Capítulo 2

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

2.1. PENDIENTE DE UNA RECTA

A continuación desarrollaremos conceptos que permiten expresar, mediante un número, la inclinación de una recta cualquiera respecto del eje X.

Definición 2.1. Dados los puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) con $x_2 \neq x_1$ se define la *pendiente de la línea recta que pasa por* P_1 *y* P_2 como el número:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Obsérvese que como $x_2 \neq x_1$, las rectas que se consideren no pueden ser verticales (perpendiculares al eje X).

Así, la recta que pasa por los puntos P_1 (1, 2) y P_2 (3, 4), tiene pendiente:

$$m = \frac{4 - 2}{3 - 1} = 1 \ ;$$

La recta que pasa por los puntos P_1 (–1, 3) y P_2 (3, –2), tiene pendiente:

$$m = \frac{-2 - 3}{3 - (-1)} = -5/4 \ .$$

La recta que pasa por los puntos P_1 (5, 4) y P_2 (7, 4), tiene pendiente:

$$m = \frac{4 - 4}{7 - 5} = 0.$$

Esta última recta es paralela al eje X. En general toda recta paralela al eje X tiene pendiente 0.

Parecería que la pendiente de una recta varía de acuerdo a los puntos P_1 y P_2 que se tomen, pero esto no sucede. En efecto, tomemos dos puntos P'_1 (x'_1 , y'_1) y P'_2 (x'_2 , y'_2), diferentes a P_1 y P_2 en la recta L, que pasa por P_1 (x_1 , y_1) y P_2 (x_2 , y_2).

Llamemos con m' al número que se obtiene como pendiente al tomar P'_1 y P'_2 y probemos que $m = m'$. Tomando los triángulos rectángulos $P'_1 AP'_2$ y P_1BP_2. (fig. 2.1), se tiene por semejanza que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

Es decir: $m = m'$.

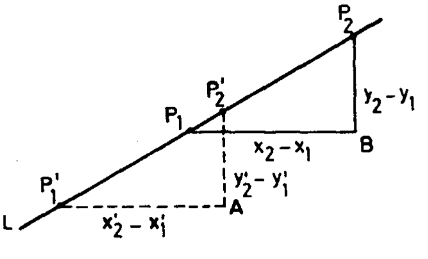

Fig. 2.1

Geométricamente la pendiente de una recta representa a la tangente del ángulo que forma la recta L con el eje X (fig. 2.2), puesto que:

$$tg\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

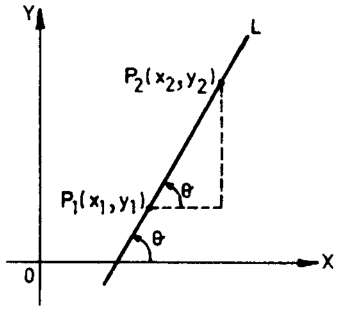

Fig. 2.2

Con fines prácticos obsérvese que:

a) Si la pendiente de una recta es positiva y si la abscisa de un punto crece ($x_2 > x_1$) entonces la ordenada del mismo punto también crece ($y_2 > y_1$). Una recta con esta particularidad se muestra en la figura 2.3.

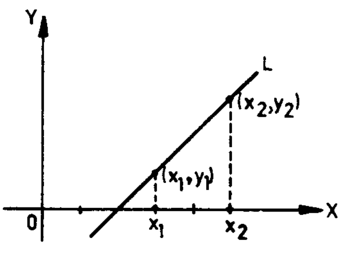

Fig. 2.3

b) Si la pendiente de una recta es negativa y si la abscisa de un punto crece ($x_2 > x_1$), entonces la ordenada decrece ($y_2 < y_1$). La gráfica en este caso debe ser como la de la figura 2.4.

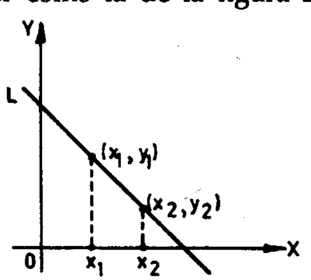

Fig. 2.4

Ejemplo 2.1. Encontrar la inclinación con respecto al eje X de la recta que pasa por P_1 y P_2 donde:

a) $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 3)$
b) $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (3 -3)$
c) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \sqrt{3})$

a) La pendiente de la recta en este caso es

$$m = \frac{3 - 1}{3 - 1} = 1.$$

Luego el ángulo θ de inclinación de la recta con respecto al eje X tiene tangente igual a 1. Es decir: $tg\ \theta = 1$. De aquí resulta: $\theta = 45°$.

b) La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-3 - 1}{3 - (-1)} = -1.$$

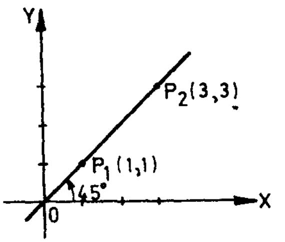

Fig. 2.5

Luego el ángulo θ de inclinación de la recta con respecto al eje X tiene tangente igual a -1. Esto es: $tg\ \theta = -1$. Luego $\theta = 135°$.

c) La tangente del ángulo de inclinación en este caso es

$$tg\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Luego $\theta = 60°$.

2.2 LA LINEA RECTA

En la sección 2.1 se definió el concepto de pendiente de una recta determinada por los puntos $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ como el número real $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$, y se estableció que este número m no depende del par particular de puntos elegidos en la recta para calcularlo. Con ésta observación podremos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1. La línea recta L que pasa por el punto $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ con pendiente m tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)\ . \tag{2.1}$$

Primero debemos demostrar que si $P\ (x\ ,\ y)$ es un punto cualquiera de la recta L, entonces las coordenadas de P satisfacen la ecuación.

Supongamos $P = P_1$. Es evidente que las coordenadas de P_1 satisfacen a la ecuación (2.1) desde que

$$y_1 - y_1 = m\ (x_1 - x_1) \quad ó \quad 0 = 0$$

Si consideramos el caso $P \neq P_1$, entonces desde que existe m, la recta L no es vertical y por lo tanto $x \neq x_1$ ó $x - x_1 \neq 0$, y

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando por $x - x_1 \neq 0$ ambos miembros se obtiene

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)\ .$$

Esto prueba que las coordenadas de cualquier punto sobre la recta satisfacen la ecuación (2.1), incluyendo las coordenadas del punto P_1.

Para que la demostración sea completa, debemos además demostrar que todo punto $P\ (x', y')$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2.1) está realmente sobre la recta L. Es decir, debemos estar seguros de que no existen puntos de la gráfica de $y - y_1 = m\ (x - x_1)$ que no están sobre la recta L.

Sea $P'\ (x', y')$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2.1). Entonces: $y' - y_1 = m\ (x' - x_1)$ y si $x' = x_1$ entonces también $y' = y_1$ o sea, $P' = P_1$ y P' está sobre L.

Si $x' \neq x_1$, entonces $x' - x_1 \neq 0$ y podemos dividir por $x' - x_1$

quedando $m = \dfrac{y' - y_1}{x' - x_1}$.

Esto prueba que P' está sobre la recta que pasa por P_1 con pendiente m, es decir P' está sobre L. Esto completa la demostración.

La ecuación $y - y_1 = m\ (x - x_1)$ se llama la ecuación de una recta en la *forma de punto y pendiente.*

Ejemplo 2.2 Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 (–2, 5) con pendiente – 3/4.

Por el teorema anterior la ecuación es $y - 5 = -3/4\ (x + 2)$ ó $3x + 4y - 14 = 0$.

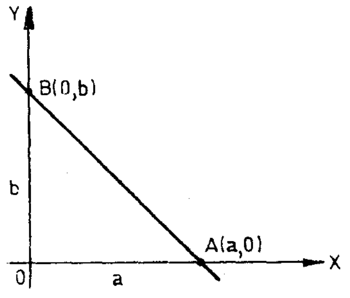

Fig. 2.6

Toda recta L no vertical interseca a los ejes coordenados en los puntos $A\ (a,\ 0)$ y $B\ (0,\ b)$. Los números a y b se denominan *abscisa* y *ordenada en el origen,* respectivamente.

La ecuación de la recta que pasa por B $(0, b)$ con pendiente m será: $y - b = m\ (x - 0)$ ó $y = mx + b$. Esta forma de la ecuación de la recta se llama *forma de pendiente y ordenada en el origen.*

Si una recta L es vertical (paralela al eje Y), corta al eje de abscisas X en algún punto tal como el punto $(a, 0)$ (fig. 2.7); cualquier punto de abscisa x = a está en L, no importando cual sea su ordenada. Así, los puntos $(a, 1)$, $(a, 5/2)$, $(a, -3)$ están sobre L. Recíprocamente si un punto está sobre la recta L, entonces su abscisa será a. De esta manera, la ecuación $x = a$ es la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$.

En forma similar se puede probar que: la ecuación $y = b$ es la ecuación de la recta horizontal (paralela al eje X) que pasa por el punto $(0, b)$ (fig. 2.8).

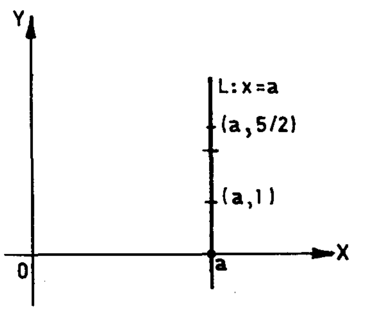

Fig. 2.7

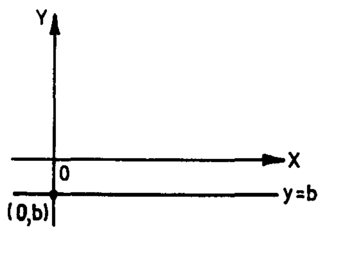

Fig. 2.8

Problema: Determinar la ecuación de una recta que pasa por los puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2).

Si $x_1 = x_2$ *entonces la recta que pasa por* P_1 y P_2 es vertical y su ecuación es $x = x_1$.

Si $x_1 \neq x_2$ entonces la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P_2 es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ,$$

y utilizando la ecuación de una recta en su forma de punto y pendiente se tiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) .$$

Ejemplo 2.3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (4, 6) y P_2 (–1, 3).

Utilizando la ecuación de una recta que pasa por dos puntos se obtiene:

$$y - 6 = \frac{3 - 6}{-1 - 4}(x - 4) \quad ó$$

$$3x - 5y + 18 = 0.$$

Problema: Hallar la ecuación de la recta con abscisa en el origen $a \neq 0$ y ordenada en el origen $b \neq 0$. (fig. 2.6).

La recta pasa por los puntos A $(a, 0)$ y B $(0, b)$, por lo tanto su pendiente es:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a} .$$

La forma pendiente y ordenada en el origen nos permite establecer la ecuación de la recta:

$$y = \frac{-b}{a}x + b \qquad \text{o en forma equivalente:} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Esta forma de la ecuación de una recta se denomina *forma intersección.*

Ejemplo 2.4. Determinar la ecuación de una recta con abscisa en el origen 2 y que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área 6 unidades.

La ecuación de la recta en su forma intersección es

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{b} = 1.$$

El área del triángulo BOA (fig. 2.6) es

$$\frac{ab}{2} = \frac{2b}{2} = b = 6.$$

Luego la ecuación de la recta buscada es

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{ó} \quad 3x + y - 6 = 0.$$

Ejemplo 2.5. Un punto dista 5 unidades del origen y la pendiente de la recta que lo une con el punto A (3, 4) es 1/2. Determinar sus coordenadas.

Sea P (x, y) el punto buscado. Entonces

$$\frac{y - 4}{x - 3} = 1/2 \quad \text{ó} \quad x = 2y - 5. \qquad (1)$$

Como P (x, y) dista 5 unidades del origen, entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = 25 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2): elevando (1) al cuadrado: $x^2 = 4y^2 - 20y + 25$; de (2) : $x^2 = 25 - y^2$. Igualando, ordenando y simplificando: $y^2 - 4y = 0$ ó $y\ (y - 4) = 0$.

Dos soluciones para y: $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Reemplazando estos valores en la ecuación (1) de la recta se obtiene: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

La única solución al problema es el punto P_1 (–5, 0) puesto que la otra posible solución P_2 (3, 4) coincide con el punto A.

2.3 LINEAS RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Un estudio de las pendientes de dos rectas podrá indicarnos si estas son paralelas o perpendiculares o no poseen estas propiedades.

Teorema 2.2. Dos rectas diferentes son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas y con pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

Primero probaremos que si $m_1 = m_2$ entonces L_1 y L_2 son paralelas.

Supongamos que siendo $m_1 = m_2$, sin embargo L_1 y L_2 no son paralelas. Demostraremos que esta suposición nos lleva a una contradicción. En efecto, como L_1 y L_2 no son paralelas, se cortan en un punto $P_0\ (x_0\ ,\ y_0)$ que estará sobre ambas rectas, es decir: $y_0 = m_1x_0 + b_1$ y $y_0 = m_2x_0 + b_2$. De donde $b_1 = b_2$, y por lo tanto L_1 y L_2 tienen las mismas ecuaciones, es decir son iguales, lo que contradice la hipótesis de que L_1 y L_2 son distintas.

Luego la suposición inicial es falsa, y L_1 y L_2 son paralelas.

Nos queda por probar que si L_1 y L_2 son paralelas entonces $m_1 = m_2$.

Sean: $\quad L_1 \ : \ y = m_1x + b_1$

$\qquad\quad L_2 \ : \ y = m_2x + b_2$.

Supongamos $m_1 \neq m_2$ y probemos que esto conduce a que L_1 y L_2 tienen un punto de intersección y por lo tanto no son paralelas. En efecto, calculemos las coordenadas del punto de intersección: $m_1x + b_1 = m_2x + b_2$, de donde

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \qquad \text{y reemplazando en } L_1 :$$

$$y = \frac{m_1\ (b_2 - b_1)}{m_1 - m_2} + b_1 = \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{m_1 - m_2}$$

(ambos valores existen pues se supone que $m_1 \neq m_2$) . Luego el punto de intersección es:

$$P_0 = \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \;,\; \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \right)$$

Esto es una contradicción pues L_1 y L_2 son paralelas diferentes.

Ejemplo 2.6. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 6$ con ordenada en el origen -4.

Comparando la ecuación de la recta $y = -2x + 6$ con la forma pendiente y ordenada en el origen: $y = mx + b$ se observa que para esta recta, $m = -2$ y $b = 6$.

Se estableció en el teorema 2.2 que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, luego la recta buscada tiene también pendiente -2. Siendo su ordenada en el origen -4, su ecuación es: $y = -2x - 4$ ó $2x + y + 4 = 0$.

Ejemplo 2.7. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 6$ que pasa por el punto P_1 $(-1, -1)$.

Por ser la recta buscada paralela a la recta $y = -2x + 6$ entonces su pendiente es -2. Como además pasa por P_1 $(-1, -1)$, la ecuación de una recta en su forma punto-pendiente nos dá: $y + 1 = -2\ (x + 1)$ ó $2x + y + 3 = 0$.

Teorema 2.3. Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Sean:
$$L_1 \;:\; y = m_1 x + b_1$$
$$L_2 \;:\; y = m_2 x + b_2 \,.$$

Supongamos L_1 y L_2 perpendiculares. Tracemos por el origen dos rectas l_1 y l_2 paralelas a L_1 y L_2 respectivamente (fig. 2.9).

Las ecuaciones de l_1 y l_2 son: $y = m_1 x$, e
$y = m_2 x$, respectivamente.

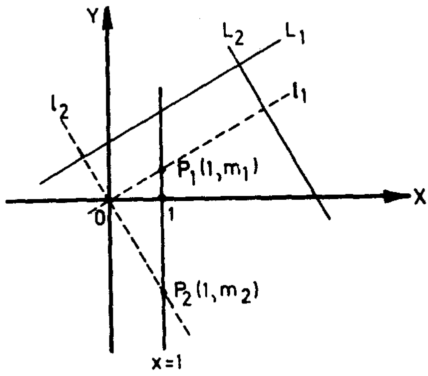

Fig. 2.9

Tracemos la recta $x = 1$ que corta a l_1 y l_2 en los puntos P_1 $(1, m_1)$ y P_2 $(1, m_2)$ respectivamente. El triángulo P_1OP_2 es rectángulo, luego el teorema de Pitágoras permite establecer:

$$[d\ (0, P_1)]^2 + [d\ (0, P_2)]^2 = [d\ (P_1\ , P_2)]^2 \text{ ; es decir:}$$

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$$

$$m_1m_2 = -1.$$

Para probar la segunda parte, supongamos que $m_1m_2 = -1$. Invirtiendo los pasos de la demostración de la primera parte, se llega a probar que:

$$[d\ (0, P_1)]^2 + [d\ (O, P_2)]^2 = [d\ (P_1\ , P_2)]^2\ .$$

De aquí se deduce que l_1 y l_2 son perpendiculares y por lo tanto también lo son L_1 y L_2 .

Ejemplo 2.8. Encontrar la ecuación de la recta L_1 que contiene al punto $(-1, -3)$ y es perpendicular a la recta L_2 de ecuación $4x + 8y + 5 = 0$.

La pendiente m_2 , de L_2 , es $-1/2$. Por el teorema 2.3 la pendiente m_1 de L_1 debe cumplir $m_1m_2 = -1$; luego $m_1 = 2$. La ecuación de L_1 se determina utilizando la fórmula punto pendiente:

$$y + 3 = 2\ (x + 1) \qquad ó$$
$$2x - y - 1 = 0$$

EJERCICIOS 2.1

1.—Encontrar en cada caso la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente indicada y trazar la gráfica respectiva.

a) $(3, -2)\ ,\ 3/4$

b) $(10\ ,\ -1)\ ,\ \sqrt{3}$

2.—Encontrar en cada caso la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:

a) $(-1, 2)\ ,\ (3, 4)$

b) $(0, 0)\ ,\ (5, -3)$

c) $(\sqrt{2}, -18)\ ,\ (\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3})$

3.—Sea el triángulo ABC de vértices $A\ (-1, 1)$, $B\ (6, 2)$, $C\ (2, 5)$. Determinar:

a) La ecuación del lado $\overline{AB}$;

b) La mediana de A al lado $\overline{BC}$;

c) La altura bajada de A al lado $\overline{BC}$;

d) La ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a $\overline{AC}$;

e) La ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a $\overline{AB}$;

f) El punto de intersección de las rectas de los acápites d) y e).

4.—Las ecuaciones de dos de los lados de un paralelogramo son $2x - 3y + 7 = 0$ y $4x + y = 21$. Si uno de sus vértices es $(-1, -3)$, encontrar los otros vértices.

5.—Determinar el valor de k en la ecuación: $2x + 3y + k = 0$, de manera que esta recta forme con los ejes coordenados un triángulo de 27 unidades de área.

6.—Determinar el valor de m para el cual la recta $y = mx + m$ pasa por el punto $(-1/2, 3)$.

7.—Determinar la ecuación de la recta que contiene el segmento de longitud menor que une el origen con un punto de la recta de ecuación $2y - 4x = 9$.

8.— Dado un triángulo cualquiera probar que el punto P intersección de las medianas (baricentro) divide a la mediana $\overline{VM}$ en la razón 2, siendo V uno de los vértices y M el punto medio del lado opuesto a V.

9.— Hallar las coordenadas del vértice C del triángulo ABC sabiendo que $A = (-3, 5)$, $B = (8, -7)$ y que las coordenadas del baricentro del triángulo son $(4, -2)$.

10.—Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y que interseca a las rectas: $x - y = 3$, $y = 2x + 4$ en A y B, respectivamente de tal manera que el origen es punto medio de $\overline{AB}$.

11.—Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de la recta de pendiente igual a 1 y de ordenada en el origen k, con la recta de pendiente k y ordenada en el origen 0, a medida que k toma todos los valores reales posibles.

2.4. ECUACION GENERAL DE LA LINEA RECTA

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ donde por lo menos uno de los números reales A ó B es diferente de cero, se llama *ecuación lineal general* en las variables x e y ó *ecuación lineal de primer grado* en x e y.

Teorema 2.4. Toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación lineal de primer grado en x e y.

Hemos visto que si una recta es no-vertical, entonces su ecuación puede tomar la forma: $y = mx + b$ ó $mx - y + b = 0$. Es decir, es una ecuación lineal en x e y donde $A = m$, $B = -1$ y $C = b$. Si la recta es vertical entonces su ecuación es $x = a$, que es también de la forma:

$Ax + By + C = 0$, donde $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

Por último, si la recta es horizontal, su ecuación es $y = b$, ecuación lineal con $A = 0$, $B = 1$ y $C = -b$.

Teorema 2.5. La gráfica de una ecuación lineal de primer grado en x e y, $Ax + By + C = 0$ con A ó B diferentes de cero, es una línea recta.

Si $B \neq 0$, podemos escribir la ecuación $Ax + By + C = 0$ en la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad ,$$

que es la ecuación de una recta con pendiente $m = -\dfrac{A}{B}$

y ordenada en el origen $b = -\dfrac{C}{B}$

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la ecuación lineal puede escribirse $x = -\dfrac{C}{A}$, que es la ecuación de una recta vertical.

Los dos teoremas últimos nos permiten reconocer cualquier ecuación de primer grado en dos variables como la ecuación de una línea recta.

2.5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Consideremos las ecuaciones de dos rectas no paralelas a los ejes coordenados, en su forma general:

$$L \quad : \quad Ax + By + C = 0$$

$$L' \quad : \quad A'x + B'y + C' = 0$$

Las pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B} \quad , b = -\frac{C}{B} \quad \text{para la recta } L, \text{ y}$$

$$m' = -\frac{A'}{B'} \quad , b' = -\frac{C'}{B'} \quad \text{para L'.}$$

Si las rectas son paralelas, entonces $m = m'$, o sea

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \quad \text{ó también} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad .$$

Si las rectas L y , L' son coincidentes, entonces además se tendrá que $b = b'$, es decir

$$-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'} \quad \text{o sea} \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad .$$

Por tanto, si L y L' son coincidentes se tiene que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad .$$

Si las rectas dadas son perpendiculares, entonces se cumple la relación $mm' = -1$ entre sus pendientes. Es decir

$$\left(\frac{-A}{B}\right)\left(\frac{-A'}{B'}\right) = -1 \quad \text{ó} \quad AA' + BB' = 0.$$

Por último para que las rectas L y L' se corten en un solo punto, será necesario y suficiente que no sean paralelas, es decir:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{ó} \quad AB' - A'B \neq 0.$$

Los recíprocos de los resultados anteriores son todos evidentes. Podemos entonces enunciar el teorema siguiente:

Teorema 2.6. Si las ecuaciones de dos rectas no paralelas a los ejes coordenados son:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{y}$$
$$A'x + B'y + C' = 0 \ .$$

entonces las rectas:

a) Son coincidentes si y sólo si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$

b) Son paralelas si y sólo si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$ ó $AB' - A'B = 0$

c) Son perpendiculares si y sólo si $AA' + BB' = 0$

d) Se cortan en un solo punto si y sólo si $AB' - A'B \neq 0$ ó

$\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$

Ejemplo 2.9. Determinar los coeficientes A y B en la ecuación de la recta:

$$Ax + By + 4 = 0,$$

de manera que pase por la intersección de las rectas $3x - 4y - 6 = 0$, $x + y - 9 = 0$ y sea perpendicular a la recta $2y + x - 36 = 0$.

Para determinar el punto de intersección, resolvemos simultáneamente el sistema:

$$3x - 4y - 6 = 0$$

$$x + y - 9 = 0\ ,$$

obteniendo como solución $x = 6$, $y = 3$. Es decir, $P\ (6, 3)$ es un punto de paso de la recta $Ax + By + 4 = 0$, por tanto $6A + 3B + 4 = 0$. (1)

Como la recta es además perpendicular a $2y + x - 36 = 0$, entonces debe verificarse $AA' + BB' = 0$, o sea $A + 2B = 0$. (2)

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $A = -8/9$, $B = 4/9$.

Ejemplo 2.10. Determinar la distancia de punto $P\ (1, 4)$ a la recta L de ecuación $3x + 2y = 6$.

Si L_1 es la recta que pasa por P y es perpendicular a L, y P_1 es el punto de intersección de L y L_1 , entonces la distancia buscada es $d\ (P, P_1)$. (fig. 2.10).

Siendo $m = -3/2$ la pendiente de L, la pendiente de L_1 es $m_1 = 2/3$. La ecuación de L_1 es $y - 4 = 2/3\ (x - 1)$, ó $3y - 2x = 10$. Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \quad , \\ 3y - 2x &= 10 \end{aligned}$$

encontramos las coordenadas del punto $P_1 = (-2/13\ ,\ 42/13)$.

La distancia pedida es:

$$d\ (P,\ P_1) = \sqrt{(1 + 2/13\ )^2 + (4 - 42/13)^2} = \frac{5\ \sqrt{13}}{13}$$

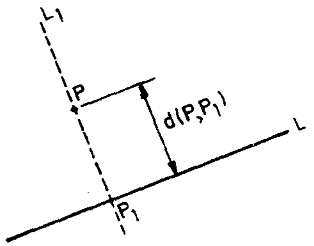

Fig. 2.10

2.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

En el ejemplo último se vio un método que permite calcular la distancia de un punto del plano a una recta dada. Sin embargo, debido a la frecuencia con que es necesario determinar esa distancia, es preferible encontrar una fórmula que nos permita resolver el problema con menor dificultad.

Sea $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ un punto del plano y L: $Ax + By + C = 0$ una recta no-vertical dada. Sea S el pie de la perpendicular bajada de P_1 a L. la longitud del segmento $\overline{P_1S}$ se denomina *distancia del punto* P_1 a la recta L.

La recta vertical que pasa por P_1 corta a L en un punto Q y al eje de abscisas en un punto R. Si llamamos θ al ángulo SP_1Q del triángulo rectángulo QSP_1 , entonces la distancia por calcular es $d\ (P_1,\ S) = d\ (P_1,\ Q) \cos\ \theta$. (fig. 2.11) (1)

Las coordenadas del punto Q son (x_1, y_0) y por estar Q en la recta L se tiene:

$$Ax_1 + By_0 + C = 0 \text{ , ó también } y_0 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B} \quad ,$$

Luego:

$$d(P_1, Q) = |y_1 - y_0| = \left| y_1 - \left(\frac{-Ax_1 - C}{B} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \qquad (2)$$

Si llamamos α al ángulo que forma L con la parte positiva del eje de las abscisas, entonces si $\alpha < 90°$ se tiene $\theta = \alpha$, y $tg\ \theta = tg\ \alpha = m$; *si* $\alpha > 90°$ *entonces* $\theta = 180° - \alpha$, y $tg\ \theta = tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -m$.

Además, en cualquier caso, siempre $0 \leq \theta < 90°$ y por tanto *cos* θ *es siempre positivo.*

Como la pendiente de la recta L es

$$m = -\frac{A}{B}$$

entonces
$$tg\ \theta = \pm \frac{A}{B} \quad ,$$

y el *cos* θ podemos calcularlo por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

La condición $\cos\theta > 0$ exige que el *signo del radical se escoja siempre igual al signo de B*. Reemplazando (2) y (3) en la ecuación (1) :

$$d(P_1, S) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right| \left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \quad ,$$

donde el signo del radical se escoge igual al de B.

Si sólo nos interesa el valor absoluto de la distancia entonces podemos simplificar la expresión anterior y escribir finalmente:

$$d\ (P_1\ ,\ L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

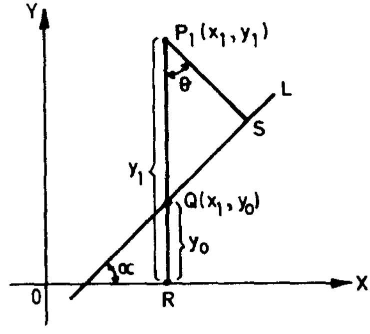

Fig. 2.11

En algunos problemas interesa considerar un signo para la distancia, denominándose entonces *distancia relativa.* Por convención, le haremos corresponder a la distancia relativa el signo que resulta al calcularla por la expresión $d\ (P_1\ ,\ S) = (y_1 - y_0)\ cos\ \theta$. Es decir el signo es el mismo que el de la diferencia $y_1 - y_0$ (puesto que $cos\ \theta$ es positivo). En este caso, la fórmula de la distancia relativa es:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde el signo debe tomarse igual al signo de B para estar de acuerdo con la convención señalada.

Para terminar, observemos que el signo de la distancia relativa nos indica la posición relativa del punto P_1 con respecto a la recta L. En efecto, si Q es el punto de intersección de la recta L con la recta vertical que pasa por P_1 , entonces la distancia es positiva si P_1 está por encima de Q (puesto que en este caso $y_1 > y_0$) y negativa si P_1 está por debajo de Q , $(y_1 < y_0)$.

Es decir, la distancia relativa es positiva o negativa según el punto P_1 esté arriba o debajo de la recta L, respectivamente.

Las posibles posiciones de P_1, respecto de la recta L, según sea su inclinación, se presentan en la figura 2.12.

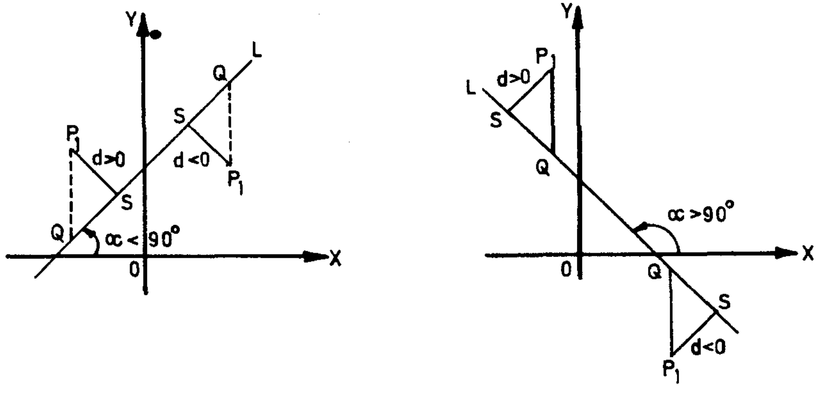

Fig. 2.12

Ejemplo 2.11. Determinar la distancia entre las rectas paralelas L: $2x - 3y + 6 = 0$, y L_1 : $2x - 3y - 12 = 0$.

Consideremos un punto de L, por ejemplo su ordenada en el origen: $B = (0, 2)$. La distancia entre L y L_1 es igual a la distancia del punto B (0, 2) a la recta L_1 . Si d es esta distancia, entonces:

$$d = \frac{|(-3)(2) - 12|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13} .$$

Ejemplo 2.12. Los vértices de un triángulo son A (–3, 1), B (5, –1), y C (6, 5). Determinar la longitud de la altura bajada del vértice C al lado $\overline{AB}$.

La ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{AB}$ es:

$$x + 4y - 1 = 0$$

La longitud buscada es igual a la distancia de C a la recta $x + 4y - 1 = 0$:

$$d = \frac{|6 + (4)(5) - 1|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{25}{\sqrt{17}} .$$

Problema: Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas $x + y + 4 = 0$, $7x - y + 4 = 0$.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Luego, si $P\ (x\ , y)$ es un punto en la bisectriz del ángulo formado por:

$x + y + 4 = 0\ ,\ 7x - y + 4 = 0\ ,$ entonces:

$$\frac{|x + y + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|7x - y + 4|}{\sqrt{49 + 1}}$$, es decir, hay 2 soluciones:

$$\frac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = \frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}} \quad \text{y} \quad \frac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = -\frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}}$$

Simplificando y ordenando: $x - 3y - 8 = 0\ ,\ 3x + y + 6 = 0$. La primera ecuación corresponde a la bisectriz del ángulo obtuso y la segunda a la del ángulo agudo.

2.7 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Estableceremos en esta sección, una relación que permita expresar la tangente del ángulo α que forman dos rectas L_1 y L_2 en función de las pendientes respectivas.

Primero definiremos lo que vamos a considerar como el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2

El ángulo que L_1 forma con L_2 es el ángulo α no mayor de 180° medido en el sentido contrario al de las agujas de un reloj desde L_2 hasta L_1.

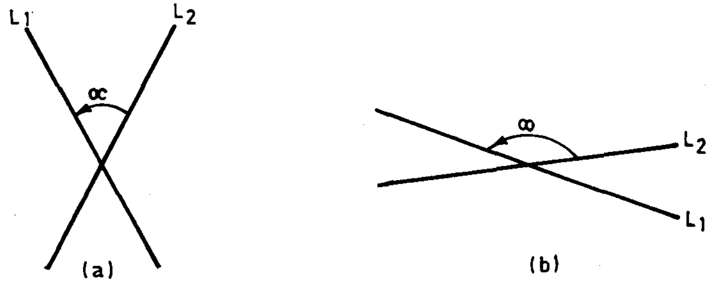

Fig. 2.13

En las figuras 2.13 a) y b) se muestra en cada caso, el ángulo que L_1 forma con L_2.

Sean L_1 y L_2 rectas con pendiente m_1 y m_2 respectivamente. Si α es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 entonces:

$$tg\ \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

si $m_1 m_2 \neq -1$, esto es si L_1 y L_2 no son perpendiculares.

En efecto, si θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 respectivamente, entonces (fig. 2.14):

$\theta_1 = \theta_2 + \alpha$, de donde $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ y tomando tangentes:

$$tg\ \alpha = tg\ (\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg\ \theta_1 - tg\ \theta_2}{1 + tg\ \theta_1\ tg\ \theta_2} \quad \text{ó} \quad tg\ \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

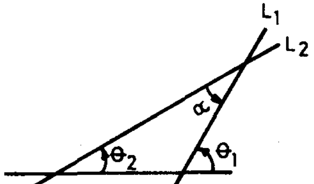

Fig. 2.14

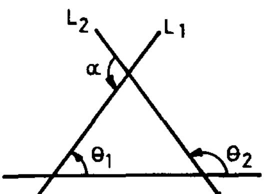

Fig. 2.15

En la figura 2.15 se tiene:

$\theta_2 = \theta_1 + (180° - \alpha)$, de donde $\alpha = 180° + (\theta_1 - \theta_2)$, y

$$tg\ \alpha = tg\ [180° + (\theta_1 - \theta_2)] = tg\ (\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \ .$$

Ejemplo 2.13. Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A (–1, –4), B (1, 4) y C (5, 1).

Llamemos L_1 a la recta que contiene al lado $\overline{AC}$, L_2 a la que contiene al lado $\overline{BC}$ y L_3 a la que contiene a $\overline{AB}$. Entonces las pendientes de L_1 , L_2 y L_3 son respectivamente:

$$m_1 = \frac{1 + 4}{5 + 1} = \frac{5}{6} \ ,$$

$$m_2 = \frac{4 - 1}{1 - 5} = - \frac{3}{4} \ ,$$

$$m_3 = \frac{4 + 4}{1 + 1} = \frac{8}{2} = 4 \ .$$

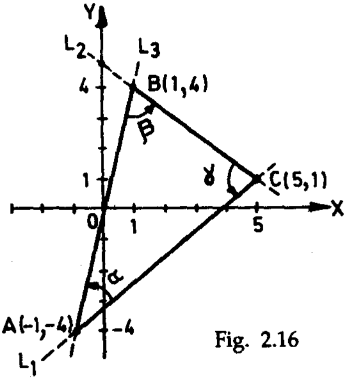

Fig. 2.16

El ángulo interior α , formado por las rectas L_3 y L_1 (en ese orden), se calcula por la fórmula deducida en el acápite anterior:

$$tg\ \ \alpha = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1} = \frac{4 - 5/6}{1 + 20/6} = \frac{19}{26} = 0.731 \ .$$

Análogamente para los ángulos β (formado por L_2 y L_3) y γ (formado por L_1 y L_2).

$$tg\ \beta = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{-3/4 - 4}{1 - 3} = \frac{19}{8} = 2.375$$

$$tg\ \gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{5/6 + 3/4}{1 - 15/24} = \frac{38}{9} = 4.222$$

En las tablas de valores naturales encontramos los ángulos buscados: $\alpha = 36°09'$, $\beta = 67°10'$ y $\gamma = 76°41'$.

EJERCICIOS 2.2

1.— Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas:

a) $x - 3y + 4 = 0$
b) $2x + 5y - 2 = 0$

2.— Determinar, analizando los coeficientes de los siguientes pares de ecuaciones, cuales representan rectas que coinciden, son paralelas o se cortan en un punto:

a) $6x + 2y + 5 = 0$
$x + 3y + 5 = 0$

b) $x - y - 6 = 0$
$x + y - 6 = 0$

c) $2x + 2/3y = 2/3$
$3x + y = -1$

d) $8x - 2y = 2$
$2x - 1/2y = 1/2$

3.— Hallar el valor de a para que la recta: $ax + (a - 1)\ y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

4.— Determinar los valores de a_1 y a_2 para que las dos ecuaciones: $a_1x - 7y + 18 = 0$, $8x - a_2y + 9a_1 = 0$ representen la misma recta.

5.— Determinar si existe algún punto perteneciente a la recta que pasa por los puntos: $A\ (1/2, -1)$ y $B\ (7, 11/2)$, tal que su abscisa sea igual a su ordenada.

6. Hallar la ecuación de una recta con ordenada en el origen igual a -4 y perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A\ (-10, 1)$, $B\ (4, -6)$.

7. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A\ (9, 6)$ y corta a las rectas: $2x - 3y + 6 = 0$, $y - 4 = 0$ en los puntos B y C respectivamente, de tal manera que:

$$\frac{d\ (B, A)}{d\ (A, C)} = \frac{2}{3}$$

8.— Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-5/12$ y forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de perímetro 15 unidades.

9.— Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $8x + 15y - 10 = 0$, y que se encuentran a una distancia igual a 2 unidades del punto A (2, 1).

10.— Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados se encuentran sobre las rectas $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$ y $6x - 7y - 16 = 0$.

11.— La recta que pasa por A (2, 6) y C (5, –2) es tangente en el punto A, a una circunferencia que pasa por el punto B (3, 9). Determinar el centro de la circunferencia.

12.— Las rectas $y = (1/2)x$, $y = 2x$ son cortadas en los puntos M_1 y M_2 respectivamente, por una recta que se mueve manteniéndose paralela siempre al eje de abscisas. Determinar el lugar geométrico del punto de intersección de las perpendiculares en M_1 y M_2 a las rectas $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = 2x$, respectivamente.

13.— Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ y dista del punto P (4, 1) una distancia igual a $\sqrt{5}$.

14.— La recta L pasa por el punto A (9, 6) y corta a las rectas $2x - 3y + 6 = 0$, $y - 4 = 0$ en los puntos B y C respectivamente.

Encontrar la pendiente de L si $\dfrac{d\ (B\ ,\ A)}{d\ (B,\ C)} = \dfrac{2}{5}$.

15.— La recta L: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

forma con los semiejes coordenados positivos un triángulo de área igual a 4 unidades. Hallar $a + b$ sabiendo que la recta L y la recta $y = 2x$ forman un ángulo cuya tangente es 2.

16.— Sea A (2, 0) y B (3, 3) la base de un triángulo. Hallar el vértice C sabiendo que está en el primer cuadrante, que el área del triángulo ABC es 5 unidades de superficie y que la recta que une C con el origen forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

17.—La recta L se mueve en el plano de tal modo que el ángulo que forma con el eje X es 60°. Si A y B son los puntos donde L corta a los ejes X e Y, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de $\overline{AB}$.

18.—Encontrar el valor de a de manera que las ecuaciones siguientes representen a dos rectas paralelas pero no coincidentes:

$$ax + (a - 1)y - 2\,(a + 2) = 0$$

$$3ax - (3a + 1)y - (5a + 4) = 0.$$

19.—Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 1) y forma un ángulo de 45° con la recta $3x + 2y - 1 = 0$.

20.—Determinar las coordenadas del punto en el primer cuadrante que equidista de los puntos (4, 1) y (–1, –2) y dista 3 unidades de la recta $12y - 5x + 30 = 0$.