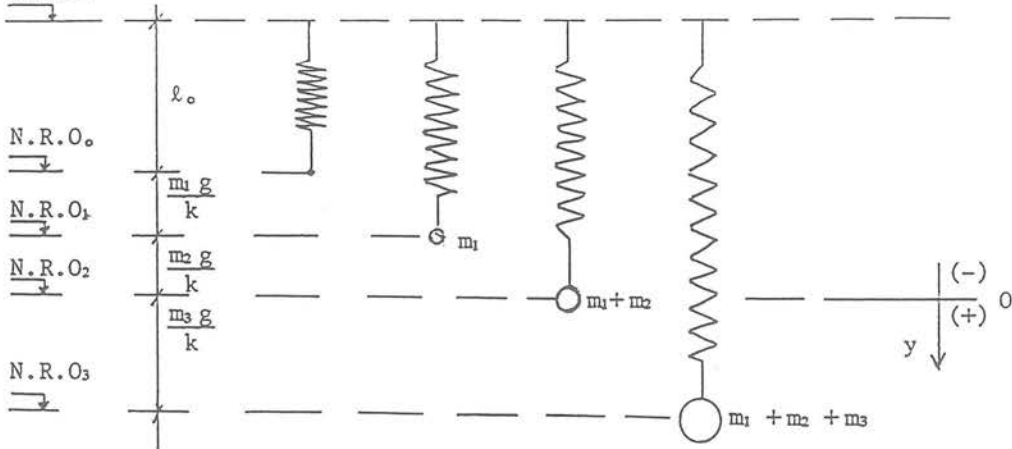
$$a_{\text{máx}} = | -A \omega_0^2 | = A \omega_0^2 = 3.5(10)^2 = 350\text{cm/s}^2$$

10. Un resorte de constante elástica k , masa despreciable y longitud propia l_0 , se sujeta de un extremo al techo quedando en posición vertical. En el extremo libre se cuelgan tres cuerpos cuyas masas son m_1 , m_2 y m_3 , quedando en equilibrio.

Si se suelta súbitamente y cae el cuerpo de masa m_3 , determinar la ecuación de movimiento del sistema.

En la figura se muestran los niveles de referencia correspondientes a las diferentes posiciones de equilibrio cuando se colocan las masas m_1 , m_2 y m_3 . (En posición de equilibrio: $mg = ky$).

N.R.T.



Al soltarse la masa m_3 , la acción restauradora del resorte actúa sobre la masa $(m_1 + m_2)$, es decir, el sistema oscilador está conformado por el resorte k y masa $(m_1 + m_2)$. Su posición de equilibrio es el N.R.O₂ y, por lo tanto, el sistema oscilará alrededor de este punto. La masa m_3 establece la condición para iniciar el movimiento oscilatorio, es decir, la condición inicial $y_0 = (N.R.O_3 - N.R.O_2) = \frac{m_3 g}{R}$, con $v_0 = 0$.

Luego, con respecto al sistema de referencia que se muestra en la figura, la ecuación diferencial que establece la Ley de Newton para el movimiento, será:

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} = -ky$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{k}{m_1 + m_2} \right) y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad , \quad \text{con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$y = A \sin(\omega_0 t + \delta)$$

con velocidad:

$$\dot{y} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Las constantes arbitrarias A y δ , para las c.i. dadas:

$$y_0 = \frac{m_3 g}{k} \quad \text{y} \quad v_0 = 0$$

serán:

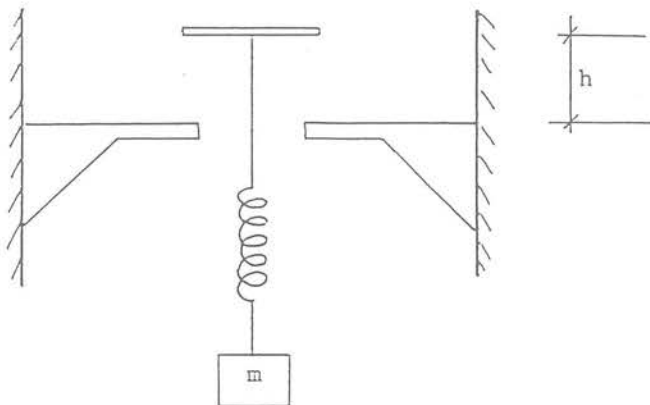
$$0 = A \omega_0 \cos \delta \rightarrow \cos \delta = 0 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \delta = 1$$

$$\frac{m_3 g}{k} = A \sin \delta \rightarrow A = \frac{m_3 g}{k}$$

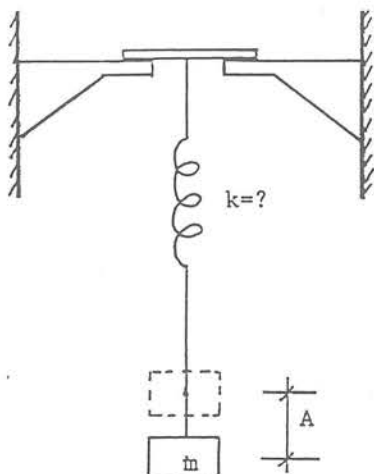
Luego, finalmente, la solución pedida es:

$$y = \frac{m_3 g}{k} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m_3 g}{k} \cos \omega_0 t$$

11. El sistema masa-resorte que se muestra en la figura se suelta desde una altura h y después de chocar el retén en las consolas laterales, el bloque de masa m desciende una distancia A . Determinar cuánto tiempo demora el sistema en regresar a la posición inicial, es decir, en efectuar una oscilación completa.



El sistema tiene una energía potencial inicial y al soltarlo se convierte en energía cinética. Luego del choque se convierte en energía potencial elástica estirándose el resorte la longitud A . En ese instante, la masa invierte su movimiento y la energía nuevamente se convierte en cinética. Finalmente, regresando a la posición inicial la energía se convierte otra vez en potencial.



Inicialmente la energía mecánica total es sólo potencial, esto es: $E = mgh$

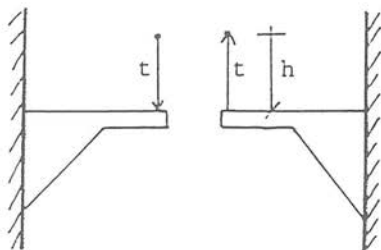
En la posición mostrada, cuando el resorte se ha estirado A , la energía mecánica total es sólo potencial elástica y esta es:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Igualando estas dos expresiones, por conservación de energía, se tiene:

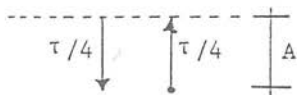
$$\frac{1}{2} k A^2 = mgh \Rightarrow k = \frac{2mgh}{A^2}$$

Esto nos ha permitido determinar la constante elástica del resorte.



El tiempo total que demorará el sistema en regresar a su posición inicial desde el instante en que se suelta, será:

$$T = 2t + 2 \frac{\tau}{4} = 2t + \frac{\tau}{2}$$



Donde t es el tiempo de caída desde la altura h hasta el instante del choque y τ es el período del oscilador masa-resorte. Encontramos estos tiempos:

. Tiempo de caída libre:

$$\frac{1}{2} g t^2 = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

. Período del oscilador armónico libre:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{2mgh}}{A^2}} = \frac{2\pi A}{\sqrt{2gh}}$$

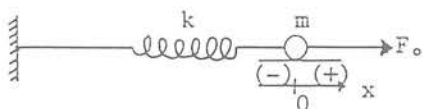
Reemplazando, se tiene el tiempo pedido de una oscilación completa del sistema, este es:

$$T = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{1}{2} \frac{2\pi A}{\sqrt{2gh}} = \frac{4h + \pi A}{\sqrt{2gh}}$$

12. A un oscilador armónico simple de masa m y constante elástica k que se encuentra en reposo se le aplica una fuerza constante F_0 . Encontrar el movimiento resultante y graficar x vs t , posición de la partícula medida a partir de $x = 0$ como condición inicial a $t = 0$ para el resorte relajado. Describir el movimiento.

Para el oscilador armónico simple con fuerza externa constante, en el ítem 10.3 hemos encontrado:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}$$



$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{k},$$

$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{x}_0 = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

para las c.i. @ $t = 0$: $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, se tiene:

$$v_0 = 0 = A \omega_0 \cos \delta \rightarrow \cos \delta = 0 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \delta = 1$$

$$x_0 = 0 = A \sin \delta + \frac{F_0}{k} = A + \frac{F_0}{k} \rightarrow A = -\frac{F_0}{k}$$

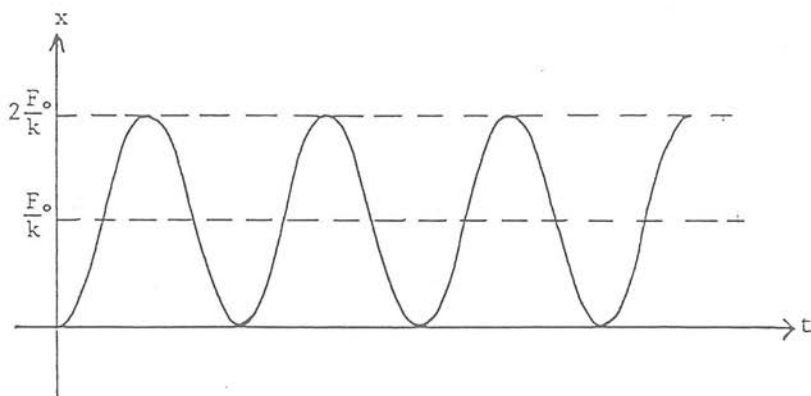
Luego, la solución será:

$$x = -\frac{F_0}{k} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{F_0}{k} = -\frac{F_0}{k} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{k}$$

$$x = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Gráfica en la pág. sgte.

Gráfico x vs t :



Por consiguiente, se tiene un movimiento oscilatorio armónico:

$$\frac{F_0}{k} \cos \omega_0 t \text{ alrededor de su posición de equilibrio estático: } x_e = \frac{F_0}{k} .$$

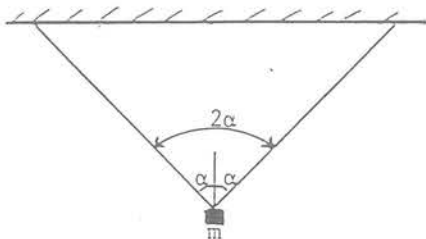
13. Encontrar la frecuencia de oscilación del sistema masa-resorte cuando está, en conjunto, acelerado horizontalmente con valor constante tal como se muestra en la figura.



Cuando el sistema no está oscilando y avanza con una aceleración a_0 , se tendrá que el resorte está permanentemente estirado por una fuerza constante $F_0 = ma_0$. Por lo tanto, no se diferencia en nada, p.e., a un resorte vertical con la masa suspendida en su extremo sometida a la acción de la gravedad $W = mg$. Este caso ya lo hemos analizado en el ítem 10.3, habiendo encontrado que la acción constante no afecta a la oscilación alrededor del punto de equilibrio.

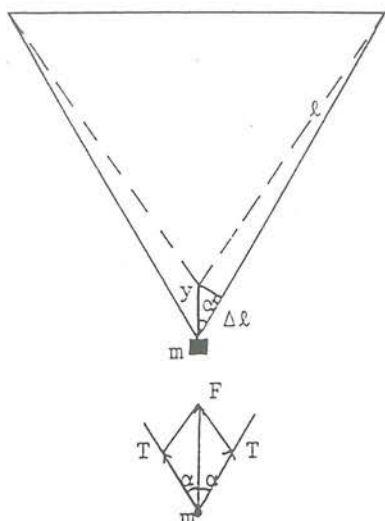
Luego, la frecuencia natural del sistema seguirá siendo la misma, es decir: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

14. En el sistema mostrado en equilibrio en la figura se le comunica a la masa m una energía inicial desplazándola ligeramente de su posición de equilibrio y liberándola. Determinar la frecuencia angular del movimiento oscilatorio libre utilizando las aproximaciones pertinentes para pequeñas oscilaciones cuando el desplazamiento inicial es: a) vertical y b) horizontal.



Los tirantes rígidos son iguales, de longitud l , área A y módulo elástico γ .
 Encontrar la relación entre los períodos de ambos casos: a) y b).
 En particular para $\alpha = 45^\circ$.

a) Vertical



La fuerza elástica corresponde a un pequeño desplazamiento vertical y de la masa m , será:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &\approx y \cos \alpha \\ T &= \frac{YA}{l} \Delta l \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{YA}{l} y \cos \alpha = \left(\frac{YA \cos \alpha}{l} \right) y$$

Y , la fuerza vertical restauradora:

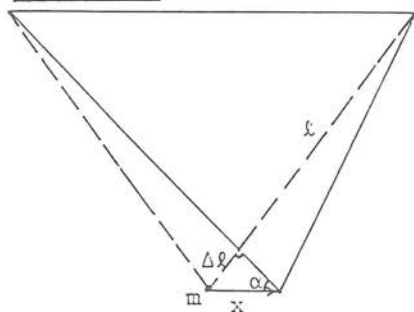
$$F = -2T \cos \alpha = - \left(\frac{2YA \cos^2 \alpha}{l} \right) y = -K_y y$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento de la masa m , para pequeñas oscilaciones verticales, será:

$$\ddot{m}y = -K_y y \rightarrow \ddot{m}y + K_y y = 0 \rightarrow \ddot{y} + \omega_o^2 y = 0$$

con $K_y = \frac{2YA \cos^2 \alpha}{l} \rightarrow \omega_o^2 = \frac{2YA \cos^2 \alpha}{ml} \rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{2YA}{ml} \cos \alpha}$

b) Horizontal.-



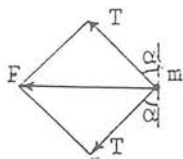
La fuerza elástica corresponde a un pequeño desplazamiento horizontal x de la masa m , será:

$$\Delta l \approx x \operatorname{sen} \alpha$$

$$T = \frac{YA}{l} \Delta l = \frac{YA}{l} x \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{YA \operatorname{sen} \alpha}{l} \right) x$$

Y, la fuerza horizontal restauradora:

$$F \approx - 2T \operatorname{sen} \alpha = - \left(\frac{2YA \operatorname{sen}^2 \alpha}{l} \right) x = -k_x x$$



Luego, la ecuación diferencial del movimiento de la masa m , para pequeñas oscilaciones horizontales, será:

$$m\ddot{x} = -K_x x \rightarrow m\ddot{x} + K_x x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_{o_x}^2 x = 0$$

$$\text{Con: } K_x = \frac{2YA \operatorname{sen}^2 \alpha}{l} \rightarrow \omega_{o_x}^2 = \frac{2YA \operatorname{sen}^2 \alpha}{ml} \rightarrow \omega_{o_y} = \sqrt{\frac{2YA}{ml} \operatorname{sen} \alpha}$$

- Relación de períodos:

$$\frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{2\pi/\omega_{o_y}}{2\pi/\omega_{o_x}} = \frac{\omega_{o_x}}{\omega_{o_y}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Para } \alpha = 45^\circ : \frac{\tau_y}{\tau_x} = 1 \rightarrow \tau_y = \tau_x \rightarrow \omega_{o_y} = \omega_{o_x}$$

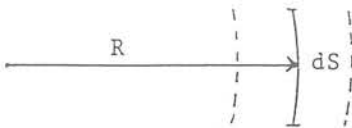
15. Determinar la frecuencia de variación radial elástica de un anillo R, sección transversal A, densidad ρ y módulo elástico Y.
 Nota: resolver primero el problema N° 42 del capítulo 9 (anterior).

En el problema indicado (9-42) se encontró la deformación radial ΔR del anillo bajo la acción de una fuerza radial, longitudinalmente uniforme, q (N/m). Esto es:

$$\Delta R = \frac{qR^2}{YA}$$

llamando a la deformación $\Delta R = x$ a partir de la posición de equilibrio, la fuerza elástica restauradora radial por unidad de longitud, será:

$$q = - \left(\frac{YA}{R^2} \right) x$$



Para un elemento dS de longitud, aplicando radialmente la Ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento vibratorio será:

$$(-) \quad (+) \\ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{---} x \text{---} \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\rho A d s \ddot{x} = - \left(\frac{YA}{R^2} \right) x d s$$

$$\rho \ddot{x} + \frac{Y}{R^2} x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{Y}{\rho R^2} x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0, \text{ con: } \omega_o = \frac{Y}{\rho R^2}$$

Luego, la frecuencia pedida es:

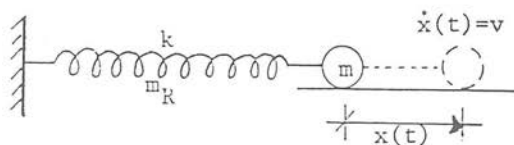
$$v = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$|F| = q d s \quad d m = \rho A d s \\ (-) \quad (+) \\ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{---} x \text{---} \\ \rightarrow \end{array}$$

16. Considere que en un oscilador armónico simple el resorte, de constante k , tiene una masa m_R , pequeña, pero no despreciable comparada con la masa m del oscilador.

Determinar el efecto que produce, desde el punto de vista oscilatorio, tomar en consideración a la masa m_R del resorte.

Si tomamos el resorte ideal, sin masa, el movimiento oscilatorio tendría una frecuencia natural, como sabemos, igual a: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



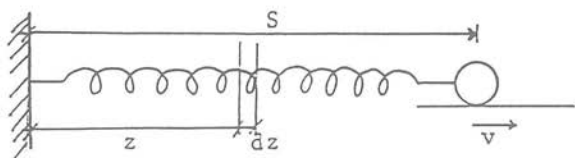
Al considerar la masa del resorte, el movimiento oscilatorio se hará más lento, disminuyendo la frecuencia (el período aumenta). Como la constante elástica del resorte es la misma, el efecto equivalente representaría una masa m' en el extremo como se muestra en la figura del sistema ideal equivalente, de forma tal, que la frecuencia natural del sistema sea:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + m'}}$$

Para determinar esta masa m' , en función de m_R , analicemos el movimiento del resorte considerando su energía cinética.

En un sistema cualquiera, como se muestra en la siguiente figura, la longitud del resorte es S y la velocidad del extremo libre $v = \dot{x}(t)$.

Para un elemento diferencial dz , situado a una distancia z del extremo fijo, su masa será: $\frac{m_R}{S} dz$.



Asumiendo que el resorte se estira en forma proporcional a lo largo de su longitud, la velocidad de cada elemento diferencial es diferente variando también proporcionalmente en forma lineal, para el instante considerado, desde cero en el extremo empotrado hasta la velocidad v que tiene la masa m en el otro extremo del resorte. Es decir, será: $\frac{z}{S} v$.

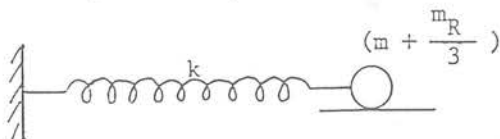
La energía cinética del elemento diferencial dz , será:

$$dE_K = \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{S} dz \right) \left(\frac{z}{S} v \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{S^3} v^2 \right) z^2 dz$$

integrando para obtener la energía cinética del resorte, se obtiene:

$$E_K = \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{S^3} v^2 \right) \int_0^S z^2 dz = \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{S^3} v^2 \right) \frac{S^3}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{3} \right) v^2 = \frac{1}{2} m' v^2$$

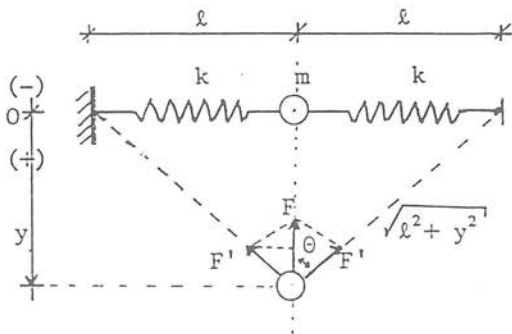
Luego, la masa equivalente buscada es: $m' = \frac{m_R}{3}$. Y, el sistema correspondiente equivalente, será:



Con frecuencia natural de oscilación: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_R}{3}}}$

$$v = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_R}{3}}}, \quad \tau = \frac{1}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_R}{3}}{k}}$$

17. Considere a la masa del problema N° 1, pero ahora sin apoyo horizontal y resortes idénticos, de longitud no deformada ℓ . La separación de los soportes es justamente 2ℓ y, despreciando efectos gravitacionales, tome en la horizontal la posición de equilibrio del cuerpo. Se saca verticalmente al cuerpo de su posición de equilibrio y se le libera. Determinar si el movimiento será oscilatorio armónico, o no. El sistema se encuentra en el plano de la figura ($y - x$).



Calculemos la fuerza F que actúa sobre la partícula.

Cada resorte se estira:

$\sqrt{l^2 + y^2} - l$ y ejerce una fuerza: $|F'| = k(\sqrt{l^2 + y^2} - l)$

$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}}$$

La fuerza total que actúa sobre la partícula, será:

$$F = -2F' \cos \theta = -2k(\sqrt{l^2 + y^2} - l) \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}} = -2ky \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}}\right) = -2ky \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}}\right)$$

Esta fuerza no es lineal en y . Luego, el movimiento que genera a la partícula no será armónico.

Adicionalmente, veamos si para pequeños desplazamientos, en primera aproximación, esta fuerza es aproximadamente lineal, o no.

Para, $\frac{y}{l} \ll 1$, podemos expandir por el binomio de Newton y se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{y}{l}\right)^4 - \dots$$

la cantidad entre paréntesis, será:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{l}\right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{y}{l}\right)^4 + \dots$$

y la fuerza F , queda:

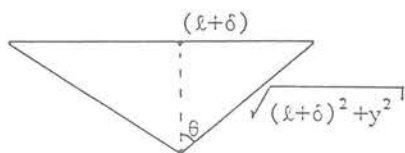
$$F = -2ky \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{l}\right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{y}{l}\right)^4 + \dots \right] = -k \frac{y^3}{l^2} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \dots \right]$$

En primera aproximación, se tendrá:

$$F \approx - \left(\frac{k}{l^2}\right) y^3$$

Luego, ni siquiera en primera aproximación para pequeños desplazamientos, la fuerza F es lineal en y . El movimiento no es armónico.

Pero, por otro lado, si la separación de los soportes es diferente a 2ℓ , digamos $2(\ell + \delta)$, tal que para tener al cuerpo en su posición de equilibrio hay que estirar cada resorte la longitud δ . Para pequeños desplazamientos, en primera aproximación, la fuerza es lineal en y , como veremos a continuación.



Procediendo similarmente como en el caso anterior, para la fuerza F se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F &= -2ky \left[1 - \frac{\ell}{\sqrt{(\ell + \delta)^2 + y^2}} \right] = \\
 &= -2ky \left[1 - \frac{\ell}{(\ell + \delta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{\ell + \delta}\right)^2}} \right]
 \end{aligned}$$

Expandiendo por el binomio de Newton y sustituyendo, se tiene:

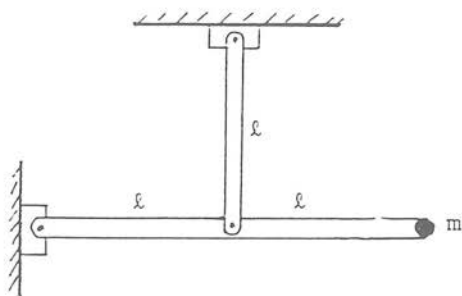
$$\begin{aligned}
 F &= -2ky \left\{ 1 - \frac{\ell}{(\ell + \delta)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\ell + \delta}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{y}{\ell + \delta}\right)^4 - \dots \right] \right\} = \\
 &= -2ky \left[\left(1 - \frac{\ell}{\ell + \delta}\right) + \frac{1}{2} \frac{\ell}{(\ell + \delta)^2} y^2 - \frac{3}{8} \frac{\ell}{(\ell + \delta)^2} y^4 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

En primera aproximación queda:

$$F \approx -2ky \left(1 - \frac{\ell}{\ell + \delta}\right) = -2ky \left(\frac{\delta}{\ell + \delta}\right) = -\left(\frac{2k\delta}{\ell + \delta}\right)y$$

Luego, en este caso, para pequeños desplazamientos, en primera aproximación, la fuerza es aproximadamente proporcional a y . El movimiento será aproximadamente oscilatorio armónico.

18. Determinar el movimiento oscilatorio del sistema mostrado en la figura.

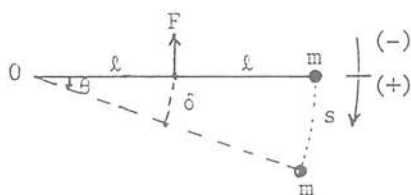


Todas las dimensiones indicadas en la figura corresponden al estado de equilibrio estático.

La masa m es puntual.

El módulo de elasticidad del tirante es Y y su área transversal es A .

La barra horizontal es rígida, indeformable y de peso despreciable comparado con el peso de la masa que soporta en su extremo libre.



Al comunicarle energía inicial a la masa y liberarla, el sistema se pone a oscilar girando alrededor del extremo O . Luego, utilizaremos como variable angular el ángulo de giro θ , medido a partir de la posición de equilibrio, tomada horizontal.

El único torque recuperador proviene del tirante. El peso de la masa no produce torque recuperador, es constante.

Para un ángulo de giro θ , el tirante se estira: $\delta = \theta\ell$. Y, para esta deformación la fuerza elástica será:

$$F = -YA \frac{\delta}{\ell} = -YA \frac{\theta\ell}{\ell} = -YA\theta$$

la cual produce un torque recuperador igual a:

$$\Gamma_o = -YA\ell\theta$$

El momento de inercia de la masa m respecto al punto de giro O , es:

$$I_o = m(2\ell)^2 = 4\ell^2 m$$

No consideraremos el momento de inercia de la barra, por haberse indicado despreciable en comparación a la masa m .

Aplicando la ley de Newton: $I_o \ddot{\theta} = \Gamma_o$, se tiene:

$$4\ell^2 m \ddot{\theta} = -YA\ell\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{YA}{4\ell m}\right) \theta = 0$$

$$\text{con: } \omega_o^2 = \frac{YA}{4\ell m} \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YA}{\ell m}}$$

Se tiene: $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \Theta \text{ sen}(\omega_o t + \delta)$

El período de oscilación del sistema será:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{4\ell m}{YA}} = 4\pi \sqrt{\frac{\ell m}{YA}}$$

Si la masa de la barra, que llamaremos M , no es despreciable con respecto a m , hay que tenerla en cuenta al calcular el momento de inercia del sistema con respecto al punto de giro O . Esto es, el momento de inercia total del sistema, en este caso, será:

$$I_o = m(2\ell)^2 + \frac{1}{3} M(2\ell)^2 = 4\ell^2 \left(m + \frac{1}{3} M\right)$$

Con este valor, se tiene:

$$\omega_o^2 = \frac{YA}{4\ell \left(m + \frac{1}{3} M\right)} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 4\pi \sqrt{\frac{\ell \left(m + \frac{1}{3} M\right)}{YA}}$$

Por otro lado, si queremos expresar la solución del problema en función de una variable lineal, digamos s , medida en el extremo libre, se tendrá:

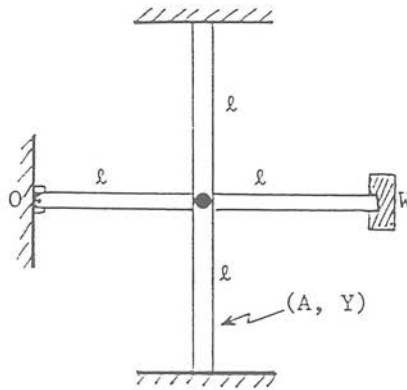
$$\text{como: } s = 2\ell\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{2\ell} \Rightarrow \text{con amplitud: } \Theta = \frac{S}{2\ell}$$

La solución será: $s = S \text{ sen}(\omega_o t + \delta)$

19. En la figura se muestra un sistema en equilibrio.

La barra horizontal es rígida e indeformable, de peso P y longitud 2ℓ , con un peso W en el extremo. La barra vertical de peso despreciable, longitud 2ℓ , área A y módulo elástico Y .

Determinar el período de oscilación del sistema.

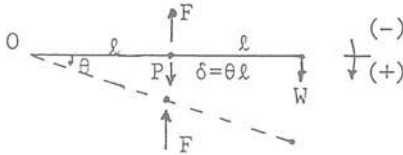


Como se tendrá una oscilación libre angular, calculemos el momento de inercia y el torque recuperador.

- Momento de inercia:

$$I_o = \frac{W}{g} (2\ell)^2 + \frac{1}{3} \frac{P}{g} (2\ell)^2 = \frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right)$$

- Torque recuperador:



$$F = YA \frac{\delta}{\ell} = YA \frac{\theta \ell}{\ell} = YA\theta$$

$$\Gamma_o = -\ell 2F = -(2\ell YA) \theta = -K\theta$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento angular, será

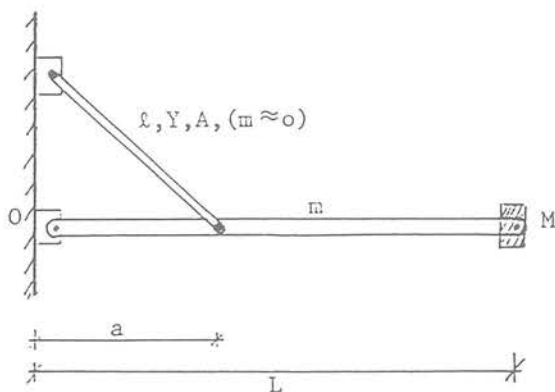
$$I_o \ddot{\theta} = -K\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0, \text{ con: } \omega_o^2 = K/I_o.$$

Por lo tanto, la frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\ell YA}{\frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right)}} = \sqrt{\frac{YAg}{2\ell \left(W + \frac{P}{3} \right)}} = \sqrt{\frac{3YAg}{2\ell (3W + P)}}$$

$$\text{y el período será: } \tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell \left(W + \frac{P}{3} \right)}{YAg}} = \sqrt{\frac{2\ell (3W + P)}{3YAg}}$$

20. El sistema de la figura se muestra en un estado de equilibrio, luego se le comunica una energía E_0 y libera. Conociendo toda la geometría del sistema, determinar el período de oscilación. ¿Dependerá de las condiciones iniciales? Considere que las barras son lo suficientemente rígidas como para no flexionarse.



Luego de liberarlo, el sistema oscilará libremente alrededor del punto O. Luego, utilizaremos como variable angular al ángulo de giro θ , a partir de la posición de equilibrio.

Calculemos primero el momento de inercia y el torque recuperador.

- Momento de inercia:

$$I_0 = ML^2 + \frac{1}{3} mL^2 = L^2 \left(M + \frac{1}{3} m \right)$$

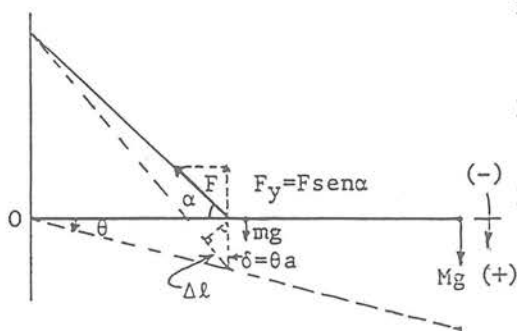
- Torque recuperador:

$$F = YA \frac{\Delta l}{l} = YA \frac{\theta a \operatorname{sen} \alpha}{l}$$

$$F_y = F \operatorname{sen} \alpha = \left(YA \frac{a}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \theta$$

$$\Gamma_0 = -a F_y = -a \left(YA \frac{a}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \theta$$

$$\Gamma_0 = - \left(YA \frac{a^2}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \theta = -K\theta$$



$$\Delta l = \delta \operatorname{sen} \alpha = \theta a \operatorname{sen} \alpha$$

La ecuación diferencial del movimiento angular, al aplicar la ley de Newton, será:

$$I_o \ddot{\theta} = -K\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0, \text{ con: } \omega_o^2 = \frac{K}{I_o}$$

Luego, la frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{YA \frac{a^2}{\ell} \sin^2 \alpha}{L^2 (M + \frac{1}{3} m)}} = \sqrt{\frac{YA a^2 \sin^2 \alpha}{\ell L^2 (M + \frac{1}{3} m)}} = \sqrt{\frac{3YA a^2 \sin^2 \alpha}{\ell L^2 (3M + m)}}$$

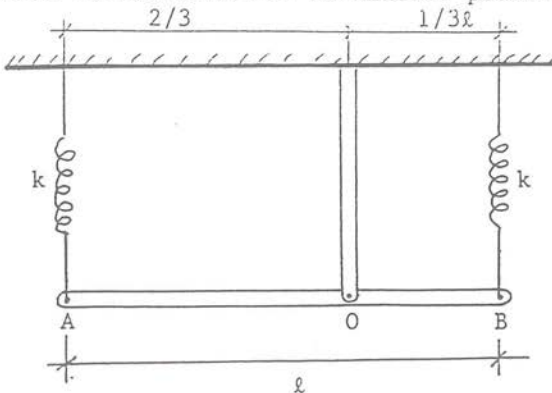
y el período, será:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell L^2 (M + m/3)}{YA a^2 \sin^2 \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell L^2 (3M + m)}{3YA a^2 \sin^2 \alpha}}$$

Por lo tanto, el período y la frecuencia natural, como su nombre lo indica, dependen del sistema oscilador, es decir, en este caso, de la inercia y del torque recuperador. Nunca dependen de las condiciones iniciales.

21. La barra AB de longitud ℓ y masa m se encuentra horizontalmente en equilibrio, sujeta por un pivote O y dos resortes de igual constante elástica k , tal como se muestra en la figura.

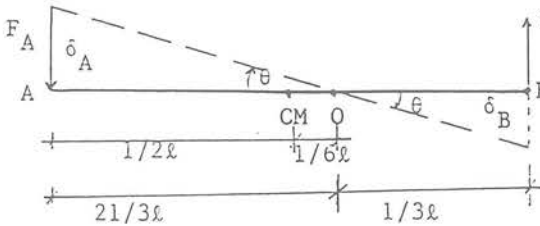
Si al extremo B se le da un desplazamiento hacia abajo B_o y se le libera, encontrar la ecuación del movimiento producido.



El movimiento será angular oscilatorio alrededor del pivote O. Luego, calculemos el momento de inercia y el torque recuperador del sistema.

- Momento de inercia:

$$I_o = I_{CM} + m \left(\frac{1}{6} \ell \right)^2$$



$$(-) I_o = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{1}{36} m \ell^2$$

$$(+) I_o = \frac{1}{9} m \ell^2$$

- Torque recuperador:

$$\Gamma_o = - \frac{2}{3} \ell F_A - \frac{1}{3} \ell F_B$$

$$\Gamma_o = - \left(\frac{2}{3} \ell \right) \left(\frac{2}{3} \ell k \theta \right) - \left(\frac{1}{3} \ell \right) \left(\frac{1}{3} \ell k \theta \right)$$

$$\Gamma_o = \frac{4}{9} \ell^2 k \theta - \frac{1}{9} \ell^2 k \theta$$

$$\Gamma_o = - \left(\frac{5}{9} \ell^2 k \right) \theta = - K \theta$$

$$\delta_A = \frac{2}{3} \ell \theta$$

$$\delta_B = \frac{1}{3} \ell \theta$$

$$F_A = k \delta_A = \frac{2}{3} \ell k \theta$$

$$F_B = k \delta_B = \frac{1}{3} \ell k \theta$$

Luego, aplicando la ley de Newton, el movimiento será:

$$I_o \ddot{\theta} = - K \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$$

$$\text{con: } \omega_o^2 = \frac{K}{I_o} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{\frac{5}{9} \ell^2 k}{\frac{1}{9} m \ell^2}} = \sqrt{\frac{5k}{m}}$$

y la solución general: $\theta = \Theta \sin(\omega_o t + \delta) \Rightarrow \dot{\theta} = \Theta \omega_o \cos(\omega_o t + \delta)$

para las c.i.: $\frac{1}{3} \ell \theta_o = B_o \Rightarrow \theta_o = \frac{3 B_o}{\ell}$ y $\dot{\theta}_o = 0$

las constantes arbitrarias Θ y δ , serán:

$$\frac{3B_o}{\ell} = \Theta \sin \delta$$

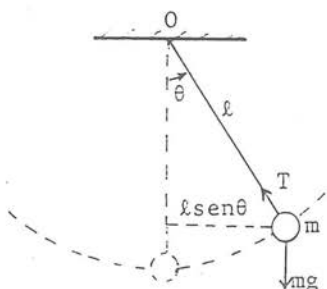
$$0 = \Theta \omega_o \cos \delta \Rightarrow \cos \delta = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \delta = 1$$

Luego, la ecuación del movimiento producido es:

$$\theta = \frac{3B_o}{\ell} \sin\left(\omega_o t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3B_o}{\ell} \cos \omega_o t = \frac{3B_o}{\ell} \cos\left(\sqrt{\frac{5k}{m}} t\right)$$

22. Péndulo Simple.- También llamado ideal o matemático.

Consiste en una partícula de masa m suspendida por una cuerda inextensible, de masa despreciable y de longitud l . Cuando se le saca de su posición vertical de equilibrio estable, comunicándole una energía inicial, al liberarlo el péndulo oscila en un plano vertical, girando alrededor del punto de suspensión O , por acción de la atracción gravitacional.



Como el movimiento de la partícula es circular, la solución de este problema se obtendrá más fácilmente utilizando una variable angular θ .

El torque recuperador ejercido por la fuerza gravitacional es:

$$\Gamma_o = -mg l \text{ sen}\theta$$

La tensión de la cuerda no produce torque alrededor del centro de giro O .

El momento de inercia de la masa m respecto a O , es:

$$I_o = ml^2$$

Aplicando la ley de Newton para rotaciones: $\Gamma_o = I_o \ddot{\theta}$, se tiene:

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mg l \text{ sen}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{ sen}\theta = 0$$

definiendo: $\omega_o^2 = \frac{g}{l}$

queda: $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \text{ sen}\theta = 0$

Como el segundo término de esta ecuación contiene a $\sin \theta$, no es lineal y corresponde a oscilaciones no lineales. Su solución es complicada. Sin embargo, considerando movimientos con pequeña amplitud, es decir, tomando la siguiente aproximación matemática para ángulos pequeños:

$$\theta \approx \sin \theta$$

se tendrá simplemente:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Ecuación diferencial idéntica al oscilador angular armónico simple, cuya solución es:

$$\theta = \Theta \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$\text{con: } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Observe en este resultado aproximado que la frecuencia y el período son independientes de la masa m y se dice que el péndulo es Isócrono, hecho descubierto por Galileo.

Esta expresión es útil cuando se quiere calcular g , midiendo l y τ , poniendo a oscilar un péndulo con cualquier masa.

El error que se comete con la aproximación de ángulos pequeños sólo se podrá determinar comparando con la solución exacta. En este caso, para el período se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\Theta}{2} + \dots \right)$$

La cual, en una primera aproximación se puede reducir y cortar la serie infinita a los primeros términos, sin mayor repercusión, obteniéndose:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \Theta^2 + \frac{11}{3072} \Theta^4 \right)$$

Si identificamos el período de la solución armónica como:

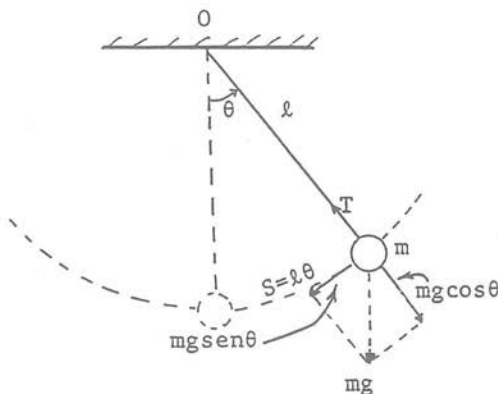
$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

la relación τ/τ_0 para algunos valores de Θ , dado en grados, es:

Θ	τ/τ_0
10°	1.0019
30°	1.0174
60°	1.0732
90°	1.1803
120°	1.3729

Observamos que aún para valores relativamente grandes de Θ , que corresponde a una abertura angular total doble a la amplitud (2Θ), la diferencia de ambos valores para el período (τ y τ_0) es relativamente pequeña. Luego, la solución de ángulos pequeños es suficientemente satisfactoria, digamos p.e. para $\Theta \lesssim 23^\circ$ ($2\Theta \approx 46^\circ$) la diferencia entre τ y τ_0 es $\lesssim 1\%$.

Adicionalmente, presentamos también la solución de este problema utilizando una variable lineal, s , del movimiento de la partícula sobre el arco de círculo recorrido.



La componente radial ($mg \cos \theta$) se anula con la tensión (T) de la cuerda y la componente tangencial ($mg \sin \theta$) es la única acción restauradora, teniéndose:

$$F_s = -mg \sin \theta$$

Fuerza que no es lineal, sin embargo, para ángulos pequeños:

$$\theta \approx \sin \theta, \text{ se tiene:}$$

$$F_s = -mg \theta$$

y como: $s = \ell\theta$, la fuerza es aproximadamente lineal, esto es:

$$F_s = - \left(\frac{mg}{\ell} \right) s$$

Luego, la ecuación diferencial en s , será:

$$m \ddot{s} = - \left(\frac{mg}{\ell} \right) s$$

$$\ddot{s} + \left(\frac{g}{\ell} \right) s = 0$$

con: $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

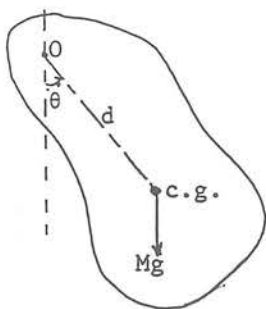
queda: $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$

y su solución es:

$$s = S \text{ sen}(\omega_0 t + \delta)$$

teniendo un movimiento armónico simple.

23. Péndulo Físico.- También llamado real o compuesto. Se denomina así a cualquier cuerpo rígido suspendido de un punto de él como pivote y de tal forma que pueda oscilar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por el punto de suspensión. Por supuesto, el simple es una idealización de este péndulo real.



Llamando d a la distancia entre el pivote O y el centro de gravedad del cuerpo, como hemos visto para el péndulo simple, el torque recuperador debido al peso del cuerpo Mg es:

$$\Gamma_o = - Mg d \text{ sen } \theta$$

Para $\theta \approx \text{sen } \theta \Rightarrow \Gamma_o = - (Mgd)\theta$

Si el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje que pasa por O es I_o , aplicando la Ley de Newton para rotaciones se tiene:

$$I_o \ddot{\theta} = (Mgd)\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{Mgd}{I_o}\right)\theta = 0$$

con : $\omega_o^2 = \frac{Mgd}{I_o} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$

La solución es: $\theta = \Theta_m \text{ sen}(\omega_o t + \delta)$

y el período: $\tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgd}{I_o}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{Mgd}}$

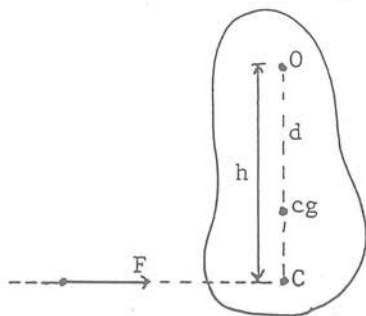
Si el péndulo es ideal, con: $d = \ell$, $M = m$ y $I_o = m\ell^2$,

Se tiene como período: $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

. Centro de Oscilación:

Encontremos el péndulo simple equivalente de igual período al péndulo físico dado. Llamando h a la longitud del péndulo simple equivalente, igualando períodos se obtiene:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{Mgd}} \Rightarrow h = \frac{I_o}{Mg}$$



Luego, en lo que se refiere al período de oscilación, se puede considerar como si la masa M del péndulo estuviera concentrada en un punto C cuya distancia al pivote O es h . A este punto se le llama el "Centro de Oscilación" del péndulo físico.

El centro de oscilación C y el punto de suspensión O tienen la propiedad de poder intercambiarse y el período de oscilación no cambia. Es decir, si el péndulo se suspende y oscila alrededor de un nuevo eje que pasa por el punto C, el punto O se convierte en el nuevo centro de oscilación y el período es el mismo.

. Centro de Percusión:

El centro de oscilación, algunas veces, recibe el nombre de centro de percusión cuando se refiere en relación a la siguiente propiedad.

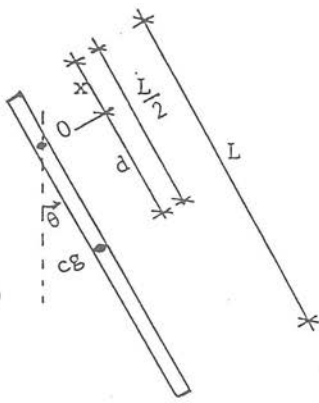
Considere el péndulo en la posición de equilibrio inicialmente en reposo y que sobre el centro de oscilación actúa una fuerza impulsiva \bar{F} , horizontal y en el plano de oscilación. En este caso el cuerpo girará libremente en rotación pura sin tratar de trasladarse y por lo tanto no se presentará reacción impulsiva alguna en el punto de suspensión.

Este hecho es conocido cuando se "batea" una pelota de béisbol, si la pelota pega en el bate en un punto distante, diferente al centro de percusión, el impacto repercutirá en las manos en forma apreciable y se transmitirá a los brazos.

24. Se tienen un péndulo simple de masa m y longitud $\frac{7}{12}L$, y una barra uniforme de longitud L y masa $5m$.

Encontrar el punto de suspensión de la barra para que ambos péndulos oscilen con la misma frecuencia, considerar aproximación para ángulos pequeños.

Péndulo Físico



Según lo encontrado en el problema anterior:

- Péndulo Físico:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgd}{I_o}}$$

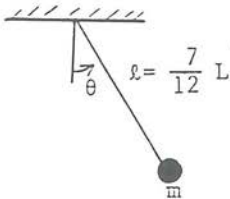
Para la barra dada, se tiene:

$$M = 5m$$

$$d = \frac{L}{2} - x$$

$$I_o = \frac{1}{12} ML^2 + Md^2 = 5m \left[\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \right]$$

Péndulo Simple



- Péndulo Simple:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/l}$$

$$\text{con: } l = \frac{7}{12} L$$

Reemplazando e igualando ambas frecuencias, se tiene:

$$\frac{5mg \left(\frac{L}{2} - x \right)}{5m \left[\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \right]} = \frac{g}{\frac{7}{12} L}$$

simplificando y efectuando:

$$\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 = \frac{7}{12} L \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$L^2 + 12 \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 = 7L \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$L^2 + \left(\frac{L}{2} - x \right) \left[12 \left(\frac{L}{2} - x \right) - 7L \right] = 0$$

$$L^2 + \left(x - \frac{L}{2} \right) (12x + L) = 0$$

$$L^2 + 12x^2 - 5xL - \frac{L^2}{2} = 0$$

$$12x^2 - 5xL + \frac{L^2}{2} = 0$$

$$24x^2 - 10Lx + L^2 = 0$$

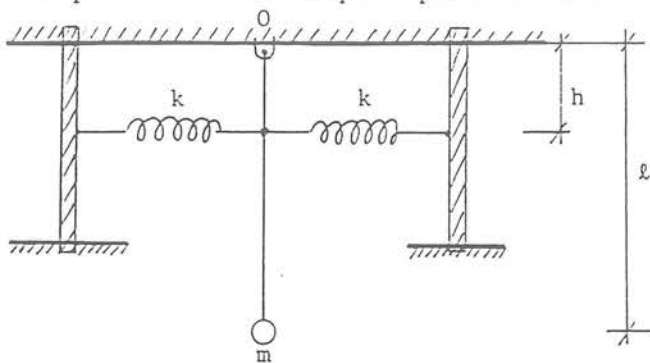
Resolviendo esta ecuación en x , se tiene dos valores:

$$x = \frac{10L \pm \sqrt{100L^2 - 96L^2}}{48} = \frac{10L \pm 2L}{48} = \begin{cases} x_1 = \frac{L}{4} \\ x_2 = \frac{L}{6} \end{cases}$$

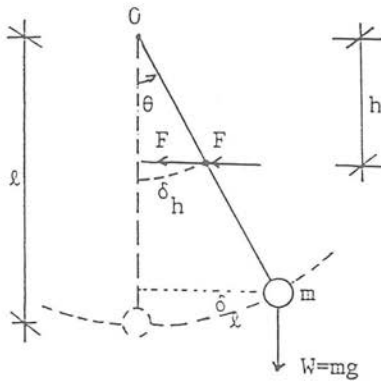
Luego, se podrán tomar dos puntos de suspensión O_1 y O_2 .

Si la barra pivotea en cualquiera de ellos, la frecuencia de oscilación es la misma, e igual a la del péndulo simple dado.

25. En el sistema mostrado en la figura, determinar el período de oscilación para ángulos pequeños, además, considere que:
- . El movimiento está restringido en el plano vertical.
 - . En la posición de equilibrio mostrada, los resortes no tienen tensión inicial.
 - . La barra vertical, rígida e indeformable, tiene peso despreciable respecto al peso de la masa m que soporta en su extremo libre.



El sistema pendular dado, oscilará angularmente en torno al punto O . Luego, encontremos primero el momento de inercia y el torque recuperador del sistema.



- Momento de inercia: $I_o = ml^2$

- Torque recuperador, con la aproximación de ángulos pequeños $\theta \approx \text{sen}\theta$, se tiene:

$$\delta_h = h\theta + F = kh\theta$$

$$\delta_x = l\theta + W = mg$$

$$\Gamma_o = -2hF - \delta_x W = -2hkh\theta - l\theta mg$$

$$\Gamma_o = -2kh^2\theta - lmg\theta$$

$$\Gamma_o = -(2kh^2 + lmg)\theta$$

$$\Gamma_o = -K\theta$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento, aplicando la Ley de Newton, será:

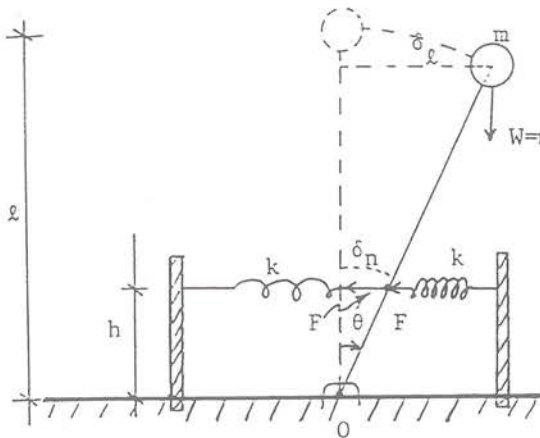
$$I_o \ddot{\theta} = -K\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$$

$$\text{con: } \omega_o^2 = \frac{K}{I_o} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{2kh^2 + lmg}{ml^2}} = \sqrt{2 \frac{k}{m} \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{g}{l}}$$

Por lo tanto, el período pedido es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{2kh^2 + lmg}} = \frac{2\pi l}{\sqrt{2 \frac{k}{m} h^2 + l g}}$$

26. Considere el mismo sistema del problema anterior pero, ahora, invertido hacia arriba. Esto es, apoyado sobre una mesa horizontal. Establecer la condición necesaria para que el torque actuante sea recuperador, es decir, para que el movimiento sea oscilatorio con respecto a la posición vertical de la varilla. En este caso, determinar el período para pequeñas oscilaciones.



- Momento de inercia: $I_o = ml^2$

- Torque, con la aproximación de ángulos pequeños $\theta \approx \text{sen } \theta$, se tiene:

$$\delta_h = h\theta \rightarrow F = k\delta_h = kh\theta$$

$$\delta_l = l\theta + W = mg$$

$$\Gamma_o = -2hF + \delta_l W = -2hkh\theta + l\theta mg$$

$$\Gamma_o = -2kh^2\theta + lmg\theta = -(2kh^2 - lmg)\theta = -K\theta$$

Por lo tanto, para que el torque Γ_o sea recuperador, se requiere que:

$$K > 0 \rightarrow 2kh^2 - lmg > 0 \rightarrow 2kh^2 > lmg$$

Esta es la condición necesaria pedida para movimiento oscilatorio.

Como en el problema anterior, se tendrá:

$$I_o \ddot{\theta} = -K\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$$

$$\text{con: } \omega_o^2 = \frac{K}{I_o} \rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{2kh^2 - lmg}{ml}}$$

Con la condición establecida: $2kh^2 > lmg$, ω_o será real, como debe ser, caso contrario, ω_o sería imaginario.

Y, el período de la oscilación será:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{2kh^2 - lmg}} = 2\pi l \sqrt{\frac{m}{2kh^2 - lmg}}, \text{ para } 2kh^2 > lmg.$$

27. Con relación al problema anterior:

- Si $k = 13 \frac{mg}{h}$, ¿cuál es la condición para movimiento oscilatorio?

y ¿cuál es el período correspondiente?

- Si, además, la masa m puede deslizarse sobre la varilla entre $l=h$ y $l=10h$, ¿cumple con la condición para movimiento oscilatorio?.

De ser así, ¿entre que valores está comprendido el período?,

¿en cuál posición de la masa m se tendrá la mayor frecuencia, y en cuál la menor?

- Si se mide la mayor frecuencia y se encuentra que es 5Hz, ¿cuánto miden h y ℓ ?

- Si, $k = 13 \frac{mg}{h}$:

La condición: $2kh^2 > \ell mg$, será $\ell < 26h > \ell$ y, el período será:

$$\tau = 2\pi\ell \sqrt{\frac{m}{2(13\frac{mg}{h})h^2 - \ell mg}} = \frac{2\pi\ell}{\sqrt{g(26h - \ell)}}$$

- Si, $h < \ell < 10h$, cumple con la condición $\ell < 26h$. Y, el período estará comprendido entre los siguientes valores:

$$\frac{2\pi}{5} \sqrt{\frac{h}{g}} < \tau < 5\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Como: $\nu = \frac{1}{\tau}$, la frecuencia estará comprendida entre los siguientes valores:

$$\frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} > \nu > \frac{1}{5\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

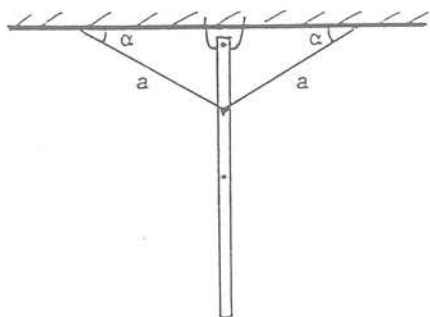
Luego, la mayor frecuencia: $\nu_{\text{máx}} = \frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$, corresponde a la posición: $\ell = h$ y la menor frecuencia: $\nu_{\text{mín}} = \frac{1}{5\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$, corresponde a la posición $\ell = 10h$.

- Si $\nu_{\text{máx}} = 5\text{Hz}$, se tiene:

$$5 = \frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \Rightarrow h = \frac{1}{4\pi^2} g = \frac{9.81}{4 \times 9.86} \approx \frac{1}{4} = 0.25\text{m}$$

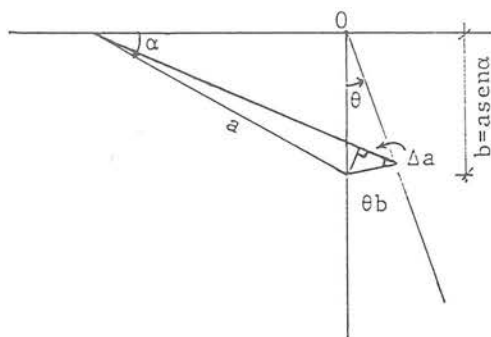
y, por lo tanto, $\ell_{\text{máx}} = 10h = 10 \times 0.25 = 2.5\text{m}$

28. Una varilla de masa M y longitud L cuelga del techo suspendida mediante una articulación en el extremo O que le permite girar en el plano vertical.

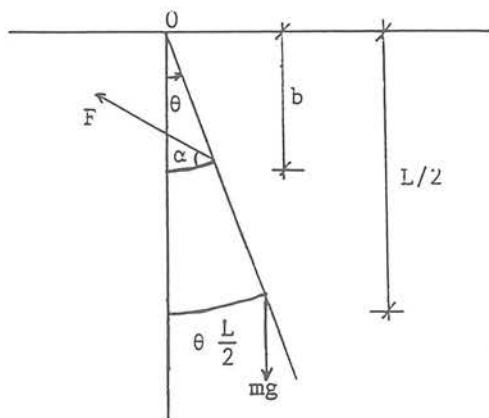


Adicionalmente, la varilla se sujeta a partir de un punto B mediante dos cuerdas iguales de área A y longitud a , dispuestos simétricamente con ángulo α como se muestra en la figura. Estas cuerdas trabajan solo a la tracción con módulo elástico Y .

Determinar la frecuencia de la oscilación en el plano vertical. En la solución adopte las aproximaciones convenientes de primer orden que correspondan a desplazamientos pequeños.



Para un ángulo θ , el tirante mostrado se estira y trabaja a tracción, el otro no soporta compresión y simplemente se recoge. Cuando se invierte el ángulo θ , la acción de los tirantes también se invierte.



Para ángulo θ pequeño, observando la geometría, el tirante se estira:

$$\Delta a \approx \theta b \cos \alpha = \theta a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\Delta a \approx \left(\frac{1}{2} a \operatorname{sen} 2\alpha \right) \theta$$

y la fuerza elástica será:

$$F = YA \frac{\Delta a}{a} \approx YA \left(\frac{1}{2} \frac{a \operatorname{sen} 2\alpha}{a} \right) \theta$$

$$F \approx \left(\frac{1}{2} YA \operatorname{sen} 2\alpha \right) \theta$$

Esta fuerza F produce un torque recuperador elástico (en primera aproximación despreciando términos en θ^2) igual a:

$$\tau_{oe} \approx - bF \cos \alpha = - (a \sin \alpha \cos \alpha) F = - \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) F$$

$$\tau_{oe} \approx - \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \left(\frac{1}{2} YA \sin 2\alpha \right) \theta = - \left(\frac{1}{4} YA \sin^2 2\alpha \right) \theta$$

El torque recuperador gravitacional es:

$$\tau_{og} = - \mu g \theta \frac{L}{2} = - \left(\frac{1}{2} MgL \right) \theta$$

Aplicando la Ley de Newton del movimiento angular, se tiene:

$$I_o \ddot{\theta} = - \left(\frac{1}{2} MgL \right) \theta - \left(\frac{1}{4} YA \sin^2 \alpha \right) \theta$$

$$I_o \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2} MgL + \frac{1}{4} YA \sin^2 2\alpha \right) \theta = 0$$

llamando: $K = \frac{1}{4} (2MgL + YA \sin^2 2\alpha)$

con momento de inercia: $I_o = \frac{1}{3} ML^2$

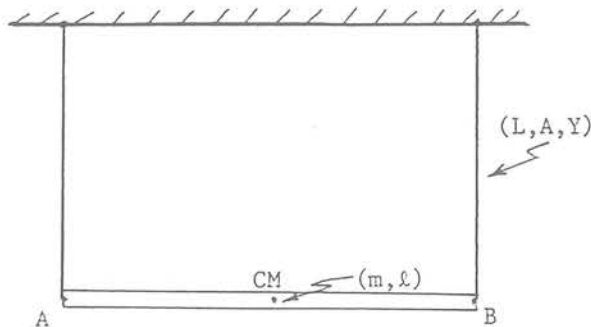
Se tiene: $\omega_o^2 = \frac{K}{I_o}$

y la frecuencia pedida será:

$$v = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I_o}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{1}{4} (2MgL + YA \sin^2 2\alpha)}{\frac{1}{3} ML^2}}$$

$$v = \frac{1}{4\pi ML} \sqrt{(3M(2MgL + YA \sin^2 2\alpha))}$$

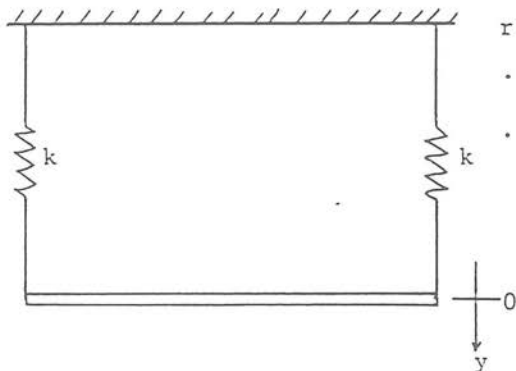
29. En el sistema (columpio) mostrado en equilibrio en la figura, la barra horizontal es rígida e indeformable de masa m y longitud ℓ ; los tensores verticales son iguales con masa, en comparación, despreciable, de longitud L , área A y módulo elástico Y .



Determinar la frecuencia de la oscilación producida cuando se saca a la barra de su posición de equilibrio dándole un pequeño desplazamiento, en cada uno de los siguientes casos:

- 1 - Vertical a lo largo de los tensores.
- 2 - Lateral a lo largo de la barra
- 3 - Perpendicular al plano de la figura.
- 4 - Al extremo A hacia afuera y el B hacia adentro perpendicularmente al plano de la figura. Es decir, un desplazamiento angular de la barra alrededor de su CM en el plano horizontal que lo contiene.

Caso 1



Los tensores se comportan como 2 resortes en paralelo, esto es:

. constante elástica de c/u: $k = \frac{YA}{l}$

. constante equivalente del sistema:

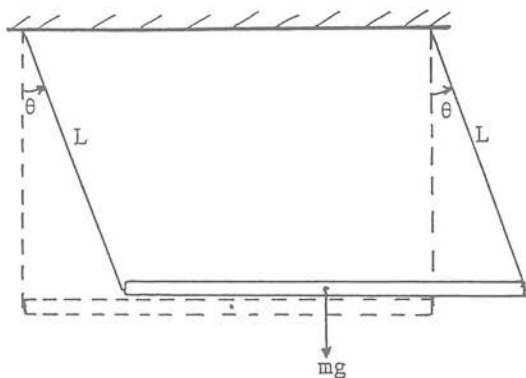
$$K = 2k = \frac{2YA}{l}$$

Luego: $m\ddot{y} = -Ky \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

y, la frecuencia de la oscilación, en este caso, será:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2YA}{ml}} \Rightarrow v = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2YA}{ml}}$$

Caso 2.-



El sistema se comporta como un péndulo en el plano de la figura.

El torque recuperador total es:

$$\Gamma_0 = -2 \frac{mg}{2} L \sin\theta = -mgL \sin\theta$$

para ángulos pequeños:

$$\Gamma_0 = -mgL\theta = -K\theta$$

Con momento de inercia:

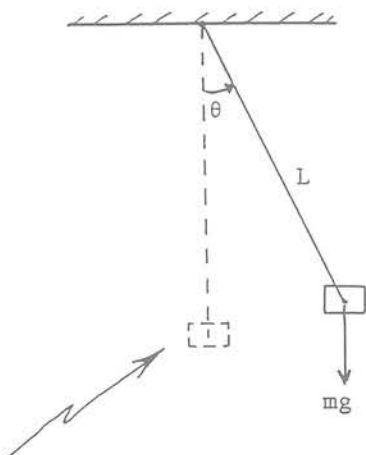
$$I_0 = 2 \frac{m}{2} L^2 = mL^2$$

Luego: $mL^2 \ddot{\theta} = -mgL\theta + \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$

y, la frecuencia de la oscilación, en este caso, será:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Caso 3.-



Corte en un plano perpendicular

En este caso, como en el anterior, el sistema también se comporta como un péndulo, pero en sentido perpendicular, como se muestra en la figura en corte en un plano perpendicular.

. Torque recuperador:

$$\Gamma_0 = - 2 \frac{mg}{2} L \text{sen}\theta = - mgL \text{sen}\theta$$

para ángulo pequeño:

$$\Gamma_0 = - mgL\theta = - K\theta$$

. Momento de inercia:

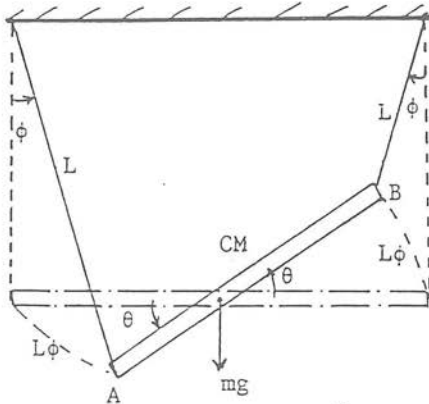
$$I_0 = 2 \frac{m}{2} L^2 = mL^2$$

$$\text{Luego: } mL^2 \ddot{\theta} = - mgL\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

y, como en el caso anterior, la frecuencia de la oscilación, será:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Caso 4.-



Primero encontremos la relación entre los ángulos ϕ y θ . Geométricamente, como se muestra en las figuras, igualando el desplazamiento de los extremos A o B, se tiene:

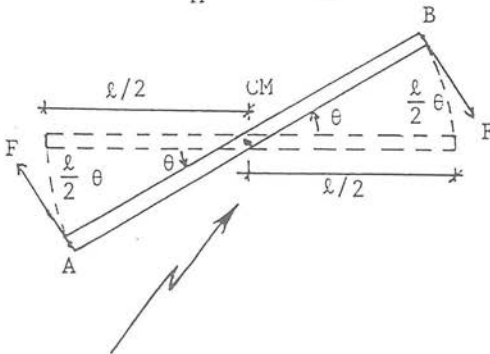
$$L\phi = \frac{l}{2} \theta \Rightarrow \phi = \frac{l}{2L} \theta$$

Las fuerzas en los extremos A y B, considerando ángulos pequeños, tendrán como valor:

$$F \approx \frac{mg}{2} \phi$$

en función del ángulo θ es:

$$F = \frac{mg}{2} \frac{l}{2L} \theta = \frac{mg l}{4L} \theta$$



Planta en el plano horizontal que contiene a la barra.

Estas fuerzas forman una cupla en el plano horizontal y cuya acción produce el torque recuperador alrededor del CM, este será:

$$\Gamma_{CM} = - \left(\frac{mg l}{4L} \theta \right) l = - \frac{mg l^2}{4L} \theta = - K\theta$$

El momento de inercia de la barra alrededor de su CM en el plano horizontal es:

$$I_{CM} = \frac{1}{12} m l^2$$

Luego, el movimiento de la barra en el plano horizontal estará dado por:

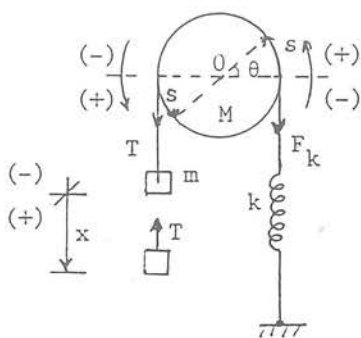
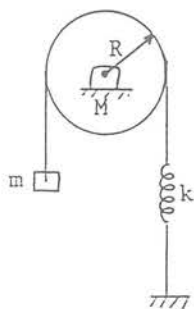
$$\frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} = - \frac{mg l^2}{4L} \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{L} \theta = 0$$

y, la frecuencia pedida, en este caso es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

30. Encontrar la frecuencia natural de oscilación para el sistema mostrado en la figura.

Observe que este problema es ideal, porque la cuerda debe ser lo suficientemente flexible para curvar a la polea (a la cual mueve por fricción) y al mismo tiempo debe ser lo suficientemente rígida para transmitir a la masa m la acción elástica del resorte.



En este problema se tienen dos movimientos oscilatorios, uno lineal para la masa m y otro de rotación para la polea M .

Aplicando la Ley de Newton para el movimiento de cada uno de ellos, se tiene:

$$\cdot \text{ Para } m: m\ddot{x} = -T$$

$$\cdot \text{ Para } M: I_o\ddot{\theta} = TR - F_k R$$

Eliminando entre ambas ecuaciones el valor de la tensión T , queda:

$$I_o\ddot{\theta} = (-m\ddot{x})R - F_k R$$

Geométricamente se tiene: $x = s = R\theta \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta}$

y la fuerza del resorte es: $|F_k| = ks = kx = kR\theta$

Reemplazando, se obtiene:

$$I_o\ddot{\theta} = (-mR\ddot{\theta})R - (kR\theta)R = -mR^2\ddot{\theta} - kR^2\theta$$

$$(I_o + mR^2)\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

Como el momento de inercia de la polea es: $I_o = \frac{1}{2} MR^2$, reemplazando queda:

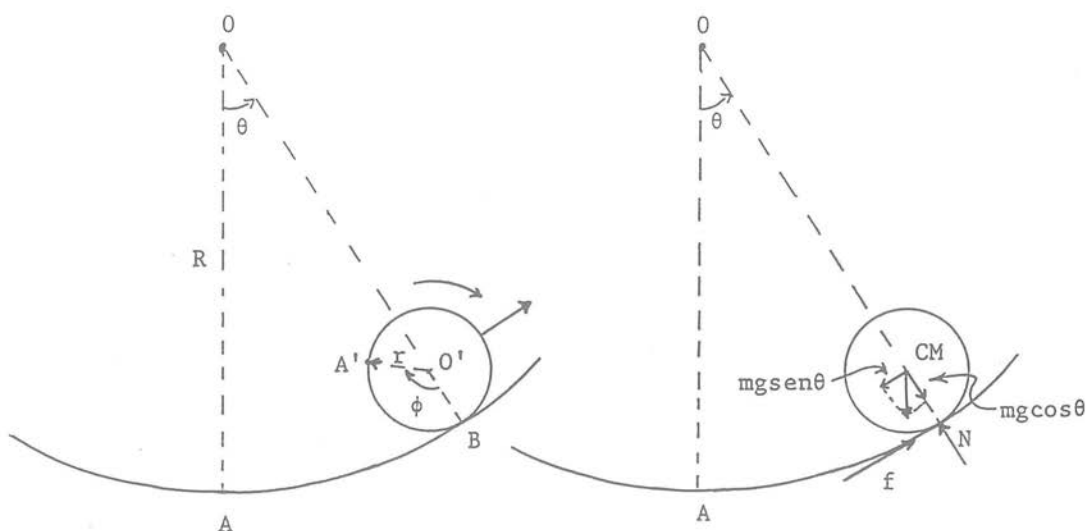
$$\left(\frac{1}{2} M + m\right)R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{\frac{1}{2} M + m}\right)\theta = 0$$

Luego, la frecuencia natural de oscilación del sistema es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2} M + m}}$$

31. Una esfera homogénea de radio r y masa m rueda sin resbalar sobre una superficie esférica de radio R , moviéndose la esfera, solamente en un plano vertical.

Determinar si el movimiento de la esfera es oscilatorio armónico. En caso de no serlo, aproxime para ángulos pequeños. ¿En este caso es armónico?, si lo es, encontrar la frecuencia y período del movimiento en esta solución aproximada.



Teniendo en cuenta la geometría del problema, encontremos primero algunas relaciones entre variables:

- Al rodar la esfera en el plano vertical, se tiene que: $AB = A'B$.

Además, como: $AB = R\theta$ y $A'B = r\phi$, se tienen las siguientes relaciones:

$$R\theta = r\phi \Rightarrow \phi = \frac{R}{r}\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{R}{r}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{R}{r}\ddot{\theta}$$

- Respecto al punto O, el ángulo de giro de la esfera en el plano vertical es: $(\theta - \phi)$ y, consecuentemente, velocidad angular: $(\dot{\theta} - \dot{\phi})$ y aceleración angular: $(\ddot{\theta} - \ddot{\phi})$.

- Recordemos también que el momento de inercia de una esfera respecto a un diámetro cualquiera es: $\frac{2}{5} m r^2$. Y, que el momento de inercia del centro de masa (CM) de la esfera respecto al punto O, en este caso, será: $m(R - r)^2$.

Para aplicar la Ley de Newton ($I_o\alpha = \Gamma_o$), encontremos primero la inercia total con respecto al eje perpendicular al plano que pasa por el punto O, multiplicada por la aceleración angular correspondiente.

Esto es:

$$I_o\alpha = m(R - r)^2\ddot{\theta} + \frac{2}{5}mr^2(\ddot{\theta} - \ddot{\phi})$$

El primer término corresponde a la traslación del CM de la esfera.

Punto que gira en el plano vertical alrededor del punto O, con un radio igual a: $(R - r)$. Y, el segundo término corresponde a la rotación pura de la esfera.

La suma de torques respecto al punto O, será:

$$\Gamma_o = - (R - r)mg \text{ sen } \theta + Rf$$

El primer término corresponde a la componente transversal gravitatoria y el segundo a la fuerza de fricción que produce la rodadura (sin resbalar). La componente radial de la atracción gravitacional y la reacción normal, no producen torque respecto a O.

Luego, igualando $I_{\theta} = I_{\phi}$, se obtiene:

$$m(R - r)^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{5} m r^2 (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) = -(R - r)mg \operatorname{sen} \theta + Rf$$

Para encontrar la fuerza de fricción f , recurrimos a la ecuación de rodamiento sin resbalar, teniéndose:

$$fr = \frac{2}{5} m r^2 (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) \Rightarrow f = \frac{2}{5} mr (\ddot{\theta} - \ddot{\phi})$$

valor de f que reemplazamos en la ecuación y se tiene:

$$m(R - r)^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{5} mr^2 (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) = -(R - r)mg \operatorname{sen} \theta + \frac{2}{5} mr (\ddot{\theta} - \ddot{\phi})R$$

Utilizando la relación obtenida al inicio, $\ddot{\phi} = \frac{R}{r} \ddot{\theta}$, podemos eliminar la variable ϕ de la ecuación, y simplificando queda:

$$(R - r)^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{5} r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) \ddot{\theta} = -(R - r)g \operatorname{sen} \theta + \frac{2}{5} Rr \left(1 - \frac{R}{r}\right) \ddot{\theta}$$

$$(R - r)^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{5} r(r - R) \ddot{\theta} = -(R - r)g \operatorname{sen} \theta + \frac{2}{5} R \left(1 - \frac{R}{r}\right) \ddot{\theta}$$

$$(R - r)^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{5} (r - R)^2 \ddot{\theta} = -(R - r)g \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{7}{5} (R - r)^2 \ddot{\theta} = -(R - r)g \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{7}{5} (R - r) \ddot{\theta} = -g \operatorname{sen} \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Luego, al aparecer $\operatorname{sen} \theta$ en el segundo término de esta ecuación diferencial, la solución no será oscilatoria armónica.

. Aproximación para pequeñas oscilaciones, tomando: $\theta \approx \operatorname{sen} \theta$, se tendrá:

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \theta = 0$$

$$\text{Si llamamos: } \omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Ecuación diferencial cuya solución, como hemos visto anteriormente, es armónica: $\theta = \Theta \text{ sen}(\omega_0 t + \delta)$.

Con frecuencia y período:

$$v = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

Observe que, como en el péndulo, este resultado es independiente de la masa de la esfera (Isócrono).

La solución de este problema se puede obtener más rápidamente utilizando el concepto de Energía. Veamos:

. Energía cinética de traslación del CM:

$$K_T = \frac{1}{2} m [(R-r)\dot{\theta}]^2 = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

. Energía cinética de rotación pura de la esfera:

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} mr^2 \right) (\dot{\theta} - \dot{\phi})^2 = \frac{1}{5} mr^2 (\dot{\theta} - \dot{\phi})^2$$

Utilizando la relación: $\dot{\phi} = \frac{R}{r} \dot{\theta}$

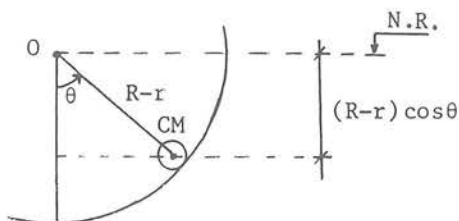
$$K_R = \frac{1}{5} mr^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{5} m (r-R)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{5} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

. Energía cinética total:

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{7}{10} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

. Energía potencial: tomando como nivel de referencia (N.R) el punto O.

$$U = -mg \cos\theta$$



. Energía mecánica total:

$$E = K + U = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 - mg (R - r) \cos \theta$$

Como no hay deslizamiento (sólo rodadura), la fuerza de fricción no disipa energía, por lo tanto, la energía E se conserva (es constante). Luego, derivando:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{7}{5} m(R - r)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg (R-r) \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

simplificando: $\frac{7}{5} (R - r) \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta = 0$$

La misma ecuación obtenida anteriormente.

32. Plantear la solución general del oscilador armónico subamortiguado utilizando la función coseno y, en este caso, determinar las constantes arbitrarias para las condiciones iniciales genéricas a $t=0$: $x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$.

Para el o.a. subamortiguado la ecuación diferencial del movimiento es:

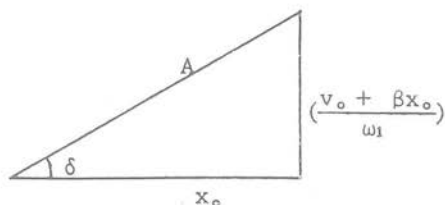
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ con: } 2\beta = b/m \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = k/m$$

Teniendo como solución general, utilizando la función coseno, digamos:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta), \text{ con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\dot{x} = -A\omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta) - A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

Para los c.i. dadas, se tendrá:



$$x_0 = A \cos(-\delta) = A \cos \delta \Rightarrow \cos \delta = \frac{x_0}{A}$$

$$v_0 = -A\omega_1 \sin(-\delta) - A\beta \cos(-\delta)$$

$$v_0 = A\omega_1 \sin \delta - A\beta \frac{x_0}{A} \Rightarrow \sin \delta = \frac{(v_0 + \beta x_0) / \omega_1}{A}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1} \right)^2}$$

$$\delta = \arctg \left[\frac{(v_0 + \beta x_0) / \omega_1}{x_0} \right] = \arctg \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{x_0 \omega_1} \right)$$

Compare con los valores obtenidos en el ítem 10.4.

Como ejercicio pasemos la solución a combinación lineal de $\text{sen } \omega_1 t$ y $\text{cos } \omega_1 t$, esto es:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) = e^{-\beta t} [(A \text{sen } \delta) \text{sen } \omega_1 t + (A \text{cos } \delta) \text{cos } \omega_1 t] = e^{-\beta t} (B \text{sen } \omega_1 t + C \text{cos } \omega_1 t)$$

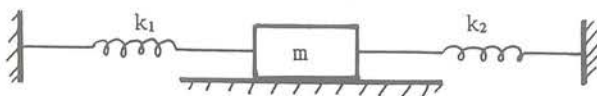
$$\text{con: } B = A \text{sen } \delta = A \frac{(v_0 + \beta x_0) / \omega_1}{A} = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1}$$

$$C = A \text{cos } \delta = A \frac{x_0}{A} = x_0$$

Luego, se tendrá como solución:

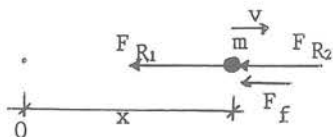
$$x = e^{-\beta t} \left[\left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1} \right) \text{sen } \omega_1 t + x_0 \text{cos } \omega_1 t \right]$$

33. Una masa m se encuentra apoyada sobre una mesa horizontal y unida, en lados opuestos, a dos resortes sujetos a soportes fijos tal como se muestra en la figura.



Encontrar la solución para el sistema así formado, asumiendo que existe una pequeña fuerza de fricción entre la mesa y la masa proporcional a la velocidad de la masa y teniendo como condiciones iniciales a $t = 0$: $x_0 = A_0$ y $v_0 = 0$.

D.C.L. (m)



Aplicando la Ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\ddot{x} = -F_{R1} - F_{R2} - F_f = -k_1 x - k_2 x - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{Con: } \beta = \frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

La solución general de esta ecuación para pequeño amortiguamiento, es decir, para $\beta^2 < \omega_0^2$, es:

$$x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta), \text{ con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

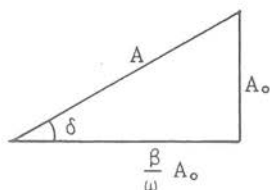
y velocidad:

$$\dot{x} = A\omega_1 e^{-\beta t} \text{cos}(\omega_1 t + \delta) - A\beta e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

Para las c.i. dadas, se tiene:

$$\begin{aligned} A_0 &= A \text{sen } \delta & \rightarrow \text{sen } \delta &= \frac{A_0}{A} \\ 0 &= A \omega_1 \text{cos } \delta - A\beta \text{sen } \delta & \rightarrow \text{cos } \delta &= \frac{\beta}{\omega_1} \text{sen } \delta = \frac{\frac{\beta}{\omega_1} A_0}{A} \end{aligned}$$

resolviendo, geoméricamente con la ayuda de un triángulo rectángulo, se obtienen A y δ , esto es:



$$A = \sqrt{A_0^2 + \frac{\beta^2}{\omega_1^2} A_0^2} \quad A_0^2 = A_0^2 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega_1^2}}$$

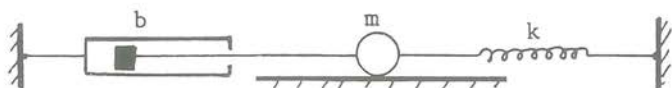
$$\text{tg } \delta = \frac{A_0}{\frac{\beta}{\omega_1} A_0} = \frac{\omega_1}{\beta} \Rightarrow \delta = \text{arctg } \frac{\omega_1}{\beta}$$

Con estos valores el movimiento queda completamente determinado:

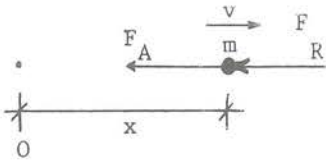
$$x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

34. Encontrar la solución sub-amortiguada para el sistema masa-resorte - amortiguador dispuesto como se muestra en la figura. Asuma que no existe fricción entre la masa y la mesa, y considere condiciones iniciales a $t = 0$: $x_0 = A_0$ y $v_0 = 0$.

Graficar la solución encontrada.



D.C.L. (m)



Aplicando la Ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\ddot{x} = -F_A - F_R = -b\dot{x} - kx$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

con: $\beta = b/2m$ y $\omega_0^2 = k/m$

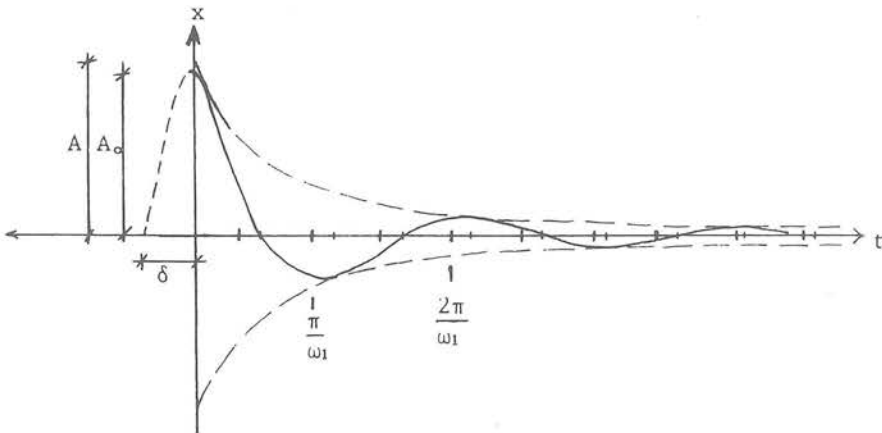
La solución general de esta ecuación para el caso sub-amortiguado ($\beta^2 < \omega_0^2$), como hemos encontrado en el ítem 10.4, es:

$$x = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta) , \text{ con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

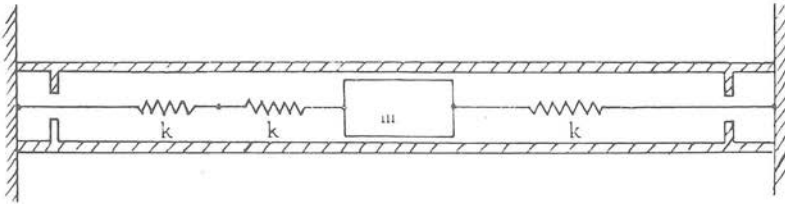
Para las c.i. dadas las constantes arbitrarias A y δ , ver problema anterior, serán:

$$A = A_0 \sqrt{1 + \beta^2/\omega_1^2} \quad \text{y} \quad \delta = \text{arc tg } \frac{\omega_1}{\beta}$$

Gráfica x vs. t:



35. Un pistón se mueve dentro de un cilindro sometido a la acción de tres resortes elásticamente iguales, dispuestos como se muestra en la figura. Y, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del pistón.



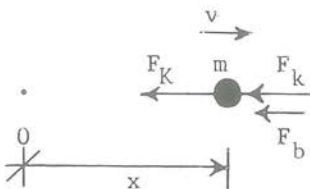
Encontrar el movimiento del pistón, habiendo tenido como condiciones iniciales a $t=0: x_0=A_0$ y $v_0=0$. Asuma que la fuerza amortiguadora es relativamente pequeña comparada con la acción de los resortes.

En primer lugar, debemos observar que los dos resortes de la izquierda están ensamblados en serie y, por lo tanto, su acción equivalente sobre el pistón, como hemos visto en el problema N° 2, será:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} k$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento, será:

D.C.L. (m)



$$m\ddot{x} = -F_b - F_k - F_K = -b\dot{x} - kx - Kx = -b\dot{x} - kx - \frac{1}{2} kx$$

$$m\ddot{x} + bx + \frac{3}{2} kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Con: $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$

La solución general de esta ecuación, para el caso subamortiguado ($\beta^2 < \omega_0^2$), es:

$$x = A e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta), \text{ con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Para las c.i. dadas, se tiene:

(ver el problema anterior, matemáticamente son idénticos)

$$A = A_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega_1^2}} \quad \text{y} \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\beta}$$

36. Determinar el valor de la constante b de amortiguamiento correspondiente a un oscilador subamortiguado para que la amplitud se reduzca a un décimo del valor inicial después de un ciclo de oscilación. Con este valor, ¿cuál es la frecuencia angular ω_1 de la oscilación amortiguada?

Como hemos encontrado en el ítem 10.4, para el oscilador subamortiguado ($\beta^2 < \omega_0^2$) se tiene como solución:

$$x = Ae^{-\beta t} \text{ sen}(\omega_1 t + \delta), \text{ con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Para $t = 0$, la amplitud es A .

Para $t = \tau$, la amplitud $Ae^{-\beta\tau}$ se requiere que sea igual a $\frac{A}{10}$.

Esto es:

$$\frac{A}{10} = Ae^{-\beta\tau} \rightarrow e^{-\beta\tau} = 0.1$$

Tomando logaritmos, se tiene:

$$-\beta\tau = \text{Ln}(0.1) \rightarrow \tau = -\frac{1}{\beta} \text{Ln}(0.1)$$

Por otro lado, como: $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Igualando ambos valores de τ , elevando al cuadrado previamente, se tiene:

$$\frac{1}{\beta^2} [\text{Ln}(0.1)]^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Despejando el valor de β :

$$\frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\beta^2} = \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2$$

$$\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1 = \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2$$

$$\frac{\omega_0^2}{\beta^2} = 1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2$$

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2} = 0.12\omega_0^2$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2}} = 0.35\omega_0$$

Como: $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, se tiene:

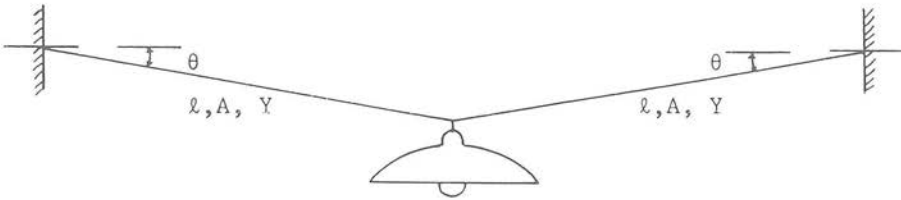
$$b = 2 \sqrt{\frac{m k}{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2}} = 2\text{Ln}(0.1) \sqrt{\frac{mk}{[\text{Ln}(0.1)]^2 + 4\pi^2}}$$

La frecuencia angular ω_1 , será:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2}}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi\omega_0}{\text{Ln}(0.1) \sqrt{1 + \left[\frac{2\pi}{\text{Ln}(0.1)} \right]^2}} = \frac{2\pi\omega_0}{\sqrt{[\text{Ln}(0.1)]^2 + 4\pi^2}} = 0.94\omega_0$$

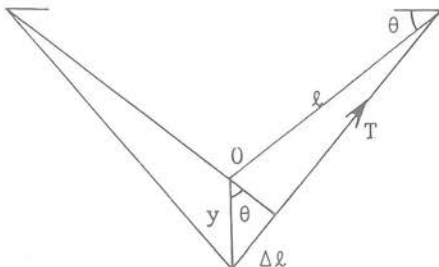
37. Un farol de masa m se suspende del punto medio de un cable que tiene sus extremos empotrados en paredes laterales como se muestra en la figura. En equilibrio, cada segmento de cable forma ángulos θ con la horizontal, su longitud ℓ , área A y módulo elástico Y .



Si el aire presenta una resistencia viscosa amortiguadora al movimiento del farol proporcional a su velocidad con constante b , plantear la ecuación diferencial del movimiento vertical, oscilatorio amortiguado, del farol.

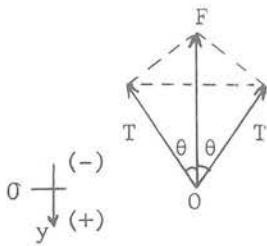
Encontrar la constante elástica restauradora equivalente del sistema (K), establecer la expresión de la frecuencia natural del sistema (ω_0) y la frecuencia angular (ω_1) del movimiento del farol.

- Determinación de la fuerza elástica para un desplazamiento vertical y del farol.



$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell &\approx y \operatorname{sen} \theta \\ T &= \frac{YA}{\ell} \Delta \ell \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{YA}{\ell} y \operatorname{sen} \theta = \left(\frac{YA \operatorname{sen} \theta}{\ell} \right) y$$

- Fuerza restauradora:



$$F = -2T\text{sen}\theta = - \left(\frac{2YA\text{sen}^2\theta}{l} \right)y = - Ky$$

- Ecuación diferencial del movimiento vertical del farol:

$$m\ddot{y} = - b\dot{y} - Ky$$

$$m\dot{y} + b\dot{y} + Ky = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\text{con: } K = \frac{2YA \text{sen}^2\theta}{l}$$

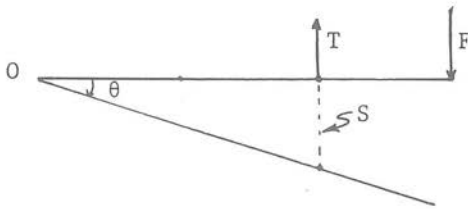
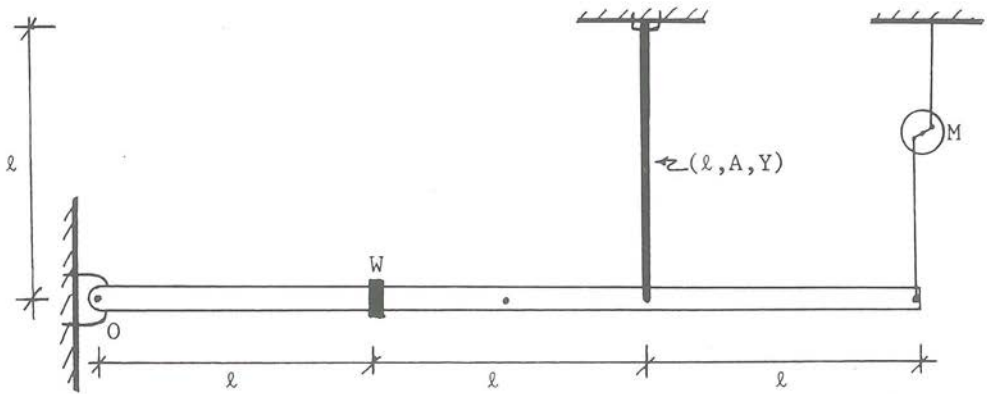
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2YA \text{sen}^2\theta}{ml}} = \sqrt{\frac{2YA}{ml}} \text{sen}\theta$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{2YA\text{sen}^2\theta}{ml} - \frac{4b^2}{m^2}}$$

38. El sistema mostrado en la figura se encuentra en posición de equilibrio. La barra horizontal es rígida e indeformable de peso P y longitud $3l$, puede girar libremente mediante una articulación en su extremo O . La barra vertical de peso despreciable, tiene área A , longitud l y módulo elástico Y , se interconecta con la barra horizontal en un punto situado a una distancia $2l$ del extremo O . El peso W esta concentrado sobre la barra horizontal a una distancia l del extremo O .

El dispositivo M le comunica a la barra horizontal en el extremo opuesto a O una fuerza oscilante: $F = F_0 \text{ sen } \omega t$.

Plantear la ecuación diferencial del movimiento de Newton y su solución general.



Para un desplazamiento angular Θ de la barra horizontal, la barra vertical se deforma con un desplazamiento lineal: $S = 2l\Theta$.

La fuerza elástica T, será: $T = YA \frac{S}{l} = YA \frac{2l\Theta}{l} = 2YA \Theta$

y, el torque recuperador: $\tau_{o_T} = -2lT = -2l \times 2YA\Theta = -4lYA\Theta$

El torque producido por la fuerza oscilante F, será:

$$\tau_{o_F} = 3lF = 3lF_0 \text{ sen } \omega t$$

El momento de inercia total del sistema, peso concentrado W y barra de peso P , será:

$$I_o = \frac{W}{g} \ell^2 + \frac{1}{3} \frac{P}{g} (3\ell)^2 = (W + 3P) \frac{\ell^2}{g}$$

Luego, con respecto a la posición de equilibrio, aplicando la ley de Newton del movimiento se tiene:

$$(W + 3P) \frac{\ell^2}{g} \ddot{\theta} = -4\ell YA\theta + 3\ell F_o \text{sen}\omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4gYA}{(W + 3P)\ell} \theta = \frac{3gF_o}{(W + 3P)\ell} \text{sen}\omega t$$

La solución general será:

$$\theta = \theta_c + \theta_p$$

teniéndose:

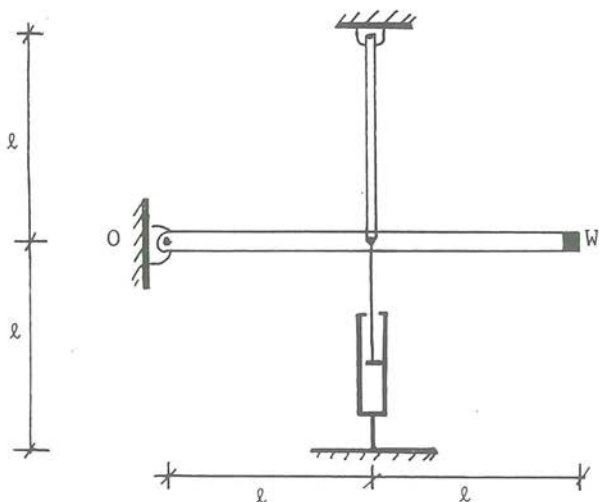
$$\theta_c = \Theta \text{sen}(\omega_o t + \delta) \quad , \quad \text{con: } \omega_o^2 = \frac{4gYA}{(W + 3P)\ell}$$

Θ y δ , dependen de las c.i.

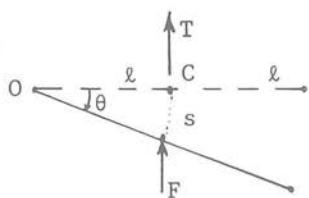
$$\theta_p = D_\theta \text{sen}\omega t \quad , \quad \text{con: } D_\theta = \frac{3gF_o / (W + 3P)\ell}{|\omega_o^2 - \omega^2|}$$

39. Estudiar la oscilación del sistema que en la figura se muestra en equilibrio.

La barra horizontal es rígida e indeformable, de longitud 2ℓ , peso propio P y, además, en su extremo libre tiene un peso W . La barra vertical, de peso despreciable, tiene longitud ℓ , área A y módulo elástico Y . El amortiguador, con relación a la velocidad de sus extremos, tiene una constante de disipación b . (fig. sgte pág.)



Adicionalmente, estudiar también cuando se fuerza al sistema aplicán-
dole una fuerza externa senoidal en el extremo libre de la barra hori-
zontal, directamente sobre el peso W. Reducir para el caso particu-
lar $\omega = \omega_0$, en este caso, si se sabe que el esfuerzo máximo permitido
(carga de trabajo) para la barra vertical es $\sigma(N/m^2)$ determinar el máxi-
mo valor que podrá tener la fuerza aplicada.



El desplazamiento lineal (s) y ve-
locidad (\dot{s}) del punto medio de la
barra (C), en función del despla-
zamiento angular (θ), será:

$$s = l\theta \Rightarrow \dot{s} = l\dot{\theta}$$

Luego, se tendrá:

. Fuerza elástica : $T = YA \frac{s}{l} = YA \frac{l\theta}{l} = YA\theta$

. Fuerza del amortiguador: $F = b\dot{s} = bl\dot{\theta}$

. Torque recuperador: $-\ell T = -\ell YA\theta$

. Torque del amortiguador: $-\ell F = -\ell b\dot{\theta} = -b\ell^2\dot{\theta}$

Por lo tanto, el torque total actuante, con respecto al punto O, será:

$$\Gamma_o = -(\ell YA)\theta - (b\ell^2)\dot{\theta}$$

y, el momento de inercia es:

$$I_o = \frac{W}{g} (2\ell)^2 + \frac{1}{3} \frac{P}{g} (2\ell)^2 = \frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right)$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento de Newton ($I_o\ddot{\theta} = \Gamma_o$), se tiene:

$$\frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right) \ddot{\theta} = -(\ell YA)\theta - (b\ell^2)\dot{\theta}$$

o, bien: $I_o\ddot{\theta} + (b\ell^2)\dot{\theta} + (\ell YA)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$

$$\text{donde: } 2\beta = \frac{b\ell^2}{I_o} = \frac{b\ell^2}{\frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right)} = \frac{bg}{4 \left(W + \frac{P}{3} \right)}$$

$$\omega_o^2 = \frac{\ell YA}{I_o} = \frac{\ell YA}{\frac{4\ell^2}{g} \left(W + \frac{P}{3} \right)} = \frac{YA g}{4\ell \left(W + \frac{P}{3} \right)}$$

Como estamos interesados en movimiento oscilatorio, consideraremos el caso subamortiguado, es decir, para $\beta^2 < \omega_o^2$, y podemos escribir como solución general:

$$\theta = \Theta e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

con: $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$, y constantes arbitrarias Θ en radianes y δ también en radianes, que dependen de las condiciones iniciales no especifici

casas en el problema.

Si adicionalmente se fuerza al sistema con una fuerza externa senoidal, digamos:

$$F_p^{\text{ext}} = F_o \text{ sen } \omega t$$

al aplicarla en el extremo, a 2ℓ del punto O, el torque externo con respecto a este punto será:

$$\Gamma_o^{\text{ext}} = 2\ell F_p^{\text{ext}} = 2\ell F_o \text{ sen } \omega t$$

y la ecuación diferencial correspondiente al movimiento tendrá segundo miembro, es decir, se tendrá:

$$I_o \ddot{\theta} + (b\ell^2) \dot{\theta} + (\ell YA)\theta = 2\ell F_o \text{ sen } \omega t$$

la solución particular para este caso estará dada por:

$$\theta_p = D \text{ sen}(\omega t - \phi)$$

con amplitud D en radianes, igual a:

$$D = \frac{2\ell F_o / I_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

y constante de fase:

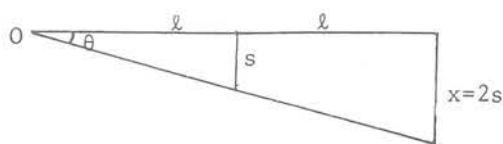
$$\phi = \text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$\text{si, } \omega = \omega_o : D = \frac{\ell F_o}{\beta \omega_o I_o} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

Para la barra vertical, el esfuerzo elástico es: $\frac{T}{A} = Y \frac{s}{\ell}$

$$\text{y para el valor máximo: } \sigma = Y \frac{S_m}{\ell} \rightarrow S_m = \frac{\sigma \ell}{Y}$$

El desplazamiento máximo en el extremo W, será:



$$x_m = 2s_m = \frac{2\sigma l}{Y}$$

Como: $2lD = x \rightarrow 2lD_m = x_m$.

Para: $D_m = \frac{lF_{o_m}}{\beta\omega_o I_o}$

se tiene:

$$2l \frac{l F_{o_m}}{\beta\omega_o I_o} = \frac{2\sigma l}{Y}$$

$$\frac{lF_{o_m}}{\beta\omega_o I_o} = \frac{\sigma}{Y}$$

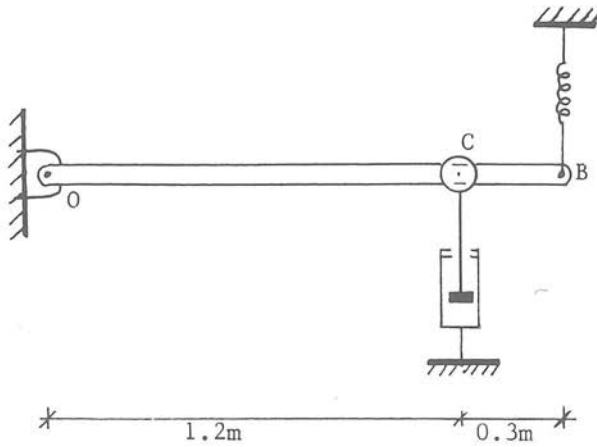
Luego, el valor pedido de F, será:

$$F_{o_m} = \frac{\sigma\beta\omega_o I_o}{lY}$$

40. En el sistema mostrado en la figura, el cuerpo sujeto en el punto C de la barra OB tiene una masa de 4kg. La barra mide 1.5m de longitud y su peso puede, en comparación, despreciarse. La constante elástica del resorte es: 1500 N/m y el amortiguador tiene un coeficiente de: 40N-s/m.

El sistema está en equilibrio con la varilla OB horizontal, si se le desplaza en el sentido horario 0.21 radianes ($\approx 12^\circ$) y se le suelta, determinar la ecuación del movimiento. Encuentre la frecuencia, período y grafique el desplazamiento angular en función del tiempo.

(fig. pág. sgte.)



Tomando un desplazamiento angular θ , en los puntos B y C se tiene:

En B:

Desplazamiento lineal = 1.5θ

Fuerza del resorte = $k(1.5\theta)$

Torque recuperador = $-1.5k(1.5\theta)$

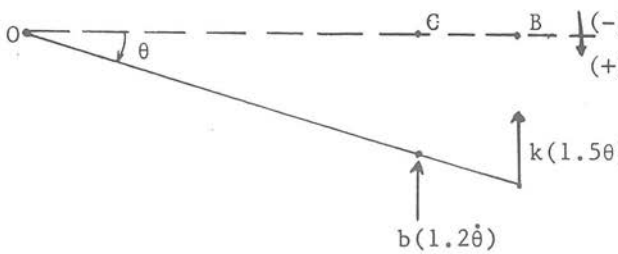
En C:

Desplazamiento lineal = 1.2θ

Velocidad lineal = $1.2\dot{\theta}$

Fuerza del amortiguador = $b(1.2\dot{\theta})$

Torque amortiguador = $-1.2b(1.2\dot{\theta})$



Aplicando la Ley de Newton de movimiento ($I_o\alpha = \Gamma_o$), la ecuación diferencial será:

$$\begin{aligned}
 m(1.2)^2\ddot{\theta} &= -1.5k(1.5\theta) - 1.2b(1.2\dot{\theta}) = -k(1.5)^2\theta - b(1.2)^2\dot{\theta} \\
 &= -1500(1.5)^2\theta - 40(1.2)^2\dot{\theta} \\
 \ddot{\theta} + 10\dot{\theta} + 586\theta &= 0
 \end{aligned}$$

Identificando coeficientes en esta ecuación, se tiene:

$$2\beta = 10 \Rightarrow \beta = 5 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \beta^2 = 25 \text{ s}^{-2} \text{ y } \omega_o^2 = 586 \text{ s}^{-2}$$

Como: $\beta^2 = 25 < \omega_0^2 = 586$, el movimiento oscilatorio será subamortiguado y la solución de la ecuación diferencial, como hemos visto (ítem 10.4), será:

$$\theta = A e^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

$$\text{con: } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{586 - 25} = \sqrt{561} = 23.69 \text{ rad/s}$$

Las constantes arbitrarias, tanto δ como A , en este caso angular, se expresan ambas en radianes y, dependen de las condiciones iniciales dadas, que son: $\theta_0 = 0.21 \text{ rad}$ y $\dot{\theta}_0 = 0$. Para encontrar A y δ , debemos reemplazarlas en θ y derivando en $\dot{\theta}$. Sin embargo, recurramos a las expresiones generales en el ítem 10.4 y, para este caso, con $\dot{\theta}_0 = 0$, se tendrá:

$$A = \theta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2} = 0.1 \sqrt{1 + \frac{25}{561}} = 0.21 \sqrt{1.04} = 0.21 \times 1.02 = 0.21 \text{ rad.}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{\omega_1}{\beta} = \frac{23.69}{5} = 4.74 \Rightarrow \delta = 78^\circ = 1.36 \text{ rad } (=0.43\pi = \pi/2.31)$$

Reemplazando estos valores, la ecuación del movimiento será:

$$\theta = 0.21 e^{-5t} \text{sen}(23.69t + 1.36)$$

$$\text{Frecuencia: } \nu = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{23.69}{2\pi} = 3.77 \text{ Hz}$$

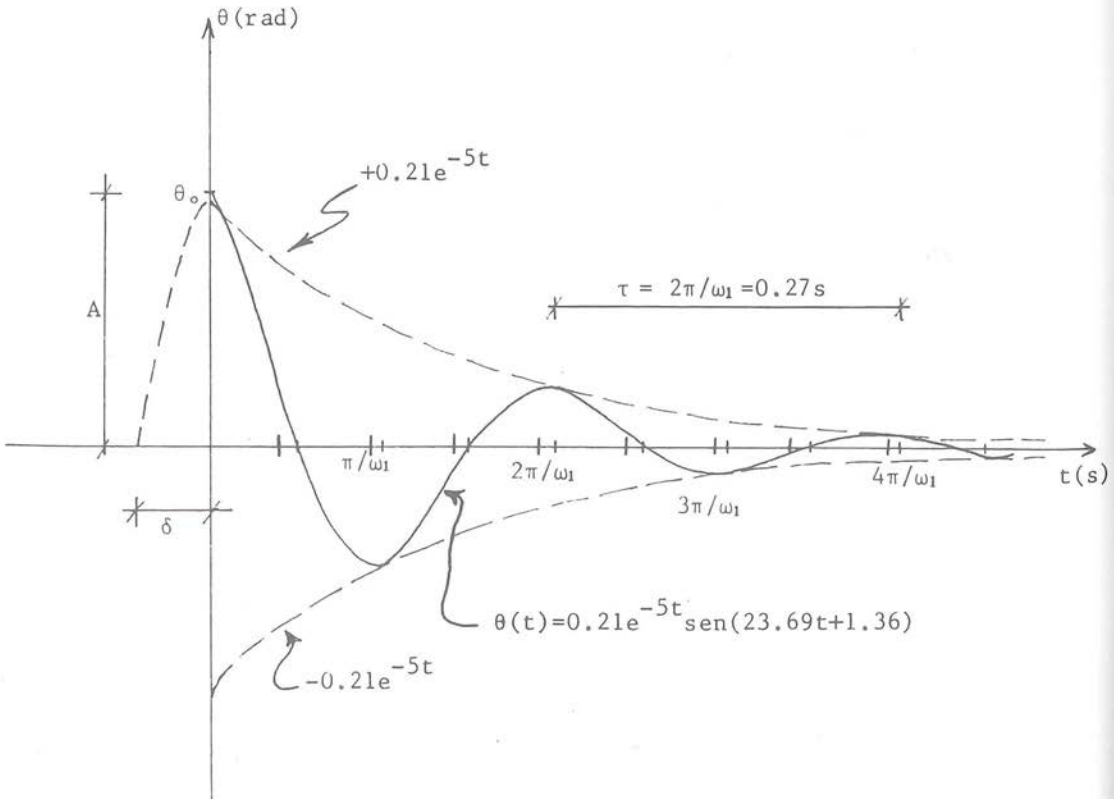
$$\text{Período : } \tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.27 \text{ s}$$

Gráfica : θ vs t (pág sgte.)

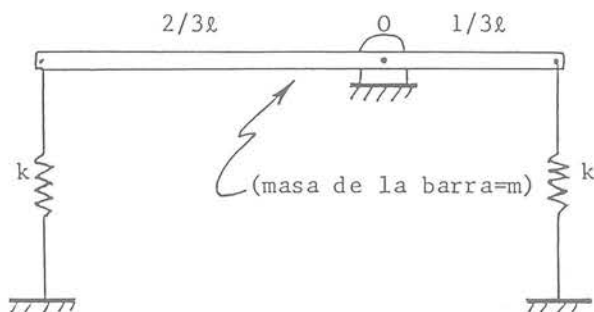
Tabla de valores

$t(s)$	e^{-5t}	$\text{sen}(\omega_1 t + \delta)$	θ (rad)
$\frac{\pi}{\omega_1} = 0.13$	$e^{-0.65} = 0.52$	$\text{sen}(\pi + 78^\circ) = -\text{sen } 78^\circ = -0.97$	0.10
$\frac{2\pi}{\omega_1} = 0.27$	$e^{-1.35} = 0.26$	$\text{sen}(2\pi + 78^\circ) = \text{sen } 78^\circ = 0.97$	0.05
$\frac{3\pi}{\omega_1} = 0.40$	$e^{-2.0} = 0.14$	$\text{sen}(3\pi + 78^\circ) = -\text{sen } 78^\circ = -0.97$	0.03
$\frac{4\pi}{\omega_1} = 0.53$	$e^{-2.65} = 0.07$	$\text{sen}(4\pi + 78^\circ) = \text{sen } 78^\circ = 0.97$	0.01

Gráfica θ vs t



41. El balancín mostrado en equilibrio en la figura, se fuerza aplicándole un torque $\tau = \tau_0 \text{ sen}(\omega t + \alpha)$. Encontrar la solución general del movimiento.



Nota: Resolver primero el problema N° 21

Para este caso, en el problema N° 21 se determinó:

- Momento de inercia : $I_0 = \frac{1}{9} m l^2$

- Torque recuperador : $\Gamma_0 = - \left(\frac{5}{9} l^2 k \right) \theta = - K \theta$

Teniendo un torque externo τ , la ecuación diferencial del movimiento, será:

$$I_0 \ddot{\theta} + K \theta = \tau_0 \text{ sen}(\omega t + \alpha)$$

Teniendo como solución general:

$$\theta = \Theta \text{ sen}(\omega_0 t + \delta) + D_\theta \text{ sen}(\omega t + \alpha)$$

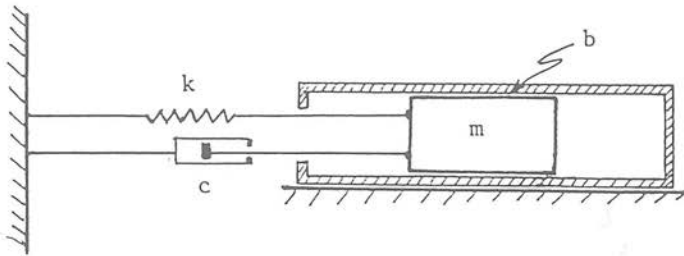
con: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_0}} = \sqrt{\frac{5K}{m}}$

$$D_\theta = \frac{\tau_0 / I_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} = \frac{9 \tau_0}{m l^2 \left| \frac{5K}{m} - \omega^2 \right|}$$

Como no hay amortiguamiento, la constante de fase en la solución complementaria es $\phi = 0$.

• Θ y δ , son las constantes arbitrarias que dependen de las c. i. (no dadas en el problema).

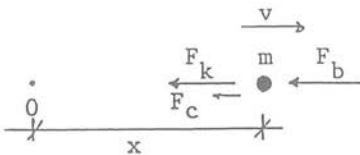
42. Se tiene un pistón de masa m dentro de un cilindro y unido a un resorte y un amortiguador como se muestra en la figura.



Al moverse el pistón dentro del cilindro actúa permanentemente sobre él una fuerza viscosa retardadora proporcional a su velocidad, con constante de proporcionalidad "b"; la constante del amortiguador es "c" y la elástica del resorte "k". Comunicándole al pistón una energía inicial, encontrar su movimiento. Considere el caso subamortiguado.

En este problema se tienen dos fuerzas amortiguadoras, y al aplicar la ecuación de movimiento de Newton, se obtiene:

D.C.L. (m)



$$m\ddot{x} = -F_k - F_b - F_c = -kx - b\dot{x} - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + (b + c)\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{con: } 2\beta = \frac{b + c}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = k/m$$

Teniendo como solución:

$$X = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \delta), \quad \text{con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A y δ , dependen de las c.i., que no se han dado.

43. Con relación al problema anterior, considere además la acción de una fuerza senoidal $F_0 \text{ sen } \omega t$, que actúa directamente sobre el pistón .

Al forzarlo, la ecuación del movimiento será :

$$m\ddot{x} + (b + c)\dot{x} + kx = F_0 \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t$$

La solución complementaria es la encontrada en el problema anterior (sin segundo miembro en la ecuación).

La ecuación particular para esta fuerza senoidal, como hemos establecido en el ítem 10.5, será:

$$x_p = D \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

con:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi = \text{arc tg} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

teniendo como frecuencia de resonancia: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

Finalmente, la solución general es:

$$X = Ae^{-\beta t} \text{ sen}(\omega_1 t + \delta) + D \text{ sen}(\omega t - \phi)$$

44. Un oscilador (m y k , sin amortiguamiento) es excitado desde el reposo, es decir a partir de condiciones iniciales nulas (para $t = 0$: $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$), mediante la aplicación de una fuerza externa senoidal $F = F_0 \text{ sen } \omega t$, con frecuencia diferente a la resonante, esto es: $\omega \neq \omega_0$. Encontrar la solución $x(t)$.

En el ítem 10.5 hemos encontrado la solución general para este caso con constantes arbitrarias A y δ , esto es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta) + D \operatorname{sen} \omega t$$

$$\text{con: } \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{y} \quad D = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

La velocidad, derivando $x(t)$, será:

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) + D \omega \cos \omega t$$

Imponiendo en x y \dot{x} las c.i. dadas, se tiene:

$$0 = A \operatorname{sen} \delta + 0 \rightarrow \operatorname{sen} \delta = 0 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow \cos \delta = 1$$

$$0 = A \omega_0 \cos \delta + D \omega = A \omega_0 + D \omega \rightarrow A = -D \frac{\omega}{\omega_0}$$

y la solución es:

$$x = -D \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t + D \operatorname{sen} \omega t = D(\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t)$$

Observe que al resolver para las c.i. dadas, si tomamos:

$$0 = A \operatorname{sen} \delta + 0 \rightarrow \operatorname{sen} \delta = 0 \rightarrow \delta = \pi \rightarrow \cos \delta = -1$$

$0 = A \omega_0 \cos \delta + D \omega = -A \omega_0 + D \omega \rightarrow A = D \frac{\omega}{\omega_0}$ (Amplitud, por definición siempre es positiva) y la solución, por supuesto que al ser única debe obtenerse la misma expresión anterior:

$$x = D \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \pi) + D \operatorname{sen} \omega t = -D \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t + D \operatorname{sen} \omega t = D(\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t)$$

La solución encontrada es válida para $\omega \neq \omega_0$. Si $\omega = \omega_0$, el oscilador entra en resonancia y $D \rightarrow \infty$.

45. Plantear la solución general correspondiente a un oscilador amortiguado y forzado con una fuerza $F(t) = F_0 \text{ sen}(\omega t + \theta_0)$. Considerar la solución complementaria, transitoria, para el caso relativo a poco amortiguamiento.

Reducir la solución particular, estable, para los siguientes casos extremos: $\omega \ll \omega_0$ y $\omega \gg \omega_0$. Luego, a la vista de las expresiones obtenidas para ambos casos, analizarlos e interpretarlos físicamente.

Como hemos establecido en el ítem 10.5, la solución general es:

$$x = Ae^{-\beta t} \text{ sen}(\omega_1 t - \delta) + D \text{ sen}(\omega t + \theta_0 - \phi)$$

para: $\beta^2 < \omega_0^2$

$$\text{con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Para $\omega \ll \omega_0$:

$$D \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad \text{tg } \phi \approx 0 \rightarrow \phi \approx 0$$

La solución estable, será:

$$x_e \approx \frac{F_0}{k} \text{ sen}(\omega t + \theta_0) = \frac{F(t)}{k}$$

Observamos que x_e es independiente de m y β , dependiendo de k y $F(t)$, de tal forma que: $kx_e = F(t)$.

Luego, la fuerza aplicada es precisamente equilibrada en todo instante por la fuerza restauradora.

- Para $\omega \gg \omega_0$:

$$D \approx \frac{F_0/m}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \text{tg } \phi \approx -\frac{2\beta}{\omega} \rightarrow \phi \approx \pi \text{ (para } \beta \ll \omega)$$

La solución estable, será:

$$x_e \approx \frac{F_o}{m\omega^2} \text{sen}(\omega t + \theta_o - \pi) = - \frac{F_o}{m\omega^2} \text{sen}(\omega t + \theta_o) = - \frac{F(t)}{m\omega^2}$$

Observamos que x_e es independiente de k y β , dependiendo de m , ω y $F(t)$. Además, si derivamos para encontrar \ddot{x}_e , se tiene:

$$\ddot{x}_e = - \frac{F_o}{m\omega^2} [-\omega^2 \text{sen}(\omega t + \theta_o)] = \frac{F_o}{m} \text{sen}(\omega t + \theta_o) = \frac{F(t)}{m} \rightarrow m\ddot{x}_e = F(t)$$

Luego, corresponde en forma similar al movimiento de una partícula libre (de masa m sin fuerza restauradora k , ni amortiguamiento b) sometida a la acción de una fuerza senoidal $F(t) = F_o \text{sen}(\omega t + \theta_o)$.

46. Encontrar la solución estable correspondiente al movimiento del sistema oscilador con amortiguamiento y accionado por una fuerza particular: $F_o \cos \omega t$.

La ecuación diferencial del movimiento correspondiente a este oscilador es:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega t, \text{ con: } 2\beta = b/m \text{ y } \omega_o^2 = k/m$$

En particular, para este segundo miembro, propondremos la solución también con la función coseno, esto es:

$$x = D \cos(\omega t - \phi) \rightarrow \dot{x} = -D\omega \text{sen}(\omega t - \phi) \rightarrow \ddot{x} = -D\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, para obtener D y ϕ , se tiene:

$$D(\omega_o^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) - D(2\beta\omega) \text{sen}(\omega t - \phi) - \frac{F_o}{m} \cos \omega t = 0$$

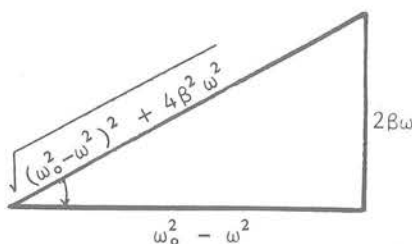
Desarrollando seno y coseno de $(\omega t - \phi)$ y factorizando $\text{sen } \omega t$ y $\cos \omega t$, queda:

$$D(\omega_o^2 - \omega^2) (\cos \omega t \cos \phi + \text{sen} \omega t \text{sen} \phi) - D(2\beta\omega) (\text{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \text{sen} \phi) - \frac{F_o}{m} \cos \omega t = 0$$

$$[D(\omega_o^2 - \omega^2) \cos \phi + D(2\beta\omega) \text{sen} \phi - \frac{F_o}{m}] \cos \omega t - D [(\omega_o^2 - \omega^2) \text{sen} \phi - (2\beta\omega) \cos \phi] \text{sen} \omega t = 0$$

Los coeficientes de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ deben ser idénticamente iguales a cero, obteniéndose:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi - 2\beta \omega \cos \phi = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



$$\sin \phi = \frac{2\beta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

De la otra igualdad obtendremos D :

$$D [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + 2\beta \omega \sin \phi] = \frac{F_0}{m} \rightarrow D = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + 2\beta \omega \sin \phi}$$

reemplazando los valores arriba encontrados de $\sin \phi$ y $\cos \phi$, simplificando queda:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Compare con los valores obtenidos en el ítem 10.5 para una fuerza senoidal: $F_0 \sin \omega t$.

Como ejercicio pasemos la solución a combinación lineal de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$, esto es:

$$x = D \cos(\omega t - \phi) = (D \sin \phi) \sin \omega t + (D \cos \phi) \cos \omega t = B \sin \omega t + C \cos \omega t$$

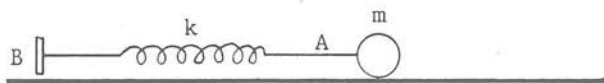
$$B = D \sin \phi = \frac{2\beta \omega F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

$$C = D \cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

$$x = \frac{2\beta\omega F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \text{sen}\omega t + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \text{cos}\omega t$$

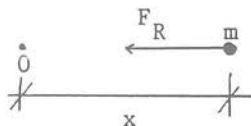
$$x = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} [(2\beta\omega)\text{sen}\omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) \text{cos}\omega t]$$

47. Una masa m se encuentra apoyada sobre una mesa horizontal sin fricción y unida a un resorte de constante elástica k , tal como se muestra en la figura.



El extremo B del resorte no está fijo y es obligado a moverse senoidalmente, según: $x_B = B \text{sen}\omega t$. Encontrar el movimiento de la masa m .

D.C.L. (m)



Al no estar fijo el extremo B, la fuerza del resorte no será proporcional a x ($F_R \neq -kx$).

La fuerza del resorte es proporcional a su deformación, es decir, proporcional al desplazamiento relativo de sus extremos ($x_A - x_B$). Por lo tanto, en este caso, la fuerza que ejerce el resorte es:

$$F_R = -k(x - x_B)$$

Aplicando la Ley de Newton, se tiene:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_B)$$

$$m\ddot{x} + kx = kx_B$$

Como: $x_B = B \text{ sen } \omega t$, reemplazando:

$$m\ddot{x} + kx = k B \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} B \text{ sen } \omega t$$

Con: $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, queda:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 B \text{ sen } \omega t$$

Esta ecuación la hemos resuelto en el ítem 10.5, teniéndose:

. Solución complementaria:

$$x_c = A \text{ sen } (\omega_o t + \delta) \quad , \quad \text{con: } \omega_o = \sqrt{k/m}$$

. Solución particular:

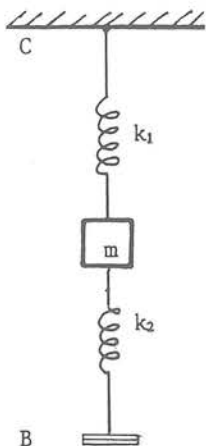
$$x_p = D \text{ sen } \omega t, \quad \text{con } D: \frac{\omega_o^2 B}{|\omega_o^2 - \omega^2|} = \frac{B}{|1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}|} \quad , \quad (\phi = 0).$$

Luego, la solución general será:

$$X = A \text{ sen } (\omega_o t + \delta) + D \text{ sen } \omega t$$

las constantes A y δ dependen de las c.i. (no dadas en el problema).

48.



En el sistema suspendido como se muestra en la figura, el extremo B es obligado a moverse verticalmente con variación senoidal, según:

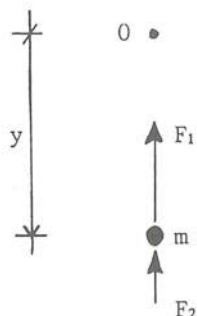
$$y_B = B \text{ sen } \omega t$$

Considerando condiciones iniciales del movimiento de la masa m, a $t=0$: $y_o = 0$ y $v_o = 0$, encontrar la ecuación de su movimiento.

¿Cuándo entrará en resonancia el sistema?

Recomendación: resolver primero el problema anterior.

D.C.L. (m)



La fuerza que ejerce el resorte (1) es proporcional al desplazamiento y de la masa, porque el desplazamiento relativo de los extremos del resorte es: $y - y_c = y$, puesto que $y_c = 0$. Luego:

$$F_1 = -k_1 y$$

Para el resorte (2), como el extremo B no está fijo, $y_B(t) \neq 0$, el desplazamiento relativo de sus extremos será: $y - y_B$. Por lo tanto, la fuerza ejercida por este resorte es:

$$F_2 = -k_2(y - y_B)$$

Aplicando la Ley de Newton, se tiene:

$$m\ddot{y} = -k_1 y - k_2(y - y_B)$$

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = k_2 y_B$$

reemplazando el valor dado: $y_B = B \text{ sen } \omega t$, queda:

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = k_2 B \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)y = \frac{k_2 B}{m} \text{ sen } \omega t$$

Con: $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$, podemos escribir:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{k_2 B}{m} \text{ sen } \omega t$$

La solución de esta ecuación, ver ítem 10.5, es:

$$y = A \text{ sen}(\omega_0 t + \delta) + D \text{ sen } \omega t, \text{ con: } D = \frac{k_2 B/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

derivando: $\dot{y} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) + D\omega \cos \omega t$

Para las c.i. dadas a $t = 0$: $y_0 = 0$ y $v_0 = 0$, reemplazando en y e \dot{y} , se tiene:

$$0 = A \text{ sen } \delta + D \text{ sen } \delta = 0 \rightarrow \delta = 0, \rightarrow \cos \delta = 1$$

$$0 = A\omega_0 \cos \delta + D\omega = A\omega_0 + D\omega \rightarrow A = -D \frac{\omega}{\omega_0}$$

Luego, la solución queda:

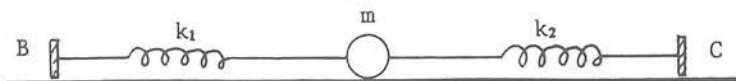
$$\begin{aligned} y &= -D \frac{\omega}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t + D \text{ sen } \omega t = D \left(-\frac{\omega}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t + \text{ sen } \omega t \right) = \\ &= D \left(\text{ sen } \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t \right), \text{ con } D = \frac{k_2 B}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \end{aligned}$$

El sistema entrará en resonancia al no haber amortiguamiento, cuando $\omega = \omega_0$, es decir, cuando:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Para este valor de ω , la amplitud tiende a infinito ($D \rightarrow \infty$)

49. Una masa m se encuentra apoyada sobre una mesa horizontal sin fricción y unida a dos resortes, uno a cada lado, tal como se muestra en la figura.

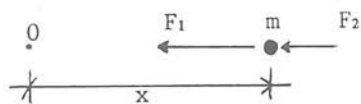


Los extremos B y C de los resortes no están fijos y son obligados a moverse senoidalmente, ambos, según: $x' = B \sin \omega t$.

Considerando como condiciones iniciales del movimiento de la masa m , para $t = 0$: $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, encontrar la ecuación de su movimiento.

Recomendación: resolver primero los dos problemas anteriores.

D.C.L. (m)



Para cada resorte el desplazamiento relativo de sus extremos ($x_A - x_B$) y ($x_A - x_C$), en este caso, son iguales, es decir: $(x - x')$.

Por lo tanto, las fuerzas que ejercen estos resortes, serán:

$$F_1 = -k_1(x - x') \quad \text{y} \quad F_2 = -k_2(x - x')$$

Luego, aplicando la ley de Newton del movimiento, se tiene:

$$m\ddot{x} = -k_1(x - x') - k_2(x - x')$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = (k_1 + k_2)x'$$

Como: $x' = B \sin \omega t$, reemplazando se tiene:

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = (k_1 + k_2)B \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right)x = \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right)B \sin \omega t$$

Con : $\omega_0^2 = \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right)$, queda:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 B \sin \omega t$$

Ecuación diferencial del movimiento que tiene, como hemos visto en el ítem 10.5, la siguiente solución general:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta) + D \sin \omega t, \text{ con } D = \frac{\omega_0^2 B}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

derivando:

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) + D \omega \cos \omega t$$

Para las c.i. dadas a $t = 0$, nulas: $x_0 = v_0 = 0$, se tiene:

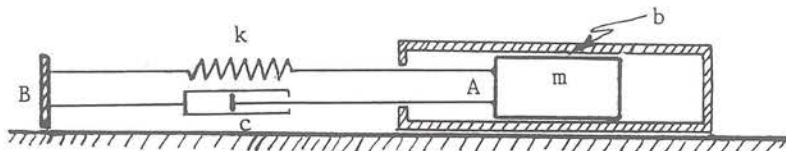
$$0 = A \sin \delta \rightarrow \sin \delta = 0 \rightarrow \delta = 0, \rightarrow \cos \delta = 1$$

$$0 = A \omega_0 \cos \delta + D \omega = A \omega_0 + D \omega \rightarrow A = - \frac{D \omega}{\omega_0}$$

Luego, la solución queda:

$$x = - D \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t + D \sin \omega t = D(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t), \text{ con: } D = \frac{B}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|}$$

50. Se tiene un pistón de masa m dentro de un cilindro y unido a un resorte y un amortiguador como se muestra en la figura.



El extremo B, ahora, no está fijo y es obligado a moverse senoidalmente, según: $x_B = B \sin \omega t$. Encontrar el movimiento del pistón. Además de la acción elástica del resorte (k) considere la acción de dos fuerzas retardadoras: la viscosa (b) ejercida por las paredes lubricadas del cilindro y la del amortiguador (c).

Al no estar fijo el extremo B, la fuerza del resorte no será proporcio

nal a x ($F_k \neq -kx$) y la fuerza del resorte tampoco será proporcional a \dot{x} ($F_c \neq -c\dot{x}$).

La fuerza del resorte es proporcional a su deformación, es decir, proporcional al desplazamiento relativo de sus extremos ($x_A - x_B$). Por lo tanto, en este caso, la fuerza que ejerce el resorte es:

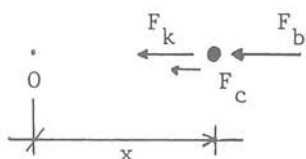
$$F_k = -k(x - x_B).$$

La fuerza que ejerce el amortiguador es proporcional a la velocidad relativa de sus extremos ($\dot{x}_A - \dot{x}_B$). Luego, la fuerza que ejerce el amortiguador es: $F_c = -c(\dot{x} - \dot{x}_B)$.

La fuerza viscosa sí es directamente proporcional a la velocidad del pistón. Esto es: $F_b = -b\dot{x}$.

D.C.L. (m)

Aplicando la ley de Newton, se tiene:



$$m\ddot{x} = -k(x - x_B) - b\dot{x} - c(\dot{x} - \dot{x}_B)$$

$$m\ddot{x} + (b + c)\dot{x} + kx = kx_B + c\dot{x}_B$$

Como: $x_B = B \sin \omega t$, derivando: $\dot{x}_B = B\omega \cos \omega t$

Reemplazando, se tiene:

$$m\ddot{x} + (b + c)\dot{x} + kx = Bk \sin \omega t + Bc\omega \cos \omega t$$

El segundo miembro es una combinación suma de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ que, como hemos visto, puede expresarse solo como seno o coseno, indistintamente, tomando dos constantes: amplitud y fase. Esto es, digamos:

$E \sin(\omega t + \theta)$ y desarrollando, se tiene:

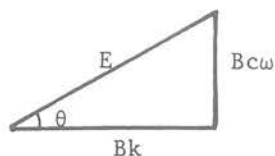
$$E \sin(\omega t + \theta) = (E \cos \theta) \sin \omega t + (E \sin \theta) \cos \omega t$$

Comparando con los valores que se tienen en la ecuación, se obtiene:

$$E \cos \theta = Bk \rightarrow \cos \theta = \frac{Bk}{E}$$

$$E = B\sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}$$

$$E \sin \theta = Bc\omega \rightarrow \sin \theta = \frac{Bc\omega}{E}$$



$$\text{tg} = \frac{c\omega}{k}$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento podemos escribirla de la siguiente manera:

$$m\ddot{x} + (b + c)\dot{x} + kx = E \sin(\omega t + \theta)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{E}{m} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{con: } 2\beta = \frac{b + c}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = k/m$$

La solución complementaria ya se ha establecido en problemas anteriores y la solución particular para este caso, será:

$$x_p = D \sin(\omega t + \theta - \phi)$$

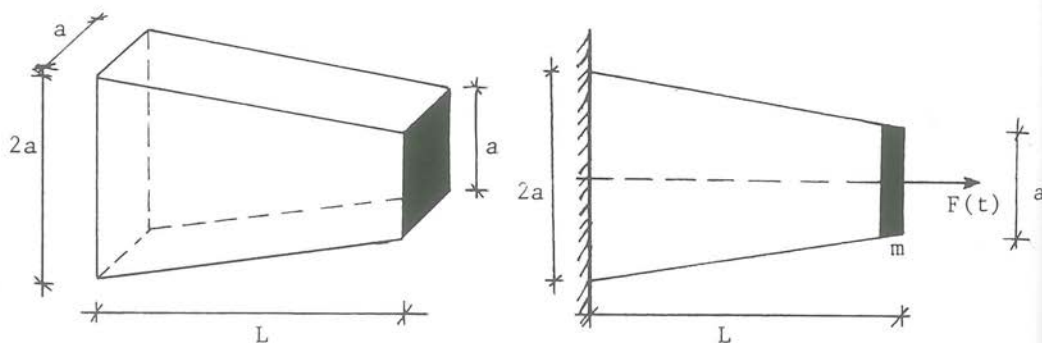
$$\text{con: } D = \frac{E/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \text{y} \quad \phi = \arctg \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Finalmente, la solución general es:

$$X = A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \delta) + D \sin(\omega t + \theta - \phi)$$

51. Una masa m está sujeta a la acción elástica de una barra de módulo elástico Y , longitud L y sección transversal variable, como se muestra en la figura. Estudiar la oscilación de la masa m cuando se le somete a la acción externa axial de una fuerza senoidal.

Considere la barra de masa despreciable comparada con m .



Nota: Resolver primero el problema N^o 24 del capítulo 9 anterior.

En el problema indicado (9-24) se encontró la deformación elástica longitudinal de la barra sometida a una fuerza F . Esta es:

$$\Delta L = \frac{FL}{Ya^2} \ln(2)$$

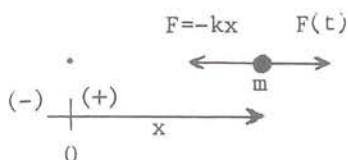
Si denominamos a la deformación elástica $\Delta L = x$ medida a partir del extremo libre en la posición de equilibrio (sin deformación), la fuerza elástica restauradora ejercida por la barra será:

$$F = - \left(\frac{Ya^2}{L \ln(2)} \right) x$$

Si la fuerza externa aplicada es: $F(t) = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)$

La ecuación diferencial del movimiento oscilatorio de la masa m será:

D.C.L. (m)
$$m\ddot{x} = - \left(\frac{Ya^2}{L \text{Ln}(2)} \right) x + F_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$



$$m\ddot{x} + \left(\frac{Ya^2}{L \text{Ln}(2)} \right) x = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$\text{con: } K = \frac{Ya^2}{L \text{Ln}(2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m} = \frac{Ya^2}{m L \text{Ln}(2)}$$

Ecuación diferencial cuya solución hemos encontrado en el ítem 10.5.

Esta es:

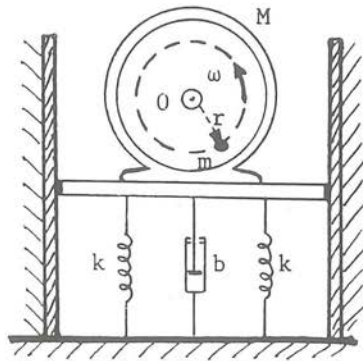
$$x = A \text{sen}(\omega_0 t + \delta) + D \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$\text{con: } D = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

Las constantes arbitrarias A y δ dependen de las c.i. (no dadas en el problema).

52. El motor mostrado en la figura está montado sobre 2 resortes iguales, cada uno con constante elástica $k = 1 \times 10^4$ N/m, y 1 amortiguador con coeficiente $b = 140$ N - s/m. El motor de masa M , incluyendo la masa desbalanceada m , pesa 170N. La masa desbalanceada m , sola, pesa 4.5N y se encuentra alojada a una distancia de 7.5 cm del eje de giro O . Si el motor gira a 300 r.p.m., determinar el movimiento oscilatorio vertical que se presenta por la presencia de la masa desbalanceada, encontrar la amplitud del movimiento resultante y la constante de fase relativa al movimiento de la masa m .

Además. encontrar: ¿a cuál velocidad de giro del motor se presentará resonancia? y también encuentre la amplitud del movimiento resultante en este caso.

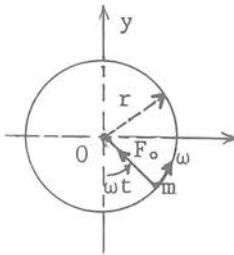


Aplicando la ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento vertical será:

$$M\ddot{y} = -b\dot{y} - 2ky + F(t)$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + 2ky = F(t)$$

La fuerza $F(t)$ se presenta por el giro de la masa m , esto es:



- Aceleración radial: $a_R = r \omega^2$

- Fuerza centrípeta: $F_o = ma_R = mr\omega^2$

- Componente vertical:

$$F(t) = F_o \cos \omega t = mr\omega^2 \cos \omega t$$

Reemplazando $F(t)$, se tiene:

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + 2ky = F_o \cos \omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{M} \dot{y} + \frac{2k}{M} y = \frac{F_o}{M} \cos \omega t$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{M} \cos \omega t$$

Con los siguientes valores:

$$M = \frac{170}{9.8} = 17.35 \text{ kg}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{b}{M} = \frac{1}{2} \frac{140}{17.35} = 4.04 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M} = 2 \frac{10,000}{17.35} = 1,152.94 \approx 1.153 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega = 2\pi \frac{300}{60} = 10\pi = 31.42 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega^2 \approx 987 \text{ s}^{-2}$$

$$m = \frac{4.5}{9.8} = 0.46 \text{ kg}$$

$$r = \frac{7.5}{100} = 7.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$F_0 = 0.46 \times 7.5 \times 10^{-2} \times (31.42)^2 = 33.99 \approx 34 \text{ N}$$

$$\frac{F_0}{M} = \frac{33.99}{17.35} = 1.96 \text{ m/s}^2$$

La solución estable de la ecuación diferencial que tenemos es:

$$y = D \cos(\omega t - \phi)$$

Con amplitud:

$$D = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{1.96}{\sqrt{(1,153 - 987)^2 + 4(4.04)^2 987}} = \frac{1.96}{303.31}$$

$$D = 6.46 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.46 \text{ mm} = 0.65 \text{ cm}$$

y constante de fase:

$$\text{tg } \phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2 \times 4.04 \times 31.42}{166} = 1.53 \Rightarrow \phi = 56.83^\circ (56^\circ 50') = 0.99 \approx 1 \text{ rad.}$$

Este ángulo ϕ es el desfase del movimiento resultante con respecto al movimiento de la masa m , tomado con fase cero respecto a la vertical.

Resonancia se presentará cuando:

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{1,153 - 2(4.04)^2} = \sqrt{1110} = 33.32 \text{ rad/s}$$

Esta es la velocidad de giro del motor:

$$\omega_R = 33.32 \times \frac{60}{2\pi} = 318.34 \approx 318 \text{ r.p.m.}$$

y la amplitud del movimiento cuando esta en resonancia, es:

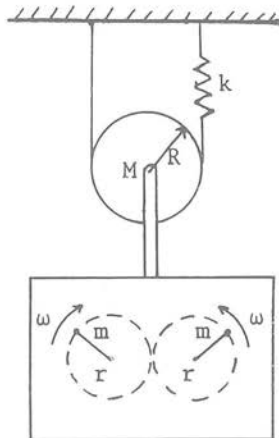
$$D_m = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + 4\beta^2\omega_R^2}} = \frac{F_0/M}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1.96}{2 \times 4.04\sqrt{1153 - (4.04)^2}}$$

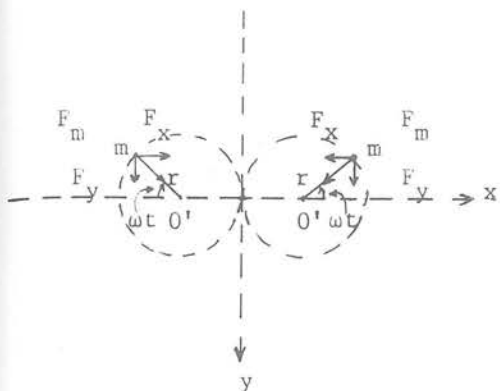
$$D_m = \frac{1.96}{272.4} = 7.20 \times 10^{-3} \text{ m} = 7.20 \text{ mm} = 0.72 \text{ cm.}$$

53. Encontrar la ecuación del movimiento del sistema mostrado en la figura cuando las masas m giran sincronizadamente en sentidos contrarios, con radio r y velocidad angular ω constante.

La polea es de radio R y masa M , la constante elástica del resorte es k , y el sistema, en conjunto, tiene una masa total M_x .

Además, se quiere saber: ¿cuál debe ser la velocidad de giro de las masas m para que el sistema entre en resonancia?





Al girar las masas m producen una fuerza vertical resultante, que llamaremos F .

Para cada una, se tiene:

$$F_m = m\omega^2 r \Rightarrow \begin{cases} F_y = F_m \sin\omega t = m\omega^2 r \sin\omega t \\ F_x = F_m \cos\omega t = m\omega^2 r \cos\omega t. \end{cases}$$

Para las dos masas, horizontalmente se cancelan y verticalmente se suman, obteniéndose:

$$F = 2F_y = 2m\omega^2 r \sin\omega t$$

Como vemos, esta fuerza vertical varía con el tiempo senoidalmente.

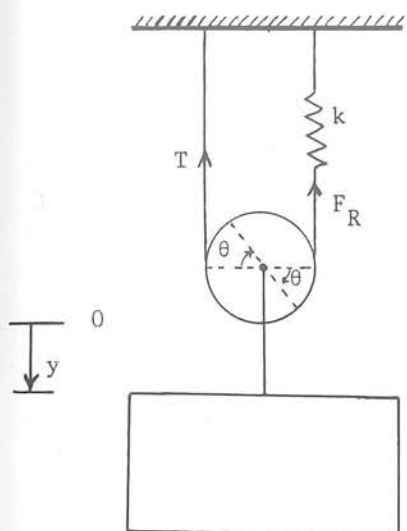
Para una posición genérica mostrada en la figura, al desplazarse verticalmente el sistema, digamos una cantidad y , se tendrá:

- La polea gira un ángulo θ , relacionado con la variable y , por:

$$y = R\theta \Rightarrow \dot{y} = R\dot{\theta} \rightarrow \ddot{y} = R\ddot{\theta}$$

- Si bien el eje de la polea desciende la cantidad y , el resorte se estira el doble de ésta cantidad, es decir: $2y$. Luego, la fuerza del resorte es:

$$F_R = 2ky$$



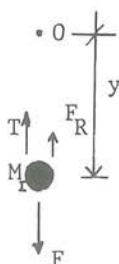
- Para determinar la tensión T ($\neq F_R$), apliquemos angularmente la ley de Newton en la rotación de la polea. Esto es:

$$I_o \ddot{\theta} = RT - RF_R \quad \Rightarrow \quad T = \frac{I_o}{R} \ddot{\theta} + F_R$$

Como el momento de inercia de la polea es: $I_o = \frac{1}{2} MR^2$, pasando a la variable y con la relación arriba establecida: $\ddot{\theta} = \ddot{y}/R$ y reemplazando el valor de F_R encontrado, el valor de T que se obtiene, en función de la variable y , es:

$$T = \frac{\frac{1}{2} MR^2}{R} \frac{\ddot{y}}{R} + 2ky = \frac{1}{2} M\ddot{y} + 2ky$$

Con estos valores obtenidos, podemos ahora, aplicar la Ley de Newton de movimiento para el sistema de masa M_I . Esto es:



$$M_I \ddot{y} = -F_R - T + F = -2ky - \frac{1}{2} M\ddot{y} - 2ky + 2m\omega^2 r \sin \omega t$$

$$(M_I + \frac{1}{2} M)\ddot{y} + 4ky = 2m\omega^2 r \sin \omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{4k}{(M_I + \frac{1}{2} M)} y = \frac{2m\omega^2 r}{(M_I + \frac{1}{2} M)} \sin \omega t$$

Teniéndose finalmente como ecuación diferencial del movimiento:

$$\ddot{y} + \omega_o^2 y = B \sin \omega t$$

$$\text{con: } \omega_o^2 = \frac{4k}{(M_I + \frac{1}{2} M)}, \quad B = \frac{2 m \omega^2 r}{(M_I + \frac{1}{2} M)}$$

cuya solución general, como hemos visto en el ítem 10.5, es:

$$y = A \sin (\omega_o t + \delta) + D \sin \omega t$$

$$\text{con: } D = \frac{B}{|\omega_o^2 - \omega^2|} = \frac{2mr}{(M_I + \frac{1}{2} M) \left| \frac{\omega_o^2}{\omega^2} - 1 \right|}$$

Las constantes arbitrarias A y δ , dependen de las c.i., no especificadas en el problema.

Como no hay amortiguamiento, la frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia natural del sistema, tendiendo la amplitud D a infinito. Esto es:

$$\omega_R = \omega_o = \sqrt{\frac{4k}{(M_T + \frac{1}{2}M)}}$$

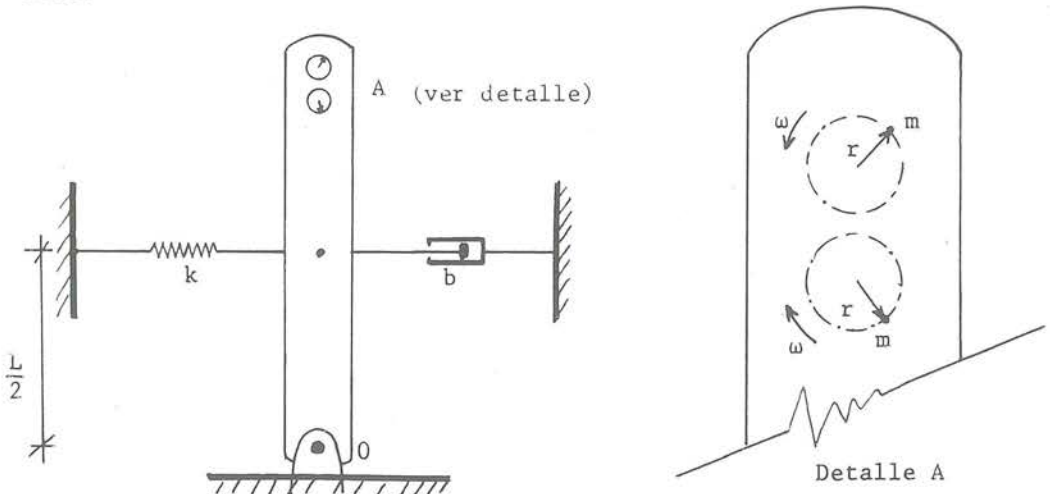
Luego, si las masas m giran con velocidad angular ω igual a este valor, el sistema entra en resonancia. Es decir, si:

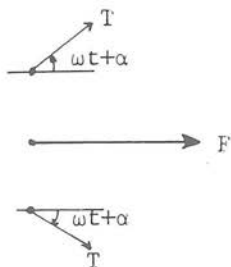
$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{(M_T + \frac{1}{2}M)}}$$

54. En el sistema mostrado en la figura, la barra de masa M y longitud L con pivote en el punto O puede girar libremente en el plano vertical. Las 2 masas m adicionales situadas en el extremo opuesto a O giran con velocidad angular constante ω unidas a ejes rígidamente de radio r. Estas masas, debido a un mecanismo interno, giran en sentido inverso una de la otra.

Considere: $M \gg m$ y $L \gg r$.

Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el plano vertical para la barra. ¿Cuál es la condición para que exista acción recuperadora?





- Acción del mecanismo:

$$T = m a_r = m \omega^2 r$$

$$F = 2T \cos(\omega t + \alpha) = 2mr\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\tau_{oF} = LF = 2Lmr\omega^2 \cos(\omega t + \alpha),$$

considerando: $L \gg r$.

- Acción del resorte:

$$F_k = k \left(\frac{L}{2} \theta \right) = \frac{1}{2} kL\theta$$

$$\tau_{ok} = \frac{L}{2} F_k = \frac{L}{2} \frac{1}{2} kL\theta = \frac{1}{2} kL^2\theta$$

- Acción del amortiguador:

$$F_b = b \left(\frac{L}{2} \dot{\theta} \right) = \frac{1}{2} bL\dot{\theta}$$

$$\tau_{ob} = \frac{L}{2} F_b = \frac{L}{2} \frac{1}{2} bL\dot{\theta} = \frac{1}{4} bL^2\dot{\theta}$$

- Acción de la gravedad:

$$P = Mg$$

$$\tau_{oP} = \left(\frac{L}{2} \theta \right) P = \frac{L}{2} \theta Mg = \frac{1}{2} LMg\theta$$

- Momento de inercia de la barra:

$$I_o = \frac{1}{3} ML^2, \text{ considerando:}$$

$$M \gg m \rightarrow I_b \gg I_m$$

Luego, aplicando la Ley de Newton se tiene:

$$\frac{1}{3} ML^2 \ddot{\theta} = - \frac{1}{4} bL^2 \dot{\theta} - \frac{1}{4} kL^2 \theta + \frac{1}{2} LMg\theta + 2Lmr\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{1}{3} ML \ddot{\theta} + \frac{1}{4} bL \dot{\theta} + \left(\frac{1}{4} kL - \frac{1}{2} Mg \right) \theta = 2mr\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{b}{M} \dot{\theta} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{M} - \frac{g}{L} \right) \theta = 6 \frac{m r \omega^2}{ML} \cos(\omega t + \alpha)$$

Esta es la ecuación diferencial pedida y la condición para que exista acción recuperadora es:

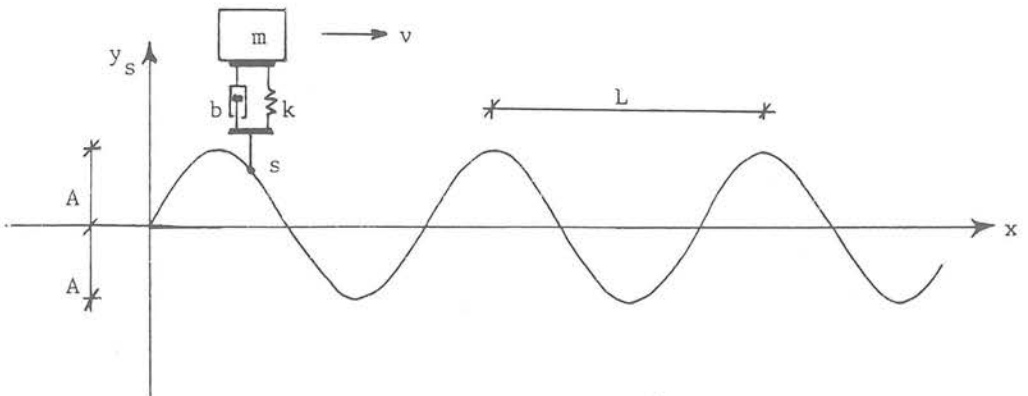
$$\left(\frac{1}{2} \frac{k}{M} - \frac{g}{L} \right) > 0 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{k}{M} > \frac{g}{L} \rightarrow k \frac{L}{2} > Mg$$

55. Para estudiar el comportamiento de un carro cuando recorre horizontalmente un camino "encalaminado" con velocidad constante v , se puede usar, en primera aproximación, el siguiente modelo:

- El camino se representa por una senoide de amplitud A y separación entre crestas L .
- El carro se representa por una masa m apoyada en un resorte de constante k y un amortiguador de constante b .

En este modelo se considera un solo resorte y un amortiguador para representar a los cuatro realmente existentes, con el objeto de tomar únicamente el efecto vertical, descartando los efectos laterales y longitudinales entre ejes. También se considera una sola masa descartando el acoplamiento de las masas separadas entre la suspensión y carrocería, sin considerar la acción elástica de las llantas.

Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
 ¿A cuál velocidad de recorrido horizontal entrará en resonancia?



El movimiento vertical del punto s sobre el camino encalaminado senoidal, será:

$$y_s = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{L} x$$

Como el carro se desplaza horizontalmente en la dirección x con velocidad constante v, se tiene que:

$$x = vt$$

Luego, y_s en función del tiempo será:

$$y_s = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{L} vt$$

Como v y L son constantes, tomando como constante:

$$\omega = \frac{2\pi}{L} v$$

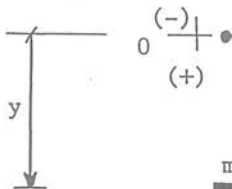
podemos escribir:

$$y_s = A \operatorname{sen} \omega t$$

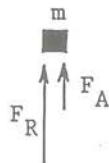
y la velocidad vertical del punto s, será:

$$\dot{y}_s = A \omega \cos \omega t$$

llamando y al movimiento del carro, las fuerzas que actúan sobre el carro son:



$$F_R = -k(y - y_s)$$



$$F_A = -b(\dot{y} - \dot{y}_s)$$

Aplicando la Ley de Newton del movimiento, verticalmente a la masa m , se tiene:

$$m\ddot{y} = -k(y - y_s) - b(\dot{y} - \dot{y}_s)$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ky_s + b\dot{y}_s$$

reemplazando los valores de y_s e \dot{y}_s , queda:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA \sin \omega t + bA\omega \cos \omega t$$

El segundo miembro es una combinación suma de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$, como hemos visto, puede expresarse sólo como seno o coseno, indistintamente, tomando dos constantes: amplitud y fase. Esto es, digamos: $E \sin(\omega t + \theta)$ y desarrollando, se tiene:

$$E \sin(\omega t + \theta) = (E \cos \theta) \sin \omega t + (E \sin \theta) \cos \omega t$$

Comparando con los valores que se tienen en la ecuación, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} E \cos \theta &= Ak \rightarrow \cos \theta = \frac{Ak}{E} \\ E \sin \theta &= Ab\omega \rightarrow \sin \theta = \frac{Ab\omega}{E} \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \text{Diagrama de un triángulo rectángulo con hipotenusa } E, \text{ cateto horizontal } Ak, \text{ y cateto vertical } Ab\omega. \text{ El ángulo } \theta \text{ está en el vértice inferior izquierdo.} \end{array} \left. \begin{aligned} E &= A\sqrt{k + b^2 \omega^2} \\ \text{tg } \theta &= \frac{b\omega}{k} \end{aligned} \right\}$$

Luego, la ecuación diferencial del movimiento podemos escribirla de la siguiente manera:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = E \sin(\omega t + \theta)$$

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{E}{m} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{Con: } 2\beta = b/m \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = k/m$$

La solución complementaria: $y_c = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \delta)$, es transitoria,

por lo tanto, la solución particular que es estable, será la solución general, esto es:

$$y = D \operatorname{sen} (\omega t + \theta - \phi)$$

teniendo:

$$\text{- Amplitud: } D = \frac{E/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \text{ con: } E = A\sqrt{k^2 + b\omega^2}$$

$$\text{- Fase: } \phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad \text{y } \theta = \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{k}$$

$$\text{- Frecuencia: } \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{con: } \omega = \frac{2\pi}{L} \nu$$

Si el efecto amortiguador es relativamente pequeño, en primera aproximación, se tendrá:

$$E \approx Ak, \quad D \approx \frac{Ak/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|} = \frac{A}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|}, \quad \phi \approx 0, \quad \theta \approx 0$$

Con solución:

$$y \approx D \operatorname{sen} \omega t$$

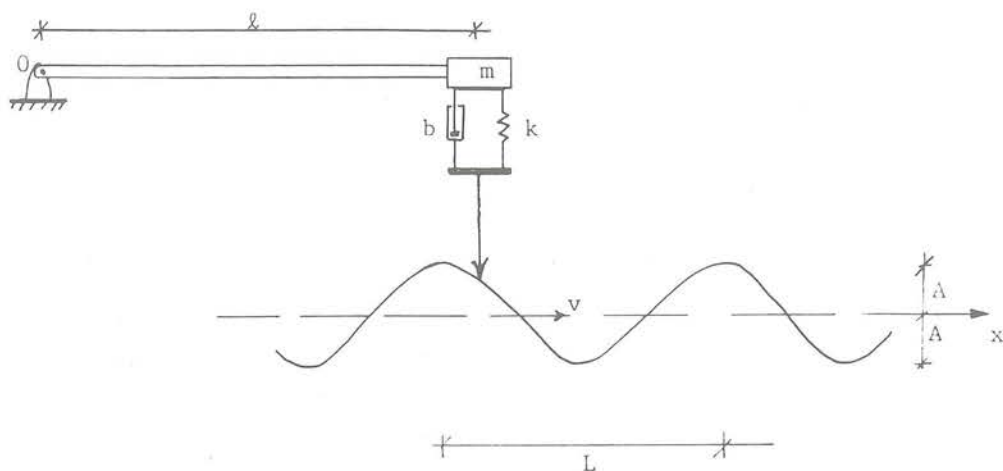
- Resonancia, con esta aproximación, se tendrá:

$$\omega_R \approx \omega_0$$

y la velocidad del carro, correspondiente a este valor de la frecuencia de resonancia, será:

$$\omega_R = \frac{2\pi}{L} \nu_R \approx \omega_0 \rightarrow \nu_R \approx \frac{L}{2\pi} \omega_0 = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

50. Tomar como modelo para el brazo de un antiguo tocadiscos la representación mostrada en la figura. Considere que la aguja se apoya sobre un surco de forma senoidal, de amplitud A y separación L entre crestas, que se desplaza con velocidad horizontal v constante. Plantear la ecuación diferencial del movimiento para el porta aguja de masa m .



Recomendación: Resolver primero el problema anterior.

El movimiento vertical de la punta de la aguja sobre el surco es:

$$y_s = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{L} x$$

como el surco se desplaza horizontalmente en la dirección x con velocidad constante v , se tiene que: $x = vt$. Luego, $y_s(t)$ será:

$$y_s = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{L} vt$$

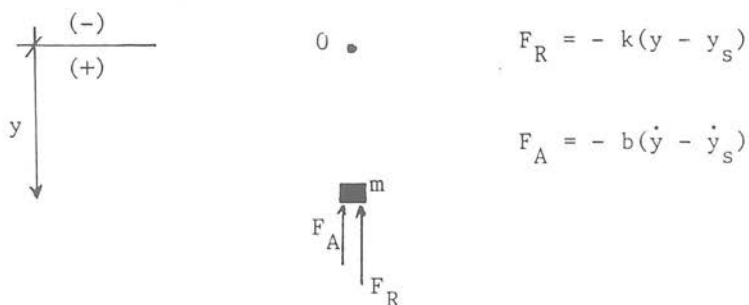
tomando como constante: $\omega = \frac{2\pi}{L} v$, podemos escribir:

$$y_s = A \operatorname{sen} \omega t$$

y la velocidad vertical de la punta de la aguja será:

$$\dot{y}_s = A\omega \cos \omega t$$

llamando y al movimiento vertical de la masa m, las fuerzas que actúan sobre ella son:



En función de la variable angular θ , como: $y = L\theta$, las fuerzas serán:

$$F_R = -k(L\theta - y_s)$$

$$F_A = -b(L\dot{\theta} - \dot{y}_s)$$

Aplicando la Ley de Newton para movimiento angular, se tiene:

$$mL^2\ddot{\theta} = -k(L\theta - y_s)L - b(L\dot{\theta} - \dot{y}_s)L$$

$$mL^2\ddot{\theta} + bL^2\dot{\theta} + kL^2\theta = kLy_s + bL\dot{y}_s$$

con los valores obtenidos de y_s e \dot{y}_s , queda:

$$mL^2\ddot{\theta} + bL^2\dot{\theta} + kL^2\theta = kLA \sin \omega t + bLA\omega \cos \omega t$$

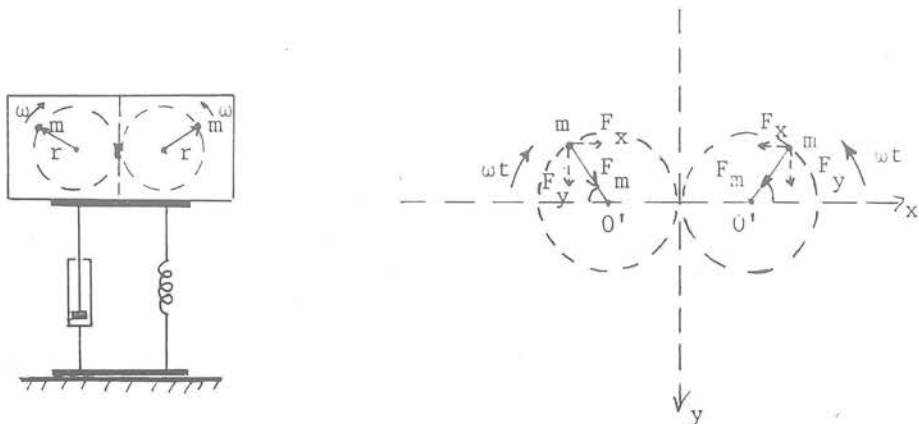
Esta es la ecuación diferencial pedida, su solución se puede obtener como en el problema anterior.

57. Para estudiar los efectos de vibración de un motor de automóvil, se puede usar, en primera aproximación, el siguiente modelo:
- El carro se representa por una masa M apoyada en un resorte de constante k y un amortiguador de constante b .

- El motor se representa por dos pequeñas masas m simétricamente dispuestas, que giran sincronizadamente en sentidos contrarios accionadas por el motor, con radio r y velocidad angular ω constante.

Con la disposición adoptada en este modelo, se descarta cualquier efecto lateral, longitudinal u horizontal, considerándose sólo el efecto vertical.

Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
¿Cuándo ocurre resonancia?



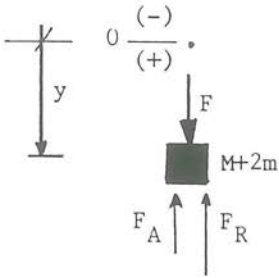
Al girar las masas m , para cada una de ellas, se tiene:

$$F_m = m \omega^2 r \rightarrow \begin{cases} F_y = F_m \sin \omega t = m \omega^2 r \sin \omega t \\ F_x = F_m \cos \omega t = m \omega^2 r \cos \omega t \end{cases}$$

Al considerar las dos masas, las acciones horizontales se cancelan y verticalmente se suman, produciendo una fuerza vertical resultante que llamaremos F . Esta será: $F = 2F_y = 2m\omega^2 r \sin \omega t$

Luego, aplicando la Ley de Newton al movimiento del sistema, se tiene:

D.C.L. (M + 2m)



$$(M + 2m)\dot{y} = -F_R - F_A + F$$

$$(M + 2m)\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + 2m\omega^2 r \sin\omega t$$

$$(M + 2m)\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 2m\omega^2 r \sin\omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{(M+2m)}\dot{y} + \frac{k}{(M+2m)}y = \frac{2m\omega^2 r}{(M+2m)} \sin\omega t$$

Con: $2\beta = \frac{b}{(M+2m)}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{(M+2m)}$, $B = \frac{2m\omega^2 r}{M + 2m}$

podemos escribir:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = B \sin\omega t$$

Ecuación diferencial del movimiento, cuya solución general ya conocemos. Siendo transitoria la solución complementaria, la solución general será sólo la solución particular, que es estable, luego:

$$y = D \sin(\omega t - \phi)$$

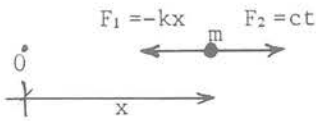
Con: $D = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$ y $\phi = \arctg\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

Considerando que el efecto amortiguador es relativamente pequeño, la resonancia ocurrirá, en primera aproximación, cuando: $\omega \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+2m}}$

Si, además, consideramos que $m \ll M$, se tendrá simplemente: $\omega \cong \sqrt{\frac{k}{M}}$

58. A un oscilador simple, de masa m y constante elástica k , se le fuerza linealmente aplicándole directamente a la masa una fuerza $F(t) = c t$. Plantear la ecuación diferencial del movimiento de Newton y encontrar su solución general.

Determinar las constantes arbitrarias para condiciones iniciales, a $t=0$, $x=0$ y $v = v_0$, graficar el resultado, esto es, x vs t .



$$m\ddot{x} = -kx + ct$$

$$m\ddot{x} + kx = ct$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{m} t, \text{ con: } \omega_0^2 = k/m$$

. Solución complementaria: $x_c = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$

. Solución particular:

considerando: $x_p = Bt \rightarrow \dot{x}_p = B$ y $\ddot{x}_p = 0$, reemplazando se tiene:

$$0 + \omega_0^2 Bt = \frac{c}{m} t \rightarrow B = \frac{c}{m \omega_0^2} = \frac{c}{k}, \text{ y } : x_p = \frac{c}{k} t$$

Luego, la solución general será:

$$x = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta) + \frac{c}{k} t$$

con velocidad:

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos (\omega_0 t + \delta) + \frac{c}{k}$$

Para las c.i. dadas a $t = 0$: $x = 0$ y $v = v_0$, reemplazando se tiene:

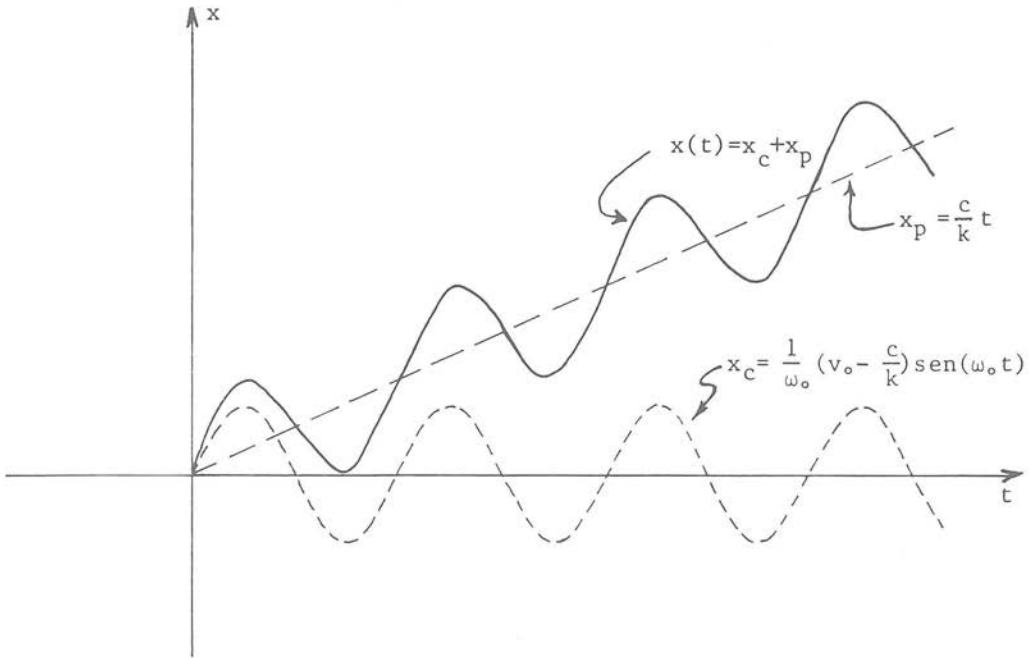
$$0 = A \text{ sen } \delta + 0 \rightarrow \text{sen } \delta = 0 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow \cos \delta = 1$$

$$v_0 = A \omega_0 \cos \delta + \frac{c}{k} = A \omega_0 + \frac{c}{k} \rightarrow A = \frac{1}{\omega_0} (v_0 - \frac{c}{k})$$

$$\text{Luego: } x = \frac{1}{\omega_0} (v_0 - \frac{c}{k}) \text{ sen}(\omega_0 t) + \frac{c}{k} t$$

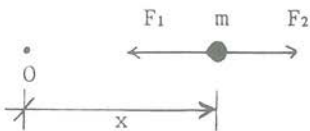
(Fig. sgte pág.)

Gráfica x vs t :



59. Sobre una masa m actúan linealmente en la dirección x dos fuerzas:
 $F_1 = -kx$ y $F_2 = ct^2$, poniéndose en movimiento a $t = 0$ con las siguientes condiciones iniciales: $x = x_0$ y $v = 0$.
 Determinar el movimiento de la masa y graficar la solución $x(t)$.

D.C.L. (m)



Aplicando la Ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento, será:

$$m\ddot{x} = -kx + ct^2$$

$$m\ddot{x} + kx = ct^2$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{m} t^2, \text{ con: } \omega_0^2 = k/m$$

Por lo tanto, se tiene un oscilador simple forzado con ct^2 .

La solución complementaria es: $x_c = A \text{ sen } (\omega_0 t + \delta)$

Para encontrar la solución particular, si proponemos:

$x_p = Bt^2 \rightarrow \dot{x}_p = 2Bt \rightarrow \ddot{x}_p = 2B$, como la segunda derivada es constante, al reemplazar en la ecuación diferencial, como puede comprobarse fácilmente, la solución propuesta no la satisfecerá.

Luego, propondremos agregar una constante a la función inicialmente propuesta, esto es:

$$x_p = Bt^2 + E \rightarrow \dot{x}_p = 2Bt \rightarrow \ddot{x}_p = 2B, \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$2B + \omega_0^2(Bt^2 + E) = \frac{c}{m} t^2 \rightarrow (2B + \omega_0^2 E) + (\omega_0^2 B - \frac{c}{m}) t^2 = 0$$

Para todo instante de tiempo t , ambas expresiones entre paréntesis deben ser simultáneamente iguales a cero. Esto es:

$$\omega_0^2 B - \frac{c}{m} = 0 \rightarrow B = \frac{c}{m\omega_0^2} = \frac{c}{k}$$

$$2B + \omega_0^2 E = 0 \rightarrow E = -\frac{2B}{\omega_0^2} = -\frac{2c}{k\omega_0^2}$$

Luego, la solución particular será:

$$x_p = \frac{c}{k} t^2 - \frac{2c}{k\omega_0^2} = \frac{c}{k} \left(t^2 - \frac{2}{\omega_0^2} \right) = \frac{c}{k} \left(t^2 - \frac{2m}{k} \right)$$

y la solución general:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta) + \frac{c}{k} \left(t^2 - \frac{2}{\omega_0^2} \right)$$

con velocidad:

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{2c}{k} t$$

Reemplazando las c.i. a $t = 0$: $x = x_0$ y $v = 0$, se encontrarán las constantes arbitrarias A y δ , esto es:

$$0 = A\omega_0 \cos \delta \rightarrow \cos \delta = 0 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \delta = 1$$

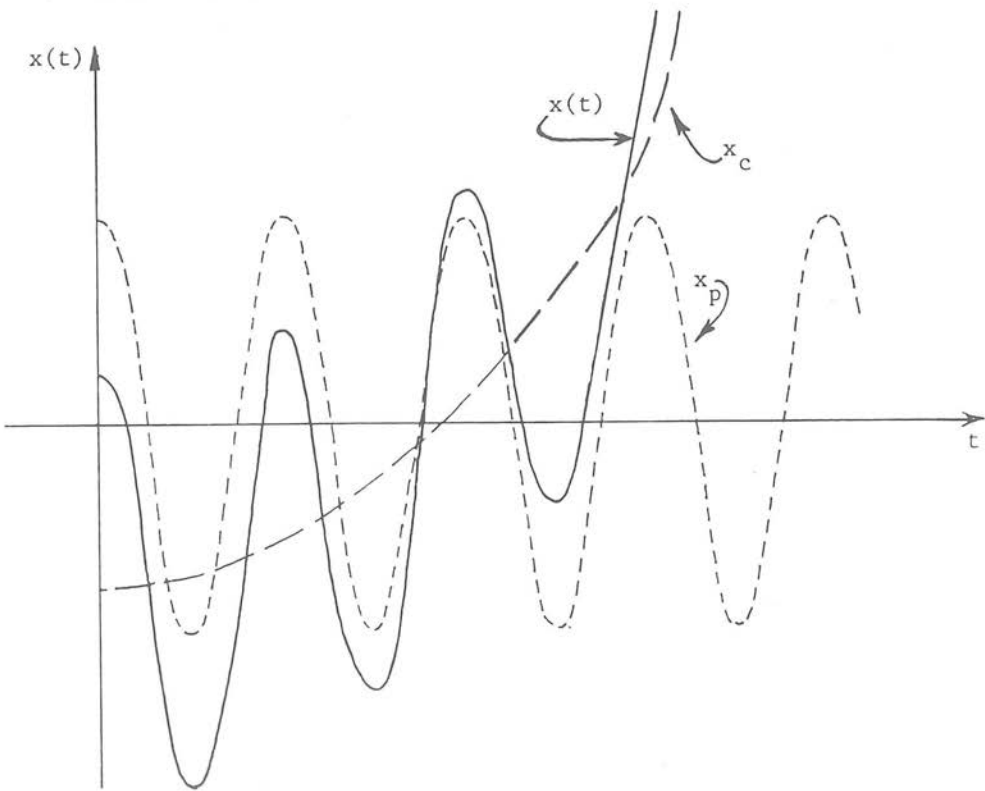
$$x_0 = A \operatorname{sen} \delta - \frac{2c}{k\omega_0^2} = A - \frac{2c}{k\omega_0^2} \rightarrow A = x_0 + \frac{2c}{k\omega_0^2}$$

Luego, se tendrá $x(t)$:

$$x = \left(x_0 + \frac{2c}{k\omega_0^2} \right) \operatorname{sen} \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{c}{k} \left(t^2 - \frac{2}{\omega_0^2} \right)$$

$$x = \left(x_0 + \frac{2c}{k\omega_0^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{c}{k} t^2 - \frac{2c}{k\omega_0^2} \quad (\text{Fig. sgte. pág.})$$

Gráfica x vs t:



60. Una fuerza $F = F_0(1 - e^{-at})$ actúa sobre un oscilador amortiguado de masa m y constantes $k = 4ma^2$ y $b = ma$, teniendo a valor constante. El oscilador se encuentra en reposo a $t = 0$, es decir se tienen como condiciones iniciales $x_0 = v_0 = 0$. Plantear la ecuación diferencial del movimiento y mostrar que su solución $x(t)$, es:

$$x = - \frac{F_0}{2\sqrt{15} ma^2} e^{-\frac{1}{2}at} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}at\right) + \frac{F_0}{4ma^2} (1 - e^{-at})$$

Graficar esta solución (x vs t) y explicar brevemente su interpretación física.

Aplicando la ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento, con los valores dados, será:

$$m\ddot{x} + m\dot{x} + 4ma^2x = F_0(1 - e^{-at})$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 4a^2x = \frac{F_0}{m}(1 - e^{-at})$$

con:

$$\left. \begin{aligned} 2\beta &= a \rightarrow \beta = a/2 \\ \omega_0^2 &= 4a^2 \rightarrow \omega_0 = 2a \end{aligned} \right\} \text{ como: } \omega_0^2 = 4a^2 > \beta^2 = \frac{a^2}{2}$$

se tiene el caso subamortiguado, y la solución complementaria será:

$$x_c = A e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta)$$

$$\text{con: } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{4a^2 - a^2/2} = \frac{1}{2} \sqrt{15} a$$

queda:

$$x_c = A e^{-\frac{1}{2} at} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \sqrt{15} at + \delta\right)$$

Busquemos la solución particular, con:

$$x_p = B(1 - e^{-at}) \text{ y derivadas: } \dot{x}_p = Bae^{-at}; \ddot{x}_p = -Ba^2e^{-at},$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-Ba^2e^{-at} + Ba e^{-at} + 4a^2B(1 - e^{-at}) = \frac{F_0}{m}(1 - e^{-at})$$

$$\text{se obtiene: } B = \frac{F_0}{4ma^2}$$

$$\text{luego: } x_p = \frac{F_0}{4ma^2} (1 - e^{-at})$$

y, la solución general será:

$$x = A e^{-\frac{1}{2} at} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \sqrt{15} at + \delta\right) + \frac{F_0}{4ma^2} (1 - e^{-at})$$

derivando:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} a A e^{-\frac{1}{2} at} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{15} at + \delta\right) + \frac{1}{2} \sqrt{15} a A e^{-\frac{1}{2} at} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{15} at + \delta\right) + \frac{F_0}{4ma} e^{-at}$$

para las c.i. dadas a $t = 0$: $x_0 = v_0 = 0$, se tiene:

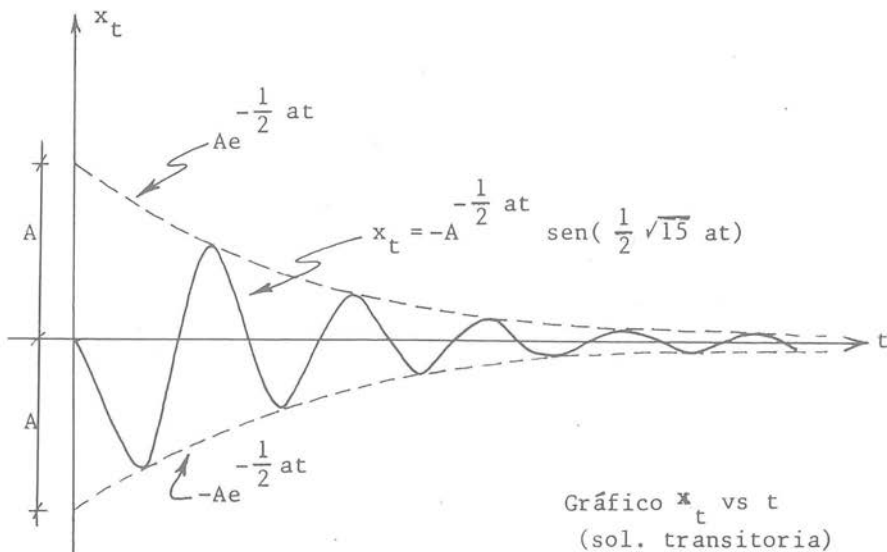
$$0 = A \sin \delta \rightarrow \sin \delta = 0 \rightarrow \delta = 0, \cos \delta = 1$$

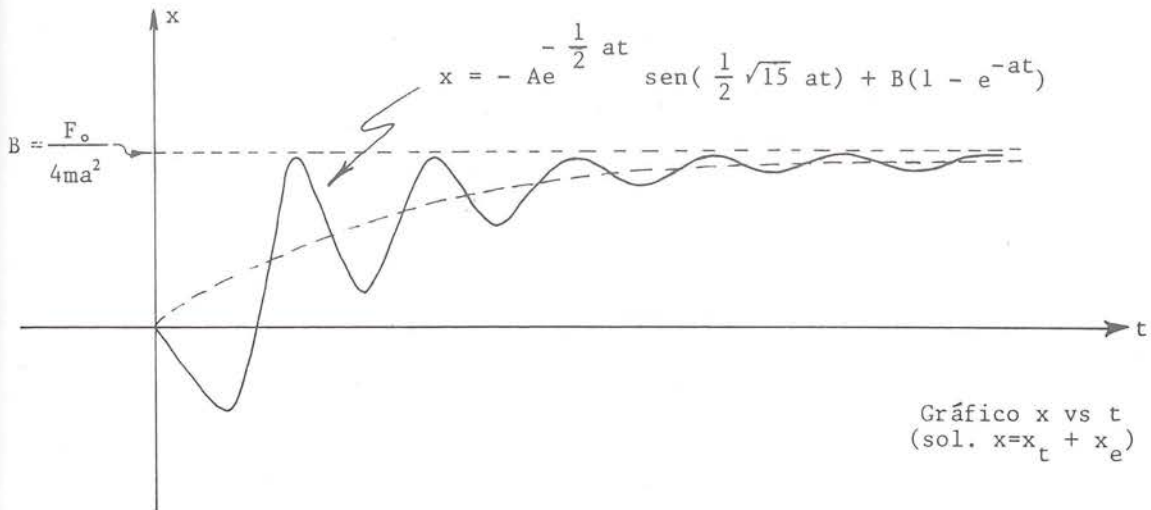
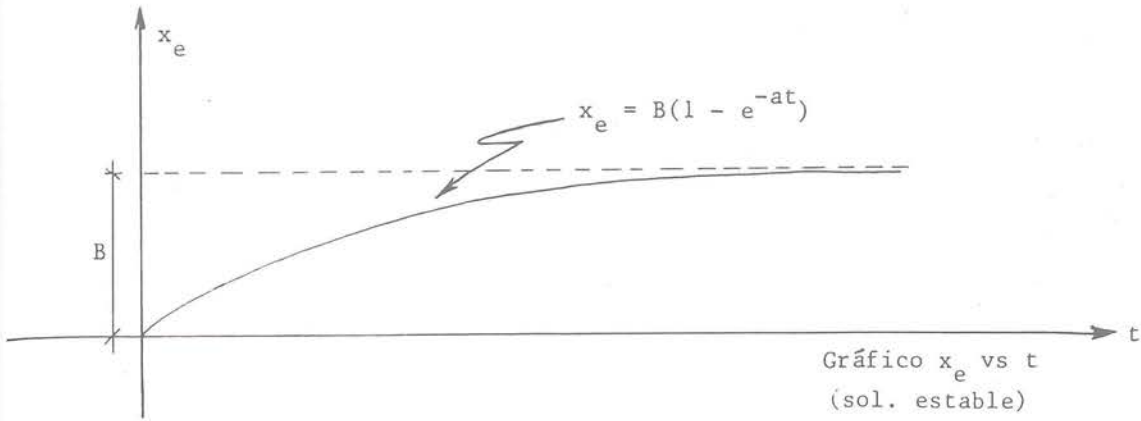
$$0 = -\frac{1}{2} aA \sin \delta + \frac{1}{2} \sqrt{15} aA \cos \delta + \frac{F_0}{4ma} = \frac{1}{2} \sqrt{15} aA + \frac{F_0}{4ma} \rightarrow A = -\frac{F_0}{2\sqrt{15} ma^2}$$

Finalmente, la solución $x(t)$, queda:

$$x = -\frac{F_0}{2\sqrt{15} ma^2} e^{-\frac{1}{2} at} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{15} at\right) + \frac{F_0}{4ma^2} (1 - e^{-at})$$

Esta solución consta de dos términos, uno transitorio y otro estable, grafiquemos independientemente estos dos términos y sumémoslos para obtener x vs t .





Observamos que se trata de un movimiento oscilatorio amortiguado y forzado que tiende a un valor constante:

$$x \rightarrow B = \frac{F_0}{4ma^2}$$

61. A un sistema oscilatorio amortiguado se le aplica una fuerza externa $F_y = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \theta)$ y se le hace oscilar verticalmente.

Después de transcurrido un tiempo, se le imprime a la masa la superposición horizontal de un movimiento armónico simple, con frecuencia ω_0 .

¿Cuál debe ser la frecuencia ω_0 para que la figura descrita por la trayectoria de la masa en el plano de su movimiento sea: círculo, elipse, recta, ocho vertical, ocho horizontal?

Inicialmente se tiene un movimiento vertical oscilatorio, amortiguado y forzado. Después de un tiempo, desaparece la solución transitoria y sólo queda la solución estable con la frecuencia ω correspondiente a la acción externa.

Por lo tanto, la frecuencia ω_0 del movimiento horizontal deberá ser:

- para formar círculo, elipse o recta $\rightarrow \omega_0 = \omega$
- para formar un ocho vertical (8) $\rightarrow \omega_0 = 2\omega$
- para formar un ocho horizontal (∞) $\rightarrow \omega_0 = \omega/2$

CAPITULO XI

ONDAS

- Introducción y tipos de ondas.
- Cinemática de la propagación.
- Ecuación de onda Unidimensional.
 - . Ondas transversales en una cuerda.
 - . Ondas longitudinales en una barra.
 - . Ondas longitudinales en aire confinado en un ducto.
- Solución general de la ecuación de onda.
- Superposición de ondas.
- Interferencia.
- Reflexión de ondas.
- Ondas Estacionarias.
- Ondas Acústicas.
- Efecto Doppler
- Polarización lineal en una onda transversal.

11.1 Introducción y Tipos de Ondas.-

El estudio de las características, propiedades y comportamiento del movimiento ondulatorio es de suma importancia en la física, tanto clásica como moderna.

La característica fundamental del movimiento ondulatorio es la transferencia de energía de un punto a otro, sin que exista transferencia física de materia entre los dos puntos. Es decir, en un punto del espacio se produce una perturbación que se transmite al siguiente punto y así sucesivamente propagándose en el espacio, hasta llegar a algún punto determinado donde se detecta. Por lo tanto, podemos referirnos a tres aspectos: producción, propagación y detección. Por ejemplo, la familiar onda de sonido, una fuente vibrante produce el sonido perturbando el medio que lo rodea, como el aire, propagándose en este medio y transmitiendo la energía a un receptor, tal como el oído.

Las ondas que requieren de un medio elástico para propagarse, sea el medio sólido, líquido o gas, se les denominan "Ondas Mecánicas". En este capítulo analizaremos este tipo de ondas, más adelante, encontraremos otras ondas como son las ondas electromagnéticas que no necesitan de un medio para propagarse, por ejemplo podemos citar la propagación de la luz en el espacio vacío.

Las ondas mecánicas se originan cuando se desplaza una parte del medio, generalmente oscilando cada partícula alrededor de su posición de equilibrio, por eso el movimiento ondulatorio está íntimamente ligado con el movimiento oscilatorio que acabamos de estudiar en el capítulo anterior. La fuerza elástica del medio proporciona la acción restauradora, comunicando la perturbación a una posición adyacente y así sucesivamente propagándose, luego aquí tratamos con las oscilaciones o vibraciones de un número grande de partículas y no solo con una. Por otro lado, la inercia del medio da la respuesta de la parte desplazada a las fuerzas elásticas. Por lo tanto, como vere-

mos luego, estas propiedades del medio, elasticidad e inercia, determinan la velocidad de propagación de las ondas. De esta forma se transmite energía a puntos considerablemente distantes de la fuente de producción de la perturbación, sin que haya movimiento global del medio, ni transporte de materia entre ambos puntos.

Cuando las vibraciones de las partículas del medio son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, se le llama "Onda Transversal". En cambio, si las partículas del medio oscilan vibrando hacia adelante y hacia atrás alrededor de su posición de equilibrio en la misma dirección de propagación de la onda, en este caso se le llama "Onda Longitudinal".

Como ejemplos característicos de estas ondas podemos citar:

- . Onda Transversal: a una cuerda larga recta sometida a tensión se le pone a oscilar en un extremo a ángulo recto a la dirección recta de la cuerda, esta perturbación avanza a lo largo por la cuerda moviéndose sus partículas perpendicularmente a la dirección de propagación como se muestra en la figura 11.1 a), teniéndose una onda transversal.
- . Onda Longitudinal: a un resorte largo recto sometido a tensión se le pone a oscilar en un extremo hacia adelante y hacia atrás en la dirección del resorte, esta perturbación avanza a lo largo del resorte moviendo sus espiras en vaiven en un sentido y en el otro en la misma dirección de la propagación como se muestra en la figura 11.1 b), teniéndose una onda longitudinal. Otro ejemplo importante también característico de estas ondas longitudinales son las sonoras en un tubo largo lleno con un medio compresible, generalmente gaseoso como el aire, ver fig. 11.1 c).

Es conveniente mencionar que también se pueden formar ondas, que no estudiaremos, que no son puramente transversales ni tampoco longitudinales.

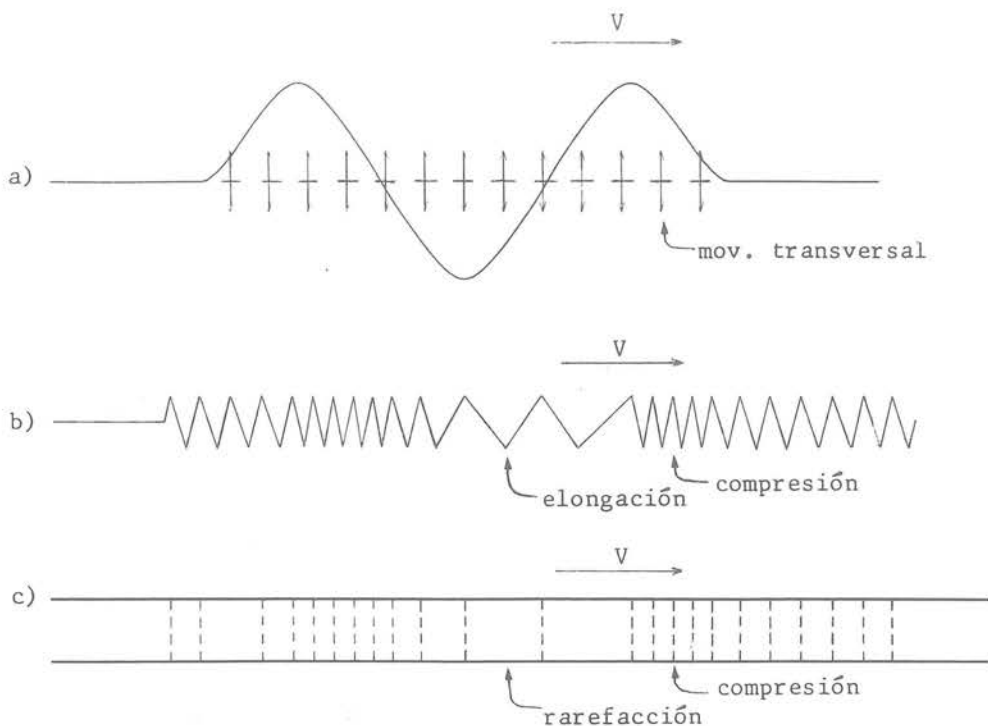


Fig. 11.1 Ejemplos de ondas que se propagan con velocidad V .

- a) Onda Transversal en una cuerda.
- b) Onda Longitudinal en un resorte.
- c) Onda Longitudinal en un tubo con aire.

Hemos mencionado que al producirse una perturbación al transcurrir el tiempo se propaga en el medio. Cuando se produce en el extremo solo un movimiento, transversal o longitudinal, decimos simplemente que tenemos un "Pulso" de onda que se propaga en el medio, las partículas del medio adelante están en reposo hasta que les llega el pulso, moviéndose mientras pasa y después nuevamente se quedan quietas permaneciendo en reposo. Si en el extremo se producen, no solo un movimiento único, sino mas bien, una sucesión de los mismos, decimos que tenemos un "tren de ondas" o simplemente una "onda" que se propaga en el medio. Si el movimiento es periódico se tendrá la

propagación de un tren de ondas periódico, es decir, una onda periódica, teniéndose como caso particular más importante y característico la onda armónica.

De acuerdo a las direcciones de propagación las ondas también pueden tipificarse como: unidimensional, bidimensional o tridimensional. Las ondas mostradas en la fig. 11.1, son ondas que se propagan en una dimensión. La onda que se forma en la superficie de un líquido en reposo al perturbarla, como cuando se deja caer sobre ella un pequeño cuerpo, es una onda bidimensional y, por ejemplo, una onda sonora producida por una pequeña fuente puntual se propaga en el aire en tres dimensiones.

Cuando se propaga una onda, si en un instante dado trazamos superficies perpendiculares a la dirección de propagación, tal que contengan puntos de igual condición de perturbación, teniéndose un medio homogéneo e isotrópico, se dice que se tiene un "frente de onda". Si la propagación es en una dirección, los frentes de onda son superficies planas y se dice que se tiene una "onda plana". Si se produce una perturbación puntual que se propaga radialmente en todas direcciones, los frentes de onda serán esféricos y se dice que se tiene una "onda esférica". Pero, aún en este caso, si el detector se encuentra lejos de la fuente, los frentes de onda esféricos que le llegan se pueden considerar casi planos, es decir, prácticamente recibe una onda plana. Estos dos frentes no son las únicas formas, también pueden tener otras formas.

11.2 Cinemática de la Propagación.-

Para estudiar el movimiento ondulatorio primero debemos ser capaces de poder describir matemáticamente, es decir, en forma precisa y concisa, el fenómeno de la propagación. Luego, posteriormente podremos ocuparnos de la dinámica del movimiento aplicando los conceptos que ya hemos desarrollado para partículas con la Ley de Newton.

Consideremos una función cualquiera $\Psi = f(x)$ cuya forma arbitraria se muestra en la fig. 11.2. Recordemos que si queremos desplazar esta función hacia la derecha en el sentido positivo con respecto al origen 0 de referencia, digamos una cantidad q , tomada en valor absoluto, o sea como positiva, debemos reemplazar en la expresión de la función la variable (x) por $(x - q)$, esto es:

$$\Psi = f(x) \quad \rightarrow \quad \Psi = f(x - q)$$

Con esto se logra obtener los mismos valores para Ψ sin cambiar la forma de la curva, solo se ha desplazado hacia la derecha la distancia q . Sea cual fuere la función f , p.e: senoidal, logarítmica, exponencial, o polinómica.

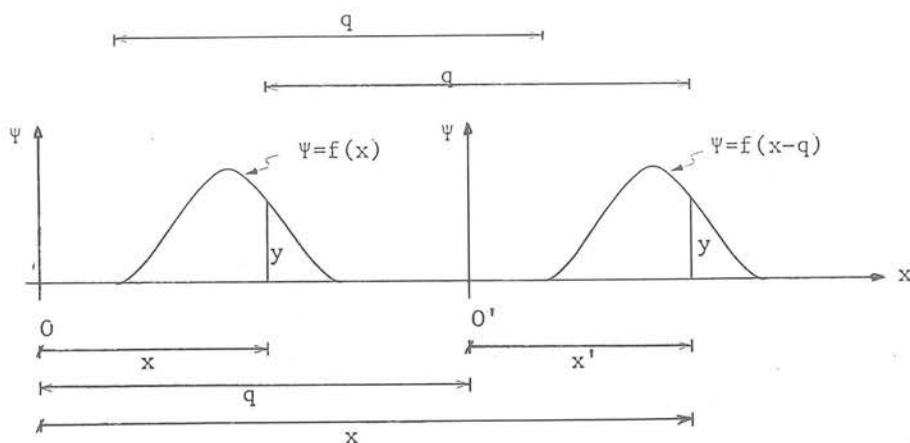


Fig. 11.2 Desplazamiento de una función $\Psi = f(x)$ una distancia q hacia la derecha: $\Psi = f(x-q)$.
Si $q = Vt$, la función se desplaza en el tiempo con una velocidad V .

Este desplazamiento es equivalente a decir que corresponde al cambio de origen del sistema de referencia de O a O' , desplazándose una distancia q , tal que:

$$x' = x - q$$

Lograndose de esta forma que para un valor particular de ψ , mostrado en la fig. 11.2, se obtenga un valor particular de x' constante para cualquier posición arbitraria de O' . Es decir, se requiere que $x - q = x' = \text{constante}$, de modo tal que si x aumenta con respecto a O , q deberá ser mayor para que x' se mantenga constante y obtener siempre el mismo valor dado ψ con respecto al nuevo origen O' .

Similarmente, si queremos desplazar la función hacia la izquierda en sentido negativo con respecto al origen O de referencia, se debe reemplazar (x) por $(x + q)$, esto es:

$$\psi = f(x) \rightarrow \psi = f(x + q)$$

Si, más aún, queremos que la función no solo se desplace una cantidad fija q , si no, mas bien, que la función se mueva conforme transcurra el tiempo con una velocidad V a lo largo del eje x , debemos tomar la cantidad q linealmente variable en el tiempo:

$$q = Vt$$

de tal forma que ahora se tendrá:

$$\psi = f(x \mp Vt)$$

Con signo $(-)$ si se mueve hacia la derecha y $(+)$ hacia la izquierda. Luego, esta expresión matemática es adecuada para describir la situación física de un pulso cualquiera que "viaja" o se "propaga" a lo largo de una determinada dirección, en un sentido o en el otro, sin alterar su forma. Y, en general, no solo a un pulso, sino a cualquier onda viajera.

La cantidad Ψ puede representar cualquier cantidad física. Por ejemplo, si consideramos una cuerda estirada en la dirección x por la cual viaja una onda transversal, Ψ representará el desplazamiento transversal y de las partículas de la cuerda. En general puede representar una gran diversidad de cantidades físicas, tales como la deformación en un sólido o la variación de la presión en un gas, por lo cual, para identificarla frecuentemente también se utilizan otros símbolos; como: y, z, ζ, p, q, s , etc.

Anteriormente hemos mencionado que para un valor particular de Ψ , que ahora denominaremos "fase", cuando se desplaza el frente de onda que contiene a dicha fase, se requiere que el argumento de la función tenga un valor determinado fijo, es decir, constante, esto es:

$$x \mp Vt = \text{constante}$$

de tal forma que cuando t aumenta x también debe aumentar para mantener fijo $(x - Vt)$ y disminuir para $(x + Vt)$.

Con esta condición si la diferenciamos respecto al tiempo, se obtiene:

$$dx \mp Vdt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} \mp V = 0 \Rightarrow \pm V = \frac{dx}{dt}$$

Luego, en este caso, la velocidad de propagación que denominamos como V , es precisamente la llamada "velocidad de fase" en el movimiento ondulatorio. Es importante hacer notar que en la expresión general de onda viajera la cantidad Ψ , ahora es función de dos variables, x y t . Esto es:

$$\Psi(x, t) = f(x \mp Vt)$$

Por lo tanto, se tendrá una doble representación gráfica. Por un lado, para un tiempo t_c dado, se tiene a Ψ en función sólo de x , con una representación gráfica Ψ vs x en un plano (Ψ, x) como puede verse en la fig. 11.3a); en el caso particular de la cuerda estirada en x esta curva representará la forma real de la onda en dicho instante y podemos decir que es una fotografía instantánea de la onda en el tiempo t_c fijo dado. En forma similar, por otra parte, para un punto

dado x_c , se tiene a Ψ en función solo de t , con una representación gráfica Ψ vs t en un plano (Ψ, t) como puede verse en la fig. 11.3b); en la cuerda, la gráfica representará la variación del movimiento transversal particular del punto x_c .

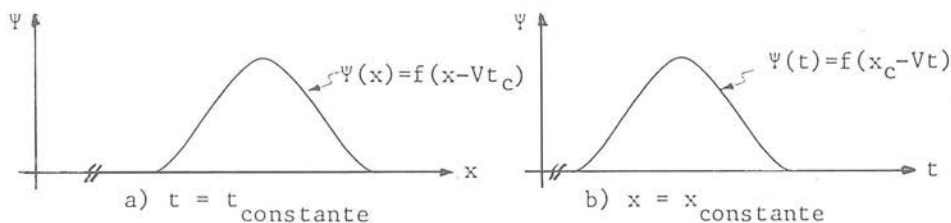


Fig. 11.3 Pulso transversal en una cuerda.

- a) Ψ vs x , para t fijo.
- b) Ψ vs t , para x fijo.

También es importante tener presente que al ser ahora Ψ función de dos variables, se tendrán también dos derivadas: una con respecto a x , manteniendo a t como constante y otra con respecto a t , manteniendo a x como constante. Luego, en este caso, tenemos que referirnos a ellas como "derivadas parciales" representadas respectivamente por:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

El procedimiento matemático para encontrar estas derivadas es el mismo, no se altera, salvo que hay que tener presente y considerar a t como una constante para encontrar $(\frac{\partial \Psi}{\partial x})$, la derivada de Ψ con respecto a x , y a x como constante para encontrar $(\frac{\partial \Psi}{\partial t})$, la derivada de Ψ con respecto a t .

Consideremos un caso particular de especial interés, importante y frecuente, como es la propagación de una onda de forma armónica. En este caso, la función f será una función de tipo senoidal, representada a $t = 0$ digamos por:

$$\Psi(x) = A \text{ sen } kx$$

Al transcurrir el tiempo, si se propaga hacia la derecha con velocidad V debemos reemplazar (x) por $(x - Vt)$, y para un instante posterior t , se tendrá:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen } k(x - Vt)$$

Efectuando la multiplicación:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen } (kx - kVt)$$

y, definiendo:

$$\omega = kV$$

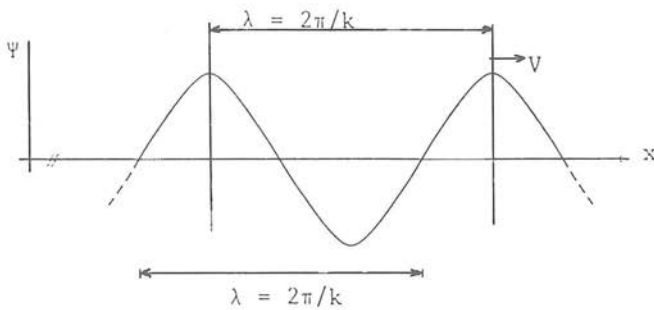
toma la siguiente forma:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen}(kx - \omega t)$$

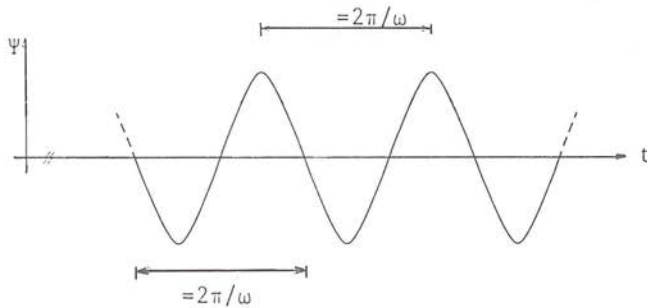
En esta expresión más compacta, frecuentemente utilizada para una onda armónica viajera, la velocidad de propagación o fase estará dada por:

$$V = \frac{\omega}{k}$$

La expresión senoidal que tenemos de Ψ , en x y t , es una función periódica tanto en x como en t . En la fig. 11.4 a y b, se grafican respectivamente.



a) $t = t_{\text{constante}}$



b) $x = x_{\text{constante}}$

Fig. 11.4 Onda armónica $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

a) Ψ vs x , para t fijo. Longitud de onda: $\lambda = 2\pi/k$

b) Ψ vs t , para x fijo. Período: $\tau = 2\pi/\omega$

El número k , cuyas dimensiones son rad/m, es conocido como el "número de onda" y está relacionado con la "periodicidad espacial" de la función $\sin kx$. Este período matemático, que es igual a $2\pi/k$, tiene dimensiones de longitud y se le llama "longitud de onda". Luego, de nominándola por λ , se tiene que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Por otro, con respecto al tiempo, la cantidad ω , ya conocida anteriormente por nosotros, es la "frecuencia angular" expresada en rad/s y que corresponde al movimiento armónico que ejecutan cada una de las partículas del medio alrededor de su posición de equilibrio. Por lo tanto, el periodo de tiempo o simplemente "periodo" en segundos y la "frecuencia" en c/s o Hertz, estarán dados por:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad v = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi v$$

Las ondas armónicas se caracterizan especificandolas generalmente mediante su longitud de onda y/o su frecuencia, pues estas dos cantidades están íntimamente ligadas entre ellas con la velocidad de propagación de la onda en el medio. Encontremos esta importante relación del movimiento ondulatorio, esto es:

Como: $\omega = 2\pi\nu$ y $k = 2\pi/\lambda$, reemplazando en $V = \omega/k$, se obtiene:

$$V = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} \Rightarrow V = \lambda\nu$$

También, en función del período: $V = \lambda/\tau$ y de aquí, escribir que:

$$\lambda = V\tau$$

Relación que nos expresa claramente que el período τ es justamente el tiempo que demora un frente de onda en recorrer la distancia λ de una longitud de onda, con velocidad de fase V .

También es frecuente escribir la expresión de onda armónica explícitamente en función de λ y τ . Esto es, reemplazando: $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi/\tau$, se obtiene:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

Por otro lado, retomando la expresión senoidal inicial a $t=0$, si la función está adicionalmente desfasada con respecto al origen de coordenadas mediante una constante de fase ϕ , que la "adelanta" esto es:

$$\Psi(x) = A \text{ sen } (kx - \phi)$$

La onda viajera se obtiene procediendo en forma similar anterior, reemplazando (x) por $(x - Vt)$ queda:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen}(kx - \omega t - \phi)$$

Obteniéndose la expresión general para una onda armónica unidimensional que viaja hacia la derecha, en el sentido positivo de x .

En cambio, si viaja en el otro sentido, negativo de x , es decir hacia la izquierda, al reemplazar (x) por $(x + vt)$, se obtiene:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen}(kx + \omega t - \phi)$$

Si la constante de fase es negativa, de tal forma que "retraza" o "atraza" a la función, la onda viajera para uno u otro sentido, será:

$$\psi(x, t) = A \text{ sen}(kx \mp \omega t + \phi).$$

Remitiéndonos nuevamente a la fig. 11.4, la gráfica en a) representa una onda de forma senoidal en un instante fijo dado t_c . En particular, para una onda transversal en un medio como la cuerda tensa horizontal con el eje x , representará el desplazamiento transversal o posición instantánea de cada una de las partículas de la cuerda, es decir, se tiene realmente una instantánea fotográfica del movimiento ondulatorio. Esta gráfica, fig. 11.4a), corresponde a la función armónica en x , es decir, a:

$$\psi(x) = A \text{ sen}(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } t = t \text{ constante.}$$

Luego, al tomarse a x como única variable podemos encontrar la derivada parcial de la función con respecto a ella. Considerando a t como una constante genérica, efectuaremos la derivada procediendo en forma normal con respecto a la variable x , obteniéndose:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } t = t \text{ constante.}$$

Como sabemos, esta derivada corresponde, al evaluarla para cualquier punto x , a la pendiente de la recta tangente a la curva de la función graficada en la fig. 11.4a), para el punto x considerado en particular. Procediendo en igual forma también podemos encontrar la segunda derivada parcial de ψ con respecto a x , esta será:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Ak^2 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } t = t \text{ constante.}$$

En cambio, con relación a la fig. 11.4b), la gráfica representa la variación en el tiempo del movimiento oscilatorio armónico que ejecuta una partícula alrededor de su posición de equilibrio, correspondiente a una ubicación particular X_c del medio. Esta gráfica, como la anterior, también es de forma senoidal, pero aquí, es armónica en t ,

esto es:

$$\Psi(t) = A \sin(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } x = x \text{ constante.}$$

Luego, considerando ahora a x como una constante genérica, y derivando en forma usual con respecto a la única variable t , la correspondiente derivada parcial con respecto al tiempo será:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } x = x \text{ constante.}$$

Como se ha derivado una función posición con respecto al tiempo, la expresión obtenida nos da la velocidad v del movimiento de la partícula correspondiente al punto particular x_c del medio. Por lo tanto se tiene que:

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para: } x = x \text{ constante.}$$

En el caso particular del movimiento ondulatorio transversal en una cuerda, direccionalmente, la velocidad v de la partícula es perpendicular a la velocidad V de propagación de la onda. En general, es muy importante distinguir entre ambas velocidades: v y V .

La aceleración de la partícula ubicada en ese punto x_c , se obtendrá derivando nuevamente con respecto al tiempo, esto es:

$$a = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t - \phi), \quad \text{para } x = x \text{ constante.}$$

Observe que la aceleración es proporcional con signo opuesto al desplazamiento: $a = -\omega^2 \Psi$, condición por la cual se confirma que el movimiento de la partícula es armónico simple.

11.3 Ecuación de Onda Unidimensional.-

El sistema físico que implica la propagación de ondas más fácil de visualizar es la cuerda vibrante ideal uniforme y tensa, por la cual viaja una onda transversal. Los resultados que se obtienen son de suma importancia porque dan una explicación fundamental de los fenómenos ondulatorios aplicables también a otros casos e introduce una de las ecuaciones más importantes de la física, teoría y aplicada, conocida como "la ecuación de onda".

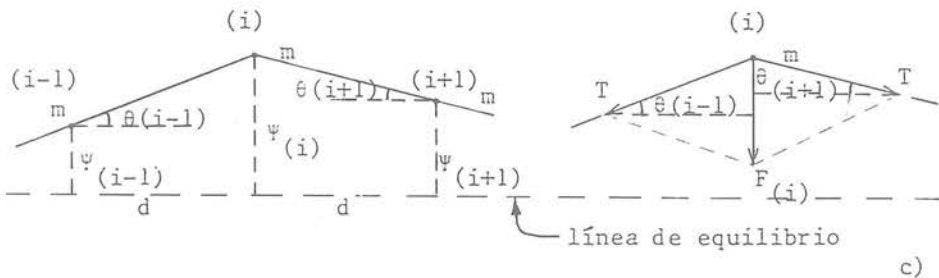
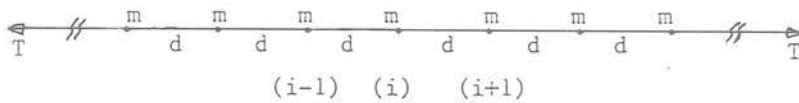
También nos extenderemos a otro importante movimiento ondulatorio ideal como es la propagación de ondas longitudinales en barras sólidas. El estudio de éstas, nos ayudará a entender las ondas planas de compresión o acústicas que se transmiten en un fluido como el aire.

. Ondas transversales en una cuerda.-

Considérese una cuerda ideal elástica de rigidez despreciable con densidad lineal uniforme μ (kg/ml) y estirada bajo una tensión T se encuentra recta en equilibrio, no considerando efectos gravitatorios, ni tampoco, al viajar una perturbación, efectos disipativos como fricción o viscosidad. Los desplazamientos Ψ serán transversales y pequeños alrededor de la posición de equilibrio.

Para analizar mejor este movimiento procederemos primero en forma discreta esto es: considerando a la cuerda como un sistema o medio formado por partículas puntuales de igual masa m espaciadas linealmente a intervalos regulares d en equilibrio, acopladas, bajo tensión horizontal, mediante cuerdas elásticas ideales sin masa, como se muestra en la fig. 11.5a).

a)



b)

c)

Fig. 11.5.- a) Cuerda considerada como un sistema de partículas discretas en equilibrio.
 b) Desplazamientos transversales de tres partículas consecutivas.
 c) Fuerza restauradora que actúa sobre una de las partículas.

En particular, en la fig. 11.5b) se muestran a tres partículas denominadas como: $(i - 1)$, (i) y $(i + 1)$, y sus correspondientes desplazamientos transversales: $\psi(i-1)$, $\psi(i)$ y $\psi(i+1)$ con respecto a sus posiciones de equilibrio.

Como consideramos solo desplazamientos transversales pequeños, la tensión T en la cuerda es aproximadamente constante con valor igual al correspondiente en la posición de equilibrio.

También, para pequeños desplazamientos, las cuerdas entre pares consecutivos de partículas formará ángulos pequeños con la línea de de equilibrio, nominados en la fig. 11.5b) para la partícula (i) como $\theta(i-1)$ y $\theta(i+1)$ respectivamente. Y, por lo tanto, se podrá utilizar la aproximación angular usual para ángulos pequeños:

$$\theta \approx \text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta \quad \text{y} \quad \cos \theta \approx 1$$

Luego, con estas aproximaciones, la fuerza restauradora que actúa sobre la partícula (i), como se muestra en la fig. 11.5c), será:

$$F_{(i)} = -T \sin \theta_{(i+1)} - T \sin \theta_{(i-1)} = -T \operatorname{tg} \theta_{(i+1)} - T \operatorname{tg} \theta_{(i-1)}$$

$$F_{(i)} = -T \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i+1)}}{d} \right) - T \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \right)$$

$$F_{(i)} = T \left[\left(\frac{\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}}{d} \right) - \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \right) \right]$$

Aplicando la Ley de Newton: $m \ddot{\Psi}_{(i)} = F_{(i)}$, se tiene:

$$m \ddot{\Psi}_{(i)} = T \left[\left(\frac{\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}}{d} \right) - \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \right) \right]$$

y, dividiendo ambos miembros entre d, queda:

$$\begin{aligned} \frac{m}{d} \ddot{\Psi}_{(i)} &= \frac{T}{d} \left[\left(\frac{\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}}{d} \right) - \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \right) \right] = \\ &= T \left[\frac{\left(\frac{\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}}{d} \right) - \left(\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \right)}{d} \right] \end{aligned}$$

Pasando ahora al caso de una cuerda continua flexible, de masa μ por unidad de longitud, como caso límite del discontinuo cuando $d \rightarrow 0$, tal que la densidad lineal de masa es $\mu = m/d$ constante.

Analizando en forma genérica en el eje x a lo largo de la cuerda en este límite, cuando $d \rightarrow 0$, para $\Psi_{(i)} = \Psi_{(x)}$ se tiene que el primer término entre paréntesis en el numerador del corchete es la derivada de $\Psi_{(x)}$ con respecto a x en $(x + d/2)$ y el segundo término, simi- larmente, en $(x - d/2)$. Esto es:

$$\frac{\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}}{d} \Rightarrow \frac{\Psi_{(x+d)} - \Psi_{(x)}}{d} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{(x+d/2)}$$

$$\frac{\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)}}{d} \Rightarrow \frac{\Psi_{(x)} - \Psi_{(x-d)}}{d} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{(x-d/2)}$$

Por lo tanto, para todo el corchete se tendrá:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{(x+d/2)} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{(x-d/2)}}{d} \right] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Es decir, la segunda derivada de ψ con respecto a x .

Luego, finalmente, la ecuación diferencial del movimiento será:

$$\mu \ddot{\psi} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

y, escribiendo explícitamente la segunda derivada de ψ con respecto al tiempo t , queda:

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Esta es la ecuación de onda unidimensional para ondas transversales en una cuerda tensa.

Para obtener esta ecuación podríamos haber considerado directamente como cuerpo libre una longitud elemental de la cuerda. Para reforzar, consideremos también este procedimiento tomando un elemento diferencial dx como se muestra en la fig. 11.6

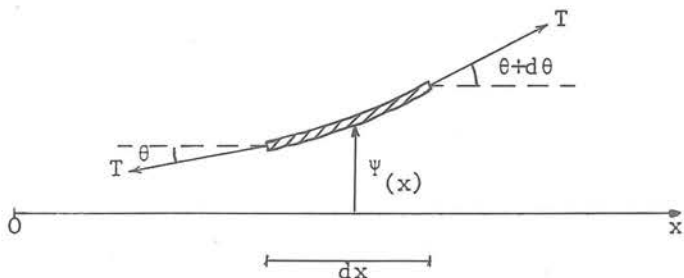


Fig. 11.6 Elemento diferencial de cuerda en movimiento transversal.

Con las aproximaciones anteriormente consideradas para pequeños desplazamientos transversales, se tiene:

. Suma de fuerzas longitudinales:

$$T \cos(\theta + d\theta) - T \cos\theta \approx T - T = 0$$

No hay movimiento longitudinal

. Suma de fuerzas transversales:

$$T \sin(\theta + d\theta) - T \sin\theta \approx T(\theta + d\theta) - T\theta = Td\theta$$

$$\text{como: } d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx, \quad \text{y: } \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{se tiene que: } d\theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

y la suma de fuerzas será:

$$Td\theta = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

Aplicando la Ley de Newton al elemento diferencial de masa: μdx , se tiene:

$$\mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

Luego, como anteriormente:

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Como μ y T corresponden a las características físicas del medio, generalmente se toma: $c^2 = T/\mu$ y al desplazamiento transversal $\Psi(x,t) = y(x,t)$. Escribiéndose en forma genérica la ecuación de onda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Posteriormente, en el siguiente ítem 11.4, discutiremos la solución de esta ecuación y encontraremos que c resulta ser justamente la velocidad de propagación de las ondas.

. Ondas longitudinales en una barra.-

Considérese una barra ideal, uniforme y delgada, con sección transversal de área $A(m^2)$, densidad $\rho(kg/m^3)$ y módulo elástico $Y(N/m^2)$. Los desplazamientos Ψ de cualquier sección transversal particular serán longitudinales a lo largo de la barra y pequeños alrededor de la posición de equilibrio.

Como en el caso anterior procederemos también primero en forma discreta, pero ahora, las masas puntuales separadas regularmente se acoplan mediante resortes ideales sin masa y de constante elástica k .

Luego, para desplazamientos longitudinales, similar al caso transversal, la fuerza restauradora que actúa sobre la partícula (i) , será:

$$F_{(i)} = -k(\Psi_{(i)} - \Psi_{(i+1)}) - k(\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)})$$

$$F_{(i)} = k[(\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}) - (\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)})]$$

Aplicando la ley de Newton: $m \ddot{\Psi}_{(i)} = F_{(i)}$, se tiene:

$$m \ddot{\Psi}_{(i)} = k [(\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}) - (\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)})]$$

y, dividiendo ambos miembros entre (Ad) , queda:

$$\begin{aligned} \frac{m}{Ad} \ddot{\Psi}_{(i)} &= \frac{k}{Ad} [(\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)}) - (\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)})] = \\ &= \frac{kd}{A} \left[\frac{(\Psi_{(i+1)} - \Psi_{(i)})}{d} - \frac{(\Psi_{(i)} - \Psi_{(i-1)})}{d} \right] \end{aligned}$$

Pasando a la barra continua como caso límite cuando la separación $d \rightarrow 0$, tal que:

$$\rho = \frac{m}{Ad} \quad \text{y} \quad k = \frac{YA}{d} \rightarrow Y = \frac{kd}{A}$$

A lo largo de la barra en el eje x , en este límite, se tiene:

$$\rho \ddot{\psi} = Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \rightarrow \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Obteniéndose la ecuación de onda unidimensional para ondas longitudinales en una barra.

También en este caso podemos obtener la ecuación de onda analizando directamente a un elemento diferencial de barra como se muestra en la fig. 11.7.

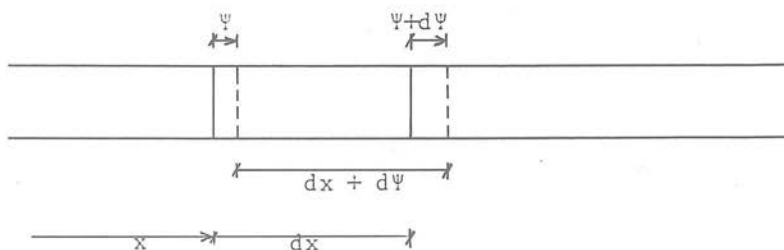


Fig. 11.7.- Deformación y desplazamiento longitudinal de un elemento en una barra.

Considerando un segmento de barra no deformada dx , entre x y $x+dx$, al aplicarle fuerzas longitudinales, el plano originalmente localizado en x se mueve una distancia longitudinal ψ y el plano similar localizado en $x + dx$ se mueve una distancia $\psi + d\psi$. Luego, el elemento perturbado ha cambiado de longitud de dx a $dx + d\psi$, teniendo, en el límite cuando $dx \rightarrow 0$, una deformación unitaria: $\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, correspondiendo para el elemento dx un cambio de longitud:

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx$$

Aplicando la ley de Hooke: $s = Y\epsilon$, se tiene que la fuerza interna en cualquier sección transversal de la barra, en x , es:

$$F = YA \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Derivando con respecto a x , se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Y A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

y, la fuerza neta de F sobre el elemento dx será:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx = YA \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

La masa del elemento dx es: $\rho A dx$. Por lo tanto, aplicando la ley de Newton $dm \ddot{\psi} = dF$, la ecuación del movimiento será:

$$\rho A dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = YA \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

Luego,

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Por supuesto, nuevamente, la misma ecuación. Y , también, como Y y ρ corresponden a las características físicas del medio, tomando $c^2 = Y/\rho$, la ecuación de onda genérica se escribe:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Análogamente podemos analizar aquí, cuando se tiene un resorte ideal recto de longitud ℓ (m) con densidad lineal uniforme μ (kg/ml) y constante de rigidez elástica k (N/m).

Aplicando la ley de Hooke: $F = k\Delta l = k\ell \frac{\Delta l}{\ell} = k\ell \epsilon$.

Como la deformación unitaria ϵ , considerando un elemento dx perturbado longitudinalmente en $d\psi$, es: $\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, queda: $F = k\ell \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Derivando con respecto a x : $\frac{\partial F}{\partial x} = k\ell \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, la fuerza sobre el elemento dx , será:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx = k\ell \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

Para la masa $dm = \mu dx$, aplicando la ley de Newton $dm \ddot{\psi} = dF$, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento:

$$\mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = k\ell \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{k\ell}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Nuevamente, la misma ecuación, con $c^2 = \frac{k\ell}{\mu}$,

se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Por otro lado, para otro tipo de ondas, no longitudinales, en la barra, podemos mencionar por ejemplo: las ondas torsionales. Para estas se obtiene como ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{C}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Donde C es el módulo de rigidez o de esfuerzo cortante de la barra y ψ representa el desplazamiento o deformación angular. Escribiendo la ecuación con el ángulo de torsión Θ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{C}{\rho} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

Para ondas transversales en la barra la situación es más complicada, porque no solo interviene la rigidez o esfuerzo de corte sino también la flexión de la barra. Si se desprecia la flexión y se considera solo esfuerzo de corte puro, se obtiene, como en la torsión, la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{C}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

donde ψ representa el desplazamiento transversal a la barra. Esto es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{C}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A decir verdad, en una barra generalmente se tienen simultáneamente ondas tanto transversales como longitudinales; es difícil producir un movimiento sin el otro. Por ejemplo, si golpeamos con un martillo el extremo de una barra en su eje, una ligera excentricidad en el golpe es inevitable y se producen también ondas transversales y no sólo las longitudinales deseadas.

. Ondas longitudinales en aire confinado en un ducto.-

Considérese un ducto rígido, largo y recto de sección transversal $A(m^2)$, lleno de un fluido con densidad de equilibrio uniforme constante ρ_0 (Kg/m^3) y compresible de módulo elástico volumétrico $B(N/m^2)$. Se supone que no hay efectos disipadores, tales como los que surgen de la viscosidad o conducción del calor.

En este fluido, generalmente gas como el aire, confinado en el ducto, se pueden producir fácilmente ondas planas longitudinales mediante la acción de un pistón o diafragma que vibre en uno de los extremos del ducto, las moléculas del fluido se moverán de uno a otro lado en la dirección de propagación de la onda generada, produciendo regiones adyacentes de compresión y rarefacción. En rea

lidad, aun sin la presencia de una onda, las moléculas del fluido no tienen posiciones medias fijas, estando en constante movimiento, mucho mayor que el asociado con el movimiento ondulatorio. Sin embargo, se puede tratar a un pequeño volumen como una unidad permanente sin cambio, ya que aquellas moléculas que dejan sus confines son reemplazadas por un número de moléculas iguales que poseen en promedio propiedades idénticas y de tal manera que las propiedades macroscópicas permanecen sin cambio. Como consecuencia, es posible hablar del término "partícula del fluido" con relación a un elemento de volumen y estudiar así el desplazamiento ψ de cualquier sección transversal del fluido, en forma similar como se hizo anteriormente para las ondas longitudinales en una barra sólida.

Luego, considérese un elemento diferencial dx como se muestra en la fig. 11.8, donde $F(x, t)$ representa la fuerza longitudinal que actúa a través de cada plano x de sección transversal en el ducto.

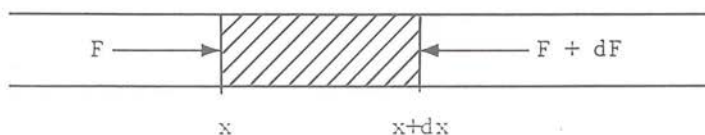


Fig. 11.8 Fuerzas compresivas en un elemento diferencial dx .

Si F representa la fuerza en x , entonces $F + dF = F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$ representa la fuerza en $x + dx$, y la fuerza neta dF sobre el elemento, teniendo en cuenta los respectivos sentidos, será:

$$dF = F - (F + \frac{\partial F}{\partial x} dx) = - \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Como el ducto es de sección transversal uniforme, dividiendo entre el área A , para el esfuerzo o presión $p = F/A$ ejercida sobre el

fluído, se tiene que esta acción será:

$$dp = - \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Como la masa del elemento diferencial de fluído es: $\rho_0 Adx$, aplicando la ley de Newton $dm\ddot{\Psi} = dF$, al dividir entre el área A y teniendo en cuenta la expresión arriba encontrada para dp , se tiene:

$$\rho_0 dx \ddot{\Psi} = dp = - \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

esto es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Recurriendo ahora a la relación elástica de compresibilidad volumétrica: $p = - B\epsilon$, donde, como hemos visto anteriormente (Fig. 11.7) para pequeñas deformaciones $d\Psi$, la deformación unitaria es: $\epsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Y, en un fluído, considerando una presión de equilibrio uniforme constante P_0 , para una presión instantánea P la sobre presión o simplemente la presión en cualquier punto del fluído, será:
 $p = \Delta P = P - P_0$. Por lo tanto, podemos escribir que:

$$p = - B \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Recordar que el signo negativo se introdujo para asegurar un valor positivo para la constante o módulo B , una reducción de volumen (deformación negativa) es debida a una compresión o aumento de presión (esfuerzo positivo).

Luego, derivando p respecto a x , se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - B \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Y, reemplazando esta expresión, para el esfuerzo neto dp en la ecuación de Newton arriba encontrada, finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Nuevamente la misma ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \text{ con: } c^2 = B/\rho_0$$

Si bien hemos utilizado como variable el desplazamiento ψ de partícula, por facilidad y en forma similar a la barra sólida, para describir ondas longitudinales en fluidos compresibles se utiliza generalmente como variable la presión p que perturba el medio. Las amplitudes de los desplazamientos (ψ) asociados con ella (p) tienen valores muy pequeños (p.e.: en ondas sonoras aproximadamente entre 10^{-5} a 10^{-11} m) y en la práctica, por lo general, encontraremos que se fabrican instrumentos para medir cambios de presión en el fluido y no para medir la amplitud del desplazamiento correspondiente.

Como hemos estudiado, estas dos variables están relacionadas por:

$$p = -B \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Encontremos ahora la ecuación de onda explícitamente en función de la presión p como variable.

La segunda derivada de p con respecto al tiempo, derivando dos veces la relación elástica, es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)$$

y, reemplazando en ésta, la ecuación de movimiento de Newton, anteriormente encontrada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ queda:}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Obteniéndose la ecuación de onda en p , que generalmente se utiliza para ondas en medios fluidos, esto es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \text{ con } c^2 = \frac{B}{\rho_0}$$

11.4 Solución general de la ecuación de onda.-

En el ítem anterior hemos encontrado la ecuación de onda unidimensional plana. Estas ondas tienen como propiedad característica que cada variable (desplazamiento de partícula transversal o longitudinal, presión, etc.) son funciones de una única coordenada lineal en la dirección de propagación y, de tal forma, que la fase o amplitud de cualquier variable es una constante en cualquier plano perpendicular a la dirección espacial de propagación.

Matemáticamente, la "ecuación de onda" es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, como todas las que provienen de la Ley de Newton, esta es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

donde: $\Psi = \Psi(x, t)$, y c^2 es una constante que queda determinada por propiedades físicas del medio, elasticidad e inercia, en el cual se propaga la onda. En los casos analizados, esta constante está definida por:

- . Onda transversal en una cuerda: $c^2 = T/\mu$
- . Onda longitudinal en una barra: $c^2 = Y/\rho$
- . Onda longitudinal en un fluido: $c^2 = B/\rho_0$

Para encontrar fácilmente la solución que admite esta ecuación de onda, recordemos que en cinemática de propagación (ítem 11.2) hemos estudiado que cualquier función arbitraria f con argumento $(x \mp Vt)$ que representa una determinada onda, viaja a lo largo del eje x con velocidad de propagación V . Esto es:

$$\Psi(x, t) = f(x \mp Vt)$$

Luego, verificaremos si esta expresión de Ψ satisface la ecuación diferencial de onda. Para esto, llamemos al argumento:

$$z = x \mp Vt$$

tal que:

$$\Psi = f(z)$$

Primero encontremos las derivadas parciales de este argumento z con respecto a x y t , estas son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \mp V$$

y, para una variable z , se tiene que:

$$\frac{d\Psi}{dz} = f'(z) \quad \text{y}, \quad \frac{d^2\Psi}{dz^2} = \frac{d}{dz} [f'(z)] = f''(z)$$

Entonces, derivando ahora Ψ , parcialmente con respecto a x y a t , se obtendrá:

. con respecto a x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{d\Psi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \cdot 1 = f'(z)$$

y repitiendo la derivada parcial da:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f'(z)] = \frac{d}{dz} [f'(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = f''(z) \cdot 1 = f''(z)$$

. con respecto a t ,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{d\Psi}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z) \cdot (\mp V) = \mp V f'(z)$$

y repitiendo la derivada parcial da:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{d}{dz} [\mp V f'(z)] \frac{\partial z}{\partial t} = (\mp V) \frac{d}{dz} [f'(z)] \frac{\partial z}{\partial t} = (\mp V) f''(z) \cdot (\mp V) = V^2 f''(z)$$

Reemplazando estas segundas derivadas parciales de Ψ en la ecuación diferencial de onda, finalmente se obtiene:

$$V^2 f''(z) = c^2 f''(z)$$

Esto es:

$$V = c$$

Por lo tanto, el único requerimiento para que $\Psi(x, t) = \bar{f}(x \mp Vt)$ sea admitida como solución de la ecuación de onda, es que la velocidad de propagación V sea igual a la constante c . En consecuencia, la velocidad de propagación de una onda no es cualquier valor arbitrario, justamente es un valor fijo y determinado por propiedades físicas del medio correspondiente. Luego, frecuentemente se designa simplemente por c a la velocidad de propagación y, finalmente la solución más completa o general de la ecuación de onda es:

$$\Psi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Siendo f cualquier función arbitraria.

Como ejemplos posibles de tales funciones podemos citar:

$(x \mp ct)^{1/3}$, $\log(x \mp ct)$, $A \sin k(x \mp ct)$, etc. En particular, esta última corresponde al caso más importante de ondas armónicas, que como ya hemos mencionado en el ítem 11.2, se puede escribir en la siguiente forma:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t - \phi), \text{ con velocidad de fase: } \frac{\omega}{k} = c$$

Teniéndose que una onda armónica, para cualquier frecuencia ν o longitud de onda λ , podrá propagarse en un determinado medio, siempre y cuando se cumpla que:

$$\lambda \nu = c$$

valor que depende, como ya hemos establecido anteriormente en cada caso, de las propiedades elásticas e inerciales del medio.

11.5 Superposición de Ondas.-

Es un hecho experimental que varias ondas pueden atravesar simultáneamente el mismo espacio independientemente una de otra, ver fig.11.9. En consecuencia, esto implica que en cualquier instante la perturbación total de cada partícula del medio se obtiene sumando las perturbaciones individuales de cada una de las diferentes ondas que la forman. Es decir, se cumple el denominado "principio de superposición", válido para los casos tratados cuando las perturbaciones no son demasiado abruptas.

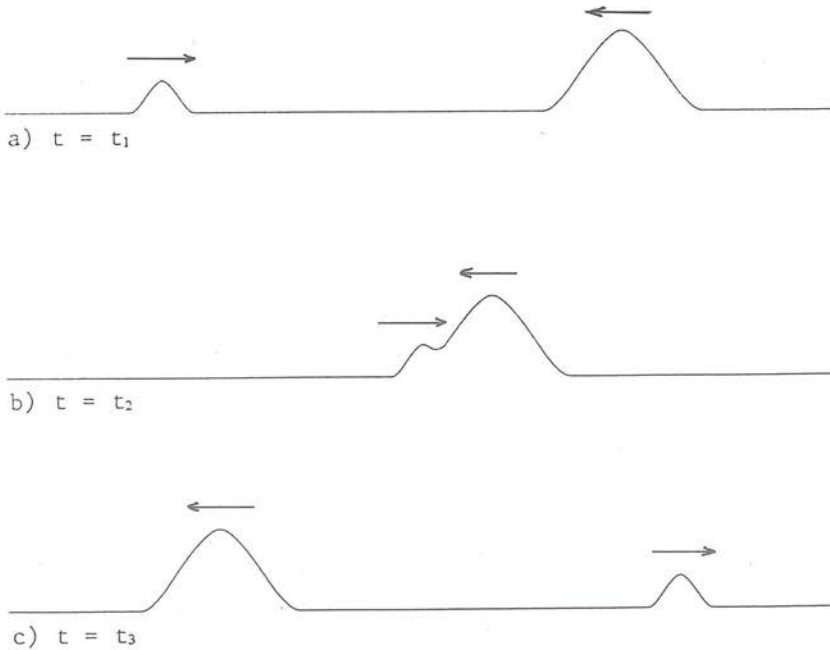


Fig. 11.9 Perturbación transversal a lo largo de una cuerda.

- a) $t = t_1$, dos pulsos diferentes se acercan uno a otro.
- b) $t = t_2$, los dos pulsos se encuentran en el mismo espacio superponiendo sus efectos.
- c) $t = t_3$, los dos pulsos se alejan uno del otro sin haberse alterado.

El principio de superposición es de suma importancia en física porque, cuando es válido, por medio de un teorema matemático creado por Fourier, es posible analizar cualquier movimiento ondulatorio complejo como una combinación de ondas armónicas simples. Dicho con brevedad, este teorema establece que cualquier función periódica se puede expresar como una suma de términos armónicos simples cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia de la función dada. Si un movimiento de período τ se representa por la función $f(t)$, entonces, este movimiento se puede representar por una serie armónica, denominada "serie de Fourier", esta es:

$$f(t) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t + \dots$$

donde $\omega = 2\pi/\tau$ y las A_n y B_n son constantes que tiene valores definidas en cada movimiento particular, dadas por:

$$A_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad \text{y} \quad B_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

La convergencia de la serie depende de la naturaleza de la función que está siendo expandida y, también algunos términos pueden estar ausentes, p.e. : ver fig. 11.10. Si la función es suave en tiempo la convergencia será rápida y únicamente se deberán calcular unos cuantos términos, en cambio, si se caracteriza por cambios abruptos de pendiente, como ondas diente de sierra u ondas cuadradas (ver figura 11.10), se deberá incluir un buen número de términos en la serie para que la gráfica no se desvíe en más de un cierto porcentaje de la función analítica original.

Continuar más adelante en el tema escapa a los propósitos de este texto. Y, para finalizar, cabe resaltar que en la práctica este procedimiento es muy poderoso y por esto, la importancia que le hemos dado al estudio del movimiento armónico simple.

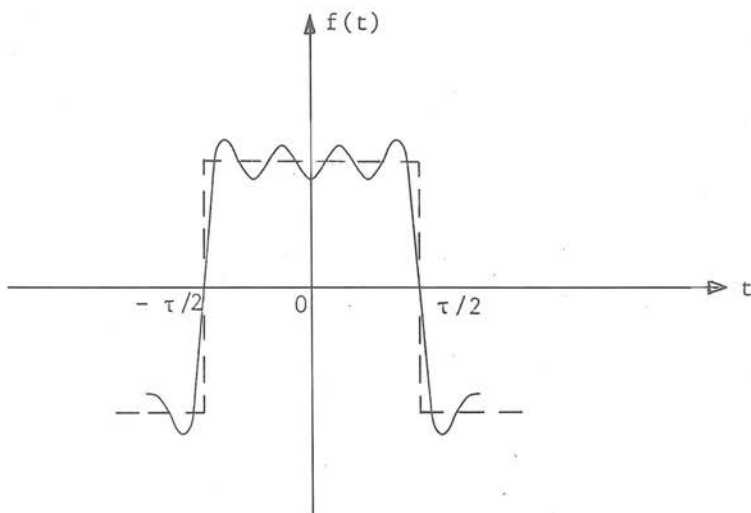


Fig. 11.10 Representación de una onda cuadrada en Serie de Fourier.

$$f(t) = \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots$$

Al incluir más términos en la serie, la aproximación se hace cada vez mejor.

11.6 Interferencia.-

El término interferencia se utiliza cuando nos referimos a los efectos físicos de la superposición de ondas. En general, las ondas individuales pueden reforzarse o atenuarse, resultando efectos que dan lugar a muy variados e interesantes fenómenos, incluso pueden llegar a anularse totalmente entre ellas.

Estudiaremos algunos casos en los que, por simplicidad, solo sumaremos dos movimientos armónicos, hecho frecuente y que nos permitirá sacar interesantes conclusiones. En particular, consideraremos los casos cuando las ondas difieren solo en un parámetro, esto es, en: amplitud, fase o frecuencia. También, más adelante en el ítem 11.8, estudiaremos la interferencia de ondas iguales pero que viajan en sentidos contrarios.

. Diferente Amplitud:

Supóngase dos ondas armónicas planas ψ_1 y ψ_2 , que viajan en un medio en la misma dirección y sentido, con igual frecuencia y fase, pero diferente amplitud. Por lo tanto, todos sus parámetros son iguales, excepto la amplitud, esto es:

$c_1 = c_2 = c$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $A_1 \neq A_2$, con ecuaciones:

$$\psi_1 = A_1 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi) \quad \text{y} \quad \psi_2 = A_2 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi)$$

El movimiento resultante, por el principio de superposición, podemos encontrarlo analíticamente sumando algebraicamente estas dos expresiones:

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 = (A_1 + A_2) \text{ sen}(kx - \omega t - \phi)$$

Como A_1 y A_2 son constantes, se puede definir una nueva constante $B = A_1 + A_2$, con lo cual se tiene:

$$\Psi = B \text{ sen}(kx - \omega t - \phi)$$

Vemos que en este caso la composición solo modifica la amplitud, pues la nueva amplitud es la suma de las amplitudes de las ondas individuales, y la frecuencia, la fase, la velocidad y longitud de onda del movimiento resultante siguen siendo iguales a las de cada onda por separado.

. Diferente Fase:

Sean dos ondas armónicas planas Ψ_1 y Ψ_2 , que viajan en un medio en la misma dirección y sentido, teniendo igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase. Es decir, todos sus parámetros iguales con excepción de la fase, luego: $c_1 = c_2 = c$, $A_1 = A_2 = A$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\phi_1 \neq \phi_2$. Si consideramos, por simplicidad, una diferencia de fase ϕ entre ellas, las ecuaciones de estas dos ondas serán:

$$\Psi_1 = A \text{ sen}(kx - \omega t - \phi) \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A \text{ sen}(kx - \omega t)$$

y, cuando interfieren, el movimiento resultante podemos encontrarlo, como en el caso anterior, sumando estas dos expresiones:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A[\text{sen}(kx - \omega t - \phi) + \text{sen}(kx - \omega t)]$$

Recordando la expresión trigonométrica suma de senos de dos ángulos,

$$\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

desarrollando, se obtiene:

$$\Psi = 2A \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2} \right)$$

Como ϕ es una constante, se puede definir una nueva constante B:

$$B = 2A \cos \frac{\phi}{2}$$

con lo cual:

$$\Psi = B \cos \left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2} \right)$$

Vemos que el movimiento resultante es también ondulatorio, pues es de la forma $f(x - ct)$ o bien $f(kx - \omega t)$, y armónico con igual frecuencia y longitud de onda que sus componentes, si bien con distinta fase $\phi/2$ (la media aritmética de las fases $\phi_1 = \phi$ y $\phi_2 = 0$) y distinta amplitud $B = 2A \cos \phi/2$, la cual, presenta como característica fundamental que depende de ϕ .

Cuando Ψ_1 y Ψ_2 están en fase, o sea:

$$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \Rightarrow \cos \frac{\phi}{2} = 1$$

la amplitud es máxima e igual a:

$$B_{\text{máx}} = 2A$$

Es decir, las ondas se refuerzan y decimos que se presenta una "interferencia totalmente constructiva", ver fig. 11.11a).

Cuando el defasaje ϕ entre Ψ_1 y Ψ_2 es igual a:

$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \Rightarrow \cos \frac{\phi}{2} = 0$$

se tiene que la amplitud es:

$$B_{\text{mín}} = 0$$

O sea que la amplitud es nula, por lo tanto, ninguna partícula del medio se moverá y no existirá onda. Luego, en este caso, las ondas se destruyen y decimos que se presenta una "interferencia totalmente destructiva", ver fig. 11.11b).

Para cualquier caso intermedio: $0 < \phi < \pi$, se tiene una amplitud comprendida entre: $2A > B > 0$.

A esta interferencia se acostumbra a designarla como "destructiva" cuando: $A > B \geq 0$ y "constructiva" cuando: $2A \geq B > 0$ (ver fig. 11.11c).

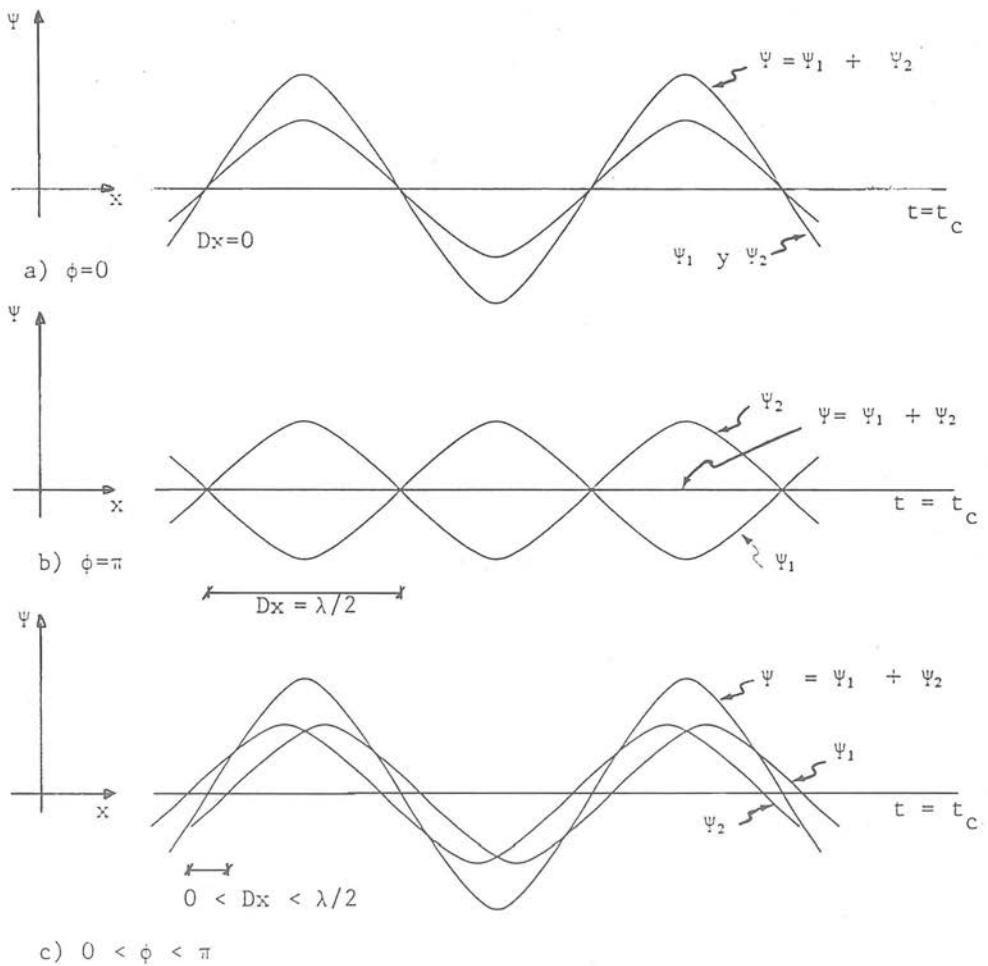


Fig. 11.11 Superposición de dos ondas con diferente fase, con igual frecuencia, longitud de onda y amplitud.

a) Interferencia totalmente constructiva.

$$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, B_{\text{máx}} = 2A$$

$$D_x = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$$

b) Interferencia totalmente destructiva

$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, B_{\text{mín}} = 0$$

$$D_x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$$

c) Interferencia parcial o intermedia

$$0 < \phi < \pi, \dots, 2A > B > 0$$

$$0 < D_x < \lambda/2$$

Constructiva, si $B > A$ (mostrada en la figura)

Destructiva, si $B < A$

Para comprender mejor el significado de la diferencia de fase ϕ y la interferencia de ondas, escribimos la ecuación de Ψ_1 en dos formas equivalentes:

$$\Psi_1 = A \text{ sen} [kx - \omega(t + \frac{\phi}{\omega})] \text{ y } \Psi_1 = A \text{ sen} [k(x - \frac{\phi}{k}) - \omega t]$$

Si comparamos la primera de ellas con $\Psi_2 = A \text{ sen}(kx - \omega t)$, en cualquier posición distante $x = x_c$ de la fuente, se tiene una diferencia en tiempo constante $Dt = \phi/\omega$. Y, si comparamos la segunda con Ψ_2 , para un instante $t = t_c$, se tiene un desplazamiento en x en una distancia constante $Dx = \phi/k$.

Frecuentemente, en la práctica, la diferencia de fase ϕ se genera por la diferencia de camino que recorren entre la fuente y el punto de interferencia las dos ondas. Como $k = 2\pi/\lambda$, la diferencia de camino se rá:

$$D_{x_c} = \frac{\phi}{k} = \frac{\phi}{2\pi} \lambda$$

Luego, la interferencia totalmente constructiva se presentará cuando:

$$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \Rightarrow Dx = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \Rightarrow B_{\text{máx}} = 2A$$

y, la totalmente destructiva, cuando:

$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \Rightarrow Dx = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots \Rightarrow B_{\text{mín}} = 0$$

Para casos intermedios se tendrá: $0 < Dx < \frac{\lambda}{2}$. Ver fig.11.11a), b) y c).

. Diferente Frecuencia:

Sean ahora las dos ondas armónicas planas Ψ_1 y Ψ_2 , que viajan en un me dio en la misma dirección y sentido, con igual amplitud y fase, pero teniendo diferentes frecuencias. En este caso sus parámetros serán:

$c_1 = c_2 = c$, $A_1 = A_2 = A$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, pero $\omega_1 \neq \omega_2$ y $k_1 \neq k_2$. Como no hay diferencia de fase entre ellas consideraremos, por simplicidad, que: $\phi_1 \neq \phi_2 = 0$, y sus ecuaciones serán:

$$\Psi_1 = A \text{ sen} (k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A \text{ sen}(k_2 x - \omega_2 t)$$

Además, como: $\frac{k_1}{\omega_1} = \frac{k_2}{\omega_2} = \frac{1}{c}$, podemos escribirlas de la siguiente ma-

$$\text{nera: } \Psi_1 = A \text{ sen } \omega_1 \left(\frac{k_1}{\omega_1} x - t \right) = A \text{ sen } \omega_1 \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

$$\Psi_2 = A \text{ sen } \omega_2 \left(\frac{k_2}{\omega_2} x - t \right) = A \text{ sen } \omega_2 \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

Luego, sumándolas, el movimiento resultante es:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \left[\sin \omega_1 \left(\frac{x}{c} - t \right) + \sin \omega_2 \left(\frac{x}{c} - t \right) \right]$$

y utilizando la ecuación trigonométrica de la suma de los senos de dos ángulos, se obtiene:

$$\Psi = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \left(\frac{x}{c} - t \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

En particular considérese la "interferencia en el tiempo" que ocurre en algún punto del espacio, digamos x_p , por el cual están pasando las ondas. En este punto, los movimientos oscilatorios en el tiempo de cada una de ellas, escribiendo, por simplicidad, $\frac{x_p}{c} - t = t'$, será:

$$\Psi_1 = A \sin \omega_1 t' \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A \sin \omega_2 t'$$

y el movimiento resultante en dicho punto:

$$\Psi = 2A \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t' \cdot \sin \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t'$$

Este resultado puede interpretarse como una oscilación también senoidal pero con una frecuencia angular promedio $\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$ y con una amplitud que presenta la particularidad de variar también armónicamente con el tiempo, coseno con una frecuencia angular diferencia

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2).$$

Si la frecuencias son cercanamente iguales, o sea $\omega_1 \approx \omega_2$, entonces

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_1 \approx \omega_2 \quad \text{y} \quad \Delta\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \text{ es pequeña, con}$$

lo cual el período de la función coseno envolvente del movimiento es relativamente grande y por lo tanto la amplitud varía lentamente con respecto al tiempo, como se muestra en la fig. 11.12 (siguiente hoja).

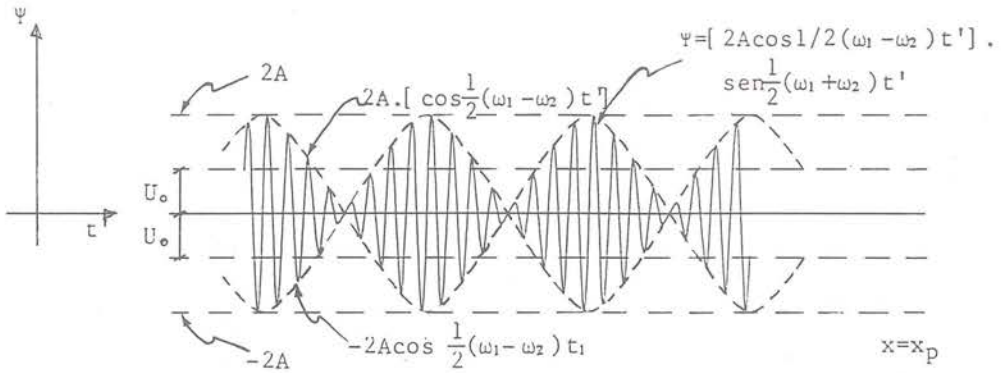


Fig. 11.12. Pulsaciones: interferencia de ondas, superposición en un punto de dos movimientos oscilatorios en el tiempo de frecuencias ligeramente diferentes.

Si las frecuencias son iguales, se vuelve a obtener, como se ha visto anteriormente para este caso, la misma ecuación: $\Psi = 2A \operatorname{sen} \omega t'$, pero con amplitud doble y constante, es decir desaparece la fluctuación de la amplitud en el tiempo. Por otro lado, si las frecuencias son muy diferentes, $\Delta\omega$ es grande y el período correspondiente de la función coseno es relativamente pequeño, por lo tanto, la amplitud variará rápidamente con respecto al tiempo y a la detección del fenómeno se hará más difícil.

Si se tiene ondas sonoras, al variar la amplitud varía la intensidad del sonido y como el oído tiene un umbral de detección, digamos una amplitud mínima U_0 indicada en la fig. 11.12, decimos que se escuchan "pulsaciones". Como puede apreciarse también en la misma fi

gura, existen dos valores extremos por ciclo de la envolvente del movimiento, es decir se detectan dos pulsaciones por cada ciclo de la función coseno, luego, la frecuencia angular de las pulsaciones será: $\omega_p = 2\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$.

Como las pulsaciones desaparecen cuando las frecuencias son iguales, se puede aprovechar este hecho para afinar "al oído" dos cuerdas de instrumentos musicales, haciendo vibrar ambas al mismo tiempo y tensando gradualmente una de ellas hasta que desaparezcan las pulsaciones, en ese instante estarán afinadas, ambas, a la misma frecuencia. Cuando las frecuencias son muy diferentes, las frecuencias de las pulsaciones ω_p es grande y el oído no puede distinguir las pulsaciones del sonido producido por ambas.

En general, este fenómeno, también llamado algunas veces batido, se aplica frecuentemente, por ejemplo en la modulación y detección de ondas de radio.

11.7 Reflexión de Ondas.-

Hemos considerado hasta ahora ondas en medios prácticamente infinitos a fin de evitar los contornos, pero tarde o temprano siempre aparece un borde donde se presenta un cambio de medio. Los contornos o fronteras imponen un comportamiento especial a la onda, las condiciones que debe satisfacer se denominan "condiciones de borde o frontera".

En general, en una frontera se presentará reflexión y transmisión parciales. Nosotros analizaremos el proceso de la reflexión cuando en una frontera se presenta una reflexión prácticamente total de una onda unidimensional, primero transversal en una cuerda tensa, para extremo fijo y para extremo libre, luego longitudinal en el aire confinado en un tubo rígido, para extremo abierto y para extremo cerrado.

. Onda transversal en una cuerda tensa - Extremo Fijo:

Considerese un pulso transversal que viaja por la cuerda hacia un extremo rígidamente empotrado en una pared, como se muestra en la figura 11.13 a). Cuando el pulso llega a dicho extremo, ejerce una fuerza transversal sobre la pared y la reacción a esta fuerza, igual e invertida, genera un pulso reflejado igual pero invertido que viaja en dirección opuesta.

Como el extremo está fijo, no puede moverse y la onda incidente, no puede perturbarlo, por lo tanto, el desplazamiento en ese extremo es siempre nulo. Lo que ocurre es justamente que debe originarse necesariamente una onda reflejada, de modo tal, que la superposición de la onda incidente con la reflejada se anulen por completo en dicho extremo (x_f) para cualquier instante de tiempo, esto es: $\psi_i(x_f) + \psi_r(x_f) = 0$, lo que implica que hay una reflexión con inversión de signo del desplazamiento en todo momento. Por lo tanto, si la perturbación es una onda senoidal, esta inversión del desplazamiento instantáneo de la onda reflejada es equivalente

a la interferencia en espacio correspondiente a un cambio de π radianes en la fase con respecto a la onda incidente, y decimos que una onda al reflejarse en un extremo fijo sufre un cambio de fase de 180° . Como el desplazamiento de ese punto es siempre nulo, decimos también, que en un extremo fijo se tiene un "nodo".

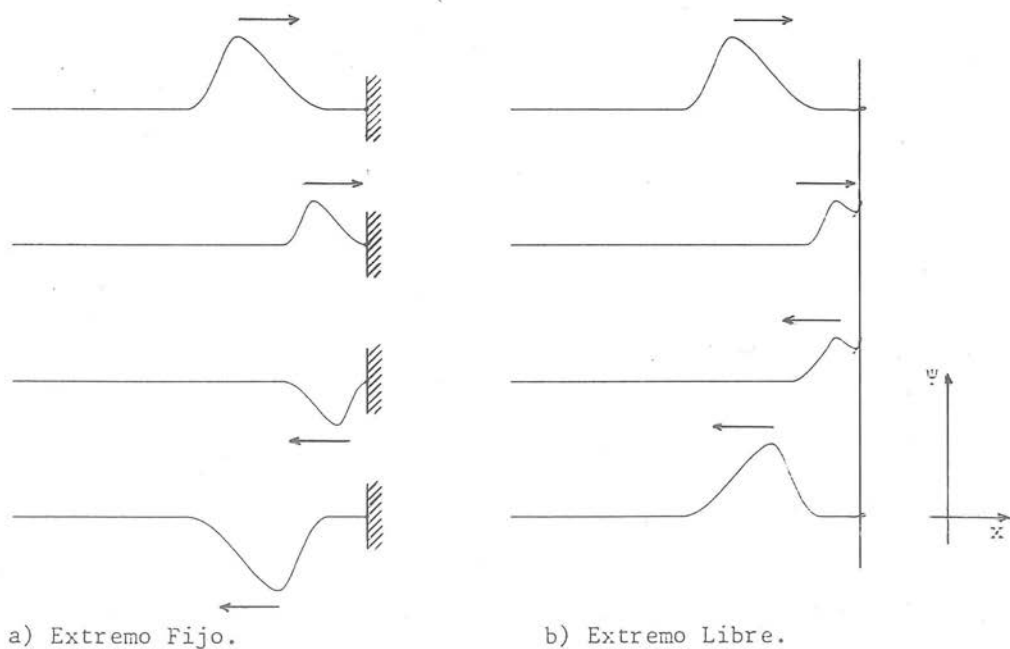


Fig. 11.13.- Reflexión total de un pulso en el extremo de una cuerda tensa.

. Onda transversal en una cuerda tensa - Extremo libre:

Considérese ahora la reflexión de un pulso transversal en un extremo libre de la cuerda tensa. En este caso, no es fácil lograr un extremo perfectamente libre, sin embargo, su análisis es conceptualmente importante y de interés por su analogía con otros movimientos ondulatorios. En la fig. 11.13 b) se ha logrado mediante un rizo o anillo liviano que pueda resbalar libremente, sin fricción, a lo largo de una barra transversal, en realidad, la mejor manera de lograr en la práctica un extremo libre es uniendo la cuerda a otra, suficientemente larga y muy liviana con el único objeto de poder mantener la tensión.

Cuando el pulso llega a dicho extremo, este se acelera y por su inercia se sobra "chicoteando", como el extremo libre de un látigo cuando se fustiga, ejerciendo una acción sobre la cuerda que genera un pulso reflejado igual, sin inversión, que viaja en dirección opuesta al incidente.

Observando cuidadosamente el extremo libre, se verá que un pequeño entorno del extremo se mueve siempre perpendicular a la barra, es decir, paralelo a la posición de equilibrio horizontal. O sea que la derivada de la perturbación en el extremo (x_l), con respecto a la coordenada x , es siempre nula:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi(x_l) \right] = 0$$

Notese asimismo que para todo instante de tiempo, el desplazamiento de la onda reflejada tiene el mismo signo que la onda incidente. Por lo tanto, si la perturbación es una onda senoidal, en este caso, no habrá cambio de fase. La superposición de la onda reflejada con la incidente producirá en el extremo libre una interferencia de máximo desplazamiento, doble comparando con la onda original. Consecuentemente, decimos que en un extremo libre se produce, en oposición un nodo, un "antinodo".

. Onda Longitudinal en aire confinado en un tubo-Extremo abierto:

Considerese ahora aire, que bien puede ser cualquier gas, encerrado en un tubo delgado; este confinamiento en tubo delgado es necesario para que la onda que viaje en este medio sea, en primera aproximación, unidimensional. Para producir la onda podemos utilizar, por ejemplo, un parlante a fin de que excite el aire perturbándolo mediante una variación de presión, la cual, se propagará por el tubo como una onda longitudinal.

Cuando la perturbación llega al extremo abierto se encuentra con la atmósfera que presenta una presión casi constante que no puede perturbarla sensiblemente. Esto es similar al caso de extremo rígido para la cuerda cuando se conecta a un medio muy grande que tampoco alcanza a perturbarlo. Luego, aquí ocurre lo mismo: una reflexión casi total con perturbación ($p = P - P_0$) casi nula en el extremo abierto y decimos que se presenta un "nodo de presión", generándose una onda reflejada igual pero con inversión de signo que viaja en dirección opuesta a la original. Si la onda es senoidal, habrá un cambio de $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ en la fase.

. Onda longitudinal en aire confinado en un tubo-Extremo cerrado:

Considerese ahora la reflexión de una onda longitudinal cuando el extremo del tubo es cerrado. Las partículas del aire que se encuentran en este extremo no se mueven, pero cuando llega el pulso, las partículas adyacentes de su entorno las presionan y al rebotar, cambiando su cantidad de movimiento, duplican la presión en este punto y se genera una onda reflejada igual, sin inversión, que viaja en dirección opuesta a la incidente. Por lo tanto, si la onda es senoidal, no habrá cambio de fase. Y, la interferencia de ambas ondas en ese punto es totalmente constructiva, consecuentemente, decimos que en un extremo cerrado se produce un "antinodo de presión". Todo esto, similar al caso de extremo libre para la cuerda tensa a otra muy liviana.

. Aclaración:

Es importante aclarar la aparente contradicción que se podría interpretar cuando se comparan directamente los resultados presentados para el tubo con la cuerda. Esto es, para extremo fijo en la cuerda y para extremo abierto en el tubo: nodo y reflexión con cambio de fase, para extremo libre en la cuerda y para extremo cerrado en el tubo: antinodo y reflexión sin cambio de fase.

Con este objeto, recordemos (item 11.3) que una onda longitudinal en un gas puede describirse utilizando la presión (p) de perturbación, o bien, el desplazamiento (ψ) de las partículas asociado con esta perturbación. Estas variables, como hemos visto anteriormente, están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$p = - B \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Si la onda es armónica, digamos:

$$\psi = A \text{ sen } (kx - \omega t)$$

derivando con respecto a x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \text{ cos } (kx - \omega t)$$

y reemplazando, la presión será:

$$p = - B Ak \text{ cos } (kx - \omega t)$$

Esto es, si una de ellas está descrita por la función seno, la otra por coseno, por lo tanto, la onda de desplazamiento está defasada en 90° respecto a la onda de presión. Es decir, cuando el desplazamiento de las partículas en un punto es cero, la presión en ese punto es máxima y viceversa.

Luego, finalmente, en resumen, para la reflexión de una onda longitudinal en el extremo de un tubo se describirá, equivalentemente, para:

- Extremo abierto: "nodo de presión" o "antinodo de desplazamiento"
- Extremo cerrado: "antinodo de presión" o "nodo de desplazamiento".

11.8 Ondas Estacionarias.-

Considérese ahora la superposición de dos ondas iguales pero que vi ajan en sentidos contrarios. Sean dos ondas armónicas planas con parámetros: $A_1 = A_2 = A$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ y $|c_1| = |-c_2| = c$. Como no hay diferencia de fase entre ellas consideraremos por simplicidad, como se ha hecho anteriormente, que $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$, y las ecuaciones que las representan serán:

$$\Psi_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Sumándolas:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A[\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx + \omega t)]$$

Y, desarrollando la suma de senos de dos ángulos, la interferencia resultante será:

$$\Psi = 2A \cos \omega t \operatorname{sen} kx$$

Se tiene el producto de una función coseno que depende del tiempo y no del espacio, y de una función seno que depende del espacio y no del tiempo. Luego, al no ser de la forma $f(x \mp ct)$, o bien $f(kx \mp \omega t)$, no existe sentido de propagación de onda. Las partículas del medio ejecutan movimiento armónico oscilatorio y el movimiento global resultante, que no es ondulatorio, por provenir de la superposición de ondas, se le denomina "onda estacionaria" y nos referimos a ella como una "interferencia en el espacio".

Escribiendo la ecuación de la siguiente manera:

$$\Psi = [2A \cos \omega t] \cdot \operatorname{sen} kx = B(t) \cdot \operatorname{sen} kx$$

Se tiene una curva senoidal en el espacio con amplitud variable en el tiempo. En la fig. 11.14 se muestra la curva para un instante de tiempo particular (t_p) y también la envolvente cuando transcurre el tiempo, con una amplitud máxima $2A$.

La ecuación del movimiento también puede escribirse así:

$$\Psi = [2A \operatorname{sen} kx] \cdot \cos \omega t = B(x) \cdot \cos \omega t$$

Luego, cada partícula del medio ejecuta, cuando transcurre el tiempo, un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio. Pero, cada una de ellas tiene una amplitud propia que depende de su posición en el espacio (x_p), amplitud que varía de un valor máximo $2A$ hasta cero, determinemos a continuación las coordenadas donde ocurren estos valores.

. Amplitud máxima $2A$, cuando:

$$kx = 0, \frac{\pi}{2}, 3 \frac{\pi}{2}, 5 \frac{\pi}{2}, \dots$$

como $k = 2\pi/\lambda$, se tiene:

$$x = 0, \frac{\lambda}{4}, 3 \frac{\lambda}{4}, 5 \frac{\lambda}{4}, \dots \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{4}, n = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

Estos puntos se conocen como "vientres" o "antinodos" y están separados por media longitud de onda ($\lambda/2$).

. Amplitud mínima cero, cuando:

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$$

como $k = 2\pi/\lambda$, se tiene:

$$x = \frac{\lambda}{2}, 2 \frac{\lambda}{2}, 3 \frac{\lambda}{2}, 4 \frac{\lambda}{2}, \dots \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2}, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

Estos puntos se conocen como "nodos" y están separados por media longitud de onda ($\lambda/2$). Y, la separación entre un nodo y el antinodo adyacente es de un cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$).

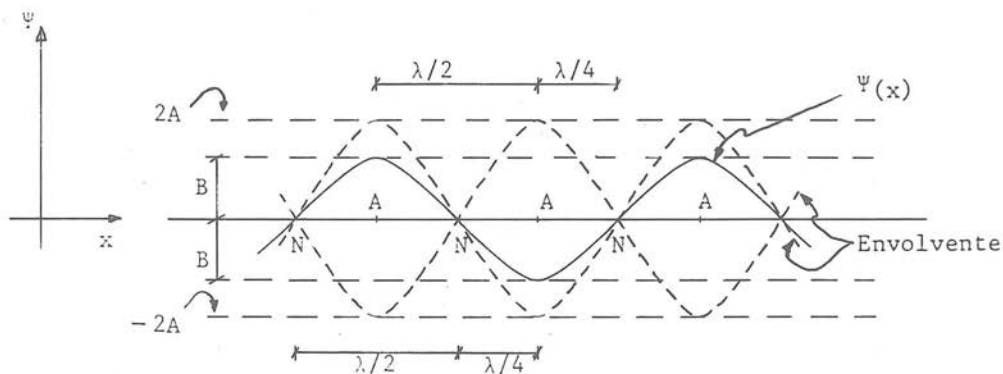


Fig. 11.14 - Onda Estacionaria.

Para un instante particular $t = t_p$, se tiene:

$$\Psi(x) = B(t_p) \sin kx, \text{ con } B(t) = 2A \cos \omega t.$$

En línea punteada se muestra la envolvente del movimiento cuando transcurre el tiempo.

Las separaciones entre nodos y antinodos adyacentes es:

- Entre dos nodos adyacentes: $\lambda/2$.
- Entre dos antinodos o vientres adyacentes: $\lambda/2$.
- Entre un nodo y el antinodo adyacente: $\lambda/4$.

Luego, en las ondas estacionarias no hay transporte de energía como en las ondas viajeras. La energía no puede fluir a través de los puntos nodales que están permanentemente en reposo, la energía se mantiene estacionaria en el espacio (medio), alternando cíclicamente entre potencial elástica de deformación y cinética vibratoria conforme se mueven las partículas del medio.

Hasta aquí hemos considerado el medio infinito, ahora analizaremos el caso más real frecuente cuando el medio es finito, teniendo condiciones de borde en ambos extremos. Si se perturba el medio, las ondas que se mueven a lo largo del medio se reflejan y se re-reflejan en ambos extremos formándose, al interferir, una onda estacionaria. Analizaremos tres casos usualmente presentes en muchos instrumentos musicales (violín, piano, órgano, etc.).

Ondas estacionarias en una cuerda finita:

Analizaremos el caso más utilizado corrientemente, esto es, cuando la cuerda está fija en ambos extremos; con longitud ℓ , de masa lineal μ y bajo tensión T .

Cuando se pulsa la cuerda aparecen ondas transversales que viajan en ambos sentidos reflejándose en los extremos, y al interferir, se establece una onda estacionaria. La condición para ello, teniendo extremos fijos, es que estos puntos sean nodos y entre ellos podrán formarse uno o más vientres. Luego, como la separación entre dos nodos adyacentes es $\lambda/2$, en la longitud ℓ de la cuerda debe haber exactamente un número entero de medias longitudes de onda, de las ondas asociadas que forman la estacionaria, esto es:

$$\frac{\lambda}{2}, 2 \frac{\lambda}{2}, 3 \frac{\lambda}{2}, \dots = \ell, \text{ o en general, } n \frac{\lambda}{2} = \ell, n = 1, 2, 3, \dots$$

A estas diferentes formas naturales que puede oscilar el sistema, se les conocen como los modos normales de vibración de la onda estacionaria, o simplemente, "modos". En la fig. 11.15, se muestran los cuatro primeros modos.

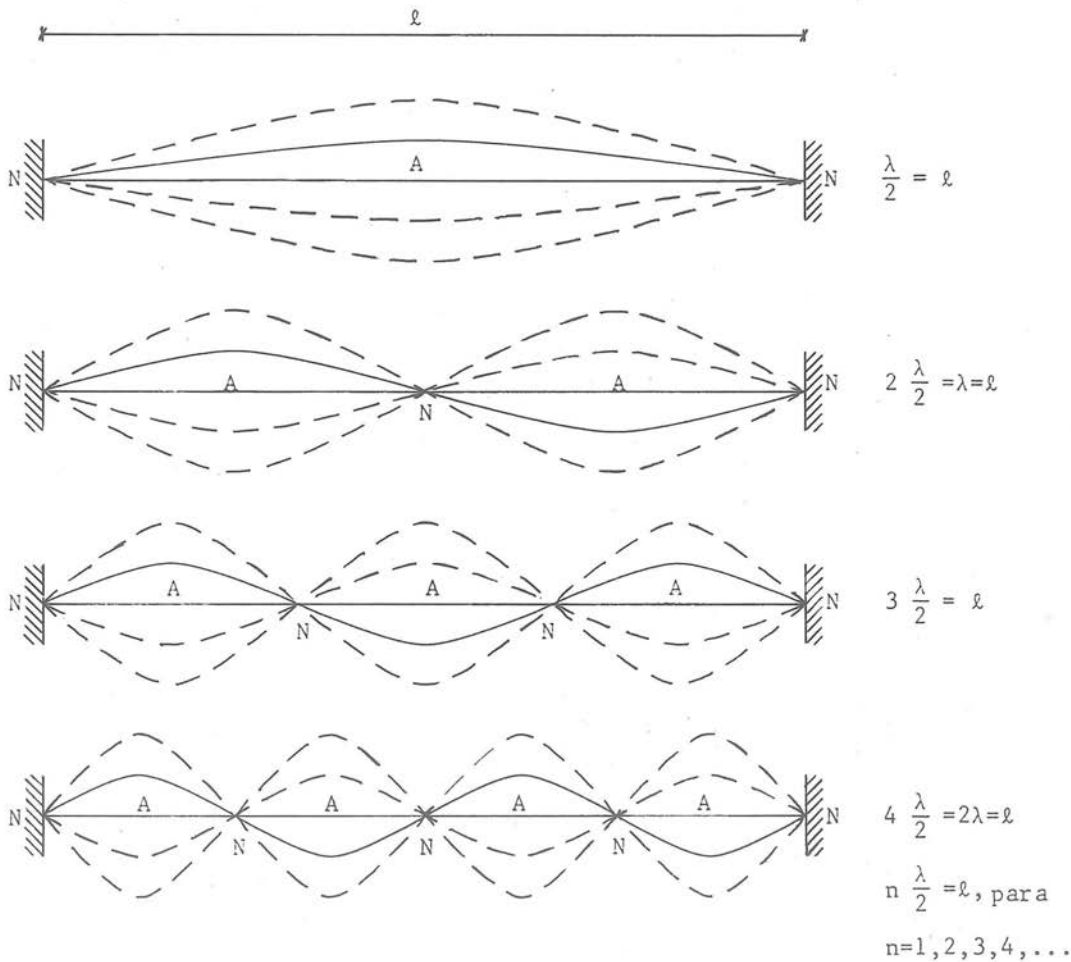


Fig. 11.15. Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos. Se muestran los primeros cuatro modos.

Con la condición establecida, para la longitud ℓ dada, las posibles longitudes de onda son:

$$\lambda = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Y, en virtud de la relación $\lambda v = c$, válida para cualquier n , y como la velocidad $c = \sqrt{T/\mu}$ es la misma para todos los casos, resulta que se tendrán las siguientes frecuencias:

$$v_n = \frac{n}{2\ell} c = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Decimos que estas frecuencias posibles son las "frecuencias naturales" de la oscilación. A la frecuencia más baja para $n = 1$ se le denomina "frecuencia fundamental" y con las siguientes para $n = 2, 3, \dots$, que son múltiplos enteros de la fundamental, forman una "serie armónica": $v_1, v_2 = 2v_1, v_3 = 3v_1, \dots, v_n = nv_1$. La fundamental constituye el "primer armónico", siguiéndole sucesivamente el "segundo armónico", el "tercer armónico", etc.

Cuando se excitan los modos normales de una cuerda, estas vibraciones dan lugar a ondas longitudinales en el aire que la rodea, las que al llegar a nuestros oídos son detectados como un sonido musical. En este caso, aparte de la frecuencia fundamental a las otras se le llaman "Sobretono"; de modo tal, que el segundo armónico $v_2 = 2v_1$ es el primer sobretono, el tercer armónico $v_3 = 3v_1$ es el segundo sobretono y así sucesivamente. Cabe resaltar que los sobretonos son armónicos, múltiplos enteros de la fundamental, si los soportes de la cuerda son perfectamente rígidos, pero si sucede lo contrario, como ocurre a menudo en los instrumentos musicales, en general los sobretonos no son exactamente armónicos.

Es importante resaltar que la cuerda vibrante tiene un gran número, infinito, de frecuencias naturales: la fundamental y todos los armónicos, en comparación al oscilador simple masa-resorte que solo tiene una frecuencia natural. Si se deforma inicialmente a la cuerda de modo tal que su forma sea igual a uno cualquiera de los modos po-

sibles, al liberarla vibrará con la frecuencia correspondiente a ese armónico particular. Pero, generalmente las condiciones iniciales se producen pulsando o golpeando la cuerda, como se hace p.e. en la guitarra y el piano, en ambos casos, en la vibración resultante están presentes la fundamental y muchos de los armónicos superiores. El desplazamiento real de la cuerda es de forma compleja como se ilustra p.e. en la fig. 11.16 para un instante particular, correspondiente a la superposición de varios modos naturales de oscilación, es decir, a la suma de diversos armónicos con diferentes amplitudes. Justamente el "timbre" de un sonido musical particular, producida por una cuerda vibrante, está determinado por el número de armónicos presentes y por sus respectivas intensidades.

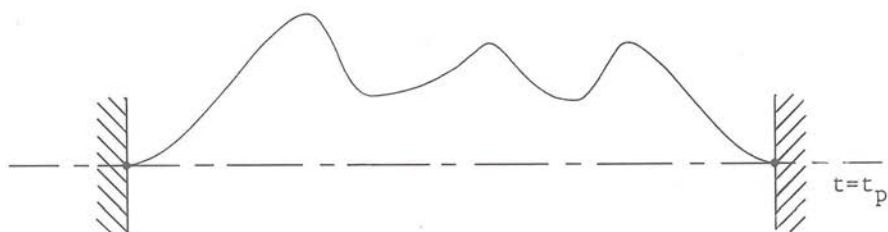


Fig. 11.16 Cuerda vibrante de forma compleja que corresponde a la superposición de varios modos naturales de oscilación con diferentes amplitudes.

Resonancia.- También es importante resaltar que para cualquiera de las frecuencias naturales ν_n de la cuerda puede ocurrir, como cualquier sistema capaz de oscilar, el fenómeno de resonancia. Si la perturbación aplicada es periódica con una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales, la cuerda vibrará en este modo (frecuencia) con gran amplitud. Esto es considerando que el sistema es amortiguado, por lo general siempre lo es, sino lo fuera, la frecuencia de resonancia sería exactamente igual a una de las frecuencias naturales y la amplitud se haría infinita.

En general, cualquier estructura es capaz de vibrar a ciertas frecuencias naturales y por consiguiente susceptible de resonar bajo la acción de impulsos aplicados, pudiendo eventualmente colapsar como ocurrió con el puente Tacoma, mencionado anteriormente en el ítem 10.5. En este caso el tramo central del puente se exitó entrando en resonancia en un modo torsional.

. Ondas estacionarias en aire confinado en un tubo finito:

Consideraremos dos casos: a) cuando ambos extremos están abiertos y b) un extremo abierto y el otro cerrado. La longitud del tubo es ℓ , la densidad del aire ρ_0 y el módulo de compresibilidad B .

Si se perturba el medio variando la presión de equilibrio constante en el aire (atmosférica), se generan ondas longitudinales que se reflejan en los extremos del tubo e interfieren dando lugar a una onda estacionaria. La condición para que ello ocurra depende de las condiciones de borde en los extremos del tubo. En el ítem 11.7 se estableció que en un extremo abierto se tiene un nodo de presión, mientras que en un extremo cerrado se presenta un antinodo de presión. Luego, en cada uno de los casos propuestos, se tendrá:

a) Ambos extremos abiertos.

En estos casos se tendrán nodos en ambos extremos y entre ellos habrán uno o más vientres. Similarmente como en el caso de la cuerda se presentarán los modos normales de vibración de onda estacionaria para:

$$n \frac{\lambda}{2} = \ell \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

luego,

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como: $\lambda v = c$ y $c = \sqrt{B/\rho_0}$, las frecuencias naturales armónicas, de resonancia, son:

$$v_n = \frac{n}{2\ell} c = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

En la fig. 11.17a) se muestran los tres primeros modos.

b) Un extremo abierto y el otro cerrado.

En el extremo abierto se tiene un nodo y en el otro, ahora cerrado, un antinodo de presión. Como la separación entre un nodo y el antinodo adyacente es $\lambda/4$, el modo fundamental en la longitud ℓ se presentará para $\ell = \lambda/4$ y los siguientes modos, al introducir nodos intermedios entre ellos, para $\ell = 3 \frac{\lambda}{4}, 5 \frac{\lambda}{4}, \dots$, como se muestran en la fig. 11.17b. En general se tendrá:

$$n \frac{\lambda}{4} = \ell, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

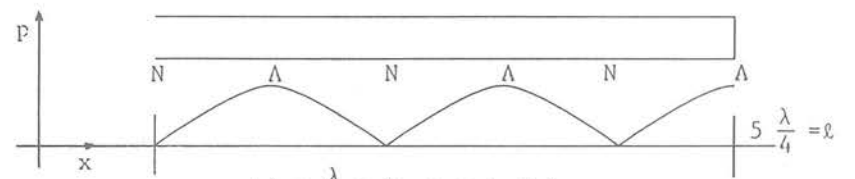
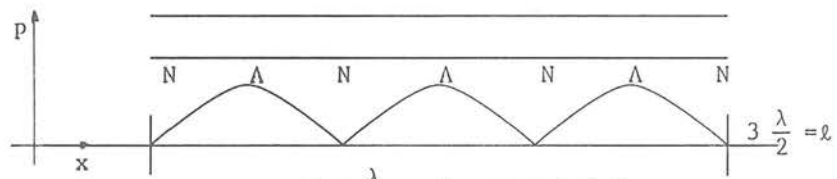
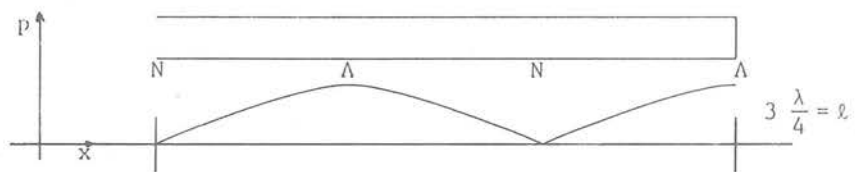
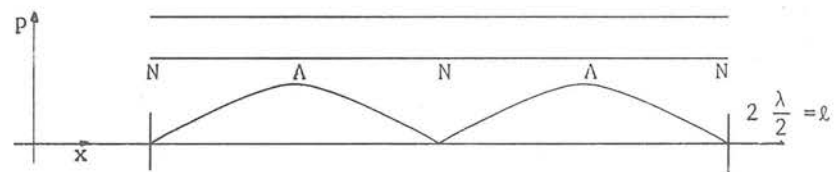
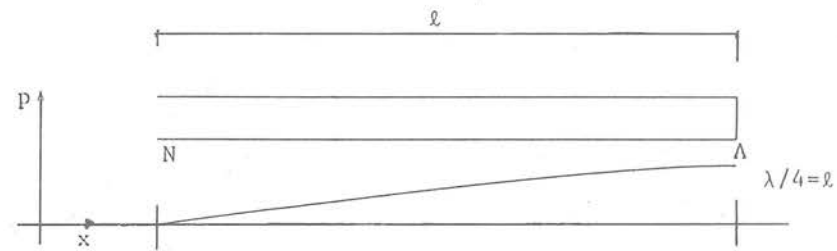
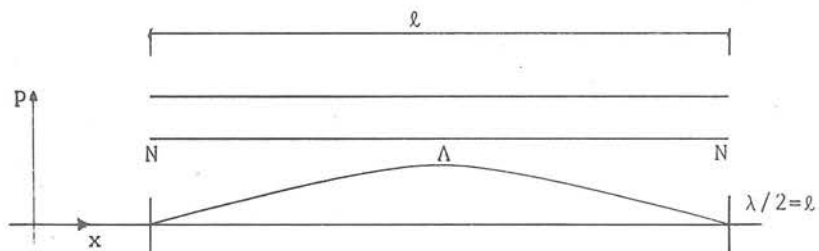
$$\text{luego, } \lambda_n = \frac{4\ell}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Como: $\lambda v = c = \sqrt{B/\rho_o}$, las frecuencias naturales, de resonancia, son:

$$v_n = \frac{n}{4\ell} c = \frac{n}{4\ell} \sqrt{\frac{B}{\rho_o}}, \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

Observe que en este caso solo se presentan armónicos impares y que la frecuencia fundamental es la mitad comparada con la fundamental correspondiente al caso anterior (abierto), a igual longitud de tubo. Por lo tanto, los sonidos musicales producidos con un tubo de extremo abierto son diferentes a los producidos si el extremo es cerrado.

Para terminar, no está demás insistir que en la fig. 11.17 se han representado nodos y antinodos de presión. Si se quiere representar desplazamientos de partículas es justamente lo inverso, recordar que a un nodo de presión le corresponde un antinodo de desplazamiento y a un antinodo de presión un nodo de desplazamiento.



a) $n \frac{\lambda}{2} = l, n = 1, 2, 3, \dots$

b) $n \frac{\lambda}{4} = l, n = 1, 3, 5, \dots$

Fig. 11.17 Ondas estacionarias en aire confinado en un tubo.
 a) Ambos extremos abiertos.
 b) Un extremo abierto y el otro cerrado.
 Se muestran los tres primeros modos.

11.9 Ondas Acústicas.-

En general podemos decir que la acústica comprende la generación, transmisión y recepción de energía en la forma de ondas vibratorias en la materia.

El fenómeno acústico más conocido es el que se relaciona con la sensación de sonido. Las ondas acústicas que producen la sensación de sonido son parte de una variedad de perturbaciones de presión que se pueden propagar a través de un medio compresible, son ondas longitudinales: Las partículas del medio se mueven de uno a otro lado en la dirección de propagación de la onda, produciéndose regiones adyacentes de compresión y rarefacción.

Para las personas jóvenes, una perturbación que puede estimular al oído y el cerebro la interpreta como un sonido si su frecuencia está comprendida en el intervalo de cerca de 20 a 20,000 Hz(c/s), y se llama el intervalo audible correspondiente a las ondas sonoras. Si la frecuencia es superior a las 20,000 Hz se denominan "ultrasónicas" y si es inferior a los 20 Hz "infrasónicas".

La naturaleza de las vibraciones asociadas con la acústica son muchas y complejas, generadas en cuerdas, columnas de aire, placas y membranas vibrantes. Todos estos elementos vibrantes perturban el aire que los rodean, el aire transmite estas perturbaciones como una onda y al llegar al oído este las recibe produciéndose la sensación del sonido. Si las ondas están compuestas por un número pequeño de componentes casi periódicas, siempre y cuando las variaciones de presión no sean demasiado grandes, producirán a menudo un sonido agradable. En cambio si el número de componentes es muy grande y la forma de la onda no es periódica se escucha como un ruido. La vibración más simple es una vibración senoidal unidimensional que tiene una sola componente de frecuencia, es decir, un tono puro.

También hay ondas de alta intensidad (como las que están presentes cerca de motores de reacción) que producen una sensación de dolor

mas que de sonido, y ondas de choque generadas por expresiones y aviones supersónicos.

Hemos visto anteriormente que la velocidad de las ondas longitudinales en un fluido esta dada por:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

Pero también, por otro lado, es un hecho conocido que la compresión o descompresión de un fluido está relacionado con la variación de temperatura y la propagación de calor, es decir, se tiene un fenómeno termodinámico que todavía no hemos estudiado. Sin embargo, adelantaremos algunos resultados importantes.

La condensación y enrarecimiento continuo en una onda para frecuencias ordinarias, p.e.: de 20 a 20,000 Hz, no permite que tenga lugar una propagación de calor en cantidad apreciable y se dice que se tiene un proceso adiabático. Luego, en rigor, la expresión termodinámica para la velocidad del sonido es:

$$c = \sqrt{\frac{B_{ad}}{\rho_0}}$$

Considerando gas ideal, es posible expresar B_{ad} en términos de la presión del gas no perturbado P_0 y de la relación $\gamma = c_p/c_v$ de calores específicos a presión constante y a volumen constante, cantidades que estudiaremos en el capítulo 13. Se obtiene que: $B_{ad} = \gamma P_0$ y por consiguiente la velocidad de la onda será:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$$

Además, para gas ideal, en función de la temperatura absoluta en grados Kelvin, con la constante universal de los gases R y la masa molecular M del gas, la velocidad de la onda es:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

Tomando valores normales para el aire: $\gamma = 1.402$, $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\rho_0 = 1.293$ a $0^\circ\text{C} = 273^\circ\text{K}$, se obtiene la velocidad del sonido en el aire a 0°C , que designaremos por c_0 , reemplazando valores se obtiene: $c_0 = 331.6 \text{ m/s}$. Con este valor, para cualquier otra temperatura, podemos escribir que:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T(^{\circ}\text{K})}{273}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{t(^{\circ}\text{C})}{273}}$$

Por ejemplo, para 20°C se obtiene: $c = 343.5 \text{ m/s}$ y para 27°C se obtiene: $c = 347.6 \text{ m/s}$. En el apéndice I se presentan tablas con la velocidad de las ondas para diferentes medios.

En el intervalo sonoro, entre 20 y 20,000 Hz, para una velocidad del sonido de 340 m/s, teniendo en cuenta que $c = \lambda\nu$, el intervalo correspondiente de longitudes de onda estará comprendido aproximadamente entre 17m y 1.7cm, a mayor frecuencia menor longitud de onda.

Las variaciones máximas de presión (p) con respecto a la presión atmosférica normal (P_0), que es aproximadamente 10^5 Pa , en los sonidos más débiles que el oído puede detectar son solo del orden de $2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ y en los sonidos más fuertes que el oído puede tolerar son de unos 28 Pa. Para una onda sonora, tomando como frecuencia de prueba 1kHz, la amplitud del movimiento vibratorio es de aproximadamente 10^{-11} m en los sonidos más débiles y 10^{-5} en los sonidos más fuertes. Con estos valores referenciales dados, se puede observar que el oído es un órgano extraordinariamente sensible para detectar los sonidos.

En una onda físicamente lo más importante, como lo hemos expresado desde el principio en la introducción del presente capítulo, es el transporte de energía. Se define la "Intensidad" I de una onda como el flujo de energía promedio a través de una superficie de área unitaria perpendicular a la dirección de propagación, es decir, energía por unidad de tiempo por unidad de área ($\text{J/s} \cdot \text{m}^2$) o potencia media por unidad de área, luego, las unidades fundamentales de la intensidad de una onda son watts por metro cuadrado (W/m^2).

La intensidad de una onda, en este caso sonora, es función de la amplitud de los cambios de presión (p_a), de la densidad (ρ_o) y de la velocidad de propagación (c) de la onda. Esto es:

$$I = \frac{p_a^2}{2\rho_o c}$$

Reemplazando los valores de la presión correspondientes a los sonidos más débiles y más fuertes del intervalo audible, se obtienen intensidades que van desde aproximadamente 10^{-12} a 1 W/m^2 .

A causa principalmente, no siendo la única razón, de la gama tan amplia de presiones (de 2×10^{-5} a 28Pa) e intensidades (de 10^{-12} a 1W/m^2) para las cuales es sensible el oído, es más conveniente utilizar una escala logarítmica que una escala natural. El uso de escalas logarítmicas comprime la gama de números requeridos para describir un gran intervalo, la escala logarítmica de uso más general para describir niveles de sonido es la escala de decibeles. Esto es, el "nivel de intensidad" NI de un sonido de intensidad I se define por:

$$NI = 10 \log \frac{I}{I_r}$$

donde I_r es una intensidad arbitraria de referencia que se toma igual a 10^{-12} W/m^2 , valor que corresponde aproximadamente al sonido más débil que puede oírse y "log" representa el logaritmo de base 10. Los niveles de intensidad se expresan en "decibeles" y se abrevia db. Luego, para los sonidos más débiles de intensidad $I = I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ les corresponde un nivel de intensidad de cero decibeles y para los sonidos más fuertes de intensidad $I = 1\text{W/m}^2$ les corresponde un nivel de intensidad de unos 120 db. Como puede apreciarse la gama de números en el intervalo audible se ha comprimido considerablemente en un rango comprendido entre 0 y 120 db. En el apéndice II se muestra una tabla donde se dan niveles de intensidad sonora para algunos ruidos comunes.

Hemos dicho anteriormente que el intervalo de frecuencias que el oído puede percibir es de 20 a 20,000 Hz, y el intervalo de niveles de intensidad sonora de cero hasta 120 db. Estos están relacionados, no son independientes. Por ejemplo, para un sonido fuerte digamos entre 80 a 100 db, el intervalo de frecuencias efectivamente es de 20 hasta 20,000 Hz, pero para un sonido débil de aproximadamente 20 db el intervalo de frecuencias es solo de 200 hasta 15,000 Hz. La sensibilidad sonora del oído depende de la frecuencia, p.e., a una frecuencia media de 1000 Hz el intervalo del nivel de intensidad es de 3 db hasta unos 120 db, mientras que a una frecuencia baja de 100 Hz el intervalo de nivel sonoro solo es de 30 db hasta, aproximadamente, 120 db.

11.10 Efecto Doppler.-

La experiencia muestra que si una fuente sonora o si un receptor, o ambos, están en movimiento relativo en un referencial en reposo respecto al medio material de propagación, la frecuencia se altera, y por ende el período y la longitud de onda. En general, el tono percibido por el receptor no es el mismo que cuando el foco y el receptor están en reposo respecto al aire. El ejemplo más frecuentemente conocido es la alteración que se observa en el sonido emitido por la bocina de un automóvil, o el silbato de una locomotora, cuando se encuentra en movimiento respecto a una persona estacionaria que escucha el sonido permanentemente, el tono se eleva cuando se acerca y descende cuando se aleja. Esta alteración se conoce como "efecto Doppler" y se da en todas las ondas, no solo en las acústicas o sonoras, incluso en las ondas no mecánicas como la luz.

Se pueden distinguir varios casos según que el receptor este en movimiento, que lo esté el foco emisor, o ambos, y también puede darse el caso que el aire se mueva con respecto a tierra (viento). Adicionalmente también podría considerarse el caso de las ondas que se reflejan en una superficie en movimiento. Analizaremos seguidamente algunos casos particulares en los cuales el movimiento es solo a lo largo de la línea que une al receptor con la fuente.

. Receptor en Movimiento y Fuente en Reposo.-

En la fig. 11.18a) se muestra una fuente de sonido F en reposo y un receptor R moviéndose directamente hacia la fuente con una velocidad, rapidez, v_f . Consideraremos que el medio de propagación está quieto respecto a tierra, es decir, si es aire, no sopla el viento. La fuente emite ondas sonoras de frecuencia ν , los círculos concéntricos mostrados, en cuyo centro esta en la fuente, representan frentes de onda espaciadas entre sí por una longitud de onda λ y viajan en el medio con velocidad c . Estas tres cantidades, como sabemos, están relacionadas por: $\nu\lambda = c$.

Cuando el receptor se acerca hacia la fuente el número de frentes de onda que recibe por unidad de tiempo será mayor, y escuchará un sonido de tono más agudo. Luego, a causa de su movimiento con velocidad de acercamiento v_R , el número de frentes de onda adicionales que recibe por unidad de tiempo, es decir, el aumento de frecuencia Δv que se producirá estará dada por la relación: $\Delta v \lambda = v_R$.

Sumando ambas relaciones, esto es:

$$\left. \begin{array}{l} v\lambda = c \\ \Delta v\lambda = v_R \end{array} \right\} (+) \Rightarrow (v + \Delta v)\lambda = c + v_R$$

Si la frecuencia que escucha el receptor es: $v' = v + \Delta v$, se tiene:

$$v'\lambda = c + v_R$$

Comparando las relaciones obtenidas, en movimiento y en reposo, dividiéndolas se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} v'\lambda = c + v_R \\ v\lambda = c \end{array} \right\} (\div) \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{c + v_R}{c}$$

Luego, podemos escribir finalmente que la frecuencia v' es:

$$v' = v \left(\frac{c + v_R}{c} \right) = v \left(1 + \frac{v_R}{c} \right)$$

Vemos que el aumento de la frecuencia depende la relación de velocidades v_R/c . Caso contrario, cuando el receptor se aleja de la fuente estacionaria, la frecuencia disminuye escuchándose un sonido de tono más grave. Como la velocidad del receptor es de sentido contrario, el número de frentes de onda que recibe por unidad de tiempo es menor, luego, la frecuencia v disminuye en $v v_R/c$ y podemos escribir que la frecuencia v' , en este caso, es:

$$v' = v \left(\frac{c - v_R}{c} \right) = v \left(1 - \frac{v_R}{c} \right)$$

Si la dirección del movimiento del receptor, forma un ángulo α instantáneo con la dirección que la une con la fuente, hay que tomar la respectiva componente: $v_R \cos \alpha$.

Adicionalmente, si el medio se mueve con una velocidad constante u hay que sumarla, vectorialmente, con la velocidad de propagación de la onda respecto al medio: $c + u$. En general, se puede proceder mediante un cambio de coordenadas en el cual el medio resulta quieto.

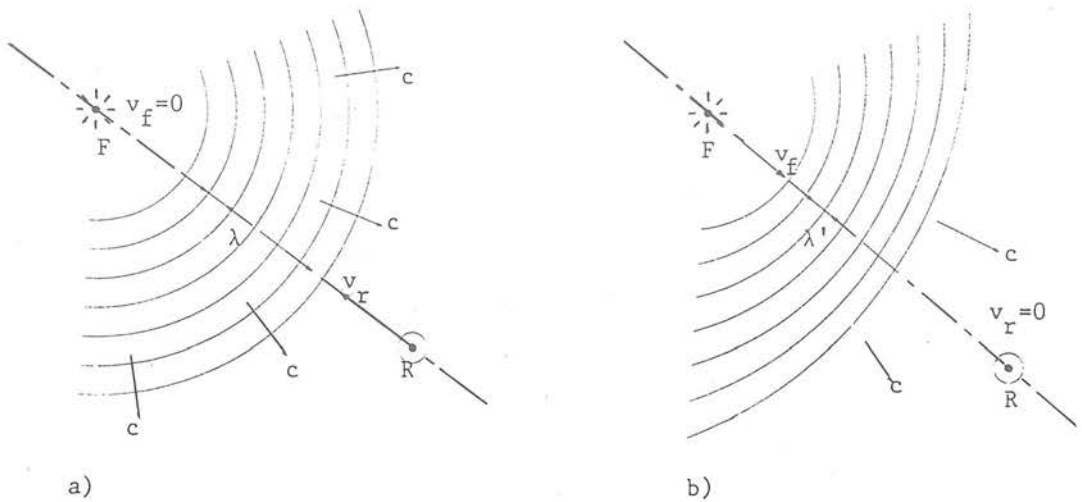


Fig. 11.18 Efecto Doppler.

- a) Receptor R en movimiento con velocidad v_R y Fuente F en reposo, $v_f = 0$.
- b) Fuente F en movimiento con velocidad v_f y Receptor R en reposo, $v_R = 0$.

. Fuente en Movimiento y Receptor en Reposo.-

Si la fuente emisora estuviere detenida en reposo los frentes de onda tendrían una separación λ para la frecuencia emitida ν , y con la velocidad de propagación c podemos escribir la relación: $\lambda \nu = c$.

Cuando la fuente esta en movimiento directo hacia el receptor estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda, de λ a λ' , porque los frentes de onda se van aproximando entre sí formando un sistema de circunferencias excéntricas como se muestra en la fig. 11.18b). Si la velocidad, rapidez, de la fuente es v_f , para la frecuencia emitida ν , el acortamiento $\Delta\lambda$ que se producirá en la longitud de onda λ estará dada por la relación: $\Delta\lambda\nu = v_f$.

Luego, restando ambas relaciones, esto es:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda\nu = c \\ \Delta\lambda\nu = v_f \end{array} \right\} (-) \Rightarrow (\lambda - \Delta\lambda)\nu = c - v_f$$

con: $\lambda - \Delta\lambda = \lambda'$, podemos escribir que:

$$\lambda'\nu = c - v_f$$

Para el receptor los frentes de onda que recibe, con velocidad de propagación c , le llegan con una separación λ' , longitud de onda menor que λ , y escuchará una frecuencia ν' , mayor que ν . Luego, el receptor detectará una onda tal que:

$$\lambda'\nu' = c$$

Comparando las relaciones obtenidas, dividiéndolas, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda'\nu' = c \\ \lambda'\nu = c - v_f \end{array} \right\} (\div) \Rightarrow \frac{\nu'}{\nu} = \frac{c}{c - v_f}$$

Finalmente, podemos escribir que la frecuencia ν' es:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c}{c - v_f} \right) = \nu \left(\frac{1}{1 - v_f/c} \right)$$

Vemos que el aumento de frecuencia depende de la relación de velocidades v_f/c . Caso contrario, cuando la fuente se aleja del receptor estacionario, la longitud de onda es mayor y la frecuencia disminuye. Como la velocidad de la fuente es de sentido contrario podemos escribir que la frecuencia ν' , en este caso, es:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c}{c + v_f} \right) = \nu \left(\frac{1}{1 + v_f/c} \right)$$

Como se ha expresado en el caso anterior, cuando el movimiento no es frontal hay que tener en cuenta el ángulo instantáneo que forman, así como también cuando se presenta movimiento del medio material de propagación.

. Receptor y Fuente en Movimiento.-

Hay que distinguir dos casos: cuando ambos se acercan, o se alejan entre sí, uno del otro.

En estos casos hay que tener en cuenta simultáneamente los factores que afectan a la frecuencia emitida v por el movimiento tanto del receptor como de la fuente. Esto es,

- Acercándose:

$$v' = v \left(\frac{c + v_r}{c} \right) \left(\frac{c}{c - v_f} \right) = v \left(\frac{c + v_r}{c - v_f} \right)$$

- Alejándose:

$$v' = v \left(\frac{c - v_r}{c} \right) \left(\frac{c}{c + v_f} \right) = v \left(\frac{c - v_r}{c + v_f} \right)$$

Cuando las velocidades del receptor o la fuente se acercan a la velocidad del sonido, o la superan ($v_r > c$ ó $v_f > c$), las expresiones arriba encontradas para el efecto Doppler no son válidas.

Si la velocidad de la fuente se iguala a la velocidad del sonido ($v_f \sim c$), los frentes de onda se juntan tanto que la separación entre ellos se hace nula ($\lambda' \simeq 0$), ver fig. 11.18b). En consecuencia, la energía del sonido se acumula delante de la fuente formando una "barrera de sonido" que presenta resistencia al movimiento.

Cuando se supera la velocidad del sonido alcanzándose velocidades supersonicas ($v_f > c$), los frentes de onda y la energía sonora se encuentran ahora en un manto envolvente de forma cónica en cuyo vértice se encuentra la fuente sonora, y se llama "onda de choque". Cuando esta onda de choque llega a un receptor se descarga la energía en forma de explosión relativamente moderada, p.e. cuando pasa sobre nosotros un avión supersónico.

11.11 Polarización lineal en una onda transversal.-

En una onda transversal las partículas del medio vibran a lo largo de una línea perpendicular a la dirección de propagación y todas ellas se encuentran, para cualquier instante, en un mismo plano, tal como se mostró anteriormente para el caso de la cuerda en un plano vertical. Luego, para estas ondas se dice que están "polarizadas linealmente" o también que están "polarizadas en un plano". Este plano no necesariamente es el vertical $y - x$, en general, el plano de vibración puede formar un ángulo θ con el plano horizontal $z - x$, tal como se muestra en la fig. 11.19.

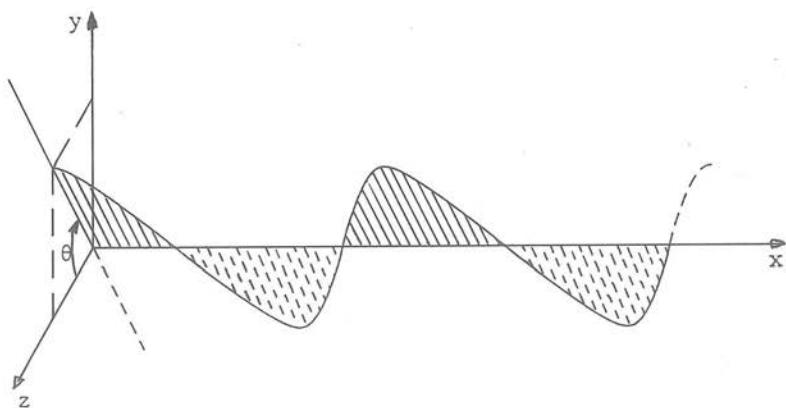


Fig. 11.19 Onda polarizada linealmente en un plano inclinado que forma un ángulo θ con el horizontal.

Una onda polarizada linealmente en un plano inclinado con ángulo θ puede analizarse por descomposición, o más bien, inversamente, obtenerse por composición de dos ondas iguales linealmente polarizadas en los planos perpendiculares $y - x$ y $z - x$. Por el principio de superposición un medio, como la cuerda, puede transmitir dos o más ondas simultáneamente con diferentes planos de polarización. El desplazamiento resultante de una partícula del medio será, por la interferencia de éstas ondas, la suma vectorial de las ondas compo-

entes. En los items anteriores 11.5 y 11.6 cuando tratamos la superposición e interferencia de ondas el movimiento resultante se encontró analíticamente sumando las ondas algebraicamente, ahora cuando se tienen ondas transversales con diferentes plano de polarización hemos generalizado a una suma vectorial.

Los fenómenos de polarización son de gran importancia en las ondas electromagnéticas, en particular son los de polarización de la luz. Las ondas sonoras no presentan polarización pues éstas son longitudinales y no transversales.

Cuando dos ondas linealmente polarizadas en los planos perpendiculares $y - x$ y $z - x$ presentan un defasamiento de 90° entre ellas, al componerlas se obtiene un vector de amplitud constante que gira circularmente con la frecuencia angular ω conforme avanza la onda en la dirección x , ya no hay vibración a uno y otro lado. En este caso se dice que se presenta "polarización circular". Más general aún, cuando las amplitudes de las ondas componentes no son iguales se tiene una "polarización elíptica". En óptica, más adelante, estudiaremos la polarización'.

A P E N D I C E I

PROPIEDADES FISICAS DE LA MATERIA

TABLA AI.1 - GASES

Medio	Temperatura $t(^{\circ}\text{C})$	Densidad $\rho_0(\text{kg}/\text{m}^3)$	Relación de calores específicos $\gamma(c_p/c_v)$	Velocidad de propagación $c(\text{m}/\text{s})$
Aire	0	1.293	1.402	331.6
Aire	20	1.21	1.402	343
Oxígeno	0	1.43	1.40	317.2
Hidrógeno	0	0.09	1.41	1269.5
Vapor	100	0.6	1.324	404.8

TABLA AI.2 LIQUIDOS

Medios	Temperatura t (°C)	Densidad ρ_0 (kg/m ³)	Módulo Volumétrico B (Pa) x 10 ¹⁰	Relación de calores específicos $\gamma(c_p/c_v)$	Velocidad de propagación c (m/s)
Agua(dulce)	20	998	0.218	1.004	1481
Agua(mar)	13	1026	0.228	1.01	1500
Alcohol	20	790	0.1	---	1150
Mercurio	20	13600	2.53	1.13	1450

TABLA AI.3 SOLIDOS

Medio	Densidad ρ_0 (kg/m ³)	Módulo de Young Y(Pa) x 10 ¹⁰	Módulo cortante C(Pa)x10 ¹⁰	Módulo vo lumétrico adiabático B(Pa)x10 ¹⁰	Módulo de Poisson σ	Velocidad de propagación en barras c(m/s)
Aluminio	2700	7.1	2.4	7.5	0.33	5150
Acero	7700	19.5	8.3	17.0	0.28	5050
Cobre	8900	12.2	4.4	16.0	0.35	3700
Plomo	11300	1.65	0.55	4.2	0.44	1200
Níquel	8800	21.0	8.0	19.2	0.31	4900
Plata	10500	7.8	2.8	10.5	0.37	2700
Vidrio	2300	6.2	2.5	3.9	0.24	5200
Caucho	950	0.0005	--	0.1	0.5	70

APENDICE II

NIVELES DE INTENSIDAD SONORA EN DECIBELIOS A*

PARA ALGUNOS RUIDOS COMUNES

NI (dba)	FUENTE O DESCRIPCION DEL SONIDO
120	Umbral de la sensación desagradable.
110 - 120	Discoteca - banda de rocanrol.
110 - 110	Paso de un avión jet a baja altura.
90 - 100	Podadora mecánica-máquina remachadora-cabina de un avión ligero.
80 - 90	Paso de trenes-camión pesado a 70km/hr-licuadora - motocicleta.
70 - 80	Calle con mucho tráfico-automóvil a 100km/h-lavadora de ropa, TV audio.
60 - 70	Conversación ordinaria - acondicionador de aire - aspiradora.
50 - 60	Tránsito de vehículos ligeros.
40 - 50	Zona residencial silenciosa en el día - automóvil en marcha moderada.
30 - 40	Zona residencial silenciosa en la noche - radio funcionando moderadamente en casa.
20 - 30	Area en el campo.
10 - 20	Conversación en voz baja.
0 - 10	Murmullo de las hojas.
0	Umbral de la sensación sonora.

Las medidas se efectúan en la posición del operador o a una cierta distancia, algunos metros, de la fuente.

* Niveles de sonido con ponderación A (dba): considera la intensidad sonora a las diferentes frecuencias, asignando por bandas de frecuencias un "peso" que esta relacionado a la sensibilidad del oído a la frecuencia central de esa banda.

PROBLEMAS

1. Una onda senoidal es enviada a lo largo de un resorte horizontal por medio de un vibrador fijo en uno de sus extremos. La frecuencia de vibración es de 20 ciclos por segundo (1 cps = 1 Hz) con desplazamiento longitudinal máximo de 4 cm, y la separación a lo largo del resorte entre los frentes de onda correspondientes a dos máximos sucesivos es de 24 cm.

Encontrar la velocidad de propagación de la onda, y sabiendo que se desplaza horizontalmente en el sentido positivo del eje x determinar la ecuación de la onda.

Se conoce:

- Frecuencia: $\nu = 20 \text{ Hz (s}^{-1}\text{)}$
- Longitud de onda: $\lambda = 24 \text{ cm}$
- Amplitud : $A = 4 \text{ cm}$

Luego, la velocidad de propagación de la onda será:

$$c = \lambda \nu = 24 \cdot 20 = 480 \text{ cm/s}$$

Como se mueve en el sentido positivo del eje $-x$, la ecuación de la onda senoidal será de la forma: $\psi = A \text{ sen } (kx - \omega t)$,

con:

- Número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ (rad/m)}$
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 20 = 40\pi \text{ (rad/s)}$

Por lo tanto, la ecuación de la onda será:

$$\psi = 4 \text{ sen } \pi \left(\frac{x}{12} - 40t \right)$$

con unidades:

$$x \Rightarrow \text{cm}$$

$$t \Rightarrow \text{s}$$

$$\psi \Rightarrow \text{cm}$$

2. En un sistema resorte y vibrador dispuesto en forma similar al problema anterior, se conoce que la frecuencia de vibración es de 16cps con una amplitud de 0.04m y que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es de 20 m/s .

Determinar la ecuación que describe el movimiento ondulatorio senoidal que se propaga en el sentido positivo.

Se conoce:

- Frecuencia : $\nu = 16\text{ cps} = 16\text{ Hz}(\text{s}^{-1})$

- Amplitud : $A = 0.04\text{ m}$

- Velocidad de propagación: $c = 20\text{ m/s}$

Luego:

- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi 16 = 32\pi\text{ rad/s}$

- Número de onda: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{32\pi}{20} = \frac{8}{5}\pi\text{ rad/m}$

y, la ecuación será:

$$y = 0.04 \text{ sen } \pi \left(\frac{8}{5}x - 32t \right)$$

con unidades :

$x \Rightarrow \text{m}$

$t \Rightarrow \text{s}$

$y \Rightarrow \text{m}$

3. Meciendo un bote, a razón de 12 oscilaciones en 20 segundos, una persona produce ondas superficiales en un lago tranquilo y observa que cada oscilación produce una cresta de onda y que estas demoran 6 segundos para alcanzar la orilla distante 12 metros.

Calcular la longitud de onda de las ondas superficiales producidas.

La frecuencia de las ondas es:

$$\nu = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ c/s (Hz)}$$

y su velocidad de propagación:

$$c = \frac{12}{6} = 2 \text{ m/s}$$

como: $c = \lambda \nu$, la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2}{3/5} = \frac{10}{3} = 3.33 \text{ m}$$

4. Dada la ecuación de onda: $y = 0.3 \text{ sen}\pi(120t - x)$, con unidades: x en metros, t en segundos e y en metros.

Graficar y vs x para $t=0$ y para $t=1/480$ segundos, así como también y vs t en $x = 0$.

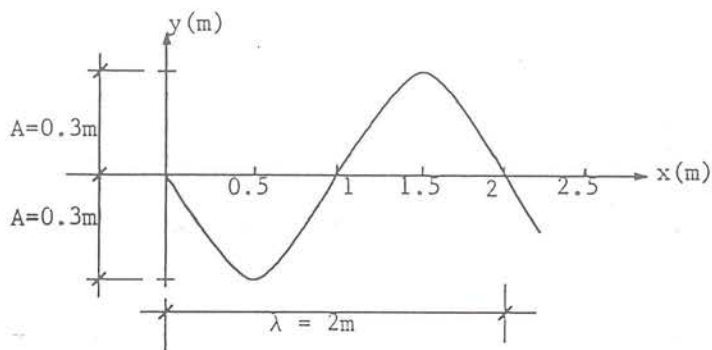
Encontrar la amplitud, longitud de onda, período, frecuencia y velocidad de propagación.

Verificar que: $\lambda = c \tau$

- Para $t = 0$, se tiene la ecuación :

$$y = 0.3 \text{ sen}(-\pi x) = -0.3 \text{ sen} \pi x$$

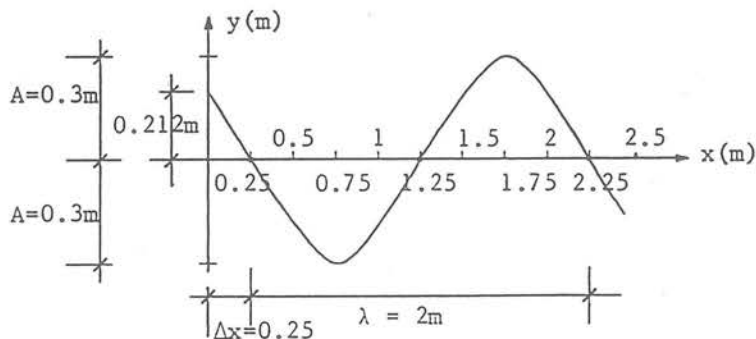
Gráfica, y vs x :



- Para $t = 1/480$ s, se tiene la ecuación:

$$y = 0.3 \text{ sen}\pi\left(\frac{1}{4} - x\right) = 0.3 \text{ sen}\pi(0.25 - x)$$

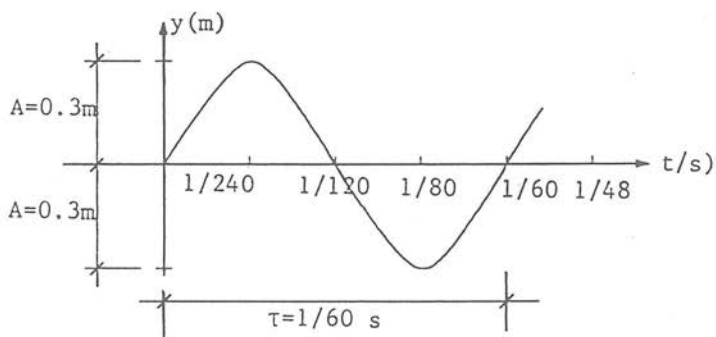
Gráfica, y vs x :



- En $x = 0$, se tiene la ecuación:

$$y = 0.3 \text{ sen } 120\pi t$$

Gráfica, y vs t :



Luego, se tiene:

- Amplitud, $A = 0.3m$

- Longitud de onda, $\lambda = \frac{2\pi}{\pi} = 2m$

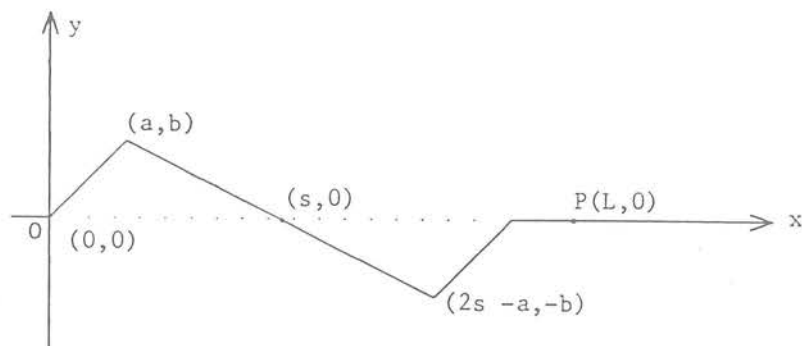
- Período, $\tau = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60} \text{ s}$

- Frecuencia, $\nu = \frac{1}{\tau} = 60 \text{ s}^{-1}$

- Velocidad de propagación, $c = \frac{\omega}{k} = \frac{120\pi}{\pi} = 120 \text{ m/s}$

- Verificar: $\lambda = c\tau = 120/60 = 2m$. Valor conforme, igual al arriba encontrado. (λ es la distancia recorrida en un tiempo τ con velocidad c).

5. Por una cuerda horizontal se envía un pulso que en el instante inicial esta dado por:



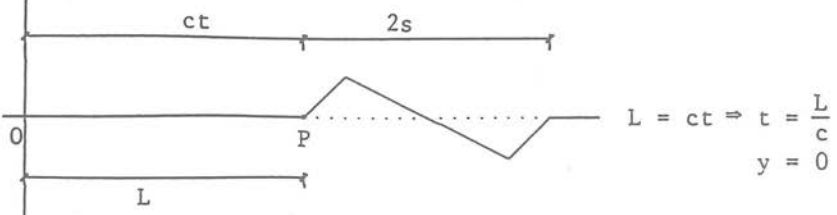
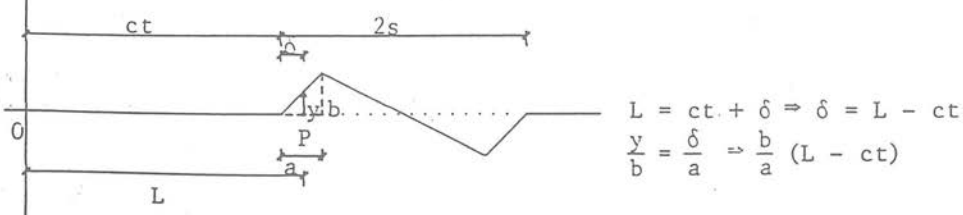
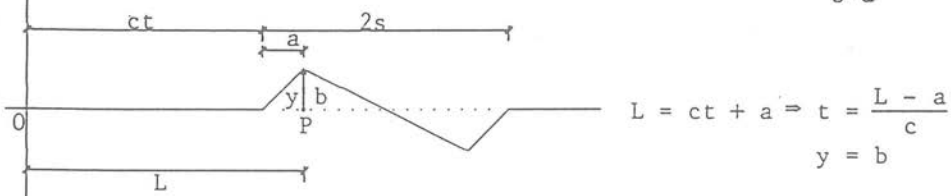
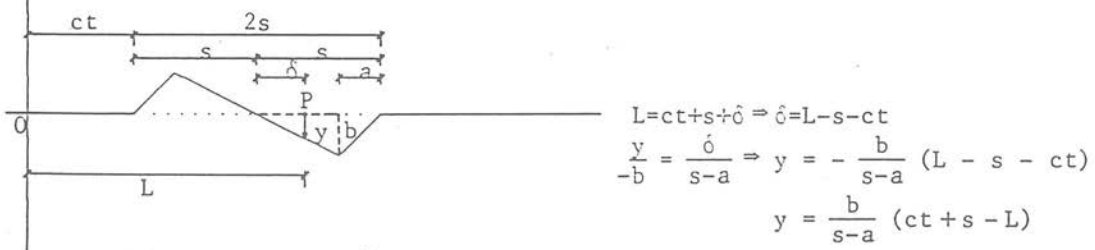
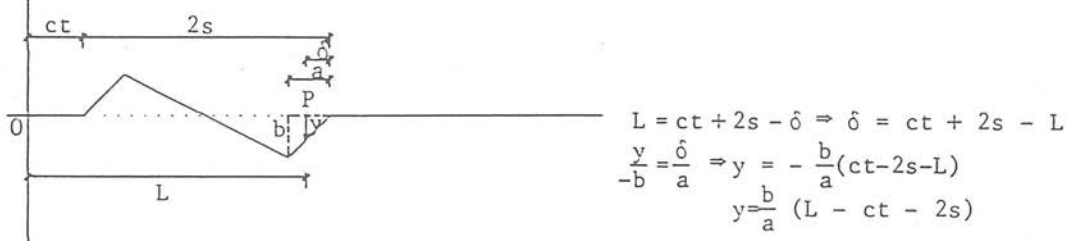
Conociendo la velocidad de propagación c , encontrar $y(t)$ para el punto P.

Si se envía un tren de ondas periódico de este pulso, ¿cuál será el período de la partícula oscilante?

Vemos que el pulso esta conformado por tres rectas con inclinaciones que cambian consecutivamente, por lo tanto, para encontrar el movimiento de un punto de la cuerda habrá que analizar separadamente cada uno de estos tres tramos.

Procederemos a continuación gráficamente mostrando, en forma sucesiva, desde el instante cuando el pulso llega al punto dado $P(L, 0)$ hasta el instante que lo abandona:

(siguiente página)



Resumen:

- Primer tramo, para el tiempo comprendido entre:

$$\frac{L - 2s}{c} \leq t \leq \frac{L - 2s + a}{c}$$

el movimiento es: $y(t) = \frac{b}{a} (L - ct - 2s)$

- Segundo tramo, para el tiempo comprendido entre:

$$\frac{L - 2s + a}{c} \leq L \leq \frac{L - a}{c}$$

el movimiento: $y(t) = \frac{b}{s - a} (ct + s - L)$

- Tercer tramo, para el tiempo comprendido entre:

$$\frac{L - a}{c} \leq t \leq \frac{L}{c}$$

el movimiento: $y(t) = \frac{b}{a} (L - ct)$

Finalmente, para el tren de ondas el período pedido será:

$$2s - c\tau \Rightarrow \tau = \frac{2s}{c}$$

6. Se tiene una cuerda tensa horizontalmente en la cual viaja un pulso cualquiera. Demostrar que la pendiente en un punto de la cuerda es igual a la razón entre la velocidad v de la partícula en ese punto y la velocidad c de propagación de la onda o pulso.
-

Para un pulso cualquiera: $y = f(x \mp ct)$, la velocidad de propagación

es $c = \frac{dx}{dt}$, la velocidad de la partícula $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, y la pendiente:

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y / \partial t}{\partial x / \partial t} = \frac{\partial y / \partial t}{dx / dt} = \frac{v}{c}$$

7. Sobre una cuerda horizontal viaja una onda transversal cuya ecuación, en el S.I. de unidades, es:

$$y = 0.04 \cos(70t - 2x)$$

Encontrar:

- El período, frecuencia, longitud y velocidad de propagación de la onda.
- El desplazamiento, velocidad y aceleración del movimiento transversal, en función del tiempo, de un punto particular dado x_p de la cuerda.
- Los valores máximos de la velocidad y aceleración de la partícula. ¿Varían estos valores con la posición x_p ?
¿Cuál es la posición transversal instantánea de la partícula x_p cuando alcanza estos valores máximos?
- Mostrar que cada elemento de la cuerda está sujeto a una fuerza restauradora que cumple con la Ley de Hooke. Por unidad de masa, ¿cuál es la constante elástica de proporcionalidad?

- Para la ecuación dada, se tiene:

- . Amplitud $A = 0.04 \text{ m}$
- . Número de onda: $k = 2 \text{ rad/m}$
- . Frecuencia angular: $\omega = 70 \text{ rad/s}$
- . Período: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{70} = \frac{\pi}{35} \text{ s}$
- . Frecuencia: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{35}{\pi} \text{ s}^{-1} \quad (\text{Hz})$
- . Longitud de onda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ m}$
- . Velocidad de propagación: $c = \lambda\nu = \frac{\omega}{k} = \frac{70}{2} = 35 \text{ m/s}$

- Para el punto particular dado x_p , se tiene:

- . Desplazamiento transversal: $y = 0.04 \cos(70t - 2x_p)$
- . Velocidad transversal: $\dot{y} = v = -2.8 \text{ sen}(70t - 2x_p)$
- . Aceleración transversal: $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -0.04(70)^2 \cos(70t - 2x_p)$
 $\ddot{y} = a = -196 \cos(70t - 2x_p)$

. Valor máximo de la velocidad : $v_{\max} = 2.8 \text{ m/s}$

Este valor es independiente del punto x_p .

. Valor máximo de la aceleración: $a_{\max} = 196 \text{ m/s}^2$

Este valor es independiente del punto x_p .

. El valor v_{\max} se alcanza cuando $\sin(70t - 2x_p) = 1$, esto implica que $\cos(70t - 2x_p) = 0$ y por lo tanto, el desplazamiento transversal de la partícula x_p es: $y = 0$.

. El valor a_{\max} se alcanza cuando $\cos(70t - 2x_p) = 1$, luego el desplazamiento transversal de la partícula x_p es: $y = A = 0.04 \text{ m}$.

- Acción elástica restauradora:

Hemos encontrado que la aceleración trasversal de cualquier partícula x_p de la cuerda, es:

$$\text{como: } \ddot{y} = -0.04 (70^2) \cos(70t - 2x_p)$$

$$y = 0.04 \cos(70t - 2x_p)$$

podemos escribir que:

$$\ddot{y} = - (70)^2 y = - 4900y$$

Pero, por la Ley de Newton, por unidad de masa, se tiene:

$$\frac{F}{M} = \ddot{y}$$

Luego, igualando ambas expresiones, queda:

$$\frac{F}{M} = - 4900y$$

Expresión que cumple, por unidad de masa, con la relación lineal de Hooke. Por lo tanto, la constante elástica recuperadora por unidad de masa es:

$$K = 4900 \text{ N/m}$$

8. Por una cuerda de masa μ por metro lineal y tensión T , viaja horizontalmente la onda:

$$y_1 = A_1 \text{ sen } (k_1 x - \omega_1 t)$$

Diga Ud., si otra onda:

$$y_2 = A_2 \text{ sen}(k_2 x + \omega_2 t)$$

puede viajar simultáneamente con y_1 por la misma cuerda. ¿Por qué?, ¿bajo que condición?.

Analizar para cada uno de los siguientes casos, si:

- a) $A_2 = A_1$, $k_2 = k_1$ y $\omega_2 \neq \omega_1$
- b) $A_2 \neq A_1$, $k_2 \neq k_1$ y $\omega_2 = \omega_1$
- c) $A_2 \neq A_1$, $k_2 \neq k_1$ y $\omega_2 \neq \omega_1$
- d) $A_2 = A_1$, $k_2 = k_1$ y $\omega_2 = \omega_1$

Para μ y T , la velocidad de propagación de cualquier onda que viaje sobre esta cuerda, tiene un valor único, dado por:

$$c = \sqrt{T/\mu}$$

Como se sabe además que la onda y , viaja por la cuerda, la relación ω_1/k_1 queda determinada y fija, se cumple que:

$$c = \sqrt{T/\mu} = \omega_1/k_1$$

Con esta condición analicemos cada uno de los casos planteados. Previamente observe que para las amplitudes no hay ningún requerimiento.

- a) Se tiene la onda: $y_2 = A_1 \text{ sen}(k_1 x + \omega_2 t)$
para que pueda viajar se requiere que: $\frac{\omega_2}{k_1} = \frac{\omega_1}{k_1} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1$
como: $\omega_2 \neq \omega_1 \Rightarrow$ La onda NO podrá viajar.
- b) Se tiene la onda: $y_2 = A_2 \text{ sen}(k_2 x + \omega_1 t)$
para que pueda viajar se requiere que: $\frac{\omega_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1} \Rightarrow k_2 = k_1$
como: $k_2 \neq k_1 \Rightarrow$ la onda No podrá viajar.
- c) Se tiene la onda: $y_2 = A_2 \text{ sen}(k_2 x + \omega_2 t)$

para que pueda viajar se requiere que: $\frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$

bajo esta condición, con: $k_2 \neq k_1$ y $\omega_2 \neq \omega_1 \Rightarrow$ La onda Si podrá viajar, solo si se cumple la relación:

$$\frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$$

- d) Se tiene la onda: $y_2 = A_1 \text{sen}(k_1 x + \omega_1 t)$

En este caso las dos ondas (y_2 e y_1) son iguales, por lo tanto, la onda Si podrá viajar. Teniendo en cuenta que tienen diferente signo en el argumento de la función seno, las ondas viajan en sentidos contrarios.

9. De las siguientes expresiones, establezca cuales pueden satisfacer la ecuación diferencial de onda.

$$\Psi_1 = A(x - st)^2$$

$$\Psi_2 = A(x^2 - st)$$

$$\Psi_3 = A \operatorname{sen}(kx^2 - \omega t)$$

$$\Psi_4 = A k \operatorname{sen} \omega t + A \omega \cos \omega t$$

$$\Psi_5 = A \operatorname{sen} \theta \cos \omega t + A \cos \theta \operatorname{sen} \omega t$$

$$\Psi_6 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t - st - \pi/3)$$

$$\Psi_7 = A \operatorname{sen}(kx - \alpha) \cos(\omega t - \beta)$$

$$\Psi_8 = A \operatorname{sen} kx \cos \omega t + A \cos kx \operatorname{sen} \omega t$$

Solo satisfecerán la ecuación diferencial de onda las que son de la forma:

$$\Psi = f(x \pm ct)$$

Luego, de esta forma son:

$$\Psi_1 = A(x - st) \quad \text{con velocidad de propagación, } c = s$$

$$\Psi_6 = A \operatorname{sen} [kx - (\omega + s)t - \pi/3] \Rightarrow \text{con velocidad de propagación,}$$

$$c = \frac{\omega + s}{k}$$

$$\Psi_8 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \Rightarrow \text{con velocidad de propagación, } c = \frac{\omega}{k}$$

10. Una cuerda de 100 gramos por metro lineal, se mantiene horizontal bajo una tensión de 40 Newtons :

Determine si puede viajar en ella una onda transversal senoidal dada por la ecuación:

$$y = 8 \text{ sen } (16x + 4t - \pi/3)$$

La velocidad de propagación en esta cuerda, para cualquier pulso u onda, de acuerdo a la ecuación de onda es:

$$c^2 = \frac{T}{\mu} = \frac{40}{0.1} = 400 \Rightarrow c = 20 \text{ m/s}$$

La velocidad de propagación de la onda senoidal dada es:

$$V = \frac{\omega}{k} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ m/s}$$

Como $V \neq c$, no podrá propagarse en la cuerda.

11. Una cuerda de longitud ℓ y masa μ por unidad de longitud se mantiene horizontal bajo una tensión T . En uno de sus extremos se genera un pulso transversal que viaja a través de ella. Encontrar el tiempo que tardará en desplazarse hasta llegar al otro extremo.
-

La velocidad de propagación es:

$$c = \sqrt{T/\mu}$$

con esta velocidad c el pulso recorrerá la distancia ℓ en un tiempo τ que queremos determinar, éste será:

$$\ell = c\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ell}{c} = \ell \sqrt{\mu/T}$$

12. Una cuerda de longitud ℓ y masa m cuelga libremente de un techo. En su extremo libre se genera un pulso transversal que viaja a través de ella. Encontrar el tiempo τ que tardará en desplazarse hasta llegar el otro extremo empotrado en el techo.

Recomendación: resolver primero el problema anterior N° 11.

La masa por unidad de longitud es: $\mu = m/\ell$.

La velocidad de propagación es: $c = \sqrt{T/\mu}$

Pero ahora, en este problema, la tensión T en la cuerda no es constante como en casos anteriores, más bien es variable. Esta fuerza debido a su peso propio que cuelga, a una distancia x del extremo libre, será:

$$T_x = \mu g x \begin{cases} \text{mínimo en el extremo libre, } T=0 \\ \text{máximo en el extremo empotrado,} \\ T_\ell = \mu g \ell = mg \end{cases}$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación también será variable con x , y será:

$$c_x = \sqrt{T_x/\mu} = \sqrt{\mu g x/\mu} = \sqrt{g x}$$

Por definición de velocidad: $c = \frac{dx}{dt}$, luego:

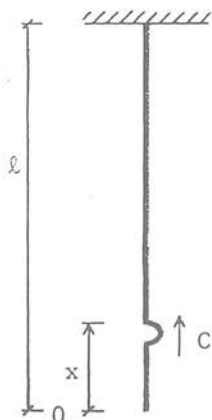
$$dx = \sqrt{g x} dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{g x}}$$

integrando:

$$\int_0^\tau dt = \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{g x}}$$

$$t \Big|_0^\tau = 2 \sqrt{\frac{x}{g}} \Big|_0^\ell$$

$$\tau = 2 \sqrt{\ell/g}$$



13. Con relación al problema anterior N° 12 considere ahora que el pulso se genera a la mitad de la cuerda, propagándose en ella hacia ambos extremos.

¿A cuál extremo llega primero, al empotrado o al libre? . Luego, determine en ambos casos el tiempo que tarda en llegar al extremo respectivo.

Como la tensión T en la cuerda es variable, desde un valor cero en el extremo libre, $mg/2$ al centro de la cuerda, hasta su valor máximo mg en el extremo empotrado. Luego, la velocidad también es asimismo variable $c = \sqrt{T/\mu}$, por lo tanto, cuando el pulso recorre la mitad superior su velocidad es siempre mayor que cuando recorre la mitad inferior y llegará primero al extremo empotrado.

En el problema anterior hemos encontrado que la velocidad variable es: $c = \sqrt{gx}$, luego los tiempos pedidos serán:

- Para llegar al extremo empotrado (τ_e) el movimiento es hacia arriba (+) y se tiene:

$$c = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx}$$

despejando e integrando:

$$\int_0^{\tau_e} dt = \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}}$$

$$\tau_{\ell} = 2 \sqrt{\frac{x}{g}} \Big|_{\ell/2}^{\ell} = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Para llegar al extremo libre (τ_o) el movimiento es hacia abajo (-) y se tiene:

$$c = - \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx}$$

despejando e integrando:

$$\int_0^{\tau_o} dt = - \int_{\ell/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \int_0^{\ell/2} \frac{dx}{\sqrt{gx}}$$

$$\tau_0 = 2 \sqrt{\frac{x}{g}} \Big|_0^{\ell/2} = \sqrt{2 \frac{\ell}{g}}$$

Comparando ambos tiempos:

$$\frac{\tau_e}{\tau_0} = \frac{2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{\ell}{2}}} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$

$$\tau_e \approx 0.41 \tau_0 \Rightarrow \tau_e < \tau_0$$

Por lo tanto, como se esperaba, primero llega al extremo empotrado.

14. Una onda longitudinal senoidal:

$$y = A \text{ sen } (kx - \omega t - \phi)$$

viaja en un tubo de longitud muy grande.

Encontrar la velocidad del movimiento de las partículas del medio y la correspondiente onda de presión. Comprobar que están en fase entre ellas y que ambas están defasadas 90° respecto al desplazamiento de las partículas.

Si: $y = A \text{ sen } (kx - \omega t - \phi)$

La velocidad será:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t - \phi)$$

y la presión:

$$p = -B \frac{\partial y}{\partial x} = -BkA \cos(kx - \omega t - \phi)$$

Luego, se tiene que p y v están en fase (coseno) y que ambas están defasadas $\pi/2$ respecto al desplazamiento y (seno).

En general podemos establecer que:

$$p = -Bk \left(-\frac{v}{\omega} \right) = B \frac{k}{\omega} v$$

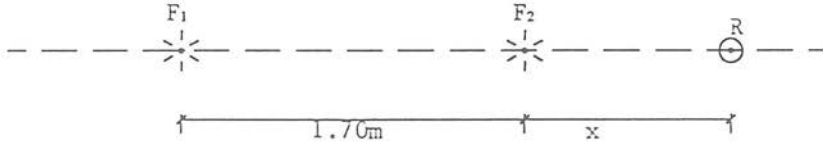
$$p = \frac{B}{c} v$$

La presión y la velocidad tienen la misma fase y ambas están defasadas 90° respecto al desplazamiento.

Recomendación: compare estos resultados con los que se obtienen para una onda estacionaria en el problema N^o 27.

15. Dos altavoces oscilan senoidalmente en fase emitiendo ondas sonoras con frecuencia de 500 c/s. Considere la velocidad del sonido en el aire: $c = 340$ m/s.

Los altavoces están separados una distancia de 1.70m y alineados con un receptor situado a una distancia x de uno de ellos tal como se muestra en la figura:



Establecer si en estas condiciones la intensidad de recepción corresponderá a una interferencia totalmente constructiva, totalmente destructiva o a una interferencia intermedia.

Como $c = \lambda v$, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{340}{500} = 0.68\text{m}$$

Para interferencia totalmente constructiva se requiere que:

$$d = n\lambda \Rightarrow n = \frac{d}{\lambda} = \frac{1.70}{0.68} = 2.5$$

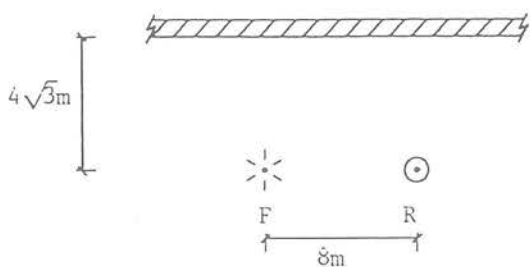
Como n no es un número entero no se da esta interferencia.

- Para interferencia totalmente destructiva se requiere que:

$$d = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow n = 2 \frac{d}{\lambda} = 2 \times \frac{1.70}{0.68} = 5$$

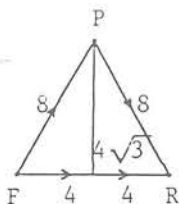
Como en este caso n sí es un número entero se tiene interferencia totalmente destructiva y la intensidad en la recepción será nula.

16. Una fuente de sonido, un receptor y una pared reflectora se encuentran dispuestos como se muestra en la figura.



Si la velocidad del sonido en el aire es: $c = 344\text{m/s}$, se quiere saber:
 ¿para qué frecuencias de emisión el receptor escuchará el sonido con máxima amplitud?

Geometría:



La diferencia entre el sonido directo y el reflejado en la pared es:

$$D_c = 16 - 8 = 8\text{m}$$

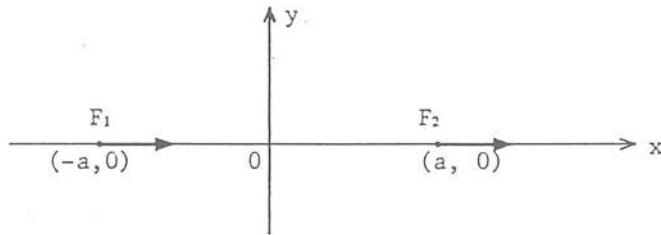
Para tener interferencia totalmente constructiva ésta diferencia de camino debe ser igual a un número entero de longitudes de onda, es decir:

$$D_c = n\lambda, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

luego, como: $c = \lambda v$, la frecuencia de emisión debe ser:

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{D_c/n} = \frac{c}{D_c} n = \frac{344}{8} n = 43n \text{ Hz, para } n = 1, 2, 3, \dots$$

17. Dos fuentes de onda ubicadas en los puntos de coordenadas $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, emiten simultáneamente ondas senoidales iguales que se desplazan exclusivamente hacia la derecha sobre el eje horizontal x .
- Expresar analíticamente cada una de las ondas emitidas y, por superposición de ambas, encontrar la onda resultante.
- Analizar la interferencia en cada región por que se quiere determinar: ¿para qué valores de la distancia "a" la onda resultante será siempre cero, en todo punto y en todo instante?



En el sistema de referencia mostrado, las ecuaciones de las ondas emitidas que viajan hacia la derecha, serán:

- para $F_1 (-a, 0) \Rightarrow y_1 = A \text{ sen } [k(x + a) - \omega t]$

- para $F_2 (a, 0) \Rightarrow y_2 = A \text{ sen } [k(x - a) - \omega t]$

Se tienen tres regiones de estudio, para: $x < -a$, $-a < x < a$ y $x > a$. La superposición de y_1 e y_2 en cada una de estas regiones será:

- para, $x < -a$:

No hay ninguna onda, por lo tanto: $y = 0$

- para, $-a < x < a$:

Solo hay una onda, por lo tanto: $y = y_1 \Rightarrow y = A \text{ sen } [k(x+a) - \omega t]$

- para $x > a$:

$$y = y_1 + y_2 = A \{ \text{sen } [k(x+a) - \omega t] + \text{sen } [k(x-a) - \omega t] \}$$

Aplicando la relación trigonométrica suma:

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \text{sen } \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

se tiene:

$$y = 2A \cos ka \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Analicemos ahora en cada región la interferencia para determinar los valores pedidos de "a". Esto es:

- Para, $x < a$:

Como: $y = 0$, independiente de "a", para cualquier valor de "a" se tendrá que $y = 0$.

- Para, $-a < x < a$:

Como no hay interferencia, solo hay una onda y_1 , no existirá ningún valor "a" que pueda hacer que siempre $y = 0$.

- Para, $x > a$:

Como: $y = 2A \cos ka \sin(kx - \omega t)$, será cero cuando:

$$\cos ka = 0 \Rightarrow ka = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = n \frac{\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{4}, \text{ para: } n = 1, 3, 5, \dots$$

Para éstos valores de "a", para todo t y toda $x(>a)$, se tendrá que $y = 0$.

18. Encontrar la interferencia de dos ondas armónicas Ψ_1 y Ψ_2 que solo difieren en fase, con valores ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente.

Las ecuaciones de estas ondas serán:

$$\Psi_1 = A \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_1) \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_2)$$

sumandolas:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A [\text{sen}(kx - \omega t - \phi_1) + \text{sen}(kx - \omega t - \phi_2)]$$

Desarrollando el seno diferencia de dos ángulos: $\alpha = kx - \omega t$ y $\beta = \phi$, se tiene:

$$\Psi = A [\text{sen}(kx - \omega t) \cos\phi_1 - \cos(kx - \omega t) \text{sen}\phi_1 + \text{sen}(kx - \omega t) \cos\phi_2 - \cos(kx - \omega t) \text{sen}\phi_2]$$

$$\Psi = A \{ \text{sen}(kx - \omega t) [\cos\phi_1 + \cos\phi_2] - \cos(kx - \omega t) [\text{sen}\phi_1 + \text{sen}\phi_2] \}$$

Utilizando las relaciones trigonométricas suma de cosenos y de senos de ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , se tiene:

$$\Psi = A \{ \text{sen}(kx - \omega t) [2 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)] - \cos(kx - \omega t) [2 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)] \}$$

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) [\text{sen}(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) - \cos(kx - \omega t) \text{sen}\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)]$$

La expresión entre paréntesis corresponde al seno diferencia de dos ángulos: $(kx - t)$ y $\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$, luego, finalmente queda:

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \text{sen} \left[kx - \omega t - \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \right]$$

Esta es una onda armónica con fase $\phi = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$ y amplitud

$$B = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right).$$

Compare este resultado con el obtenido en el ítem 11.6, donde obtuvimos el mismo resultado considerando $\phi_1 = \phi$ y $\phi_2 = 0$, esto es:

$$\phi_1 - \phi_2 = \phi \quad \text{y} \quad \phi_1 + \phi_2 = \phi.$$

19. Encontrar la interferencia de dos ondas armónicas Ψ_1 y Ψ_2 que se propagan en un medio elástico en la misma dirección y sentido, teniendo diferentes amplitudes $A_1 \neq A_2$ y diferentes fases $\phi_1 \neq \phi_2$, con todos sus demás parámetros iguales, es decir: $c_1 = c_2 = c$, $k_1 = k_2 = k$ y $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Mostrar que en este caso nunca podrá tenerse interferencia totalmente destructiva.

Sean las ecuaciones de estas dos ondas:

$$\Psi_1 = A_1 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_1) \quad \text{y} \quad \Psi_2 = A_2 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_2)$$

sumándolas:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A_1 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_1) + A_2 \text{ sen}(kx - \omega t - \phi_2)$$

desarrollando el seno diferencia de dos ángulos:

$$\alpha = kx - \omega t \quad \text{y} \quad \beta = \phi_1 \quad \text{o} \quad \phi_2, \text{ se tiene:}$$

$$\Psi = A_1 [\text{sen}(kx - \omega t) \cos \phi_1 - \cos(kx - \omega t) \text{ sen} \phi_1] + A_2 [\text{sen}(kx - \omega t) \cos \phi_2 - \cos(kx - \omega t) \text{ sen} \phi_2]$$

$$\Psi = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \text{ sen}(kx - \omega t) - (A_1 \text{ sen} \phi_1 + A_2 \text{ sen} \phi_2) \cos(kx - \omega t)$$

Escribiendo las cantidades entre paréntesis por:

$$a = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad \text{y} \quad b = A_1 \text{ sen} \phi_1 + A_2 \text{ sen} \phi_2$$

queda:

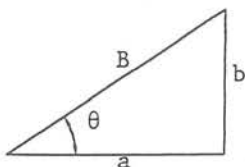
$$\Psi = a \text{ sen}(kx - \omega t) - b \cos(kx - \omega t)$$

Y, definiendo dos nuevas constantes B y θ por intermedio de las siguientes relaciones:

$$B \cos \theta = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 = a$$

$$B \text{ sen} \theta = A_1 \text{ sen} \phi_1 + A_2 \text{ sen} \phi_2 = b$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver, más fácil, geométricamente mediante un triángulo rectángulo, esto es:



$$B = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)^2 + (A_1 \text{ sen} \phi_1 + A_2 \text{ sen} \phi_2)^2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a} = \frac{A_1 \text{ sen} \phi_1 + A_2 \text{ sen} \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Desarrollando se obtiene:

$$B = \sqrt{A_1^2 (\sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_1) + A_2^2 (\sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_2) + 2A_1 A_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)}$$

$$B = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$y, \theta = \arctan \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Luego, retomando la ecuación del movimiento, con estas constantes queda:

$$\psi = B \cos \theta \cos (kx - \omega t) + B \sin \theta \sin (kx - \omega t)$$

$$\psi = B [\cos (kx - \omega t) \cos \theta + \sin (kx - \omega t) \sin \theta]$$

Entre corchetes tenemos el desarrollo del coseno diferencia de dos ángulos $(kx - \omega t)$ y θ , obteniéndose finalmente:

$$\psi = B \cos (kx - \omega t - \theta)$$

Resultado que nos describe un movimiento ondulatorio armónico con amplitud B y fase θ , valores arriba encontrados.

La interferencia totalmente destructiva se dará para $B = 0$, luego:

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

Como: $A_1^2 + A_2^2 > 0$, se debe tener que: $2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) < 0$, esto implica que: $\cos(\phi_1 - \phi_2) < 0$.

Si, $\cos(\phi_1 - \phi_2) = -1$, esto es: $\phi_1 - \phi_2 = \pm n\pi$ para $n=1,3,5,\dots$, se tendrá que:

$$A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 = 0 \Rightarrow (A_1 - A_2)^2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

Por lo tanto, nunca podrá tenerse interferencia totalmente destructiva si $A_1 \neq A_2$.

Caso contrario se tendrá el problema anterior con $A_1 = A_2 = A$ y la interferencia totalmente destructiva se presenta para $\phi_1 - \phi_2 = \pm n\pi$, con: $n = 1, 3, 5, \dots$

20. En un punto del espacio, digamos $x = 0$, pasan dos ondas de presión:

$$p_1 = P \cos \omega_1 t \quad \text{y} \quad p_2 = P \cos \omega_2 t.$$

Encontrar analíticamente la interferencia resultante en el tiempo y graficar el resultado. Si las ondas son sonoras, ¿cómo se denomina al fenómeno que se detecta auditivamente?

Analizar el caso particular de dos ondas iguales, es decir para $\omega_1 = \omega_2$, encontrar la interferencia, graficar y ¿se detecta el mismo fenómeno anterior?

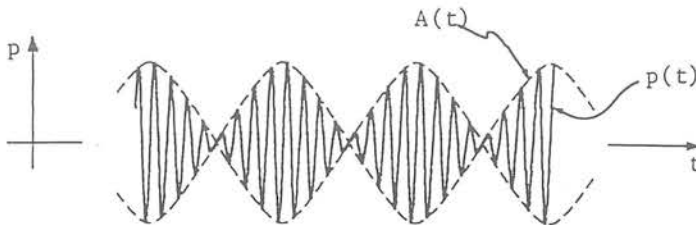
Sumando las dos ondas en el punto $x = 0$, se tiene:

$$p = p_1 + p_2 = P (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

y utilizando la ecuación trigonométrica de la suma de los cosenos de dos ángulos, se obtiene la interferencia resultante:

$$p = 2P \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t \cdot \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t = A(t) \cdot \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t$$

Gráfica:

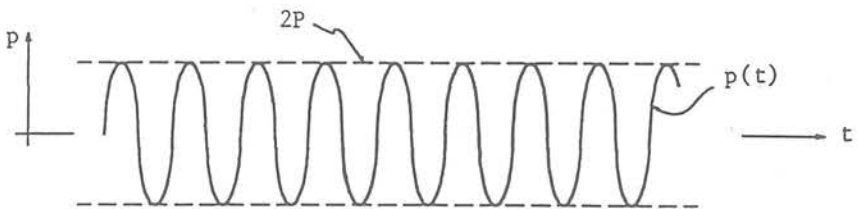


Se presenta el fenómeno de "Pulsaciones".

Si: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, la interferencia resultante es:

$$p = 2P \cos \omega t$$

Gráfica:



No se presenta el fenómeno de pulsaciones. Se escucha un tono de frecuencia $\nu = 2\pi\omega$ con amplitud doble $2P$.

21. Una cuerda vibra de acuerdo a la ecuación dada en el S.I. de unidades:

$$y = \frac{2}{25} \text{ sen } (4\pi x) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right)$$

Determinar la amplitud y velocidad de propagación de las ondas componentes cuya superposición puede dar lugar a esta vibración.

Además, para una partícula de la cuerda en la posición $x = \frac{3}{8}$ m encontrar su velocidad para $t = \frac{1}{2}$ s.

Conforme hemos visto en el ítem 11.8, la ecuación dada corresponde a una onda estacionaria de la forma:

$$y = 2A \text{ sen } kx \cdot \cos \omega t$$

donde: $A = \frac{1}{25}$ m, $k = 4\pi \text{ rad/m}$, $\omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$ y las ondas componentes que la conforman serán:

$$y_1 = A \text{ sen}(kx - \omega t) \quad \rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{25} \text{ sen}(4\pi x - \frac{\pi}{3} t)$$

$$y_2 = A \text{ sen}(kx + \omega t) \quad y_2 = \frac{1}{25} \text{ sen}(4\pi x + \frac{\pi}{3} t)$$

Luego, la amplitud es: $A = \frac{1}{25}$ m y la velocidad de propagación:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi/3}{4\pi} = \frac{1}{12} \text{ m/s}$$

Derivando y con respecto a t , esto es:

$$\dot{y} = -8 \frac{\pi}{3} \text{ sen } (4\pi x) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} t \right)$$

y reemplazando: $x = \frac{3}{8}$ m y $t = \frac{1}{2}$ s, se obtendrá el valor de la velocidad de la partícula:

$$v = -8 \frac{\pi}{3} \text{ sen}\left(4\pi \frac{3}{8}\right) \text{ sen} \left(\frac{\pi}{3} \frac{1}{2} \right) = -\frac{8}{3} \pi \text{ sen}\left(\frac{3}{2} \pi\right) \text{ sen} \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$v = -\frac{8}{3} \pi (-1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \pi \text{ m/s.}$$

22. La frecuencia fundamental de vibración transversal de un alambre de acero flexible es de 50 cps. La longitud del alambre es 4m y su masa 16 gr.

Determinar la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas transversales en el alambre. ¿Cuál es la fuerza que tensiona al alambre?

Se conoce:

- Frecuencia $\Rightarrow v = 50 \text{ c/s (Hz)}$
- Masa $\Rightarrow m = 16 \text{ gr} = 16 \times 10^{-3} \text{ kg}$
- Longitud $\Rightarrow \ell = 4\text{m}$

Podemos calcular la masa por unidad de longitud

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{16}{4} \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

Como se tiene una onda estacionaria que vibra a la frecuencia fundamental, la longitud de onda correspondiente será:



$$\ell = n \frac{\lambda}{2}, \text{ para la fundamental } n=1 \text{ se tiene:}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \ell = 4\text{m}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \ell = 4\text{m} \Rightarrow \lambda = 8\text{m}$$

Luego, la velocidad de propagación de las ondas es:

$$c = \lambda v = 8 \times 50 = 400 \text{ m/s}$$

Finalmente, la tensión en el alambre es:

$$c = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = c^2 \mu = (400)^2 \times 4 \times 10^{-3} = 640\text{N}$$

23. Se tiene una cuerda estirada horizontalmente bajo una tensión de 4N, con una masa por unidad de longitud de 0.01 kg/ml.

En uno de sus extremos actúa un vibrador que tiene un desplazamiento transversal dado en metros por la ecuación: $y = 0.1 \text{ sen } 6t$.

Encontrar la velocidad de propagación, frecuencia y longitud de onda. Si el otro extremo de la cuerda esta fijo, ¿cuál es la ecuación del movimiento resultante? y ¿cuál la ecuación del movimiento, función del tiempo, para un punto a 3m del vibrador?

La velocidad de propagación será:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{0.01}} = \sqrt{400} = 20 \text{ m/s}$$

De la ecuación dada para el movimiento del vibrador su frecuencia angular es: $\omega = 6 \text{ rad/s}$ y la frecuencia de excitación será:

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \text{ c.p.s}$$

La onda se propaga con esta frecuencia, luego:

$$v = \frac{3}{\pi} \text{ Hz}$$

Como: $c = \lambda v$, la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{20}{3/\pi} = 20\pi/3 \text{ m}$$

El movimiento resultante, por superposición, es una onda estacionaria dada por:

$$y = 2A \text{ sen } kx \text{ cos } \omega t$$

donde: $A = 0.1\text{m}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20\pi/3} = \frac{3}{10} = 0.3 \text{ rad/m}$ y $\omega = 6 \text{ rad/s}$

luego: $y = 0.2 \text{ sen}(0.3 x) \cdot \text{cos}(6t)$

Para el punto $x = 3\text{m}$, se tendrá: $y = 0.2 \text{ sen } 0.9 \text{ cos } 6t$.

$$0.9 \text{ rad} \Rightarrow 0.9 \times \frac{180^\circ}{3.142} = 51.56^\circ = 51^\circ 34'$$

$\text{sen}(0.9) = \text{sen}(51^\circ 34') = 0.7833$

reemplazando: $y = 0.2 \times 0.7833 \text{ cos } 6t$.

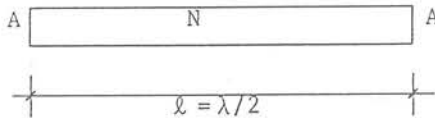
$$y = 0.1567 \text{ cos } 6t.$$

24. Se tiene una barra de cristal de cuarzo de 20cm de longitud, densidad $\rho = 2650 \text{ kg/m}^3$ y módulo de Young $Y = 7.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Si se excita la barra produciendo ondas longitudinales estableciéndose el modo fundamental de vibración estacionaria con los dos extremos libres, encontrar la frecuencia fundamental. ¿Cómo varía si se reduce a la mitad la longitud de la barra?

Primero encontremos la velocidad de propagación de las ondas en el medio:

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.9 \times 10^{10}}{2650}} = 5460 \text{ m/s}$$

Con ambos extremos libres, el modo fundamental se presenta para:



luego, la longitud de onda es:

$$\lambda = 2l = 0.4\text{m}$$

y la frecuencia fundamental será:

$$c = \lambda v \Rightarrow v = \frac{c}{\lambda} = \frac{5460}{0.4} = 13,650 \text{ Hz}$$

Si la longitud de la barra se reduce a la mitad, la frecuencia se duplicará, esta será de 27,300 H.

25. Una cuerda de 1m de longitud fija en un extremo a la pared y tensa en posición horizontal, si se somete en el extremo opuesto a la pared a una vibración de frecuencia 100Hz y amplitud 5cm, se genera una onda senoidal con longitud de onda de 2 cm.
- a) Encontrar la ecuación de la onda generada, ¿cuál es su velocidad de propagación en la cuerda? y ¿cuál es la ecuación de la onda reflejada en el extremo fijo?
- b) Encontrar la interferencia de ambas ondas y analizar el movimiento resultante que se presenta en la cuerda, ¿cuántos antinodos se formarán?. Si se quiere obtener el modo fundamental de vibración, manteniendo las mismas condiciones de la cuerda, ¿cuál será la frecuencia fundamental correspondiente?
- c) Variando la condición en la cuerda cuadruplicando la tensión, bajo la misma frecuencia de 100 Hz, ¿si se forma onda estacionaria en dicha cuerda, de 1m, ¿cuántos antinodos se presentarán?
- d) Si solo se duplica la tensión, manteniendo la misma frecuencia de excitación de 100Hz, ¿para cuáles longitudes de cuerda se formarían los diferentes modo de onda estacionaria?

a) Se conoce: $\ell = 1\text{m} = 100\text{cm}$, $\nu = 100\text{Hz}$, $A = 5\text{cm}$ y $\lambda = 20\text{cm}$.

Para onda senoidal: $y = A \text{ sen } (kx - \omega t)$

Se tiene: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ cm}^{-1}$ y $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 100 = 200\pi \text{ rad/s}$

luego, la ecuación es: $y_1 = 5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{10} x - 200\pi t \right)$

con velocidad de propagación: $c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = 20 \times 100 = 2000 \text{ cm/s}$

y, la onda reflejada será: $y_2 = 5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{10} x + 200\pi t \right)$

b) Interferencia: $y = y_1 + y_2 = 10 \cos(200\pi t) \text{ sen} \left(\frac{\pi}{10} x \right)$

Se tiene una onda estacionaria.

Número de antinodos: $n \frac{\lambda}{2} = \ell \Rightarrow n = \frac{\ell}{\lambda/2} = \frac{100}{20/2} = 10$

Es decir, 10 antinodos, con 11 nodos incluyendo los extremos.

Modo fundamental, para $n = 1$, la longitud de onda será:

$$\frac{\lambda_1}{2} = \ell \Rightarrow \lambda_1 = 2 \times 100 = 200\text{cm}$$

y la frecuencia: $\lambda_1 \nu_1 = c \Rightarrow \frac{c}{\lambda_1} = \frac{2000}{200} = 10 \text{ Hz.}$

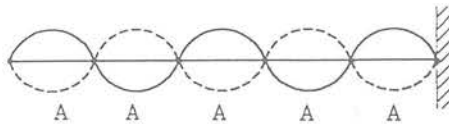
c) Si se cuadruplica la tensión, la velocidad de propagación será:

$c' = \sqrt{\frac{4T}{\mu}} = 2 \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2c = 2 \times 2000 = 4000 \text{ cm/s}$ y la longitud de onda, para la frecuencia de 100Hz, será:

$$\lambda' = \frac{c'}{\nu} = \frac{4000}{100} = 40 \text{ cm}$$

El número de antinodos, en este caso, serán: $n \frac{\lambda'}{2} = \ell \Rightarrow n = \frac{\ell}{\lambda'/2} = \frac{100}{40/2} = 5$

Se tiene 5 antinodos, con 6 nodos incluyendo ambos extremos.



d) Si se duplica la tensión, la velocidad de propagación es:

$$c'' = \sqrt{\frac{2T}{\mu}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{2} c = \sqrt{2} \times 2000 \text{ cm/s}$$

y la longitud de onda, para $\nu = 100 \text{ Hz}$, será:

$$\lambda'' = \frac{c''}{\nu} = \frac{\sqrt{2} \times 2000}{100} = 20\sqrt{2} \text{ cm.}$$

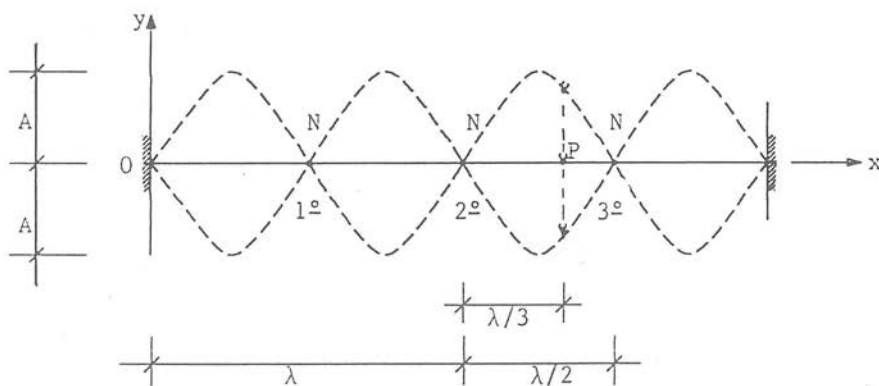
La longitud de la cuerda, para onda estacionaria, deberá ser:

$$\ell = n \frac{\lambda''}{2} = n \frac{20\sqrt{2}}{2} = n 10\sqrt{2} \text{ cm, para } n = 1, 2, 3, \dots$$

26. Se tiene una onda estacionaria en una cuerda, descrita por la ecuación:

$$y = A \cos k x \operatorname{sen} \omega t$$

Una pulga de masa m se encuentra parada sobre la cuerda entre dos nodos consecutivos intermedios, sin contar los extremos, entre el 2º y el 3º y en un punto ubicado a una distancia $\lambda/3$ del primero de ellos. ¿Cuál es la fuerza con la cual debe sujetarse la pulga para que no salga disparada de la cuerda?



Como la pulga se encuentra entre el 2º y el 3º nodo intermedio, por lo menos debemos tener 3 nodos intermedios y, por lo tanto, el nodo de vibración deberá corresponder para: $n \geq 4$. En la figura se ha dibujado para $n = 4$. La distancia de la pulga al origen de coordenadas es:

$$x_p = \lambda + \frac{\lambda}{3} = \frac{4}{3} \lambda$$

Luego, la ecuación del movimiento correspondiente a éste punto P, reemplazando el valor de x_p en la ecuación dada, será:

$$y = A \cos k \left(\lambda + \frac{\lambda}{3} \right) \operatorname{sen} \omega t$$

Como: $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k\lambda = 2\pi$, reemplazando:

$$y = A \cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \omega t = A \cos \frac{2\pi}{3} \operatorname{sen} \omega t = A \left(-\frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \omega t$$

y finalmente queda la ecuación:

$$y = -\frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t$$

Derivando podemos obtener la velocidad y aceleración transversal a la cuerda en ese punto P, esto es:

$$\dot{y} = -\frac{A}{2} \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = \frac{A}{2} \omega^2 \sin \omega t$$

De acuerdo a la Ley de Newton, la fuerza F sobre una masa m con esta aceleración es:

$$F = m \ddot{y} = \frac{1}{2} A m \omega^2 \sin \omega t$$

Teniendo como máximo valor la amplitud de la función:

$$F_0 = \frac{1}{2} A m \omega^2$$

Por lo tanto, la pulga deberá sujetar con una fuerza por lo menos igual en este valor, es decir:

$$F_P \geq \frac{1}{2} A m \omega^2$$

27. Dos ondas longitudinales senoidales iguales que viajan en sentidos contrarios, están representadas por el desplazamiento longitudinal de las partículas alrededor de su posición de equilibrio:

$$y_1 = A \text{ sen}(kx - \omega t) \quad , \quad y_2 = A \text{ sen}(kx + \omega t)$$

Al interferir, se tiene una onda estacionaria, como se obtuvo en el ítem 11.8 :

$$y = 2A \cos \omega t \text{ sen } kx$$

Determinar, en este movimiento, la velocidad de las partículas y encontrar la correspondiente onda estacionaria de presión sonora. Luego, para un instante particular dado T, graficar el desplazamiento y, la velocidad v y la presión p. Comprobar que en los puntos del espacio donde ocurren nodos de desplazamiento y velocidad, se tienen antinodos de presión.

La velocidad de las partículas en el movimiento resultante estacionario, será:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = - 2A \omega \text{ sen } \omega t \text{ sen } kx$$

Como vimos en el ítem 11.3, la presión está relacionada con la compresión volumétrica y la deformación por:

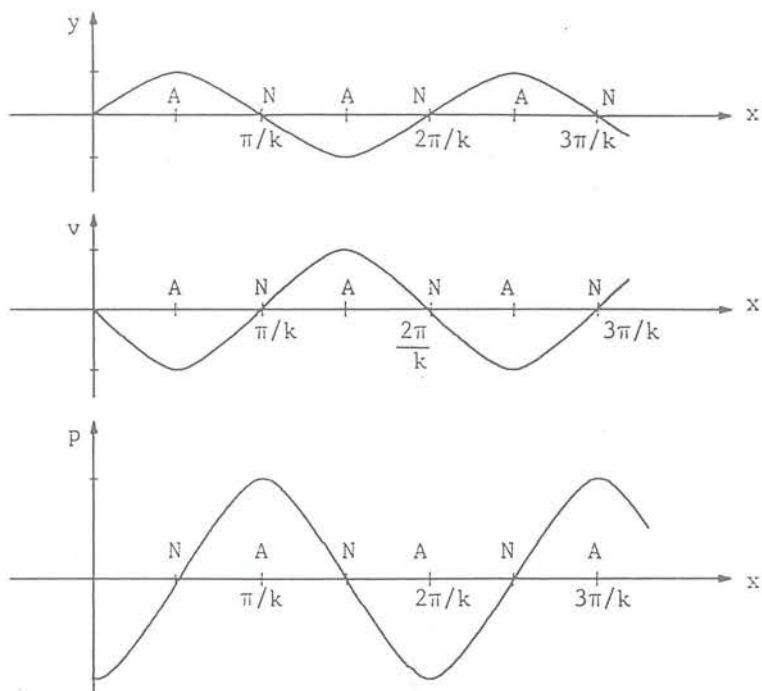
$$p = - B \frac{\partial y}{\partial x}$$

Luego, se tiene:

$$p = - 2 B A k \cos \omega t \cos kx$$

Los gráficos pedidos para un instante $t = T$, son:

(siguiente pág.)



Recomendación: Compare estos resultados con los obtenidos en el problema N° 14 para una onda viajera.

28. Una onda senoidal amortiguada dada por:

$$y_1 = A e^{-\beta t} \text{ sen } (kx - \omega t)$$

interfiere con otra igual pero que viaja en sentido contrario. Encontrar y analizar el movimiento resultante. Graficar:

a) y vs $\therefore t$, para : $x = \frac{\pi}{2k}$

b) y vs $\therefore x$, para : $t = \frac{2\pi}{\omega}$

Sumando ambas ondas (y_1 e y_2):

$$y_1 = A e^{-\beta t} \text{ sen } (kx - \omega t)$$

$$y_2 = A e^{-\beta t} \text{ sen } (kx + \omega t)$$

$$y = y_1 + y_2 = A e^{-\beta t} [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)]$$

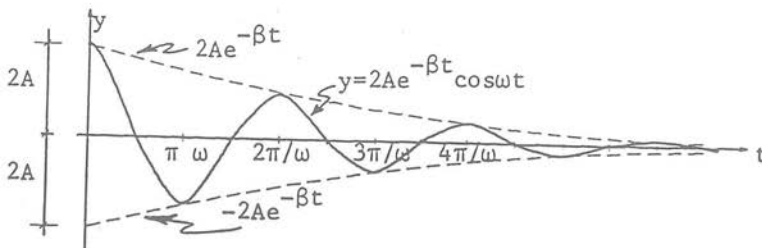
Desarrollando la suma de senos de dos ángulos:

$$y = 2A e^{-\beta t} \cos \omega t \text{ sen } kx$$

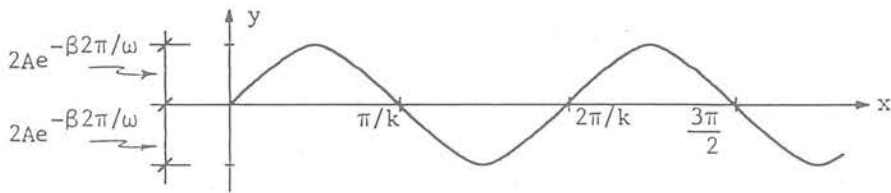
Se tiene un Movimiento Estacionario Amortiguado.

Gráficas pedidas:

a) Para: $x = \frac{\pi}{2k} \Rightarrow y = 2A e^{-\beta t} \cos \omega t$



b) Para $t = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow y = 2Ae^{-\beta 2\pi/\omega} \text{ sen } kx$



29. Encontrar la ecuación del movimiento de todos los puntos de una barra con un extremo fijo empotrado y el otro libre en voladizo, si al excitarla se forma una onda estacionaria longitudinal de frecuencia mínima y para $t = 0$ el desplazamiento del extremo libre es máximo positivo de valor A .



A horizontal bar of length L is shown with diagonal slashes at both ends. Below the bar, the equation $L = \frac{\lambda}{4}$ is written.

Si la frecuencia es mínima, la barra vibra en el modo fundamental y se tiene un antinodo en el extremo libre y un nodo en el empotrado, luego:

$$L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L \text{ y } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4L} = \frac{\pi}{2L}$$

Como la amplitud de la onda estacionaria es igual a A y de desplazamiento positivo para $t = 0$, la ecuación correspondiente será:

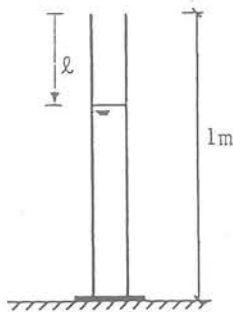
$$\Psi(x,t) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \cos \omega t$$

Comprobación, para $x = L$ y $t = 0$, se tiene

$$\Psi(L,0) = A$$

30. El nivel de agua en un tubo vertical de un metro de longitud puede variarse a voluntad. Un diapasón de 686 vibraciones por segundo se co-
loca sobre el extremo abierto del tubo. Al vibrar, ¿a qué niveles de
agua se presentará resonancia?

Considere que para una temperatura ambiente de 20°C la velocidad del
sonido en el aire es aproximadamente 343 m/s (ver tabla AI.1).



Como se tiene una columna de aire en un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro, se presentará la resonancia de un cuarto de longitud de onda a igual frecuencia que el diapasón, es decir, cuando:

$$v = \frac{n}{4\ell} c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

luego:

$$\ell = \frac{n}{4} \frac{c}{v}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

reemplazando los valores de c y v , se obtiene:

$$\ell = \frac{n}{4} \frac{343}{686} = \frac{n}{8}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pero, además, estamos limitados a que ℓ no pase de 1m, o sea, en este tubo se presentará resonancia para:

$$\ell = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} \text{ m}$$

$$\ell = 0.125, 0.375, 0.625, 0.875, 1 \text{ m}$$

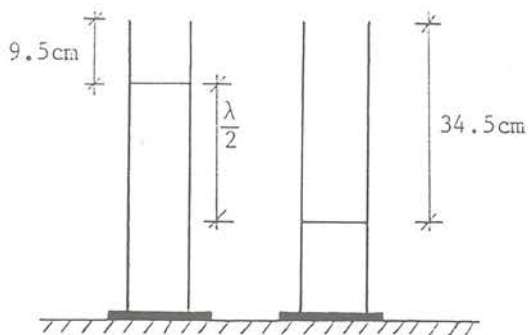
NOTA: Es importante advertir que en la práctica los valores medidos de ℓ son diferentes a los arriba encontrados porque para los extremos hay que tener en cuenta un factor de corrección.

Esta corrección de borde se debe a la expansión esférica de la onda acústica plana reflejada en el extremo abierto del tubo.

La longitud efectiva de la columna de aire resonante es igual a la longitud de aire existente más la corrección. Para encontrarla se debe proceder experimentalmente en cada caso, sin embargo, para tubos cilíndricos de diámetro d , se puede considerar aproximadamente $e=0.3d$. (ver también el problema siguiente N° 31).

31. Un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro por nivel de agua se emplea para encontrar, por resonancia, la frecuencia de un diapason. Si la primera resonancia se presenta cuando la longitud de la columna de aire es 9.5cm y la segunda cuando es 34.5cm., ¿cuál es la frecuencia del diapason?. Además, determinar el factor de corrección de extremo para este tubo.

Nota: resolver primero el problema anterior N° 30.



Las longitudes de la columna de aire más el factor de corrección de extremo es igual a $1/4 \lambda$ y $3/4 \lambda$ respectivamente para el 1° y 2° Modo. Y, la diferencia entre dos extremos es igual a $1/2 \lambda$. Luego, se tiene:

$$9.5 + e = \frac{\lambda}{4}$$

$$34.5 + e = \frac{3}{4} \lambda$$

1° Modo
 $\lambda/4$

2° Modo
 $3\lambda/4$

$$\text{Restando: } (34.5 + e) - (9.5 + e) = \frac{\lambda}{2}$$

$$34.5 - 9.5 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 25 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 50 \text{ cm} = 0.5\text{m}$$

$$\text{Como: } \lambda v = c \Rightarrow v = \frac{c}{\lambda} = \frac{343}{0.5} = 686 \text{ Hz}$$

Observe que para determinar v no es necesario conocer e . Sin embargo, conociendo λ podemos fácilmente determinar e utilizando cualquiera de los dos modos, es decir:

$$e = \frac{\lambda}{4} - 9.5 = \frac{50}{4} - 9.5 = 12.5 - 9.5 = 3.0 \text{ cm}$$

También es importante resaltar que si ignoramos el factor de corrección nos puede conducir a un error, si consideramos:

$$\frac{\lambda}{4} = 9.5 \Rightarrow \lambda = 38\text{cm} \text{ (Este valor no es correcto)}$$

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{343}{0.38} = 902.63 \text{ Hz (Esta no es la frecuencia del diapasón)}$$

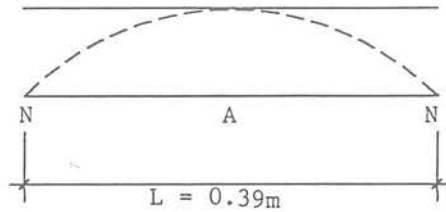
32. Se dispone de un diapasón de frecuencia $\nu = 440 \text{ Hz}$ y se quiere fabricar dos cajas que resuenen en sus modos fundamentales, una con ambos extremos abiertos y la otra con un extremo abierto y el otro cerrado. Determinar las longitudes de las dos cajas resonantes, e indicar gráficamente donde tienen los respectivos nodos y antinodos de presión. Considerar la velocidad del sonido en el aire; $c = 343 \text{ m/s}$.

La longitud λ de la onda es:

$$c = \lambda \nu \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{343}{440} = 0.78 \text{ m}$$

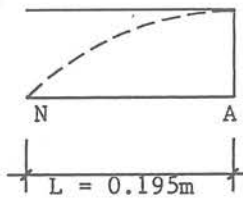
- . Para el tubo con ambos extremos abiertos se presenta resonancia de media longitud de onda. Luego, para el modo fundamental $n = 1$, se tiene:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{0.78}{2} = 0.39 \text{ m}$$



- . Para el tubo con un extremo abierto y el otro cerrado se presenta resonancia de un cuarto de longitud de onda. Luego, para el modo fundamental $n = 1$, se tiene:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{0.78}{4} = 0.195 \text{ m}$$



33. Un tubo de longitud ℓ con ambos extremos abiertos esta resonando a la frecuencia ν en un modo con $n=3$.

Esta perturbación excita a otro tubo de longitud $L = 1.5\ell$ que tiene un extremo abierto y el otro cerrado.

Determinar si el segundo tubo también resonará y para cual modo.

Hemos visto que para un tubo con ambos extremos abiertos se presenta la resonancia de media longitud de onda. Luego, para el primer tubo esto es:

$$\ell = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

o bien,

$$\ell = n \frac{c}{2\nu_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para $n = 3$ y $\nu_3 = \nu$, queda:

$$\ell = 3 \frac{c}{2\nu}$$

Para un tubo con un extremo abierto y el otro cerrado se presenta la resonancia de un cuarto de longitud de onda. Luego, para el segundo tubo esto es:

$$L = m \frac{\lambda_m}{4}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

o bien,

$$L = m \frac{c}{4\nu_m}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Para $L = 1.5\ell = \frac{3}{2}\ell$ y $\nu_m = \nu$, queda:

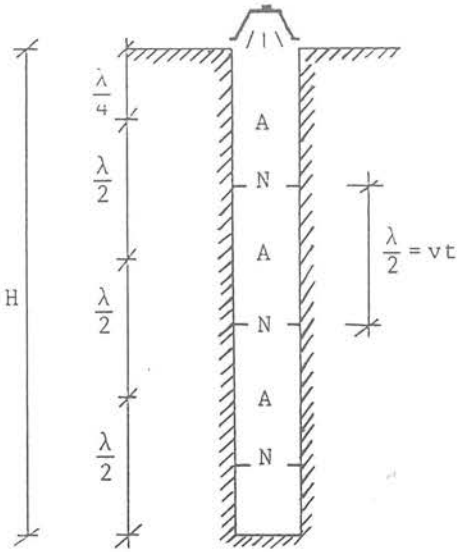
$$\frac{3}{2}\ell = m \frac{c}{4\nu} \Rightarrow \ell = m \frac{c}{6\nu}$$

igualando las dos expresiones obtenidas de ℓ , como la velocidad de propagación en el aire c es la misma, se tiene:

$$3 \frac{c}{2\nu} = m \frac{c}{6\nu} \Rightarrow m = 9$$

Al obtenerse que m es un número entero e impar, el segundo tubo también resonará, justamente en el modo correspondiente a $m = 9$.

34. Al colocar una fuente sonora en la parte superior de un pozo vacío se produce resonancia y una persona que baja con velocidad v deja de escuchar sonido cada t segundos. Si al descender encuentra m puntos donde no escucha sonido, ¿cuál es la frecuencia del parlante? y ¿cuál la profundidad del pozo?



La distancia que recorre entre dos nodos es: $d = vt$ y la separación entre dos nodos consecutivos en relación a la longitud de onda es:

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

luego, igualando, se tiene que:

$$\frac{\lambda}{2} = vt \Rightarrow \lambda = 2vt$$

además, como: $\lambda v = c$, la frecuencia será:

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2vt}$$

Esta es la frecuencia del parlante.

La profundidad del pozo, como detecta m nodos al descender, será:

$$H = m \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

reemplazando el valor de λ , arriba encontrado, se obtiene:

$$H = vt \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

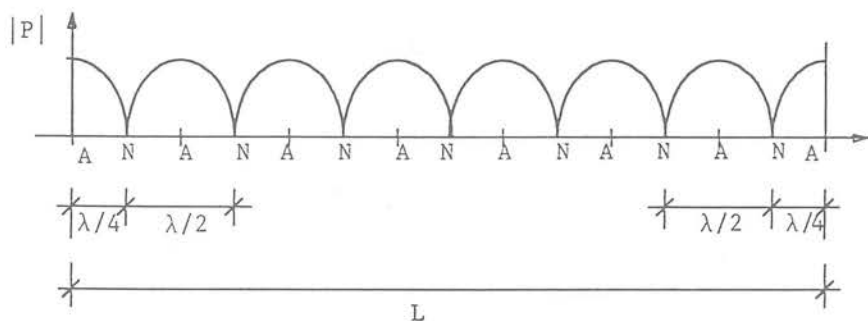
35. En un corredor de longitud L y cerrado en ambos extremos, mediante un parlante se exitó acústicamente produciéndose un modo de vibración a la frecuencia de 120 Hz y se presentaron, a parte de los extremos, 6 antinodos intermedios de presión sonora.

No disponiéndose de cinta métrica, con estos datos acústicos determinar la longitud L del corredor. Se conoce la velocidad del sonido en el aire: $c = 343$ m/s.

La longitud de onda es:

$$c = \lambda v \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v} = \frac{343}{120} = 2.858 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 1.429 \text{ m}$$

Como se han detectado 6 antinodos intermedios y en los extremos, por tener cerrado el corredor ambos extremos, la distribución de presión sonora $|P|$ en la longitud L , será:

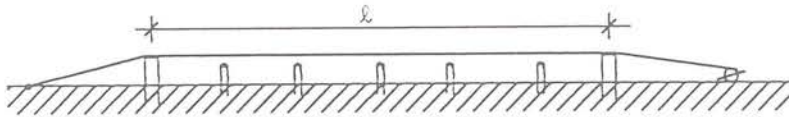


En total se tienen 8 antinodos y 7 nodos, luego el modo que se presenta es para $n = 7$ y por lo tanto la longitud del corredor será:

$$L = n \frac{\lambda}{2} = 7 \times 1.429 = 10.00 \text{ m}$$

36. En la figura se muestra una cuerda de masa μ por metro lineal y longitud ℓ . Determinar la tensión T de la cuerda para que vibre en el modo fundamental con una nota particular de frecuencia ν . Y, encontrar la ecuación de la onda estacionaria y de las dos ondas que la forman.

Además, si se trata de una cuerda de guitarra, ¿cuál debe ser la separación entre "trastes" para que vibre con frecuencias que están relacionadas linealmente, en forma sucesiva, por un número "a"? Esto es, para frecuencias: $\nu_1 = a\nu$, $\nu_2 = a\nu_1$, $\nu_3 = a\nu_2, \dots, \nu_n = a\nu_{n-1}$.



Para el modo fundamental se tiene que:

$$\ell = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\ell$$

y como: $c = \lambda\nu \Rightarrow c = 2\ell\nu$.

además, $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ luego, la tensión en la cuerda será:

$$2\ell\nu = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = 4\ell^2\nu^2\mu$$

La ecuación de onda estacionaria es de la forma:

$$y = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t$$

Como: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}$ y $\omega = 2\pi\nu$, queda:

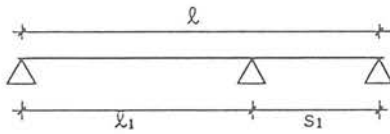
$$y = 2A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} x \right) \cdot \cos (2\pi\nu t)$$

y las ondas que la forman serán:

$$y_1 = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} x - 2\pi\nu t \right) \quad \text{e} \quad y_2 = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} x + 2\pi\nu t \right)$$

Determinación de la separación entre trastes.

- Para v_1 :



Para v encontramos que: $c = 2lv$.

Puesto que T y μ no cambian, es decir a igual c , en forma similar podemos encontrar para v_1 que:

$$c = 2l_1 v_1.$$

igualando, se tienen: $2l_1 v_1 = 2lv \Rightarrow l_1 = l \frac{v}{v_1}$

con la condición: $v_1 = 2v$, queda: $l_1 = l \frac{v}{2v} = \frac{l}{2}$

Luego, la separación s_1 será: $s_1 = l - l_1 = l - \frac{l}{2} = l(1 - \frac{1}{2}) = \frac{l}{2} (2 - 1)$

- Para v_2 :

En forma similar se tiene la relación:

$$2l_2 v_2 = 2l_1 v_1 \Rightarrow l_2 = l_1 \frac{v_1}{v_2}$$

con la condición : $v_2 = av_1$, queda: $l_2 = l_1 \frac{v_1}{av_1} = \frac{l_1}{a}$

Luego , la separación s_2 será:

$$s_2 = l_1 - l_2 = l_1 - \frac{l_1}{a} = \frac{l_1}{a} (a - 1)$$

y como: $l_1 = \frac{l}{2}$, se obtiene que: $s_2 = \frac{l}{2a} (a - 1)$

- Procediendo así sucesivamente se obtendrá:

$$s_3 = \frac{l}{2a^2} (a - 1), \dots, s_n = \frac{l}{2a^n} (a - 1)$$

37. Un hilo de aluminio de longitud $\ell_1 = 60\text{cm}$ y de sección transversal de 10^{-2}cm^2 , está unido a un hilo de acero de la misma sección pero de longitud $\ell_2 = 88.8\text{ cm}$. A uno de los extremos del hilo compuesto se le fija a una pared y al otro extremo libre se le tira con una fuerza de 100N .

Mediante una fuente externa de frecuencia variable se producen en el hilo ondas transversales. Encontrar la frecuencia más baja para la cual se forman ondas estacionarias de modo tal que el punto de unión de los dos hilos sea un nodo.

Sabemos que la frecuencia para ondas estacionarias en una cuerda, con nodos en ambos extremos, es:

$$v = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Luego, como el punto de unión es un nodo y la tensión T es la misma, para cada hilo se tiene:

- aluminio

$$v = \frac{n_1}{2\ell_1} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

- acero

$$v = \frac{n_2}{2\ell_2} \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

e igualando queda:

$$\frac{n_1}{2\ell_1} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{n_2}{2\ell_2} \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{\ell_1 \sqrt{\mu_1}} = \frac{n_2}{\ell_2 \sqrt{\mu_2}}$$

La masa μ por unidad de longitud, en función de la densidad ρ y la sección s , es:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{\rho \ell s}{\ell} = \rho s$$

y reemplazando en la igualdad obtenida, se tiene:

$$\frac{n_1}{\ell_1 \sqrt{\rho_1}} = \frac{n_2}{\ell_2 \sqrt{\rho_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\ell_1 \sqrt{\rho_1}}{\ell_2 \sqrt{\rho_2}} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Las longitudes son conocidas y las densidades las obtenemos de la tabla A.I.3.

- aluminio

- acero

$$l_1 = 60 \text{ cm} = 0.6\text{m}$$

$$l_2 = 88.8\text{cm} = 0.888\text{m}$$

$$\rho_1 = 2700\text{kg/m}^3 = 2.7\text{gr/cm}^3$$

$$\rho_2 = 7700\text{kg/m}^3 = 7.7\text{gr/cm}^3$$

reemplazando estos valores se obtiene que:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{60}{88.8} \sqrt{\frac{27}{77}} = 0.4$$

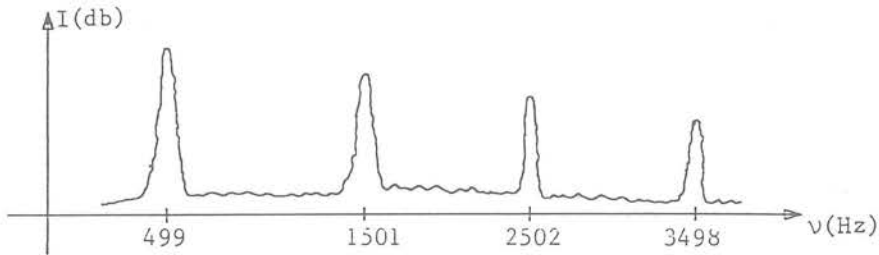
Como se pide para la frecuencia más baja, tenemos que buscar los menores valores de n_1 y n_2 cuyo cociente de justamente 0.4. Esto es:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 5 \end{cases}$$

Luego, para encontrar la menor frecuencia que produce nodo en la unión, reemplazando en cualquiera de las dos expresiones, aluminio o acero, se obtiene:

$$v = \frac{n_1}{2l_1} \sqrt{\frac{T}{\rho_{1S}}} = \frac{2}{2 \times 0.6} \sqrt{\frac{100}{2700 \times 10^{-6}}} = 320.75 \text{ Hz}$$

38. Al efectuar un análisis espectral de frecuencias en las ondas estacionarias producidas en la columna de aire al interior de un cierto tubo se obtiene la siguiente curva:



- Determinar si el tubo tiene: ambos extremos abiertos, ambos extremos cerrados o un extremo abierto y el otro cerrado.
- Si la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s, encontrar la longitud del tubo.

. Para ambos extremos abiertos o ambos cerrados se tiene que:

$$\frac{v_n}{n} = \frac{c}{2\ell}, \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

por lo tanto:

$$\frac{v_n}{v_1} = 1, 2, 3, 4, \dots$$

. Para un extremo abierto y el otro cerrado se tiene que:

$$\frac{v_n}{n} = \frac{c}{4\ell}, \text{ para } n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Por lo tanto:

$$\frac{v_n}{v_1} = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Luego, tomando las frecuencias del espectro y dividiendolas entre la primera $\nu_1 = 499$ Hz, se obtiene:

$$\frac{499}{499} = 1$$

$$\frac{1501}{499} = 3.008 \approx 3$$

$$\frac{2502}{499} = 5.014 \approx 5$$

$$\frac{3498}{499} = 7.010 \approx 7$$

Por lo tanto, como: $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ el tubo es semiabierto, es decir, un extremo abierto y el otro cerrado.

Para calcular la longitud del tubo, tomemos $n = 1$:

$$\nu_1 = \frac{c}{4l} \Rightarrow l = \frac{c}{4\nu_1}$$

reemplazando valores se obtiene:

$$l \approx \frac{343}{4 \times 499} = 0.172\text{m} = 17.2\text{cm}$$

39. La frecuencia del pito de una locomotora es de 500 Hz.

Determinar la frecuencia del sonido escuchado por una persona en la estación si el tren se está moviendo con una velocidad de 72 km/h,

a) acercándose y b) alejándose de la estación.

Considerar como velocidad del sonido: $c = 343$ m/s.

La velocidad de la fuente es:

$$v_f = 72 \text{ km/h} \div 3.6 = 20 \text{ m/s}$$

a) Cuando el tren se acerca:

$$v^1 = v \left(\frac{1}{1 - v_f/c} \right) = v \left(\frac{c}{c - v_f} \right) = 500 \frac{343}{343 - 20} = 530.96 \text{ Hz.}$$

La frecuencia aumenta $v^1 > v$.

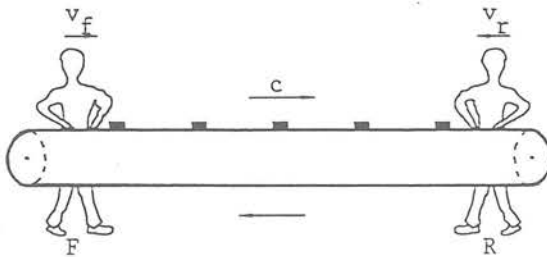
b) Cuando el tren se aleja:

$$v^1 = v \left(\frac{1}{1 + v_f/c} \right) = v \left(\frac{c}{c + v_f} \right) = 500 \frac{343}{343 + 20} = 472.45 \text{ Hz.}$$

La frecuencia disminuye $v^1 < v$.

40. Una cinta transportadora de paquetes se mueve a velocidad constante de 330 metros por minuto. En uno de los extremos se encuentra de pie una persona, Felix, colocando paquetes sobre la cinta a razón de 15 paquetes por minuto y en el otro extremo, Ramón, recibe los paquetes. Encontrar la frecuencia de recepción de paquetes cuando uno de ellos camina con una velocidad de 30 metros por minuto paralelamente a la cinta.

La situación descrita es una similitud de lo que acontece en el efecto Doppler.



Analicemos los diferentes casos:

- Cuando ambos están quietos.

Los paquetes se colocan con frecuencias $v = 15\text{p/min.}$

Los paquetes viajan con una velocidad $c = 330\text{m/min}$ y separados entre ellos una distancia:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{330}{15} = 22\text{m}$$

y la frecuencia de recepción también es $v = 15\text{ p/min.}$

- Felix camina y Ramón permanece en reposo.

si se acerca: $v^1 = v \left(\frac{c}{c - v_f} \right) = 15 \left(\frac{330}{330 - 30} \right) = 15 \left(\frac{33}{30} \right) = 16.50\text{p/min.}$

si se aleja : $v^1 = v \left(\frac{c}{c + v_f} \right) = 15 \left(\frac{330}{330 + 30} \right) = 15 \left(\frac{33}{36} \right) = 13.75\text{p/min.}$

. Ramón camina y Felix permanece en reposo:

$$\text{si se acerca: } v^1 = v \left(\frac{c+v_r}{c} \right) = 15 \left(\frac{330+30}{330} \right) = 15 \left(\frac{36}{33} \right) = 16.36 \text{ p/min.}$$

$$\text{si se aleja : } v^1 = v \left(\frac{c-v_r}{c} \right) = 15 \left(\frac{330-30}{330} \right) = 15 \left(\frac{30}{33} \right) = 13.64 \text{ p/min.}$$

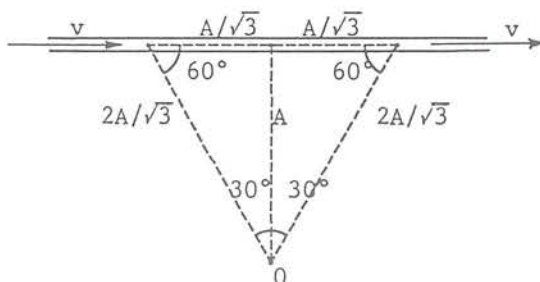
. Cuando ambos caminan:

$$\text{acercándose: } v^1 = v \left(\frac{c+v_r}{c-v_f} \right) = 15 \left(\frac{330+30}{330-30} \right) = 15 \left(\frac{36}{30} \right) = 18 \text{ p/min.}$$

$$\text{alejándose : } v^1 = v \left(\frac{c-v_r}{c+v_f} \right) = 15 \left(\frac{330-30}{330+30} \right) = 15 \left(\frac{30}{36} \right) = 12.5 \text{ p/min.}$$

41. Una persona se encuentra perpendicularmente a una distancia A de una línea férrea, por ésta línea viene un tren a velocidad constante v y tocando una sirena de frecuencia ν . Determinar la frecuencia que escucha la persona en los siguientes casos, en los instantes cuando:
- El tren está acercándose y se encuentra en un punto distante $2A/\sqrt{3}$ de él.
 - El tren se encuentra justo frente a él.
 - El tren se está alejando y se encuentra en un punto distante $2A/\sqrt{3}$ de él.
 - ¿Qué frecuencia escucha un niño que se asoma por la ventanilla de uno de los vagones del tren?

En el gráfico se muestra la situación geométrica planteada en el problema.



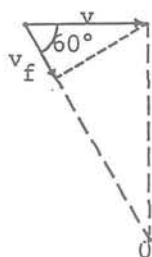
- a) La velocidad de la fuente va directamente hacia el observador, en el instante pedido, será:

$$v_f = v \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

Luego, la frecuencia que escucha, en ese instante, por el efecto Doppler es:

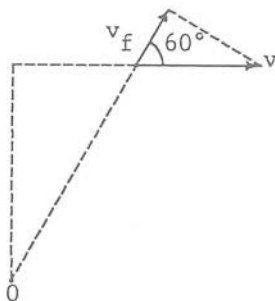
$$\nu = \nu^1 \left(\frac{1}{1 - v_f/c} \right) = \nu^1 \left(\frac{1}{1 - v/2c} \right)$$

En este caso $\nu > \nu^1$, la frecuencia aumenta.



b) En este caso, la velocidad de la fuente directamente hacia el observador es cero $v_f = 0$. Luego, la frecuencia que escucha la persona es la misma $v' = v$.

c) Este caso es similar al caso a), para alejándose y se tiene:



$$v_f = v \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

$$v' = v \left(\frac{1}{1+v_f/c} \right) = v \left(\frac{1}{1+v/2c} \right)$$

$v' < v \Rightarrow$ La frecuencia disminuye.

d) En el caso del niño, la velocidad de la fuente respecto a él es nula, por lo tanto, escucha la frecuencia v .

42. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz se aleja de un observador y se aproxima a una pared con una velocidad de 10m/s.
¿Cuál es la frecuencia que escucha el observador?
Considerar la velocidad de propagación del sonido: $c = 343 \text{ m/s}$.
-

El observador escucha dos frecuencias. La frecuencia directa de la fuente y la reflejada en la pared.

- . Como la fuente se aleja del observador en reposo, la frecuencia directa será menor que la emitida y escuchará:

$$v_d = v^1 \left(\frac{1}{1 + v_f/c} \right) = 1000 \left(\frac{1}{1 + \frac{10}{343}} \right) = 971.63 \text{ Hz.}$$

- . Con respecto a la pared la fuente se acerca hacia ella, luego, la frecuencia del sonido que le llega será menor que la emitida y su valor será:

$$v_r = v^1 \left(\frac{1}{1 - v_f/c} \right) = 1000 \left(\frac{1}{1 - \frac{10}{343}} \right) = 1030.03 \text{ Hz}$$

El sonido reflejado en la pared que le llega al observador tiene ésta frecuencia.

43. Un tren de ondas sonoras, de frecuencia ν y longitud de onda λ , se propaga horizontalmente hacia la derecha e incide, reflejándose en una superficie plana que se encuentra perpendicularmente a la dirección de propagación del tren de ondas y que se mueve hacia la izquierda con velocidad v_p .

Encontrar la frecuencia y longitud de onda de las ondas reflejadas. Para un observador que se encuentra en reposo a la izquierda de la superficie móvil y que recibe ambas ondas, la directa y la reflejada, ¿qué frecuencia percibe? y ¿cuál fenómeno se presenta?.

La pared se comporta primero como un receptor en movimiento acercándose hacia la fuente en reposo y la frecuencia que recibe, por efecto Doppler, es:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c + v_r}{c} \right), \text{ con: } v_r = v_p, \text{ se tiene:}$$

$$\nu' = \nu \left(\frac{c + v_p}{c} \right)$$

Luego la pared se convierte en un emisor en movimiento acercándose hacia un observador cualquiera O que asumimos en reposo y situado a la izquierda de la pared, y por efecto Doppler la frecuencia que recibirá será:

$$\nu'' = \nu' \left(\frac{c}{c - v_f} \right), \text{ con: } v_f = v_p, \text{ se tiene:}$$

$$\nu'' = \nu' \left(\frac{c}{c - v_p} \right)$$

Reemplazando la frecuencia ν' , queda:

$$\nu'' = \nu \left(\frac{c + v_p}{c} \right) \left(\frac{c}{c - v_p} \right)$$

$$\nu'' = \nu \left(\frac{c + v_p}{c - v_p} \right)$$

Como: $v\lambda = c$ y $v''\lambda'' = c$, la longitud de onda de la onda reflejada será:

$$\lambda'' = \frac{c}{v''} = \frac{v\lambda}{\frac{c+v}{c-v} \frac{p}{p}} = \lambda \left(\frac{c-v}{c+v} \frac{p}{p} \right)$$

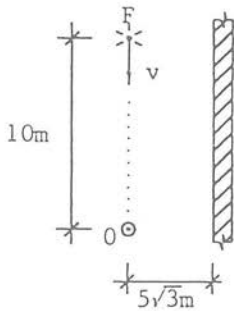
Cuando interfieren la onda directa y la reflejada, el receptor O escuchará una frecuencia promedio:

$$v_o = \frac{v + v''}{2}$$

y se presentará el fenómeno de pulsaciones, con frecuencia:

$$v_p = v'' - v$$

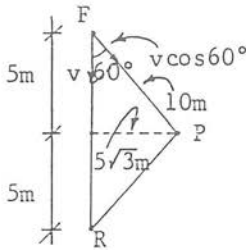
44. Una fuente se acerca directamente hacia un receptor con una velocidad de 10m/s y cuando se encuentra a una distancia de 10m de él emite un sonido con frecuencia de 100 Hz.



Encontrar en el punto de recepción las frecuencias de la onda directa y de la onda reflejada en la pared lateral mostrada en la figura. ¿Qué escuchará el receptor?.

Considerar como velocidad del sonido en el aire: $c = 343$ m/s.

. Geometría:



Por efecto Doppler, fuente en movimiento:

. Onda directa.-

$$v'_1 = v \frac{c}{c - v_f} = 100 \frac{343}{343 - 10} = 100 \times \frac{343}{333}$$

$$v'_1 = 100 \times 1.03 = 103 \text{ Hz.}$$

. Onda refleja.-

La velocidad del sonido hacia la pared, en ese instante, es:

$$v_f = v \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ m/s}$$

y la frecuencia de la onda que llega al punto P de la pared es:

$$v_2 = v \cdot \frac{c}{c - v_f} = 100 \frac{343}{343 - 5} = 100 \frac{343}{338}$$

$$v_2 = 100 \times 1.015 = 101.5 \text{ Hz.}$$

Esta onda se refleja y llega al receptor con igual frecuencia.

Luego, el receptor escucha una frecuencia promedio:

$$v' = \frac{v_1' + v_2''}{2} = \frac{103 + 101.5}{2} = 102.25 \text{ Hz}$$

pero es un sonido pulsante con frecuencia de pulsación:

$$v'_p = v_1 - v_2 = 103 - 101.5 = 1.5 \text{ Hz.}$$

45. Un explorador pone su oído a tierra para detectar si su compañero de expedición se acerca, el cuál, en ese instante y a una distancia de 5km empieza a golpear la tierra desplazándose hacia el receptor con una velocidad de 50m/s. Después de 10 segundos el receptor ha percibido 500 frentes de onda.

Considérese que sólo se percibe el sonido que se propaga por la superficie de la tierra a velocidad $c_T = 2500$ m/s, y no el que se propaga por el aire. Determinar la frecuencia con la cual se emiten los golpes. ¿Cuál es la longitud de onda que se percibe?.

El primer frente de onda se percibirá después de haber transcurrido un tiempo t :

$$t = \frac{L}{c_T} = \frac{5,000}{2,500} = 2s$$

Luego, el receptor habrá percibido los 500 frentes de onda en un intervalo de tiempo t' :

$$t' = 10 - t = 10 - 2 = 8s$$

y, por lo tanto, la frecuencia percibida ν' será:

$$\nu' = \frac{500}{t'} = \frac{500}{8} = 62.5 \text{ Hz.}$$

Como la fuente se acerca, por efecto Doppler, se tiene que:

$$\nu' = \nu \left(\frac{1}{1 - v_f/c_T} \right)$$

Luego, la frecuencia emitida ν , será:

$$\nu = \nu' \left(1 - v_f/c_T \right) = 62.5 \left(1 - \frac{50}{2500} \right) = 62.5 \left(\frac{49}{50} \right) = 61.25 \text{ Hz}$$

Como: $c_T = \lambda' \nu'$, la longitud de onda percibida λ' , es:

$$\lambda' = \frac{c_T}{\nu'} = \frac{2500}{62.5} = 40 \text{ m.}$$

46. Un estudiante situado a varios metros de una pared reflectora y lisa, permanece en reposo tocando una flauta de 75 centímetros de longitud, que emite un sonido en su tercer armónico. Otro estudiante que estaba junto a él, camina hacia la pared y escucha 8 pulsaciones por segundo. Encontrar la velocidad con la cual el estudiante se acerca a la pared.

En el 3er armónico o modo, para un tubo con ambos extremos abiertos, se tiene que:

$$l = 3 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} l$$

como: $l = 75\text{cm} = \frac{3}{4} \text{m}$, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} = 0.5\text{m}$$

y la frecuencia que emite será:

$$\lambda v = c \Rightarrow v = \frac{c}{\lambda}$$

La onda reflejada en la pared tiene la misma frecuencia, luego, para el receptor hay dos fuentes en reposo que emiten con la frecuencia v . Al caminar, por efecto Doppler, escuchará dos frecuencias diferentes:

- 1) La reflejada, acercándose a la pared, con frecuencia $v_2 > v$:

$$v_1 = v \left(\frac{c + v_r}{c} \right) = \frac{v}{c} (c + v_r) = \frac{1}{\lambda} (c + v_r)$$

- 2) La directa, alejándose del flautista, con frecuencia $v_2 < v$:

$$v_2 = v \left(\frac{c - v_r}{c} \right) = \frac{v}{c} (c - v_r) = \frac{1}{\lambda} (c - v_r)$$

Restando, tenemos la diferencia de frecuencias:

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{\lambda} [(c + v_r) - (c - v_r)] = \frac{2 v_r}{\lambda}$$

Por otro lado, sabemos (item 11.6) que la frecuencia de las pulsaciones es: $v_p = v_1 - v_2$, luego se tiene que: $v_p = \frac{2v_r}{\lambda}$

De aquí obtenemos la velocidad v_r del estudiante que camina:

$$v_r = \frac{\lambda v_p}{2}$$

reemplazando: $\lambda = \frac{1}{2}$ m y $v_p = 8$ p.p.s., se obtiene:

$$v_r = 2 \text{ m/s}$$

47. Considere nuevamente el problema anterior (Nº 46), pero ahora el primer estudiante pulsa una cuerda tensa de 75 centímetros de longitud, 0.3 gramos de masa y vibra en su segundo armónico. El segundo estudiante camina a la misma velocidad encontrada de 2m/s y escucha, en este caso, 16 pulsaciones por segundo. Determinar la tensión de la cuerda.

La velocidad de propagación del sonido en el aire es: $c_a = 343$ m/s.

En el 2do. armónico o modo, para una cuerda con ambos extremos fijos, se tiene que:

$$\ell = 2 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \ell$$

Como: $\ell = 75\text{cm} = \frac{3}{4}$ m, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{3}{4} = 0.75\text{m}$$

si llamamos c_c a la velocidad de propagación la cuerda, la frecuencia emitida será:

$$\lambda v = c_c \Rightarrow v = \frac{c_c}{\lambda} = \frac{c_c}{3/4} = \frac{4}{3} c_c$$

Como hemos visto en el problema anterior se tienen dos frecuencias:

$$1) \text{ La reflejada: } v_1 = v \left(\frac{c_a + v_r}{c_a} \right) = \frac{v}{c_a} (c_a + v_r)$$

$$2) \text{ La directa : } v_2 = v \left(\frac{c_a - v_r}{c_a} \right) = \frac{v}{c_a} (c_a - v_r)$$

Cuya diferencia es la frecuencia de las pulsaciones detectadas, esto es:

$$v_p = v_1 - v_2 [(c_a + v_r) - (c_a - v_r)] = 2v_r \frac{v}{c_a}$$

reemplazando el valor arriba encontrado para la frecuencia emitida, se tiene:

$$v_p = 2v_r \frac{4/3 c_c}{c_a} = \frac{8}{3} v_r \frac{c_c}{c_a}$$

despejando c_c queda:

$$c_c = \frac{3}{8} \frac{v_p}{v_r} c_a$$

reemplazando: $v_p = 16$ p.p.s, $v_r = 2$ m/s y $c_a = 343$ m/s, se obtiene:

$$c_c = \frac{3}{8} \frac{16}{2} 343 = 3 \times 343 = 1029 \text{ m/s}$$

Por otro lado, para la velocidad de propagación en la cuerda sabemos que:

$$c_c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{m/\ell}}$$

despejando la tensión T y reemplazando los valores de c_c , m y ℓ , se obtiene:

$$T = \frac{m}{\ell} c_c^2 = \frac{3 \times 10^{-4}}{3/4} 3^2 (343)^2 = 36 (343)^2 \times 10^{-4} = 423.54 \text{ N}$$

46. Un submarino viaja con velocidad V directamente hacia un distante grupo de peces que se mueven con velocidad media v . El submarino emite un corto tren de ondas de frecuencia ν y luego de un lapso de tiempo Δt recibe pulsaciones con frecuencia ν_p . Estas pulsaciones resultan de la interferencia de las ondas reflejadas por peces que se mueven en el mismo sentido que el submarino con las ondas reflejadas por peces que se mueven en sentido contrario al del submarino. Si la velocidad de propagación de las ondas en el agua es C , encontrar el valor de ν_p .

1) Para: $\begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \text{(submarino)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{v} \\ \text{(peces)} \end{array}$

. primero, el submarino como emisor y los peces como receptor, se tiene:

$$\nu_1' = \nu \left(\frac{c}{c - v_f} \right) \left(\frac{c + v_r}{c} \right) = \nu \left(\frac{c + v_r}{c - v_f} \right) \Rightarrow \nu_1' = \nu \left(\frac{C + v}{C - V} \right)$$

. Luego, los peces como fuente y el submarino como receptor, se tiene:

$$\nu_1'' = \nu_1' \left(\frac{c}{c - v_f} \right) \left(\frac{c + v_r}{c} \right) = \left(\frac{c + v_r}{c - v_f} \right) \Rightarrow \nu_1'' = \nu_1' \left(\frac{C + v}{C - v} \right) = \nu \left(\frac{C + v}{C - V} \right) \left(\frac{C + v}{C - v} \right)$$

. En este caso se obtiene: $\nu_1'' = \nu \left(\frac{C + v}{C - v} \right) \left(\frac{C + v}{C - V} \right)$

2) Para: $\begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \text{(submarino)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \text{(peces)} \end{array}$

. Primero, el submarino como emisor y los peces como receptor, se tiene:

$$\nu_2' = \nu \left(\frac{c}{c - v_f} \right) \left(\frac{c - v_r}{c} \right) = \nu \left(\frac{c - v_r}{c - v_f} \right) \Rightarrow \nu_2' = \nu \left(\frac{C - v}{C - V} \right)$$

. luego, los peces como fuente y el submarino como receptor, se tiene:

$$\nu_2'' = \nu_2' \left(\frac{c}{c + v_f} \right) \left(\frac{c + v_r}{c} \right) = \nu_2' \left(\frac{c + v_r}{c + v_f} \right) \Rightarrow \nu_2'' = \nu_2' \left(\frac{C + v}{C + v} \right) = \nu \left(\frac{C - v}{C - V} \right) \left(\frac{C + v}{C + v} \right)$$

- En este caso se obtiene:

$$v_2'' = v \left(\frac{C - v}{C + v} \right) \left(\frac{C + V}{C - V} \right)$$

Finalmente, la frecuencia de las pulsaciones será:

$$v_p = v_1'' - v_2'' = v \left(\frac{C+v}{C-v} \right) \left(\frac{C+V}{C-V} \right) - \left(\frac{C-v}{C+v} \right) \left(\frac{C+V}{C-V} \right) = \left(\frac{C+V}{C-V} \right) \left[\left(\frac{C+v}{C-v} \right) - \left(\frac{C-v}{C+v} \right) \right]$$

$$v_p = \left(\frac{C + V}{C - V} \right) \left(\frac{4Cv}{C^2 - v^2} \right)$$

49. Una fuente de sonido y un receptor se encuentran ambos en reposo y se tiene viento que sopla en la dirección directamente de la fuente hacia el receptor con una velocidad constante U . Si la fuente emite ondas sonoras de frecuencia ν , determinar la frecuencia ν' percibida por el receptor. ¿Cómo se modifica si el viento sopla en sentido contrario, del receptor a la fuente?

Si la fuente emite ondas sonoras de frecuencia ν los frentes de onda están espaciadas por una longitud de onda λ y se propagan en el medio, si no hay viento, con una velocidad c . Estas cantidades están relacionadas por: $\nu\lambda = c$.

Si hay viento hacia el receptor, este arrastrará los frentes de onda hacia él y recibirá un mayor número de frentes por unidad de tiempo, por lo tanto, escuchará un tono más agudo. El número de frentes de ondas adicionales por unidad de tiempo, es decir, el aumento de frecuencia $\Delta\nu$ que se producirá estará dada por la relación: $\Delta\nu\lambda = U$.

Sumando ambas relaciones, esto es:

$$\left. \begin{array}{l} \nu\lambda = c \\ \Delta\nu\lambda = U \end{array} \right\} (+) \Rightarrow (\nu + \Delta\nu)\lambda = c + U$$

La frecuencia que escucha el receptor es: $\nu' = \nu + \Delta\nu$, luego se tiene que:

$$\nu'\lambda = c + U$$

Dividiendo las relaciones obtenidas, con viento y sin él, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \nu'\lambda = c + U \\ \nu\lambda = c \end{array} \right\} (\div) \Rightarrow \frac{\nu'}{\nu} = \frac{c + U}{c}$$

Finalmente ν' será:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c + U}{c} \right) = \nu \left(1 + \frac{U}{c} \right).$$

Si el viento sopla en sentido contrario, se recepcionarán menos frentes de onda por unidad de tiempo y el tono escuchado será más grave. En este caso la frecuencia ν' será:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c - U}{c} \right) = \nu \left(1 - \frac{U}{c} \right)$$

50. Para medir la velocidad del viento en un tubo se coloca en un extremo una fuente de sonido y en el otro extremo un receptor.

Si la frecuencia emitida es $\nu = 686$ Hz y la frecuencia recepcionada $\nu' = 678$ Hz, encontrar la dirección y magnitud de la velocidad U que tendrá el aire en el tubo.

Nota: resolver primero el problema anterior N°49.

Como: $\nu' = 678$ Hz $<$ $\nu = 686$ Hz, el viento sopla del receptor hacia la fuente.

En el problema anterior hemos encontrado que:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{U}{c} \right)$$

despejando U , se tiene:

$$U = c \left(1 - \frac{\nu'}{\nu} \right) = c \left(\frac{\nu - \nu'}{\nu} \right)$$

reemplazando los valores dados y tomando $c = 343$ m/s, queda:

$$U = 343 \left(\frac{686 - 678}{686} \right) = 4 \text{ m/s}$$

51. Modificar las expresiones de Doppler para tomar cuenta cuando el aire se mueve con velocidad constante U a lo largo de la línea que une al receptor con la fuente.

Recomendación: resolver primero el problema N° 49.

Cuando se mueven simultáneamente el receptor y la fuente, para $U=0$, las expresiones encontradas para el efecto Doppler son:

. Acercándose:
$$v' = v \left(\frac{c + v_r}{c - v_f} \right)$$

. Alejándose:
$$v' = v \left(\frac{c - v_r}{c + v_f} \right)$$

Si ahora, además, el medio material, aire, se mueve con una velocidad constante U a lo largo de la línea que une al receptor con la fuente, la velocidad de propagación del sonido que se tiene que considerar será:

$$c' = c \pm U$$

Con signo, cuando el aire se mueve en sentido de:

(+) más, de Fuente a Receptor \Rightarrow
$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{U} \bullet \\ F \quad (+) \quad R \end{array}$$

(-) menos, de Receptor a Fuente \Rightarrow
$$\begin{array}{c} \bullet \xleftarrow{U} \bullet \\ F \quad (-) \quad R \end{array}$$

Luego, las expresiones pedidas para el efecto Doppler en este caso, serán:

. Acercándose:
$$v' = v \left(\frac{c' + v_r}{c' - v_f} \right)$$

. Alejándose:
$$v' = v \left(\frac{c' - v_r}{c' + v_f} \right)$$

52. Se tienen dos ondas, expresadas vectorialmente por:

$$\vec{y} = A \cos(kx - \omega t) \hat{j} \quad , \quad \vec{z} = B \cos(kx - \omega t) \hat{k}$$

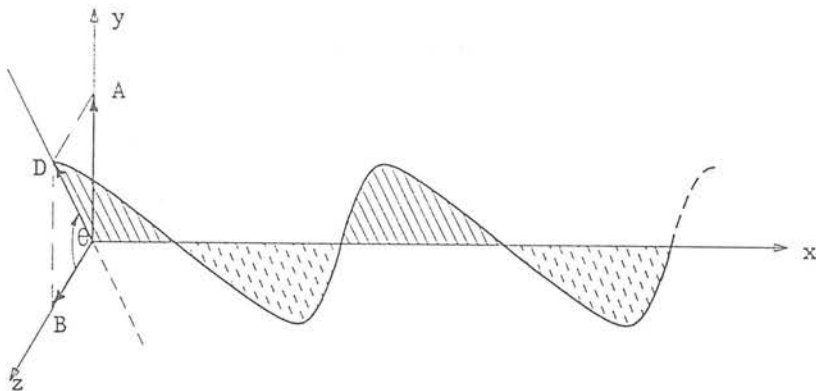
Encontrar la interferencia de ambas ondas y analizar el movimiento resultante.

Se tienen dos ondas iguales que se propagan en la misma dirección x pero con planos de polarización diferentes ($y - x$) y ($z - x$).

Sumándolas vectorialmente se obtiene:

$$\vec{y} + \vec{z} = (A\hat{j} + B\hat{k}) \cos(kx - \omega t)$$

Esto es, una onda que también viaja en la misma dirección x e igual velocidad de propagación: $c = \omega/k$, con amplitud: $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ y plano de polarización a un ángulo $\theta = \arctan \frac{A}{B}$, como se muestra en la figura.



TEORIA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

- INTRODUCCION.
- LOS POSTULADOS DE EINSTEIN DE LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD.
- TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS Y DE VELOCIDADES.
- ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACION DE LORENTZ.
- DINAMICA RELATIVISTA.

12.1 INTRODUCCION.-

Vamos a interrumpir momentáneamente nuestro estudio de la mecánica clásica de Newton que hemos venido desarrollando en los capítulos anteriores. En los siguientes capítulos continuaremos discutiendo y analizando otras situaciones físicas en el contexto de esta teoría clásica. Ahora, en este capítulo, consideramos oportuno desarrollar una breve introducción a la denominada "Teoría Especial o Restringida de la Relatividad" propuesta por Einstein en 1905, enmarcada dentro de la física moderna.

La mecánica clásica se desarrolló basándose en diferentes observaciones de objetos que se mueven con relativa lentitud comparada con la velocidad de la luz, cuyo valor es: $c = 3 \times 10^8$ m/s, extremadamente alto en la región donde desarrollamos nuestras actividades cotidianas. En esta región, cuando $v \ll c$, la teoría clásica de Newton responde brillantemente, pero falla cuando se tienen velocidades muy altas.

La mecánica clásica es un caso particular, muy importante por cierto, de la mecánica relativista que abarca todas las velocidades, hasta alcanzar la velocidad de la luz. Las expresiones que se desarrollan en esta teoría moderna se reducen a las expresiones clásicas cuando las rapidezces involucradas son pequeñas. Obviamente, en este campo utilizaremos las clásicas, que son más sencillas.

Esta nueva teoría apareció como una necesidad, porque, luego del apogeo de la mecánica de Newton aparecieron experimentos en los cuales esta teoría fallaba, siendo un experimento crucial el que realizaron Michelson y Morley a fines del siglo XIX. Estos experimentos indicaban la necesidad de una revisión de la teoría de Newton, a comienzos del siglo XX esta reorganización fue proporcionada por Poincaré, Lorentz y Einstein, quien formuló finalmente una teoría modelo de precisión lógica. Con esta teoría se puede explicar una amplia variedad de fenómenos a altas velocidades y que no pueden ser completamen

te descritos por la teoría de Newton, la cual, puede decirse que se considera como un caso particular para velocidades bajas en comparación con la velocidad de la luz.

No pretenderemos dar una base experimental de la teoría de la relatividad, la cual se encuentra en cursos de Física Moderna y Electrodinámica. Solamente trataremos de dar una breve descripción de esta teoría, adoptando el método de postulación, o sea, aceptando como correctos los postulados de Einstein y que son dos solamente. Luego de comenzar en este punto presentaremos algunas de sus consecuencias que se aplican en la mecánica. Nos limitaremos sólo al caso de la denominada Teoría Especial de la Relatividad, en la cual se considerarán sólo sistemas de referencia inerciales, un tratamiento general que considera sistemas de referencia acelerados es analizado en la Teoría General de la Relatividad.

Es conveniente precisar desde ahora que muchos de los aspectos y consecuencias de la teoría de la relatividad, de hecho, no parecen ser razonables en base a nuestra experiencia cotidiana, más aún, parecen violar nuestro "sentido común". Pero, hay que tener en cuenta que nuestra percepción intuitiva esta basada en un "sentido común restringido a bajas velocidades". No tenemos experiencias personales directas en el campo donde se desarrollan velocidades muy grandes.

12.2 LOS POSTULADOS DE EINSTEIN DE LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD.-

- Las leyes de los fenómenos físicos son las mismas en todo sistema de referencia inercial. No hay un sistema preferido.

Este primer postulado enunciado, es el "Principio de la Relatividad de Einstein". Es más amplio que el principio de la relatividad newtoniana, ya que este incluye sólo a las leyes de la mecánica, mientras que el de Einstein comprende todas las leyes de la física, incluyendo especialmente al Electromagnetismo. Es decir, en cualquier

caso sólo se puede hablar del movimiento relativo de dos sistemas. El principio de invariancia de Newton, que estudiamos en el capítulo IV-volumen 1, era conocido desde la época de Galileo.

- La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, independiente del movimiento de la fuente. Tiene el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

Este segundo postulados enunciado, es el "Principio de la constancia de la velocidad de la luz". Este contradice las transformaciones clásicas de velocidades, pero es compatible hasta la fecha con todos los resultados experimentales.

Resulta pues, que en la naturaleza hay un límite de velocidad. La mayor rapidez con la que se pueden transmitir señales es la rapidez de la luz, este parece ser un límite superior para la rapidez de cualquier cuerpo material. Como dijo Einstein en una ocasión en forma genérica, basta que se encuentre un solo experimento para demostrar que no tiene la razón.

12.3 TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS Y DE VELOCIDADES.

Consideremos dos sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme como se muestra en la fig. 12.1

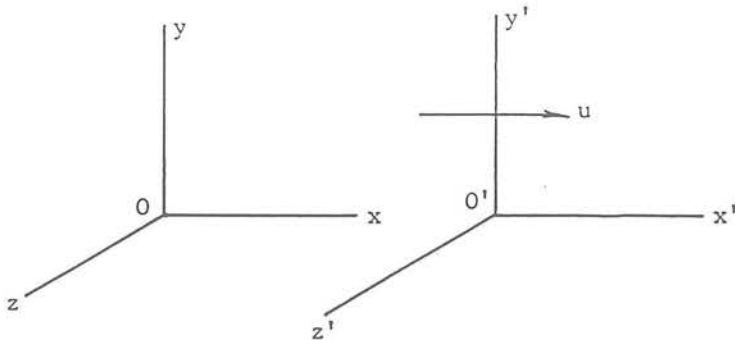


Fig. 12.1- Dos sistemas de referencia inerciales.
En el instante inicial los dos orígenes coinciden.
O' se mueve respecto a O con una velocidad constante u.

Las transformaciones de coordenadas de la mecánica de Newton entre estos sistemas, denominadas "Transformaciones de Galileo", como hemos visto en el ítem 4.1, Pág. 253, V-1, son:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Estas transformaciones de coordenadas nos conllevan a la conocida transformación clásica de velocidades:

$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{u}$$

y con \bar{u} constante, a la relación de aceleraciones:

$$\bar{a}' = \bar{a}$$

Luego, la ley de Newton del movimiento se verifica en ambos sistemas, y decimos que las leyes de Newton son invariantes respecto a las transformaciones de Galileo, satisfaciendo el primer postulado de Einstein.

Por otra parte, la relación de velocidades en la transformación de Galileo predice que la velocidad de la luz será diferente en los dos sistemas. Este resultado contradice el segundo postulado de Einstein.

Por lo tanto, para satisfacer el segundo postulado de Einstein es necesario tener un conjunto de transformaciones de coordenadas tal, que conserve la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales. Estas transformaciones se denominan las "Transformaciones de Lorentz", y son:

$$\left. \begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)\end{aligned} \right\} \quad \text{donde: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (\text{ver prob. N}^\circ 1)$$

Analicemos primero el comportamiento del valor γ en relación a la velocidad u :

- si $u \ll c$, esto es $\frac{u}{c} \rightarrow 0$, luego $\gamma \rightarrow 1$

- si $u < c$, esto es $\frac{u}{c} < 1$, luego $\gamma > 1$

- si $u = c$, esto es $\frac{u}{c} = 1$, luego γ se indetermina.

- si $u > c$, esto es $\frac{u}{c} > 1$, luego γ se torna imaginaria.

Observamos pues que para pequeñas velocidades las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo y que la velocidad de la luz es un límite superior a partir del cual estas transformaciones se indeterminan o se vuelven imaginarias.

Es importante hacer notar que el aspecto más paradójico en estas ecuaciones de transformación reside en la de tiempos, t' esta relacionada no solo con t , sino también con la coordenada espacial x , dependiendo de la velocidad u . Por lo tanto, en relatividad, la coordenada temporal no es la misma para ambos observadores.

Las transformaciones de coordenadas de Lorentz nos conducen a la transformación relativista de velocidades (ver prob. N^o 2), obteniéndose:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right)}$$

Nuevamente, para bajas velocidades $u \ll c$ y $v \ll c$, estas expresiones se reducen a las Galileanas. Pero, ahora, estas cumplen con el segundo postulado de Einstein. Por ejemplo, si $v_x = c$, se obtiene

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c}} = c \text{ el mismo valor que en el otro sistema.}$$

Observe también que la velocidad de la luz es un límite superior para las velocidades de los cuerpos materiales, estos no pueden tener rapidezces superiores al valor de c .

Como límite clásico se puede considerar: $\frac{v}{c} < \frac{1}{10}$

Luego: $v < 3 \times 10^7$ m/s, valor bastante alto en nuestro mundo cotidiano, ¿verdad?. Por lo tanto, generalmente continuaremos utilizando las expresiones más simples, esto es, las Galileanas, que conducen a resultados iguales dentro del error experimental. En este límite, el valor de γ es aproximadamente 1.005.

12.4 ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACIONES DE LORENTZ.-

Aceptados los postulados de Einstein, la aplicación de las transformaciones de Lorentz nos conlleva inmediatamente a una serie de resultados interesantes y aparentemente contradictorios a nuestra experiencia "normal" diaria. Presentaremos aquí solamente las dos consecuencias más famosas.

- Contracción de la longitud.

La longitud de una barra en movimiento es menor que la longitud medida si la barra está en reposo con respecto al observador.

Supongamos que una barra se mueve con una velocidad uniforme u a lo largo del eje x , como se muestra en la fig. 12.2.

(Ver fig. sgte. pág.)

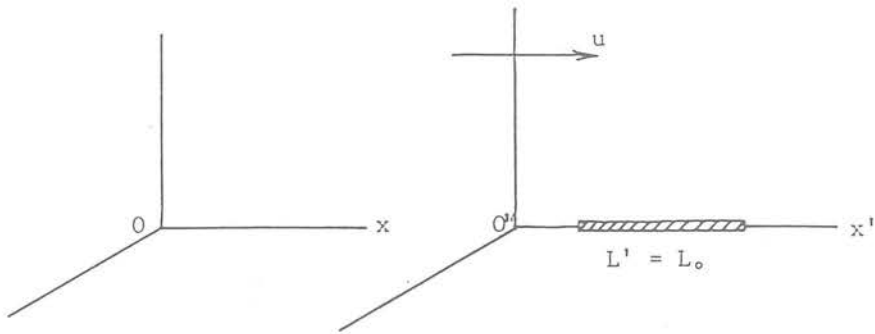


Fig. 12.2—Una varilla de longitud $L' = L_0$ en reposo con respecto a un observador O' .
La varilla se mueve con una velocidad u con respecto a un observador O .

Al aplicar las transformaciones de Lorentz (ver prob. N^o 3), se obtiene la siguiente relación:

$$L_0 = \gamma L$$

Como siempre $\gamma > 1$, se tiene que $L_0 > L$

A L_0 se le llama "Longitud Propia" y es mayor que cualquier otra.

Luego, la longitud L es menor cuando la barra está en movimiento, y se dice, que la "longitud se ha contraído".

- Dilatación del Tiempo.

Un intervalo de tiempo entre dos eventos medido en movimiento es mayor que el intervalo medido en reposo.

Supongamos que en un punto del eje x , como se muestra en la fig. 12.3, se realizaron dos eventos en un intervalo de tiempo $\Delta t = \Delta \tau$.

(Fig. sgte. pág.)

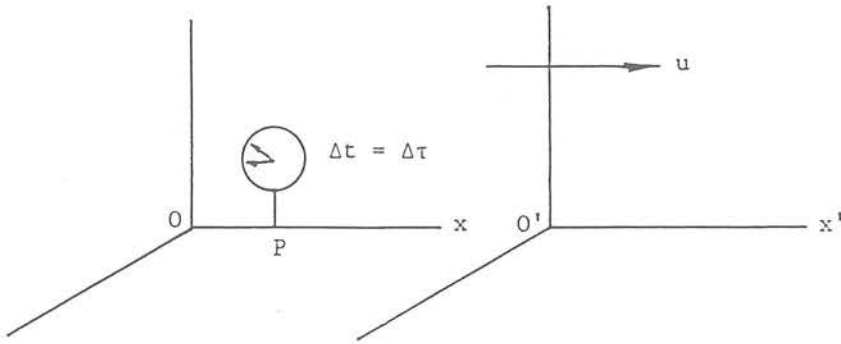


Fig. 12.3—En un punto P se realizan dos eventos en un intervalo de tiempo $\Delta t = \Delta\tau$. Con respecto al observador O el reloj está en reposo en el punto P. Otro observador O' se mueve con velocidad u con respecto a O.

Un observador O' en movimiento medirá un intervalo de tiempo $\Delta t'$. Al aplicar las transformaciones de Lorentz (ver prob. N^o 3), se obtiene la siguiente relación:

$$\Delta t' = \gamma \Delta\tau$$

Dado que $\gamma > 1$, se tiene que $\Delta t' > \Delta\tau$

A $\Delta\tau$ se le llama "tiempo propio" y es menor que cualquier otro. Luego $\Delta t'$ es mayor cuando se está en movimiento, y se dice, que el "tiempo se ha dilatado".

12.5 DINAMICA RELATIVISTA.—

En la mecánica relativista, cuando una partícula se mueve respecto a un observador, la masa de la partícula toma una nueva dimensión, definiéndose la "masa relativista".

Si denominamos : m_0 a la masa de la partícula cuando se encuentra

en reposo, llamada "masa de reposo", cuando la partícula se mueve con una velocidad v respecto a un observador, la masa relativista m de la partícula es:

$$m = \gamma m_0, \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Con este valor, la cantidad de movimiento lineal de la partícula se define como:

$$p = mv = \gamma m_0 v$$

y, la relación relativista para la energía cinética de una partícula en movimiento viene dada por:

$$K = mc^2 - m_0 c^2$$

Esto es, la energía cinética es la diferencia entre un término que depende de la velocidad de la partícula, cuando tiene un valor v y cuando es cero.

Luego, interpretamos este término diciendo que la "energía total relativista" de la partícula es:

$$E = mc^2$$

Esta relación es la famosa equivalencia entre la masa y energía de la teoría de Einstein.

A la energía $E_0 = m_0 c^2$ se le denomina "energía en reposo". Teniendo la partícula una energía cinética:

$$K = E - E_0 = (m - m_0)c^2 = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

Para velocidades bajas ($v \ll c$) esta expresión, se convierte en primera aproximación, en la expresión clásica: $K = \frac{1}{2} m_0 v^2$ (ver prob. N°4).

Finalmente, observe que con la relación de masa y energía se puede utilizar equivalentemente unidades de masa o energía ($m = \frac{E}{c^2}$).

En la física moderna es muy frecuente utilizar una nueva unidad llamada electrón voltio (eV) que definiremos más adelante.

ALBERT EINSTEIN (1879 - 1955)

Las primeras bases de la formulación relativista fueron establecidas por Poincaré y Lorentz en 1904. Einstein propuso la teoría especial de la relatividad en 1905 basada en dos postulados básicos a partir de los cuales se pueden derivar todos los resultados. Adicionalmente, en 1916 Einstein proporcionó la formulación de la teoría general de la relatividad. Sin embargo, es interesante hacer notar que Einstein recibió el premio Nobel en 1921 no por su contribución al establecimiento de la teoría de la relatividad, sino por su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico.

Einstein también estuvo involucrado con la política, como alguna vez él mismo dijo: "mi vida está dividida entre la política y las ecuaciones". Su actividad política comenzó en la primera guerra mundial, cuando era profesor en Berlín; pensaba que la guerra era la peor pérdida de vidas humanas. Estuvo presente en demostraciones antiguerra alentando a la gente a la desobediencia, rechazando la conscripción. Luego de la guerra propugnó la reconciliación y dedicó su esfuerzo a mejorar las relaciones internacionales.

En 1933, Hitler tomó el poder. Estando Einstein ya en América declaró públicamente que no regresaba a Alemania. Los nazis, en represalia, confiscaron su casa y cuenta bancaria. Ante el posible desarrollo de la bomba atómica por los científicos Alemanes, Einstein renunció al pacifismo y propugnó la idea de que los Estados Unidos podía construirla; el firmó la carta dirigida al presidente Roosevelt para tal fin. Sin embargo, y aún antes de la primera detonación de la bomba, él expresó su preocupación por los peligros de una guerra nuclear y propuso un control internacional. En la posguerra dirigió sus esfuerzos a prevenir una guerra nuclear.

Su actividad en pro de la paz, en más de una ocasión le representó dificultades e impopularidad, pero también ganó amigos. Podríamos decir que sus esfuerzos fueron públicamente poco reconocidos.

Einstein también defendió el Sionismo. A pesar de ser Judío por descendencia rechazaba la idea bíblica de Dios. Sin embargo, ante la creciente presencia del antisemitismo, se indentificó plenamente con la comunidad judía. Esto contribuyó también a su impopularidad, incluso se formó una organización contra él, efectuando publicaciones y hasta amenazas de muerte. Sin embargo, su apoyo al sionismo si fue públicamente reconocido cuando en 1952 le ofrecieron la presidencia de Israel, a la cual declinó.

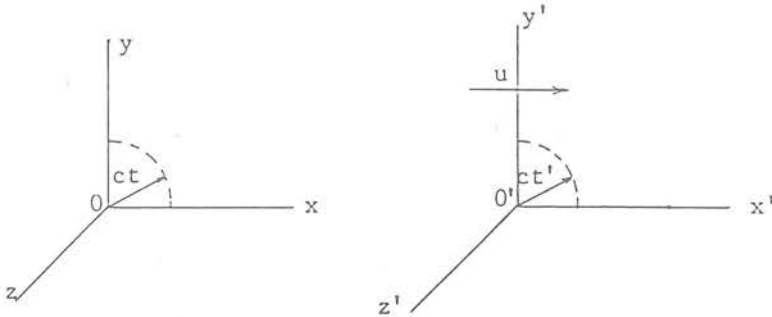
PROBLEMAS

1. Considere dos sistemas en movimiento relativo uniforme como se muestra en la figura.

Si se emite un pulso de luz cuando O coincide con O' , de acuerdo al segundo postulado de Einstein los frentes de onda observados en los dos sistemas son esferas descritas por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$



Comprobar que con las "transformaciones de Lorentz" (item 12.3), ambas ecuaciones son válidas. Es decir, se cumple la siguiente igualdad:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Con las ecuaciones de transformación de coordenadas de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2} x\right)$$

Sustituimos en la expresión que tenemos para O' , y efectuando :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2\left(t - \frac{u}{c^2} x\right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xut + \gamma^2 u^2 t^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2 t^2 + 2\gamma^2 tux - \gamma^2 \frac{u^2 x^2}{c^2} = \\
&= \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (c^2 - u^2) t^2
\end{aligned}$$

Como debe ser igual a $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, en 0, se deberán cumplir:

$$\text{Para } x^2: \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 1$$

$$\text{Para } t^2: \gamma^2 (c^2 - u^2) = c^2 \implies \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 1$$

$$\text{Luego, con el valor de } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

se cumple la igualdad requerida.

2. A partir de la transformación de coordenadas de Lorentz, encontrar las ecuaciones correspondientes a la transformación relativista de velocidades (item 12.3).

Las ecuaciones de transformación de coordenadas de Lorentz, son:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2} x\right)$$

Diferenciando, se tiene:

$$dx' = \gamma(dx - u dt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2} dx\right)$$

Como las componentes de la velocidad en cada uno de los sistemas de referencia son:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Reemplazando, las transformaciones de velocidades serán:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - udt)}{\gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt})}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt})}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})}$$

3. A partir de la transformación de coordenadas de Lorentz, encontrar las relaciones correspondientes a la contracción de la longitud y a la dilatación del tiempo (ítem 12.4).

Las ecuaciones de transformación de coordenadas de Lorentz, son:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

- Contracción de la longitud.

La varilla se mueve con una velocidad u con respecto al observador O , ver fig. 12.2.

El observador O mide la longitud de la varilla determinando la diferencia de coordenadas de los extremos $(x_2 - x_1)$ en un determinado instante t . Esto es, él localiza simultáneamente $(t_2 = t_1)$ en su sistema la posición de los extremos $(x_2$ y $x_1)$.

Aplicando las transformaciones de Lorentz para este caso, se tendrá:

$$(x_2' - x_1') = \gamma[(x_2 - ut_2) - (x_1 - ut_1)] = \gamma[x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)]$$

como: $t_2 = t_1$, $t_2 - t_1 = 0$, luego queda:

$$(x_2' - x_1') = \gamma(x_2 - x_1)$$

Esto es:

$$L' = \gamma L$$

Para el observador O' la barra está en reposo; la longitud para él, que hemos llamado propia es: $L' = L_0$. Luego:

$$L_0 = \gamma L, \text{ o bien, } L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Para el observador O la longitud de la varilla aparece contraída. Es importante hacer notar que para el observador O' los tiempos t_2' y t_1' son diferentes $(t_2' \neq t_1')$, de acuerdo a la ecuación de transformación correspondiente.

- Dilatación del tiempo.

Imaginemos un reloj en un punto P del eje x en el sistema del observador O , ver fig. 12.3.

Para el observador O se tiene un intervalo de tiempo: $\Delta t = (t_2 - t_1)$

Para un observador O' , aplicando las transformaciones de Lorentz, se tendrá:

$$(t_2' - t_1') = \gamma \left[(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2) - (t_1 - \frac{u}{c^2} x_1) \right] = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2} (x_2 - x_1) \right]$$

Como: $x_2 = x_1$, $x_2 - x_1 = 0$, luego queda:

$$(t_2' - t_1') = \gamma(t_2 - t_1)$$

Esto es: $\Delta t' = \gamma \Delta t$

Para el observador O el reloj está en reposo, el tiempo para él he mos llamado tiempo propio: $\Delta t = \Delta \tau$. Luego:

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Para el observador móvil O' , el intervalo de tiempo aparece dilata do.

También, es importante hacer notar que para el observador O' se tie ne que $x_2' \neq x_1'$, de acuerdo a la ecuación de transformación co- respondiente.

4. Demostrar que la expresión relativista para la energía cinética de una partícula de masa en reposo m_0 , en el límite clásico (para velocidades bajas $v \ll c$), tiende en primera aproximación a la expresión Newtoniana (item 12.5).

La expresión relativista es:

$$K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$$

llamando: $\beta = \frac{v}{c}$

la expresión de γ es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

Como para bajas velocidades : $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ ($\beta \rightarrow 0$), podemos efectuar la expansión binomial:

$$(1 - \beta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \dots$$

Luego, en el límite clásico, sólo el primer término exponencial es relativamente significativo, quedando solamente:

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2$$

Por lo tanto se tendrá:

$$(\gamma - 1) = \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

Finalmente resulta:

$$K = m_0 c^2 \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Expresión clásica, como esperábamos.

5. Encontrar las ecuaciones de transformación inversa de Lorentz, es decir, de x, y, z, t a x', y', z', t' .
-

Desde el punto de vista físico, como el observador O (sistema sin acentuar) se mueve con respecto al observador O' (sistema acentuado) con velocidad $-u$, las ecuaciones de transformación inversa se obtienen de inmediato, pues diferirán de las dadas sólo en el signo de la velocidad u . Esto es:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + ut') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2} x'\right)\end{aligned}$$

$$\text{donde: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Sin embargo, como ejercicio, encontremos analíticamente estas expresiones a partir de las primeras. Se tiene:

$$\text{De : } x' = \gamma(x - ut) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x'}{\gamma} + ut$$

$$\text{De : } t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{ux}{c^2}$$

Eliminando t , se obtiene:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + \frac{ut'}{\gamma} + \frac{u^2x}{c^2}$$

$$x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{x' + ut'}{\gamma}$$

$$x\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{x' + ut'}{\gamma}$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

Eliminando x , se obtiene:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{ux'}{\gamma c^2} + \frac{u^2t}{c^2}$$

$$t\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$

$$t\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

6. Encontrar el valor numérico de γ que aparece en las transformaciones de Lorentz para los siguientes valores de la velocidad u (en m/s):

a) 3×10^6

f) 2×10^8

b) 3×10^7

g) 2.5×10^8

c) 6×10^7

h) 2.7×10^8

d) 1×10^8

i) 2.85×10^8

e) 1.5×10^8

j) 2.97×10^8

Luego, graficar γ vs. $\beta = \frac{u}{c}$.

El valor de γ es:
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

con: $c = 3 \times 10^8$ m/s

Luego, en c/u de los casos pedidos, se tiene:

$$a) \beta = \frac{u}{c} = \frac{3 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{1}{100} = 0.01 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^2}} = \frac{100}{\sqrt{9999}} = 1.00005$$

$$b) \beta = \frac{u}{c} = \frac{3 \times 10^7}{3 \times 10^8} = \frac{1}{10} = 0.1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{99}} = 1.005$$

Este valor se considera, usualmente, como el límite clásico.

$$c) \beta = \frac{u}{c} = \frac{6 \times 10^7}{3 \times 10^8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = 1.021$$

$$d) \beta = \frac{u}{c} = \frac{1 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} = 0.33 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = 1.061$$

$$e) \beta = \frac{u}{c} = \frac{1.5 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

$$f) \beta = \frac{u}{c} = \frac{2 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2}{3} = 0.67 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1.342$$

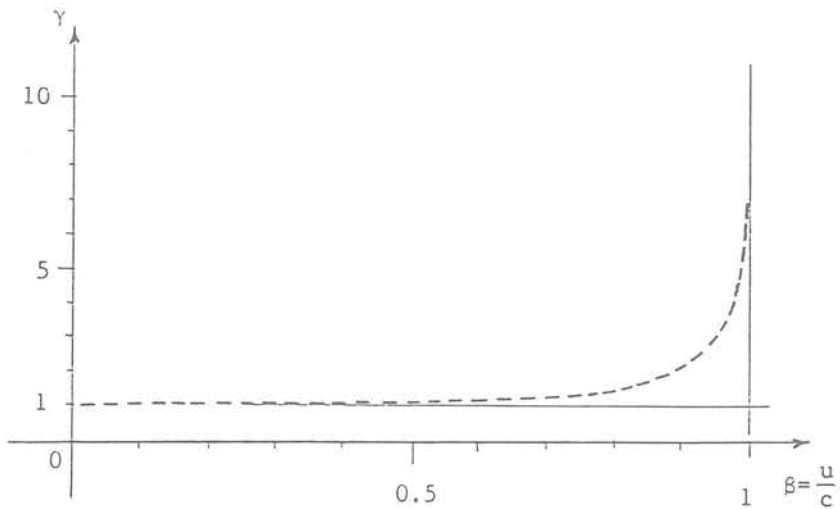
$$g) \beta = \frac{u}{c} = \frac{2.5 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{5}{6} = 0.83 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}} = \frac{6}{\sqrt{11}} = 1.809$$

$$h) \beta = \frac{u}{c} = \frac{2.7 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{9}{10} = 0.90 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{19}} = 2.294$$

$$i) \beta = \frac{u}{c} = \frac{2.85 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{9.5}{10} = 0.95 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{9.5}{10}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{9.75}} = 3.203$$

$$j) \beta = \frac{u}{c} = \frac{2.97 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{9.9}{10} = 0.99 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{9.9}{10}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1.99}} = 7.089$$

Gráfico pedido:



7. Al encender una linterna emana un rayo de luz en la dirección y , con respecto a un observador O . Encontrar la velocidad v' que tendrá con respecto a un observador O' que se mueve en la dirección x con una velocidad u con respecto a O .

La velocidad de la luz con respecto a O es:

$$v = v_y = c$$

De acuerdo al segundo postulado, el valor que esperamos tener es $v' = c$; veamos:

- componente y .

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

con: $\left\{ \begin{array}{l} v_y = c \\ v_x = 0 \end{array} \right\}$, se tiene: $v'_y = \frac{c}{\gamma \left(1 - \frac{u \cdot 0}{c^2}\right)} = \frac{c}{\gamma}$

observe que $v'_y \neq c$.

- componente x.

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

con: $v_x = 0$, se tiene: $v'_x = \frac{0 - u}{1 - \frac{u \cdot 0}{c^2}} = -u$

observar que $v'_x \neq c$

Luego, la velocidad v' será:

$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \sqrt{u^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}} = \sqrt{u^2 + \frac{c^2}{(1 - \frac{u^2}{c^2})}}$$

$$v' = \sqrt{u^2 + c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \sqrt{u^2 + c^2 - u^2} = \sqrt{c^2}$$

$$v' = c$$

Valor que efectivamente es el esperado.

8. Un astronauta viaja a una estrella distante 5 años luz (1 año luz es la distancia recorrida en 1 año viajando a la velocidad de la luz). Determinar la velocidad de su cohete relativa a la tierra, sabiendo que el tiempo medido por el reloj del astronauta es 1 año. ¿Cuál es el tiempo transcurrido de la misión para un observador en la tierra?

La distancia recorrida (5 años luz) en kilómetros es:

$$d = 5c = 5(300,000 \times 365 \times 24 \times 3,600) \text{ km.}$$

El tiempo medido por el astronauta es el tiempo propio, luego, el tiempo en la tierra será:

$$t = \gamma \tau = \gamma \times 1 = \gamma \text{ años}$$

Para poder determinar γ necesitamos encontrar la velocidad del co-

hete con respecto a tierra:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{5c}{\gamma} = 5c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

efectuando,

$$v^2 = 25c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 25(c^2 - v^2)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{25}{26} \Rightarrow v = 0.981c$$

y el valor de γ será:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{25}{26}}} = \sqrt{26} = 5.1$$

Por lo tanto, el tiempo pedido en la tierra es:

$$t = 5.1 \text{ años.}$$

9. Una regla de un metro de longitud se mueve con respecto a un observador, para el cual solamente tiene una longitud de 75 cm. ¿Cuál es la velocidad de la regla?

Al tenerse contracción de la longitud, la relación de longitudes es:

$$L_o = \gamma L$$

luego:

$$\gamma = \frac{L_o}{L} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$$

como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

igualando y despejando v , se tendrá:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

finalmente:

$$u = \frac{\sqrt{7}}{4} c \approx 0.66c = 1.98 \times 10^5 \text{ km/s} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$u = 2 \times 10^5 \text{ km/seg}$$

10. Mostrar que dos eventos que ocurren simultáneamente al mismo tiempo t , en dos puntos diferentes A y B, no pueden ser simultáneos en otro sistema de referencia O' .
-

La transformación de Lorentz del tiempo es:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right)$$

Utilizando esta expresión para ambos eventos, se tiene:

$$t'_A = \gamma \left(t - \frac{ux_A}{c^2} \right)$$

$$t'_B = \gamma \left(t - \frac{ux_B}{c^2} \right)$$

Restando estas dos expresiones, queda:

$$t'_A - t'_B = \gamma \frac{u}{c^2} (x_B - x_A)$$

como $x_B \neq x_A \implies t'_A \neq t'_B$

Luego ambos eventos no son simultáneos en O' .

11. Una persona nace en una nave espacial que viaja con una velocidad $v = 0.9c$ y desde ese instante hasta que muere la nave recorre una distancia de 6×10^{14} km, observación hecha por nosotros desde la tierra.
- ¿Cuánto tiempo vive la persona para nosotros?
 - ¿Cuánto tiempo transcurre para el astronauta, medido en su propio sistema de referencia?

- c) ¿Cuál es la distancia recorrida que mide el astronauta en su sistema de referencia?

En primer lugar, el valor de γ para $v = 0.9c$, valor encontrado en el problema N° 6-h), es:

$$\gamma = 2.294$$

- a) El tiempo medido en la tierra será:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{6 \times 10^{14}}{0.9 \times 3 \times 10^8} = \frac{2}{9} \times 10^{10} = 22.222 \times 10^8 \text{ s}$$

$$t = \frac{22.222 \times 10^8}{365 \times 24 \times 3600} = \frac{22222 \times 10^5}{31536 \times 10^3} = 70.465 \text{ años}$$

- b) El tiempo medido por el astronauta será el tiempo propio, luego:

$$\tau = t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{70.465}{2.294} = 30.717 \text{ años}$$

$$\tau = t' = 30.717 (365 \times 24 \times 3600) = 9.687 \times 10^8 \text{ s.}$$

- c) La distancia que ve recorrer el astronauta será:

$$L' = t'v = (9.687 \times 10^8)(0.9 \times 3 \times 10^8)$$

$$L' = 2.615 \times 10^{14} \text{ km}$$

o bien, equivalentemente, $L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{6 \times 10^{14}}{2.294} = 2.615 \times 10^{14} \text{ km}$,

la longitud contraída.

12. Una partícula de masa en reposo m_0 se mueve con una velocidad $v = \frac{4}{5}c$ y choca inelásticamente con otra partícula idéntica que se encuentra en reposo.

- a) ¿Cuál es la masa en movimiento de la partícula incidente?

- b) ¿Cuál es la masa en movimiento y su velocidad de la partícula com

puesta después del choque?

c) ¿Cuál es la masa en reposo que tendría la partícula compuesta?

a) Para la partícula incidente.

En primer lugar determinemos para ella el valor de γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1.666$$

Luego, su masa en movimiento será:

$$m = \gamma m_0 = \frac{5}{3} m_0$$

b) Para la partícula compuesta después del choque.

Llamando M a la masa en movimiento de la partícula compuesta. Por conservación de energía, la energía total de las dos partículas antes del choque es igual a la energía total de la partícula compuesta después del choque, esto es:

$$E_T = mc^2 + m_0c^2 = Mc^2$$

Luego, despejando M , se tiene:

$$M = m + m_0 = \frac{5}{3} m_0 + m_0 = \frac{8}{3} m_0$$

Por otro lado, debe también conservarse la cantidad de movimiento. O sea, la cantidad de movimiento de la partícula incidente debe ser igual a la cantidad de movimiento de la partícula compuesta después del choque, esto es:

$$mv = Mv'$$

Luego, despejando v' , se tiene:

$$v' = \frac{m}{M} v = \frac{\frac{5}{3} m_0}{\frac{8}{3} m_0} \left(\frac{4}{5} c\right) = \frac{1}{2} c$$

c) Con la velocidad obtenida, v' , calculemos primero el valor de γ'

para la partícula compuesta:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

Luego, la masa que tendría en reposo la partícula compuesta es:

$$M_0 = \frac{M}{\gamma'} = \frac{\frac{8}{3} m_0}{2/\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} m_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0$$

13. Mostrar que se cumple la siguiente relación relativista entre E y p :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0 c^4$$

Partiendo de la definición de masa relativista:

$$m = \gamma m_0$$

Elevando al cuadrado y reemplazando el valor de γ , se tiene:

$$m^2 = \gamma^2 m_0^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_0^2 = \frac{m_0^2 c^2}{c^2 - v^2}$$

Luego,

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$$

y multiplicando por c^2 , queda:

$$m^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

con : $\left\{ \begin{array}{l} E = mc^2 \\ p = mv \end{array} \right\}$, se tiene: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

Expresión que es la pedida.

Este libro se terminó de Imprimir
en los Talleres Gráficos de
Editorial e Imprenta DESA S.A.
General Varela 1577 - Breña
Lima 5, Perú

PUBLICACIONES RECIENTES

EDITH ARANDA DIOSES

Del diseño del orden a la imagen trizada (Talara: de ciudad cerrada a ciudad abierta)

PILAR GARCIA-JORDAN (Editora)

Fronteras, colonización y mano de obra en la Amazonía Andina. 1998, 544 p.p.

GORKI GONZALES MANTILLA

Poder judicial, interés público y derechos fundamentales en el Perú. 1998, 168 p.p.

TONG GYU HWANG

Posada de nubes y otros poemas. 1998, 136 p.p.

RENE ORTIZ CABALLERO

Universidad y modernización en el Perú en el Siglo XX. Biblioteca de Derecho Político Volúmen III. 1998, 124 p.p.

ORLANDO PLAZA

Desarrollo Rural. Enfoques y métodos alternativos. 1998, 418 p.p.

GUILLERMO PORTOCARRERO

Razones de sangre. 1998, 304 p.p.

MIRIAM SALAS

Estructura colonial del poder español en el Perú. Huamanga (Ayacucho) a través de sus obrajes, siglos XVI-XVIII. 1998 Tomo I, 612 p.p., Tomo II, 572 p.p. Tomo III Anexos.

ELENA VIVAR MORALES

La Inscripción registral de la propiedad inmueble en el Perú. 1998. Tomo I y II 684 p.p.

MANUEL VICENTE VILLARAN

Lecciones de derecho constitucional. 1998, 716 p.p.

FISICA con ejercicios

INDICE DE MATERIAS

CAPITULO IX ELASTICIDAD

Pág. Nº 11

9.1 Introducción. 9.2 Tracción y compresión uniforme longitudinal: Módulo elástico - Ley de Hooke - Deformación lateral. 9.3 Comportamiento elástico y plástico de los materiales. 9.4 Energía de deformación. 9.5 Elasticidad volumétrica. 9.6 Cizalladura - Elasticidad transversal. 9.7 Relaciones entre constantes elásticas.

APENDICES

Pág. Nº 37

A.I. Módulos elásticos T.A.I.1 Módulo de Young T.A.I.2 Módulo volumétrico T.A.I.3 Módulo de esfuerzo constante T.A.I.4 Módulo de Poisson.

EJERCICIOS

Pág. Nº 41

P.IX Problemas de 1 al 45.

CAPITULO X OSCILACIONES

Pág. Nº 107

10.1 Introducción y definiciones. 10.2 Movimiento oscilatorio armónico simple - Oscilación libre lineal - Oscilación libre angular. 10.3 Oscilador armónico con acción externa constante. 10.4 Oscilador amortiguado - Oscilador subamortiguado - Oscilador sobreamortiguado - Oscilador críticamente amortiguado. 10.5 Oscilaciones forzadas. 10.6 Movimiento armónico en dos dimensiones. 10.7 Movimiento oscilatorio de dos cuerpos acoplados.

APENDICES

Pág. Nº 166

A-I La familia de las funciones trigonométricas seno y coseno. A.II Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal con coeficientes constantes - Homogéneas - No homogéneas. A.III Leonhard Euler.

EJERCICIOS

Pág. Nº 181

P.X Problemas del 1 al 61.

CAPITULO XI ONDAS

Pág. Nº 291

11.1 Introducción y tipos de ondas. 11.2 Cinemática de la propagación. 11.3 Ecuación de onda unidimensional - Ondas transversales en una cuerda. Ondas longitudinales en una barra. Ondas longitudinales en aire confinado en un ducto. 11.4 Solución general de la ecuación de onda. 11.5 Superposición de ondas. 11.6 Interferencia. 11.7 Reflexión de ondas. 11.8 Ondas estacionarias. 11.9 Ondas acústicas. 11.10 Efecto Doppler. 11.11 Polarización lineal en una onda transversal.

APENDICES

Pág. Nº 360

A.I. Propiedades físicas de la materia T.A.I.1 Gases. T.A.I.2 Líquidos. T.A.I.3 Sólidos. A.II Niveles de intensidad sonora en decibelios A para algunos ruidos comunes.

EJERCICIOS

Pág. Nº 364

P. XI Problemas del 1 al 52.

CAPITULO XII TEORIA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

Pág. Nº 441

12.1 Introducción. 12.2 Los postulados de Einstein de la teoría de la relatividad. 12.3 Transformaciones de coordenadas y de velocidades. 12.4 Algunas consecuencias de la transformación de Lorentz: Contracción de la longitud - Dilatación del tiempo. 12.5 Dinámica relativista.

APENDICES

Pág. Nº 453

A.I Albert Einstein.

EJERCICIOS

Pág. Nº 455

P.XII Problemas del 1 al 13