

CAP. 3

LA INTEGRAL DEFINIDA

1 SUMAS

1.1 Definición Designamos la suma de los números reales x_1, \dots, x_n , empleando la notación

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n$$

EJEMPLOS

$$(1) \quad \sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^3 \cos\left(\frac{\pi k}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i = -1 + 1 + \dots + (-1)^n$$

En general, la suma indicada desde el término x_m hasta el término x_n , $m \leq n$, se designa con

$$\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + \dots + x_n$$

Ejemplos

$$(1) \quad \sum_{i=5}^9 i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \quad (= 35)$$

$$(2) \quad \sum_{k=-2}^1 (5k-3) = [5(-2)-3] + [5(-1)-3] + [5(0)-3] + [5(1)-3] \\ (= -22)$$

$$(3) \quad \sum_{j=51}^{100} j^2 = (51)^2 + (52)^2 + \dots + (99)^2 + (100)^2 \\ (= 295,425)$$

1.2 Propiedades de las Sumas

Teorema Se cumple

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n c = cn, \quad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n c x_i = c \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^n x_i \pm \sum_{i=1}^n y_i$$

(4) Propiedad telescópica

$$\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1.$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=m+1}^n x_i, \quad \text{si } m < n.$$

Prueba de (4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \dots + (x_{n+1} - x_n) \\ &= -x_1 + (x_2 - x_2) + (x_3 - x_3) + \dots + (x_n - x_n) + x_{n+1} \\ &= x_{n+1} - x_1. \end{aligned}$$

1.3 Algunas Sumas

$$(1.3.1) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(1.3.2) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$(1.3.3) \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(1.3.4) \quad \sum_{i=0}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + A_{p-1} n^{p-1} + \dots + A_1 n + A_0,$$

donde p es un número entero no negativo y A_0, A_1, \dots, A_p , son constantes.

$$(1.3.5) \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right].$$

1.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Probar que
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCION Sea $S = \sum_{i=1}^n i$. Tenemos

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \text{y sumando miembro a miembro} \\ 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ sumandos}} \end{aligned}$$

$$2S = n(n+1)$$

Luego
$$S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PROBLEMA 2 Probar que
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SOLUCION Sea $S = \sum_{i=1}^n i^2$.

Para $i = 1, 2, \dots, n$, tenemos

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1,$$

y sumando miembro a miembro

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

(el primer miembro por la propiedad telescópica de la suma; y

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ por el problema 1).}$$

Despejando S

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} [2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)] = \frac{n+1}{6} [2(n+1)^2 - 3n - 2] \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Por inducción sobre p probar que se cumple

$$\sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_1 n + A_0 ,$$

en donde A_0, \dots, A_p son constantes.

SOLUCION

Sea $S_p = \sum_{i=1}^n i^p$. Debemos probar que S_p es un polinomio en n cuyo término de mayor grado es $\frac{1}{p+1} n^{p+1}$.

Sumando miembro a miembro las identidades

$$(i+1)^{p+1} - i^{p+1} = (p+1)i^p + \frac{(p+1)p}{2} i^{p-1} + \dots + (p+1)i + 1$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

y aplicando la propiedad telescópica a la suma del primer miembro se obtiene

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p + \frac{(p+1)p}{2} S_{p-1} + \dots + (p+1)S_1 + S_0 \quad (1)$$

Si $p = 0$ tenemos $(n+1) - 1 = S_0$, de donde $S_0 = n$ y se cumple la fórmula indicada.

Supongamos ahora que S_0, \dots, S_{p-1} son polinomios en n de grado $\leq p$. Entonces $Q = \frac{(p+1)p}{2} S_{p-1} + \dots + (p+1)S_1 + S_0$ tiene grado $\leq p$ y (1) se expresa así:

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p + Q \quad (2)$$

Por otro lado tenemos que

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n^{p+1} + \frac{(p+1)p}{2} n^p + \dots + (p+1)n = n^{p+1} + R, \quad (3)$$

en donde R es un polinomio de grado p .

Reemplazando (3) en (2) y despejando S_p resulta

$S_p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{p+1} (R-Q) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + T$, siendo T un polinomio de grado $\leq p$.

Así, para S_p también se cumple la fórmula y concluye la prueba.

PROBLEMA 4

Probar que
$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right].$$

SOLUCION

Usamos la identidad $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ con $a = ix$, $b = \frac{x}{2}$, y obtenemos para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\operatorname{sen} ix \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(i - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(i + \frac{1}{2} \right) x \right] = -\frac{1}{2} (y_{i+1} - y_i), \text{ donde } y_i = \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) x.$$

Sumando miembro a miembro resulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \\ &= -\frac{1}{2} (y_{n+1} - y_1) \quad (\text{propiedad telescópica}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \text{ y por lo tanto} \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} ix &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Hallar
$$\sum_{i=1}^{100} (2i+5).$$

SOLUCION

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \sum_{i=1}^n (2i+5) &= 2 \sum_{i=1}^n i + 5 \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 5n \\ &= n(n+6). \end{aligned}$$

Luego, para $n = 100$ se obtiene $100(100+6) = 10,600$.

PROBLEMA 6

Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i.$

SOLUCION

Tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$
 $= \frac{1}{2}.$

PROBLEMA 7

Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p.$

SOLUCION

Por el problema 3, $\sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_0,$

y por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p+1} + \frac{A_p}{n} + \dots + \frac{A_0}{n^{p+1}} \right] = \frac{1}{p+1}.$$

PROBLEMA 8 Calcular

$$\sum_{i=0}^n i^3 \quad \text{usando el método de los coeficientes indeterminados.}$$

SOLUCION Por el problema 3,

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4} n^4 + A n^3 + B n^2 + C n + D.$$

Dando valores $n = 0, 1, 2$ y 3 , se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= D, & 1 &= \frac{1}{4} + A + B + C + D, \\ 9 &= \frac{16}{4} + 8A + 4B + 2C + D, & 36 &= \frac{81}{4} + 27A + 9B + 3C + D, \end{aligned}$$

de donde $D = 0$ y resolviendo las ecuaciones restantes

$$A + B + C = \frac{3}{4}, \quad 4A + 2B + C = \frac{10}{4}, \quad 9A + 3B + C = \frac{21}{4},$$

se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = 0$.

Luego $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4} (n^2 + 2n + 1) = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$

2 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO UN LIMITE DE SUMAS

2.1 Sumas de Integral

Definición

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Una **suma de integral** (o **suma de Riemann**) de $f(x)$ en $[a,b]$, es una suma de la forma

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

donde (1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

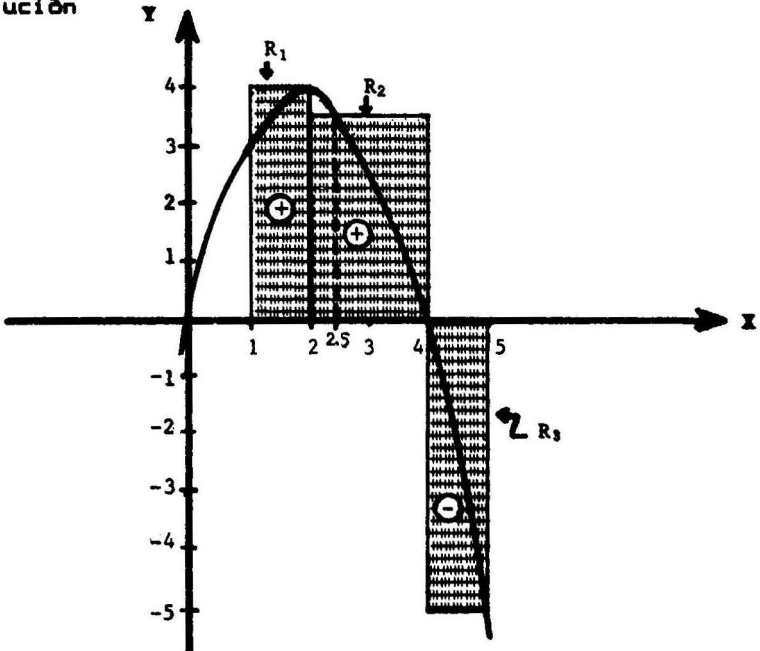
(2) $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3) ξ_i es un número tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Ejemplo Sean $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
 $a = 1, \quad b = 5,$
 $x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5,$
 $\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 2.5, \quad \xi_3 = 5.$

Calcular la suma integral S de $f(x)$ asociada a estos datos e interpretar geoméricamente la suma S .

Solución



Tenemos

i	x_i	ξ_i	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$f(\xi_i)$	$f(\xi_i) \Delta x_i$
0	1				
1	2	2	1	4	4
2	4	2.5	2	3.75	7.50
3	5	5	1	-5	-5

$$\text{Luego } S = \sum_{i=1}^3 f(\xi_i) \Delta x_i = 4 + 7.50 - 5 = 6.50 .$$

Interpretación geométrica de la suma S

En la figura $f(\xi_1) \Delta x_1 = 4 = \text{Area del rectángulo } R_1$

$f(\xi_2) \Delta x_2 = 7.5 = \text{Area del rectángulo } R_2$

$f(\xi_3) \Delta x_3 = -5 = - \text{Area del rectángulo } R_3$

Por lo tanto, $S = \text{Area } R_1 + \text{Area } R_2 - \text{Area } R_3$,

y geoméricamente, S es igual al área algebraica de la región compuesta por R_1 , R_2 y R_3 , si se conviene en asignar el signo + o el signo - al área de un rectángulo según éste se encuentre arriba o abajo del eje X, respectivamente.

Interpretación geométrica de la suma de integral

La interpretación de la suma de integral que hemos dado en el ejemplo precedente admite una generalización inmediata cuando se trata de una función cualquiera. En efecto, consideremos la suma de integral.

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Sea R_i el rectángulo determinado por $f(\xi_i)$ y de base el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces el área de R_i es

$$A_i = \begin{cases} f(\xi_i) \Delta x_i & \text{si } f(\xi_i) \geq 0 \\ -f(\xi_i) \Delta x_i & \text{si } f(\xi_i) < 0 , \end{cases}$$

$$\text{y por lo tanto, } S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (\pm A_i) ,$$

donde para cada i se debe elegir el signo + o el signo - según que R_i se encuentre arriba o por debajo del eje X, respectivamente.

Así, geoméricamente S es el área algebraica de la región compuesta por los rectángulos R_1, R_2, \dots, R_n .

2.2 La Integral Definida

2.2.1 Existencia y Definición de la Integral Definida para Funciones Continuas

Teorema: Existencia

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un número real que se designa con

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{tal que}$$

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad ,$$

- donde (1) $\|\Delta\| = \text{máximo} \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i$
 (2) el límite indicado significa que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|\Delta\| < \delta$ implica que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon .$$

Definición

- (1) El número $\int_a^b f(x) dx$ se llama la **integral definida** de $f(x)$ desde a a b .
 (2) La función $f(x)$ se llama **integrando**.
 (3) Los números a y b se llaman **límite inferior** y **límite superior**, respectivamente.

Nota

- (1) Omitimos dar la prueba del teorema.
 (2) Este teorema es muy importante pues nos dice que la hipótesis de la continuidad de $f(x)$ es suficiente para asegurar que las sumas de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ se aproximan a un número fijo, que hemos denotado con $\int_a^b f(x) dx$, cuando $\max \Delta x_i$ es muy pequeño, esto es, cuando las longitudes Δx_i de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se acercan a cero.

2.2.2 Cálculo de la integral definida usando sucesiones de sumas de integral

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Supongamos que para cada entero $n > 1$ es dada una

suma de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ de $f(x)$ en $[a,b]$. Si

se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0$, donde $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Nota

La prueba del teorema es una consecuencia inmediata del teorema de existencia de la integral definida (2.2.1) Omitimos los detalles.

Ejemplo Cálculo de la integral definida usando intervalos de igual longitud

Si

$$(1) \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

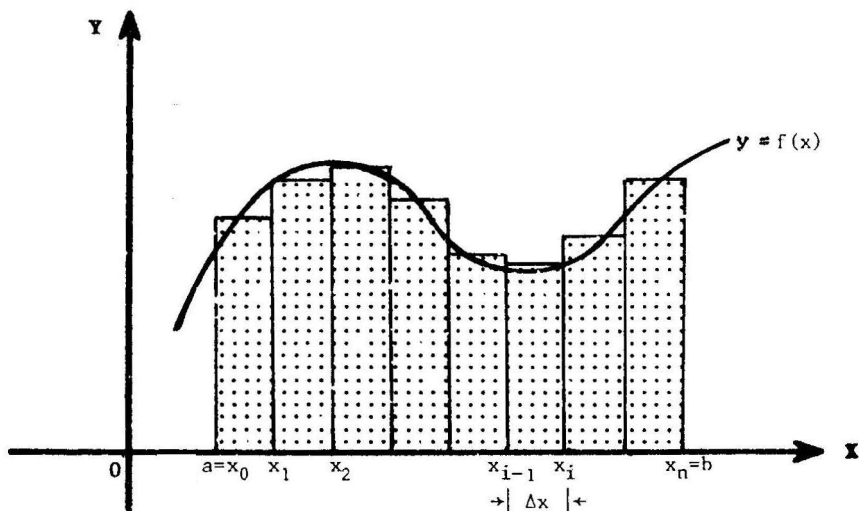
$$(2) \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i=0, 1, \dots, n$$

y (3) ξ_i es un número tal que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$, y por lo tanto, por el teorema precedente, se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x .$$

Representación geométrica



La figura muestra la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Se ha dividido el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ se ha elegido un número ξ_j para formar la suma

de integral $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$. Ahora bien, el teorema que se acaba

de enunciar establece que cuando $\int_a^b f(x) dx$ existe, **para calcular**

este valor basta hallar el límite de S_n cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho de otra

manera, las sumas $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$ **se aproximan al valor de la integral**

cuando el número n de subintervalos de igual longitud **crece indefinidamente**.

2.2.3 Area entre dos curvas

Definición

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Definimos el **área (de la región R comprendida) entre las curvas $f(x)$, $g(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$** , igual al número

$$A = A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (\text{ver fig.1})$$

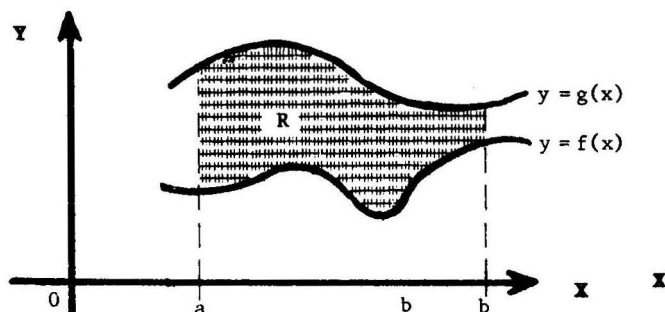


Fig.1 Área entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$

Por ejemplo, si $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$, el **área bajo la curva $f(x)$ y el eje X sobre $[a,b]$** , es igual a

$$A = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{ver fig. 2})$$

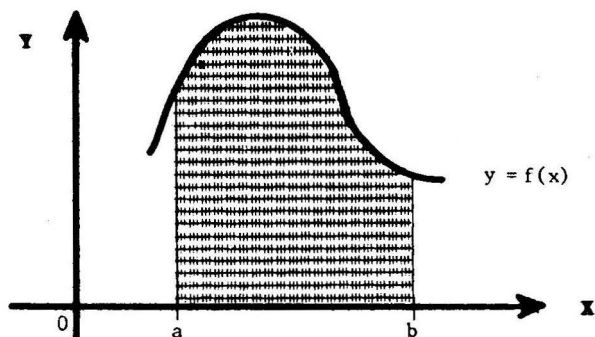


Fig.2 Área bajo la curva $f(x)$

Nota Observemos que la definición dada de área es razonable por cuanto la integral definida es el límite de las áreas de regiones compuestas por rectángulos que se "aproximan a la región comprendida entre las curvas.

Ejemplo 1 Tomando rectángulos inscritos de igual base hallar

$$\int_a^b x \, dx, \quad \text{donde } a < b.$$

Solución

En este caso $f(x) = x$ es una función continua y por lo tanto

existe $\int_a^b f(x) \, dx$.

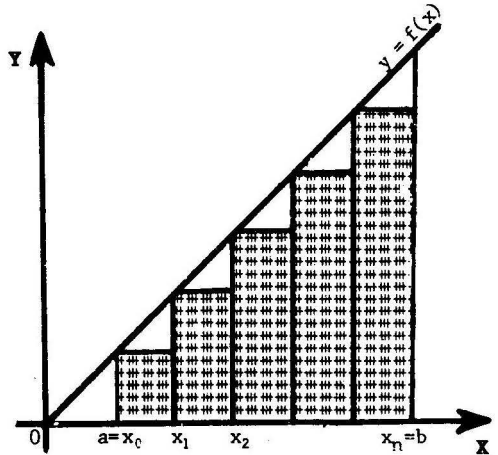
Procedemos a calcular la integral.

Para $n \geq 1$, sean

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad y$$

$$\xi_i = x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$



Luego $f(\xi_i) = \xi_i = x_{i-1} = a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}$.

Formamos la suma

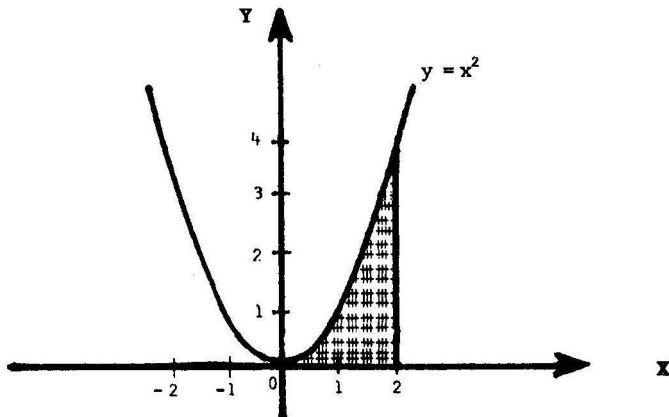
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right] \cdot \frac{(b-a)}{n} \\ &= (b-a) \left[\sum_{i=1}^n \frac{a}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{i(b-a)}{n^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)}{n^2} \right] \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i - \frac{(b-a)}{n} \right] \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n c = nc) \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(b-a)}{n} \right] \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}) \\ &= (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(b-a)}{n} \right] \end{aligned}$$

Luego, por el teorema 2.2.3

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{2} (1) + 0 \right] \quad (\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0) \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar el área bajo la curva $y=x^2$ desde $x=0$ a $x=2$.



La función $y = f(x) = x^2$ es continua y toma valores ≥ 0 .

Debemos calcular $A = \int_0^2 x^2 dx$.

Sea n es un número entero ≥ 1 y tomemos $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$,

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\xi_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(estamos considerando rectángulos circunscritos a la parábola $y = x^2$)

$$\text{Luego } f(\xi_i) = f(x_i) = x_i^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Tenemos entonces

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (\text{teorema 2.2.2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{pues } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{8}{3} \quad (\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0).$$

Ejemplo 3

Probar que $\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$, donde p es un entero ≥ 0 , $a > 0$.

Solución Llamemos $f(x) = x^p$.

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos $\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$,

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{ai}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\xi_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Luego } f(\xi_i) = f(x_i) = \frac{a^p i^p}{n^p}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_0^a x^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x && \text{(teorema 2.2.2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a^p i^p}{n^p} \right) \left(\frac{a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \left(\frac{1}{p+1} n^{p+1} + A_p n^p + \dots + A_1 n + A_0 \right) \\ &&& \text{(por (1.3.4), pág. 82)} \\ &= \frac{a^{p+1}}{p+1} \quad \left(\text{pues } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} = 0 \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Hallar $\int_0^a \text{sen } x dx$, donde $a > 0$.

Solución La función $y = \text{sen } x$ es continua y por lo tanto existe

la integral $\int_0^a \text{sen } x dx$. Procedemos a calcular dicha integral.

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos

$$\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{ia}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\xi_i = x_i = \frac{ai}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Luego $y(\xi_i) = \text{sen } \frac{ia}{n}$.

Entonces tenemos

$$\int_0^a \text{sen } x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\text{sen } \frac{ia}{n}) (\frac{a}{n}) \quad (\text{por el teorema 2.2.2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \text{sen } \frac{ia}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \frac{1}{2 \text{sen } \frac{a}{2n}} \left[\cos \frac{a}{2n} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{a}{n} \right]$$

(aplicando la fórmula (1.3.5) pág. 82, con $x = \frac{a}{n}$)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\text{sen}(\frac{a}{2n})}{(\frac{a}{2n})}} \left[\cos \frac{a}{2n} - \cos(1 + \frac{1}{2n}) a \right]$$

Ahora bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\frac{a}{2n})}{(\frac{a}{2n})} = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{2n} = \cos(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2n}) = \cos 0 = 1 ,$$

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1 + \frac{1}{2n}) a = \cos \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n}) a \right] = \cos a ,$$

y por lo tanto,

$$\int_0^a \text{sen } x dx = 1 - \cos a .$$

Respuesta

$$\int_0^a \text{sen } x dx = 1 - \cos a, \quad \text{si } a > 0 .$$

Ejemplo 5 Encontrar el área entre la curva $y = \frac{1}{x}$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$.

Solución La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $0 < x$. Sea n un número entero ≥ 1 . Tomemos

$$(1) \quad \begin{cases} x_i = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}, & i = 0, 1, \dots, n \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \xi_i = x_i \end{cases}$$

Sea $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$. Probaremos que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } 0 < \Delta x_i = x_i - x_{i-1} &= a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \\ &< b \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right], \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\Delta\| < b \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \quad (\text{por la continuidad de la función} \\ &\quad \text{exponencial } c^x, c > 0) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1, \end{aligned}$$

$$\text{y por consiguiente } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = 0,$$

y teniendo en cuenta la desigualdad anterior,

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = 0, \text{ de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0,$$

lo que prueba (2).

La propiedad establecida en (2) nos permite usar los puntos

x_0, x_1, \dots, x_n para calcular la integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - r^{\frac{1}{n}}\right), \text{ donde } r = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - r^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - r^{\frac{1}{x}}\right)$$

(pasando a la variable continua x , la igualdad se cumple si el segundo límite existe)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forma indeterminada } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-r^{\frac{1}{x}} \cdot \ln r \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} \quad (\text{Regla de L'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -r^{\frac{1}{x}} \cdot \ln r = -\ln r = -\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

Así,

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

2.3 Propiedades de la integral definida

2.3.1 Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Se cumplen las siguientes propiedades

$$(1) \quad \int_a^b dx = b-a$$

$$(2) \quad \int_a^b k(fx) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(4) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Prueba

Sea n un número entero ≥ 1 y tomemos

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ x_i = a + i\Delta x = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i \\ \xi_i = x_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_a^b dx &= \int_a^b h(x) dx, \quad \text{donde } h(x) \text{ es la función constante} \\ &\quad h(x) = 1 \text{ para todo } x, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta x \quad (\text{por el teorema (2.2.2)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \left(\frac{b-a}{n}\right) \quad (\text{pues } h(\xi_i) = 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) = b-a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x && \text{(por (2.2.2))} \\
 &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x = k \int_a^b f(x)dx && \text{(por (2.2.2))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x && \text{(por (2.2.2))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x \\
 &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx && \text{(por (2.2.2))}
 \end{aligned}$$

(4) De $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, se sigue que $f(\xi_i) \geq 0$, y por lo tanto,

cada suma de integral $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x$ es ≥ 0 . Luego, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \geq 0$, de donde resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \geq 0,$$

cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. ■

2.3.2 Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se tiene

- (1) Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- (2) Si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

- (3) Si $|f(x)| \leq k$ en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b-a)$$

Prueba

- (1) Tenemos $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, $g(x) - f(x) \geq 0$, luego

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0 \quad (\text{por (4) del teorema anterior})$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{por (3) del teorema anterior})$$

$$\text{o sea, } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- (2) Tenemos $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (\text{por la parte (1)})$$

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \quad (\text{por (2) del teorema anterior})$$

$$\text{y } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad (\text{por (1) del teorema anterior})$$

- (3) Tenemos $|f(x)| \leq k$ en $[a, b]$, o $-k \leq f(x) \leq k$,
y $-k(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq k(b-a)$ (por la parte (2))

$$\text{Luego } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b-a).$$

2.3.3 Teorema

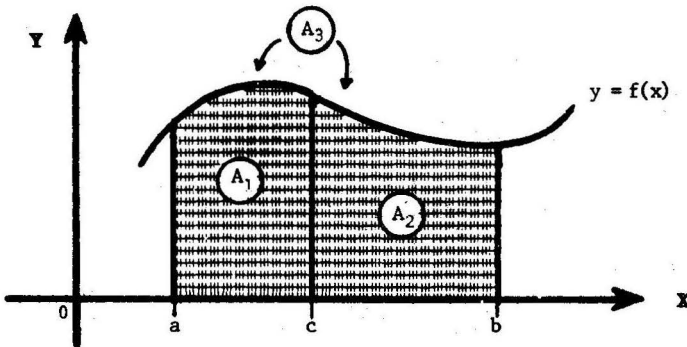
Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se cumple

(1)
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(2)
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$
,

para todo c tal que $a < c < b$.

Representación Geométrica



Si $A_1 = \int_a^c f(x) dx$, $A_2 = \int_c^b f(x) dx$, $A_3 = \int_a^b f(x) dx$,

entonces $A_1 + A_2 = A_3$.

Prueba

(1) Si n es un número entero > 1 , tomamos $\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$,

$x_i = \xi_i = a$.

Luego
$$\int_a^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$$
 (por el teorema 2.2.2)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$
.

(2) Si n es un número entero $n > 1$, tomamos

para el intervalo $[a, c]$:

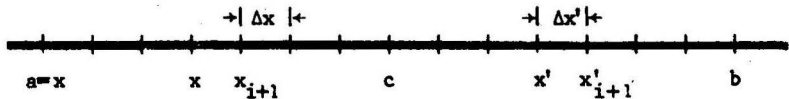
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

para el intervalo $[c, b]$:

$$\Delta x' = \frac{b-c}{n}, \quad x'_i = b + i\Delta x', \quad x'_{i-1} < \xi'_i < x'_i,$$

y para el intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = b:$$



Luego $\|\Delta\| = \max\{\Delta x, \Delta x'\} = \max\left\{\frac{c-a}{n}, \frac{b-c}{n}\right\}$, cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = 0$.

Tenemos entonces por el teorema 2.2.2

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x' \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x' \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo Hallar $\int_0^4 f(x) dx$ si $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 3 \\ x^2 - 3 & 3 < x < 4. \end{cases}$

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^3 2x dx + \int_3^4 (x^2 - 3) dx \\ &= \frac{55}{3}. \end{aligned}$$

2.3.4 La Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ con $b < a$

Definición

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ se define

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ejemplos

$$(1) \int_3^1 x dx = - \int_1^3 x dx = - \frac{3^2 - 1^2}{2} = -4.$$

$$(2) \int_{\pi}^0 \text{sen } x dx = - \int_0^{\pi} \text{sen } x dx = - [1 - \cos \pi] = -2.$$

La siguiente propiedad constituye una generalización de la propiedad (2) del teorema 2.3.3.

2.3.5 Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado que contiene a los números a , b y c . Entonces se cumple

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

sin importar el orden en el cual se encuentran a , b y c .

Prueba

Debemos considerar seis casos posibles

$$\begin{array}{l} \text{Si } a \leq b \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} c < a \leq b \quad (1) \\ a \leq c \leq b \quad (2) \\ a \leq b < c \quad (3) \end{array} \right. \\ \text{y si } b < a \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} c < b < a \quad (4) \\ b \leq c \leq a \quad (5) \\ b < a < c \quad (6) \end{array} \right. \end{array}$$

Probaremos que se cumple $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ en los casos (1) y (6), dejando al cuidado del lector la verificación de los casos restantes.

Caso 1 Tenemos $\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
(por (2) del teorema (2.3.3), ya que $c < a < b$).

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_a^b f(x)dx &= - \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \end{aligned}$$

Caso 6

Tenemos $\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$
(por (2) del teorema (2.3.3), ya que $b < a < c$)

$$\begin{aligned} \text{Luego } - \int_b^a f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \end{aligned}$$

2.4 Teorema Fundamental del Cálculo

2.4.1 Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{en } a \leq x \leq b$$

es una antiderivada de $f(x)$. Esto es,

$$\boxed{\frac{dF}{dx}(x) = f(x)}, \quad \text{en } a \leq x \leq b.$$

Nota.

(1) En la ecuación

$\frac{dF}{dx}(x)$ es la derivada ordinaria de $F(x)$ si $a < x < b$,

$\frac{dF}{dx}(a)$ es la derivada por la derecha de $F(x)$ en $x = a$,

y $\frac{dF}{dx}(b)$ es la derivada por la izquierda de $F(x)$ en $x = b$.

(2) La ecuación $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ puede escribirse

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)}.$$

Prueba

Fijemos un número x tal que $a \leq x \leq b$. Vamos a probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Paso 1

Si $h \neq 0$ y $x+h$ se encuentra en $[a, b]$, entonces

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt \right] \\ &\quad \left(\text{pues } - \int_a^x f(t) dt = \int_x^a f(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (1)$$

$$\text{(pues } \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt, \text{ (por 2.3.3(2))}$$

$$y \quad f(x) = \frac{1}{h} f(x)h = \frac{1}{h} f(x) \int_x^{x+h} dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \quad (2),$$

(pues $f(x)$ es constante)

y restando miembro a miembro (2) de (1) resulta la expresión deseada.

Paso 2

Sea dado $\varepsilon > 0$. Puesto que $f(t)$ es continua en $t=x$, existe un $\delta > 0$ tal que $|t-x| < \delta$ y t en $[a,b]$, implica $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Paso 3

Si $0 < |h| < \delta$ y $x+h$ se encuentra en $[a,b]$, entonces para todo t en el intervalo cerrado de extremos x y $x+h$, se cumple $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

En efecto, puesto que t está en el intervalo cerrado de extremos x y $x+h$, se tiene $|t-x| \leq |h| < \delta$ y, por lo tanto, por el paso (2), $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Paso 4

Sean ε y δ como en el paso (2). Para todo h tal que $0 < |h| < \delta$ y $x+h$ en $[a,b]$ se cumple

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right|, \quad (\text{por el paso (1)}) \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |x+h-x| \quad (\text{por (3) del teorema 2.3.2, } |f(t) - f(x)| < \varepsilon, \text{ por el paso (3)}) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{definición de derivada}) \\ &= f(x) \quad (\text{por el paso (4)}) \end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Observación

La fórmula $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ también puede escribirse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(x)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{por (1) del paso (1)}) \\ &= \frac{dF}{dx}(x) = f(x). \end{aligned}$$

2.4.2 El Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $G(x)$ es una función tal que

$$\frac{dG}{dx}(x) = f(x) \quad \text{en} \quad a \leq x \leq b,$$

entonces
$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Nota

- (1) Este teorema nos dice que **cualquier antiderivada** $G(x)$ de $f(x)$ puede ser empleada para evaluar la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$. En efecto, el valor $\int_a^b f(x) dx$ es la diferencia de los valores de cualquier antiderivada en los extremos b y a .

- (2) De manera equivalente la fórmula $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ suele escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = G(x) \Big|_a^b ,$$

o

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) ,$$

donde $G'(x) = \frac{dG}{dx}(x) = f(x)$.

- (3) El teorema fundamental del cálculo establece una conexión directa entre los conceptos de integral definida y de integral indefinida. Esta conexión es resaltada cuando escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b ,$$

donde $\int f(x)dx$ es la **integral indefinida** de $f(x)$.

Prueba

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$,

Tenemos $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ (por el teorema anterior)
 $= \frac{dG}{dx}(x)$ (por hipótesis).

Luego por el teorema 2, pág. 3, de la diferencia constante,
 $F(x) = G(x) + C$, donde C es una constante,

o $\int_a^x f(t)dt = G(x) + C$.

Evaluamos la constante C haciendo $x = a$, $0 = \int_a^a f(t)dt = G(a) + C$,

de donde $C = -G(a)$, y por lo tanto $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$.

Y para $x = b$, $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$,

o llamando x a la variable t , $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Ejemplo 1 Evaluar las siguiente integrales

$$(1) \int_{-1}^2 x^3 dx .$$

$$(2) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx .$$

$$(3) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx .$$

Solución

$$(1) \int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{(2)^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4}$$

$$(2) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 - (-1) = 2 .$$

$$(3) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big|_{-1}^2 = \frac{14}{3} - \left(-\frac{13}{3} \right) = \frac{27}{3} .$$

Ejemplo 2 Encontrar las integrales

$$(1) \int_{-x}^x e^t dt .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{s^3}{s^8 + 1} ds .$$

Solución

$$(1) \int_{-x}^x e^t dt = e^t \Big|_{-x}^x = e^x - e^{-x} .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{s^3}{s^8 + 1} ds = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(s^4)}{(s^4)^2 + 1} = \frac{1}{4} \arctan s^4 \Big|_0^1 \\ = \frac{1}{4} [\arctan 1 - \arctan 0] = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi}{16} .$$

2.4.3 Teorema

Se cumple

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) ,$$

si $f(t)$ es una función continua en $[a, b]$ y $g(x)$ es una función diferenciable con valores en $[a, b]$.

Prueba

$$\text{Sea } F(u) = \int_a^u f(t) dt. \text{ Luego } \int_a^{g(x)} f(t) dt = F(g(x)).$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} F(g(x)) \\ &= \frac{d}{dx} F(u) , && \text{donde } u = g(x) , \\ &= \frac{dF}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx} && \text{(regla de la cadena)} \\ &= f(u) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \quad \left(\text{pues } \frac{dF}{du}(u) = f(u), \text{ por el teo-} \right. \\ & && \left. \text{rema 2.4.1} \right) \\ &= f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\text{Hallar } \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \cos t dt .$$

Solución

Fijemos un número a cualquiera.

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \cos t dt &= \int_x^a \cos t dt + \int_a^{x^2} \cos t dt \\ &= - \int_a^x \cos t dt + \int_a^{x^2} \cos t dt , \end{aligned}$$

aplicando la fórmula del teorema 2.4.3 resulta

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \cos t dt = - \cos x \cdot \frac{dx}{dx} + \cos(x^2) \cdot \frac{dx^2}{dx} = - \cos x + 2x \cos x^2 .$$

2.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Evaluar las siguientes integrales

$$(1) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(3) \int_1^4 \frac{4 + \sqrt{y}}{y^2} dy$$

SOLUCION

$$(1) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{1}{3} (2x)^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^8 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3} .$$

$$(2) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan e^x \Big|_0^1 \\ = \arctan e - \arctan e^0 = \arctan e - \frac{\pi}{4} .$$

$$(3) \int_1^4 \frac{4 + \sqrt{y}}{y^2} dy = \int_1^4 (4y^{-2} + y^{-3/2}) dy = -4y^{-1} - 2y^{-1/2} \Big|_1^4 \\ = 4 .$$

PROBLEMA 2 Hallar $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

SOLUCION

$$\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-2}^{-3} = \frac{1}{2} [\ln 2 - \ln 3] = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 3 Evaluar $\int_1^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}}$

SOLUCION.

$$\int_1^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}} = \frac{1}{3} \int_1^0 (x^3 + 8)^{-1/2} d(x^3 + 8) = \frac{2}{3} (x^3 + 8)^{1/2} \Big|_1^0$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2.$$

PROBLEMA 4 Encontrar

(1) $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx$.

(2) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+4x}}$.

SOLUCION

(1) $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^5 = \frac{2}{3} (8) - 0 = \frac{16}{3}.$

(2) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+4x}} = \frac{1}{4} \int_0^4 (9+4x)^{-1/2} d(9+4x) = \frac{1}{2} (9+4x)^{1/2} \Big|_0^4$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

PROBLEMA 5 Encontrar $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$.

SOLUCION Completando cuadrados $x^2 + 3x + 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Luego

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int_0^1 \frac{(x + \frac{3}{2}) dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left[(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \right] \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2(\frac{1}{2})} \ln \left[\frac{(x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}}{(x + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} [\ln 6 - \ln 2] - \frac{3}{2} [\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2}] = \ln \left(\frac{9}{8} \right).$$

PROBLEMA 6 Hallar $\int_{-3}^4 |x+2| dx$.

SOLUCION

Tenemos $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_{-3}^4 |x+2| dx &= \int_{-3}^{-2} |x+2| dx + \int_{-2}^4 |x+2| dx \\ &= - \int_{-3}^{-2} (x+2) dx + \int_{-2}^4 (x+2) dx \\ &= - \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^4 = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int_{-2}^3 \sqrt{|x|-x} dx$.

SOLUCION

Tenemos $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\text{y } \sqrt{|x|-x} = \begin{cases} \sqrt{x-x} = 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I &= \int_{-2}^0 \sqrt{|x|-x} dx + \int_0^3 \sqrt{|x|-x} dx \\ &= \int_{-2}^0 \sqrt{-2x} dx + \int_0^3 0 dx = \int_{-2}^0 \sqrt{-2x} dx \\ &= \frac{1}{-2} \cdot \frac{2}{3} (-2x)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = -\frac{1}{3} (-2x)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1+x} \sqrt{x} \, dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^4 \frac{2}{3} \left[1 + x^{3/2} \right]^{1/2} d(1 + x^{3/2}) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \left[1 + x^{3/2} \right]^{3/2} \Big|_0^4 \\
 &= \frac{4}{9} [27 - 1] = \frac{104}{9}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 Evaluar $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 1} = \arctan(x+2) \Big|_0^1 \\
 &= \arctan 3 - \arctan 2.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Encontrar $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

SOLUCION.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1/2} \frac{d(\sqrt{2} x)}{\sqrt{1 - (\sqrt{2} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} x) \Big|_0^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin 0 \right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

SOLUCION

$$I = \int_3^4 \frac{d(x - \frac{3}{2})}{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| \Bigg|_3^4$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Bigg|_3^4 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{4}{3}.$$

PROBLEMA 12 Hallar $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$.

SOLUCION

Tenemos $I = \tan x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int_1^{e} \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx.$

SOLUCION

$$I = -\cos(\ln x) \Big|_1^e = -\cos(1) + \cos 0 = 1 - \cos 1.$$

PROBLEMA 14 Evaluar $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

SOLUCION

$$I = \int_2^5 \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsen\left(\frac{x-2}{3}\right) \Big|_2^5 = \arcsen 1 - \arcsen 0 = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 15 Hallar $I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$.

SOLUCION

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sen 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi+2}{8}$$

PROBLEMA 16 Evaluar $I = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+4}}$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(t^3)}{\sqrt{(t^3)^2+4}} = \frac{1}{3} \ln |t^3 + \sqrt{t^6+4}| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

PROBLEMA 17 Hallar $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx$.

SOLUCION

$$= \ln |\sec x| \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \ln \sqrt{2} - \ln \sqrt{2} = 0$$

PROBLEMA 18 Hallar $\frac{d}{dx} \int_2^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{d}{dx} \int_2^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \sqrt{1+x^8} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$
 (aplicando el teorema 2.4.3, pág.111)
 $= 2x \sqrt{1+x^8}$.

PROBLEMA 19 Hallar $I = \frac{d}{dx} \int_{-\sqrt{x}}^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

SOLUCION

$$I = -\frac{d}{dx} \int_0^{-\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{d}{dx} \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{d}{dx}(-\sqrt{x}) + \frac{1}{1+\tan^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + 1.$$

PROBLEMA 20 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, probar que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx.$$

SOLUCION

Tenemos $-|f(x)| < f(x) < |f(x)|$ en $a \leq x \leq b$,

$$-\int_a^b |f(x)| dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{por 2.3.2}),$$

de donde $\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx$.

PROBLEMA 21 Encontrar el valor menor y el valor mayor posibles de

$$A = \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx.$$

SOLUCION Buscamos los valores mínimo y máximo absolutos de

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} = (x-1)^{2/3} (2x+1)^{1/3} \quad \text{en } [-2, 1].$$

Tenemos
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x)}{(2x^3 - 3x^2 + 1)^{2/3}} = \frac{2x}{(x-1)^{1/3} (2x+1)^{2/3}}.$$

Luego $f'(x) = 0$ si $x = 0$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, y por consiguiente, los puntos críticos en el intervalo $[-2, 1]$ son: $-\frac{1}{2}, 0$.

Tenemos

x	f(x)
-2	-3
$-\frac{1}{2}$	0
0	1
1	0

y $m = \text{valor mínimo absoluto de } f(x) \text{ en } [-2, 1] = -3$

$M = \text{máximo absoluto} = 1.$

Así, $-3 \leq \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \leq 1$ para todo x en $[-2, 1]$

$$- \int_{-2}^1 3dx \leq \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx \leq \int_{-2}^1 dx$$

$$-9 \leq \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1} \, dx \leq 3$$

Así, $-9 \leq A \leq 3.$

PROBLEMA 22

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si

$$\int_a^b f(t) dt \neq 0 \text{ y } k \text{ es un número tal que } 0 < k < 1, \text{ probar que exis}$$

te un número c entre a y b tal que $\int_a^c f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$.

SOLUCION

La función $G(x) = \frac{1}{A} \int_a^x f(t) dt$, donde $A = \int_a^b f(t) dt$, es continua en $[a, b]$, ya que es diferenciable en este intervalo (teorema 2.4.1). Ahora bien, $G(a) = 0$ y $G(b) = 1$, y $0 < k < 1$. Luego, por el teorema del valor intermedio (para funciones continuas) existe un número c en $[a, b]$ tal que $G(c) = k$.

$$\frac{1}{A} \int_a^c f(t) dt = k \quad \text{ó} \quad \int_a^c f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt.$$

Además, $G(a) = 0 < k = G(c) < 1 = G(b)$ implica que $c \neq a$ y b , y por lo tanto, c se encuentra entre a y b .

2.6 Integración por partes para Integrales Definidas

Teorema

Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones que tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se cumple

$$\int_a^b u \, dv = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Prueba

Tenemos $\frac{d}{dx} (u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

o $u \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} (uv) - v \cdot \frac{du}{dx}$

e integrando

$$\int_a^b u \cdot \frac{dv}{dx} \, dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (uv) \, dx - \int_a^b v \cdot \frac{du}{dx} \, dx$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v \, du ,$$

(pues $dv = \frac{dv}{dx} \, dx$, $du = \frac{du}{dx} \, dx$ y $\int_a^b \frac{d}{dx} (u \cdot v) \, dx = uv \Big|_a^b$ por el teorema fundamental del cálculo).

Ejemplo 1

Hallar $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución

Tenemos $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx$

(tomando $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, $v = -\cos x$)

$$= [-\pi \cos \pi + 0] + \operatorname{sen} x \Big|_0^\pi = \pi .$$

Ejemplo 2

Hallar $I = \int_0^{15} \frac{x \, dx}{(1+x)^{3/4}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 I &= 4x(1+x)^{1/4} \Big|_0^{15} - 4 \int_0^{15} (1+x)^{1/4} \, dx \\
 &\quad \text{(tomando } u = x, \, dv = (1+x)^{-3/4} \, dx, \, v = 4(1+x)^{1/4} \text{)} \\
 &= [120 - 0] - \frac{16}{5} (1+x)^{5/4} \Big|_0^{15} \\
 &= 120 - \frac{16}{5} \cdot [32 - 1] = \frac{104}{5}.
 \end{aligned}$$

2.7 Cálculo de Integrales Definidas por Sustitución o cambio de Variable

Teorema Si $x = \phi(t)$ es una función cuya derivada es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $\phi(a) = A$, $\phi(b) = B$, entonces se cumple

$$\int_A^B f(x) \, dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

para toda función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado de extremos A y B .

Prueba

Sea $G(t) = \int_A^{\phi(t)} f(x) \, dx$.

Entonces $\frac{dG}{dt}(t) = f(\phi(t)) \phi'(t)$ (por el teorema 2.4.3),

y por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt &= G(t) \Big|_a^b = G(b) - G(a) \\
 &= \int_A^{\phi(b)} f(x) \, dx - \int_A^{\phi(a)} f(x) \, dx = \int_A^B f(x) \, dx \quad \text{(pues } \phi(a) = A, \\
 &\quad \phi(b) = B \text{)}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{x+1}$

Solución Tomemos $x+1 = t$. Luego $dx = dt$ y cambiando los límites de integración:

$$\begin{array}{ll} \text{cuando} & x = 0, \quad t = 1, \\ & \text{y} \quad x = 3, \quad t = 4. \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{(t-1)^3 dt}{t} = \int_1^4 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln|t| \right]_1^4 = \frac{15}{2} - \ln 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta d\theta$.

Solución Hagamos $t = \tan \theta$. Luego $1+t^2 = \sec^2 \theta$,
 $dt = \sec^2 \theta d\theta$ y cuando $\theta = 0$, $t = 0$; y $\theta = \frac{\pi}{4}$, $t = 1$.

Por lo tanto, aplicando la fórmula de cambio de variable.

$$I = \int_0^1 (1+t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

2.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int_1^2 x \ln x \, dx$.

SOLUCION

Tenemos
$$I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$
 (tomando $u = \ln x$, $dv = x \, dx$, $v = \frac{x^2}{2}$)

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

PROBLEMA 2 Calcular $A = \int_0^\pi e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCION

$$A = \operatorname{sen} x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx$$

(tomando $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^{2x} \, dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$)

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx \quad (\text{pues } \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0)$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} [\cos \pi \cdot e^{2\pi} - \cos 0 \cdot e^0] - \frac{A}{4},$$

de donde $A = \frac{e^{2\pi} + 1}{5}$.

PROBLEMA 3 Calcular $A = \int_0^{1/2} \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

SOLUCION

$$\begin{aligned}
 A &= (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)(-\sqrt{1-x^2}) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} (-\sqrt{1-x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad \text{(tomando } u = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -\sqrt{1-x^2} \text{)} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} dx \\
 &= -\frac{\pi \sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Evaluar $\int_0^1 \operatorname{arc} \tan \sqrt{x} dx$.

SOLUCION Hagamos la sustitución $t = \operatorname{arc} \tan \sqrt{x}$.

Luego $x = \tan^2 t$, $dx = 2 \tan t \sec^2 t dt$,

y cuando $x = 0$, $t = 0$
 $x = 1$, $t = \pi/4$.

Luego, por la fórmula del cambio de variable

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \operatorname{arc} \tan \sqrt{x} dx &= 2 \int_0^{\pi/4} t \tan t \sec^2 t dt \\
 &= t \tan^2 t \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^2 t dt \\
 &\quad \text{(integrando por partes)} \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 t - 1) dt \\
 &= \frac{\pi}{4} - (\tan t - t) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar $A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$.

SOLUCION Hagamos $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x \, dx$, y cuando
 $x = 0$, $t = 0$
 $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$.

Luego $A = \int_0^1 t^3(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^3 - t^5) dt = \frac{1}{12}$.

PROBLEMA 6 Evaluar $A = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{9-2x}$. Luego $x = \frac{9-t^2}{2}$, $dx = -t \, dt$,
y cuando $x = 0$, $t = 3$; $t = 4$, $t = 1$.

Por lo tanto $A = \int_3^1 \frac{-t \, dt}{t} = - \int_3^1 dt = -t \Big|_3^1 = 2$.

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

SOLUCION Sea $x = a \cos t$. Luego $dx = -a \operatorname{sen} t \, dt$,
 $\sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{sen} t$, y cuando $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; $x = a$, $t = 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^0 (a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t \, dt) = a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int_{-1}^2 \frac{x^2 dx}{x+2}$.

SOLUCION Sea $t = x+2$. Luego $x = t-2$, $dx = dt$
y cuando $x = -1$, $t = 1$; $x = 2$, $t = 4$.

Por lo tanto,

$$I = \int_1^4 \frac{(t-2)^2 dt}{t} = \int_1^4 \left(t - 4 + \frac{4}{t} \right) dt$$

$$= \left. \frac{t^2}{2} - 4t + 4 \ln |t| \right|_1^4 = 4 \ln 4 - \frac{9}{2}.$$

PROBLEMA 9 Si $f(x)$ es una función continua tal que $f(-x) = f(x)$,

probar que $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

SOLUCION

Tenemos $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ (1)

Pero $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt)$ (haciendo el cambio de variable $x = -t$)

$$= - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

(pues $f(-t) = f(t)$)

$$= \int_0^a f(x) dx$$
 (2)

y sustituyendo (2) en (1) resulta la igualdad deseada.

PROBLEMA 10 Si $f(x)$ es una función continua tal que

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{probar que} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

SOLUCION

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (1)$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t)(-dt) = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt \\ &= \int_0^a (-f(t)) dt \quad (\text{pues } f(-t) = -f(t)) \\ &= - \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx \quad (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1) resulta la igualdad deseada.

PROBLEMA 11 Calcular $I = \int_0^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} I &= \text{arc sen } x \Big|_0^{-1/2} = \text{arc sen } \left(-\frac{1}{2}\right) - \text{arc sen } 0 \\ &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Probar que
$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{cos} x) dx.$$

SOLUCION. Sea $x = \frac{\pi}{2} - t$. Luego

$$dx = -dt, \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} t \quad \text{y cuando}$$

$$x = 0, \quad t = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad t = 0. \quad \text{Por lo tanto,}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\operatorname{cos} t) (-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{cos} t) dt.$$

2.9 El Teorema del Valor medio para Integrales

Definición Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, se llama **valor promedio de $f(x)$ en $[a, b]$** al cociente

$$\text{V.P.} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo Hallar el valor promedio de $f(x) = x$ en $[a, b]$.

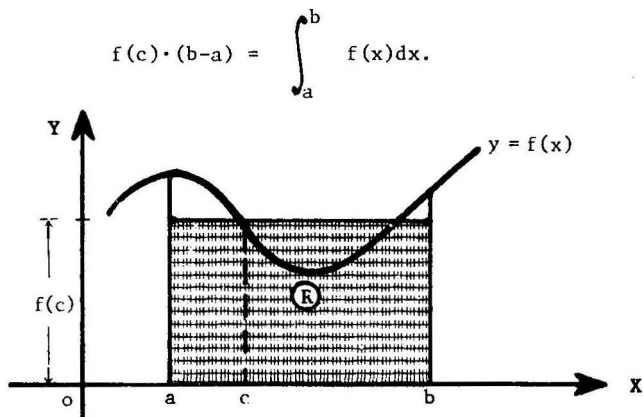
Solución

$$\text{V.P.} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

- Nota** (1) La fórmula indicada puede escribirse: $V.P = f(c)$, para algún c entre a y b .
- (2) Geométricamente, el área del rectángulo R (ver figura) de altura $f(c)$ y base $b-a$ es igual al área bajo la curva



$f(c)$ representa el promedio de los valores de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Prueba del Teorema

Consideremos la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Por el teorema 2.4.1 se sabe que $F(x)$ es diferenciable en $a \leq x \leq b$ y que $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

Luego por el teorema del valor medio para derivadas (teorema 1, pág. 1)

$$\text{se cumple } F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b-a) \quad (1)$$

para algún c tal que $a < c < b$.

$$\text{Pero } F(b) = \int_a^b f(t) dt, \quad F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$F'(c) = f(c),$$

y sustituyendo estos valores en (1)

$$\int_a^b f(t) dt = f(c) \cdot (b-a) \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Ejemplo Si $f(x) = 2+x-x^2$ hallar un c entre 0 y 3 tal que $f(c)$ sea igual al valor promedio de $f(x)$ en $[0,3]$.

Solución Buscamos un número c tal que $0 < c < 3$

$$y \int_0^3 (2+x-x^2) dx = f(c) \cdot (3-0)$$

$$\frac{3}{2} = 3(2+c-c^2).$$

Resolviendo la ecuación $2c^2 - 2c - 3 = 0$

resultan las raíces $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Luego $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$, ya que es el único valor que cumple $0 < c < 3$.

2.10 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el valor promedio de la función $f(x) = a + b \cos x$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

SOLUCION

$$V.P. = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a + b \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} [ax + b \sin x] \Big|_{-\pi}^{\pi} = a.$$

PROBLEMA 2 Comparar las integrales $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x dx$ y $\int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x dx$, sin calcularlas.

SOLUCION Para $0 \leq x \leq 1$ se tiene

$$x^2 \leq x, \quad x^2 \operatorname{sen}^2 x \leq x \operatorname{sen}^2 x,$$

y por el teorema 2.3.2, $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x dx \leq \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x dx$.

PROBLEMA 3 Estimar el valor de

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$$

SOLUCION

Para $-1 < x < 1$ se tiene $7 < 8+x^3 < 9$, o $\frac{1}{9} < \frac{1}{8+x^3} < \frac{1}{7}$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_{-1}^1 \frac{dx}{9} &< \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{7} \\ \frac{2}{9} &< \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \frac{2}{7} . \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Encontrar el menor valor y el mayor valor posibles de

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx .$$

SOLUCION

Puesto que el integrando $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{x - \tan x}{x^2 \cos x} < 0$$

en $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$$

$$\text{y } \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \geq \frac{1}{2} .$$

2.11 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Evaluar $\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 + x + 4}{(x+1)^2} dx$.

Rpta. $\frac{13}{6}$.

PROBLEMA 2 Hallar $\int_{-1}^1 \frac{t^3 dt}{t+2}$.

Rpta. $\frac{26}{3} - 8 \ln 3$.

PROBLEMA 3 Encontrar $\int_0^3 \frac{x e^x dx}{(1+x)^2}$.

Rpta. $\frac{e^3}{4} - 1$.

PROBLEMA 4 Hallar $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx$.

Sugerencia: Hágase $t = \cos x$.

Rpta. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$.