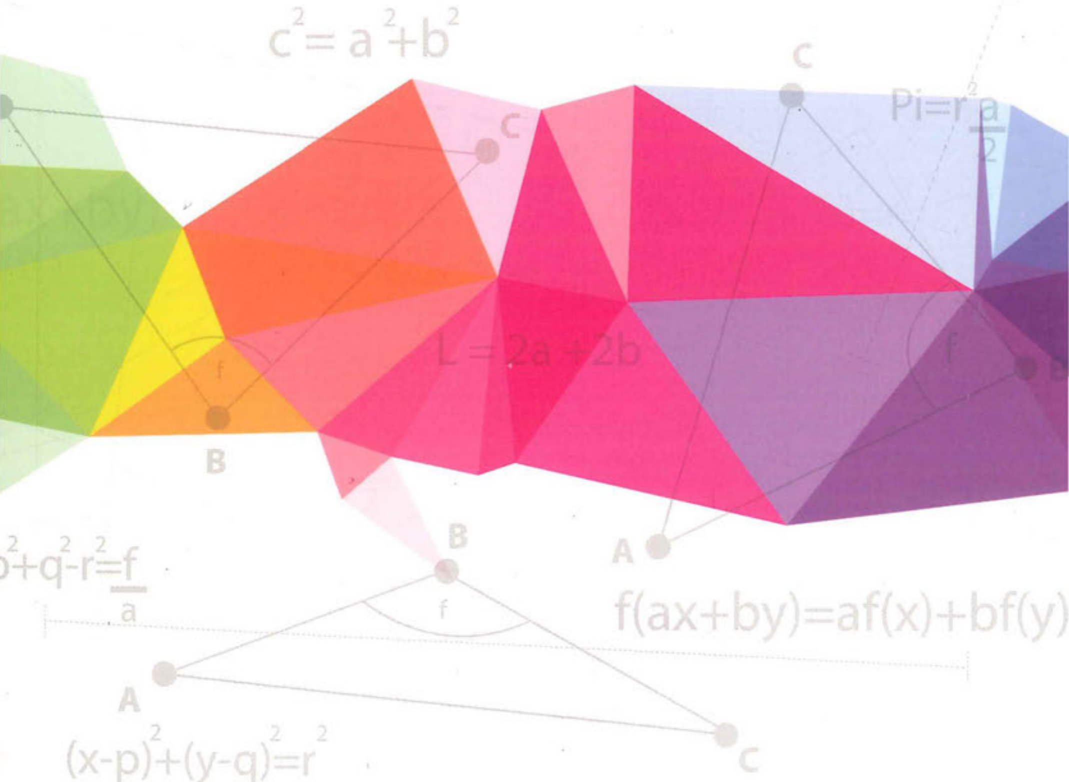
INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra
Editores



Jesús Flores es doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo y profesora asociada del Departamento de Ciencias de la PUCP. Se desempeña como directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y directora del eje de Formación del IREM-PUCP. Tiene más de cincuenta publicaciones como autora y coautora entre artículos y capítulos de libros. Desde 2013 es coordinadora de proyectos de investigación en la línea de tecnologías digitales, en el ámbito nacional e internacional. Ha obtenido el Premio a la Responsabilidad Social Docente PUCP en 2014 y 2015 y el Premio de Reconocimiento a la Investigación PUCP en 2015.

Francisco Ugarte Guerra es doctor en Matemáticas por la Universidad de Valladolid, profesor principal del Departamento de Ciencias de la PUCP y profesor honorario de la Universidad Nacional de Huancavelica. Asimismo, es director de Relación con el Entorno del IREM-PUCP. Sus tesis de licenciatura, maestría y doctorado fueron dirigidas por J.M. Aroca, reconocido mundialmente como un especialista en resolución de singularidades. Tiene más de treinta publicaciones como editor, autor y coautor de libros y artículos. Es promotor nacional de la iniciativa Matemáticas: de la PUCP al Perú y de las Escuelas Doctorales Intercontinentales de Matemáticas PUCP-UVA. Ha obtenido el Premio de Reconocimiento a la Investigación PUCP en 2011, 2012 y 2014, y el Premio a la Responsabilidad Social Docente PUCP en 2014 y 2015.

INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar
Francisco Ugarte Guerra
Editores

INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FONDO EDITORIAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

ÍNDICE

Presentación

El presente libro recoge los resultados del proyecto de investigación denominado Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos, en el que han participado el grupo de investigación Didáctica de las Matemáticas-DIMAT, del Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y el grupo Processos de Ensino e Aprendizagem de Matematica-PEAMAT de la Universidad Catolica de São Paulo (PUC-SP).

Los resultados de las investigaciones que publicamos, en forma de artículos, fueron seleccionados por un comité científico internacional, conformado por reconocidos especialistas del área de Educación Matemática provenientes de Argentina, Colombia, Chile, México y Perú, a quienes agradecemos por haber aceptado nuestra invitación y por sus oportunos comentarios y sugerencias a los autores.

Hemos dividido el libro en tres áreas temáticas. En primer término, se presentan investigaciones en educación básica regular; luego, se reúnen trabajos en educación superior; y, finalmente, se incluyen artículos sobre la formación de profesores de matemáticas.

Confiamos en que esta publicación contribuya a la formación y al diálogo entre profesores e investigadores del área de Educación Matemática, en especial del Perú y Brasil.

Jesús Flores y Francisco Ugarte
Editores

Prólogo

Durante mi estadía en el IREM de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en Lima, en febrero de 2016, con ocasión de la quinta edición del Programa CANP de la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI), los colegas del IREM me presentaron diferentes y muy ricas actividades que fueron llevadas a cabo por esta institución. Ellos, en ese momento, hicieron alusión a las investigaciones que su grupo Didáctica de las Matemáticas-DIMAT habían realizado en colaboración con investigadores del grupo PEA-MAT de la PUC de São Paulo, en el marco del proyecto titulado Procesos de Enseñanza Aprendizaje de Matemáticas en Ambientes Tecnológicos, y manifestaron que, a partir de dichas investigaciones, se estaba elaborando un libro que estaba casi terminado. Efectivamente, algunas semanas después, recibí en Francia su versión definitiva de la que acepté hacer el prefacio.

Este libro, cuya lectura es muy interesante y muy agradable, está constituido por cuatro capítulos, y cada uno de ellos da cuenta de una investigación especial que se ha llevado a cabo en el marco de dicho proyecto. En cuanto al último capítulo, este es la contribución de un seminario asociado. Muchas de estas investigaciones fueron visiblemente realizadas en el contexto de estudios de maestrías, también de doctorados ya sea en una u otra universidad. De manera que el español y el portugués se alternan a lo largo de los capítulos estructurados en tres partes que corresponden respectivamente a los trabajos concernientes a la educación básica, la educación superior y la formación de profesores, seguidas de un capítulo que se ha dedicado a trabajos de historia de las matemáticas en relación con la enseñanza.

Así pues, cada capítulo nos muestra una investigación particular que tiene cuidado especial en precisar el planteamiento del problema, el marco teórico y la metodología, antes de presentarnos sus resultados ya sea en síntesis o centrándose en ciertos estudios de casos. Los campos matemáticos que se abordan son muy diversos: aritmética, geometría, álgebra, funciones y análisis, probabilidad y estadísticas, etcétera. Sin embargo, la geometría ocupa un lugar de excepción, ya que las cuestiones relativas a su enseñanza y aprendizaje, o a sus instrumentos, constituyen el tema de la mitad de los capítulos. El título del proyecto en sí mismo podría hacernos pensar que la tecnología estaría omnipresente; sin embargo, no es el caso, a pesar de que es el centro de la problemática de seis de los capítulos.

Como investigadora en el área solo puedo sentir familiaridad respecto de los enfoques teóricos que han sido movilizados. En ellos se encuentran casi todos los marcos teóricos de la tradición didáctica francesa: teoría de las situaciones didácticas, teoría de los campos conceptuales, transposición didáctica, teoría antropológica de lo didáctico, enfoque instrumental, la teoría de registros de representación semiótica y en lo que concierne más específicamente a la geometría, la noción de paradigma y de espacio de trabajo geométrico. Estos marcos están claramente presentados y los trabajos realizados hacen de ellos un uso absolutamente pertinente y productivo. Y lo que también he apreciado en el libro, es que, aun cuando las investigaciones que se realizaron en el seno de estas dos instituciones se alimentan de esta tradición didáctica francesa, no por ello se sometieron a esta. También se movilizaron otros enfoques, como por ejemplo, el enfoque ontosemiótico o las teorías asociadas al *«task design»*, así como combinaciones originales de diferentes marcos y nociones.

Respecto al aspecto metodológico, son las metodologías cualitativas las que predominan, ya sea que se trate de metodología de Ingeniería Didáctica, especialmente en los trabajos que movilizaron instrumentos tecnológicos, o de enfoques bibliográficos que se utilizaron para estudiar programas de enseñanza y diversos recursos curriculares.

Esta coherencia, tanto teórica como metodológica, confiere a las tres primeras partes del libro una verdadera unidad a pesar de la diversidad de las investigaciones contenidas en ellas. Además, los resultados relativamente convergentes contribuyen también a la coherencia de este libro.

En cuanto al último capítulo dedicado a la historia de las matemáticas, es sensiblemente diferente, como era de esperar; pero, no por ello es menos bienvenido y útil. Como investigadora siempre he sido especialmente sensible a las cuestiones de epistemología de las matemáticas. También tengo la suerte de trabajar, desde hace muchos años, como parte de un equipo de investigación en el que compartimos esta sensibilidad epistemológica, y de una escuela doctoral en la que se reagrupan la didáctica de las disciplinas y la historia, epistemología y filosofía de las ciencias. Así, al leer la reflexión crítica tan interesante que desarrolla Fumikazu Saito en el capítulo que cierra este libro, no pude dejar de pensar en las discusiones que discurren durante las jornadas anuales de nuestra escuela doctoral.

Escribir este prefacio, a solo algunos días del coloquio internacional de la red de los IREM que tendrá lugar en Estrasburgo y, en el que el IREM del Perú estará representado, tiene para mí un significado muy especial. Este libro nos muestra, de manera brillante, la calidad de los trabajos de investigación que se realizaron en este IREM tan dinámico; trabajos fundados científicamente de manera tan sólida, inundados por los conceptos y métodos de la didáctica francesa, pero, atreviéndose y sabiendo combinarlos productivamente con otros enfoques; trabajos enraizados en la realidad del campo de la educación matemática del Perú y desarrollados en colaboración con la PUC-SP de Brasil, para responder a las necesidades propias de cada uno de estos dos países.

Para alguien como yo, que trabaja tantos años en la red de los IREM y que lleva consigo los valores de esta institución tan especial e innovadora en muchos aspectos, y para la red de los IREM, este libro es un hermoso regalo que nos hacen nuestros colegas peruanos y brasileños. Espero que sean muchos quienes lo lean y encuentren en él una fuente de inspiración; y que esta obra contribuya a reforzar los lazos entre nuestras respectivas instituciones.

Michèle Artigue

Prefacio

O presente livro apresenta parte dos resultados de um projeto que envolve pesquisadores da Pontificia Universidade Catolica do Peru (PUCP) e a Pontificia Universidade Catolica de São Paulo (PUC-SP) produzido por pesquisadores dos grupos DIMAT e PEAMAT.

É composto de quince capítulos apresentados em quatro partes. A primeira parte denominada «Investigações em Educação Básica Regular» apresenta sete capítulos que discutem temas que foca principalmente, os seguintes aspectos: o estudo da instrumentação da simetria axial mediada pelo software Geogebra, a simetria ortogonal em algumas coleções de livros didáticos de matemática para Ensino Fundamental II; a análise de organizações matemáticas para o ensino de números inteiros presentes em livros didáticos; diferentes significados para o sinal de igualdade em geometria; análise de situações didáticas em termos do letramento probabilístico; construção de conceito de circunferência baseada na dialética ferramenta-objeto e com apoio do Geogebra.

A segunda parte, intitulada «Investigações no Ensino Superior», traz em seu bojo cinco capítulos que discutem as seguintes temáticas: a aprendizagem de Valores Máximos e Mínimos locais de uma função de duas variáveis; um estudo da elipse em um processo de instrumentalização mediado pelo software Geogebra; um estudo do conceito de derivada em um curso de Administração; um estudo do conceito de área por aproximação; a análise de erro em torno do conceito de limite finito de uma função real de variável real.

«Investigações sobre formação de professores de matemática» é a terceira parte, em que se abobadam as seguintes temáticas: paradigmas geométricos e os tipos de prova e esquemas de prova; a visualização de quadriláteros no registro figural dinâmico; um estudo a respeito das relações entre o ensino de Estatística na Educação Básica e o ensino de Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática; análise de livro didático e a construção do processo de ensino por meio de tarefas e técnicas focalizando as contribuições da TAD.

A quarta parte chamada «Investigações em História da Matemática» apresenta reflexões sobre a integração da História da Matemática como recurso nos processos de ensino e de aprendizagem. Ela traz discussões sobre as seguintes temáticas: o uso do báculo (baculum) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática e História e ensino de matemática: construindo interfaces.

O livro, devido à diversidade de temáticas e problemáticas discutidas, constitui-se uma contribuição e uma base para os estudantes ou pesquisadores da área de Educação Matemática que desejam se engajar na pesquisa, bem como para professores que desejam aprofundar seus conhecimentos nas temáticas abordadas.

Saddo Ag Almouloud

Comité científico

Magíster Lileya Manrique (Pontificia Universidad Catolica del Perú, Perú).

Doctora Margarita Wong (Universidad Peruana Cayetano Heredia, Perú).

Doctor Walter F. Castro G. (Universidad de Antioquia, Colombia).

Doctor Jhony Alexander Villa-Ochoa (Universidad de Antioquia, Colombia).

Doctora Patricia Camarena (Instituto Politécnico Nacional de México, México).

Doctora Soledad Estrella (Pontificia Universidad Catolica de Valparaíso, Chile)

Doctora Liliana Mabel Tauber (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).

A simetria ortogonal em algumas coleções de livros didáticos de Matemática para Ensino Fundamental II[1]

The orthogonal symmetry in some collections of math textbooks for Elementary Education II

Cleusiane Vieira Silva[2]
Saddo Ag Almouloud[3]

Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa de doutorado em andamento na qual investigamos a prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos, em um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal. Buscamos identificar qual é o tratamento dispensado em livros didáticos de Matemática quanto ao ensino da simetria ortogonal. Analisamos quatro coleções, apoiados na Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente nas noções de tarefa, técnica e tecnologia. Como principal resultado dessa análise, observamos que as generalizações matemáticas relacionadas à simetria ortogonal, como a conservação de propriedades, são pouco exploradas nas tarefas propostas nos livros didáticos e as validações de procedimentos e respostas requeridas ficam restritas ao senso comum.

Palavras-chave: *Livros didáticos. Simetria ortogonal. Organização Praxeológica.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) - cleusianesilva@gmail.com

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) - saddoag@gmail.com

Abstract

This article is part of a doctoral research in progress, in which we investigated the teaching practice and its influence in the construction of geometric concepts in a study on the teaching and learning of orthogonal symmetry. We aim to identify which is the treatment in some mathematics textbooks regarding the teaching of orthogonal symmetry. We have analyzed four collections of mathematics textbooks based on the Anthropological Theory of Didactic, specifically on the notions of task, technique and technology. As the main outcome of this analysis, we observed that the mathematical generalizations related to orthogonal symmetry, like the conservation of properties, remain underused in the tasks proposed in didactic textbooks, and the required validations of the procedures and responses are restricted to common sense.

Keywords: *Didactic books. Orthogonal symmetry. Praxeological organization.*

Introdução

Recurso importante nos processos de ensino e de aprendizagem e, muitas vezes, a principal fonte de consulta de professores, o livro didático pode nos dar alguns indícios sobre o ensino de determinado conteúdo, sobretudo a simetria ortogonal. A importância desse recurso tomou uma dimensão ainda maior depois da implementação da política pública de distribuição de livros por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD[4]). No guia de livros didáticos PNLD 2014 para o Ensino Fundamental II, escolhemos as coleções de livros de matemática para alunos do 6º ao 9º anos aprovadas para o triênio 2014-2016. Observamos por intermédio da análise dos conteúdos abordados em cada uma das coleções que a simetria (em particular simetria ortogonal) é contemplada em todas as 10 coleções aprovadas. A seguir apresentamos um quadro cujo objetivo é destacar a importância dada à simetria nessas coleções:

[4] Este guia apresenta as coleções de livros didáticos de matemática aprovadas para o triênio 2014-2016, além de uma resenha sobre cada coleção aprovada e os critérios de avaliação das mesmas.

Quadro 1
Importância dada à simetria nos livros didáticos aprovados no PNLD 2014

Coleções aprovadas no PNLD 2014	Livros da coleção em que aparece	Está associada aos conteúdos
Descobrindo e aplicando a Matemática	6º ano	Figuras geométricas espaciais e planas; simetria de reflexão;
	7º ano	Figuras geométricas, medida de ângulos, ângulos: entre retas, em polígonos, na circunferência;
Matemática Bianchini	7º ano	Simetria de reflexão; ângulos: complementares, suplementares, opostos pelo vértice;
	8º ano	Ângulos – medidas de ângulo – circunferência; simetria: axial, de rotação.
Matemática ideias e Desafios	6º ano	Polígonos: ladrilhamento; simetria axial;
	7º ano	Simetria axial
	8º ano	Simetria axial: eixo de simetria; distância de ponto a reta; simetria central; movimentos rígidos no plano: reflexão, translação e rotação de movimentos rígidos e congruência de figuras geométricas planas; Padrões e ladrilhamentos;
Matemática Imenes & Lellis	6º ano	Simetria de reflexão - números simétricos
	7º ano	Ângulos – medidas de ângulo – circunferência; simetria: axial, de rotação;
	8º ano	Ângulos formados por retas paralelas e transversais; polígonos; quadriláteros; simetrias;
	9º ano	Desigualdade triangular; simetria; desenho em perspectiva;

Coleções aprovadas no PNLD 2014	Livros da coleção em que aparece	Está associada aos conteúdos
Matemática: teoria e Contexto	6º ano	Ângulos; polígonos; circunferência e círculo; paralelepípedos; prismas e pirâmides; simetria axial;
	7º ano	Ângulo - medida de ângulos - retas perpendiculares; triângulos; polígonos regulares; simetrias: axial, de rotação, central; localização no plano; representação em perspectiva;
Praticando Matemática	6º ano	Triângulos, quadriláteros; polígonos regulares – perímetro – circunferências; simetria de reflexão;
Projeto Arariba Matemática	6º ano	Sólidos geométricos: poliedros e corpos redondos; figuras geométricas planas; vistas – gráfico de coluna, simetria de reflexão;
Projeto Telaris Matemática	7º ano	Poliedros e corpos redondos: elementos, classificação; polígonos convexos; vistas; simetria de reflexão, gráficos;
	9º ano	Figuras geométricas semelhantes; semelhança de polígonos; transformações geométricas: translação, reflexão, rotação, homotetia – gráficos de setores;
Projeto Velear Matemática	8° ano	Simetrias de: reflexão, rotação e translação; mosaicos e ornamentos.
Vontade de saber Matemática	6° ano	Polígonos: classificação; triângulos e quadriláteros; circunferência e círculo; simetria de reflexão;
	7º ano	Ampliação, redução e reprodução de figuras; simetria: reflexão, rotação;
	9º ano	Simetria de rotação; simetria de translação, simetria de reflexão;

Fonte: quadro elaborado pelos autores com base no Guia do PNLD 2014

Notamos, por meio do quadro 1, que a simetria ortogonal aparece sempre relacionada a outros conteúdos de geometria, por exemplo, na classificação de polígonos, e na maioria das vezes, em mais de um livro da coleção. Assim, entendemos ser importante fazer uma análise sobre o tratamento dado à simetria ortogonal em alguns livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental II, isto é, como este conteúdo é introduzido, quais são os tipos de problemas e de técnicas propostas aos mesmos. As coleções de livros didáticos alvos de nossa análise foram escolhidos utilizando dois critérios:

- A coleção escolhida e adotada pela escola alvo da pesquisa de doutorado segundo o guia do PNLD para o triênio 2011-2013;
- As coleções escolhidas (primeira, segunda e terceira opções) por esta escola segundo o guia do PNLD para o triênio 2014-2016,

A análise dessas coleções nos ajudará a compreender, em parte, algumas questões referentes à realidade que cerca o ensino da simetria ortogonal no sistema de ensino.

Análise das quatro coleções de livros didáticos escolhidas

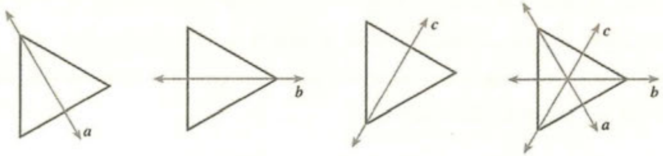
A noção de simetria ortogonal é introduzida nos livros didáticos levando em consideração a etimologia da palavra e a noção de espelhamento e sobreposição como pode ser verificado na figura 1.

> *A palavra* ***simetria*** *vem do grego e quer dizer "justa proporção". Você pode verificar se uma figura é simétrica traçando um eixo, dividindo a figura em duas partes iguais. Se as duas partes, assim divididas, forem exatamente iguais e puderem se sobrepor, a figura será simétrica.*

Figura 1. Coleção 1, 2009, p. 304

Outra forma de introduzir a ideia de simetria ortogonal abordada nas quatro coleções é por intermédio de uma atividade lúdica de cunho intuitivo. Estas envolvem principalmente, a manipulação de figuras por meio de dobradura. Os autores aproveitam as atividades desse tipo para definir intuitivamente eixo de simetria como uma de linha reta, que divide a figura em duas partes com mesma forma e mesma dimensão como se uma fosse a imagem refletida em um espelho da outra. A definição de figura simétrica e assimétrica deriva da definição de eixo de simetria. A palavra forma nesta definição intuitiva parece remeter à aparência da figura. Em alguns casos são apresentados no corpo do texto ou na lista de exercícios alguns polígonos e seus eixos de simetria como podemos conferir na figura 2:

Observe o triângulo equilátero abaixo, reproduzido quatro vezes.



Note que as retas *a*, *b* e *c* são eixos de simetria desse triângulo. Por isso, dizemos que o triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria.

Figura 2. Coleção 2, 2011, p. 166

Esse autor apresenta ainda, outros polígonos e propõe aos alunos uma discussão sobre a diferença entre o número de eixos de simetria do quadrado e do losango. O autor utiliza esta reflexão para definir polígono regular utilizando a noção de eixo de simetria como «todo polígono que tem o número de lados igual ao número de eixos de simetria é denominado polígono regular» (Coleção 2, 2011, p.166). Reconhecemos a habilidade do autor em fazer a conexão entre a noção de polígono regular e eixo de simetria, mas avaliamos que esta seria um tipo de definição que poderia ser estabelecida pelo próprio aluno por meio de um conjunto de situações cujas tarefas o levasse a tal conclusão.

A organização praxeológica

Para a análise dos livros didáticos, utilizamos a noção de organização praxeológica proposta por Chevallard (1998), segundo o qual, o postulado básico da Teoria Antropológica do Didático estabelece que toda atividade humana é realizada segundo um modelo único resumido pela palavra praxeologia. De forma simplificada, «um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização praxeológica (ou praxeologia) pontual» (Almouloud, 2007, p.117). Segundo Artaud (1988), para que um tipo de tarefa didática T possa viver no sistema de ensino, é necessário que exista um conjunto de técnicas que permitam realizar T, tecnologias relativas a estas técnicas (um discurso que permita justificar as técnicas) e por fim uma teoria que é a explicação da tecnologia.

Ao analisarmos as tarefas propostas nos livros didáticos, levamos em consideração as técnicas desenvolvidas pelos autores. Sendo assim construímos nossa ferramenta de análise de acordo com o conjunto de critérios apresentados por Chevallard (1998). Para fim de melhor entendimento colocamo-los na forma de questões. Quanto aos tipos de tarefa temos os seguintes critérios.

Critério de identificação: os tipos de tarefas estão claramente apresentados e identificados? As tarefas em torno da noção de simetria ortogonal são interligadas a outros conteúdos matemáticos ou independentes? As tarefas são compostas de situações que permitem gerar por meio de seu sistema de variáveis problemas culturalmente conhecidos gerando assim conhecimentos? As tarefas são representativas de um *corpus* de conhecimentos localizados em torno da simetria ortogonal efetivamente disponível, suficientemente numeroso e de adequado grau de dificuldade?

Critério das razões de ser: que interesses as tarefas relacionadas à simetria ortogonal colocam em evidência? Ficam explícitas as razões de ser dessas tarefas?

Critério de Pertinência: as atividades propostas nas tarefas fazem aparecer as propriedades matemáticas relacionadas à simetria ortogonal; a tarefa faz surgir algum tipo de generalização do ponto de vista matemático?

Segundo Chevallard (1998), as técnicas seguem os mesmos critérios que as tarefas, isto é, as técnicas que envolvem a noção de simetria ortogonal (dobradura, espelhamento, sobreposição, utilização de malhas quadriculadas, construções geométricas, demonstrações) propostas nos livros didáticos são realmente desenvolvidas ou apenas esboçadas? As técnicas são apresentadas com adequada evolução de acordo com o grau de maturidade do alunado ou se mantêm estáveis? São suficientemente inteligíveis? Seu escopo é satisfatório?

Quanto ao bloco teórico-tecnológico, para cada técnica relacionada à simetria ortogonal apresentada foi realmente oferecida uma justificativa ou esta é considerada como tacitamente dada, natural, evidente ou popular? As formas de justificação dadas são fechadas às formas canônicas em matemática? São adaptadas às condições? Os resultados tecnológicos são disponibilizados e na verdade otimamente explorados?

A seguir apresentamos a análise de duas tarefas, uma de reconhecimento de figura que eixo de simetria e a outra de construção de figura simétrica, retiradas dos livros didáticos analisados. Nessa análise, destacamos o tipo de tarefa, as técnicas disponibilizadas pelos autores, o discurso teórico-tecnológico em torno de cada situação.

Situação 1: Entre as figuras geométricas representadas a seguir, quais possuem eixo de simetria?

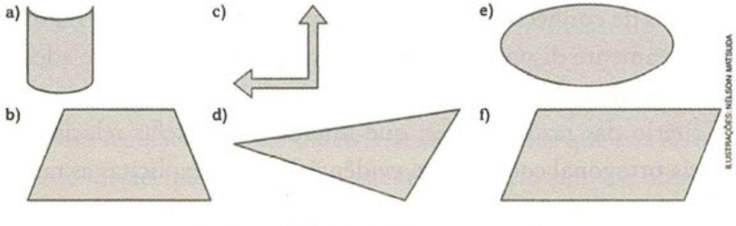


Figura 3. Coleção 2, 7º ano, p. 167

- Tarefa: Identificar em caso de existência os eixos de simetria das figuras.
- Técnica: As técnicas para solucionar cada uma das sub-tarefas podem ser consideradas as mesmas, o que diferencia cada solução são os procedimentos de aplicação. As técnicas desenvolvidas no livro incluem dobradura, espelhamento e sobreposição. Identificaremos cada sub-tarefa como T seguido da letra que identifica a figura. Para T(a) e T(b) dobra-se o papel onde a figura se encontra desenhada verticalmente ao meio e observa-se que as duas partes da figura irão se sobrepor. Encontra-se o eixo de simetria exatamente na dobra construída. A outra técnica envolve a utilização de um espelho plano colocado perpendicularmente ao papel onde a figura encontra-se desenhada na posição vertical no meio da figura, observa-se que a figura aparece completa novamente e o eixo de simetria deve localizado sob o espelho. Para T(c) a dobra do papel ou o espelho plano, nesse caso, deve ser localizado entre as duas setas da figura no sentido oblíquo de forma que a figura possa ser dividida em duas partes sobrepostas e congruentes. No caso de T(d) e T(f), após algumas tentativas de dobrar o papel ou colocar o espelho plano onde a figura está desenhada, de forma que se divida em duas partes congruentes e opostas, perceber-se que a figura (d) não possui eixo de simetria. Para T(e), como a figura tem dois eixos de simetria, é possível encontrá-los dobrando o papel onde a figura está localizada verticalmente ou horizontalmente de forma que as duas partes da figura sejam congruentes e sobrepostas. Por outro lado, também é possível utilizar o espelho como em T(a) e T(b).
- Discurso teórico-tecnológico: a justificativa aplicada à técnica é o conceito de simetria relacionado ao significado da palavra, isto é, correspondência, em grandeza, forma e posição relativa de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio.

Observamos para a situação 1, quanto ao tipo de tarefa, que o objetivo da mesma esta claramente apresentado, isto é, identificar as figuras que possuem eixo de simetria. Apesar de o autor utilizar figuras geométricas planas com características diferentes, ele não as explora com o intuito que o sujeito tenha a possibilidade de estabelecer conexões dessas características com a simetria ortogonal. O sujeito é estimulado a apenas fazer observações superficiais para executar a tarefa. Além disso, a atividade não propõe que o sujeito apresente argumentos sobre o porquê, de identificar ou não as figuras como simétricas, o que restringe a possibilidade de construção de conhecimento por parte dos mesmos. O fato da classificação das figuras em grupos de figuras planas diferentes, segundo suas características, não ser explorado não explicita, de forma clara a razão de ser de cada uma das sub-tarefas.

Quanto ao critério de pertinência, a situação 1 não oferece condições para que o sujeito faça conjecturas e tente validá-las mesmo que seja localmente. Nesse caso, a definição e as propriedades matemáticas podem não ser percebidas.

Sobre as técnicas, a simetria ortogonal é introduzida no livro didático como reflexão, dessa forma o espelhamento e a dobradura são as principais técnicas desenvolvidas pelo autor e disponíveis para o sujeito utilizar na execução da tarefa. Para a tarefa apresentada na situação 1, as técnicas são adequadas e estão de acordo como o grau de maturidade do alunado.

O discurso teórico tecnológico por sua vez permanece restrito ao senso comum, A justificação é dada por meio de observações visuais, relacionadas ao espelhamento e da manipulação por meio da dobradura. Esta explicação está ligada principalmente ao significado da palavra simetria.

Situação 2: Faça um desenho como este em uma folha de papel quadriculado. A partir dele, obtenha outro, realizando um movimento de reflexão em relação ao eixo e.

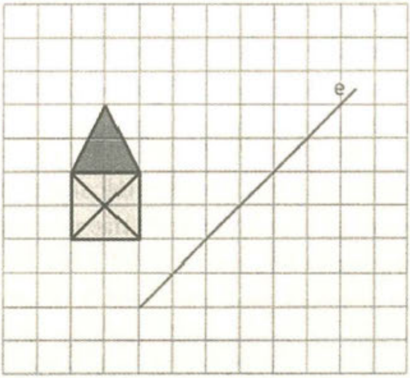


Figura 4. Coleção 3, livro do 8º ano, p. 127.

- Tarefa: obter sobre a malha quadriculada a figura simétrica à figura dada com relação ao eixo e.
- Técnica1: marcar os pontos sobre os vértices da figura geométrica. Dobrar a folha de papel sobre a reta e, encontrar os pontos simétricos aos pontos marcados na figura inicial. Ligar os pontos simétricos encontrados por meio de segmentos de reta. Verificar se as figuras-objeto e simétrica obtidas foram sobrepostas.
- Técnica 2: marcar sobre a malha quadriculada alguns pontos referenciais da figura. Utilizar a malha quadriculada para encontrar as retas perpendiculares ao eixo passando pelos pontos marcados. Marcar sobre esta reta do lado oposto ao eixo os pontos simétricos. Ligar os pontos simétricos por meio de segmentos de reta e revelar a figura simétrica.
- Técnica 3: destacar os principais pontos da figura dada. Em seguida, por esses pontos traçar, utilizando régua e compasso, as retas perpendiculares ao eixo de simetria e. Utilizando um compasso, marcar o ponto simétrico a cada um dos pontos correspondentes destacados na figura dada nas retas perpendiculares

construídas, observando que a distância de cada um destes pontos ao eixo de simetria é igual à distância de seus pontos correspondentes destacadas na figura dada ao eixo de simetria e.

Discurso teórico-tecnológico: A definição de simetria ortogonal levando-se em consideração que a imagem de um ponto B com relação à uma reta r é o ponto B' (simétrico de B) não pertencente a r, tal que r é a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$, logo $r \perp \overline{BB'}$ e $d(r, B) = d(r, B')$.

Quanto ao tipo de tarefa, para a situação 2, observamos que a finalidade desta é claramente apresentado, ou seja, obter sobre a malha quadriculada a figura simétrica à figura dada com relação ao eixo e. Implicitamente a tarefa está interligada a outros conteúdos, por exemplo, ângulos e construção de retas perpendiculares. Essa ligação permite ao sujeito relacionar objetos e, por meio dessa relação construir conhecimentos. Observamos ainda, que a tarefa é representativa de um *corpus* de conhecimentos localizados em torno da simetria ortogonal está efetivamente disponível e de adequado grau de dificuldade. Quanto à razão de ser da tarefa e pertinência, o autor espera que o sujeito perceba as propriedades e construa a definição de simetria ortogonal, mas não propõe que a cada passo da construção da figura simétrica o sujeito argumente sobre os mesmos, o que poderia explicitar as propriedades e os elementos necessários para construir a definição.

Verificamos que as técnicas 1, 2 e 3 apresentadas para a construção da figura simetria na situação 2, estão totalmente desenvolvidas no 8º livro da coleção 3. Observamos ainda, que estas são apresentadas com adequado nível de evolução e de acessível compreensão dos sujeitos, aos qual o livro didático se destina.

Quanto ao bloco teórico-tecnológico, para cada uma das técnicas relacionadas à cima o autor apresenta gradualmente uma justificativa que tem inicio com a proposta de observações da natureza e construções humanas por meio da arte, relacionadas ao significado da palavra simetria, passa pela definição de distância entre ponto e reta e fim a construção da figura simétrica utilizando compasso e régua. Observamos que as explicações e justificativas dadas são adaptadas às condições, de forma que o alunado construa o conceito de simetria ortogonal, inicialmente por meio da visualização e da manipulação de figuras simétricas, e por fim na construção das mesmas em que é levada em consideração a definição e as propriedades da simetria ortogonal. Contudo, o autor não propõe uma iniciação dedutiva para justificar a figura construída.

Algumas considerações gerais sobre nossa análise

Com relação ao conjunto de critérios que estabelecemos para analisar os livros didáticos, percebemos, quanto ao tipo de tarefa, que em todas as quatro coleções analisadas, estas estão interligadas de forma superficial a outros conteúdos geométricos como ângulos, congruência de figuras geométricas planas e as demais isometrias, mais que o *corpus* de conhecimento envolvidos nas tarefas poderia ser ampliado. São utilizados textos históricos e apelo a observações da utilização da simetria ortogonal na arte e atividades quotidianas do homem, como é o caso de revestimentos e azulejos por meio de mosaicos para justificar as tarefas propostas. As generalizações matemáticas relacionadas à simetria ortogonal como a conservação de propriedades são pouco exploradas nas tarefas propostas.

As técnicas (dobradura, espelhamento e sobreposição) necessárias para a resolução de algumas das tarefas são totalmente desenvolvidas nos livros. Somente em uma coleção de livros há a apresentação de outras técnicas como a construção geométrica por intermédio de instrumentos de desenho geométrico. Observarmos que nas coleções em que a simetria ortogonal é tratada em mais de um livro, o conteúdo retorna nos livros de anos posteriores com os mesmos tipos de situações-problema e são apresentadas as mesmas técnicas para desenvolver as tarefas propostas nas situações.

Quanto ao discurso teórico tecnológico, na maioria das vezes este fica restrito a uma justificativa aceita no senso comum, por intermédio da observação e reconhecimento, sem que explicações que levem em conta definições e propriedades matemáticas relacionadas à simetria ortogonal sejam efetivamente desenvolvidas no livro do aluno. Podemos observar nas orientações didáticas no manual do professor do livro do 8º ano da coleção 3 (2012) que o autor expõe os seguintes argumentos para apresentar, no livro didático, os conceitos geométricos apenas de forma intuitiva.

> O tratamento intuitivo dado aos conceitos de geometria como idealização geométrica dos objetos do mundo físico recebe continuidade neste volume, tendo como pressuposto que o conhecimento é resultado da elaboração e reelaboração constantes dos conceitos. [...] A análise e o uso de padrões disponibilizam, aos alunos, recursos que favorecem o estudo das características e propriedades de um movimento em geometria (transformações geométricas) e possibilitam destacar as que são consideradas relevantes e observar as que coincidem. Com isso, os alunos poderão ensaiar possíveis organizações e tentar verificar se elas se conservam em todos os casos. (p. 38)

Em nenhuma das quatro coleções de livros analisadas, identificamos um tratamento do objeto matemático simetria ortogonal no sentido de transição da validação perceptiva para a dedutiva por parte dos alunos, isto é, não tem nenhuma iniciação de justificativa por meio de demonstração.

Em sua pesquisa Lima (2006), ao analisar manuais escolares adotados na França, classificou os seguintes tipos de problemas (tarefas) propostos nestes manuais:

> reconhecimento de figuras simétricas com relação a uma reta d; reconhecimento dos eixos de simetria; construção de figuras simétricas (à mão livre, sobre o papel quadriculado, com os instrumentos

> de desenho); construção de eixos de simetria (à mão livre, sobre o papel quadriculado, com os instrumentos de desenho); (LIMA, 2006, p. 59, tradução nossa).

Além dos tipos de tarefa relacionados pela autora, acrescentamos por intermédio de nossa análise das quatro coleções analisadas: a identificação da conservação de algumas propriedades geométricas, identificação de pontos simétricos em uma figura plana e a criação padrões decorativos por meio de simetria axial. No quadro 2 apresentamos os tipos tarefas e a quantidade de cada uma delas por livro[5] em cada coleção analisada.

Quadro 2
Quantidade por tipo de tarefas propostas nos livros didáticos analisados sobre simetria ortogonal

Tipos da Tarefa	Diversificação da tarefa	Coleção 1	Coleção 2		Coleção 3		Coleção 4	Total
		L7	L7	L8	L7	L8	L8	
Reconhecer eixos de simetria	Com a utilização da malha quadriculada		6					6
	Sem a utilização da malha quadriculada	1	4		3	1	15	24
Reconhecer figuras simétricas	Com a utilização da malha quadriculada						1	1
	Sem a utilização da malha quadriculada		11	1	2	2	5	21

5 Para identificar os livros de cada coleção codificamos por L (livro) seguido por um número que representa o ano, por exemplo, L7 significa livro do 7º ano.

Tipos da Tarefa	Diversificação da tarefa	Coleção 1	Coleção 2		Coleção 3		Coleção 4	Total
		L7	L7	L8	L7	L8	L8	
Construir eixos de simetria	À mão livre	1	2		3		5	11
	Com instrumentos de desenhos		1					1
Construir figuras simétricas	À mão livre		4				5	9
	Sobre a malha quadriculada		20	2	1	5	1	29
	Com instrumentos de desenhos		3			4	3	10
Identificação da conservação de algumas propriedades em figuras planas	Por meio de instrumentos de desenho		1					1
	Por meio da malha quadriculada		5			2		7
	Sem a utilização de malha quadriculada			7		4		11
Identificar pontos simétricos em uma figura plana	Por meio de instrumentos de desenho					2		2
	Sobre a malha quadriculada					3		3
	Sem a utilização de malha quadriculada		1			5		6
Criar padrões decorativos por meio de simetria axial	A mão livre ou com instrumentos de desenho geométrico	1	1			2	1	5
Total		3	59	10	9	30	36	147

Fonte: elaborado pelos autores

Analisando o quadro 2, constatamos que, entre os tipos de tarefas e técnicas exploradas na maioria das vezes nos livros didáticos, os procedimentos privilegiados para a construção de figura simétrica são aqueles que utilizam a malha quadriculada. Os autores dessas coleções teriam provavelmente considerado a malha quadriculada como facilitadora da aprendizagem do aluno. Contudo, os estudos de Grenier (1988) apontam que as respostas nos itens sobre o papel quadriculado não eram mais bem-sucedidas que as respostas sobre o papel branco, isto é, o papel quadriculado induz o sujeito a levar em conta os pontos particulares da figura. Além disso, como já apontado em estudos anteriores, (Grenier, 1988) num estudo com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, Silva e Almouloud (2013) numa investigação realizada com professores em formação, foram observadas nas respostas dos sujeitos, procedimentos de contagem sobre as linhas horizontais ou verticais, procedimentos que são falsos quando o eixo de simetria tem direção oblíqua à folha.

O quadro 2 ainda nos leva a ponderar que a utilização de instrumentos de desenhos para construir figuras simétricas ou eixos de simetria é pouco explorada nas situações apresentadas nos livros, o que pode ocasionar a não construção por parte dos alunos de conceitos geométricos envolvidos nas tarefas propostas.

Considerações e perspectivas

O conjunto de critérios estabelecidos para analisar as tarefas propostas nos livros didáticos escolhidos permitiu evidenciar alguns aspectos em torno do ensino da simetria ortogonal. Um exemplo é a forma intuitiva como a simetria ortogonal é apresentada, observamos que o aluno não é instigado a questionar ou discutir sobre os procedimentos adotados nas tarefas propostas. Esse fato pode ocasionar numa restrição ao desenvolvimento do pensamento geométrico, principalmente com relação à escolha das técnicas, o que pode influenciar diretamente a forma como estes alunos justificam essas técnicas.

Desse modo, a análise de livros didáticos contribuiu, em parte, para nossa compreensão da realidade que cerca o ensino da simetria ortogonal, além de apontar algumas variáveis a serem consideradas pelo professore no momento da construção, análise e aplicação de uma seqüência de ensino. Como por exemplo, a proposta de tarefas que explorem as definições e propriedades matemáticas relacionadas à simetria ortogonal seja por meio de exercícios que envolvam técnicas como dobradura, espelhamento e decalque ou por meio de construções geométricas com a utilização de instrumentos de desenho.

Acreditamos que ao apresentar tarefas apenas de forma intuitiva e voltada na grande maioria das vezes para contextos externos a matemática, sobretudo com alunos que estejam cursando os últimos anos do Ensino Fundamental II, pode posteriormente desencadear no aparecimento de dificuldades de validação dos procedimentos que envolvam pensamento lógico-dedutivo.

Referências

Almouloud, S. Ag. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba. Editora UFPR.

Artaud, M. (1988) Introduction a l'approche ecologique du didactiques: l'ecologique des organisations mathematiques et didactiques. *Anais da la neuvème école d'ete de didactiques dês mathematiques*, 9. 1988, Hougate, Bailleul. Hougate, p. 101-134.

Bianchini, E. (2011). *Matemática: Bianchini, 7º ano*. Editora Moderna, São Paulo.

Bianchini, E.. (2011). *Matemática: Bianchini, 8º ano*. Editora Moderna, São Paulo.

Bigode, L. A. J. (2012). *Matemática*. 8º ano. Projeto Velear. 1º ed. São Paulo: Scipione.

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica (2013). Guia de livros didáticos - PNLD 2014: Anos finais do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique*. Recuperado em 03 dez 2013 de:http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf.

Giovanni Junior, J. R.; Castrucci, B (2009). *A conquista da Matemática*, 7º ano. Edição Renovada – São Paulo: FTD.

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixiême*. Tese (doutorado em Didática da Matemática). Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França.

Lima, I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. 2006. Tese (doutorado em Didática da Matemática). Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França.

Mori, I. & Onaga, D. S. (2012). *Matemática: ideias e desafios*. 8°ano. 17ª ed. São Paulo: Saraiva.

Silva, C. V & Almouloud, S. Ag. (2013). Um estudo sobre as concepções de professores com relação à simetria ortogonal. *Anais do XI |Encontro Nacional de Educação Matemática*, julho de 2013. Curitiba, SBM. CD-ROM.

Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto[1]

Mathematical organization analysis used in textbooks for dealing with integers

Fernando Medina Carruitero[2]
Cecilia Gaita Iparraguirre[3]

Resumen

El presente trabajo toma en consideración los obstáculos epistemológicos asociados a la evolución del número entero y los reconoce en textos didácticos empleados en la educación básica. En la introducción de los números enteros se identifican problemas en contexto aritméticos, similares a los empleados con números naturales, de modo que no se evidencia la naturaleza distinta que tiene el nuevo conjunto numérico. Esta situación generará obstáculos didácticos que se pondrán de manifiesto cuando los estudiantes realicen operaciones en los enteros.

Palabras-clave: *números enteros; obstáculos epistemológicos; obstáculos didácticos.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – fmedinac@pucp.edu.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP – cgaita@pucp.edu.pe

Abstract

This paper takes into account the epistemological obstacles associated with the evolution of the integer and recognizes them in didactic texts used in basic education. In the introduction of integers, problems are identified in arithmetic contexts, similar to those used with natural numbers, so the different nature of the new numerical set is not shown. This situation will cause educational obstacles that will emerge when students perform operations on integers.
Keywords: *integers; epistemological obstacles; educational obstacles.*

Introducción

La introducción de los números naturales, fraccionarios y decimales en la educación primaria se hace como expresión de tamaño o numerosidad (cardinalidad) de los conjuntos finitos, del lugar que ocupa un elemento dentro de un conjunto ordenado y de la medida de diferentes cantidades de magnitud, respectivamente (Cid, Godino & Batanero, 2002). Además, las operaciones que se definen en estos conjuntos numéricos se corresponden con cierto tipo de acciones: agrupar (adición), separar (sustracción), reiterar (multiplicación) y repartir (división). Por este motivo, el estudio de los números naturales, fraccionarios y decimales y de sus operaciones entre ellos, se apoya sobre situaciones concretas.

A medida que se progresa en el estudio de las matemáticas aparecen objetos más complejos que han sido construidos para responder a necesidades internas de la propia matemática. Este es el caso de los números con signo (positivos y negativos), cuya construcción se debe, no tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones del mundo sensible, sino a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de las matemáticas: el álgebra. Para ilustrar esta afirmación se hace referencia al trabajo de Diofanto, en el cual tuvo que enunciar la regla de los signos para resolver ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras que corresponden al campo algebraico y no al aritmético.

Luego, es en el entorno algebraico en el que aparecen las condiciones que hacen posible y que favorecen la introducción de los números enteros, «números con signo». Todo ello plantea dudas respecto a introducir los números enteros negativos en el ámbito aritmético. Además se señala que la resolución aritmética de un problema se caracteriza por que el contexto está presente en cada etapa de la solución, mientras que en la solución de un problema algebraico, en particular al resolver una ecuación, el contexto se deja de lado.

Así, el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se produjo por una necesidad de modelizar el mundo físico y social. Por ello, buscar una justificación para la aparición de los números enteros a través de modelos concretos no es la más acertada (Cid, 2003).

De otro lado, con la aparición de los números negativos en la escuela se da «el primer paso de la matemática práctica a la matemática formal» y, por consiguiente, el tratamiento didáctico que se le dé deberá ser consecuente con estas ideas. Es decir, la justificación de las propiedades de los números enteros no podrá ser respaldada por modelos concretos. La utilización del modelo concreto por parte de los alumnos para deducir las propiedades del número entero y de sus operaciones puede fomentar la aparición de creencias erróneas (Cid, 2010). Por ejemplo, el modelo de deudas y haberes puede propiciar que los estudiantes indiquen que -7 es mayor que -2 ya que una deuda de 7 unidades es mayor que una de 2.

Problema de investigación

Las investigaciones revisadas y explicadas anteriormente permiten suponer que las dificultades en el aprendizaje de los números enteros estarán vinculadas con el modo en el que está organizado este tema en los libros de texto de matemáticas en la educación básica.

En esta investigación se plantea analizar la organización matemática de los números enteros en los textos de sexto grado de primaria y de primer año de secundaria de una editorial peruana y reconocer si esta responde al modelo epistemológico de referencia que se adoptará en la investigación.

Así, el objetivo de investigación será identificar la manera en la que los libros de texto seleccionados introducen los números enteros, justifican su aparición, así como los diferentes significados que dan al signo negativo, presentan la teoría, justifican las propiedades, los distintos tipos de problemas resueltos y propuestos que presentan y la relación que existe entre este nuevo conjunto numérico y el álgebra.

Se planeta como hipótesis de investigación que el tratamiento que se da a los números enteros en los libros de texto seleccionados será similar al que se da a los números naturales, lo que mostrará que no se reconoce la complejidad de este nuevo conjunto numérico y que no existe correspondencia con el modelo epistemológico de referencia adoptado.

Metodología de investigación

La investigación será de tipo bibliográfica ya que se basará en el estudio de textos ya elaborados (Gil, 2002), y en este caso en particular se trata de textos didácticos. En la primera etapa se hace necesario identificar las fuentes bibliográficas; para ello se consideraron los dos textos oficiales de matemáticas, distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú a las escuelas públicas de todo el país. Esto se hizo dado el nivel de impacto que tienen dichos libros. Para la segunda etapa de la investigación bibliográfica, se procedió a realizar una lectura analítica del capítulo de números enteros en ambos textos. Se tuvieron en cuenta las investigaciones descritas previamente y el marco teórico adoptado, y se establecieron criterios para analizar la organización matemática de los capítulos referidos a los números enteros en los dos libros de texto seleccionados. De esa manera, se obtuvo información a partir de los datos presentes en los libros. Finalmente, se organizó de manera lógica la información recogida.

Elementos teóricos considerados

Como parte del marco teórico se presentarán obstáculos epistemológicos identificados en el desarrollo histórico de los números enteros. A partir de ellos, luego se podrán identificar obstáculos didácticos que podrían estar presentes en los textos que serán analizados y que posteriormente podrían tener una influencia negativa en la comprensión de número entero.

Según Cid (2000), fue Glaeser el primero en hacer referencia a los obstáculos epistemológicos asociados a los números negativos, entendiendo obstáculo como dificultad. Por ejemplo, se tuvo dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas; así, si bien en la obra de algunos matemáticos se reconoce la existencia de soluciones negativas de algunas ecuaciones, también se constata que estas fueron consideradas como cantidades ficticias que expresaban un defecto en el enunciado del problema.

Avanzando en el desarrollo histórico del concepto, se encontró dificultad para unificar la recta real ya que algunos matemáticos concebían que «lo negativo» neutralizaba o se oponía a «lo positivo». Esto favorecía la idea del modelo de dos semirrectas opuestas que funcionaban separadamente.

Otro obstáculo epistemológico identificado se refiere a la ambigüedad de los dos ceros, es decir, a la dificultad de modificar el significado inicial de que el cero se refería a la ausencia de cantidad, por un significado de un cero elegido arbitrariamente. Desde la perspectiva anterior, no tendría sentido que algo fuera menos que la nada; mientras que desde la nueva perspectiva, el cero sería un punto de referencia en la recta numérica.

La superación de los obstáculos anteriores permitió aceptar a los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. Para ello sería necesario superar el estadio de las operaciones concretas. Esto significa que no se buscarían ejemplos en la naturaleza para explicar la regla de los signos;

los números enteros no responden a la experiencia, son inventados (Glaeser, 1981).

De otro lado, en el trabajo de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) se identifican otros factores que explican las dificultades en la comprensión de los números enteros. Entre ellas destacan concebir a la suma como aumento, a la multiplicación como multiplicación natural, a la sustracción como disminución, al orden entre los negativos como lo mismo que el orden natural; así como ignorar el signo, la identificación de los símbolos literales con números positivos: «a no puede ser un número negativo, sería -a», entre otras.

A partir de lo anterior, Cid (2010) explicita un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos que contempla:

- La introducción simultánea de los números negativos y del álgebra elemental ya que por un lado, los números negativos necesitan un entorno algebraico que ponga de manifiesto su razón de ser y contribuya a la superación de posibles obstáculos epistemológicos; mientras que, por otro lado, las técnicas de cálculo algebraico solo pueden avanzar si se establecen las reglas de los signos.
- Utilizar la modelización algebraica pues permite resaltar las diferencias entre el trabajo algebraico y el aritmético; el primero tiene en cuenta desde sus inicios la consideración de las letras como parámetros y variables y obtiene como solución de los problemas un modelo algebraico que, a su vez, se convierte en objeto de estudio.
- La construcción escolar del número negativo requiere pasar de las operaciones entre números a las operaciones entre sumandos y sustraendos, así como del significado operativo de los signos «+» y «−» al significado predicativo y operativo unario. Es decir, el signo deja representar una operación para ser ahora parte del mismo número.

Con base en las investigaciones descritas previamente y considerado el marco teórico adoptado, se establecieron criterios para analizar la organización matemática de los capítulos referidos a los números enteros en los dos libros de texto seleccionados. Dichos criterios, así como los posibles resultados, se presentan en la tabla 1.

Tabla 1
Criterios para analizar la organización de los números enteros

Criterio	Posibles resultados
La manera en la que se inicia el tratamiento de los números enteros	Con elementos teóricos, problemas contextualizados, ejercicios rutinarios, etcétera.
La forma en la que se justifica la aparición de los números enteros	Para dar respuesta a modelos concretos. Como una herramienta para otros contenidos matemáticos. A través de la modelización algebraica. No se justifica.
Los significados que se atribuyen al signo negativo	En un contexto: Significado de pérdidas, posición respecto a un origen, etcétera. Descontextualizado: significado operativo, significado o predicativo.
La ubicación de la teoría	Al inicio del capítulo, después de los ejercicios o problemas, no hay teoría.
La forma en la que se justifican las propiedades	A partir de ejemplos, o como un conjunto de reglas que dan coherencia a este nuevo sistema numérico.
La naturaleza de los problemas que se abordan	Abarcan distintos modelos concretos o solo algunos.
La relación de los números enteros y el álgebra	Se utiliza el álgebra para justificar la aparición de los números enteros. El álgebra aparece como una aplicación de los números enteros y sus operaciones: se realizan operaciones con expresiones algebraicas como si fueran enteros. No hay relación entre los números enteros y el álgebra; el álgebra aparece como un lenguaje.

Resultados del análisis realizado

En la tabla 2 se muestra el resultado de analizar los textos de sexto de primaria y primer año de secundaria, teniendo en cuenta los criterios descritos previamente.

Tabla 2
Análisis del tratamiento de los números enteros en los textos a partir de los criterios definidos

Criterio	Libro de sexto grado	Libro de primer año
La manera en la que se inicia el tratamiento de los números enteros	Con una pregunta: ¿Cuánto es 8 – 9? Luego expresa esta pregunta del siguiente modo: $8 - 9 = x$, para después indicar que esa ecuación es equivalente a $x + 9 = 8$.	Con una pregunta: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2? Después plantea la ecuación $x + 5 = 2$, para dar inmediatamente la respuesta: –3.
La forma en la que se justifica la aparición de los números enteros	Los números enteros surgen ante la necesidad de resolver ecuaciones.	Los números enteros surgen ante la necesidad de dar respuesta a modelos concretos: Para indicar una temperatura menor que cero, para describir pérdidas en un negocio, para ubicar una posición bajo el nivel del mar.
Los significados que se atribuyen al signo negativo	El signo negativo está asociado a los contextos, ya sea de pérdidas o de posición respecto de un punto de referencia. Significado operativo	El signo negativo está asociado a los contextos, ya sea de pérdidas o de posición respecto de un punto de referencia.
La ubicación de la teoría	Al inicio de cada apartado. Luego se presentan actividades para realizar operaciones con los números enteros.	La teoría aparece después algunos ejercicios resueltos pero también antes de una lista de ejercicios que reforzarán la técnica aprendida.

Criterio	Libro de sexto grado	Libro de primer año
La forma en la que se justifican las propiedades	No se justifican formalmente. Se verifican mediante ejemplos.	No se justifican formalmente. Se verifican mediante ejemplos.
La naturaleza de los problemas que se abordan	Pocos problemas y son referidos a temperaturas, a descender o ascender, haciendo más énfasis en el segundo caso. También se presentan problemas para cuya solución realmente no se requieren números enteros, sería suficiente considerar a los naturales.	Se presenta un gran número de problemas. Estos se refieren a pérdidas, ubicación respecto a un punto de referencia, distancias. En la mayoría de los casos presenta problemas para cuya solución es necesario emplear las propiedades de los números enteros.
La relación de los números enteros y el álgebra	El álgebra aparece como una generalización de la aritmética con enteros. Inicialmente se traduce una pregunta de tipo aritmético a una ecuación. El álgebra permite expresar algunas propiedades de los números enteros	El álgebra aparece como una aplicación de los números enteros y sus operaciones: se realizan operaciones con expresiones algebraicas como si fueran enteros

A partir del estudio realizado, también se han podido identificar algunos conflictos potenciales tales como no encontrar sentido a preguntas como *hallar un número que sumado a 5 de 2* si es que se sigue concibiendo a la suma como aumento; o el señalar que −1 es menor que −2 porque está más cerca del cero, argumento que era válido en los naturales; o señalar que en la expresión (+3) − (−2) hay tres operaciones y no una, si es que no se asume que los números tienen signo; o el tratar de atribuir un significado concreto a la regla de los signos para la multiplicación.

Consideraciones finales

El tratamiento que se brinda a los números enteros en los dos textos analizados es similar al que se dio a los números naturales. Así, la justificación para la introducción de este nuevo conjunto numérico se lleva a cabo desde un entorno aritmético, asociándola a dar solución a problemas que corresponden a modelos concretos. Desde el modelo epistemológico de referencia adoptado, esto no es conveniente ya que el objeto matemático número entero no surge para dar solución a problemas de la vida real sino que aparece para dar solución a problemas intramatemáticos.

En la misma línea, la mayoría de problemas que aparecen en los textos corresponden a modelos concretos que pueden ser resueltos en el conjunto de los números naturales. Esto ocasiona que los estudiantes no encuentren utilidad al nuevo conjunto numérico, y que no identifiquen el carácter predicativo que adquieren los signos + y −.

La teoría aparece en forma de propiedades que serán aplicadas para resolver ejercicios. La justificación de las propiedades se realiza a través de la verificación para ejemplos concretos.

Se observa que no se aprovecha el contexto algebraico para introducir este conjunto numérico por lo que se recomienda introducir el tema para resolver ecuaciones, de modo que en este entorno se definan nuevas reglas, enfatizando en que algunas de estas no tendrían sentido en los naturales. De manera similar, posteriormente se podrán generar modelos algebraicos que justificarán la ampliación del conjunto de números enteros hacia los números racionales.

Referencias

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas,* Abril, Cangas, España.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del Seminario Matemático «García de Galdeano»,* (25), 1-40.

Cid, E., y Bolea, P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico.* Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de Montpellier.

Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2002). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Extraído el 30 de noviembre de 2013 desde http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Coveñas, M. (2010). *Matemática 1.* Lima. Coveñas.

Coveñas, M. (2010). *Megamatic 6.* Lima. Coveñas.

Gil, A. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa.* 4ta Edición. São Paulo: Atlas.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346.

Iriarte, M., Jimeno, M., & Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma,* 7, 13-18.

Taxa de variação na escola básica: um levantamento bibliográfico[1]

Rate of change in elementary school: a literature review

Edson Rodrigues Da Silva[2]
Maria José Ferreira Da Silva[3]

Resumo

Este é um levantamento bibliográfico acerca do estudo de taxa de variação na educação básica brasileira. O método utilizado foi a pesquisa bibliográfica, e os dados foram coletados nas bibliotecas de pós-graduação, sites de secretarias da educação e anais de congressos em Educação Matemática. Nossa busca centrou-se nos descritores «taxa de variação», «taxa de variação instantânea», «taxa de variação média», «taxa de variação na educação básica», «Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio», «derivada no Ensino Médio». Encontramos sete documentos oficiais que fazem alusões ao ensino de taxa de variação, e oito trabalhos que tratam do ensino e/ou da aprendizagem de taxa de variação na escola básica, cujos resultados dão indícios de que estudantes desse nível de escolaridade compreendem as ideias imersas no estudo de taxa de variação.

Palavras-chave: *Taxa de variação; Levantamento bibliográfico; Educação básica.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU

FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – professoredsonrodrigues@gmail.com

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – zeze@pucsp.br

Abstract

This is a bibliographical investigation on the study of rate of change in Brazilian basic education. The bibliographical research was used as the method, and the data were collected in post-graduate libraries, websites of the departments of education, and annals of congresses on mathematics education. Our search focused on the descriptors «rate of change», «instantaneous rate of change», «average rate of change», «rate of change in basic education», «Differential and Integral Calculus in high school», «derivative in high school». We found seven official documents that refer to the teaching of rate of change, and eight papers dealing with the teaching and/or learning of the rate of change in basic school, whose results show evidence that students of this educational level understand the ideas immersed in the study of rate of change.
Keywords: *Rate of change; Bibliographical investigation; Basic education.*

Introdução

O ato de perceber quando uma representação gráfica cresce ou decresce dá-se quase que instantaneamente em um cidadão que tenha concluído a educação básica, mas para perceber o quão rápido esse gráfico cresce ou decresce, ou seja, para qualificar seu crescimento/decrescimento, faz-se necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação. «No mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto está crescendo/ decrescendo» (Rezende 2003, p. 33)

Cientes que essa não é a realidade da maior parte da população brasileira, uma vez que a maioria dos cidadãos não tem discernimento para interpretar, por exemplo, um gráfico de intenção de votos divulgado em um meio de comunicação impresso, interessamo-nos em fazer um levantamento bibliográfico com o objetivo de suscitar um panorama atual do ensino de taxa de variação na escola básica brasileira.

Com esse intuito, e entendendo que a noção de taxa de variação deve fazer parte do conhecimento de todo cidadão, deparamo-nos com oito pesquisas que versam a respeito dos processos de ensino e/ou de aprendizagem de taxa de variação no âmbito da escola básica, cuja maioria, em última instância, tem por finalidade a melhoria o ensino superior de Cálculo.

Frente a essa realidade, e convictos que as ideias fundamentais do Cálculo não devem ser exploradas exclusivamente em função do ensino superior de Cálculo, mas sim como ferramentas que possam auxiliar a população no exercício da sua cidadania, também voltamos nossa atenção ao tratamento dado por alguns documentos oficiais à taxa de variação.

Revisão de literatura

Para realizar o levantamento bibliográfico utilizamos o método de pesquisa bibliográfica do tipo estado da arte, que consiste em «expor resumidamente as principais ideias já discutidas por outros autores que trataram do problema, levantando críticas e dúvidas, quando for o caso» (Gerhardt e Silveira 2009, p.66). De acordo com Fonseca (2002), essa metodologia incide no levantamento de referências e dados teóricos já analisados e publicados com a finalidade de reconhecer e recolher informações e resultados referentes a uma problemática que se procura elucidar e solucionar.

Nesse sentido, a escolha metodológica nos auxiliou na definição dos procedimentos de captação, avaliação e elaboração dos resumos da literatura encontrada, e nos orientou na busca por trabalhos que tratam do ensino e/ou aprendizagem de taxa de variação exclusivamente no âmbito da educação básica, além de nos auxiliar na busca por documentos oficiais que versam a respeito do ensino de taxa de variação.

Iniciamos o trabalho elegendo as palavras-chave que utilizaríamos na busca por materiais nos bancos de dados dos programas de pós-graduação da PUC-SP, UNESP, UNICAMP, USP, UFJF, UFRJ, no banco de teses da CAPES, na revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), nos sites de secretarias de educação estaduais, no site do MEC, bem como em anais de congressos nacionais e internacionais, RELME, CERME, CIAEM, ENEM, EREM, SIPEMAT. As palavras-chave utilizadas emergiram do tema de pesquisa, foram elas: «taxa de variação», «taxa de variação instantânea», «taxa de variação média», «taxa de variação na educação básica», «Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio», «derivada no Ensino Médio».

Em um primeiro momento, deparamo-nos com muitos trabalhos que tratam do estudo de taxa de variação, todavia, como nosso interesse estava em trabalhos que o fizessem exclusivamente no âmbito da escola básica, esse foi nosso primeiro filtro. Feito isso, selecionamos oito trabalhos: dois artigos, cinco dissertações e uma tese.

Dos artigos encontrados, a pesquisa de Silva e Silva (2015) trata do processo de ensino e aprendizagem de taxa de variação instantânea por estudantes do Ensino Médio, enquanto a pesquisa de Guedes e Assis (2009) versa a respeito da aceitação de um grupo de professores em se explorar rudimentos de Cálculo em sua sala de aula. Todas as dissertações encontradas, Spina (2002), André (2008), Pereira (2009), Silva (2012) e Matos (2013), desenvolveram sequências de ensino para trabalhar taxa de variação no âmbito do Ensino Médio. A tese de Rezende (2003) versa a respeito das dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo.

Assim sendo, separamos as pesquisas em duas categorias: a primeira foi composta por aquelas que trabalharam com estudantes, e a segunda, pelas que trabalharam com professores ou que são ensaios teóricos.

A partir dessa divisão, procuramos evidenciar os pontos comuns, discrepâncias, dúvidas e críticas em cada categoria, além das possíveis relações entre as duas categorias.

Assim sendo, nos próximos itens apresentaremos um recorte de alguns documentos oficiais que versam a respeito do estudo de taxa de variação, e um resumo das pesquisas encontradas para, ao final, apresentarmos um panorama atual do ensino de taxa de variação na escola básica brasileira.

Taxa de variação em documentos oficiais

Os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, que têm por finalidade direcionar o ensino «no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico» (BRASIL 2000, p. 6), orientam que o estudo dos diversos ramos matemáticos deve propiciar ao estudante «o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo» (Brasil, 2000, p. 41).

Nesse sentido, é proposto que o ensino de Matemática se dê por meio de «um conjunto de temas que possibilitem o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos» (Brasil, 2002, P. 120), para isso, sugere-se três eixos estruturadores a serem desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio: Álgebra: números e funções; Geometria e Medidas; Analise de dados.

É no eixo da Álgebra, subdivido em duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria, que vislumbramos o estudo de taxa de variação na escola básica.

Quanto ao estudo de taxa de variação, o Currículo de São Paulo recomenda que seja iniciado no Ensino Fundamental e continuado durante o Ensino Médio, e propõe que «o destaque dado às taxas de variação pode servir de base para uma apresentação das primeiras noções de Cálculo» (São Paulo 2010, p. 38). De acordo com esse documento, «a noção de taxa de variação, ou seja, a medida da rapidez com que uma das grandezas interdependentes varia em relação à outra, será destacada como um prelúdio ao estudo do Cálculo» (São Paulo 2010, p. 43).

Todavia, apesar deste discurso, o Currículo de São Paulo afirma que não introduz nominalmente o estudo do Cálculo no âmbito da escola básica por considerá-lo um tema distanciado da prática docente, ou seja, o Currículo considera que os professores da educação básica não estão aptos a ensinar as ideias imersas no estudo do Cálculo para seus alunos.

Indo ao encontro das orientações pautadas no Currículo de São Paulo, o Currículo de Pernambuco (2012) faz menções ao ensino de taxa de variação desde os anos finais do Ensino Fundamental permeando por todos os anos do Ensino Médio. De acordo com o Currículo, um momento propício para a exploração da taxa de variação é a partir do trabalho com a geometria analítica, onde

> os significados geométricos de coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas, perpendiculares, tangentes e secantes, podem contribuir bastante para a compreensão das relações entre a geometria e a álgebra. [...] Assim, as articulações da geometria analítica com outras áreas da matemática escolar podem ser exploradas de forma proveitosa. Por exemplo, as ideias como crescimento, decrescimento, taxa de variação de uma função, inclinação de um gráfico, entre outras, podem ser relacionadas com o estudo das diferentes funções abordadas no Ensino Médio. (p. 122)

O Currículo do Acre sugere que o estudo de taxa de variação seja mobilizado como gerador de condições para que os alunos aprendam e desenvolvam as capacidades de interpretar e descrever as características fundamentais de representações gráficas de funções polinomiais.

Nesse mesmo sentido, também em consonância com as propostas dos Currículos de São Paulo e Pernambuco, o Currículo do Piauí propõe que o estudo de taxa de variação seja iniciado logo na 1ª série do Ensino Médio, de modo que possa auxiliar o estudante na interpretação do comportamento gráfico de determinadas funções, classificando-as quanto ao seu crescimento ou decrescimento e na identificação de seus pontos de máximos e de mínimos.

Já o Currículo de Mato Grosso (2012) orienta que, quando o aluno tem necessidade de novas ferramentas de cálculo ou de novas teorias, deve-se possibilitar-lhe «ir além do conhecimento trivial, oriundo de operações elementares», e sugere, ainda, que sejam explorados centros de interesses que permeiem desde a evolução do conceito de derivada até seu potencial uso em situações concretas. Segundo esse documento, as ideias matemáticas imersas no estudo do Cálculo Diferencial e Integral

> devem ser incentivadas quando surgirem o contexto e a oportunidade no momento educacional e sempre abordado de maneira conceitual, nunca como uma técnica em si (cálculo pelo cálculo enquanto conteúdo). Dessa forma o ensino pode dar condições, ao jovem, para integrar-se adequadamente à sociedade. (p. 147)

No Currículo de Minas Gerais, é sugerido que a taxa de variação seja explorada no contexto do estudo de funções elementares, que possibilita «discutir problemas que envolvam a questão da taxa de variação através da análise de notícias que falam de crescimento rápido ou lento, desaceleração» (Minas Gerais 2010, p. 70). Para isso, são propostas discussões de problemas que envolvam proporcionalidade e a utilização de recursos computacionais, para construir tabelas e gráficos, comumente utilizados por meios de comunicação.

Como se observa, o estudo de taxa de variação está presente em documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de matemática no Brasil e em alguns estados brasileiros. Assim, no item seguinte apresentaremos resultados de pesquisas que tratam do estudo de taxa de variação na escola básica, a fim de identificarmos os caminhos que estão seguindo para, finalmente, apresentarmos um panorama atual do ensino de taxa de variação na escola básica brasileira.

Taxa de variação em pesquisas

André (2008) elaborou e aplicou uma sequência de atividades para um grupo de estudantes do Ensino Médio com o objetivo de trabalhar a ideia de derivada a partir da mobilização das ideias de taxa de variação média e instantânea.

Para isso, a autora fundamentou-se nas teorias de David Tall, especificamente, na Teoria de Imagem de Conceito, e na teoria de Raiz Cognitiva, que é definida «como sendo um conceito âncora que o aprendiz encontra facilidade para compreender, e que, ainda assim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída» (André 2008, p. 18). Segundo a autora os procedimentos metodológicos caracterizam-se pelo instrumento formulado para atingir o objetivo primeiro de sua pesquisa, que foi dividido em quatro etapas com finalidades específicas.

A primeira etapa explorou a noção de variação de uma função por meio do estudo da relação de interdependência entre duas grandezas, a segunda apresentou a «taxa de variação média (TVm) como uma razão das variações de duas grandezas» e mostrou «que esta mesma (TVm) pode oferecer uma análise imprecisa do comportamento de uma função num determinado intervalo», a terceira conceituou taxa de variação instantânea a partir da noção de retidão local com o auxílio do software Graphmatica, e a última explorou a derivada a partir do estudo da taxa de variação instantânea.

Após percorrer as quatro etapas, os estudantes realizaram uma atividade final de cunho avaliativo, que ocorreu uma semana após o desenvolvimento da última etapa, cujos resultados evidenciaram que os alunos mobilizaram os conhecimentos adquiridos na sequência de ensino, pois, de acordo com a pesquisadora, todos os participantes tiveram um bom desempenho e compreenderam a ideia de derivada ainda que intuitivamente.

Pereira (2009) também elaborou uma sequência de ensino para um grupo de estudantes do Ensino Médio, cuja finalidade era levá-los a perceber «a taxa de variação instantânea enquanto aproximações sucessivas da taxa de variação média com intervalos cada vez menores e, como consequência disso, a reta tangente enquanto aproximação de retas secantes» (Pereira 2009, p. 71). Para isso, o autor baseou-se em pressupostos da Engenharia Didática e no mesmo referencial teórico utilizado por André (2008), as Teorias de Imagens de Conceitos e Raiz cognitiva.

A sequência de ensino foi composta por um teste diagnóstico, cujo objetivo foi verificar/constatar o entendimento dos estudantes do conceito de função, e por um conjunto de atividades, cujo objetivo primeiro era a «inserção das ideias do Cálculo no Ensino Médio» (Pereira 2009, p. 165).

O autor constatou que a maioria dos sujeitos de sua pesquisa alcançou os objetivos almejados. Ao fazer essa constatação e considerar a forma com que os alunos progrediram durante a realização da sequência de ensino, o autor considerou validada sua sequência, e concluiu que estudantes do Ensino Médio são capazes de compreender a ideia de derivada enquanto aproximações cada vez menores da taxa de variação.

Com base no mesmo referencial teórico utilizado por Pereira (2009) e André (2008), o trabalho de Matos (2013) teve por objetivo investigar a compreensão das ideias de derivada e integral por um grupo de estudantes da terceira série do Ensino Médio a partir da mobilização de ferramentas disponíveis no WolframAlpha e no Geogebra.

Para atingir este objetivo, e com base nos pressupostos do método de Experimento de Ensino, que trata, especificamente, de experimentos referentes a aprendizagem e ao raciocínio matemático de estudantes, o pesquisador elaborou e aplicou uma sequência de ensino para seis estudantes da terceira série do Ensino Médio, desenvolvida em quatro encontros presenciais.

No primeiro encontro os participantes exploraram a sintaxe do WolframAlpha. No segundo, foram aplicadas as atividades que contemplavam o estudo da derivada a partir da noção de taxa de variação. No terceiro encontro, as atividades enfatizaram o cálculo da medida da área formada pela curva que representa uma função f com os eixos coordenados e sua relação com a ideia de integral. E no último, foram aplicadas as atividades referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), em que se desejava «analisar as principais dificuldades e compreensões emergentes na abordagem do TFC e ainda enriquecer a imagem do conceito de derivada e integral» (Matos 2013, p. 121).

Por meio do confronto entre as soluções apresentadas, as verbalizações e as atitudes dos estudantes frente às atividades propostas, o autor pôde afirmar que, «após alguns exemplos do que seja uma razão e uma taxa de variação, os participantes mostraram ter construído boa imagem do conceito de derivada» e que a noção de integral, estudada como a medida da área formada pela curva que representa uma função f qualquer com os eixos coordenados «parece ter ficado fortemente impregnado na imagem do conceito dos alunos», pois, «a partir de certo momento, em qualquer atividade que se falava em cálculo de área, instantaneamente algum aluno a relacionava com a integral» (Matos 2013, p. 148).

Desse modo, ao final de seu trabalho, o pesquisador concluiu que estudantes do Ensino Médio são capazes de construir significado para a noção de derivada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto qualquer de seu domínio, além de terem condições de compreender a ideia de integral e as ideias imersas no TFC.

Diferente das pesquisas supracitadas, que se embasaram nas Teorias de Imagem de Conceito e Raiz cognitiva, os trabalhos de Silva (2012) e Silva e Silva (2015) fundamentaram-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica, que enfatiza a diversidade e a articulação de diferentes registros de representação nas atividades matemáticas, e na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que «foi desenvolvida por Guy Brousseau no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos» (Almouloud, 2007, p. 31).

Com base nesse referencial teórico e, fundamentados em pressupostos da Engenharia Didática, os autores elaboraram e aplicaram uma sequência didática para um grupo de estudantes da 3ª série do Ensino Médio, cuja finalidade era levá-los a construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir da mobilização da taxa de variação.

A sequência didática foi aplicada em quatro encontros. O primeiro tinha por finalidade explorar as ideias básicas de taxa de variação, o segundo consistiu em construir com os estudantes «conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea, a partir da noção de taxa de variação média» (Silva 2012, p. 98), o terceiro explorou a ideia de taxa de variação instantânea (taxa de variação em um ponto), e o último, objetivou levar os estudantes a perceber que a taxa de variação da taxa de variação de uma função polinomial de 2º grau é constante.

Feito isso, e por meio do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, os autores consideraram validada a sequência didática, e concluíram que estudantes do Ensino Médio têm condições de construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação. Além disso, os pesquisadores também concluíram que «a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea deu-se somente por meio da mobilização simultânea dos registros de representação algébrica, gráfica e tabular» (Silva 2012, p. 131), e afirmaram que o processo de ensino e aprendizagem de taxa de variação instantânea na escola básica deve ser pautado em situações de ensino que permitam a coordenação entre dois, ou mais registros de representação simultaneamente.

Apesar de Spina (2002) também ter desenvolvido um trabalho com estudantes do Ensino Médio com o objetivo de explorar a noção de derivada nesse nível de escolaridade, sua pesquisa difere das já citadas, porque não está clara, sua fundamentação teórica e sua pesquisa não consiste em uma sequência de ensino, como fizeram os autores já citados, mas sim um processo de modelagem matemática.

Assim, entendendo que «o sucesso de um modelo matemático resulta da capacidade de representar e manipular o conhecimento qualitativo e quantitativo das variáveis envolvidas e as formas de interação entre elas» (Spina 2002, p. 23), seu trabalho consistiu na criação de um modelo adequado de alvéolo para o melhor armazenamento de mel por abelhas.

Escolhido o tema, e a partir de algumas atividades introdutórias em consonância com as conjecturas e inferências levantadas pelo grupo de estudantes a respeito de um modelo de «alvéolo ideal», a autora desenvolveu o processo de modelagem a fim de levá-los a construir a ideia de derivada a partir da mobilização da noção de função.

Feito isso, e após ter explorado as ideias envolvidas no estudo de máximos e mínimos, de taxa de variação e de ter mobilizado a ideia de derivada no estudo do crescimento populacional de uma colmeia de abelhas, a autora constatou que, ao final da pesquisa, todos os estudantes interpretaram a derivada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P de seu domínio.

Diferente das pesquisas supracitadas, que tratam do processo de ensino e aprendizagem de algumas ideias do Cálculo no âmbito da escola básica, Rezende (2003, p. 9) realizou um ensaio teórico com o objetivo de «mostrar que parte significativa dos problemas de aprendizagem 'do atual' ensino de Cálculo é de natureza essencialmente epistemológica».

Para o autor, o problema do ensino superior de Cálculo não está na «falta de base» dos estudantes egressos da educação básica, e sim a ausência das ideias fundamentais do Cálculo nos ensinos fundamental e médio. Segundo o pesquisador, as ideias balizadoras do Cálculo são evitadas, ignoradas, ou tratadas superficialmente pelos professores da educação básica.

Frente a essa realidade, e entendendo que a origem das dificuldades no ensino de Cálculo encontra-se em outros contextos, que transcendem seu próprio espaço-tempo local, Rezende (2003) usou cinco dualidades essenciais do Cálculo e de seu ensino para identificar as dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. A análise evidenciou, em última instância, um único lugar-matriz destas dificuldades: «o da omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo» (Rezende 2003, p. 402).

Tendo em vista as dificuldades constatadas, o autor propõe que o primeiro grande passo para solucionar os problemas referentes ao ensino e aprendizagem do Cálculo, é «fazer emergir o conhecimento do Cálculo do 'esconderijo forçado' a que este está submetido no ensino básico» (Rezende 2003, p. 402). Para isso, sugere que o ensino básico de Matemática não seja processado somente por meio de suas vias tradicionais (via da aritmética, via da álgebra e via da geometria), deve-se acrescentar uma quarta via, que o autor denomina de «via da mecânica», por meio da qual a variabilidade e o movimento podem ser incorporados à arquitetura do conhecimento matemático abordado nesse nível de escolaridade. Dessa forma, o autor pretende não somente preparar o educando para o ensino superior de Cálculo, mas também permitir que o Cálculo desempenhe seu papel na construção do conhecimento matemático deste estudante e, principalmente, melhorar o próprio ensino de Matemática como um todo.

Nota-se, com isso, que o pesquisador não propõe a antecipação do Cálculo estudado no ensino superior para a escola básica, e sim, que as ideias fundamentais do Cálculo participem da tecedura do conhecimento matemático abordado na educação básica.

A pesquisa de Guedes e Assis (2009) foi a única que trabalhou exclusivamente com professores. Os autores realizaram um estudo com 30 professores de matemática da cidade de Natal – RN, com o objetivo de verificar se o ensino das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral era aceita pelos professores do Ensino Médio. Para isso, verificou se os professores pesquisados ministravam rudimentos de Cálculo em sua sala de aula para, ao final, apontar os motivos que os exclui ou não de sua prática docente.

A fim de atingir este objetivo, e entendendo que as ideias do Cálculo devem ser trabalhadas no Ensino Médio, os autores aplicaram um questionário uniformizado, composto por questões fechadas e por algumas «perguntas mistas, em que existiam quesitos de respostas já prontos para o professor escolher as mais adequadas segundo sua opinião» (Guedes e Assis 2009, p. 6).

Cada questionário foi dividido em blocos, formados por um tema específico composto por cinco perguntas que foram respondidas por todos os professores. Os resultados revelaram «que a maioria dos professores participantes da pesquisa concorda que o ensino de elementos de Cálculo seria importante para o aluno do Ensino Médio» (Guedes e Assis 2009, p. 10) e ainda que há vários motivos pelos quais os professores da educação básica não ensinam as ideias fundamentais do Cálculo em sua sala de aula. Dentre eles Guedes e Assis (2009) a falta de qualificação dos professores para ensinar Cálculo e o baixo nível de conhecimento matemático que os estudantes dispõem ao ingressar no Ensino Médio.

> No que se refere aos professores de Matemática do Ensino Médio que já estão inseridos no mercado de trabalho, muitos deles há vários anos, a pesquisa constatou que mais de 80% dos participantes se consideraram despreparados para ensinar esse assunto no Ensino Médio, um dado preocupante, uma vez que se espera que um professor de Matemática Licenciado seja capaz de ensinar os elementos do Cálculo de forma básica. (p. 11)

Além disso, a pesquisa também contatou que muitos professores não conhecem ou têm uma interpretação equivocada dos Parâmetros Curriculares Nacionais, «alguns chegam a afirmar que os parâmetros PCN já trazem o currículo de matemática do ensino médio todo pronto e que o professor tem que o seguir a risca» (Guedes e Assis 2009, p. 12).

Considerações finais

Nas pesquisas analisadas, nota-se, claramente, uma preocupação com o estudo de taxa de variação no âmbito da educação básica, e todos os documentos oficiais analisados fazem, direta ou indiretamente, alusões ao ensino de taxa de variação.

As pesquisas de André (2008), Pereira (2009), Spina (2002), Matos (2013), Silva (2012) e Silva e Silva (2015) evidenciaram a possibilidade de se explorar a taxa de variação como precursora da ideia de derivada no Ensino Médio. Seus resultados dão indícios de que estudantes da escola básica podem construir significado para a noção de derivada por meio da mobilização das ideias imersas no estudo de taxa de variação. A pesquisa de Rezende (2003), apesar de não ser direcionada especificamente à educação básica, evidenciou a necessidade de se estudar as ideias fundamentais do Cálculo nesse nível de escolaridade não somente por conta do ensino superior de Cálculo, mas também, para ampliar o próprio ensino de Matemática.

Em termos de referencial teórico, os trabalhos de André (2008), Pereira (2009) e Matos (2013) apoiam-se em teorias cognitivas, especificamente nas ideias de David Tall, para quem o ensino de Matemática não deve ser focado somente na construção formal de um conceito, e sim nas ideias e relações presentes na abordagem pedagógica deste conceito. Já os trabalhos de Silva (2012) e Silva e Silva (2015) apoiam-se na Teoria das Situações Didáticas - TSD e na Teoria de Registros de Representação Semiótica, enquanto o trabalho de Spina (2002) baseia-se em estudos teóricos metodológicos de Modelagem, no sentido de Bassanezi. No entanto, acreditamos que outros resultados poderiam ser obtidos a partir de outras teorias.

Uma vez que os trabalhos e os documentos analisados evidenciaram uma preocupação em relação ao ensino de taxa de variação na educação básica, e os resultados observados indicam a necessidade de se explorar as ideias imersas no estudo do Cálculo nesse nível de escolaridade e, principalmente, que estudantes da escola básica são capazes de compreendê-las, permanece o questionamento do por que não se trabalham as ideias fundamentais do Cálculo na educação básica.

Os resultados da pesquisa de Guedes e Assis (2009) apresentam uma possível resposta para este questionamento. Para eles, os professores da educação básica consideram-se despreparados para trabalhar rudimentos de Cálculo em sua sala de aula, o que vai ao encontro da afirmação do Currículo de São Paulo, de que não introduz as ideias do Cálculo na grade de conteúdos da educação básica por considerá-las distanciadas da prática docente.

Todavia, é sabido que os currículos dos cursos de matemática (licenciatura ou bacharelado) de toda Instituição de Ensino Superior Brasileira devem contemplar uma grade de conteúdos comuns, em que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral é obrigatória, conforme foi estabelecido nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, promulgada em 2001. Mas, por que então os professores de matemática da educação básica não estão aptos a ensinar rudimentos de Cálculo Diferencial e Integral? Visto que todos já estudaram Cálculo em suas graduações. Faltam-lhe conhecimentos específicos? Quais?

Uma resposta para esses questionamentos foi apresentada por Rossini (2006), para quem os conteúdos estudados nos cursos de Cálculo de toda licenciatura não se articulam com o que é feito em sala de aula. De acordo com Soares (1997, citado por Rossini, 2006), «não há espaço, dentro da formação específica do licenciando para que ele seja exposto, de maneira sistemática e coerente, à matemática que vai ensinar, com um olhar voltado especificamente para a sua formação profissional». (p. 280).

Entendemos que o professor da educação básica ou não tem algum dos conhecimentos específicos (matemáticos) para o ensino de taxa de variação ou faltam-lhe conhecimentos didáticos e pedagógicos que o auxiliem em sua prática docente.

Até o momento, não encontramos trabalhos que tratem da base de conhecimentos necessários para o professor ensinar taxa de variação na educação básica, o que está nos levando a aprofundar nossa revisão de literatura no intuito de identificarmos qual seria essa base.

Referências

Acre. (2010). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Caderno 1- Matemática. Rio Branco: SEE.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.

André, S. L. da C. (2008). *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

Brasil. (2000). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMT.

Brasil. (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT.

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: Editora da UEC.

Gerhardt, T. E; Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS.

Guedes, A. G.; Assis, M. M. A. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio*: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN. Anais II EREM, Natal.

Matos, L. S. (2013). *Compreensões sobre derivada e integral com o uso de um cas on-line*: um estudo com alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora.

Mato Grosso. (2010). *Orientações Curriculares*: Área de Ciências da Natureza e Matemática. Cuiabá: SEDUC-MT.

Minas Gerais. (2010). *Proposta Curricular de Matemática*: Ensinos Fundamental e Médio. Belo Horizonte: SEE.

Pereira, V. M. C. (2009). *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

Pernambuco. (2012). *Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. Recife: SEE.

Piauí. (2013). *Matrizes Curriculares do Ensino Médio*. Teresina: SEE.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo.

Rossini, R. (2006). *Saberes Docente Sobre o Tema Função: Uma Investigação das Praxeologias*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

São Paùlo. (2010). *Currículo do Estado de São Paulo*: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: SEE.

Silva, E. R. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP. São Paulo.

Silva, E. R.; Silva, M. J. F. (2015). *Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do Ensino Médio*. Anais XIV CIAEM, Chiapas, México.

Spina, C. O. C. (2002). *Modelagem Matemática no Processo Ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Unesp – São Paulo.

La igualdad: distintos significados en geometría[1]

Equality: different meanings in Geometry

Rubén Jara Sánchez[2]
Cecilia Gaita Iparraguirre[3]

Resumen

El presente trabajo emplea algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) que permiten identificar los significados de la igualdad que surgen de su empleo en la solución de problemas en el contexto de la geometría euclidiana. El diseño de las configuraciones epistémicas hace posible comprender la ontología establecida entre las definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de un tipo en particular, con procedimientos de solución propios y, argumentos que los justifican, empleando la terminología que le es inherente, en el seno de la institución matemática. Del estudio realizado se identifican al menos tres significados, dos de ellos compartidos con otros contextos y uno exclusivo de la geometría euclidiana.

Palabras-clave: *igualdad, igualdad geométrica, significado.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a20147005@pucp.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. cgaita@pucp.edu.pe

Abstract

This paper uses some theoretical and methodological tools from the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA) to identify the different meanings of equality that emerge from its use in problem solving in the context of Euclidean geometry. The design of the epistemic configurations allow us to understand the ontology established between the definitions and properties, while problems of a specific type are solved with geometrical procedures and arguments that justify them by using terminology that is inherent within the mathematical institution. The results show that there are at least three different meanings, two of them shared with other contexts and one exclusive to Euclidean geometry.

Keywords: *equality, geometric equality, meaning.*

Introducción

La definición más empleada de igualdad nos refiere que lo que se encuentra en cada miembro del signo igual son dos maneras de designar lo mismo, «cuando se escribe a=b, esto significa que a y b son símbolos usados para designar el mismo objeto» (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2000, p. 16). Sin embargo, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) muestran que esa no es la única interpretación que se puede hacer de la igualdad. Los autores indican que los distintos sistemas de prácticas determinan un modelo de la noción de igualdad; este es asumido como una definición y se concluye que:

> La noción de igualdad no puede ser restringida a un dominio matemático único. En efecto, el signo «=» viene determinado por el conjunto de relaciones que se establecen entre los modelos asociados a él y que emergen de las practicas usuales en las instituciones educativas actuales. (p. 21).

Luego señalan que:

> Con relación a la noción de igualdad, el objetivo consistiría en establecer un sistema de prácticas institucionales que posibilite

> la interacción explicita del modelo aritmético de igualdad con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico de tal forma que la noción de igualdad, comprendida como sistema, reequilibre los pesos que los modelos tienen con relación al significado personal que los sujetos le atribuyen. (p. 23).

Los mismos autores muestran que, solo en el conjunto de los números reales, se pueden identificar al menos ocho definiciones distintas de igualdad que surgen precisamente de su uso en distintas situaciones.

Una de estas indica que, dos números reales a y b serán iguales, a = b, si y solo si, a ≤ b y b ≤ a; esta es una igualdad basada en el concepto de orden (≤) en R. Asimismo, en un contexto topológico, se señala que dos números reales a y b serán iguales, si la distancia entre ellos es cero, es decir, a = b si y solo sí $d(a, b) = |a - b| = 0$. En ninguno de estos casos la definición de igualdad hace referencia a que la expresión a la izquierda del «=» se refiera a lo mismo que la expresión de la derecha.

Por otra parte, la solución de un problema nos permitirá identificar otros significados que se atribuyen al signo igual, el cual está íntimamente relacionado con la igualdad.

En la figura 1 se muestra un problema y su solución, en el cual se pueden identificar diferentes significados de la igualdad.

En una urna hay 6 bolas blancas, 4 rojas y 7 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 1 bola sea de color rojo?

Aplicando la regla de Laplace para resolver este problema se obtiene:

$$P(\textit{bola sea de color rojo}) = \frac{\textit{n.° de casos favorables}}{\textit{n.° de casos posibles}} = \frac{4}{6+4+7} = \frac{4}{17}$$

La probabilidad de extraer una bola de color rojo es 4/17.

Figura 1. Ejemplo con diferentes significados de la igualdad y del signo igual

En este caso, el signo igual posee distintos significados, según la clasificación hecha por Molina (2006). El primer signo = cumple la función de definir la probabilidad de eventos finitos y equiprobables. El segundo signo = cumple la función de asignar un valor numérico. Finalmente, el tercer signo = expresa el resultado de una acción, que en este caso es realizar una adición.

Lo anterior nos permite afirmar que, con la igualdad, también debe cumplirse lo señalado por Godino y Batanero (1994), según lo cual a los objetos matemáticos se les puede atribuir diferentes significados y estos están condicionados de manera institucional, personal o temporal. En particular, en el contexto de la geometría, se podrá identificar más de un significado para la igualdad.

En esta investigación se plantea reconocer la mayor cantidad de significados que adopta la igualdad en geometría; ello permitirá reconocer su complejidad y entender el origen de las dificultades derivadas de su uso.

Problema de investigación

Los estudios revisados nos permiten suponer que, al igual que en los contextos del álgebra y la aritmética, en el ámbito de la geometría, la igualdad adoptará diferentes significados y estos se pondrán de manifiesto en las definiciones, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas en las que esté involucrada.

Por ello, revisaremos diversos textos de matemáticas con la finalidad de identificar los significados particulares que adquiere la igualdad en geometría.

Esto nos permite formular la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son los significados que surgen del empleo de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana en libros formales?

Para dar respuesta a la pregunta planteada, nos trazamos como objetivo identificar el significado institucional de referencia para la igualdad en el contexto de la geometría. De esa manera se pretende poner en evidencia que la igualdad posee diferentes significados que surgen de los usos que se hace de esta cuando se resuelven diversas situaciones problema.

Metodología de investigación

Nuestra investigación será de corte cualitativo ya que, como indican Hernández, Fernández y Baptista (2010), la recolección de datos no pretende un análisis numérico o estadístico de estos, sino que, empleamos procesos inductivos y recurrentes para las diferentes etapas de nuestra investigación. No se seguirá una secuencia lineal ya que se buscará amplitud y profundidad de significados del objeto de estudio, con la finalidad de contar con una riqueza interpretativa que nos permita alcanzar el objetivo planteado.

Asimismo, la investigación será bibliográfica ya que se basará en el estudio de textos ya elaborados, como libros o artículos científicos (Gil, 2002). Por ello, se siguen las siguientes etapas.

- Identificación, localización y obtención de las fuentes bibliográficas adecuadas a la investigación que son de dos tipos: históricas y recientes.
- Lectura del material, que se realiza tomando en cuenta la identificación de las informaciones y datos referidos a la igualdad en gometría, estableciendo relaciones y analizando la consistencia entre los datos e informaciones dados por los diversos autores. La lectura es exploratoria, selectiva, analítica e interpretativa.
- Identificación de los objetos primarios que permitirán construir el significado de referencia de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana.
- Organización de la información recogida a través de la noción de configuración epistémica.

Como fuentes históricas consideramos dos libros que son fundamentales en el estudio de la geometría, *Elementos*, de Euclides en una edición en castellano de 1991. En dicho libro se presenta, por primera vez, a la geometría como un sistema estructurado de axiomas, postulados y teoremas. También se considera el libro *Fundamentos de la Geometría*, de David Hilbert, en una edición en castellano de 1953, en el cual el autor establece un sistema completo y sencillo de axiomas (los cinco grupos de axiomas) que permiten deducir los teoremas de la geometría.

Para las fuentes recientes se acudirá a una serie de textos de diferentes enfoques. En la tabla 1 se presenta el detalle de los textos seleccionados.

Tabla 1

Textos seleccionados para el análisis

Descripción de los textos empleados para la construcción del significado de referencia.

Título	Autores	Año edición	Descripción
Elementos	Euclides	1991	Edición del más famoso libro de matemática, en el que se presenta por primera vez a la geometría como un sistema estructurado de axiomas, postulados y teoremas.
Fundamentos de la Geometría	David Hilbert	1953	Ensayo en el cual se establece un sistema completo y sencillo de axiomas (los cinco grupos de axiomas) que permiten deducir los teoremas de la geometría.
Matemática para la escuela secundaria	Frank B. Allen, Edwin C. Douglas, Donald E. Richmond, Charles E. Rickart, Henry Swain y Robert J. Walker	1965	Este texto es un manual elaborado para apoyar a los docentes de matemática de las escuelas de Estados Unidos con aspectos metodológicos y matemáticos sobre la enseñanza de la geometría.

Título	Autores	Año edición	Descripción
Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança	Elon Lages Lima	1991	Este texto fue elaborado como apoyo de un curso de formación de docentes de secundaria de Río de Janeiro.
Geometría Básica. Curso 1	Teódulo Verástegui Ch.	2003	Este texto es elaborado para apoyar la enseñanza de geometría para alumnos universitarios empleando el método axiomático para su estructura formal.
Geometría Moderna	Edwin E. Moise y Floyd L. Downs Jr.	1986	Este texto está dirigido a estudiantes que requieren «leer» matemáticas, está redactado en un lenguaje directo y sencillo, y emplea figuras o gráficos y ejemplos concretos de los teoremas.
Geometría con Aplicaciones y solución de problemas	Stanley R. Clemens, Phares G. Odaffer, Thomas J. Cooney	1989	Este texto está dirigido a estudiantes de todo nivel que requieren aprender los principios de la geometría básica partiendo de su aplicación en la solución de situaciones concretas

Elementos teóricos considerados

Consideramos que es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) el que nos brinda las herramientas teóricas y metodológicas para abordar las distintas etapas de esta investigación.

Desde la perspectiva del EOS, para identificar los significados de la igualdad en contextos geométricos se requiere reconocer los conceptos, propiedades, argumentos, procedimientos y el lenguaje matemático involucrados al enfrentar situaciones problema.

Además, tal como indican Pino-Fan, Godino y Font (2011), el objeto matemático alcanza su significado cuando es considerado junto con todos estos objetos emergentes primarios propios; esto significa que solo se puede comprender el significado del objeto matemático si es que se comprenden sus definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de un tipo en particular, con procedimientos de solución propios y argumentos que justifiquen estos procedimientos, empleando la terminología que le es inherente.

En el seno de las instituciones educativas se realizan determinados tipos de prácticas, lo que determina la emergencia progresiva de los «objetos matemáticos». El «significado» de estos objetos está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, sin que pueda reducirse este significado del objeto a su mera definición matemática (Godino & Batanero, 1994, p. 5).

Para el EOS, un problema es asumido como «toda situación que requiera analizar la información, establecer relaciones lógicas y obtener conclusiones» (Malaspina, 2007, pp. 369-370). En los problemas matemáticos, en particular, intervienen objetos matemáticos o símbolos que están explícitos o implícitos en el enunciado del problema o en las tareas que se realizan para su solución.

El EOS define institución como «las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas» (Godino & Batanero, 1994, p. 9). Se puede identificar a la institución como una comunidad de prácticas donde sus miembros se encuentran comprometidos con los mismos problemas y esto es lo que promueve la realización de prácticas sociales similares pero condicionadas por los instrumentos con los que cuentan, sus reglas y su modo de funcionamiento.

El objeto matemático institucional se diferenciará del objeto matemático personal por el hecho de que el primero será un emergente de las prácticas institucionales que están asociadas a un determinado campo de problemas, mientras el segundo será un emergente de las prácticas personales.

Todas estas definiciones permiten al EOS definir el significado de un objeto matemático institucional OI como «el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado» (Godino & Batanero, 1994, p. 13). En esta definición se debe considerar que el significado del objeto matemático está referido a la acción que se realiza con él, por lo que su significado depende de la institución, así como de su evolución temporal.

Debemos hacer notar que los problemas, o situaciones problemas, constituyen el origen de la actividad, mientras el lenguaje sirve como instrumento para realizar las acciones necesarias para su resolución.

La cuestión del significado de un objeto matemático es importante para el EOS y en este sentido se asume que el sistema de prácticas, que incluye componentes operativos y discursivos, se constituye en el significado sistémico o praxeológico del objeto matemático. Se puede afirmar que el significado abarca todo el contenido asignado a una expresión y es aquello a lo que hace referencia un sujeto en un lugar y tiempo determinado. Los objetos matemáticos primarios son precisamente los que permitirán determinar el significado de un objeto matemático, estos son:

1. Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
2. Situaciones problemas (aplicaciones intra o extra matemáticas, ejercicios).
3. Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) como recta, punto, numero, media función.
4. Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
5. Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
6. Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones, deductivos a de otro tipo) (Malaspina, 2007, p. 371).

Estos objetos primarios son estructurados en un esquema denominado Configuración Epistémica, donde se puede apreciar a todos los objetos primarios que están involucrados en la asignación del significado del objeto en una institución. Dado que el significado estará asociado al objeto matemático emergente de una situación problema, estas se constituyen en las unidades de análisis. El significado institucional de referencia es construido por el investigador a partir de textos de matemática especializados, así como de investigaciones y artículos científicos.

En este trabajo en particular identificamos los significados de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana a partir de la identificación de sus objetos primarios. Con estos elementos se elaboraron distintas configuraciones, las que ponen en evidencia la existencia, al menos de tres significados diferentes para la igualdad en contextos de geometría euclidiana.

Resultados del análisis realizado

Luego del análisis realizado se han encontrado diferentes significados de la igualdad en geometría euclidiana. Así por ejemplo, si L es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio y L' es el conjunto de puntos equidistantes de A y B, entonces $L=L'$ (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2000), los objetos geométricos L y L' son iguales, porque los puntos que conforman el objeto geométrico L, son los mismos que conforman el objeto geométrico L', lo cual equivale a afirmar que un objeto geométrico es igual a sí mismo.

Por otra parte, Allen, Douglas, Richmond, Rickart, Swain y Walker (1965) señalan que se suele afirmar que dos triángulos son iguales cuando tiene la misma área, o dos poliedros son iguales si tienen el mismo volumen. En este caso, una interpretación plausible de la igualdad hace referencia a la «cantidad de materia» que contienen los triángulos o los poliedros respectivos. Esta igualdad es de naturaleza distinta a la del ejemplo anterior pues no es en el sentido de representar al mismo objeto.

Adicionalmente, los mismos autores afirman que, cuando se dice que dos ángulos son iguales, se quiere indicar que ambos ángulos tienen la misma medida; mientras que si se afirma que dos segmentos son iguales, se refiere a que tienen la misma longitud o si dos circunferencias son iguales, significa que tienen el mismo radio.

Aquí observamos que existe otro significado para la igualdad en geometría, que no aparece en otros contextos; se trata de la congruencia. Cuando una figura, ya sea un ángulo, un segmento o una circunferencia, sufre una transformación (un movimiento rígido) que la hace coincidir con su par respectivo, se establece una diferencia entre este tipo de igualdad y las de los ejemplos anteriores; dicha «movilidad» es la que justifica el empleo de la congruencia en lugar de la igualdad, al tratar con objetos geométricos.

Así, hemos identificado tres significados de referencia de la igualdad geométrica que hemos denominado: igualdad como identidad, igualdad por asignación de medidas de áreas o volúmenes, e igualdad como congruencia.

Para describir cada uno de estos significados hemos construido las configuraciones epistémicas, organizadas a partir de tipos de situaciones problema o campo de problemas en los que aparece la igualdad en textos de geometría euclidiana de nivel superior.

Significado 1: Igualdad como Identidad

Para el caso de la identidad geométrica se ha identificado como un tipo de situaciones problemas aquellas en las que es necesario establecer una igualdad entre un objeto geométrico y él mismo. Es equivalente a la igualdad numérica, en la que $a=b$ significa que los símbolos a y b hacen referencia al mismo objeto. En el caso de la geometría tendremos dos objetos geométricos que en realidad son el mismo ya que son conjuntos formados por los mismos puntos; es en ese sentido que consideramos que esta igualdad es equivalente a la igualdad de conjuntos en álgebra.

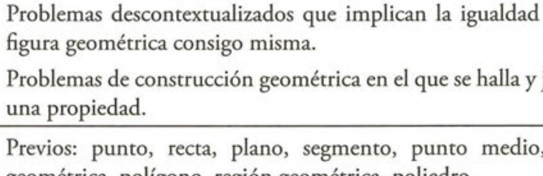
La figura 2 muestra dos rectas coincidentes L_1 y L_2, las cuales contienen a los mismos puntos, por ello se puede afirmar que $L_1 = L_2$.

Figura 2. Rectas coincidentes.

Fuente. Verástegui (2003, p. 80).

Otro tipo de situaciones en donde aparece este significado son las que se refieren a la determinación de lugar geométrico. En la tabla 2 se presentan los objetos primarios asociados a este significado.

Tabla 2
Configuración epistémica de la igualdad como identidad

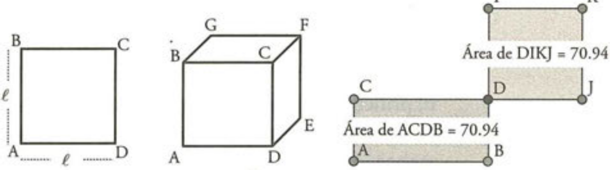
Lenguaje	Verbal: igualdad, igual, identidad, equivalencia, punto, recta, plano, segmento, ángulo, triángulo, cuadrilátero, polígono, poliedro, conjunto, lugar geométrico, definición, propiedad, circunferencia, radio. Simbólico: =, P, AB, $\overline{AB}$, $\angle$ABC. Gráfico: 
Situaciones problemas	Problemas descontextualizados que implican la igualdad de una figura geométrica consigo misma. Problemas de construcción geométrica en el que se halla y justifica una propiedad.
Conceptos-definición	Previos: punto, recta, plano, segmento, punto medio, figura geométrica, polígono, región geométrica, poliedro. Emergentes: igualdad, como igualdad de conjuntos de puntos.

Proposiciones-propiedades	Espacio es el conjunto de todos los puntos. Todo cuerpo, superficie o línea es un conjunto de puntos. Figura es un conjunto de puntos o una parte del espacio. Recta es un conjunto de puntos.
Procedimientos	Identificar y aplicar los axiomas y teoremas de la geometría sintética. Aplicar las definiciones de objetos geométricos distintos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Demostración deductiva.

Significado 2: Igualdad por asignación de una medida

En un tipo de situación problema para la igualdad de áreas o volúmenes, la expresión «igual» se refiere a que ambas regiones poligonales tienen la misma área (Lima, 1991) o ambos solidos poseen el mismo volumen, aunque no necesariamente la misma forma. En la tabla 3 se presentan los objetos primarios asociados con este significado.

Tabla 3
Configuración epistémica de la igualdad como asignación de una medida

Lenguaje	Verbal: región, área, base, altura, cuadrado, suma de áreas, resta de áreas, igual, congruente, descomposición, arista, volumen, suma de volúmenes, resta de volúmenes, espacio, poliedro, sólido, etcétera. Simbólico: =, ≡, R(ΔABC), A(P), V(P), etc. Gráfico: 

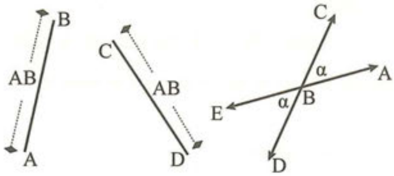
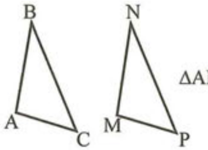
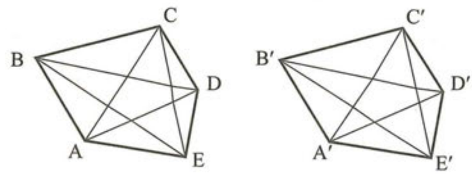
Situaciones problemas	Problemas de determinación del área de una región poligonal o del volumen de un sólido. Problemas que implican la transformación de un polígono en otro con la misma área o de un sólido en otro con el mismo volumen. Por ejemplo, construir un cuadrado cuya área sea la misma que la del rectángulo ACDB mostrado en la figura.
Conceptos-definición	Previos: punto, plano, segmento, figura geométrica, polígono, región geométrica, función, espacio. A cada sólido se le asigna un único número positivo llamado volumen. Tanto un punto como un segmento son conjuntos acotados a los cuales les corresponde Área 0. Emergentes: área de una región, fórmulas del área de cuadriláteros, composición y descomposición de regiones poligonales, suma de áreas, resta de áreas, poliedro, arista, volumen, composición y descomposición de sólidos, suma de volúmenes, resta de volúmenes.
Proposiciones-propiedades	Existe una función A llamada Área, definida para todos los conjuntos acotados en el plano de modo que, a cada conjunto acotado S se le asigna un número no negativo A(S). Dados dos conjuntos S y T del plano, que no tienen punto en común, entonces, el área de la reunión de S y T es igual a la suma de las áreas de S y T. Si S es un conjunto de puntos del plano, S es acotado y $S \equiv T$ entonces el área de S es igual al área de T. Si S es el conjunto formado por un cuadrado de lado 1 y su interior, entonces el área de S es 1. El área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base por la de su altura. Volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo: el volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo es el producto del área de su base por su altura. Suma de volúmenes: si un sólido es la unión de dos dolidos que no tienen puntos interiores comunes entonces su volumen es la suma de los dos volúmenes. El principio de Cavalieri: según el cual dados dos cuerpos solidos S y T sobre un plano X, si todo plano paralelo al plano X, interseca a ambos sólidos en secciones transversales que tienen la misma área, entonces ambos sólidos tienen el mismo volumen.

Procedimientos	Deducir fórmulas que permitan obtener el área de cuadriláteros a partir de su descomposición en triángulos o cuadrados. Emplear las fórmulas de áreas. Componer y descomponer regiones poligonales en triángulos o cuadrados. Realizar operaciones numéricas. En particular para el ejemplo propuesto el procedimiento es el siguiente: Trazar las rectas que contienen unos lados del rectángulo ACDB, emplear suma de segmentos, punto medio y trazado de circunferencia, establecer relaciones numéricas entre las medidas de segmentos para obtener un cuadrado DIKJ, que tiene la misma área del rectángulo.
Argumentos	El área de un cuadrado es la medida de su lado al cuadrado. El volumen de un cubo es igual a la medida de la longitud de su lado al cubo. Demostración deductiva.

Significado 3: Igualdad como Congruencia

Hemos identificado hasta cuatro diferentes clases de situaciones problemas para el caso de la congruencia, las que se refieren a congruencia de segmentos, de ángulos, de triángulos y de polígonos en general, aunque estas comparten las mismas definiciones y conceptos, propiedades, argumentos y lenguaje por ello presentamos una configuración epistémica para ellos. En la tabla 4 se presentan los objetos primarios asociados con este significado.

Tabla 4
Configuración epistémica de la igualdad como congruencia

Lenguaje	Verbal: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto entre otros dos, punto medio, longitud del segmento, igualdad, congruencia, transformación, simetría, traslación, rotación, ángulo, bisectriz, medida de ángulos, ángulo recto, ángulo agudo, grado, ángulos opuestos, ángulos alternos, igualdad, triángulo, lado, criterios, isósceles, equilátero, correspondencia biunívoca, polígono, vértice, etcétera. Simbólico: =, ≡, P, AB, $\overline{AB}$, m(A,B), $\angle ABC$, $\widehat{ABC}$, m($\widehat{ABC}$), $\overrightarrow{AB}$, ABC, ALA, LAL, LLL, A↔A' Gráfico:   $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ A↔A′, B↔B′, C↔C′, D↔D′, E↔E′  AB=A′B′, AC=A′C′, AD=A′D′, AE=A′E′, BC=B′C′, BD=B′D′, BE=B′E′, CD=C′D′, CE=C′E′, DE=D′E′
Situaciones problemas	Problemas donde se debe determinar la congruencia de figuras geométricas, en particular entre segmentos, ángulos y polígonos.

Conceptos-definición	Previos: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto medio, medida de segmentos, unidad de medida. Dados dos puntos de una recta los puntos que están entre ambos puntos incluidos estos forman un segmento de recta. La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos. Tres o más puntos no alineados de un plano definen segmentos que se intersecan dos a dos en esos puntos, la unión de estos segmentos es un polígono. Los puntos donde se intersecan los segmentos son los vértices del polígono. Los segmentos que forman el polígono son los lados del polígono. Si los vértices de un polígono determinan segmentos que tienen la misma longitud que los generados por los vértices de otro polígono, entonces se dice que los vértices se corresponden de manera biunívoca. El punto medio de un segmento divide al segmento en dos segmentos congruentes. Emergentes: congruencia de segmentos, igualdad de medida de segmentos, ángulos congruentes, igualdad de medida de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, bisectriz, ángulos alternos, triángulos congruentes, criterios de congruencia correspondencia biunívoca de puntos, transformación rígida, polígonos congruentes.
Proposiciones-propiedades	A cada punto de una recta le corresponde un único número real. Dados tres puntos A, B y C en ese orden, sobre una recta, entonces AB + BC = AC Si todos los vértices de dos polígonos se corresponden de manera biunívoca entonces los polígonos son congruentes.
Procedimientos	Establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de puntos (figuras geométricas) en el plano. Emplear la definición de longitud de un segmento para determinar si son congruentes. Emplear la definición de congruencia de segmentos para determinar la longitud de otro segmento. Aplicar transformaciones rígidas a segmentos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos segmentos congruentes tienen la misma medida. Demostración deductiva.

Consideraciones finales

Se ha encontrado que la igualdad en geometría euclidiana es empleada al menos en tres sentidos diferentes: como identidad, cuando se asigna una medida de área o volumen a un objeto geométrico y como congruencia. Solo en los dos primeros casos se emplea el signo «=»; en el caso de la congruencia se emplea un signo distinto «≡».

Por otra parte, se ha identificado que la igualdad en geometría euclidiana tiene algunos significados que pueden ser asumidos como equivalentes a los significados que se le da en contextos algebraicos y aritméticos. Ese es el caso de la igualdad como identidad y la igualdad como asignación de una medida (igualdad funcional en algebra). En estos casos los objetos geométricos se pueden considerar semejantes a los algebraicos o aritméticos.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con la igualdad como congruencia; este es un significado que solo tiene sentido en geometría euclidiana ya que implica propiedades que son propias de los objetos geométricos.

Referencias

Allen, F., Douglas, E., Richmond, D., Rickart, Ch., Swain, H. & Walker, R. (1965). *Matemática para la escuela secundaria. Geometría (Parte 2.). Comentario*; EE.UU.

Borba, M. & Araújo, J. (2004) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Carranza, C. (1968). *Algebra*. Lima: UNI.

Ceballos, L. (2012). Matemáticas para todos: la relación de igualdad y sus implicaciones en la solución de ecuaciones. *Cuaderno Activa*, (2), 79-81. Recuperado de http://ojs.tdea.edu.co/index.php/cuaderno activa/issue/view/7/showToc

Euclides. (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Gredos.

Gil, A. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4ta Edición. São Paulo: Atlas.

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. 5ta edición. México.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la Geometría*. Madrid: Instituto Jorge Juan.

Lima, E. (1991). *Medida y forma en geometría. Longitud, área, volumen y semejanza*. Río de Janeiro: IMCA.

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. & Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media. Volumen 1*. Lima: IMCA.

Malaspina U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3), 365-399.

Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. México: Mc Graw-Hill.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del signo Igual por Alumnos de Tercero de educación Primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de la Rioja. Granada, España. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Pino Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educ. Matem. 13*(1), 142-178. Recuperado de http://www.ugr.es/

Stanley, R., Clemens, S., O'Daffer, P. & Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Washington: Addison-Wesley.

Verástegui, T. (2003). *Geometría Básica. Curso 1*. Lima: Moshera.

Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacasta, E. (2004). *Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de Igualdad*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf

Análise de situações didáticas em termos do letramento probabilístico[1]

Analysis of didactical situations in terms of probabilistic literacy

Cristiane Candido Luz Caberlim[2]
Cileda De Queiroz E Silva Coutinho[3]

Resumo

O objetivo deste artigo é discutir a aprendizagem de probabilidade por meio de uma simulação computacional desenvolvida em um contexto geométrico, interpretando-a à luz do letramento probabilístico. A metodologia utilizada foi o estudo de caso. Foram propostas três situações didáticas, organizadas de forma que os conhecimentos visados fossem construídos progressivamente. Observou-se, como resultados, que não houve dificuldade na manipulação do software Cabri-Géomètre II, ainda que os alunos não tivessem contato prévio. A articulação entre o enfoque clássico e o frequentista no contexto geométrico contribuiu na construção dos significados e, em consequência, no desenvolvimento do letramento probabilístico.

Palavras-chave: probabilidade; letramento probabilístico; simulação computacional.

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP) – cristianecanluz@yahoo.com.br

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – cileda@pucsp.br

Abstract

The purpose of this article is to discuss probability learning by using computer simulation developed in a geometric context, interpreting it in the light of probabilistic literacy. The methodology used was the case study. Three didactic situations were proposed, organized so that the aimed knowledge was built progressively. As a result, it was observed that there was no difficulty manipulating the Cabri Geometry II software, even though students had no previous contact. The articulation between the classical and the frequentist focus on the geometric context contributed to the construction of meanings and, consequently, to the development of probabilistic literacy.

Keywords: *probability; probabilistic literacy; computer simulation.*

Introdução

Este artigo tem por objetivo discutir a aprendizagem de probabilidade a partir do uso de simulação computacional, no contexto de probabilidade geométrica, à luz da definição de letramento probabilístico desenvolvida por Gal (2005).

O estudo aqui apresentado faz parte de uma pesquisa de mestrado desenvolvida na PUC-SP, com o objetivo de diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas, buscando elementos que permitiam uma proposta de modelo de construção de conceito (evolução de aprendizagem) articulando-os com os termos do letramento probabilístico.

Ao discutir-se a aprendizagem de probabilidade, estamos abordando muitas situações de importância social e podemos citar exemplos como: investimentos financeiros, previsão do tempo, loterias, análise de seguros, entre outros. Ressaltamos que, no Brasil, este conteúdo está inserido no currículo da educação fundamental desde 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Citamos particularmente o volume destinado ao terceiro e quarto ciclos, que destacam a importância do conhecimento probabilístico dentro do conhecimento matemático e perante a sociedade:

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1998, p.52).

As situações didáticas referenciadas neste artigo foram propostas por Caberlim (2015), a partir de uma adaptação daquelas estudadas em Coutinho (2001), articulando o enfoque clássico e frequentista da probabilidade em um contexto geométrico e utilizando simulação computacional.

Metodologia e Quadro Teórico

A metodologia utilizada por Caberlim (2015) foi um estudo de caso que têm o intuito de conhecer bem uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer unidade social. Busca-se compreender o «como» e os «porquês», evidenciando características próprias, nos aspectos que interessam ao pesquisador. A pesquisa de Coutinho (2001), que originou o estudo desenvolvido por Caberlim, foi uma engenharia didática desenvolvida com alunos franceses que cursavam o primeiro ano do ensino médio.

No Brasil, o conjunto de atividades que compunham as situações didáticas de Caberlim (2015) foi aplicado a 15 alunos do 3º ano do Ensino Médio de um Colégio da rede privada da cidade de São Paulo e assumimos a hipótese de que, independente de sua formação escolar anterior, já tiveram contato com situações de caráter aleatório.

O propósito foi conduzi-los a um processo de observação e análise do componente de imprevisibilidade intrínseco nas atividades propostas. Sete protocolos foram analisados, construídos a partir dos diálogos e produção dos sete alunos que participaram de todas as atividades. O software utilizado foi o Cabri-Géomètre II, em associação com a planilha eletrônica Excel.

Para análise dos dados coletados, Caberlim (2015) utilizou a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1990; 1998) e o Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005). Neste artigo discutiremos os aspectos relativos a esse segundo referencial.

Gal (2005) designa por letramento probabilístico um processo que envolve um conhecimento mais aprofundado dos construtos teóricos da ciência em análise e de sua epistemologia. Trata-se de uma formação técnica do domínio das linguagens e ferramentas mentais usadas para o desenvolvimento científico:

> O termo letramento tem sido tradicionalmente associado com o nível de habilidades de leitura e escrita que as pessoas necessitam para o mínimo funcionamento em sociedade. Por associação, o uso de «letramento» quando comparado com um termo denotando uma área de atividade humana (por exemplo, «letramento computacional») pode provocar uma imagem do conjunto minimal de habilidades básicas esperadas para todos os cidadãos nessa área, se opondo ao conjunto de habilidades mais avançadas que apenas algumas pessoas podem alcança (Gal, 2005, p.41-42, tradução nossa).

Para análise das situações didáticas desenvolvidas neste estudo foram utilizados os seguintes componentes do letramento probabilístico:

> Elementos de conhecimento
>
> 1. Grandes ideias: Variação, Aleatoriedade, Independência Previsibilidade e Incerteza.
> 2. Figurando probabilidades: maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.

3. Idioma: Os termos e os métodos utilizados para comunicar sobre chance.
4. Contexto: Compreender o papel e as implicações de questões probabilísticas e mensagens em vários contextos e no discurso pessoal e público.
5. Questões críticas: questões para refletir sobre quando se lida com probabilidades.

Elementos disposicionais

1. Postura crítica.
2. Crenças e atitudes.
3. Sentimentos pessoais sobre a incerteza e o risco (por exemplo, a aversão ao risco) (Gal, 2005, p.46, tradução nossa).

Neste contexto, os resultados observados são analisados com intuito de uma discussão mais especifica no que se refere à habilidade de leitura e escrita na comunicação de resultados que envolvem probabilidades.

Situações Didáticas

Para o desenvolvimento do processo de aprendizagem e coleta de dados relativos ao letramento probabilístico construído ao longo desse processo, foram propostas três situações didáticas, organizadas de forma a que os conhecimentos visados fossem construídos paulatinamente e com complexidade crescente. Buscava-se assim que a abordagem priorizasse a construção conceitual dos conceitos envolvidos. Vale aqui ressaltar que as pesquisas que envolveram a análise da abordagem de probabilidade em livros didáticos, particularmente (Coutinho, 2013), indicam a tendência para o aspecto tecnicista e procedimental.

Cada situação era constituída de duas atividades que se articulavam, exceto a última delas, na qual uma única atividade era proposta como forma de aplicação dos conhecimentos construídos nas situações anteriores.

SITUAÇÃO «A» - URNA DE BERNOULLI

Atividade A_1: Atividade introdutória, com intuito de levar os alunos ao reconhecimento de uma experiência aleatória, diferenciando experiências reprodutíveis e não reprodutíveis. Para isso, foram entregues fichas aos alunos participantes e, após responderem às questões propostas, foi feita uma socialização das discussões e institucionalização local (experiência aleatória)

Atividade A_2: busca o reconhecimento da configuração de «Urna de Bernoulli» como um modelo de experiência aleatória. Para isso, entregou-se aos participantes um pote contendo 50 contas coloridas (algumas azuis e outras vermelhas), sem que o aluno soubesse a proporção entre as duas cores. A tarefa consistia em realizar um sorteio, com reposição, observando a cor da conta sorteada. O sorteio deveria ser repetido um grande número de vezes para que se introduzisse a discussão sobre a estabilização das frequências a partir da comparação entre os resultados de cada dupla de alunos com os resultados apresentados pela pesquisadora (1000 repetições do sorteio). O objetivo foi o de preparar a abordagem do enfoque frequentista de probabilidade.

SITUAÇÃO «B» URNA DE PIXELS (DESENVOLVIDA EM AMBIENTE COMPUTACIONAL)

Atividade B1: O intuito é que os alunos relacionem o «sorteio» de pixels em uma região pré-determinada (no caso, no interior de um retângulo, conforme Figura 1), realizado pelo software, com o sorteio de uma conta em um pote que foi realizado na atividade A2. Solicitou-se aos alunos que determinassem a probabilidade de que o pixel sorteado estivesse no interior do retângulo AEFD, o que se esperava que fizessem pela determinação da razão entre as áreas de AEFD e ABCD.

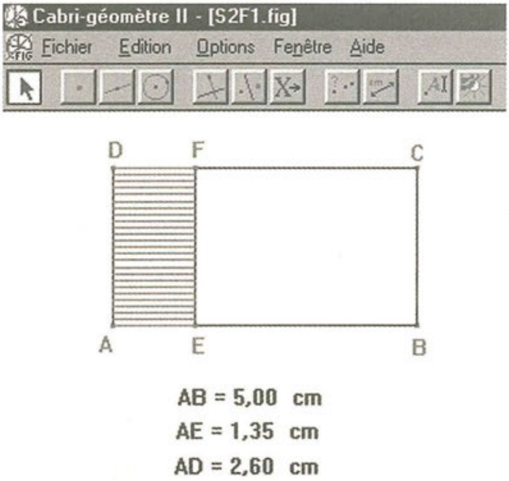


Figura 1. Construção no Cabri II comparação das áreas

Atividade B2: O intuito foi de introduzir um dispositivo computacional como uma ferramenta de simulações de experimentos aleatórios, comparando o valor da probabilidade determinado *a priori* com a frequência estabilizada de sucessos obtidos experimentalmente, ou seja, relacionando a probabilidade geométrica com o enfoque frequentista. Na tela do Cabri II (Figura 2), uma macro-construção gera um ponto ao acaso e o associa a um resultado dicotômico (0 ou 1). Esse resultado alimenta uma tabela do próprio Cabri II que, por sua vez, é «transferida» para uma planilha Excel que fornece a série de frequências relativas acumuladas de forma a que o aluno possa observar a estabilização de tal série.

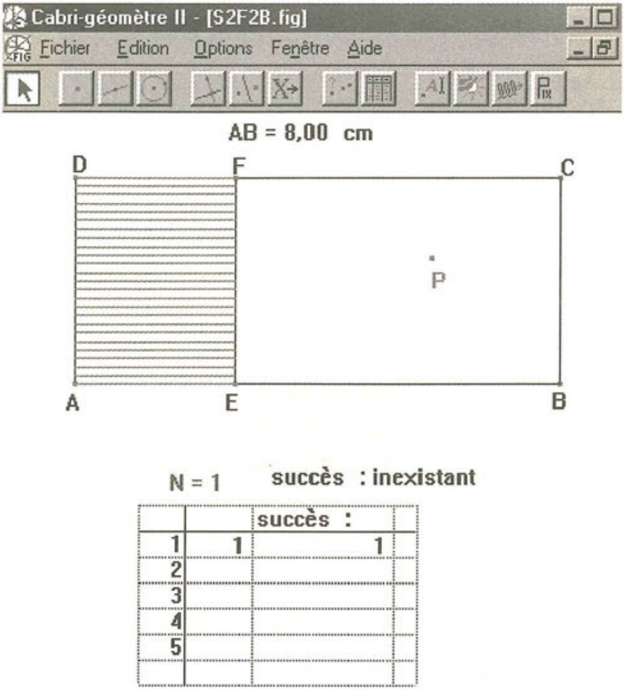


Figura 2. Macro-construção no Cabri II para simular o sorteio de um pixel ao acaso

A situação trabalhou a probabilidade geométrica articulando o enfoque clássico e o enfoque frequentista da probabilidade, em associação com o proposto na situação A: reconhecimento de uma experiência aleatória e de um modelo de urna de Bernoulli: sorteio aleatório com dois resultados possíveis, sucesso e fracasso. Esperava-se que os alunos associassem um pixel com uma conta colorida dentro do pote.

Situação «C» *Franc-Carreau*

O jogo *Franc-Carreau* consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso ladrilhado para que se observe sua posição final após imobilização. Os jogadores apostam sobre tal posição: ela se imobilizará inteiramente sobre um único ladrilho (posição Franc-Carreau) ou sobre os rejuntes – apostava-se sobre o número de rejuntes tocados pela moeda imobilizada. Segundo Coutinho (2001), este jogo foi estudado pela primeira vez em 1733 por um naturalista e matemático francês, Georges-Louis Leclerc, o conde de Buffon e é apresentado por Badizé et al (1996, apud Coutinho 2001) como uma proposição para introdução às probabilidades com alunos de 11-12 anos de idade.

O jogo Franc-Carreau foi trabalhado por meio de uma macro-construção no ambiente Cabri-Géomètre II, em processo de simulação do mesmo tipo utilizado na situação B: do ponto ao acaso a um resultado dicotômico, do resultado para a tabela Cabri II e da tabela para o Excel. A tela para manipulação dos alunos é apresentada na Figura 3.

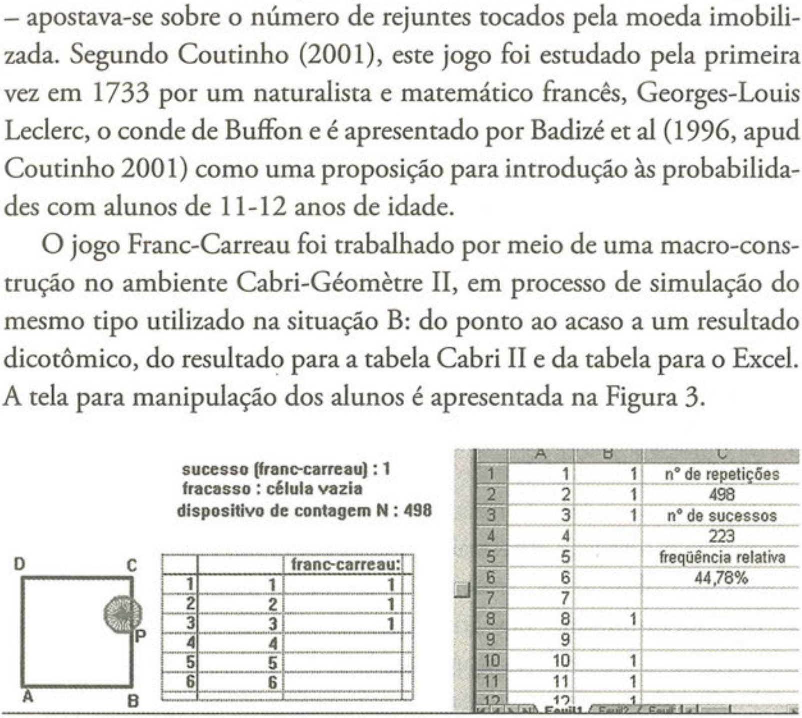


Figura 3. Macro-construção no Cabri Géomètre II e planilha eletrônica para simular o jogo Franc-Carreau

A análise das produções e discursos coletados na referida pesquisa, foram analisados quando os alunos participantes mobilizaram o conhecimento probabilístico na resolução dos problemas propostos.

Resultados Observados

Alguns dos resultados apontados por Caberlim (2015) são identificados na sequência.

No que se refere à percepção de reprodutibilidade, os alunos conseguiram discernir o acaso (reprodutível) da contingência (não reprodutível). Articularam os enfoques clássico e frequentista da probabilidade de forma adequada para a resolução do problema proposto. Observamos também a apropriação do conhecimento sobre a experiência de Bernoulli (um experimento aleatório que admite apenas dois resultados: o sucesso e o fracasso). Estes resultados relacionam-se com os elementos do letramento probabilístico: «questões críticas» para refletir sobre quando se lida com probabilidades, e ao elemento «disposicional»: postura crítica. Assim, inferimos a relação destes com o desenvolvimento do letramento probabilístico permitindo inferir, analisar o desenvolvimento do letramento probabilístico dos alunos. Gal denominou como *Big Ideas* referindo-se à Variação, Aleatoriedade, Independência e Previsibilidade (Caberlim & Coutinho, 2015, p. 3).

No que se refere à definição de probabilidade, os alunos construíram a relação entre a ideia de razão e o enfoque clássico de probabilidade; delimitaram o espaço amostral de forma intuitiva, reconheceram uma experiência aleatória e associaram ao seu cotidiano. Responderam as questões propostas das atividades no contexto de probabilidade geométrica articulando-as com o enfoque clássico e frequentista da probabilidade sem dificuldades de manipular o simulador computacional. Nos termos do letramento probabilístico relacionam-se com os elementos de conhecimento, maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.

Todas as respostas fornecidas pelos alunos nas situações didáticas articularam-se com os elementos de conhecimento do letramento probabilístico, denominados termos e métodos utilizados para comunicar sobre a chance (linguagem corrente utilizada para descrever as respostas e justificá-las, a qual foi sendo mais apropriada conforme o progresso das situações propostas) e o contexto que possui a compreensão do papel e as implicações de questões probabilísticas e mensagens em vários contextos e no discurso pessoal e público (Caberlim & Coutinho, 2015, p.3).

Em síntese, observou-se que foi possível verificar uma abordagem que não tenha como ponto de partida situações de equiprobabilidade favorecendo a construção do conceito de probabilidade. Percebeu-se que a articulação entre o enfoque clássico e o enfoque frequentista permitiu a não observação do erro conceitual de assumir a frequência relativa de um evento como sua probabilidade, a partir de um número muito pequeno de repetições da experiência aleatória.

No Brasil, os materiais didáticos sugerem «algumas» repetições de um experimento para sugerir o valor da probabilidade, gerando obstáculo à aprendizagem. Entendemos obstáculo como um conhecimento já estabilizado pelo sujeito e que dificulta novas aprendizagens. Ressaltamos a limitação nos materiais didáticos, aos contextos de equiprobabilidade, pois pesquisas referenciadas por Caberlim (2015) apontam para um obstáculo importante: na ausência de informações, todos os eventos são equiprováveis.

Considerações finais

Neste artigo buscamos discutir a aprendizagem de probabilidade a partir da utilização da simulação computacional, analisando-a sob a ótica do letramento probabilístico.

Não foram observadas dificuldades de manipulação do dispositivo construído para a simulação computacional, embora os alunos participantes não conhecessem anteriormente o software Cabri-Géomètre II. Verificamos que, de fato, este funcionou como um facilitador na resolução das atividades.

Caberlim (2015) destacou o não conhecimento por parte dos alunos a respeito do enfoque frequentista da probabilidade, mas a proposta da articulação com o enfoque clássico no contexto geométrico auxiliou a construção dos conhecimentos visados quando analisados segundo os termos do letramento probabilístico proposto por Gal (2005).

Observamos a existência de poucas pesquisas tratando da articulação entre os enfoques clássico e frequentista e também a sua abordagem em materiais didáticos destinados ao Ensino Básico. Acreditamos que essa limitação contribui para dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade.

Apontamos ainda a importância de uma abordagem em contextos diferentes, como o geométrico. Acreditamos que o processo estabelecido pela ordem das situações didáticas propostas auxiliaram na reflexão e no desenvolvimento de um vocabulário com apreensão de conhecimentos nos termos do letramento probabilístico.

Referências

Brasil (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática.* Brasília: MEC. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Consultado em 15/08/2014.

Brasil (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática.* Brasília: MEC. Recuperado de ftp://ftp.fnde.gov.br/web/pcn/05_08_matematica.pdf Consultado em 10/09/2015.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Caberlim, C.C.L. (2015). *Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos.* Dissertação de Mestrado (mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Caberlim, C.C.L. & Coutinho, C.Q.S. (2015). *Simulação computacional para a aprendizagem de probabilidade*. Publication in IASE (2015) Satellite Conference. Rio de Janeiro, Brazil.

Coutinho, C. Q. S. (2001). Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-Géomètre II. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Gal, I. (2005). Towards «Probability Literacy» for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: Graham A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.* New York: Springer Science + Business Media.

El Aprendizaje de los Valores Máximos y Mínimos Locales de Funciones de Dos Variables a partir de la noción de Registros de Representación Semióticas[1]

Learning local maxima and minima of two-variable functions from the notion of Registers of Semiotic Representation

Katia Vigo Ingar[2]
Maria José Ferreira Da Silva[3]

Resumen

En este artículo presentamos y discutimos algunos elementos relacionados a la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Su pertinencia en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial de dos variables es tal, puesto que esta teoría nos permite describir y analizar diversos fenómenos relacionados a las representaciones de los objetos matemáticos del cálculo. El objetivo del artículo es analizar el tránsito por los diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de los valores máximos y mínimos locales. Para esto, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica. Por consiguiente, afirmamos que la articulación entre el registro en lengua natural, el registro gráfico CAS y el algebraico fueron esenciales para la comprensión de los máximos y mínimos locales de funciones de dos variables.

Palabras-clave: *Registros de Representación Semiótica; Cálculo; Ingeniería Didáctica.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4
[2] Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) – kvigo@pucp.pe
[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – zeze@pucsp.br

Abstract

The following article presents and argues some elements concerning the Theory of Registers of Semiotic Representation. Its relevance in teaching and learning differential calculus of two variables is so important that this theory enables us to describe and analyze different phenomena related to representations of mathematical objects of calculus. This article aims to analyze the transit through different registers of semiotic representation while learning local maxima and minima. For that purpose, we use Didactic Engineering as our methodology. Therefore, we affirm that the articulation between natural language, CAS graphic register and algebraic register is essential to understand the local maxima and minima of two-variable functions.

Keywords: *Registers of Semiotic Representation, Calculus, Didactic Engineering.*

Introducción

La actividad matemática presenta una gran riqueza de contenidos representables gráfica y geométricamente, cuya representación resulta favorable para comprenderla. Según Duval (2004), la actividad matemática necesita modos de funcionamiento cognitivos que demandan la movilización de sistemas específicos de representación, puesto que su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es una condición necesaria para tener una comprensión en matemática.

Debido a que, para el autor, la representación semiótica es el núcleo de esa comprensión, vale la pena cuestionarnos sobre el papel de la representación en el pensamiento matemático y en el aprendizaje de la matemática, particularmente, en relación con las funciones de dos variables, porque uno de los problemas encontrados en la enseñanza de esas funciones, es la dificultad de representarlas gráficamente en el sistema cartesiano R^3. En este sentido tanto Imafuku (2008) como Trigueros y Martínez (2010) observaron la dificultad de los estudiantes en la comprensión de funciones de dos variables en relación con la interpretación de su significado y su representación gráfica, lo que puede estar relacionado, según Trigueros y Martínez (2010) con la construcción propia de los estudiantes del sistema cartesiano R^3.

Así, el objetivo del artículo es analizar el tránsito por los diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de los valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables. En relación con el *software*, el Sistema Algebraico Computacional (*CAS*) *Mathematica* será utilizado por ser un CAS que permite la manipulación de representaciones gráficas en R^3, y preserva propiedades y permite el tratamiento de la representación del objeto matemático. Para el análisis, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica, la cual nos permite conocer los registros de representación semiótica, movilizados en la situación didáctica por los estudiantes de ingeniería de alimentos.

Registros de Representación Semiótica

Duval (1995) afirma que lo peculiar del aprendizaje de las matemáticas considera que las actividades cognitivas esenciales, como la conceptualización, el raciocinio, la resolución de problemas y la comprensión de textos, requieren la utilización de sistemas de expresión y de representación, además de la lengua natural o de las imágenes. Para el autor, el uso frecuente de símbolos propios de la matemática constituye una manera particular de comunicar y generalizar determinadas concepciones relacionadas a sus diversas áreas, tales como: aritmética, geometría, álgebra, cálculo, estadística, etcétera.

Para el autor es fundamental no confundir en ningún momento los objetos matemáticos con sus representaciones, pues un mismo objeto matemático puede tener diferentes representaciones, porque lo que importa es el objeto representado y no sus diversas representaciones semióticas posibles.

Además, el autor considera que las representaciones pueden ser mentales, computacionales y semióticas. Las mentales consisten en un conjunto de imágenes y de las concepciones que una persona puede tener sobre un objeto o sobre una situación. Las computacionales son aquellas cuyo significante (el elemento perceptible o material del signo) no requieren visión del objeto, y con ello permiten transformaciones algorítmicas de una secuencia de significantes a otra. En otras palabras, es un conjunto de instrucciones necesarias para ejecutar una tarea, a fin de producir una adecuada respuesta a la situación. «Se trata de una codificación de la información» (Duval, 1995, p. 16).

Las representaciones semióticas, por otra parte, son determinadas por un sistema particular de signos, lenguaje, escritura algebraica o de gráficos, y pueden ser transformadas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, lo que posibilita que el sujeto le atribuya significados diferentes. Duval (2004) resalta la importancia de la noción de sistema semiótico en el estudio de las representaciones semióticas,

> Un sistema semiótico considera reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí, de modo que la asociación formada tenga también sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan la capacidad inventiva al sistema semiótico permitiendo efectuar, en su interior, transformaciones de expresión o de representaciones. Esas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio [...] (p. 43).

Para el autor, una representación semiótica no puede ser entendida de forma independiente del sistema que la produce. Las especificidades del sistema semiótico que permiten la producción de una representación son las que determinan la relación entre el contenido de la representación y el objeto representado.

Las representaciones semióticas no pueden ser completadas por las representaciones metales, porque ellas representan un papel primordial en la realización de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimientos. Más aún, «el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas, de la misma manera que las imágenes mentales son la interiorización de las percepciones» (Duval, 2009, p. 17).

Según el autor, para que un sistema semiótico sea un registro de representación semiótica debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión.

La formación de una representación dentro de un registro semiótico particular, sea para expresar una representación mental, sea para evocar un objeto real, implica siempre una selección en un conjunto de caracteres y de especificaciones, lo cual constituye lo que queremos representar e involucra la selección de relaciones y de datos en el contenido por representar. Es la actividad que permite representar de alguna forma un determinado conjunto de conocimientos. Salvo en casos particulares, lo signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros: el enunciado de una frase en cierta lengua natural, el diseño de una figura geométrica, la expresión de una fórmula, entre otros.

Para Duval (1993), esta actividad implica una selección de relaciones y de datos en el contenido por ser representado, que es hecha en función de unidades y de reglas de conformidad que son propias del sistema empleado en que la representación es producto. Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación y, por ello, los tipos de unidades que forman parte de todas las representaciones posibles en un registro.

El tratamiento de una representación semiótica es la transformación de una representación en otra representación en relación con una cuestión, un problema o una necesidad. Para el autor, «un tratamiento es una transformación de la representación interna en un registro de representación o en un sistema» (Duval, 1995, p. 39). Por ejemplo, el cálculo es un tratamiento interno en el registro de una escritura simbólica de dígitos y de letras, y la inferencia es una forma de tratamiento en lengua natural. Duval (1995) afirma que existen reglas de tratamiento propio a cada registro y que su naturaleza y su número varían considerablemente de un registro para otro.

La conversión de una representación semiótica es la transformación de un objeto dado en un registro, en una representación del mismo objeto en otro registro. La conversión, según Duval (1995), es una transformación externa en relación con el registro de partida.

En vista de que los registros de representación semiótica discutidos por Duval son indispensables para comunicar la matemática; para la enseñanza y aprendizaje de la matemática resulta importante la articulación entre los registros de representación semiótica.

Registros de representación remiótica en el cálculo diferencial de dos variables

Explicaremos las tres actividades cognitivas fundamentales relacionadas con la semiosis que se presentan en el cálculo de dos variables.

Una formación de una representación semiótica, relacionada con la derivada parcial de funciones respecto a x en un punto es dada conforme la representación $f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$. Esta formación es hecha en función de las reglas de conformidad propias del sistema algebraico del cálculo diferencial de dos variables reales donde el estudiante evoca su conocimiento previo de límite de una función de dos variables y su relación con la noción con la de derivada parcial.

Estamos de acuerdo con Duval (2011) cuando afirma que la contribución del computador con su *software* es otro modo de producción de representaciones semióticas. Para producir estas representaciones, el sujeto precisará comprender los comandos básicos del *software* en cuestión, además de conocer las nociones matemáticas incluidas para una representación adecuada, lo que es motivo suficiente para diferenciar el uso de *software* del uso de lápiz y papel. Como el autor menciona, «los computadores constituyen un modo fenomenológico de producción radicalmente nuevo» (Duval, 2011, p. 137).

Para explicar la formación de una representación gráfica de una función de dos variables, con el uso del *software Mathematica*, Ingar (2014) afirma que este, por medio de su propio menú de comandos, manda instrucciones a su núcleo para exhibir en la pantalla del computador, específicamente en el cuaderno del *Mathematica*, la representación gráfica de una función de dos variables reales. Por ejemplo, para formar una representación gráfica de una función representada algebraicamente por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, se escribe el comando con sus opciones respectivas: *Plot3D*[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, −3,3}, {y, −3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}], luego se presiona la tecla *shift* y *enter*, con lo cual se genera la gráfica mostrada en la figura 1.

Plot3D[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, −3,3}, {y, −3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}]

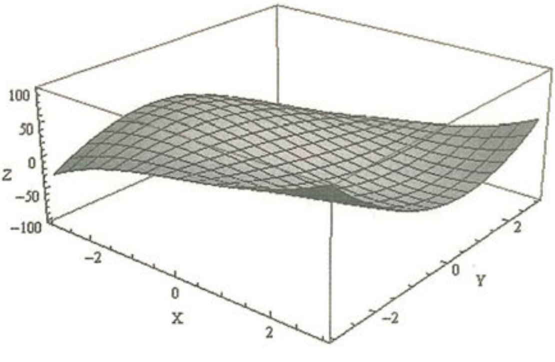


Figura 1. Formación de una representación gráfica en el *Mathematica.*

También, Ingar (2014) afirma que, con ayuda del mismo comando del *Mathematica* pero con otras opciones, se formará otra representación gráfica de la función representada algebraicamente por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, conforme se muestra en la figura 2. Para eso digitamos el comando *Plot3D*[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, −3,3}, {y, −3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}, *AxesOrigin* → {0,0,0}, *Boxed* → *False*], luego se presionan las teclas *shift* y *enter*.

$Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3,3\}, \{y, -3,3\},$
$AxesLabel \to \{"X", "Y", "Z"\}, AxesOrigin \to \{0,0,0\}, Boxed \to False]$

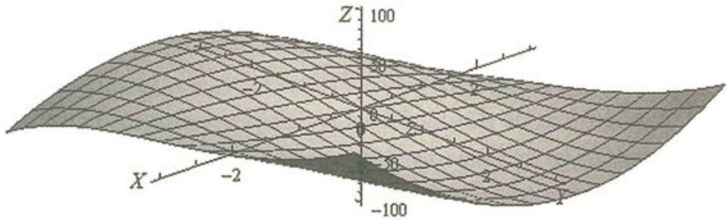


Figura 2. Otra formación de una representación gráfica en el *Mathematica.*

En relación con el registro algebraico del cálculo diferencial de funciones de dos variables, dicho registro ofrece, a modo de ejemplo, el siguiente tratamiento para encontrar los puntos críticos de la función representada por $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1 : f_x(x,y) = -3x^2 + 4y = 0$ y $f_y(x,y) = 4x - 4y = 0$, luego de la segunda ecuación obtenemos $x = y$ que sustituyendo en la primera, da dos soluciones $y = x = 0$ e $y = x = \frac{4}{3}$. Es decir, este tratamiento utiliza un sistema de escritura de las derivadas parciales de primer orden y las reglas operacionales intrínsecas a la noción de derivadas parciales, donde esas operaciones se constituyen mediante operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas.

Según Duval (2011), cuando afirma que el computador constituye un modo fenomenológico de producción de representaciones semióticas, muestra que está fundamentada en la aceleración de los tratamientos.

> Ellas exhiben el monitor tan rápido como la producción mental, pero con la potencia ilimitada de tratamiento en comparación con las posibilidades de modalidad gráfico-visual. Obtenemos, inmediatamente, mucho más que todo lo que podríamos obtener a mano libre después, tal vez, varios días de escritura y cálculos o construcción de figuras. (p. 137).

Más aún, el autor sustenta que «la novedad fenomenológica se debe al hecho de que las representaciones semióticas no discursivas se tornan manipulables como objetos reales» (Duval, 2011, p. 137). Para el autor, el aspecto dinámico de moverlos, girarlos y extenderlos desde un punto, permite la función de simulación.

Para explicar el tratamiento de una representación gráfica de una función de dos variables con utilización del *software Mathematica*, Ingar (2014) afirma que es hecho por medio del menú de comandos y/o moviendo manualmente el *mouse*. Por ejemplo, para transformar la representación gráfica, mostrada en la figura 1, en otra representación, la autora afirma que se escribe el comando *ContourPlot3D*[z==28, {x,−3,−1}, {y,−2,0}, {z,0,29}, *AxesLabel*→ {«*X*», «*Y*», «*Z*»}], luego se digita el comando *Show* para mostrar los dos gráficos juntos y se teclea *shift* y *enter*, conforme se muestra en la figura 3.

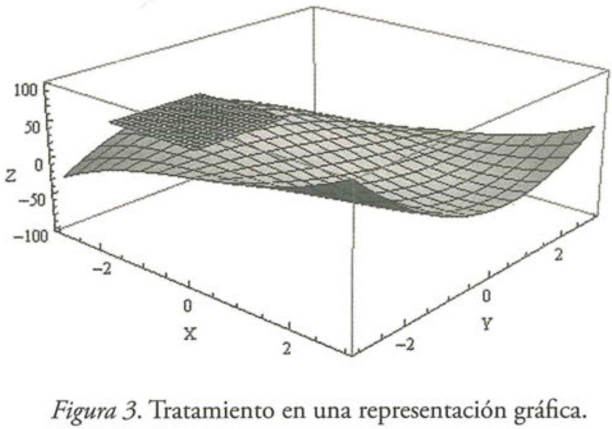


Figura 3. Tratamiento en una representación gráfica.

Así, observamos que el tratamiento es el mismo dentro de las dos diferentes representaciones gráficas generadas por el *Mathematica*, de una misma función de dos variables.

Duval (1995) afirma que por la forma de tratamiento, los registros son caracterizados como: multifuncionales (tratamientos no algoritmizables) y monofuncionales (tratamientos son algoritmizables), y sus formas, en discursiva (lengua natural, sistema de escritura) y no discursiva (figuras geométricas, gráficos cartesianos).

La conversión en el sistema de representación del cálculo diferencial de dos variables, por ejemplo, del objeto matemático punto mínimo local, en tres diferentes registros: lengua natural, del sistema de escritura y gráfico cartesiano, se muestra en la figura 4.

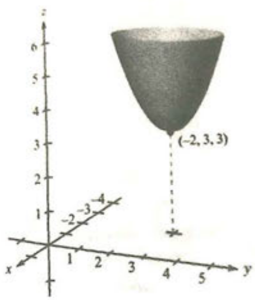
Registro en lengua natural	**Registro en el sistema de escritura**	**Registro gráfico cartesiano**
La función tiene un valor mínimo local en $(-2, 3)$.	$\forall (x, y) \in B((-2,3), \delta)$, $f(x,y) \geq f(-2,3)$	

Figura 4. Representaciones de un mismo objeto en tres registros diferentes.

Además, expondremos la conversión del registro algebraico de una función de dos variables para el registro gráfico, utilizando el *Mathematica*. Para Ingar (2014), dicha conversión comienza, conforme la figura 5, considerando una expresión algebraica de una función de dos variables, por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, posteriormente, por medio de una lista de términos propios del sistema semiótico del *Mathematica* digitamos el respectivo comando, es decir, $Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $\{x, -3,3\}$, $\{y, -3,3\}$, $AxesLabel \rightarrow$ {"X", "Y", "Z"}], luego tecleamos *shift* y *enter* para mostrar en la pantalla del computador la representación gráfica de esa función de dos variables.

$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	$Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, AxesLabel \to \{"X", "Y", "Z"\}]$

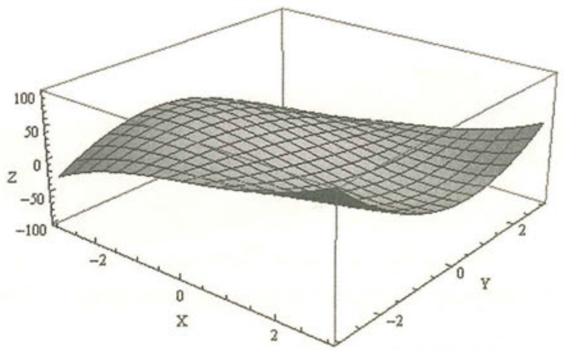


Figura 5. Conversión del registro algebraico para el registro gráfico *Mathematica.*

Según Ingar (2014), en esta etapa en que representamos una función de dos variables en dos representaciones diferentes: la algébrica y la representación propia del *Mathematica*, movilizamos actividades cognitivas al conocer los términos matemáticos en relación con la elección de los términos del comando. Estamos de acuerdo con Duval (2011), cuando afirma que «un menú de comandos privilegia un registro de representación para obtener la representación correspondiente en otro registro» (p. 138).

Para la autora, el software *Mathematica* genera otra representación gráfica de la función de dos variables representada por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Así, la conversión considera la expresión algebraica de la misma función de dos variables mencionada anteriormente. Posteriormente, por medio de una lista de términos propios del sistema semiótico del *software Mathematica*, digitamos el mismo comando con dos opciones más, es decir, $Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3,3\}, \{y, -3,3\}, AxesLabel \to \{"X", "Y", "Z"\}$, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False], luego tecleamos la tecla *shift* y *enter* para mostrar en la pantalla del computador otra representación gráfica de esa función de dos variables, conforme se muestra en la figura 6.

$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$	$Plot3D[x^3+3xy^2-15x-12y,\{x,-3,3\},$ $\{y,-3,3\},AxesLabel\to\{"X","Y","Z"\},$ $AxesOrigin\to\{0,0,0\},Boxed\to False]$

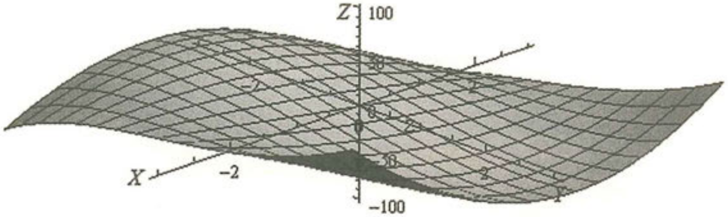


Figura 6. Conversión del registro gráfico para otro gráfico *Mathematica.*

Ingar (2014) denomina a estos registros gráficos de Registro Gráfico CAS_MATH y Registro Gráfico CAS respectivamente.

De acuerdo con Duval (1999), el estudiante comienza a entender los objetos y los conceptos matemáticos en el momento en que es capaz de movilizar y de coordinar espontáneamente dos registros de representación para un mismo objeto. Es por esto que nos preguntamos, en el caso del cálculo diferencial de funciones de dos variables, específicamente el objeto matemático valores máximos y mínimos locales, ¿cómo los estudiantes articulan los diferentes registros de representación semiótica para ese objeto matemático?

Para responder nuestra pregunta, y sobre la base de la teoría de Registros de Representación Semiótica, la cual sirvió como eje para diseñar y aplicar situaciones didácticas con las que interactuaron los estudiantes de ingeniería de alimentos de la Universidad Nacional del Callao, utilizamos como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988), porque se caracteriza como un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en salón de clase.

Los estudiantes trabajaron tanto con el *CAS Mathematica,* como con las nociones de funciones de dos variables reales. Utilizaron los recursos del *software*, en especial los comandos que permiten representar gráficamente puntos, planos y superficies en $\mathbb{R}^3$. El tiempo de duración de la situación didáctica fue de tres horas. En este artículo presentamos la segunda situación didáctica correspondiente al segundo encuentro con los estudiantes del grupo 03, la cual tuvo como objetivo maximizar la función lucro en relación con los precios.

Los estudiantes trabajaron en parejas y cada cual fue llamada de grupo, utilizaron una *laptop* y una ficha de trabajo durante el encuentro. El esclarecimiento del texto, solo cuando fuera solicitado, y la mediación del profesor se hicieron por medio de preguntas que estimularon a movilizar los conocimientos previos de los estudiantes.

Situación 2

La permanente necesidad de atender la demanda de productos variados y saludables a todo tipo de consumidores llevó a una empresa a elaborar galletas naturales. Para esto lanzó al mercado dos tipos de galletas: la galleta integral y la galleta de avena, cuya presentación es en bolsas de 24 unidades. Los costos totales de producción son de 2 y 3 soles por bolsa, respectivamente. La demanda (en miles de bolsas) de galletas integrales que pueden venderse cada semana es cuatro veces la diferencia del precio del segundo producto con relación al primero y la demanda (en miles de bolsas) de galletas de avena es cuatro veces la diferencia del precio del primer producto con relación al doble del segundo; pero la preferencia de los consumidores por esta galleta, incrementa su demanda siempre en 36 miles de bolsas. ¿Cuál será la mayor utilidad que obtiene la empresa y cuáles serían los precios de venta de cada tipo de galleta? Justifique su respuesta.

Las variables didácticas consideradas fueron:

- La función costo total de producción de bolsas de galletas;
- La función demanda de bolsas de galletas;
- Los precios de venta de bolsas de galletas;
- La función lucro, cuya representación algebraica es una función de dos variables del tipo $f(x, y) = ax^2 + bxy + + cy^2 + dx + ey + f$.

ANÁLISIS *A PRIORI*

Esta situación tiene por finalidad llevar al estudiante a comprender la noción de valor máximo local de una función de dos variables representada por $f(x, y) = ax^2 + bxy + + cy^2 + dx + ey + f$, lo cual permite que los estudiantes movilicen sus conocimientos en relación con el plano tangente a una superficie y derivadas parciales en un punto que ya fuer construido por los estudiantes.

Esperamos que todos los grupos, después de leer el enunciado del problema, realicen la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico, pudiendo representar el objeto costo total de la producción con la letra **C**; el objeto función demanda, por ejemplo, por $q = f(p_1, p_2)$ debido a que según los datos de la situación, este relaciona la cantidad de bolsas de galletas (en miles de bolsas) con los precios unitarios de cada bolsa de galleta, y el objeto ingreso total por la venta de bolsas lo representen por R_T. Para representar algebraicamente cada uno de los objetos, los grupos podrían representarlos, tanto para las galletas integrales como para las de avena, es decir: para la galletas integrales, la función de demanda de galletas sería representada por $q_1 = 4(p_2 - p_1)$, y la función ingreso total sería representada como $R_1(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1)p_1$.

De manera semejante para las galletas de avena, la función de demanda de galletas sería representada por $q_2 = 36 + 4(p_1 - 2p_2)$, y la función ingreso podría ser representada como $R_2(p_1, p_2) = [36 + 4(p_1 - 2p_2]\, p_2$. Esperamos que los grupos, por medio de tratamiento en el registro algebraico (operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas), expresen de manera algebraica la función lucro representada por: $l(p_1, p_2) = 8p_1p_2 + 52p_2 - 4p_1^2 - 4p_1^2 - 4p_1 - 8p_2^2 - 108$.

Los estudiantes podrían expresarla de forma canónica, pero observarían que no es posible y que esa representación algebraica no es conocida. Luego, suponemos que los grupos realicen la conversión del registro algebraico para el registro gráfico utilizando como medio el *Mathematica*, pudiendo escribir, por ejemplo, el comando $Plot3D[8p_1p_2 - 4p_1^2 - 8p_2^2 + 52p_2 - 4p_1 - 108, \{p_1, 0{,}10\}, \{p_2, 0{,}10\}, PlotRange \rightarrow \{0{,}50\}, AxesLabel \rightarrow \{"p_1", "p_2", "l"\}$.

Suponemos que los grupos realicen tratamientos en el registro gráfico, identificando la relación de los puntos de la superficie con respecto al eje z y a la curvatura de la superficie, lo que permitirá tener una percepción del posible valor máximo de la función lucro. Es más, esperamos que los grupos, por medio de tratamientos dentro del registro gráfico *CAS_MATH*, tracen planos perpendiculares al eje l, por ejemplo, los planos $l = 30$ y $l = 35$, conforme se muestra en la figura 7.

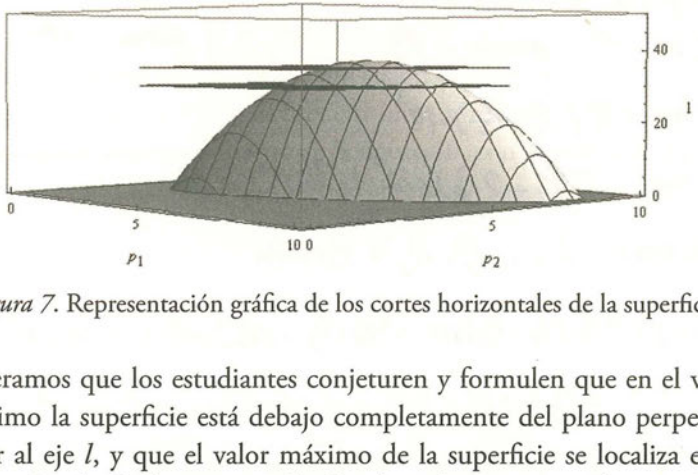


Figura 7. Representación gráfica de los cortes horizontales de la superficie.

Esperamos que los estudiantes conjeturen y formulen que en el valor máximo la superficie está debajo completamente del plano perpendicular al eje l, y que el valor máximo de la superficie se localiza en el punto donde el plano perpendicular al eje l es tangente a la superficie. Luego, los grupos podrían, en el registro gráfico, encontrar las derivadas parciales de la función lucro e igualarlas a cero, por medio de tratamientos algebraicos. En vista de que el tratamiento en el registro algebraico se da por las operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas, los grupos resolverían un sistema de ecuaciones como resultado de igualar a cero las derivadas parciales y encontrar el punto representado por (5.5,6), sustituyendo en la representación algebraica de la función lucro, tenemos respuesta a la situación.

Análisis *a posteriori*

En el inicio de la situación didáctica, el grupo 03 leyó el enunciado del problema y sus miembros comenzaron a intercambiar ideas. Luego realizaron la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico de cada una de las variables y funciones involucradas en el problema. Dentro del registro algebraico realizaron tratamientos para representar algebraicamente la función lucro tal como lo habíamos supuesto en el análisis *a priori*, conforme de muestra en la figura 8.

Cp Galleta integral $= 2$, Precio de la integral $= P_I$

Cp " avena $= 3$ " " G. avena : P_A.

$$Q_I = 4(P_A - P_I)\times 10^3$$

$$Q_A = 4(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 36\times 10^3.$$

Entonces $I_T = P_I \times Q_I + P_A \times Q_A$.

$$I_T = 4P_I(P_A - P_I)\times 10^3 + 4P_A(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 36P_A\times 10^3$$

$$I_T = 8P_IP_A\times 10^3 - 4P_I^2\times 10^3 - 8P_A^2\times 10^3 + 36P_A\times 10^3$$

$$C_T = 8(P_A - P_I)\times 10^3 + 12(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 108\times 10^3$$

$$C_T = 4P_I\times 10^3 - 16P_A\times 10^3 + 108\times 10^3$$

Figura 8. Tratamientos en el registro algebraico.

Dentro del registro algebraico realizaron tratamientos para representar algebraicamente la función lucro tal como lo habíamos supuesto en el análisis *a priori*, conforme de muestra en la figura 9.

$U_T = I_T - C_T$

$U_T = 8P_I P_A \times 10^3 - 4P_I^2 \times 10^3 - 8P_A^2 \times 10^3 + 36P_A \times 10^3 - (4P_I \times 10^3 - 16P_A \times 10^3 + 108 \times 10^3)$

$U_T = 8P_I P_A \times 10^3 - 4P_I^2 \times 10^3 - 8P_A^2 \times 10^3 + 52P_A \times 10^3 - 4P_I \times 10^3 - 108 \times 10^3$

Utilidad en miles de soles:

$P_I = x$, $P_A = y$

$U_{(x,y)} = 8xy - 4x^2 - 8y^2 + 52y - 4x - 108.$

Figura 9. Tratamiento en el registro gráfico para hallar la función lucro.

Además, el grupo 03 realizó la conversión del registro algebraico para el registro gráfico *CAS* de la función lucro y realizó en dicho registro tratamientos, como se muestra en la figura 10, con la finalidad de tener una percepción del máximo valor de la función lucro.

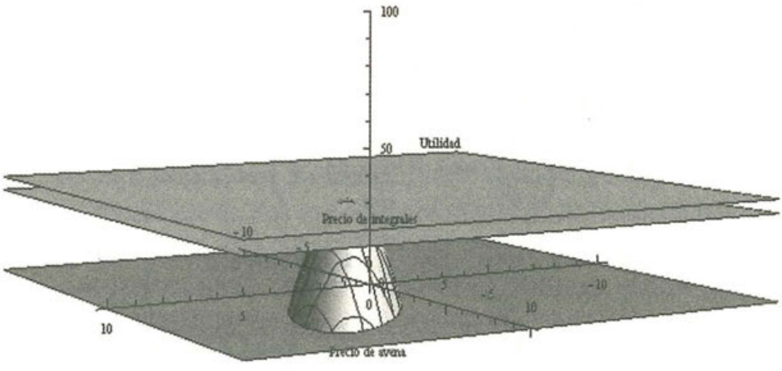


Figura 10. Registro gráfico *CAS.*

En seguida el grupo 03 regresa al registro en lengua natural para formular lo que por medio de tratamientos en el registro gráfico percibió en relación con el máximo valor de la función lucro, como se muestra en la figura 11.

Utilizando el software matemático graficamos la función $z=U(x,y)$, trazamos planos paralelos al plano XY hasta encontrar un plano tangente aproximado

Figura 11. Registro en lengua natural.

Asimismo, el grupo 03 consideró necesario regresar al registro algebraico y realizó el tratamiento en dicho registro para hallar el punto crítico donde existe el máximo valor, como se muestra en la figura 12.

Entonces formando la ecuación del plano tangente obtendremos: $P=(x,y,z)$ y $P_0=(x_0,y_0,z_0) \in P_T$

$$P_T: \vec{n}_{PT}.[P-P_0]=0,$$

Pero la normal del plano tangente es igual a.

$$\vec{n}_{PT}=\left(\frac{dU_{(x_0,y_0)}}{dx}; \frac{dU_{(x_0,y_0)}}{dy}, 1\right)=(0,0,1)$$

entonces: $\frac{dU}{dx}=0 \Rightarrow 8y-8x-4=0$

$\frac{dU}{dy}=0 \Rightarrow 9x-16y+52=0$

$$y=6-x=\frac{11}{2}$$

Figura 12. Tratamientos en el registro algebraico para hallar el punto crítico.

Esto nos permite afirmar que el grupo 03 relacionó el plano tangente horizontal representado en la figura 8 con la noción de derivadas parciales mostradas en la figura 13.

8. Utilidad máx en miles es S/37
, el precio de los Galletas de integrales tiene que ser
S/.55 y el precio de las galletas de avena son a S/. 6.

Figura 13. Registro en lengua natural.

Luego, el grupo regresa al registro de lengua natural para formular su respuesta, conforme se muestra en la figura 13. De esta manera podemos decir que el objetivo de la situación didáctica fue alcanzado y que el grupo transitó por los tres registros de representación semiótica: lengua natural, algebraico y *CAS*.

Consideraciones finales

Los tratamientos en el registro gráfico y la articulación entre este registro y el registro algebraico fueron esenciales para la comprensión de los máximos y mínimos locales de funciones de dos variables. Así, el estudio del cálculo en dos variables por medio de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval mostró ser un medio para la comprensión de dicha noción matemática. Además, el uso del *CAS Mathematica* facilitó la representación gráfica de la función de dos variables y los tratamientos en ese registro. En los registros algebraicos, los tratamientos se dieron por las operaciones posibles con las derivadas parciales y en la solución de sistemas de ecuaciones de dos variables. Además, la situación didáctica presentó una cuestión abierta cuya respuesta se dio por caminos propios de los estudiantes.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 281-308.

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensé. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Semiósis et pensé humaine: Registres sémiotiques et appretissages intellectuels.* Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 311-335. Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo.* Traducción de Myriam Vega Restrepo. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval,R.(2009). *Semiósis e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* 1a ed. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* 1a edición. São Paulo: PROEM

Imafuku, R. (2008). Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis (Tesis de Maestria en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ingar, K. (2014). A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Trigueiros, M., & Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studyies Mathematical* 73, pp. 3-19.

La elipse: proceso de instrumentalización mediado por el software GeoGebra[1]

Ellipse: instrumentation process mediated by the GeoGebra software

José Carlos León Ríos[2]
Jesús Victoria Flores Salazar[3]

Resumen

Este artículo tiene por objetivo analizar los procesos de instrumentalización de la elipse al utilizar el GeoGebra como mediador. La experiencia está dirigida a estudiantes de un primer curso de matemáticas de una universidad particular de la ciudad de Lima. El proceso de instrumentalización se basó en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse durante una secuencia de actividades que permitieron el surgimiento de la elipse como instrumento, en el sentido de Rabardel. Es así que la teoría instrumental nos permitió analizar las acciones de los estudiantes, mediante la identificación de esquemas de los posibles esquemas de utilización que los estudiantes construyeron o movilizaron cuando interactuaron con la elipse, como la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, vinculando la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente.

Palabras-clave: *Instrumentalización; Elipse; GeoGebra.*

---

1 Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272. Fondo concursable desarrollo de líneas de investigación de la Escuela de Posgrado 2013.

2 Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a19801146@pucp.edu.pe

3 Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. jvflores@pucp.pe

Abstract

This article aims to analyze the instrumentation processes of the ellipse by using the GeoGebra software as a mediator. The experience is aimed at students in their first course of Mathematics at a private university in the city of Lima. The instrumentation process was based on the enrichment of the properties of an ellipse during a sequence of activities that allowed the ellipse to emerge as a tool, in Rabardel's sense. Thus, the instrumental theory allowed us to analyze students' actions by identifying possible utilization schemes that students built or mobilized while interacting with the ellipse, like the geometric condition of the ellipse, the relationship between its parameters, eccentricity, the location of the vertices, focuses, linking the graphic representation to the corresponding algebraic expression.

Keywords: *Instrumentation; Ellipse; GeoGebra.*

Consideraciones iniciales

Algunas investigaciones en educación matemática como la de Fernández (2011) reconocen distintas categorías de problematización, como la tendencia a separar en el currículo las cónicas del contenido geométrico, la omisión de las construcciones geométricas y la escasez de estudios sobre lugares geométricos.

En ese estudio, el investigador sugirió la necesidad de fomentar las construcciones geométricas de dichas curvas e integrarlas al enfoque analítico actual. De igual forma, aparece el trabajo de Santa (2011), que busca una complementariedad de la enseñanza tradicional de la geometría analítica, ya que analiza la comprensión de la elipse como lugar geométrico a través de un objeto concreto: el doblado del papel. Además, con el objetivo de obtener la condición geométrica de la elipse, la investigadora realizó construcciones previas de los lugares geométricos de las mediatrices y circunferencias.

Basados en nuestra experiencia docente, hemos detectado que dicho problema también es percibido en los estudiantes de la escuela de Arquitectura donde realizamos el estudio. Es así que hemos observado una desatención en las construcciones y lugares geométricos en los programas curriculares, lo cual ocasiona la restricción del uso de las construcciones geométricas que los estudiantes traen consigo, como el trazo de la mediatriz, la determinación del punto medio de un segmento, que en otro caso, permitirían el reforzamiento y la reutilización de estos constructos geométricos. Pensamos también que la permanente vinculación entre las secciones cónicas y el sistema de coordenadas cartesiano contribuye a que el alumno considere a la elipse como una curva dependiente de dicho sistema, y que en otros contextos de referencia, o incluso prescindiendo de estos, el alumno no considere las propiedades de dicha curva como propiedades invariantes.

Finalmente, debido a la permanente predominancia algebraica en los primeros contactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse, reconocemos la necesidad de promover el fomento de las construcciones geométricas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Resaltamos el uso del GeoGebra, como ambiente de la geometría dinámica (AGD), el cual tuvo un rol protagónico en nuestra investigación por tratarse de una fuente de apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. En relación con el uso paulatino de dicho AGD, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006) señalan que en las últimas décadas se observa involucrada a toda la comunidad educativa en la que estamos inmersos los docentes como protagonistas del cambio. Precisamente, los autores indican que existe una carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos y que dichos problemas con los que la enseñanza se ha enfrentado en las pasadas décadas están ligados a la dualidad de los procesos axiomáticos deductivos y el de las representaciones gráficas– geométricas, empíricas. En ese sentido, dichos investigadores mencionan que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría han llevado a sus pares a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por los ambientes de geometría dinámica.

Aspectos de la Ingeniería Didáctica

La metodología de la investigación fue la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual nos permitió mostrar las conclusiones de nuestras actividades y confrontar nuestros supuestos elaborados en la fase de concepción y análisis *a priori* con los datos recolectados en la fase de experimentación, con lo cual pudimos elaborar un análisis *a posteriori* y una validación interna. En esta investigación realizamos un análisis preliminar en el que describimos el desarrollo histórico de la elipse, los conocimientos previos requeridos por el alumno y los textos que la institución consigna para el desarrollo del curso.

Ciertamente, en la aproximación histórica consideramos a Boyer (1987) como referencial histórico e incluimos las primeras manifestaciones griegas hasta sus aplicaciones en el campo de la astronomía en el siglo XVII aproximadamente. En la parte cognitiva, elaboramos una prueba de diagnóstico en la que consideramos como conocimiento preexistente el lugar geométrico de la circunferencia, la parábola, la mediatriz de un segmento y las propiedades de un triángulo isósceles. Finalmente, en la secuencia didáctica, elaboramos una revisión a los textos referidos al capítulo de elipse, los cuales mostraron cómo se continúa privilegiando el enfoque tradicional de la geometría analítica.

Teoría instrumental

Con el fin de analizar el enriquecimiento de la condición geométrica de la elipse por parte de los estudiantes, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En ese sentido, describimos algunos términos que consideramos nos permitirán analizar cómo los estudiantes interactúan con la elipse.

Rabardel (1995) afirma que en toda situación de actividad o de utilización de artefactos existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto; siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto.

Para el autor, *sujeto* puede entenderse como un usuario, alumno, operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción con un instrumento.

Instrumento puede ser una herramienta, máquina, incluso una propiedad, que sirve como mediador entre el sujeto y el objeto a donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento.

Artefacto, en cambio, no especifica un tipo de relación particular con el objeto al cual se dirige. El autor señala que el artefacto es elaborado para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. Es decir, que el artefacto, material o no, puede transformar a los objetos y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales.

Entonces, el artefacto solamente pasará a ser instrumento, cuando el sujeto le asigna los esquemas de utilización correspondientes, es decir esquemas relacionados con la utilización de un artefacto. Por lo tanto, dichos esquemas tendrán una relación dual: por un lado, se relaciona con los artefactos pues los convierten en medios; y por otra parte, con los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Entonces, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, cuya característica principal sea la de adaptarse al sujeto y al objeto. El autor señala que el término instrumento designa el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto y el objeto sobre el cual se actúa.

Así, de acuerdo con Salazar (2009), en relación con la investigación de Rabardel, dichos esquemas comprenden diferentes variantes. La primera, referida a las acciones que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, llamadas esquemas de uso (EU); y la segunda, que son las acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas esquemas de acción instrumentada (EAI).

Además, Salazar (2009) indica que un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia un esquema de acción instrumentada. En ese sentido, León (2014) muestra un ejemplo en su investigación de la elipse, que indica que si se desea hallar la longitud del lado recto en términos de sus semiejes, la condición geométrica de la elipse podría ser un esquema de uso o podría tratarse también de un esquema de acción instrumentada para un alumno que inicia el estudio de la elipse.

De igual forma, Rabardel (1995) señala que es necesario considerar un esquema adicional a los mencionados, y describe al esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI) que corresponde a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios, ya que como individuos no estamos solos, sociabilizamos constantemente e interactuamos con otros individuos, incluso con los creadores del artefacto, quienes implícitamente forman parte del surgimiento de nuestros esquemas.

En ese sentido, el investigador indica que las dos dimensiones que componen el instrumento, artefacto y esquema están relacionadas pero mantienen independencia, es decir un esquema puede aplicarse a otros esquemas de la misma clase, clases vecinas o diferentes. Por ejemplo, según León (2014) los esquemas de utilización de una elipse pueden ser llevados también a un esquema de clase vecina como el de la hipérbola. De manera correlativa, un artefacto puede ser insertado en otros esquemas de utilización como la elipse insertada en la construcción de elipsoides.

En conclusión, Rabardel (1995) puntualiza la *Génesis Instrumental* como la elaboración o construcción de un instrumento, que permite la continuidad de las acciones en los distintos artefactos, materiales o simbólicos, por parte de los sujetos. Existen dos procesos que contribuyen, según el autor, al surgimiento y a la evolución del instrumento, y los cuales se distinguen por la orientación de la actividad: las acciones que se dirigen a la componente artefactual o aquellas que se orientan hacia el sujeto mismo.

Acerca del proceso de *instrumentalización*, este está compuesto por las funciones constitutivas del artefacto (definidas por el diseñador), las funciones constituidas (elaboradas por el usuario) y las nuevas funciones inscritas en una nueva clase de artefactos a partir de estas funciones constituidas por el usuario. El usuario elabora dichas funciones porque sus acciones están volcadas hacia la componente artefactual, de tal forma que surgen nuevas características, producen e instituyen funciones y le atribuyen propiedades al artefacto.

De manera similar, el proceso de *instrumentación* se caracteriza cuando la actividad está orientada hacia el mismo sujeto. Corresponde a la emergencia y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Se inicia cuando, paralelamente al descubrimiento progresivo de las propiedades, nuevos esquemas se van constituyendo, los cuales se acomodan, se coordinan y se asimilan con otros esquemas ya constituidos. Así, dichos esquemas evolucionan y luego son movilizados en otras situaciones. En este ciclo participan los modos operatorios (previstos por los diseñadores), los esquemas de utilización (elaborados por los usuarios) y sus nuevos modos de operar, elaborados por los esquemas que movilizaron o elaboraron los usuarios.

Descripción y análisis

Presentamos las dos primeras actividades de toda la investigación que desarrollamos. En esta experiencia participaron seis estudiantes del curso de Matemática I, quienes conformaron tres equipos integrados por dos estudiantes. Hicimos un análisis *a priori* y *a posteriori* de dos de los tres equipos.

Nuestro experimento fue canalizado en tres encuentros, cada uno de noventa minutos. El primer encuentro, el cual no fue foco de nuestra investigación, fue dirigido a explorar las herramientas del GeoGebra; en el segundo encuentro, los estudiantes hicieron surgir la condición geométrica de la elipse y enriquecieron las propiedades de sus otras componentes; en el tercer encuentro, se vinculó la elipse a los ejes coordenados, se le identificó con una expresión algebraica y se elaboró una aplicación animada de la elipse para movilizarla como instrumento.

La condición geométrica de la elipse, razón de la experiencia de este artículo, indica que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante, igual a la longitud del eje mayor.* Dicha componente artefactual fue desarrollada en dos actividades y luego construida como un posible esquema de acción instrumentada (EAI), que evolucionó como instrumento para determinar la relación entre los parámetros de la elipse. Para constituir el EAI de la condición geométrica, los estudiantes movilizaron sus esquemas de uso (EU): mediatriz de un segmento, circunferencia, triángulo, entre otros, los cuales fueron consignados en el análisis cognitivo como saberes previos al tema de la elipse.

Además verificamos que los estudiantes estaban instrumentados en relación con la mediatriz de un segmento, pues movilizaron la propiedad que indica que *si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento.*

Respecto a la primera actividad, los estudiantes que ya estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, debido a que la enriquecieron con una nueva propiedad, que fue construida movilizando esquemas de uso como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. A continuación se detalla una breve descripción al respecto.

En la figura 1, se muestra una circunferencia con centro en *C*, *que contiene al punto interior fijo Q*. Se les pide determinar un *punto A sobre el radio* $\overline{CP}$, *de tal forma que dicho punto equidiste de P y Q.*

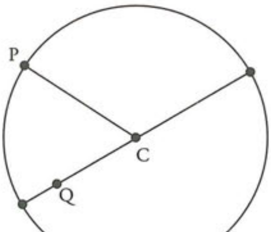


Figura 1. Actividad 1

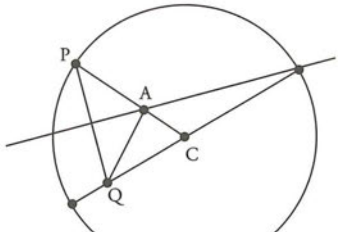


Figura 2. El punto A

Ninguno de los dos equipos tuvo dificultades en movilizar sus esquemas previos. De acuerdo con el análisis *a priori,* movilizaron la propiedad de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, como un *conjunto de puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento*, la noción de segmento, el uso de algunas herramientas del GeoGebra, como la intersección de objetos, el trazo de segmentos, y de la recta mediatriz, de acuerdo con lo previsto en el análisis *a priori* de la Ingeniería Didáctica.

En la figura 2, los estudiantes de ambos equipos determinaron el punto *A* correspondiente. Luego movilizaron sus esquemas de uso preexistentes de triángulo y clasificaron al triangulo APQ como triángulo isósceles.

En las figuras 3 y 4, los estudiantes desplazaron el punto *P* sobre la circunferencia de tal forma que el triángulo *APQ* mantuvo sus característica invariantes; es decir, los lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ permanecieron iguales, por lo que señalaron que resulta lo mismo *sumar las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, *siendo además esa suma una constante.*

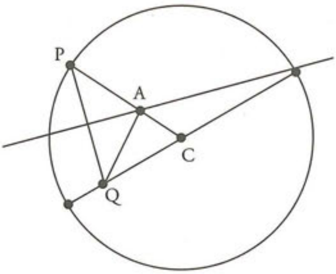


Figura 3. 1° Desplazamiento de P

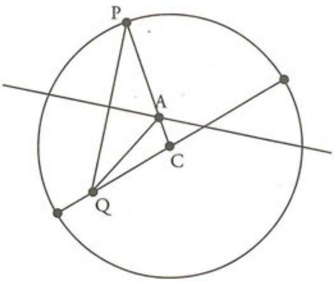


Figura 4. 2° Desplazamiento de P

De acuerdo con el análisis *a priori*, ambos equipos construyeron un posible esquema de acción instrumentada, específicamente la existencia de un punto *A* perteneciente al radio *CP* de la circunferencia con centro en *C* y un punto interior *Q*, de tal forma que resulta lo mismo sumar la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ que la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

La figura 5 representa la segunda actividad, en la que creemos hubo indicios para suponer que la circunferencia continúo instrumentalizándose porque vincularon el punto A a la trayectoria de una elipse haciendo uso de la herramienta rastro del GeoGebra.

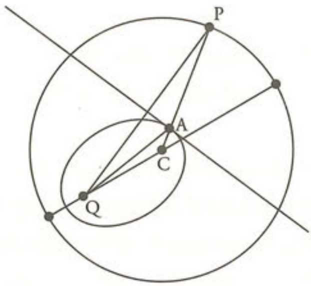


Figura 5. Trayectoria de la elipse

Además, pensamos que el artefacto elipse dejó de ser un artefacto abstracto para los estudiantes pues creemos que hay reconocimiento de que *la suma de las distancias de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ *es una constante,* con lo cual la elipse inicia el proceso de instrumentalización. Los esquemas que movilizaron fueron los de noción de circunferencia, de triángulo isósceles y mediatriz de un segmento. La herramienta «Activa Rastro» del GeoGebra permitió la interacción con la elipse, de acuerdo con el análisis *a priori.*

Subrayamos que los esquemas de acción colectiva instrumentada fueron producto de la emergencia que detectamos del trabajo colectivo de los estudiantes y que fueron ejemplificadas en muchos pasajes de nuestra secuencia de actividades cuando los integrantes de cada equipo intercambiaron esquemas de utilización y los ejemplificaron en la redacción de sus textos.

Seguidamente, en la tercera actividad, los estudiantes continuaron instrumentalizando la elipse y la enriquecieron con las propiedades referidas al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor. De este modo, dicha condición geométrica de la elipse continuó instrumentalizándose, ya que la enriquecieron con otra característica, y los estudiantes indicaron que *la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ *corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse.*

Es importante señalar que este nuevo instrumento permitió expresar la condición geométrica de la elipse omitiendo el radio de la circunferencia. Además, la condición geométrica de la elipse evolucionó de EAI a EU, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de una elipse, cuya *relación geométrica se expresa como* $a^2 = b^2 + c^2$. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

Consideraciones finales

Mediante las acciones de los estudiantes en las actividades que fueron orientadas a determinar la condición geométrica de la elipse, logramos identificar los posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron cuando trabajaron dicha secuencia de aprendizaje. Por tal motivo, creímos conveniente hacer uso del enfoque instrumental como referente para la orientación de nuestra investigación.

Puntualizamos que en la actividad 1 los estudiantes continuaron instrumentalizando la circunferencia al enriquecerla con una propiedad adicional; es decir, dada la circunferencia con centro C, que contiene al punto interior fijo Q, es posible encontrar un punto A en el radio $\overline{CP}$, de tal forma que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ sea una constante, movilizando para ello esquemas de uso preexistentes como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles.

En la actividad 2, dicha propiedad de la circunferencia evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso ya que la movilización del punto A favoreció la identificación del lugar geométrico de la elipse, con lo cual se inició el proceso de instrumentalización de dicha curva.

Asumimos que el proceso de la génesis instrumental sucedió cuando la propiedad descrita en la actividad 1 se movilizó como instrumento para favorecer la identificación del lugar geométrico de la elipse. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

La elipse dejó de ser un artefacto abstracto porque los estudiantes señalaron que la suma de sus distancias desde un punto de la elipse a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva es una constante igual al radio de la circunferencia. Debemos resaltar que la movilización de los esquemas por parte de los estudiantes de cada equipo fue coordinada y adaptada como esquemas de acción colectiva instrumentada.

Mencionamos además que el GeoGebra fue un programa integrador en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitió que los estudiantes interactuaran con la elipse. Por ejemplo, el rastro que traza un conjunto de puntos que cumplen determinada propiedad y que fue usada para marcar el lugar geométrico de los puntos que conformaron la elipse.

En último lugar, queremos señalar que aunque algunas de las funciones señaladas en la elipse fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar tal nivel de instrumentalización.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Versión española de Mariano Martínez Pérez. Madrid: Alianza Editorial.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus,* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275-304, Sense Publishers. Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-pdf.

León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Rabardel (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Traducido por M. Acosta. Santander, Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo das transformações geométricas no espaço.* (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.

Diseño de tareas que contribuyan a un aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de Ciencias Administrativas[1]

Task design contributing to a meaningful learning of the concept of derivative in Management Sciences students

Erick Pozsgai Hernani[2]
Uldarico Malaspina Jurado[3]

Resumen

Diseñamos una secuencia de tareas con el objetivo de ayudar a mejorar la comprensión del concepto de derivada de una función f, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a; f(a))$. Identificamos algunas dificultades en el aprendizaje de la derivada y deficiencias en los conocimientos previos. La metodología del presente trabajo de investigación fue cualitativa, exploratoria y descriptiva. Se observó en el grupo participante que predomina un nivel de comprensión instrumental del concepto de derivada. Se encontraron dificultades en la recuperación de los conocimientos previos necesarios para iniciar el estudio de la derivada, así como con el lenguaje formal. También se pudo notar una desconexión entre las diversas representaciones de la derivada.

Palabras-clave: *Derivada; diseño de tareas; aprendizaje significativo.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a19791226@pucp.edu.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú –DIMAT-PUCP. umalasp@pucp.edu.pe

Abstract

We designed a sequence of tasks aiming to help improve the understanding of the concept of derivative of a function f as the slope of a tangent line to the graph of the function at the point $(a; f(a))$. Some difficulties were identified in learning the derivative, as well as some deficiencies in previous knowledge. The methodology of this research work was qualitative, exploratory and descriptive. It was observed that a level of instrumental understanding of the concept of derivative prevails in the participating group. Difficulties were found in the recovery of necessary previous knowledge to start studying the derivative, as well as difficulties with formal language. Also, a disconnection was evident between the different representations of the derivative.

Keywords: *Derivative; task design; meaningful learning.*

Introducción

Uno de los seis «principios» a partir de los cuales el National Council of Teachers of Mathematics describe las características particulares de una educación matemática de calidad es el denominado The Learning Principle (NCTM, 2000) en el que, entre otras cosas, se afirma que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión conceptual y construir activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y aprendizajes previos (p. 20). Además, afirma que los profesores deben conocer qué es lo que los estudiantes ya saben, para poder diseñar experiencias y lecciones que construyan nuevos conocimientos, sobre la base de lo que ellos ya conocen (p. 18).

Para lograr un aprendizaje conceptual se deben usar tareas matemáticas (*mathematical tasks*) «valiosas» o «que valgan la pena», que permitan introducir ideas matemáticas importantes y retar a los estudiantes intelectualmente.

Dado este reconocimiento a la importancia de las tareas matemáticas (*mathematical tasks*) que son propuestas a los estudiantes, muchos investigadores tanto en los Estados Unidos como en otras partes del mundo, trabajan sobre la idea de «diseñar» las tareas matemáticas y así surge un nuevo concepto que es el de diseño de tareas (*task design*). En esa línea, nuestro trabajo se enfoca en diseñar, aplicar y analizar una secuencia de tareas que, partiendo de conceptos conocidos por los estudiantes, como son las funciones, pueda estimular una reflexión en ellos y les permita una mejor comprensión del concepto de derivada, y que además haga posible explorar algunas dificultades en el aprendizaje de dicho concepto.

Aprendizaje significativo

Dentro del diseño de tareas en general, muchos investigadores están de acuerdo en que, ya sea para introducir un nuevo concepto o para reforzar uno ya aprendido por los alumnos, es importante que el punto de partida sean los conocimientos previos de los estudiantes. Sobre este particular, Orton (2005) señala que el aprendizaje significativo es un proceso en el cual cualquier nuevo conocimiento es aprendido de manera significativa, al lograr conectar este conocimiento con algunos aspectos relevantes ya existentes en la estructura de conocimientos del individuo. Los nuevos conocimientos pueden modificar los conocimientos anteriores o establecer nuevas relaciones entre ellos.

Ausubel (2000) indica que si el aprendizaje es significativo, los conocimientos están más disponibles en la estructura cognitiva. Una de las condiciones que se requieren para este fin es la presencia en el sujeto de algunas ideas previas, denominadas «de anclaje», con las que el nuevo material pueda ser relacionado.

Evidentemente, como Ausubel lo hace notar, una de las condiciones para un aprendizaje significativo es la existencia de materiales potencialmente significativos para el aprendizaje. Pero su sola presencia no garantiza un aprendizaje significativo, pues cada componente de la «tarea», así como la tarea en su conjunto, tiene que ser lógicamente significativo (Ausubel, 2000, p.1).

Comprensión instrumental vs. comprensión relacional

Skemp (2005) habla sobre estos dos conceptos para diferenciar dos formas diferentes de aprender matemáticas. Comprensión relacional significa «saber lo que hay que hacer y por qué» (p. 89). Por otra parte, según el mismo autor, comprensión instrumental se puede explicar como un conjunto de reglas sin razones. Se pueden dar diversos ejemplos de comprensión instrumental, como por ejemplo cuando un estudiante es capaz de calcular el área de un rectángulo, pero no sabe por qué esa fórmula funciona para ese cálculo. Igual caso es el de la regla de «prestar» en la resta; los docentes no explican la razón o el origen de dicha regla, probablemente sienten que no es necesario decírselo a los niños. En el caso de la derivada podemos imaginarnos perfectamente a un estudiante que es capaz de determinar el máximo absoluto de una función, en un problema de modelación, pero incapaz de explicar el porqué de su resultado.

Diseño de tareas

El marco teórico que elegimos para nuestro trabajo es el diseño de tareas (*task design*), algunos de cuyos principios se pueden visualizar en los siguientes trabajos de los investigadores de este enfoque.

El término «tarea matemática» (*mathematical task*) suele evocar la idea de una actividad que se solicita a los alumnos, ya sea para realizar en la casa o en la clase, solos o en grupo (Breen & O'Shea, 2010).

Sierpinska (2004) considera que el diseño, análisis y prueba empírica de tareas matemáticas, ya sea para propósitos de investigación o enseñanza, es una de las más importantes responsabilidades de la educación matemática.

Debemos aclarar que la extensión y detalle del diseño de tareas varía enormemente entre los que trabajan en diseño de tareas (Watson & Ohtani, 2013).

Bokhove (2014) propone un modelo que se basa en algunos principios del diseño de tareas. En su modelo menciona que existen tres etapas o componentes en una secuencia de tareas, que considera «tareas muy similares»: crisis, retroalimentación y desvanecimiento (*crises, feedback and fading*). Además sugiere la repetición de ejercicios, aunque con cierta variación, como un medio para que los alumnos puedan lograr una mejor comprensión. Este mismo principio es enunciado por Watson y Mason (2005).

Mason y Johnston–Wilder (2006) hablan de «dimensiones de posible variación». Se pueden variar algunas dimensiones o aspectos del problema:

- ¿Qué aspectos de la tarea son fijos?
- ¿Qué aspectos son particulares, y pueden ser variados?

Por ende, las tareas no deben ser vistas aisladamente sino dentro de un panorama mucho más amplio; una secuencia de tareas, que puede incluir ejercicios repetitivos, con pequeñas variaciones.

Ron, Zaslavsky y Zodik (2013) señalan que el proceso de diseño de tareas con frecuencia está formado por tres etapas:

- Afirmar los objetivos y conectar la tarea con los objetivos.
- Diseñar una actividad genérica que nos dirija a dichos objetivos.
- Escoger cuidadosamente los ejemplos específicos para implementar la tarea genérica.

Watson y Mason (2005) propusieron una teoría denominada «Teoría del aprendizaje a través de la ejemplificación», que consiste en solicitar a los alumnos realizar tareas de construcción de ejemplos, a partir de sus conocimientos previos.

En esta teoría se utiliza mucho el concepto de *scaffolding*, que puede ser traducido como una construcción gradual de los estudiantes, que a partir de objetos accesibles o familiares para ellos, sus propiedades y asistencia apropiada, pueden alcanzar a completar la tarea, sin que haya necesidad de reducir la complejidad cognitiva (Stein, Grover & Henningsen, 1995).

Damos un ejemplo de una pequeña secuencia de tareas en este enfoque:

Task 7a: How Different?

Give an example of a linear equation.
Change your example in some way to give a different straight line.
Make further *similar* alterations to get new straight lines.
Now make a different kind of change. How does the new straight line differ from those achieved so far?
What other kinds of change can be made, and what is the effect of these changes?

Figura 1. Una secuencia de tareas, tomada de Watson y Mason (2005).

Podemos observar que la secuencia está compuesta de ejemplos, en los que el alumno debe construir objetos matemáticos. En esta secuencia se pueden apreciar varios principios del diseño de tareas, como empezar de conocimientos previos, avanzar gradualmente y además la posibilidad de proponer preguntas con pequeñas variaciones, que induzcan a los estudiantes a reflexionar sobre lo que van construyendo.

La repetición «aparente» de ejemplos con pequeños cambios, según esta teoría, contribuye a que el alumno comprenda un nuevo concepto a partir de la observación de una característica o un principio que se mantiene válido para una variedad de ejemplos. En ese tipo de tareas el estudiante hace lo que naturalmente hacen las personas, observar qué es igual y qué es diferente en cada caso (Watson & Mason, 2005).

En resumen podemos sintetizar algunos principios del marco teórico en el que nos basamos:

- Es importante que la secuencia de tareas considere los conocimientos previos de los alumnos.

- Es importante proporcionar *feedback* cuando sea necesario para superar las etapas de crisis.
- Es valioso usar diversas representaciones de los objetos matemáticos.
- Es importante pedir que los alumnos construyan ejemplos repetidos con pequeñas variaciones, para lograr que comparen cada caso.

Nuestra investigación se enmarca dentro del diseño de tareas, principalmente en la teoría desarrollada por Watson y Mason (2005), que creemos incluye la mayor parte de los principios generales del diseño de tareas y está más cercana a lo que pretendemos llevar a cabo.

Objetivos

Pregunta de investigación: ¿de qué manera el diseño de tareas puede ayudar a un aprendizaje significativo del concepto de derivada?

Objetivo general

Diseñar una secuencia de tareas que ayude a una mejor comprensión del concepto de derivada por los estudiantes y permita identificar dificultades en el aprendizaje del concepto.

Objetivos específicos

- Diseñar una secuencia de tareas que contribuya a una mejor comprensión del concepto de derivada y de su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Identificar posibles deficiencias en la comprensión de conceptos previos que son necesarios para el aprendizaje significativo del concepto de derivada.
- Identificar algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada.

Metodología

La metodología es cualitativa, exploratoria y descriptiva. Mencionamos algunas características de la investigación cualitativa, relacionadas con el presente trabajo.

- Las preguntas de investigación pueden ser cambiadas y ser refinadas.
- Usa métodos interactivos con participación activa de los individuos investigados.
- Es fundamentalmente interpretativa.
- El investigador puede conducir entrevistas personales a los participantes.

Se realizó la investigación en el marco del curso de Lógica Matemática, de la carrera de Administración de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), que incluye tópicos de Cálculo y de Lógica. Se escogió a 15 alumnos de una sección de 40, de la cual el autor era el docente. Todos los alumnos llevaban el curso por primera vez. Los estudiantes ya habían terminado el estudio de la derivada de funciones de una variable. Además, ya habían tenido una evaluación del tema de derivadas.

La secuencia es coherente con el enfoque expuesto por Watson y Mason (2005), de diseño de tareas, las que son presentadas como «ejemplos», en los que se pide a los alumnos la construcción de objetos matemáticos, familiares para ellos, y se realizan variaciones en los ejemplos, para que los alumnos analicen los cambios y puedan ir obteniendo relaciones, entre la derivada de la función f en un punto, con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en tal punto.

Diseño de la secuencia de tareas

- La secuencia al inicio evoca y explora los conocimientos previos de los participantes (función lineal y pendiente).
- Los ítems solicitan a los participantes construir ejemplos de objetos matemáticos familiares para ellos, pero que tengan cierto comportamiento que requiera una reflexión conceptual.
- Dentro de los ítems se solicita que los participantes expliquen de manera verbal y concisa el comportamiento de los objetos.
- La demanda cognitiva va gradualmente en aumento.
- Se relacionan tres representaciones diferentes del objeto matemático derivada: gráfica, algebraica y simbólica.
- Se presenta un conjunto de ítems con similitudes y variaciones relacionadas con el concepto de derivada, para inducir a los estudiantes a comparar y reflexionar.

Secuencia de tareas

En los ítems 1 y 2 se pide construir algunos ejemplos que sirven para evocar y explorar los conceptos previos de función lineal y funciones crecientes y decrecientes. Los ítems del 3 al 6 (uno de las cuales mostramos a continuación) se diseñaron como una secuencia de tareas, en las que se proponían actividades similares de graficar funciones, pero con pequeñas variaciones respecto al carácter creciente o decreciente de la función y a la velocidad de tal crecimiento o decrecimiento, y en las que los participantes debían expresar simbólica y verbalmente sus percepciones sobre los objetos matemáticos que habían dibujado.

Ítem 3.

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea solo creciente, pero cada vez más rápidamente.

Subítems:

3ª. Cuando la variable x crece, entonces la variable y ..../

3b. Cuando la variable x crece entonces la derivada de la función

Es positiva ( ) Es negativa ( )

3c. Complete el espacio :

Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$ ...... $f'(x_2)$

3d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

3e. ¿La función podrá tener un máximo? Sí ( ) No ( ) ¿Por qué?

En los ítems 7 y 8 se consolida la secuencia de las cuatro preguntas anteriores:

Ítem 7.- Grafique una función continua $y = f(x)$ que sea creciente cada vez más lentamente para todo $x < 2$, y que sea decreciente cada vez más rápidamente para todo $x > 2$.

Sigue un ítem en el que se pide modificar las condiciones y crear una nueva gráfica. La actividad finaliza con un problema contextualizado en el que se solicita optimizar una función de costo promedio y luego modificar las condiciones para obtener un resultado preestablecido.

Resultados

- Se elaboraron cuadros para el registro de la información, asignando a cada participante un número del 1 al 15.
- Posteriormente se formularon preguntas aclaratorias, dirigidas a algunos alumnos con el objetivo de tener una idea más clara de cuáles habían sido las motivaciones de algunas de sus respuestas.

Los resultados obtenidos para el ítem 3 se muestran en la tabla 1.

Tabla 1
Resumen de respuestas a los subítems del ítem 3.

	Gráfica			3a		3b		3c			3d					3e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Otra	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
3		1,2,3 4,6,7 8,10	9 14 15	1,2,3,4 6,7,8,9 10,14 15		1,2,3 4,5,6 7,8,9 10,14,15		1,2,4 6,8,9 10 14,15	3,7		2,4	14 15, 9	1,3 6,8 10		7	9 14	8 15	1,2,3 4,5,6 7,10		
			5	5					5				5					5		
		12		12		12				12			12					12		
		13	11	11 13		11 13		13	11						13	11 13				

Consideraciones finales

Con base en el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica consideramos que esta ayudó a mejorar la comprensión de los estudiantes del concepto derivada, por varias razones:

Se reforzaron y evocaron los conocimientos previos, que según los resultados de las preguntas 1 a 6, estaban por debajo de lo requerido, con respecto a pendiente de una recta, funciones lineales y funciones crecientes y decrecientes.

Se pudo observar una evolución en un grupo de estudiantes, en cuanto a la asociación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, que es una de las principales conexiones que queríamos que los estudiantes establezcan.

Se logró en la mayor parte de los estudiantes una asociación entre el signo de la derivada y el comportamiento de la función.

La resolución del problema contextualizado mostró en algunos casos los albores de una comprensión del tipo relacional.

Pendiente de una recta

La comprensión de los estudiantes del concepto de pendiente es, en muchos casos, solo instrumental, lo que no les permite poder determinar la pendiente a partir de una gráfica, ni tampoco hacer estimaciones sobre su magnitud o sobre su evolución, en curvas.

Funciones creciente o decreciente

Algunos alumnos no comprenden que una función puede ser creciente o decreciente para valores de x en todo el conjunto de los números reales, sin que necesariamente tengan que alcanzar un extremo (ítems 3, 4, 5, 6, la parte inicial).

Función lineal

Algunos de los alumnos que llegan al curso de Cálculo no son capaces de hallar la ecuación de una recta. En nuestra secuencia se les pedía dar un ejemplo de una función lineal pero no se les proporcionaban los puntos de paso y tenían que inventarlos ellos, actividad en la que tuvieron dificultades.

Predomina un nivel de comprensión instrumental del concepto de derivada

Se pidió a los estudiantes que investiguen el comportamiento de la derivada de una función lineal y al derivar la función (comprensión instrumental), obtuvieron naturalmente, una constante. Eso los desconcertó, ya que no sabían o ya habían olvidado que la derivada de una función lineal en cualquier punto es numéricamente igual a la pendiente de su gráfica.

Dificultades para relacionar lo conceptual con lo simbólico, en relación con la derivada de una función

El uso de un lenguaje riguroso, con diferentes representaciones semióticas, puede generar conflictos en el aprendizaje de los conceptos. La notación $f'(x)$ usada en los sub ítems 3c, 4c, 5c, 6c, junto con la desigualdad $x_1 < x_2$, generó un conflicto semiótico insalvable, como demuestran las respuestas a las preguntas aclaratorias. La mayoría de los alumnos ignoró el superíndice y respondió como si este no existiera, y en consecuencia no examinaban, observando la gráfica, una relación entre los valores de la derivada de la función, para x_1 y x_2, sabiendo que $x_1 < x_2$

Dificultades para relacionar lo conceptual con lo gráfico en relación con la derivada

En las preguntas 3, 4, 5 y 6 cuando se pidió dibujar las funciones con características cambiantes, se vio que varios alumnos no relacionaban la condición de creciente o decreciente de la función con la derivada, ni con la recta tangente. Sus producciones revelan más un manejo estereotipado (creciente es la que va para arriba y decreciente la que va para abajo), que es residual del curso precedente y no distinguen en las gráficas cuándo hay un crecimiento «cada vez más rápido» o «cada vez más lento».

Para poder realizar las gráficas o para poder decir si la derivada era mayor o menor en x_1 o en x_2 se hacía necesario que dibujen las rectas tangentes a la gráfica en dos puntos diferentes y comparen las pendientes, por estimación, cosa que pocos pudieron hacer.

Recomendaciones

Es necesario que hagamos un análisis sobre la calidad de los conocimientos previos de los alumnos, que se requieren para acometer el estudio de la derivada.

Recomendamos establecer las relaciones entre los diversos registros de representación de la derivada, en vez de quedarnos solo en el registro algebraico. Algunos estudiantes que acaban de terminar de estudiar el tema de derivadas no son capaces de relacionar la pendiente de la recta tangente con la derivada y con el crecimiento de la función. Menos aún con el tipo de crecimiento o decrecimiento.

Se recomienda tomar en cuenta la complejidad semiótica del concepto de derivada, ya que constituye un obstáculo insalvable para algunos estudiantes.

Algunos estudiantes no son capaces de aprender los conceptos y los símbolos al mismo tiempo. Es menester, pues, trabajar primero los conceptos intuitivamente con palabras y gráficos, hasta que sean interiorizados por los estudiantes y, gradualmente, ir introduciendo el lenguaje formal.

En esa línea de investigación ya están trabajando algunos investigadores como Idris (2009), quien menciona una tercera forma de comprensión, además de las dos discutidas por Skemp (2005), la comprensión lógica, gracias a la cual el estudiante es capaz de explicar y justificar sus procedimientos y razonamientos verbalmente o por escrito.

Referencias

Ausubel, D. (2000). *The adquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Nueva York: Springer.

Bokhove, C. (2014). Using crises, feedback and fading for online Task Design. PNA, 8(4), 127-138. Recuperado de: http://digibug.ugr.es/bitstream /10481/31597/1/140505BokhoveUsing_PNA8(4).pdf

Breen, S. & O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Math. Society. Bulletin* 55, 39-49. Recuperado de: http://www. maths.tcd.ie/pub/ims/bull55/ME5501.pdf

Creswell, J. W., (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*.

Recuperado de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1334586. files/2003_Creswell_A%20Framework%20for%20Design.pdf

Idris, N., (2009). Enhancing students' understanding in calculus trough writing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(1). Recuperado de: www.iejme.com

Mason, J. & Johnston–Wilder, S. (2006). *Designing and using Mathematical Tasks.* Walton Hall: The Open University. Tarquin Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for school mathematics. Virginia: NCTM.

Orton, A. (2005): *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practices.* Nueva York: Continuum.

Ron, G., Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2013). Engaging teachers in the web of considerations underlying the design of tasks that foster the need for new mathematical concepts or tools: The case of Calculus. En Margolinas, C. (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1) (pp. 543-549) Oxford. Recuperado de: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/74/88/PDF/ICMI_ STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics, 24*(2), 7-15. Recuperado de: http://flm-journal.org/Sierpinska.pdf

Skemp, R. (2005). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95. Recuperado: http://www.jstor.org/discover/10.2307/41182357?uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21104050033147

Stein, M., Grover, B., & Henningsen, M. (1995). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms Bosch, M. & Gascón, J. (2006). *Twenty Five Years of the Didactic Transposition*. Recuperado de: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Swan, M. (2008). Design of multiple representation tasks to foster conceptual development. ICME 11. México 2008. *11th International Congress on Mathematical Education*. Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/289

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners Generating Examples*. Nueva Jersey y Londres: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah.

Una situación didáctica para la aproximación del área por acotación[1]

Didactic situation for the approximation of the area for boundedness

Mihály Martínez Miraval[2]
Francisco Ugarte Guerra [3]

Resumen

En este artículo presentamos el análisis de las dialécticas por las que transitan universitarios durante una situación didáctica, mediada por el GeoGebra. Durante las interacciones producidas, los estudiantes manipularon un procedimiento que les permitió expresar la aproximación de la medida de un área, como una adición de términos. El contraste entre los resultados esperados y los obtenidos muestra que los estudiantes tienen dificultades para identificar la altura de un rectángulo con la imagen de una función y para trabajar con números racionales, lo que derivó en planteamientos erróneos de la aproximación que se redujeron al identificar las fracciones mediante variables con índices naturales. De esta manera, nuestra propuesta favoreció la comprensión de la definición de área y pensamos que plantea un camino para introducir el área como el límite de una suma infinita (integral definida).

Palabras clave: *GeoGebra, medida del área, dialécticas.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272. Fondo concursable desarrollo de líneas de investigación -Escuela de Posgrado 2013.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. martinez.ma@pucp.edu.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. fugarte@pucp.edu.pe

Abstract

This paper presents an analysis of the dialectics young university students go through during a didactic situation mediated by GeoGebra. During the produced interactions, students manipulated a procedure that allowed them to express the approximation of the measurement of an area as an addition of terms. The contrast between the expected results and the ones obtained shows that students have difficulties identifying the height of a rectangle with the image of a function and working with rational numbers, which resulted in mistaken approaches of the approximation that were reduced when identifying the fractions through variables with natural indexes. This way, our proposal favored the understanding of the definition of area, and we believe that it paves the way to introduce the area as the limit of an infinite sum (definite integral).

Keywords: *GeoGebra, area measurement, dialectics.*

Introducción

El concepto de área se presenta de forma transversal en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universidad. Sin embargo, los estudiantes no logran construir completamente este concepto, lo que dificulta la aprehensión de otros conceptos matemáticos, como el de integral definida y problemas de optimización, tal como señala Corberán (1996). Las investigaciones que reportan que la construcción del concepto de área es complicada se refieren casi en su totalidad al trabajo de Freudenthal (1999), quien señala que la dificultad radica, en particular, en la variedad de enfoques para su construcción: la repartición equitativa, la comparación y reproducción, y la medición. Los dos primeros son tratados en la escuela sin la necesidad de utilizar procesos infinitos, mientras que el último puede requerir un refinamiento (subdivisión), estrategia que, dependiendo de la superficie, deberá repetirse muchas veces o indefinidamente; este proceso infinito es el obstáculo que dificulta la compresión de la medida del área.

El enfoque por medición refleja la situación que vamos a presentar en este artículo, específicamente centrado en la aproximación a la medida del área a partir de un proceso por acotación, caracterizado por el uso de unidades de área cada vez más finas que no se superponen unas con otras y que se basa en el método de *exhausción*, de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), conocido también como Axioma de Arquímedes (Boyer, 1986). Los otros procesos de medida del área utilizan el método por agotamiento (proceso de aproximación por acotación interior) y transformaciones del área para utilizar fórmulas de geometría (procesos vistos en secundaria).

La situación didáctica que planteamos propone la comprensión del enfoque del área por acotación con miras a presentar la definición de medida de área como límite de una suma de Riemann, esto sería una alternativa a la estrategia habitual según la cual el área es una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo (Artigue, 2003). De esta manera, se espera disminuir las dificultades que genera el tratamiento tradicional que permite que los estudiantes tengan un dominio algebraico del cálculo de antiderivadas, pero no logren conceptualizar el proceso de límite involucrado.

Para el planteamiento de la situación asumimos que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se asemeja al trabajo de un matemático, en el que se experimenta, dialoga, contrasta, sistematiza, discute, valida, etcétera. Por eso hemos elegido a la Teoría de las Situaciones Didácticas como marco teórico, ya que busca a partir de situaciones didácticas crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar (Brousseau, 2007).

Siguiendo la metodología de Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), diseñamos e implementamos una situación didáctica, mediada por el GeoGebra, cuya actividad central sería la aproximación de la medida del área a través de rectángulos de igual base. En ese proceso, los estudiantes se aproximarían tanto como quisieran a dicha medida a través de la suma de las medidas de las áreas de rectángulos. Al modificar la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación* para mejorar la aproximación, los estudiantes debían conceptualizar la noción de límite infinito subyacente al cálculo de su medida por acotación, y al mismo tiempo, se debía facilitar la comprensión del área.

Problemática

Del análisis del Diseño Curricular Nacional (Minedu, 2010) vigente y de la colección de textos que son repartidos gratuitamente por el Estado peruano, podemos afirmar que el área es un concepto que se trabaja en los diferentes niveles educativos. En las escuelas públicas peruanas se tratan los distintos enfoques propuestos por Freudenthal (1999), pero el proceso de medición por acotación se trabaja en secundaria superficialmente, al refinar el área con un número pequeño de subdivisiones.

Es habitual que los textos de cálculo integral en una variable presenten a la integral definida asociada al problema del área, es decir, la presenten como el límite de una suma de Riemann (Stewart, 2001; Haeussler, 2004; Leithold, 1998). Sin embargo, no se suelen presentar actividades para que el estudiante aproxime la medida del área; los problemas que se plantean requieren la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo y de las propiedades de integral definida.

Nosotros proponemos retomar el enfoque por medición en el nivel universitario; esto se haría con procesos de acotación que consideren subdivisiones cada vez más finas, y con aproximaciones tan pequeñas como se quiera. De esta manera la definición de área se obtendrá de manera natural como resultado de un procedimiento de subdivisión infinita en donde se requiere la noción de límite de una suma infinita.

Marco teórico

Por la forma en la que concebimos la enseñanza y el aprendizaje en la educación, tratamos de centrar la enseñanza en el estudiante, de modo que lo hagamos partícipe de su aprendizaje. Esto implica colocar al estudiante en una situación en la que pueda utilizar sus conocimientos previos para actuar sobre un problema y así generar nuevos aprendizajes e idear nuevas estrategias de resolución. Por este motivo, consideramos que el marco teórico más adecuado a nuestra investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986).

La teoría de las situaciones didácticas busca crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar. El aprendizaje del estudiante se produce a partir de situaciones (que pueden ser ejercicios, problemas, retos, etcétera) que acepta desarrollar y que conducen a modificaciones en su comportamiento que lo lleven a obtener el aprendizaje esperado.

Para que los estudiantes sean capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de términos, planteamos trabajar con la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación*. Por ejemplo, cuando se pida calcular la medida del área de solo un rectángulo, los estudiantes tendrán que multiplicar la longitud de la base por la altura, de modo que la altura se represente por la imagen de una función. Sin embargo, si el número de rectángulos se incrementa, el número de términos de la adición aumentará, la medida de la base de cada rectángulo cambiará y las alturas de los rectángulos variarán. Las respuestas, procedimientos y justificaciones realizados por los estudiantes, a partir de los cambios en la variable didáctica, brindan información sobre las dialécticas por las que transita. Estas dialécticas pueden ser de acción, formulación y validación.

Brousseau (2007) señala que los estudiantes en la dialéctica de acción actúan sobre la situación didáctica y relacionan la información obtenida con sus decisiones por tomar; en la dialéctica de formulación expresan lo que están aprendiendo o comunican la estrategia que están utilizando, a fin de estandarizar el lenguaje; y en la dialéctica de validación demuestran a otras personas la validez de sus estrategias, procedimientos y resultados referidos al desarrollo de los problemas de la situación.

En nuestra investigación, hemos diseñado *applets* en GeoGebra, para que los estudiantes los utilicen como un instrumento generador de interacciones a-didácticas, de modo que les permitan desarrollar la situación didáctica y, a partir de sus resultados, podamos analizar en qué dialéctica se ubican.

Para introducir a los estudiantes en el trabajo con *applets*, y en el reconocimiento de las dimensiones de un rectángulo, diseñamos un punto móvil P el cual manipulan de forma exploratoria deslizándolo por la curva (utilizando el *mouse*). Esto les permite relacionar las coordenadas del punto P con las dimensiones del rectángulo (ver figura 1). Observamos que el valor de nuestra variable didáctica es 1, ya que solo se ha dibujado un rectángulo. En las siguientes tareas lo modificaremos para que el estudiante realice planteamientos que involucren otro tipo de cálculos.

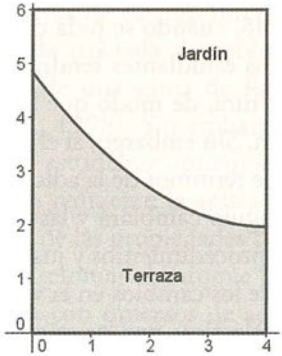
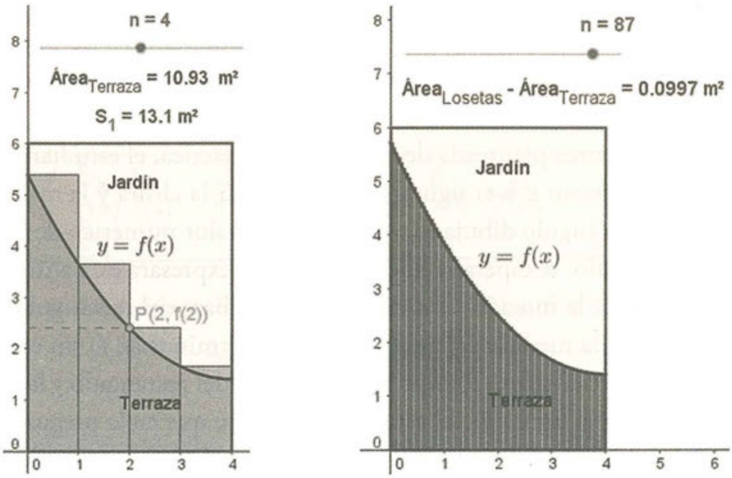


Figura 1. Loseta de base igual a 2 m y altura $f(2)$.

Del mismo modo, hemos diseñado un deslizador que modifica el número de rectángulos de aproximación, de modo que se dibujen hasta 2000 rectángulos. Cuando se dibujan dos o cuatro rectángulos, los estudiantes formulan que la adición presenta 2 o 4 términos respectivamente, que las bases miden 2 m. o 1 m. en cada caso, y que las alturas son las imágenes de la función en el extremo derecho o izquierdo de cada base, siendo estos números enteros (ver figura 2a).

Pero cuando el número de rectángulos de aproximación es mayor (por ejemplo, más de 80, ver figura 2b), ya no se aprecian los rectángulos ni la partición regular generada en el intervalo; esto hace que los estudiantes validen que la partición depende de la amplitud de la base, y en función a ella determinen las alturas de cada rectángulo. Se espera que utilicen símbolos que representen a la base y a la partición de modo que les permita generalizar una adición de *n* términos.



Medida del área *A* de los cuatro rectángulos:	Medida del área *A* de los 87 rectángulos:
$m(A) = 1 \times f(0) + 1 \times f(1) \times f(2) + 1 \times f(3)\text{u}^2$	$m(A) = b \times f(x_0) + b \times f(x_1) + \ldots + b \times f(x_{85}) + b \times f(x_{86})\text{u}^2$
(a)	(b)

Figura 2. Aproximación.

El diseño de las tareas no se restringe a una dialéctica en particular. El análisis que realicemos de la información dada por los estudiantes (respuestas, procedimientos, justificaciones), contrastando los análisis *a priori* y *a posteriori*, nos permitirá deducir qué dialéctica alcanzaron.

ANÁLISIS DE ALGUNAS DE LAS TAREAS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

El análisis de los resultados obtenidos de las preguntas de algunas tareas de la situación didáctica lo hicimos confrontando las respuestas que esperábamos obtener de los estudiantes (análisis *a priori*) y lo que realmente respondieron (análisis *a posteriori*), para poder observar si los resultados fueron o no previstos por el investigador. Por esta manera de analizar los resultados, elegimos como referencial metodológico ciertos aspectos de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

La investigación se realizó con cuatro estudiantes y se obtuvieron distintas respuestas en varias de las tareas. A continuación presentamos el análisis de las respuestas de uno de los estudiantes.

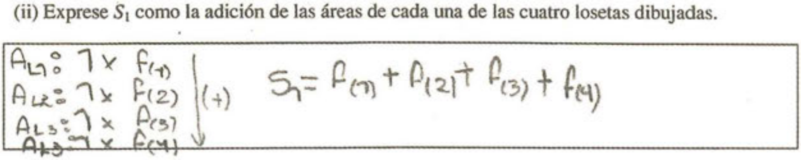
En una tarea planteada de la situación didáctica, el estudiante debía deslizar el punto P (ver figura 1) y determinar la altura y la medida del área del rectángulo dibujado. Al no tener el valor numérico de la altura del rectángulo, se esperaba que el estudiante expresara esta altura como la imagen de la función f para un valor de x (base del rectángulo) y formulara que la medida del área quedaría en términos de f; sin embargo, solo movilizó el punto P y aproximó la altura del rectángulo y la medida de su área (ver figura 3). El estudiante justificó que en la pregunta no le pedían expresar la altura como la imagen de la función. Afirmamos que el estudiante alcanzó la *dialéctica de acción* ya que solo actuó sobre el punto P y no consiguió relacionar por sí mismo la altura del rectángulo con la imagen de la función.

b. (i) Mueva el punto *P* y complete la tabla:

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta	3,6	1,9	1,53
Área de la loseta	3,6	4,75	4,9

Figura 3. Tabla para diferentes valores de x.

Luego, en otra tarea de la situación didáctica el estudiante debía dibujar cuatro rectángulos con el deslizador *n* y expresar la suma de las medidas de sus áreas como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. Al aplicar el proceso de medición por acotación de Freudental (1999), se esperaba que el estudiante, a partir de sus conocimientos previos sobre funciones e intervalos, fuera capaz de plantear la adición de términos reconociendo que la altura de cada rectángulo era igual a la imagen de la función en el extremo izquierdo de cada base; sin embargo, tomó el extremo derecho (el estudiante observó el dibujo de la figura 2(a) y respondió lo que muestra la figura 4).


(ii) Exprese S_1 como la adición de las áreas de cada una de las cuatro losetas dibujadas.

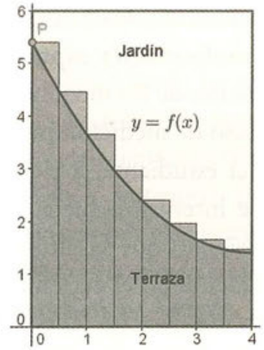
$A_{L1}: 1 \times f(1)$
$A_{L2}: 1 \times f(2)$ (+) $S_1 = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$
$A_{L3}: 1 \times f(3)$
$A_{L4}: 1 \times f(4)$

Figura 4. Adición de las medidas de las áreas de cuatro rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 140).

El investigador intervino y le indicó al estudiante que colocara el punto P en uno de los vértices superiores del segundo rectángulo y observara las coordenadas del punto; en ese momento el estudiante se dio cuenta por sí mismo del error cometido.

Cuando se modificó el *número de rectángulos de aproximación* y se le asignó el valor de 8, se esperaba que presentara como respuesta la siguiente adición de términos: $0{,}5 \times f(0) + 0{,}5 \times f(0{,}5) + 0{,}5 \times f(1) + 0{,}5 \times f(1{,}5) + 0{,}5 \times f(2) + 0{,}5 \times f(2{,}5) + 0{,}5 \times f(3) + 0{,}5 \times f(3{,}5)$; sin embargo no consideró la partición regular generada por los rectángulos en el intervalo $[0; 4]$ del eje x, y presentó como respuesta lo que se muestra en la figura 5.



$$S_7 = f_{(0)} \times 0{,}5 + f_{(1)} \times 0{,}5 + f_{(2)} \times 0{,}5 + f_{(3)} \times 0{,}5 + f_{(4)} \times 0{,}5 +$$
$$f_{(5)} \times 0{,}5 + f_{(6)} \times 0{,}5 + f_{(7)} \times 0{,}5$$

Figura 5. Adición de las medidas de las áreas de ocho rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 147).

El estudiante justificó su respuesta señalando que había considerado como alturas las imágenes de los números de rectángulos pero no de los valores de *x*. Notamos que para valores pequeños y naturales pudo realizar la tarea, identificando en el plano las alturas directamente; sin embargo, para valores grandes del número de rectángulos y por tanto, intervalos con extremos fraccionarios, no pudo hacerlo, es decir, no logró identificar ni validar un procedimiento que le permitiera expresar la suma de las medidas de áreas como una adición de términos, por ese motivo afirmamos que el estudiante solo alcanzó a la *dialéctica de acción*.

En una siguiente tarea de la situación didáctica, el estudiante señaló correctamente que con 87 rectángulos se cumplía cierta condición dada y calculó sin dificultad la medida de la base de cada rectángulo (0,046 m), pero nuevamente se equivocó con las alturas (ver figura 6) y no consiguió validar el procedimiento que le permitiera plantear correctamente la adición de términos. Nuevamente la dificultad parece estar en identificar los extremos de los intervalos cuando son números racionales. El investigador le preguntó cuál había sido su razonamiento; el estudiante respondió que no se acordaba cómo se obtenían las alturas de los rectángulos, que recordó que estaba mal evaluar f de 0 a 86 (por eso lo tachó), pero luego no supo qué hacer.

$$\cancel{S = \left(f_{(0)} + f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + \ldots + f_{(86)}\right) 0.46}$$

$$S = \left(f_{(0{,}046)} \times 0{,}46\right)(86)$$

Figura 6. Adición de las medidas de las áreas de 87 rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 175).

Durante el desarrollo de la actividad, cuando el estudiante trabajó con 87 rectángulos, el investigador intervino para proponerle que empleara una notación simbólica que le permitiera obtener una forma generalizada. El estudiante denotó con la letra b a la base de cada rectángulo, $b \approx 0{,}045$m. Cuando se le preguntó por los valores que tomaban los extremos de los tres primeros intervalos de la partición regular; señaló que estos eran 0; 0,045; 0,09 y 0,135. El investigador asignó a cada número respectivamente los símbolos x_0; x_1; x_2 y x_3. Luego, el estudiante calculó correctamente la medida del área del primer rectángulo, del segundo y expresó oralmente lo siguiente:

$$m(\mathrm{A}) = b \times f(x_0) + b \times f(x_1) + \ldots + b \times f(x_{85}) + b \times f(x_{86})\ \mathrm{m}^2.$$

Pensamos que el uso de la notación simbólica con índices números naturales disminuye la dificultad al momento de identificar la altura de cada rectángulo. En otra tarea de la misma situación, el estudiante tuvo que plantear la suma de las medidas de las áreas de 873 rectángulos, como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos, pero esta vez de forma simbólica; sin embargo, volvió a presentar dificultades en lo referido a las alturas de cada rectángulo, aunque por una desconcentración, como él mismo afirmó. La figura 7 muestra su respuesta.

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

$$\frac{4}{873} = 0,0045$$

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

$$S = f_{x(0)} \cdot b + f_{(x_1)} b + \ldots + f_{(x_{34})} \cdot b$$

Figura 7. Adición de las medidas de las áreas de 873 rectángulos.

Finalmente, en la última tarea, el estudiante comentó que con infinitos rectángulos se podría acercar a la medida del área, «creo que no se puede calcular el área exacta pero sí la que más se aproxima» (Martínez, 2015, p. 192). La figura 8 muestra la forma en que representa dicha aproximación.

(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

$$S = b \cdot f_{(x_0)} + b \cdot f_{(x_1)} + \ldots + b \cdot f_{(x_\infty)}$$

Figura 8. Adición de las medidas de las áreas cuando *n* tiende al infinito.

Apreciamos que luego de introducir la notación simbólica, el estudiante fue capaz de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de términos; y observar el último sumando que aparece en la figura 8 favoreció a su comprensión del proceso infinito involucrado. Por ello afirmamos que alcanzó las *dialécticas de formulación* y *validación.*

A continuación presentamos la conclusión a la que llegamos en nuestro artículo.

Conclusión

A partir del desarrollo de la secuencia didáctica, del recojo de la información de cada una de las tareas y del análisis en conjunto de todas ellas, hemos llegado a la siguiente conclusión:

Inicialmente, el estudiante desconocía un procedimiento de aproximación a la medida del área, no sabía que la altura de un rectángulo podía expresarla como la imagen de una función y no pensaba en realizar procesos infinitos. A medida que fue desarrollando la situación didáctica, pudimos observar que las dificultades al plantear la adición de términos y al relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de la función se superaron en tanto que el estudiante reemplazaba los valores numéricos correspondientes a los extremos de los intervalos de la partición regular por la representación simbólica. Este cambio de estrategia redundó en la disminución de errores y le permitió replicar el procedimiento para distintos valores del número de rectángulos de aproximación.

Consideración final

La articulación del área con la integral definida, a través del proceso de medida por acotación, favoreció la comprensión del área como una suma de términos, y preparó el camino para introducir su definición como una integral definida. De otro lado, se propone construir situaciones didácticas similares en las que los estudiantes consigan verbalizar el procedimiento de *exhausción*, pero enfocados a un proceso de límite, y de esa manera logren expresar la medida del área como el límite de una suma de Riemann o la medida del área como integral definida.

Referencias

Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 117-134. Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/ vol10/artigue.pdf

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* [Tesis Doctoral]. Universidad de Valencia. España. Recuperado de www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Haeussler, E. & Paul, R. (2004). *Matemáticas para administración y economía*. México, D. F: Prentice Hall.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México, D. F.: Oxford.

Martínez, M. (2015). *Una propuesta para articular área y medida usando la tsd, en alumnos de nivel superior.* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/61133.

Ministerio de Educación del Perú [Minedu], Dirección de Educación Básica (2010). *Diseño Curricular Nacional.* Lima: Minedu.

Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

Paradigmas geométricos, tipos de prova e esquemas de prova como referências teóricas em pesquisas em Educação Matemática[1]

Geometric paradigms, types of proof and proof schemes as theoretical references in researches on Mathematics Education

Jacinto Ordem[2]
Saddo Ag Almouloud[3]

Resumo

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns referenciais teóricos que consideramos úteis na análise e interpretação de dados coletados em pesquisas voltadas à Educação Matemática, particularmente em estudos acerca de provas e demonstrações em geometria plana. Recorte de uma parte de tese de doutorado de um dos autores deste artigo, nesse capítulo apresentamos exemplos cuja análise e a interpretação fazem apelo a esses construtos teóricos.

Palavras-chave: *Paradigmas geométricos. Tipos de prova. Esquemas de prova. Prova e demonstração*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Universidade Pedagógica, Delegação da Beira - jc.ordem@gmail.com

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) saddo@gmail.com

Abstract

This chapter aims to present some theoretical references that we consider useful in the analysis and interpretation of data collected in researches focused on Mathematics Education, particulary in studies related to proofs and demonstrations in plane geometry. As a part of the doctoral thesis of one of the authors of this article, in this chapter we present examples whose analysis and interpretation appeal to these theorical constructs.

Keywords: *Geometrical paradigms. Types of proof. Proof schemes. Proof and demonstration*

Introdução

Este trabalho é um recorte de uma parte da tese de doutorado de um dos autores, que tem como objetivo analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana de estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. Visou-se nessa tese, essencialmenete:

1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.
2. Identificar o papel que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.
3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática.
4. Analisar que critérios utilizam para avaliar provas e demonstrações ou argumentos que lhes convencem de que uma propriedade em geometria é verdadeira.

Neste texto, focalisaremos nosso estudo sobre os aspectos teoricos relacinados com a diferenciação entre provar e demonstrar em matemática. Achamos pertinente, pois a demonstração é o principal meio pelo qual a comunidade dos matemáticos valida os resultados de suas descobertas e, consequentemente, decide sobre que resultados serão aceitos como válidos.

Discutiremos os tipos e esquemas de prova segundo Balacheff (1987) e Harel; Sowder (1998, 2007), respectivamente; os conceitos de paradigma e espaço de trabalho geométricos segundo Houdement e Kuzniak (2003, 2006); a relação entre a classificação de Balacheff e de Harel e Sowder (1998, 2007).

Paradigmas[4] geométricos

Tomando como base a forma como são validados os conceitos geométricos em diferentes níveis de aprendizagem e de escolaridade, Houdement e Kuzniak (2003, 2006) propõem três categorias de Geometrias, a que dão o nome de paradigmas, conforme os meios utilizados na validação de propriedades e conceitos: (a) Geometria I (ou Geometria Natural): assim se diz quando a validação das propriedades e conceitos geométricos se baseia em objetos materiais manipuláveis (régua graduada, compasso, transferidor, dobras, etc.). As conclusões apoiam-se em percepção imediata, ou experimentos. A relação entre o modelo e a realidade é permanente, sendo o meio principal de validação de conjecturas. A dedução vem, muitas vezes, acompanhada de experimentos mecânicos tais como dobrar, cortar ou manipular na tela do computador, e a demonstração de propriedades óbvias é dispensada.

[4] Kuhn (2009, pp. 312-313) destaca que «[...] o termo «paradigma» ocorre em estreita proximidade, física e lógica, com a expressão «comunidade científica». Um paradigma é aquilo que os membros de uma comunidade, e apenas eles, compartilham. Reciprocamente, é a posse de um paradigma em comum que institui a comunidade científica a partir de um grupo de pessoas com outras disparidades.»

As evidências constituem o aspecto mais privilegiado, sendo a figura tomada como objeto de estudo e de validação, o que faz com que muitas vezes evidências visuais e perceptivas sejam consideradas como argumentos suficientes na validação de propriedades e relações em detrimento de relações conceituais. (b) Geometria II (ou Geometria axiomática Natural): quando a validação das propriedades e conceitos se baseia em regras hipotético-dedutivas, porém, com uma axiomatização parcial. O privilégio no raciocínio é sobre propriedades geométricas e deduções, mas há limitações nos axiomas, pois, a sintaxe formal continua tendo algum vínculo forte com a realidade material – em geral os conceitos geométricos são uma modelação de problemas espaciais. Seus objetos são teóricos, porém, representações e modelações de objetos reais e concretos. Como salientam Houdement e Kuzniak (2006, p. 181) «geometria II se exerce por meio de uma axiomatização parcial, como ilhas de axiomatização». O exemplo principal deste paradigma é a geometria euclidiana. (c) Geometria III (ou Geometria axiomática formalista): é quando se trabalha com objetos teóricos sem qualquer relação com a realidade material; seu sistema de validação é bastante formal, com um conjunto de axiomas o mais completo possível e independente do mundo material. O princípio a observar nas deduções é a coerência interna entre os axiomas, isto é, a ausência de contradições entre os axiomas e independência entre eles. Fazem parte deste paradigma as geometrias não euclidianas.

Segundo Houdement e Kuzniak (2006) cada paradigma comporta um ambiente particularmente complexo de objetos visíveis e palpáveis, ou objetos conceituais. Esse aparato de objetos visíveis ou conceituais, recebe o nome de espaço de trabalho geométrico (ETG).

Espaço de trabalho geométrico

O **Espaço de trabalho geométrico** (ETG) é o ambiente organizado por e para o geômetra articular de forma adequada três componentes:

- um conjunto de objetos, eventualmente materializáveis em um espaço real e local;
- um conjunto de artefatos que serão instrumentos e ferramentas a serviço do geômetra;
- um referencial teórico que pode ser tomado como modelo teórico (Houdement Kuzniak, 2006, p. 184. Tradução de Ordem, 2015).

Consoante a relação com o saber, ou a prática de ensino, ou como um sujeito particular lida com um problema geométrico, podemos estabelecer a seguinte categorização dos Espaços de Trabalho geométrico: **ETG de referência**: é o espaço de trabalho determinado unicamente baseando-se em critérios puramente matemáticos. É o espaço de trabalho geométrico institucional dos matemáticos profissionais. Esse espaço de trabalho geométrico determina o quadro teórico matemático que norteia a comunidade. **ETG adequado**: é o espaço de trabalho concebido e operacionalizado para responder e satisfazer a uma dada instituição específica. Um dos principais utilizadores é o professor, portanto, é o espaço de trabalho geralmente que se vê refletido em livros didáticos. **ETG pessoal ou personalizado**: é o espaço de trabalho refletido em cada indivíduo particular (aluno ou professor) como resultado de uma reflexão de conhecimentos postos em ação para resolver um dado problema geométrico por esse indivíduo segundo suas habilidades matemáticas e cognitivas.

Convém destacar que o quadro de ETG compreende três componentes principais: (1) **a realidade do espaço** – objetos reais e eventos existentes fora do pensamento do sujeito; (2) **artefatos** – ferramentas e instrumentos tais como régua, esquadro, dobras, etc. Como destacam Houdement e Kuzniak (2006, apud ORDEM, 2015, p. 95) «um instrumento é um artefato sob o domínio de alguém graças a esquemas de ação». Daí a grande importância de que se revestem os artefatos na determinação do ETG dado que constituem a faceta mais visível e mais privilegiada pelos alunos. Assim, reside a importância de que se revestem as construções com régua e compasso na geometria euclidiana, uma vez que a chave está nas justificativas teóricas para uma dada técnica de construção, fato que em muitos casos constitui o grande entrave na aprendizagem das provas e demonstrações uma vez que evidências visuais são vistas como argumentos plausíveis para o estabelecimento de propriedades. (3) **referencial teórico** – compreendendo definições, propriedades e relações – determina o sistema lógico-dedutivo que permite dar sentido aos objetos e artefatos por meio de uma articulação entre essas definições, propriedades e relações entre propriedades. É essa articulação que permite que os objetos e artefatos geométricos tenham um estatuto teórico perdendo o polo empírico.

Chácon e Kuzniak (2011, apud ORDEM 2015, p. 97) salientam que a importância do quadro de ETG reside no fato de ele determinar as condições que permitem a um sujeito (aluno, professor, estudante, pesquisador, etc.) materializar a atividade como um geômetra, dado que permite a reorganização dos níveis epistemológico e cognitivo estabelecendo uma rede de relações de três gêneses: a gênese figural (do ponto de vista da visualização da intuição do espaço); a gênese instrumental (processo de construção mediante o uso de artefatos); e, a gênese discursiva (que tem a ver com o registro discursivo em estreita colaboração com o processo de prova), rede essa apresentada na figura 1.

Neste esquema da figura 1, destacamos a importância de instrumentos de construções geométricas pelo seu grande impacto na manifestação do ETG, uma vez que, constituindo a parte mais visível, acabam ditando em grande parte a formulação de conjecturas que, muitas vezes, são aceitas pelos alunos como propriedades estabelecidas, sem terem sido validadas de acordo com as regras matematicamente reconhecidas como instrumentos de validação de afirmação.

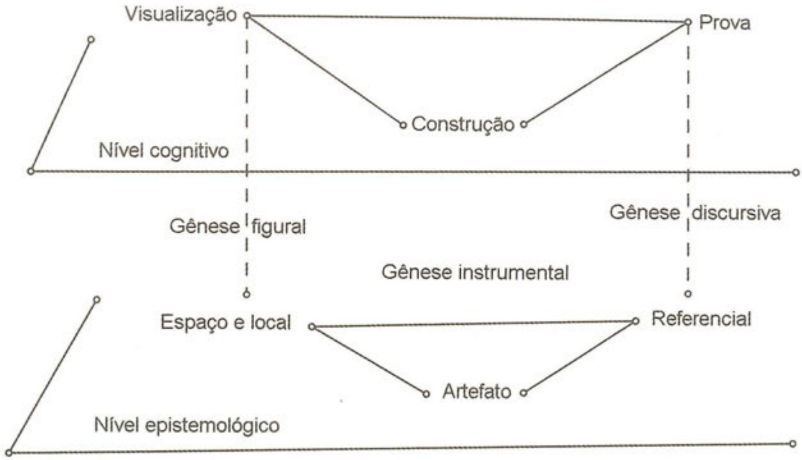


Figura 1. Esquematização do espaço de trabalho geométrico baseado na gênese do raciocínio discursivo

Fonte: Chacón e Kuzniak (2011, apud Ordem 2015, p. 98)

O trabalho de Houdement e Kuzniak ou de Chacón e Kuzniak está voltado aos processos de validação em Geometria. Outros construtos teóricos de referência nas pesquisas sobre o processo de aprendizagem da demonstração são os trabalhos de Balacheff (1987) e Harel e Sowder (1998, 2007).

A tipologia de provas de Balacheff (1987)

Balacheff (1987) começa por fazer distinção entre provas e demonstrações: uma prova é uma explicação aceita por uma comunidade em um dado momento. Certas explicações podem ter estatuto de prova para um determinado grupo social, mas para outro não. As demonstrações são provas da comunidade dos matemáticos e, portanto, respeitam rigorosamente certos critérios. A prova apenas terá estatuto de demonstração se for uma sequência organizada de enunciados segundo certas regras: ou o enunciado é assumido como verdadeiro (axioma), ou é deduzido dos que lhe precedem com ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto bem definido de regras. Almouloud (2007), apresenta uma descrição muito clara sobre «prova» e «demonstração» que consideramos pertinente:

> [...] A explicação reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma **prova** para esta comunidade, seja a proposição «verdadeira» ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de **demonstração**.
>
> - As **provas** são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter estatuto de prova para determinado grupo social, mas para outro não. As **demonstrações** são provas particulares com as seguintes características:
>
> - São as únicas aceitas pelos matemáticos
>
> - Respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras tomadas num conjunto de regras lógicas
>
> - Trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (Almouloud 2007, apud Ordem 2010, p. 55, grifo nosso).

Convém ressaltar que quando Almouloud afirma que as demonstrações são provas particulares, quer dizer são provas que respeitam critérios lógico-matemáticos; explicações que se baseiam, por exemplo, em verificações empíricas não podem ser consideradas de demonstração.

Na perspectiva cognitiva, Balacheff (1987) identificou duas categorias de provas manifestadas por alunos até compreenderem o sentido matemático de demonstração. Trata-se de provas pragmáticas e provas intelectuais.

As **provas pragmáticas** são explicações em que se servem de manipulação de exemplos, figuras, ou observação de exemplos concretos para a validação de propriedades; enquanto as **provas intelectuais** são explicações baseadas na formulação de conceitos e relações dedutivas entre conceitos na validação de propriedades. Na categoria de provas pragmáticas, Balacheff distingue entre empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico; enquanto as provas intelectuais compreendem experiência mental e cálculo simbólico. A prova é «empirismo ingênuo» (*empirisme naïf*) quando a tentativa de validação de uma propriedade se baseia na verificação de vários casos particulares, normalmente escolhidos de forma aleatória; a prova é de natureza «experiência crucial» (*expérience cruciale*), se a tentativa de validação da propriedade se baseia em um exemplo cuidadosamente escolhido. Se o aluno constatar que o exemplo verifica a conjectura, então, conclui que é uma propriedade válida para qualquer objeto daquela classe. Este tipo de prova difere do anterior, pelas intenções: neste, a preocupação centra-se na generalização da propriedade, enquanto no primeiro (empirismo ingênuo) essa preocupação não existe, apenas a ideia é testar se a conjectura funciona ou não. «Exemplo genérico» (*exemple générique*) é uma forma de tentativa de validação de uma conjectura por meio de operações ou transformação de um exemplo de modo a deixá-lo com uma característica que representa uma classe de objetos; nessa transformação do exemplo, o aluno busca uma generalização tentando justificá-la com uma teoria. A prova é «experiência mental» quando o aluno toma exemplos particulares não como elementos de convicção, mas sim meio de apoio à organização da justificação, isto é, as justificações são dissociadas de exemplos específicos. Finalmente, a prova é «cálculo simbólico» quando as justificações se baseiam unicamente em transformações de símbolos formais.

Esquemas de prova (Harel e Sowder, 1998; 2007)

Concentrando-se no modo como os alunos verificam conjecturas matemáticas para se convencerem ou convencerem a outros, Harel e Sowder (1998, 2007) propõem um outro quadro teórico que se baseia em «esquemas de prova». Esses autores consideram «esquemas de prova» como argumentos que os alunos utilizam para se convencer ou convencer a outros alunos ou professor e, estendem essa descrição afirmando que «esquema de prova» de um indivíduo (ou comunidade) é aquilo que para esse indivíduo (ou comunidade) representa meio de justificação, argumento a recorrer para esclarecer suas dúvidas (averiguação), ou de outros (persuasão), acerca da veracidade de uma conjectura. Esses autores propõem três categorias de esquemas de prova: (i) esquema de prova de convicção externa – forma de prova na qual tanto o que convence o proponente como o que recorre para persuadir a outros está fora do problema; (ii) esquema de prova empírica – quando a tentativa de validação da conjectura depende de fatos físicos ou experiências manipuláveis; e, (iii) esquema de prova analítica – quando a validação de conjecturas se baseia em argumentos abstratos e deduções lógicas. Tal como Balacheff (1987), que sugeriu tipos de prova e defende que cada um deles represente uma fase de desenvolvimento cognitivo para a apropriação do sentido de demonstração, Harel e Sowder (1998, 2007) destacam também que cada um dos esquemas representa uma faceta de desenvolvimento cognitivo, portanto, ilustra uma forma de entender e interpretar o sentido de demonstração.

Cada um dos esquemas apresentados subdivide-se em algumas subcategorias. **Os esquemas de prova de convicção externa** dividem-se em (1) esquema de prova autoritária – quando em sua justificação, o aluno invoca professor, livro de texto, etc. para validar a conjectura. (2) esquema de prova ritual – quando o aluno justifica a validade de um argumento estritamente pela aparência do argumento e não pela correção do raciocínio envolvido. Por exemplo, achar que, ao apresentar uma prova em geometria recorrendo a duas colunas, por si é condição de sua validade. (3) esquema de prova simbólica não-referencial – quando o aluno trata os símbolos como se não tivessem relação com as situações em que surgem. Por exemplo, considerar como legitimo e, portanto, correta, a seguinte simplificação errada: $(a + b)/(c + b) = (a + \cancel{b})/(c + \cancel{b}) = a/c$. Por sua vez, **os esquemas de prova empírica** são subdivididos em: (1) esquema de prova indutiva – quando a tentativa de validação da conjectura se baseia na avaliação quantitativa, isto é, se o aluno julga que verificando uma conjectura a partir de um exemplo particular, ou talvez vários exemplos diferentes, é suficiente para assegurar sua validade. Por exemplo, a partir de substituição por alguns números ímpares, concluir que a expressão $n^2 - 1$ é divisível por 8, para qualquer n ímpar. (2) esquema de prova perceptiva – quando a tentativa de validação de uma conjectura se apoia em uma ou várias figuras, isto é, quando julga que as aparências dos desenhos por si só são suficientes como meios de argumento. Finalmente, entre **os esquemas de prova analítica**, distinguem-se: (1) esquemas de prova transformacional – quando os argumentos se fundamentam em operações sobre objetos e antecipação de resultados que são convertidos em argumentos dedutivos. (2) esquemas de prova axiomática – quando as validações são tomadas de um sistema axiomático para formar uma cadeia dedutiva. Harel e Sowder afirmam que as duas subcategorias dos esquemas de provas analíticas (transformacionais e axiomáticas) gozam de três características essenciais: a generalidade – que tem a ver com a compreensão pessoal de que todos os argumentos devem ser justificados sem exceção; pensamento operacional – que tem a ver com as tentativas de antecipar os resultados durante o processo de prova; e, inferência lógica – tem a ver com a apresentação de justificações baseadas em regras de inferência que observam princípios lógicos aceitos.

Os quatro construtos teóricos (paradigmas geométricos; espaço de trabalho geométrico; tipos de prova e esquemas de prova) apresentam coerência, mas também especificidades ímpares entre si. Essa consistência permite que cada um deles seja útil para análise e interpretação de fenómenos observáveis em pesquisas de processos de ensino e aprendizagem da geometria e de provas e demonstrações e, as especificidades fazem que cada um deles possa ser utilizado sem que haja ruptura na análise e, às vezes, podemos estabelecer relações entre alguns desses referenciais teóricos obtendo algumas equivalências entre eles. É assim que Harel e Sowder (2007) dão-nos a seguinte equiparação entre suas propostas de esquemas de prova com os tipos de prova propostos por Balacheff: as provas do tipo «empirismo ingênuo» e «experiência crucial» correspondem às provas da categoria «esquemas de prova empírica», enquanto as provas do tipo «exemplo genérico», «experiência mental» e «cálculo simbólico» correspondem aos esquemas de «prova dedutiva» e «prova transformacional». Contudo, mais do que procurar estabelecer equivalências entre os dois referenciais teóricos, entendemos que as duas classificações de provas de Balacheff (1987) e de Harel e Sowder (1998, 2007) – apesar de categorizarem provas produzidas por alunos no seu processo de aprendizagem da noção de demonstração em matemática - diferem em nível epistemológico: Balacheff cataloga a evolução do sentido de demonstração nos alunos e, Harel e Sowder concentram-se nas justificativas tomadas por alunos para considerar que uma dada prova seja vista como apresentação de uma demonstração. Nesse ponto de vista podemos dizer os dois sistemas de classificação não se contradizem, mas sim, se complementam. Agora vejamos como os referenciais teóricos aqui apresentados podem ser utilizados na análise e interpretação de resultados de pesquisas.

Por exemplo, Ordem (2015) em sua pesquisa pediu aos sujeitos, participantes do estudo, que demonstrassem que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo e sua medida é metade da medida desse terceiro lado. Eis a resposta de Tarcísio, um dos participantes da pesquisa (Figura 2):

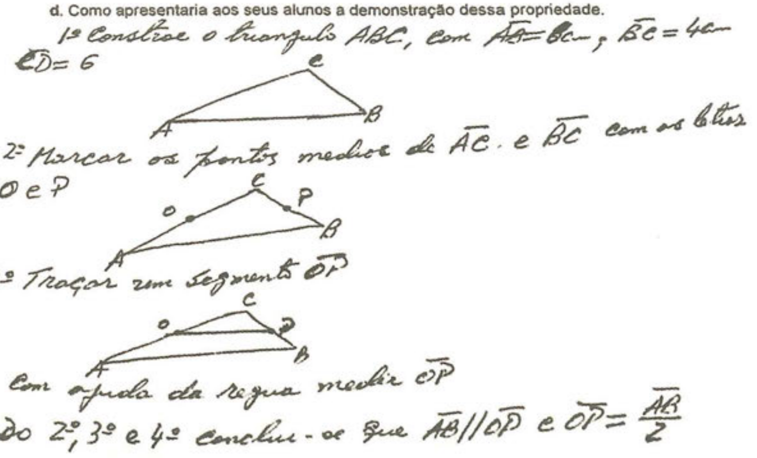


Figura 2. Produção do aluno Tarcísio

Fonte: Ordem (2015, p. 177)

Como vemos pelas descrições apresentadas, Tarcísio baseou-se em evidências empíricas (desenho e medições) para tirar conclusões. Desse modo, do ponto de vista dos paradigmas geométricos, dizemos que ele agiu sob GI (ou Geometria natural), porque nesse paradigma, desenho e evidências empíricas são meios de validação de propriedades geométricas. Quanto ao ETG podemos afirmar que, nesta resolução, comporta as próprias construções (desenhos), as medições, e as relações de paralelismo e de igualdade obtidas empiricamente (mas sem um modelo teórico bem fundamentado). Se formos apenas nos concentrar na prova em si, podemos classificá-la como prova pragmática na sua forma mais elementar, isto é, empirismo ingênuo, na terminologia de Balacheff (1987), pois Tarcísio limitou-se em verificar o paralelismo e a medida, sem manifestar a intenção de generalizar a propriedade para todos os triângulos (na sua produção não chega a expressar explicitamente essa conclusão). Na terminologia de Harel e Sowder (1998, 2007), podemos dizer que se trata de esquema de prova indutiva, porque Tarcísio se baseou na manipulação de régua e avaliação quantitativa.

Por outro lado, se explicitamente Tarcísio mostrasse a intenção de generalizar a propriedade que constatou em exemplos particulares para todos os triângulos, diríamos que a prova é pragmática em sua forma de experiência crucial segundo a classificação de Balacheff (1987), já que a propriedade é estendida para todos os triângulos. Esse tipo de prova é ilustrado por meio da figura 3 e, mas relativamente a uma das partes da propriedade: a do paralelismo entre o terceiro lado do triângulo em relação ao segmento determinado por dois pontos médios de outros dois lados do triângulo.

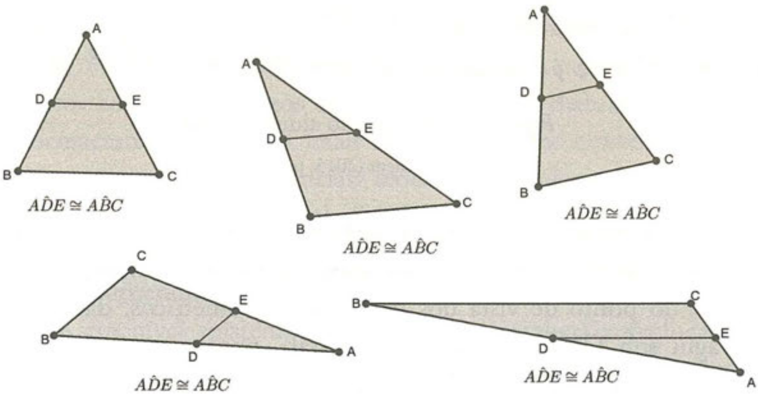
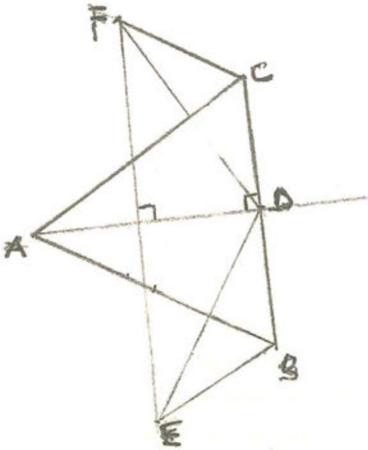


Figura 3. Exemplo de prova pragmática

Fonte: Ordem (2015, p. 162)

Consideremos outra situação que também Ordem (2015, p. 248) apresentou aos seus sujeitos de pesquisa: «considere um triângulo ABC e D o ponto médio do segmento BC. Seja E o simétrico de D em relação à reta AB e seja F o simétrico de D em relação à reta AC. (a) Que relação existe entre os segmentos CF e BE? Por quê? ». Em sua tentativa de resolução, Herculano, um dos participantes da pesquisa, apresentou o seguinte:



«Dado ABC um triângulo e D o ponto médio do segmento BC, E e F simétricos a D em relação a AB e AC respectivamente. C é simétrico a B em relação a D visto que a simetria conserva as medidas [...] D é ponto médio de BC. Se D é simétrico a E e F em relação a AB e AC respectivamente e C e B são simétricos em relação a D, então FC e EB também são simétricos em relação a AD.» (Herculano)

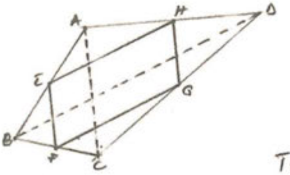
Figura 4. Produção de Herculano

Fonte: Ordem (2015, p. 253)

Herculano faz um desenho com certas condicionantes que acabam deixando o desenho com as propriedades de um tipo especial de triângulos: os triângulos isósceles. Quer dizer, ele fez umas transformações em seu desenho que lhe permitem desenvolver um discurso que valida o que constata só naquele tipo triângulo, mas que exclui outros triângulos que gozam da formulação inicial da tarefa. Por ter buscado um discurso teórico (propriedades), então dizemos que a prova de Herculano é também pragmática, mas em sua forma «exemplo genérico», apesar da propriedade que ele enuncia não ser correta. Quanto à classificação de Harel e Sowder, dizemos que a prova apresentada por Herculano se enquadra em esquema de prova dedutiva. Por Herculano desenvolver um discurso para justificar sua conjectura baseado em propriedades envolvendo simetria, dizemos que agiu sob GII (geometria axiomática natural) e, quanto ao ETG, comporta as propriedades da simetria para além do próprio desenho.

Vamos apresentar mais um exemplo de como utilizar os construtos dados anteriormente para avaliar produções dos alunos. Em mais uma tarefa de sua investigação, Ordem (2015) pediu que seus sujeitos desenhassem vários quadriláteros ABCDE e, em cada um deles, marcassem os pontos médios E, F, G, H dos seus lados. Em seguida, deveriam formular uma conjectura que observassem sobre o quadrilátero determinado por esses pontos médios dos lados e, finalmente, deveriam demonstrar que essa conjectura é uma propriedade válida para qualquer quadrilátero.

Uma das poucas resoluções corretas é de Herculano que passamos a apresentar. Em sua resolução, Herculano traça as diagonais AC e BD do quadrilátero ABCD a partir das quais consegue obter uma reconfiguração que lhe permite recorrer a propriedades e conceitos geométricos como ferramentas conceituais de argumentação, obtendo uma coerência em sua produção, produção essa que do ponto de vista matemático não apresenta erros conceituais nem lógicos, portanto, é uma prova com estatuto de demonstração. Sob a classificação de Balacheff (1987) a prova apresentada por Herculano é intelectual e, na classificação de Harel e Sowder (1998, 2007) trata-se de esquema de prova analítica ou transformacional, uma vez que a argumentação se baseou em propriedades e conceitos válidos: propriedade da base média de um triângulo, definição de paralelogramo, diagonal de um quadrilátero. Do ponto de vista dos paradigmas geométricos, a produção de Herculano se baseou em GII e o ETG, manifestamente apresentado por Herculano, consiste das propriedades e conceitos geométricos utilizados por ele em sua argumentação, incluído o próprio desenho que serviu de meio de apoio. A produção de Herculano é reproduzida na íntegra na figura 5 que se segue.



Sendo [ABCD] um quadrilátero qualquer
e E,F,G,H pontos médios dos lados [AB]; [BC];
[CD] e [DA].

[AC] e [BD] diagonais do quadrilátero

Temos [ABD] e [BCD]; [ABC] e [ACD] Triangulos pertecentes
ao quadrilátero [ABCD].

Pela propriedade da tarefa 2 todos os triangulos possuem
segmentos unindo os pontos médios e estes segmentos são para
lelos ao Terceiro lado: [EF] // [AC] // [GH] e [EH] // [BD] // [FG] se
[EF] // [GH] e [EH] // [FG] sendo [EFGH] um quadrilátero
podemos concluir que este quadrilátero eu um
paralelogramo por possuir lados paralelos dois a dois.

Figura 5. Prova de Herculano sobre os pontos médios
dos lados de um quadrilátero.

Fonte: Ordem (2015, p. 202)

Ainda em relação à mesma tarefa, Ofélia, um dos participantes da pesquisa, deu a seguinte explicação que se apresenta na figura 6.

Todas as figuras feitas, apresentam caracteris
ticas tipicas do losango.
Elas apresentam 4 angulos opostos dois a dois
e iguais, lados Paralelos dois a dois, unindo
os vertices teremos duas mediatrizes que
seram Perpendiculares.

Figura 6. Prova apresentada por Ofélia acerca dos pontos médios
dos lados de um quadrilátero

Fonte: Dados de pesquisa

Perguntada, em entrevista, como havia chegado àquelas conclusões, Ofélia respondeu: «a observação das figuras» (Ordem, 2015, p. 209). Por sua vez, Dário, outro participante da pesquisa, limitou-se a apresentar um desenho e, em seguida a afirmar que a figura era um losango, portanto, também um paralelogramo, como apresentamos o extrato na figura 7.

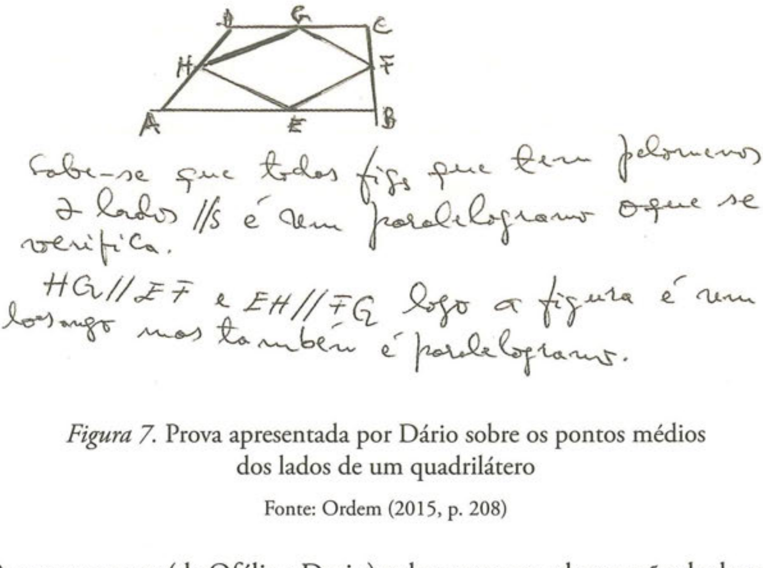


Figura 7. Prova apresentada por Dário sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero

Fonte: Ordem (2015, p. 208)

Por essas provas (de Ofélia e Dario) se basearem na observação de desenhos, dizemos que elas ilustram uma manifestação de esquemas de prova perceptiva, segundo Harel e Sowder (1998, 2007). Por conseguinte, seus autores se basearam nos princípios de GI (Geometria natural) para validar a propriedade. Polos argumentos apresentados se limitarem a polo empírico, desenhos, dizemos que o ETG comporta os desenhos, os instrumentos de construção utilizados e os conceitos geométricos apresentados apesar de não ter havido um modelo teórico que sustenta as conclusões apresentadas. Do ponto de vista de conhecimentos, as duas produções mostram que seus autores manifestaram não saber que exemplos não são aceitos como provas válidas em matemática, isto é, não são demonstrações.

Conclusões e considerações finais

Neste artigo apresentamos alguns referenciais teóricos vigentes em educação matemática e alguns exemplos que ilustram como esses construtos teóricos podem ser utilizados na análise de dados obtidos em uma pesquisa, exemplos esses baseados em nossa própria experiência de seu uso. Ao mesmo tempo, entendemos que essas análises embasadas por esses referenciais teóricos permitem interpretar os resultados na ótica de concepções manifestadas pelos sujeitos acerca de provas e demonstrações em geometria plana, objeto de pesquisa nesse estudo de onde extraímos os exemplos. Por exemplo, as duas últimas ilustrações apresentadas manifestam explicitamente a concepção de que evidências empíricas podem ser tomadas por algumas pessoas como argumentos de uma demonstração, concepção essa que se desvia do sentido de demonstração aceito em matemática - um processo segundo o qual uma proposição é inferida de outra baseando-se unicamente em axiomas ou propriedades previamente estabelecidas. Por sua vez, o exemplo apresentado na figura 5 expressa a concepção de prova segundo os princípios matemáticos, isto é, uma cadeia de proposições que se inferem umas das outras baseando-se unicamente em conceitos matemáticos, em que o desenho simplesmente serve de meio de apoio ao raciocínio, mas nunca de argumento. Com os dois exemplos de concepções, como conclusões de um estudo, tentamos apenas ilustrar como os construtos teóricos podem ser utilizados para tirar conclusões dos dados sobre um problema em estudo numa pesquisa.

Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino aprendizagem.* In: REUNIÃO ANUAL DE ANPED, 30: Caxambu. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes_30/prova.pdf>. Acesso em: 25 de maio 2008.

Balacheff, N. (1987). *Processus de prevuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.

Chacón, I. Mª. G., Kuzniak, A. (2011). Les espaces de travail géométrique de futurs professeurs em contexte de connaissances. *Annales de didactique e de sciences cognitives.* IREM de Strasbour, 187-216.

Gidden, A. (2013). *Sociologia.* 9.ed. Tradução de Alexandre Figueiredo et al. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Harel, G.; Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In: Alan H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsk (Eds.), *Research in College Mathematics Education III,* 234-283.

Harel, G.; Sowder, L. (2007). Toward comprehensive on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning.* National Council of Teachers of mathematics.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradgms. In: *Proceedings of European Research in Mathematics Education III. Working Group 7.* Disponível em: <http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_houdement_cerme3.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2011.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et enseingnement de la géométic. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg, 11, pp. 175-193.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial: estudos selecionados sobre tradição e mudança científica.* Tradução Marcelo Amaral Penna-Forte – São Paulo: Editora Unesp, 408p.

Ordem, J. (2010). *Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Ordem, J. (2015). *Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Visualización de cuadriláteros en el registro figural dinámico[1]

Visualization of quadrilaterals in the dynamic figural register

Cecilia Gómez Mendoza[2]
Jesús Victoria Flores Salazar[3]

Resumen

El presente artículo tiene como objetivo analizar cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización en el registro figural dinámico, contribuye en la formación de profesores de nivel secundario. En nuestro estudio, tomamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica para realizar el análisis *a priori* y *a posteriori* de los procesos deductivos que se evidencian en el desarrollo y coordinación de sus aprehensiones de tres profesores participantes. Como marco teórico utilizamos la Teoría de Registros de Representación Semiótica y focalizamos nuestro interés en los tratamientos en el registro figural. Concluimos que los participantes desarrollaron y coordinaron su aprehensión perceptiva y operatoria empleando para ello diferentes tratamientos en el registro figural dinámico, con ayuda del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra.

Palabras claves: *aprehensiones; visualización; GeoGebra.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a20089928@pucp.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. jvflores@pucp.pe

Abstract

This article aims to analyze how a study on quadrilaterals, which develops the visualization process in the dynamic figural register, contributes to secondary teacher training. In our study we take some aspects from Didactic Engineering to make both *a priori* and *a posteriori* analyses of the deductive processes that are evident in three participating teachers' development and coordination of apprehensions. We used the Theory of Registers of Semiotic Representation as a theoretical framework, focusing our interest on treatments in the figural register. We concluded that the participants developed and coordinated their perceptive and operational apprehensions using different treatments in the dynamic figural register, supported by the dynamic geometry environment (DGE) GeoGebra.

Keywords: *apprehensions; visualization; GeoGebra.*

Consideraciones iniciales

A partir de las dificultades y errores que observamos en los estudiantes cuando desarrollan problemas de geometría, surge nuestro interés en analizar cómo se desarrolla el proceso de visualización, en el estudio de cuadriláteros, cuando se utiliza el registro figural dinámico en un grupo de profesores de educación secundaria, ya que son ellos los que van a trabajar directamente con los estudiantes, presentar el contenido y diseñar sus estrategias de enseñanza. Nos basamos en la Teoría de Registro de Representación Semiótica y su ampliación a la visualización de Duval (2011). En ese sentido, el autor afirma que la deconstrucción dimensional constituye el proceso central de la visualización en geometría que se da con el desarrollo de la aprehensión perceptiva y operatoria, en el registro figural en coordinación con la aprehensión discursiva.

En esa misma línea de pensamiento, las investigaciones realizadas en el área de educación matemática por Almeida (2007) y Flores y Moretti (2006) en geometría muestran que existe la necesidad de desarrollar en los sujetos habilidades visuales que les permitan ver en una representación la forma y posición, a fin de que pueda descomponer una figura en subfiguras para luego asociarlas. Según los autores, la falta de estas habilidades origina errores en la resolución de problemas de geometría; además, propicia interferencias entre el objeto matemático y su representación; es decir, se da mayor importancia a lo visual que a lo conceptual.

Con respecto a la influencia de los ambientes de geometría dinámica (AGD), Laborde (1994) y Larios (2006) señalan que su empleo influye en la lectura espacial del objeto geométrico representado; es decir, facilita la identificación de todas las propiedades del objeto. Además, Salazar (2009) afirma que una de las funciones que caracteriza a estos ambientes es la función «arrastre», cuyo uso proporciona diferentes posiciones y configuraciones de una misma figura, además de permitir realizar tratamientos de manera diferente a los que se efectúan en ambientes no dinámicos. A partir de ello, la autora define el registro figural dinámico. Estas investigaciones dan a conocer la problemática y señalan la relevancia de desarrollar investigaciones que involucren el proceso de visualización, centrándose en estudiar cómo se desarrolla el proceso de visualización, desde la perspectiva de Duval (2011), en un grupo de profesores de nivel secundario, cuando movilizan nociones de cuadriláteros usando el registro figural dinámico en el AGD GeoGebra.

Elementos teóricos

Como elemento teórico, tomamos la teoría de Registros de Representación Semiótica. Uno de los aspectos que Duval (2011) señala es que las figuras geométricas, el lenguaje algebraico, gráfico y la lengua natural representan diferentes registros de representación semiótica, cada uno de los cuales permite que los sujetos realicen diferentes operaciones cognitivas. Un registro de representación semiótica, según el autor, debe permitir tres actividades cognitivas: formación, tratamiento (vinculado a las modificaciones internas que se pueden realizar en ese registro) y conversión, que es una transformación externa que hace que se pase de una representación a otra. Para nuestro estudio, nos centraremos en el registro figural, porque los tratamientos realizados en el registro nos conducirán a la solución del problema. El investigador afirma que en el registro figural, las figuras geométricas combinan dos tipos de variación: la variable visual cualitativa (forma) y la variable dimensional (unidades figurales): 0 (un punto), 1 (una línea) o 2 (superficie).

Para Duval (2011), las figuras tienen un papel intuitivo y heurístico, porque permiten hacer tratamientos tales como: dividir, deducir, rotar y trasladar lo que permite anticipar los resultados o seleccionar una solución de un problema. La función heurística de una figura geométrica se sustenta, según el autor, en el tipo de aprehensión: la *aprehensión perceptiva*, caracterizada por la identificación de las formas; la *aprehensión secuencial*, que se refiere al orden secuencial de construcción de la figura; la *aprehensión discursiva*, con afirmaciones matemáticas, se establece una interacción entre los tratamientos figurales y discursivos y, finalmente, la *aprehensión operatoria*, que trata de las modificaciones que se pueden realizar en una figura, y son de tres tipos: *óptica, posicional y mereológica.* Esta última nos interesa porque realizaremos la descomposición de una figura en subconfiguraciones para luego reconfigurarla.

Sin embargo, como nos interesa estudiar cómo se desarrolla el proceso de visualización de cuadriláteros en el registro figural dinámico cuando se interactúa con el AGD GeoGebra, enseguida presentamos cómo se configura este registro. En ese sentido, afirmamos que las tres actividades cognitivas fundamentales para la constitución de un registro de representación semiótica —es decir, formación, tratamiento y conversión— se realizan de manera diferente que en ambientes no dinámicos, ya que estos ambientes poseen dos funciones fundamentales que son el arrastre y la manipulación directa.

Así, la formación en AGD puede darse cuando el sujeto, para representar un determinado objeto geométrico, escoge, de la barra de herramientas, una herramienta determinada que le permite crear la figura deseada. Asimismo, las reglas de formación de una representación semiótica en estos ambientes también dependen de cómo han sido definidas las unidades figurales elementales y su combinación, ya que el sujeto debe seguir una secuencia de construcción.

En cuanto a los tratamientos en AGD, estamos de acuerdo con Duval (2011) cuando afirma que el uso de computadoras (*software*) permite acelerar los tratamientos de una figura y muestra de manera más rápida y precisa la solución de un determinado problema. Sin embargo, destacamos que la celeridad de tratamientos se realiza cuando el sujeto usa las funciones de manipulación directa y arrastre del AGD, porque estas funciones permiten realizar, en la figura: cambio de posición, cambio de longitud de sus lados y operaciones de reconfiguración de manera instantánea. La figura 1 muestra cómo se pueden realizar los tratamientos en AGD.

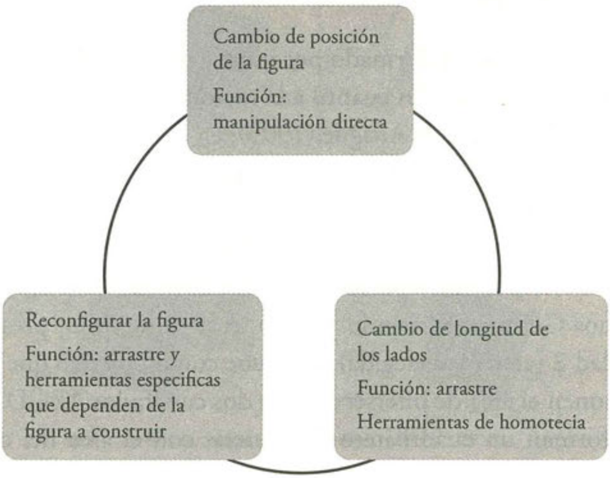


Figura 1. Tratamientos en AGD.

Sin embargo, debemos señalar que esos tratamientos no se realizan necesariamente por separado o de manera secuencial, porque en AGD se pueden realizar estos de manera simultánea.

En el caso de la conversión, Duval (2011) menciona que es una transformación externa de una representación en otra y que conserva una parte o la totalidad del contenido de la representación inicial. En ese sentido, la conversión que se realiza de lengua natural a una representación figural es llamada conversión de ilustración; mientras que la conversión inversa es una descripción. Señala también que la ilustración, a pesar de no ser una conversión compleja, sí es pertinente porque permite a los sujetos solucionar un determinado problema.

Por ejemplo, para dar solución a un problema de geometría que es dado en lengua natural, el sujeto que interactúa con AGD utiliza las diferentes herramientas del *software*, así como las funciones arrastre y manipulación directa que le permiten realizar la representación figural y validar sus conjeturas para solucionar el problema dado.

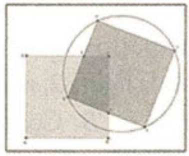
La investigación

El grupo elegido fue conformado por quince profesores de matemática en formación continua. En cuanto a la metodología, nos apoyamos en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995); en ese sentido, realizamos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada actividad. Las actividades propuestas fueron estructuradas en una secuencia de cuatro actividades. En el artículo presentaremos la segunda actividad de la secuencia y analizaremos las acciones, por separado, de tres profesores participantes que llamaremos Gustavo, Fernando y Lidia. A continuación, presentamos la actividad 2 (actividad elegida) que tiene como objetivo que los sujetos relacionen el área de intersección de dos cuadrados ABCD y EFSH cuando forman un cuadrilátero cualquiera, con el área del cuadrado ABCD.

Abra el archivo Actividad_2 en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD

Manipule el punto S de tal manera que la intersección de las figuras forme la configuración de un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación dd área formada por la intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área dd software).



Pensamos *a priori* que los profesores utilizarán la función arrastre del GeoGebra, la que les ayudará a tener diferentes configuraciones de la intersección de las figuras, ya sea en la forma, posición e invariantes geométricos (relación de medidas angulares) y esto podría facilitar el desarrollo de las aprehensiones perceptivas y operatorias del registro figural. Como se puede observar en las posiciones I, II, III y IV de la figura 2, el cuadrilátero de medida de área M gira alrededor del punto E, ningún par de lados es paralelo y las invariantes son dos ángulos internos que miden 90°.

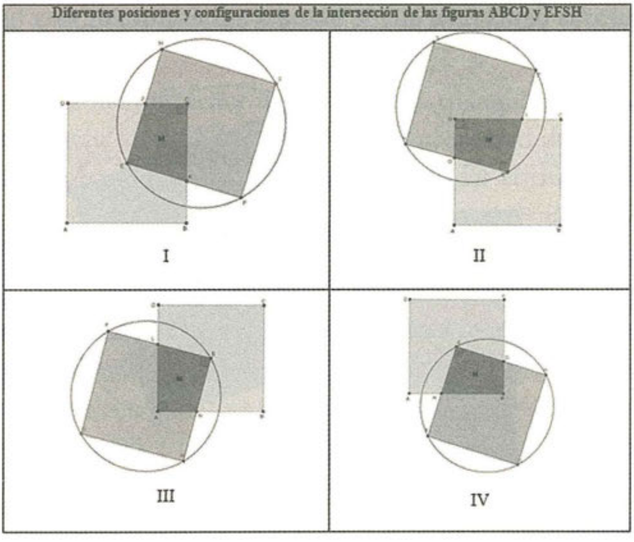


Figura 2. Diferentes posiciones y formas de intersección de las figuras ABCD y EFSH.

En la situación propuesta, los profesores deben establecer la relación de la medida del área de la intersección de las figuras ABCD y EFSH con respecto a la del cuadrado ABCD. Pensamos que si toman la posición I de la figura 2, realizarán el trazo de la mediatriz de dos lados consecutivos $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$. Como consecuencia, las mediatrices dividirán al cuadrado ABCD y al cuadrilátero EJCK en subfiguras; pero, con el arrastre del vértice S, podrán modificar el número de subconfiguraciones del cuadrilátero ABCD y EFSH como figuras superpuestas. Por ejemplo, en la figura 3, observamos en el cuadrado ABCD las siguientes subfiguras: dos cuadrados, dos triángulos y dos trapecios y si observamos el cuadrilátero EJCK (como área de intersección de los cuadriláteros ABCD y EHSF) se subdivide en un cuadrilátero cualquiera y un triángulo. En este caso, ellos habrán realizado una modificación mereológica para establecer una relación entre las nuevas subfiguras (regiones triangulares y cuadrangulares). De acuerdo con Duval (2011) la secuencia de subfiguras (triángulos y cuadriláteros) de la misma dimensión los conducirá a identificar la figura final que se muestra a continuación (ver figura 3).

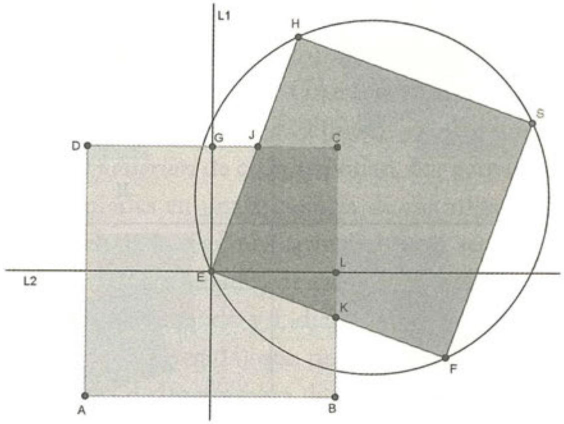


Figura 3. Trazo de mediatrices L1 y L2 sobre el cuadrado ABCD.

Esperamos que al arrastrar el vértice S puedan discriminar las regiones triangulares y cuadrangulares, lo que nos indicaría que están desarrollando su aprehensión operatoria como mostramos en la figura 4.

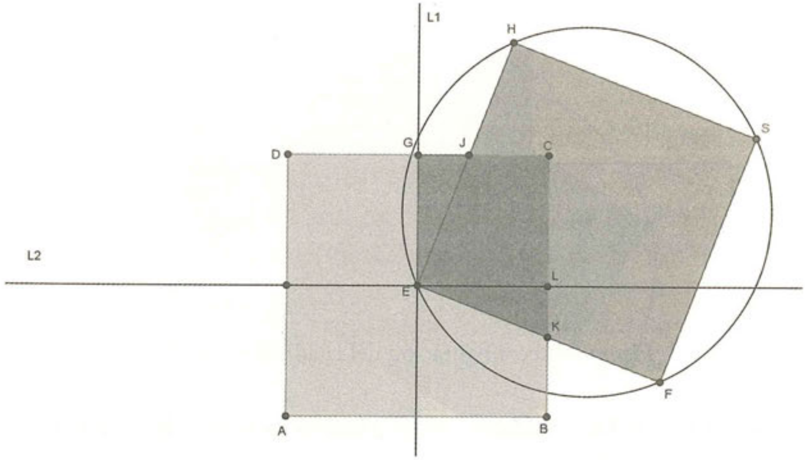


Figura 4. Modificación mereológica en los cuadrados ABCD y EFSH.

A partir de la identificación de las regiones triangulares, suponemos que relacionarán los ΔEKL y ΔEJG con la propiedad de congruencia de triángulos (caso ALA), al comparar y trasladar el triángulo ΔEKL sobre la zona triangular ΔEJG. Esta acción caracteriza una aprehensión operatoria de reconfiguración, construyendo un contorno diferente al anterior, como se puede apreciar en la figura 5. La figura cumple su función heurística por la diversidad de operaciones que los profesores pueden realizar sobre ella.

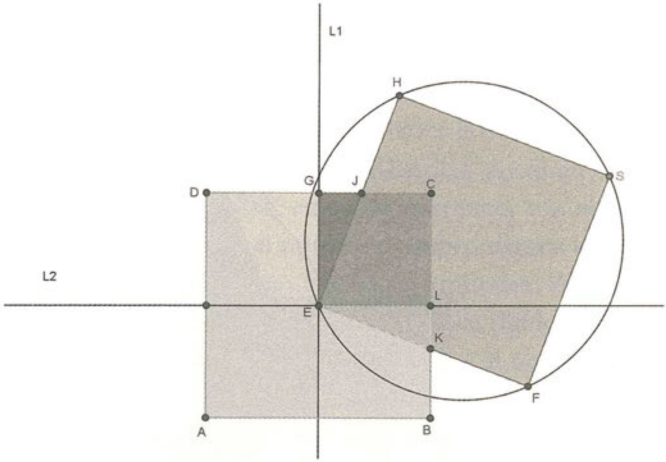


Figura 5. Reconfiguración del cuadrilátero ELCJ.

Esperamos que los profesores en el proceso articulen las aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, para lograr una articulación global, y desarrollen la visualización como condición necesaria para el aprendizaje de la geometría.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo

El profesor Gustavo, como se observa en la figura 6, ha tomado una estrategia diferente a lo previsto *a priori*. Él agrega nuevos elementos sobre el área del cuadrado ABCD y realiza las siguientes acciones: marca los puntos medios de los lados BC y DC, traza el polígono MCNE, relaciona los segmentos MJ, NK, EJ y EK midiendo cada segmento, los triángulos MEJ y ENK nombrándolos como «S» y «T» respectivamente, y el polígono EJCN nombrándolo «V». Lo que implica que la figura cumple su función heurística y el profesor Gustavo, apoyándose en las herramientas del GeoGebra —puntos medios y la función «arrastre»—, puede reevaluar sus acciones, tal como lo afirma Laborde (1994). Según Duval (2011), la secuencia de subfiguras lo conducirá a la solución del problema. Pensamos que la medición de segmentos es para confirmar la congruencia de triángulos EMJ y ENK.

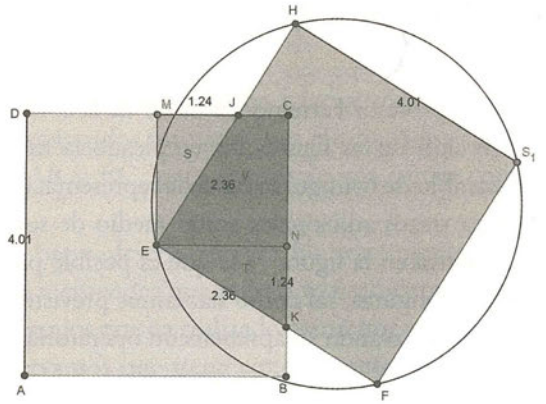


Figura 6. Representación figural realizada por el profesor Gustavo.

En el discurso que describe Gustavo evidenciamos que describe las aprehensiones operatorias como: el cuadrilátero EJCK tiene como medida de área la suma de V y T e igual a la cuarta parte del cuadrado, las áreas S y V forman un cuadrado, entonces las áreas S y T son iguales, lo que demuestra una asociación de subfiguras y concluye de la siguiente manera: las áreas T y V suman la cuarta parte del área del cuadrado.

Observamos que no ha recurrido a definición o teorema alguno, pero sí a una descripción de los procesos deductivos, apoyado en los tratamientos realizados en la representación que lo justifican. Además, existe una congruencia entre la representación figural y la descripción que realiza.

Su justificación argumentativa[4], fundamentada en la aprehensión operatoria, no implica que esté a la altura de demostrar el resultado, tal como lo afirma Duval (2011); pero, la reconfiguración realizada en la figura implica que ha visualizado la solución del problema.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PRODUCCIÓN DEL PROFESOR FERNANDO

Observamos que el profesor Fernando, a partir de la configuración inicial de la intersección de las figuras, ha empleado la función arrastre porque hay un cambio de configuración de la representación propuesta. El profesor realiza trazos adicionales como medio de soporte perceptivo, según se muestra en la figura 7, lo que es posible para identificar una secuencia de subfiguras, tal como habíamos previsto *a priori*, ello implica que está desarrollando su aprehensión operatoria.

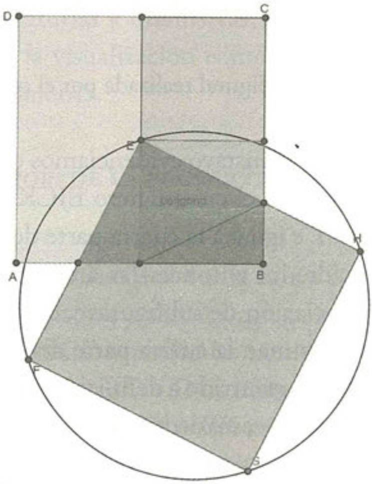


Figura 7. Representación figural realizada por el profesor Fernando.

[4] Justificación argumentativa: descripción que tiene congruencia entre la aprehensión operatoria y la actividad discursiva.

En su discurso, realizado en el GeoGebra, el profesor Fernando (ver figura 8) escribió lo siguiente:

Formo un cuadrilátero y ubico puntos medios de los lados y trazo segmentos, así puedo visualizar triángulos que, cuando los uno, formo un cuadrado.

Figura 8. Discurso del profesor Fernando.

En el discurso, se observa que ha relacionado y reconfigurado mentalmente los triángulos formados por el punto E y los puntos medios de los lados AB y BC, para encontrar una nueva configuración: un cuadrado.

Con una breve descripción de los tratamientos realizados en la figura, nos da a entender que trabaja básicamente en el registro figural en el que pensamos que ha realizado mentalmente una reconfiguración. Aunque observamos que tiene conocimientos matemáticos, notamos que desarrolla pocos tratamientos en el registro discursivo. Pensamos que el profesor Fernando ha visualizado la solución del problema, pero tiene dificultades para expresar la solución del problema.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia

En el caso de la profesora Lidia, creemos que, con la ayuda del arrastre del GeoGebra, realizó diferentes configuraciones de las áreas de las figuras ABCD y EFSH y tomó una configuración como punto de partida; para realizar el análisis de la figura, trazó mediatrices y adicionó otro elemento, una recta que pasa por los puntos A y C. Creemos que realizó estas acciones como medio de apoyo perceptivo y desarrolló de su aprehensión operatoria, lo que permitió identificar otras subconfiguraciones, como regiones triangulares.

Estas acciones demuestran la función mediadora del GeoGebra, además, suponemos que, al aplicar el arrastre, percibió la congruencia de los lados de algunas subconfiguraciones y la relación de los triángulos EOJ y EKG.

Al emplear la herramienta «compás», verificó su percepción y trasladó la distancia del segmento OJ al segmento GK con el fin de comprobar su congruencia (ver figura 9). A diferencia de lo que pensamos *a priori*, la profesora compara y verifica la congruencia solo de dos lados de los triángulos EOJ y EKG para fundamentar la congruencia de los triángulos con el caso LLL. Finalmente realiza reconfiguraciones tal cual lo menciona en su discurso: *haciendo un traslado del triángulo rectángulo GEK a la posición del triángulo EOJ, ya que ambos triángulos son congruentes por el caso LLL.*

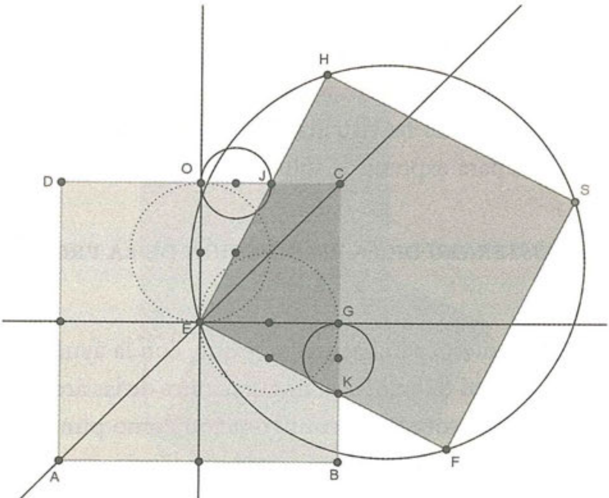


Figura 9. Representación figural realizada por la profesora Lidia.

En comparación con el profesor Gustavo, ambos recurrieron a la medición para relacionar la medida de los lados de los triángulos.

El profesor Gustavo midió y relacionó las subfiguras como suma de áreas; la profesora Lidia empleó la herramienta compás para trasladar distancias y relacionar los triángulos por congruencia de sus lados. Solo la profesora mencionó la propiedad que los relaciona. En cuanto al profesor Fernando, él también realizó trazos, pero su justificación, según se puede observar en el discurso que da, se guio de su percepción y realizó mentalmente operaciones de reconfiguración.

En los tres casos, los profesores han desarrollado la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, por lo que podemos conjeturar que han visualizado la solución del problema; sin embargo, pensamos que su aprehensión discursiva es aún incipiente.

Consideraciones finales

Los conocimientos matemáticos previos tales como congruencia de triángulos y el conocimiento de los profesores de herramientas y funciones del AGD GeoGebra facilitaron los procesos de visualización de cuadriláteros.

Cada profesor recurrió a diferentes estrategias para encontrar la solución del problema. El profesor Gustavo, luego de relacionar triángulos congruentes a partir de mediciones, recurrió a la suma de áreas; el profesor Fernando solo se guio de su percepción y reconfiguraciones hechas en la mente; mientras que la profesora Lidia recurrió a mediciones, empleando la herramienta «compás», ello sustentado con propiedades de congruencia para luego reconfigurarlas en una nueva figura, lo que nos indica que han desarrollado y articulado su aprehensión perceptiva, operatoria.

El empleo de las herramientas «punto medio», «segmento» y «recta» del GeoGebra permitió que los participantes realicen tratamientos para descomponer la figura en subfiguras y, a partir de la relación de ellas, buscar una solución al problema planteado. En ese sentido, el registro figural dinámico facilitó el desarrollo de estos tratamientos dinámicos.

Por otro lado, la función «arrastre» también cumplió un papel importante porque, a través de los cambios de configuración, los participantes podían relacionar unidades de dimensión 2 y luego relacionar unidades de dimensión 1 y 0.

Finalmente, la investigación permitió comprender cómo los profesores participantes articulan sus aprehensiones en el registro figural dinámico y cómo el AGD GeoGebra influyó en el desarrollo de la visualización de cuadriláteros.

Referencias

Almeida, I. & Santos, M. C. (2007). A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos. *XVIII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico–GRAPHICA*. Paraná.

Duval, R. (2011). *Semiósis y pensamiento humano*. Myriam Vega Restrepo (traducción). Cali: Merlin I.D.

Flores, C., Moretti, M. (2006). As Figuras geométricas suporte para a aprendizagem em geometria: um estudio sobre a heurística e a reconfiguração. *REVEMAT, 1*(1), 5-13.

Laborde, C., Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-geomètre. *Em Aberto, 14*(62). Recuperado de http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/search/results

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *RELIME, 9*(3), 361-382. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/

Salazar, J. V. F. (2009). *Génese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações geométricas no espaço*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Um estudo sobre as relações entre o ensino de Estatística na Educação Básica e o ensino de Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática[1]

A study on the relationship between teaching Statistics in Basic Education and teaching Statistics in courses for the Bachelor's Degree in Mathematics

Amari Goulart[2]
Cileda De Queiroz e Silva Coutinho[3]

Resumo

Este artigo tem por objetivo discutir alguns aspectos relativos ao desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos da Educação Básica. Por meio de uma revisão bibliográfica e análise documental, organizada segundo dois eixos: Probabilidade e Estatística na formação de professores de matemática, Probabilidade e Estatística no livro didático de matemática. Como resultado, podemos indicar a identificação de um descompasso entre os documentos oficiais referentes à formação de professores e aos conteúdos a serem abordados na escola básica. Indicamos também uma concepção que conduz à abordagem tecnicista, tanto nos cursos de Licenciatura como nos livros didáticos destinados à Escola Básica.

Palavras-chave: *formação de Professores; ensino de estatística, letramento estatístico.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), moivre2@yahoo.com.br

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), cileda@pucsp.br

Abstract

This article aims to discuss some aspects related to the development of statistical literacy in Basic Education students, by means of a bibliographical research and a documentary analysis, organized according to two axes: Probability and Statistics in math teacher training, and Probability and Statistics in mathematics textbooks. As a result, we have identified a mismatch between the official documents related to teacher training and the content to be dealt in basic school. We also noticed a conception that leads to a technical approach, both in degree courses as in the textbooks for Basic School.
Keywords: *Teacher training; Statistics teaching, statistical literacy.*

Introdução

A Educação Básica no Brasil totaliza doze anos de escolaridade obrigatória, dividida em Ensino Fundamental, com duração de nove anos, e Ensino Médio, com duração de três anos. Nela, são atendidas crianças e jovens dos seis aos dezoito anos de idade.

A partir da promulgação, pelo Ministério da Educação (MEC), dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997, conteúdos de Probabilidade e Estatística passam a ser sugeridos no currículo de Matemática da Educação Básica brasileira, desde os anos iniciais de escolaridade (BRASIL, 1997, 1998, 1999).

Tais conteúdos estão presentes no bloco intitulado «Tratamento da Informação» no documento destinado ao Ensino Fundamental e no eixo temático «Análise de dados» no documento voltado ao Ensino Médio.

Além dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, o ensino de Probabilidade e Estatística também é sugerido em diversos documentos estaduais e municipais no Brasil, uma vez que, segundo Galian (2014):

> [...] os PCN ressoaram com força junto aos elaboradores de currículos, servindo de guia para a concepção e o desenvolvimento da maioria das propostas curriculares brasileiras. (Galian, 2014, p. 651).

Entretanto, apesar destes esforços, o ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica brasileira ainda apresenta alguns entraves que impossibilitam o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos da Escola Básica.

Neste texto, abordaremos dois destes entraves que consideramos os mais relevantes. São eles: o tratamento destes tópicos na formação dos professores de matemática e a forma como estes conteúdos são apresentados nos livros didáticos de matemática destinados aos alunos da Educação Básica.

Após estas análises, apresentaremos nas conclusões finais algumas possíveis ações a serem tomadas com o objetivo de permitir o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e, consequentemente, dos alunos da Escola Básica.

Probabilidade e Estatística na formação de professores de matemática

Devido ao recorte deste trabalho, o texto a seguir aborda o ensino da Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática, que formam professores para atuar nos quatro últimos anos do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Dentre os problemas apontados pela literatura acadêmica, referentes ao ensino de Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática, três merecem destaque. São eles:

1. A baixa carga horária destinada ao Ensino de Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática;
2. A concepção de ensino de Probabilidade e Estatística adotada nestes cursos;
3. A desarticulação entre os documentos voltados para a Educação Básica e os documentos voltados para a formação do professor de matemática no que se refere ao ensino de Probabilidade e Estatística.

O primeiro aspecto foi detectado por Viali (2008) em uma pesquisa que tinha por objetivo verificar se o professor de matemática é adequadamente preparado para ensinar Probabilidade e Estatística na Escola Básica. O autor analisou uma amostra de 125 currículos de cursos selecionados aleatoriamente do total de cursos de Licenciatura em Matemática existentes no Brasil, concluindo que os tópicos relacionados à Probabilidade e Estatística são abordados, em geral, em uma única disciplina de 60 horas.

Em relação ao segundo aspecto, o autor constatou que a disciplina oferecida nestes cursos apresenta a Estatística como uma disciplina da Matemática. Esta concepção leva a uma abordagem pela qual a ênfase recai sobre a manipulação de algoritmos, sem a preocupação com os significados dos conceitos estatísticos. Tal enfoque, segundo Ben-Zvi e Garfield (2004), não conduz os alunos na construção do pensamento estatístico e, consequentemente, não desenvolve o raciocínio estatístico.

O terceiro aspecto foi abordado por Silva (2011), que analisou as possíveis consequências da desarticulação entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do Professor de Matemática quanto à presença da Probabilidade e Estatística no currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática.

O autor tomou como referência o Projeto Pedagógico de Curso (PPC) de sete instituições de ensino superior que obtiveram nota 5 (a nota máxima) no Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), apontando que os problemas na abordagem de Probabilidade e Estatística na Licenciatura em Matemática começam com a ausência de sua obrigatoriedade nos cursos de Licenciatura, segundo o autor:

> [...] o Parecer CNE/CES 1.302/2001 provoca um abismo entre a abordagem da estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura e a prática efetiva deste tema na educação básica. O problema inicia-se pela ausência de obrigatoriedade da existência de uma disciplina que trate deste assunto no curso de licenciatura, pois este tema é considerado indispensável somente no bacharelado. (Silva, 2011, p. 760)

Assim como Viali (2008), o autor também aponta que, em geral, os cursos analisados também oferecem uma única disciplina. Ambos defendem que tal carga horária é insuficiente para uma boa formação de futuros professores de Matemática da Escola Básica, ideia com a qual compartilhamos.

Partindo dos três aspectos apontados acima, Goulart (2015) procurou determinar quais são as relações que podemos estabelecer entre o ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica e o Ensino de Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática, sendo que o objetivo de tais relações é a potencialização do desenvolvimento do Letramento Estatístico dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Para responder à sua questão de pesquisa, foram analisados documentos e exames oficiais, além de duas coleções de livros didáticos destinados à Educação Básica, utilizando como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e sua perspectiva ecológica. Com isto, o autor concluiu que, embora os objetos estatísticos «vivam» na Escola Básica e nos cursos de formação de professores de Matemática, não foi possível encontrar relações entre eles que visem o aprimoramento do letramento estatístico na formação dos futuros professores. Consequentemente o desenvolvimento do letramento estatístico de seus futuros alunos também fica comprometido.

Os trabalhos elaborados por Viali (2008), Silva (2011) e Goulart (2015) apresentam indícios de que o Professor de Matemática não está preparado, e nem sendo preparado adequadamente, para ensinar Probabilidade e Estatística na Escola Básica. Tal ponto de vista também é apresentado por Santos (2005), Bayer et al. (2005) e Magalhães (2010). Entretanto, embora não recebam uma formação adequada nos cursos de Licenciatura, Costa (2007) detectou que os professores procuram inserir conteúdos estatísticos em suas aulas, tendo como principal aliado nesta tarefa o livro didático.

Por isso, consideramos a abordagem dos livros didáticos de Matemática para os conteúdos estatísticos como o segundo entrave que impossibilita o desenvolvimento do letramento dos alunos da Escola Básica. Portanto. Em consequência, optamos por analisar como os conteúdos de Probabilidade e a Estatística são abordados neste material.

Probabilidade e Estatística no livro didático de matemática

Segundo Silva (1996) o livro didático possui uma tradição tão forte dentro da cultura escolar brasileira que a sua adoção independe da vontade dos professores. Tal tradição, segundo o autor, é sustentada por vários elementos, tais como: a organização escolar, o olhar saudosista dos pais de alunos, o marketing das editoras de livros didáticos e o próprio imaginário que orienta as decisões pedagógicas dos professores.

Devido à precária situação do sistema educacional brasileiro, Dante (1996), Lajolo (1996), E. T. Silva (1996) e M.A. Silva (2012) defendem que tal situação permite ao livro didático determinar conteúdos e condicionar estratégias de ensino. Tal fato marca de forma decisiva os conteúdos a serem ensinados e a forma como tais conteúdos são ensinados. Além disso, conforme apontou Costa (2007), na ausência de uma formação adequada em relação aos conteúdos de Probabilidade e Estatística, os professores têm como principal material de apoio o livro didático.

Em relação aos conteúdos de Probabilidade e Estatística presentes nos livros didáticos destinados à Escola Básica, Goulart (2015) analisou duas coleções de livros didáticos, uma destinada aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental e a outra destinada ao Ensino Médio, tendo como objetivo determinar quais são as organizações matemáticas e quais são as organizações didáticas presentes nestas coleções, uma vez que, conforme já citado acima, o livro didático determina o que se ensina e como se ensina o que se ensina.

Em relação às organizações matemáticas presentes no livro didático, o autor concluiu que os conteúdos encontrados são similares aos propostos nos PCN e aos encontrados na Matriz de Competências e Habilidades do ENEM. Tal fato talvez ocorra devido à influência do ENEM, na mudança de concepção do ensino de Matemática apresentada nos livros didáticos.

Paiva (2003) analisou as influências exercidas pelo ENEM nos livros didáticos e na disciplina de Matemática. O autor analisou duas coleções voltadas para o ensino médio anteriores a 1998 e duas posteriores a 2002. Ele percebeu um aumento significativo nas atividades enfocando habilidades e competências. Porém, ele salienta que esse tipo de atividade está limitado aos mesmos conteúdos do ENEM. A partir de suas análises, o autor sugere que o livro didático busca uma nova identidade para a disciplina de Matemática, o que parece estar sendo realizada a partir da matriz de competências e habilidades do ENEM.

Em relação às organizações didáticas, a abordagem utilizada para ensinar Probabilidade e Estatística apresentada nestas coleções é a utilização de aspectos procedimentais e a manipulação de fórmulas e algoritmos.

Quando uma organização didática enfatiza tais aspectos, Gáscon (2003) classifica-a como organização didática tecnicista. Segundo este autor, tal organização traz implicitamente a concepção de que ensinar e aprender matemática é equivalente a ensinar e aprender algoritmos, com todo o reducionismo que isto implica. Nota-se que é a mesma concepção encontrada por Viali (2008) no ensino de Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Vale a pena voltar a salientar que, em se tratando do ensino de Probabilidade e Estatística, tal concepção não favorece o desenvolvimento do Letramento Estatístico.

Conclusões

Neste artigo, abordamos dois aspectos que consideramos problemáticos e que afetam o ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica: o ensino de tais conteúdos nos cursos de Licenciatura em Matemática e a forma como eles são apresentados nos livros didáticos de matemática. Sendo assim, levantamos três pontos que passamos a discutir a seguir.

O primeiro ponto é a desarticulação entre os documentos oficiais que abordam o ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica e os documentos que abordam o ensino de Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática. Tal desarticulação deve-se ao fato de que enquanto os primeiros defendem a inserção destes conteúdos desde as séries iniciais, nos segundos, que se referem a formação dos profissionais que irão atuar na educação básica, tais conteúdos estão ausentes.

Entretanto, apesar desta ausência nos documentos, foi detectada a existência de pelo menos um curso de 60 horas nos cursos de Licenciatura em Matemática. Porém tais cursos apresentam a concepção de que ensinar e aprender Estatística é ensinar e aprender matemática, levando a uma abordagem em que prevalece a manipulação de fórmulas e algoritmos. Tal concepção é, ao nosso ver, o segundo ponto problemático porque ela não permite o desenvolvimento do letramento estatístico dos futuros professores e, consequentemente, eles não desenvolverão o letramento estatístico de seus alunos.

O terceiro ponto é que tal concepção também se encontra presente nos livros didáticos adotados na Educação Básica, o que reforça neste profissional uma concepção de ensinar e aprender Probabilidade e Estatística que não visa o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos da Educação Básica.

Para quebrar tal círculo vicioso, fazem-se necessárias algumas ações. A primeira, de natureza governamental, é a elaboração de documentos que articulem os documentos da Educação Básica com aqueles voltados para a formação de professores.

A segunda refere-se a mudanças na maneira como se aborda Probabilidade e Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática. É necessário abandonar o tecnicismo que privilegia a manipulação de fórmulas e algoritmos em favor de uma abordagem mais crítica (nos termos da Análise Exploratória de Dados), principalmente das medidas de tendência central e das medidas de variabilidade.

Pensamos que, educados desta maneira, os futuros professores podem utilizar com maior criticidade os livros didáticos voltados para a Educação Básica, que apresentam características tecnicistas.

Enquanto tal mudança não é implantada nos cursos de formação de professores, podem ser criados, com o fomento do poder público, materiais e livros paradidáticos com o objetivo de auxiliar os professores que já atuam na Educação Básica. No Brasil, já temos experiências positivas neste aspecto.

Atacando estes três pontos, articulação de documentos, formação de professores e matérias didáticos voltados para o ensino de Probabilidade e Estatística, podemos caminhar rumo ao letramento estatístico de nossos alunos da Escola Básica, necessário cada vez mais no mundo atual, onde somos bombardeados diuturnamente de informações das mais variadas fontes possíveis.

Referências

Bayer, A. *et. al.* (2005). Preparação do formando em Matemática-Licenciatura para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio. *V Encontro Nacional de Pesquisa em Ciências,* Bauru, Brasil.

Ben-Zvi, D.; Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: Goals, Definitions and Challenges. *In: Ben-Zvi, D.; Garfield, J. (orgs). The challenge of developing statistical lireracy, reasoning and Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 3-15.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasíla: MEC/SEF, 142p.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasíla: MEC/SEF, 148p.

Brasil. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.* Brasíla: MEC/SEM, 58p.

Costa, A. (2007). *A Educação Estatística na formação do professor de matemática.* (Dissertação de Mestrado). Universidade São Francisco, Itatiba, Brasil.

Dante, L. D. (1996). Livro didático de matemática: uso ou abuso?. *Em aberto, 16*(69), 52-58.

Galian, C. V. A. (2014). Os PCN e a elaboração de propostas curriculares no Brasil. *Cadernos de Pesquisa,153*(44), 648-669.

Gáscon, J. (2003). La necessidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa, 2*(5), 11-37.

Goulart, A. (2015). *Um estudo sobre a abordagem dos conteúdos estatísticos em cursos de Licenciatura em Matemática: Uma proposta sob a ótica da Ecologia do Didático.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Lajolo, M. (1996). Livro didático: um (quase) manual do usuário. *Em aberto, 16*(69), 3-7.

Magalhães, M. N. (2010). Avaliação do conhecimento de Estatística dos formandos em Licenciatura do IME-USP. *XIX Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Águas de São Pedro, Brasil.

Paiva, M. R. (2003). *A matemática escolar e o ENEM (1998-2002): o aparecimento de uma nova vulgata?.*(Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Santos, C. R. (2005). *O tratamento da informação: Currículos prescritos, formação de professores e implementação em sala de aula.* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Silva, M. A. (2011). A presença da Estatística e da Probabilidade no currículo prescrito de cursos de Licenciatura em Matemática: Uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do professor de matemática. *Bolema, 24*(40), 747-764.

Silva, M. A. (2012). A fetichização do livro didático no Brasil. *Educação e Realidade, 3*(37), 803-821.

Silva, E. T. (1996). Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem. *Em aberto, 16*(69), 8-11.

Viali, L. (2008). O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de Licenciatura em Matemática. *XVIII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Águas de São Pedro, Brasil.

Análise de livro didático e a construção de um processo de ensino por meio de tarefas e técnicas: contribuições da TAD[1]

Textbook analysis and the construction of a teaching process through tasks and techniques: ATD contributions

Rita Lobo Freitas[2]
Saddo Ag Almouloud[3]

Resumo

Este artigo visa socializar as contribuições de um estudo sobre livros didáticos realizado em uma das etapas de nossa pesquisa de mestrado, em um curso de Licenciatura em Matemática, com estagiários em fase de conclusão de curso. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999), foi fundamental para explicitar bloco prático técnico (t/τ) e o bloco tecnológico teórico (θ, ϕ) referentes ao estudo da função exponencial. A análise de tais materiais trouxe contribuições que poderão nortear a prática dos futuros professores e também daqueles veteranos que fazem uso desses livros, indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) brasileiro. Além da discussão didática sobre função exponencial a investigação trouxe uma abordagem de análise de livro que poderá ser utilizada com outros temas matemáticos de interesse do professor.

Palavras-chave: *teoria antropológica do didático; livro didático, função exponencial*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)- ritalobof@gmail.com

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)- saddoag@gmail.com

ABSTRACT

This article aims to socialize the contributions of a study on textbooks carried out in one of the stages of our master's research, with trainees in the final phase to get their Bachelor's Degree in Mathematics. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) by Chevallard (1999) was essential to explain the technical-practical block (t/τ) and the theoretical-technological block (θ, ϕ) regarding the study of the exponential function. The analysis of such materials brought contributions that will be able to guide the practice of future teachers as well as those veterans who use these books suggested by the National Textbook Program (PNLD) of Brazil. Besides the didactic discussion about exponential function, the research brought a book analysis approach that can be used with other mathematical topics that interest teachers.

Keywords: *Anthropological Theory of the Didactic; textbook; exponential function*

INTRODUÇÃO

Situamos este artigo no contexto de um estudo sobre livro didático, a partir de um recorte realizado em nossa pesquisa de mestrado, a qual relata uma investigação sobre os conhecimentos dos estudantes de licenciatura em matemática, na fase final de conclusão de curso, inseridos na disciplina estágio supervisionado. O principal objetivo desse estudo do livro foi analisar as organizações matemáticas e didáticas, sobre função exponencial, propostas por autores de livros didáticos brasileiros que participaram do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no ano de 2012. Mais especificamente, nosso propósito foi identificar e analisar os tipos de tarefa (e tarefas relacionadas com esses tipos de tarefas), no intuito de fazer inferências sobre o provável conhecimento/saber que seria aprendido pelo aluno sujeitado à prática docente apoiada nesses livros. Os resultados dessa análise serviram como ponto de partida e alavanca na construção e na análise das situações de experimentação, realizadas durante a disciplina Estágio IV. Sob um novo olhar, essas análises revelaram a importante contribuição da TAD para a prática de sala de aula de professores ou futuros professores.

Referencial teórico

Antes de realizar este estudo do livro didático, nos debruçamos sobre os principais documentos oficiais brasileiros que norteiam e orientam o trabalho do professor de matemática do ensino médio. Como o tema matemático de estudo foi a função exponencial, buscamos nessa análise identificar quais orientações didáticas e pedagógicas eram fornecidas por tais documentos, com vistas a orientar o trabalho do professor de matemática, em específico. Em síntese, os documentos oficiais consultados, apesar de trazerem orientações pedagógicas básicas e gerais para o professor, não apresentam uma discussão mais aprofundada dos objetos matemáticos a ensinar, e a função exponencial não é uma exceção.

Diferentemente dos documentos oficiais, os livros didáticos trazem uma orientação sobre os conteúdos matemáticos de forma específica e detalhada. Entendemos que o livro didático é um instrumento de uso do professor (e do futuro professor) no planejamento de suas aulas e do aluno na realização das atividades, que podem vir a suprir as lacunas sobre o conteúdo matemático. Segundo Rossini (2006) e Freitas (2015), o livro didático, em muitos casos, ainda é o único material disponível para organização da prática do professor. Lajolo (1996, p. 4) também enfatiza a importância do livro didático enquanto instrumento dos processos de ensino e de aprendizagem formal, podendo ser decisivo para proporcionar a qualidade do aprendizado do aluno frente as atividades escolares.

Partimos, então, do pressuposto de que o livro didático tem relevante importância na prática do professor. Por essa razão, propomos neste artigo uma análise das praxeologias dos livros didáticos fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevallard (1999). Os aspectos desta teoria, a partir dos quais definimos critérios para nossas análises, baseiam-se nos conceitos de tarefa, técnica, teoria e tecnologia.

Apoiados nos estudos preliminares realizados na pesquisa, percebemos o tipo de abordagem desejável para o tratamento didático da função exponencial. Nesse sentido, descrevemos os tipos de tarefas e técnicas que julgamos adequadas e coerentes para o estudo da função exponencial. Além disso, apoiamo-nos nos critérios de seleção de livros didáticos, propostos pelo Ministério da Educação (MEC) em Brasil (2011).

A partir da identificação de tarefas priorizadas pelos autores de livros didáticos analisados, definimos um bloco prático técnico (T/τ) que consiste nas tarefas relacionadas às técnicas e um bloco tecnológico teórico (θ, ϕ) utilizado pelos livros, referentes a teoria e tecnologia.

Em nosso ponto de vista, a TAD possibilita uma análise de práticas docentes, focalizando o estudo das organizações praxeológicas pensadas para o ensino de organizações matemáticas. Chevallard (1999) afirma que a atividade matemática se caracteriza como atividade humana e também atividade das instituições sociais. Um exemplo é a atividade proposta pelos livros didáticos, enquanto organização praxeológica.

Para Bosch e Chevallard (1999), o discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas é chamado de tecnologia da técnica, esta última precisa de uma justificação, que chamaram de «teoria da técnica». A utilização de uma técnica de maneira normatizada, «deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. A existência de uma técnica supõe também a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificativo da técnica e de seu âmbito de aplicabilidade e validade» (Chevallard et al., 2001, p.125, grifos dos autores).

Na organização praxeológica de uma instituição, a exemplo do livro didático, identificam-se vários objetos matemáticos, por meio dos quais, os autores desses livros discutem a natureza e o funcionamento na atividade matemática: objetos ostensivos e não ostensivos, Almouloud (2007) explica que objetos ostensivos são todos aqueles que podem ser manipulados na realização de uma determinada atividade matemática, em contrapartida, os objetos não ostensivos se caracterizam como as ideias, os conceitos, os quais não podem ser vistos nem manipulados concretamente.

Como afirmamos anteriormente em nosso trabalho, o livro didático é considerado uma instituição, no sentido que Chevallard (1999). Além disso, o objeto matemático função exponencial guarda uma relação pessoal com esta instituição (I= livro didático). Yamauti (2013, p.41) corrobora com esse sentido que damos à instituição, sob o ponto de vista da TAD, quando afirma que «Na perspectiva da TAD, são exemplos de instituições: uma escola, uma classe, um curso, os programas de ensino etc. Em nosso trabalho, consideramos o livro-texto como uma instituição». Nessa perspectiva, organizamos as análises dos livros em três categorias sob o ponto de vista da TAD: 1) Bloco prático técnico (T/τ) que corresponde aos tipos tarefas (Ti) e às técnicas a elas associadas, no sentido de saber fazer; 2) Bloco tecnológico teórico (θ, ϕ) que remete ao significado do saber. Uma terceira categoria que seria os objetos ostensivos e não ostensivos: descrição do tratamento matemático do ponto de vista didático dos objetos a ensinar. Para esta terceira categoria não aprofundamos as análises neste artigo, pois o nosso recorte se apoia no bloco prático técnico e teórico tecnológico.

Processo de seleção dos livros didáticos

Antes de apresentarmos a análise dos livros, definimos os critérios de seleção. Estruturamos o processo de seleção com base nas proposições do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

É possível perceber que a qualidade dos livros didáticos utilizados na rede pública no Brasil vem melhorando significativamente a cada ano. No entanto, existe ainda a dificuldade de agregar um material que seja capaz de abordar todos os conteúdos de forma adequada. Com efeito, em muitos livros, ainda perduram propostas de ensino, focadas em modelos, algoritmos e roteiros, e algumas atividades focadas na resolução de situações-problema.

Para escolha do livro didático, o professor tem por base o Guia de livros didáticos para o Ensino Médio, documento elaborado pelos consultores do MEC, cujo objetivo é auxiliar o professor na escolha do livro a ser adotado pela escola. O guia apresenta um panorama geral de cada obra, baseado nas resenhas, no quadro ilustrativo de como estão organizados os conteúdos em cada um dos livros, indicando o número de páginas e de cada unidade temática. Segundo este documento, o sumário ajuda o professor a verificar se a obra é adequada ou não ao projeto pedagógico da escola (Brasil, 2011).

Para escolha dos livros a serem analisados, realizamos um levantamento no Guia de livros didáticos PNLD 2012. O documento apresenta os critérios para a avaliação das obras, ressaltando a importância do livro didático para contribuir com a formação do indivíduo na etapa do Ensino Médio, situando esses princípios na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN).

É ainda informado que os títulos que não se enquadraram nesses princípios gerais foram rejeitados no processo de seleção. Além dos critérios de escolha, o texto do guia traz uma discussão sobre o ensino da Matemática, ressaltando as capacidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes nesta disciplina, para esta etapa de ensino. Esses princípios foram traduzidos em termos de requisitos gerais para seleção dos títulos que desejávamos analisar. No documento, afirma-se que

> 1. Incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidades. 2. Privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas. 3. Apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros. 4. Propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização. (Brasil, 2011, p. 17)

Além desses requisitos, ainda são apresentados outros nove para o Manual do professor. Das coleções inscritas, sete foram aprovadas para o PNLD 2012, dentre os quais, selecionamos três para a nossa análise, de acordo com o quadro 1.

Quadro 1
Lista dos Livros Didáticos PNLD 2012

Livro	Autor	Título	Ano
A	J. M. Barroso	*Conexões com a matemática*	2010
B	L. R. Dante	*Matemática: contexto & aplicações*	2010
C	M. Paiva	*Matemática: contexto & Aplicações*	2009
D	G. Iezzi; O. Dolce; R. Périgo; D. Degenszajn; N. Almeida	*Matemática, ciência e aplicações*	2010
E	K. S. Smole; M. I. Diniz	*Matemática: Ensino médio*	2012
F	J. Ribeiro	*Matemática, Ciência, Linguagem e Tecnologia*	2010
G	J. Souza	*Novo olhar: matemática*	2010

Fonte: Freitas (2015).

Analisamos os critérios definidos pelo Guia e selecionamos alguns, tomando como base a categoria metodologia de ensino e aprendizagem, para seleção de três títulos. No item estratégia, indicamos o seguinte critério: «O livro inicia pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos» (Brasil, 2011, p. 39).

Vale salientar que a análise dos livros compreende o capítulo referente à função exponencial, para verificação dos critérios de escolha. O segundo critério de seleção refere-se à caracterização dos exercícios sobre função exponencial propostos nas obras aprovadas e organizados no quadro 2. Neste tópico, sintetizamos os doze critérios do MEC em sete critérios gerais, a saber:

Quadro 2
Critérios para seleção dos livros

Critérios/títulos	A	B	C	D	E	F	G
O livro inicia pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.					X	X	X
Exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem contextualizados e desafiadores.			X		X	X	X
Exercícios entremeados aos tópicos que subdividem a apresentação dos conteúdos.	X	X	X	X	X	X	X
Atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.					X	X	
Exercícios inovadores e desafiadores.						X	
Exercícios que incentivam o usam diferentes estratégias de resolução.						X	
Exercícios que valorizam a verificação de processos e validação de respostas						X	

Fonte: Adaptada de Brasil (2011, p. 41).

Um ponto que julgamos importante refletir, dentre os critérios utilizados pelo MEC na seleção dos livros, no tópico caracterização dos exercícios, quanto ao uso de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de vestibulares e concursos. Em nossas análises, detectamos que 85% dos títulos selecionados atendem a esse critério em excesso de exercícios. Apenas o Livro F (LF) trabalhou pouco esse tipo de atividade, no entanto, este atendeu a todos os outros critérios propostos em nossa pesquisa, adaptados dos critérios do MEC.

No quadro 2, apresentamos a organização dos itens que cada título contempla. De acordo com o quadro, os três livros E, F e G foram identificados como aqueles que mais se enquadram nesses critérios de seleção, os quais identificamos como LA, LB e LC e Autores A, B e C respectivamente.

Após selecionarmos esses três títulos, verificamos se, de fato, os itens da seleção foram válidos, ou seja, se os livros atendem mesmo ao que está colocado no guia como critério, na abordagem geral do conteúdo e nas atividades propostas sobre função exponencial. Em seguida, levantamos a quantidade de atividades, exercícios ou problemas de aplicação, os quais foram organizados por categorias de tarefas. Na sequência, definimos quais tipos de tarefas são importantes para o estudo da função exponencial. A partir de então, passamos à análise dos livros.

Análise dos livros selecionados

Organizamos as análises por categorias definidas a partir do estudo da TAD. Em cada categoria, realizamos uma síntese do que foi identificado em cada título.

Bloco prático técnico (T/τ)

De acordo com Chevallard (1999), uma praxeologia relativa a um conjunto de tarefas T precisa, em princípio, de uma maneira de realizar e executar as tarefas $\tau \in T$. Uma praxeologia sobre o tipo de tarefas T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a uma tarefa T.

De acordo com as atividades e exercícios propostos pelos autores sobre a função exponencial, identificamos tais atividades como tipos tarefa, ou seja, o que está sendo solicitado, requerido, perguntado ao aluno.

O livro A apresenta um total de 115 atividades que chamamos de tarefas. Destacamos que os exercícios resolvidos (tarefas resolvidas) não foram incluídos nesta classificação, o nosso objetivo foi visualizar que tipos de tarefas que mais aparecem ou são priorizados pelo autor, sobre a função exponencial.

Segundo os critérios de seleção dos livros, o LB atendeu a maior quantidade de itens. A seguir (no quadro 3), vejamos a distribuição de tarefas propostas neste título. Da mesma forma que o organizamos, no quadro do LA, os exercícios ou problemas resolvidos foram colocados na categoria de exemplo e não aparecem no quadro 3.

O quadro 3 mostra que o LB possui uma maior quantidade de tarefas que LA, a exemplo das tarefas que se caracterizam como situações-problema, envolvendo equações e inequações exponenciais. O autor do LB apresenta também tarefas de interpretação gráfica, a partir de manipulação de variáveis, que também não aparecem no LA.

A quantidade de tarefas do tipo «resolver equações exponenciais e cálculo de potências» também é maior em LB, o que, *a priori*, não quer dizer que a proposta de tarefas seja melhor ou pior, pois estas deveriam se apoiar em objetivos de ensino no nível geral de abordagem e no nível local de resolução de tarefas.

Sobre as tarefas encontradas nesses três livros, percebe-se uma diferença no que diz respeito à variedade de tarefas encontradas em cada título e uma priorização por certo tipo de tarefas, em detrimento de outras. Os livros A e C apresentam praticamente a mesma quantidade de tarefas. O LC apresenta melhor distribuição das tarefas e outros tipos não apresentados no LA. Essas escolhas realizadas pelos autores podem indicar a concepção de ensino e aprendizagem subjacente à proposta didática do autor do livro, pelo menos no que diz respeito à função exponencial.

O LC também apresenta uma maior quantidade de tarefas em relação ao LA e LB, com o caráter de situações-problema, além de relacionar diferentes contextos matemáticos, como cálculo de área de figuras planas, determinação da função composta e enfoque na interpretação gráfica.

Para fins de nossas análises, propomos um quadro de classificação dos tipos de tarefas (quadro 3), usando a noção de Organização Praxeológica Matemática – OPM. As tarefas foram agrupadas em categorias construídas com base no estudo do objeto matemático Função Exponencial, apoiado nas OCEM (Brasil, 2006) e no Guia do livro didático (Brasil, 2011).

Sobre os tipos de tarefas que aparecem em LA, LB e LC, de uma forma geral, percebemos que: em relação à quantidade de tarefas, LA e LC se equiparam, mas o LB apresenta uma variedade maior de tipos de tarefas, sobretudo, aquelas que se caracterizam com situações-problema.

O LA apresenta claramente uma priorização de modelos algorítmicos de memorização e repetição em forma de exercícios, em detrimento de modelos de resolução de problemas, apesar de também apresentá-los. Os LB e LC apresentam maior quantidade de situações problemas envolvendo o modelo de função exponencial.

Um ponto importante – não priorizado por LA e LC – foi a interpretação gráfica do crescimento ou decrescimento da função (houve apenas uma tarefa no LA). No LB, aparecem 4 tarefas de interpretação gráfica, com manipulação de variáveis algébricas. Isto denota pouca importância dada ao registro gráfico[4] e à compreensão do conceito de função exponencial a partir deste sistema semiótico de representação. Com efeito, não aparecem tarefas que possibilitem a articulação e a mudança entre sistemas de registros de representação.

[4] Segundo Duval (1999), um registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente do sujeito. Nessa perspectiva, os registros se diferenciam dos códigos, pois estes são mais limitados que os registros. A diferença entre registros e códigos se pauta em dois níveis do funcionamento cognitivo: um consciente e outro inconsciente, todo conhecimento implica necessariamente a mobilização desses dois níveis.

Quadro 3
Descrição das tarefas sobre função exponencial

T (TAREFA)	DESCRIÇÃO DO TIPO DE TAREFAS	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C
T_1	Representar algebricamente uma função exponencial (Lei de formação), a partir de um contexto de situação problema da realidade.	2	3	7
T_2	Construir o gráfico de uma função exponencial partir de sua representação algébrica.	5	3	4
T_3	Determinar a lei de associação de uma função exponencial, a partir de sua representação gráfica.	0	0	1
T_3	Resolver situações problema, a partir do modelo da função exponencial envolvendo a manipulação das variáveis x e y	2	12	22
T_4	Interpretar graficamente o crescimento ou decrescimento da função exponencial.	1	4	0
T_5	Resolver situações problemas de aplicação da função exponencial, que apareça a função inversa.	0	0	0
T_6	Representar a função exponencial a partir de uma progressão geométrica.	4	0	1
T_7	Expressar algebricamente a função exponencial a partir do modelo de juros compostos.	1	1	0

Fonte: Freitas (2015).

Concluímos que, apesar de os três livros contemplarem algumas tarefas importantes, ainda há uma fragmentação no tratamento dos conceitos relativos à função exponencial sob o ponto de vista daquelas tarefas propostas no quadro 3 como fundamental para o desenvolvimento do conceito de função exponencial.

Essas técnicas estão desenhadas em um formato genérico, ver quadro 4, para qualquer tipo de tarefa que exija tais técnicas. Estas foram pensadas em termos do que chamamos de organizadores prévios, do conteúdo função exponencial, ou seja, aquelas técnicas necessárias ao desenvolvimento do conceito de função, além de estratégias de resolução, que supostamente podem ser utilizadas pelos sujeitos na resolução de uma tarefa.

Quadro 4
Descrição das técnicas

(τ)	**Descrição dos tipos de Técnicas**
(τ_1)	Ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, modelando matematicamente uma função e equação de natureza exponencial;
(τ_2)	Atribuir valores adequados para a variável x, substituir na lei da função, resolvendo uma equação exponencial, a partir daí, definir pares ordenados, a ser marcados (pode-se fazer uso de uma tabela) como pontos no plano cartesiano. A última etapa é ligar os pontos, encontrando a curva exponencial;
(τ_3)	Identificar, no gráfico, os valores de x e y, de acordo com a curva, substituir esses valores em uma lei geral, genérica de função exponencial: $f(x) = a^x$, encontrando, a partir da resolução de uma equação, a lei geral da função representada pelo gráfico;
(τ_4)	Identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial ou expressão numérica com cálculo de potência.
(τ_5)	Interpretar o crescimento ou decrescimento da função a partir do gráfico, avaliando o comportamento dos valores de y à medida que se aumentam os valores de x e, assim, verificar como y se comporta se cresce ou decresce, identificar os pares ordenados (x, y);
(τ_6)	Resolver uma equação inversa da equação exponencial, ou seja, uma equação logarítmica;
(τ_7)	A partir de lei geral de uma progressão geométrica, identificar cada elemento como os elementos de uma função exponencial, resolvendo a equação quando necessário;
(τ_8)	Ler e interpretar situações problema do campo financeiro, fazendo a correlação com valores do montante (M) dos juros (j) e do período (n), como elementos de uma equação exponencial.

Fonte: Freitas (2015)

É possível fazer uma associação entre as tarefas descritas no quadro 4 e as técnicas, no quadro 3, para o tratamento da função exponencial, salientando que uma mesma tarefa pode ter técnicas diferentes a ela associadas, por outro lado, uma atividade matemática pode requerer várias tarefas. Essa abordagem específica de tarefas e técnicas, não é apresentada nos materiais didáticos disponíveis para o professor, inclusive nos livros.

Na organização do quadro de tarefas, em nosso trabalho, identificamos – para cada atividade ou exercício proposto pelos autores – uma tarefa (para efeito da contagem) com descrição específica. Definimos, também, um bloco tecnológico teórico que justifica a técnica a elas associada.

Bloco tecnológico teórico (θ, ϕ)

Para Chevallard (1999), uma tecnologia é um discurso racional que tem como primeira função justificar a técnica, de modo que ela permita executar as tarefas do tipo T. Qualquer bloco tarefa/técnica é sempre acompanhado de, no mínimo, um vestígio de tecnologia. De acordo com Almouloud (2007), a tecnologia pode também modificar a técnica, ampliando-a, tornando-a mais abrangente. Por outro lado, «toda tecnologia precisa de uma justificação, a que chamam teoria da técnica» (Almouloud, 2007, p.116), ou seja, uma teoria que fundamenta a tecnologia.

Segundo Chevallard (1999), toda obra matemática é constituída como resposta a um tipo de tarefa problemática, assim, entendemos que uma organização matemática se forma a partir de quatro elementos:

> (i) os tipos de problemas, que surgem das questões;(ii) as técnicas, que permitem resolver esses problemas; (iii) as tecnologias, que justificam e tornam compreensíveis as técnicas;(iv) as teorias que servem de fundamentos para as tecnologias. Esses são os componentes principais de toda obra matemática. (Chevallard *et al.*, 2001, p. 125)

Como, por exemplo, achar um determinado resultado solicitado na tarefa, função da técnica, justificar se o resultado solicitado está correto (função da tecnologia). Assim definimos o bloco tecnológico teórico (θ, ϕ), como sendo aquele que justifica a técnica utilizada em uma tarefa. Nas tarefas propostas para função exponencial, nos três livros didáticos, identificamos os seguintes blocos:

(θ_1, ϕ_1: Para as tarefas T_1, T_7 e T_8, o bloco tecnológico teórico que justifica a técnica é composto por habilidade de leitura e interpretação e associação do modelo exponencial, por meio da definição e de sua lei de associação, com os modelos de progressão geométrica e juros compostos.

(θ_2, ϕ_2): Este bloco tecnológico teórico justifica a técnica utilizada nas tarefas T_4 e T_6 de resolução de equação, por meio da propriedade geral de função exponencial: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, com $a \neq 1$ e $a > 0$, quando manipulamos y, e de cálculo de potência e uso de suas propriedades quando manipulamos x.

(θ_3, ϕ_3): As tarefas T_2, T_3 e T_5 estão relacionadas às habilidades de manipulação de registros gráficos, ao uso das variáveis x, y enquanto par ordenado (x,y), sendo justificadas pela identificação de função crescente e decrescente, ou seja: se $a > 1$, a função é crescente, $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ e se $0 < a < 1$, a função é decrescente: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. Há necessidade de mudança do registro algébrico para o registro gráfico em termos da lei geral de associação da função exponencial. Vejamos exemplos de tarefas /técnicas extraídas desses livros, *exemplo 01*:

> Um estudo realizado por um restaurante mostrou que o número de refeições servidas por mês, em certo ano, pode ser descrito, aproximadamente, pela função definida por $f(x) = 4.000.(1,1)^{x-1}$, em que x representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, $x = 1$). (a) Quantas refeições, aproximadamente, foram servidas por esse restaurante em março? E em julho? (Souza, 2010, p.165)

Esta situação-problema é do tipo de tarefa T3: resolver situações-problema, a partir do modelo da função exponencial, envolvendo a manipulação das variáveis x e y. Como técnicas para resolução da tarefa, reconhecemos τ_4:identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial. Evidentemente, a substituição da variável x, na lei geral da função, recai em uma expressão numérica que envolve cálculo de potência, $f(3) = 4.000.(1{,}1)^{3-1} \Rightarrow f(3) = 4.840 \Rightarrow 4.840$ refeições.

Outra técnica que pode ser usada parcialmente é τ_1: ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, mas, nesse caso, não solicita o processo de modelagem da lei da função exponencial. Neste exemplo de tarefa, o bloco tecnológico teórico que justifica a técnica é (θ_2, ϕ_2), resolução de equação por meio de cálculo de potência e uso de suas propriedades na manipulação da variável x (substituição).

Exemplo 2:

> A população de uma colônia de bactérias Ecoli dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de 4,096. 106 bactérias por mililitro. Assim, o tempo de experimento foi: (Ribeiro, 2010, p.203)

Esta situação-problema é do tipo de tarefa T1: representar algebricamente uma função exponencial (Lei de formação), a partir de um contexto de produção de bactérias. Em relação às técnicas adequadas para solucionar a tarefa, destacamos τ_1: ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, devendo a situação ser modelada por uma lei de formação de uma equação exponencial e τ_4: identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial ou expressão numérica com cálculo de potência.

O bloco teórico tecnológico associado às técnicas desta tarefa é o bloco (θ_1, ϕ_1), composto por: habilidade de leitura e interpretação e associação do modelo exponencial por meio da definição e o bloco (θ_2, ϕ_2), conforme descrito anteriormente.

Conclusões

Na análise dos livros, foi possível perceber que aqueles critérios usados pelo MEC, para escolha dos livros didáticos, não podem ser garantidos em todos os capítulos dos livros. Esta conclusão parte da constatação de que, no capítulo referente à função exponencial, apresentado pelos livros, tais critérios não se aplicam em sua totalidade.

A análise dos livros contribuiu com a construção da sequência didática, que posteriormente foi utilizada na pesquisa com os estagiários da licenciatura em matemática, na qual utilizamos algumas tarefas, dos livros didáticos analisados, consideradas significativas na construção do conceito de função exponencial.

Em síntese podemos concluir que apesar de as três obras analisadas contemplarem algumas tarefas importantes, ainda há uma fragmentação no tratamento dos conceitos relativos à função exponencial, sob o ponto de vista daquelas tarefas propostas como fundamentais para o desenvolvimento do conceito de função exponencial.

Podemos destacar, nessas observações, que existem claramente dois tipos de modelos de técnicas relacionadas às tarefas encontradas:

1. Um modelo de tarefa/técnica baseado em memorização e algoritmização muito utilizado pelo LA;
2. Um modelo tarefa/técnica que prioriza uma elaboração mais interpretativa e o raciocínio crítico, esse é mais adotado pelo LB e LC.

Por outro lado, esse modelo de análise de livro didático, detalhado em Freitas (2015), pode ser uma alternativa a ser utilizada em pesquisas com livros didáticos e também àquelas pesquisas de campo com professores e futuros professores, como forma de auxiliar na construção do conhecimento matemático, por meio de situações de aprendizagem que envolvam diferentes tipos de tarefas/técnicas.

As análises, sob o ponto de vista da TAD, evidenciaram elementos dos conceitos associados à função exponencial, a partir do quadro de tarefas adotado por cada livro analisado e as técnicas associadas às tarefas, bloco prático técnico (t/τ) e o bloco tecnológico teórico (θ, ϕ). Esses elementos trazem uma visão ampla dos livros no que se refere à função exponencial, possibilitando um novo olhar dos professores do Ensino Médio sobre os livros didáticos e uma forma diferente de analisá-los, indicando também para construção de novas análises de livros didáticos para outros temas de Matemática no Ensino Médio, podendo também utilizar-se desse tipo de análise no ensino fundamental.

Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: Ed. UFPR.

Brasil. Ministério da Educação. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* (2). Secretaria de Educação Básica. Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. (2011) *Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática.* Brasília.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La Sensibilité de L'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'etude et problematique. *Recherches em Didactique das Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, *19*(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1999). El Análisis de Las Prácticas Docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches em Didactique dês Mathématiques, 19*(2), pp. 221-266.

Chevallard, Yves; Mariana, Bosch & Gascón, Josep.(2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações*. v.1. São Paulo: Ática.

Duval, R. (1999). *L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique:cours sur apprentissages intellectuels donné à la* PUC-SP. São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. São Paulo, Brasil.

Freitas, R. L. (2015). *A Influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura: um estudo da função exponencial*. (Dissertação de mestrado). Educação Matemática. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 196f.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D. & Périgo, R. (2010). *Matemática: ciência e aplicações* (Ensino Médio). 1, São Paulo: Saraiva.

Lajolo, M. (1996). Livro didático: um (quase) manual de usuário. *Em Aberto*, Brasília, *16*(69).

Ribeiro, Jackson. (2010). *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*. São Paulo: Scipione.

Rossini, Renata (2006). *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias*. (Tese de doutorado). Educação Matemática. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 382 f.

Smole, K. S. & Diniz, M. I. S. V. (2010). *Matemática ensino médio*. 1, Saraiva: São Paulo.

Souza, J. (2011). *Novo olhar: matemática*. 1, São Paulo: Editora FTD.

Yamauti, M. M. (2013). *Regressão linear nos livros didáticos de estatística para cursos de administração: um estudo didático*. (Dissertação Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 146 f.

Algumas considerações sobre o uso do báculo (*baculum*) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática[1]

*Some remarks concerning the use of cross-staff (*baculum*) for developing activities linking history and math teaching*

Ana Rebeca Miranda Castillo[2]
Fumikazu Saito[3]

Resumo

Neste artigo apresentamos algumas considerações a respeito de um instrumento matemático, muito utilizado no século XVI, com vistas a explorar potenciais recursos didáticos. Tendo por base o tratado Del modo di misurare, publicado por Cosimo Bartoli (1503-1572) em 1564, apresentamos dois procedimentos de medição utilizando o báculo (baculum). Além das questões relativas ao conhecimento matemático implicado no instrumento e nos procedimentos de medição, os dois casos de uso do instrumento apontaram para interessantes questões não só de ordem matemática, mas também epistemológica, na articulação entre conhecimentos teóricos e práticos.

Palavras-chave: *história da matemática; educação matemática; instrumento matemático.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – anacastillo467@gmail.com

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – fsaito@pucsp.br

ABSTRACT

In this paper we make some remarks on a mathematical instrument, widely used in the sixteenth century, in order to explore potential teaching resources. We present two different ways to measure using the cross-staff (baculum) based on a treatise published in 1564, entitled Del modo di misurare, by Cosimo Bartoli (1503-1572). Besides the issues related to the mathematical knowledge implied in the instrument and the measuring procedures, the two use cases of the instrument raised not only interesting mathematical issues, but also epistemological questions on theoretical and practical grounds.

Keywords: *history of mathematics; mathematics education; mathematical instruments.*

INTRODUÇÃO

O estudo de antigos instrumentos matemáticos nos dá acesso a interessantes questões de ordem epistemológica (e também ontológica e axiológica) que podem ser exploradas pelo educador matemático, uma vez que está ligado ao saber matemático e suas interfaces com outros segmentos de conhecimento.[4] A compreensão contextualizada desses instrumentos, tendo por base tratados que lidam com sua construção e seu uso, pode ser bastante útil para a elaboração de atividades de ensino. Contudo, é preciso ter cautela para não reduzi-los a meros artefatos que servem apenas para medir, pois os instrumentos matemáticos são mais do que meros objetos e ferramentas. Eles são construtores de conhecimento e revelam interessantes aspectos do saber matemático.[5]

Neste artigo, apresentamos alguns desses aspectos a partir do estudo de uma obra publicada no século XVI. Dedicada à fabricação e ao uso

---

[4] Vide: Monteiro (2012), Santos (2014) e Saito (2014). Sobre instrumentos matemáticos, consulte: Bennett (2003, 1998 e 1991).

[5] Sobre a concepção de instrumentos como construtores de conhecimento, vide: Van Helden e Hankins (1994), Hankins e Silverman (1995), Saito (2009 e 2011).

de instrumentos matemáticos úteis para a arte de medir terras ou à carpintaria, essa obra apresenta, em poucas páginas, uma série de questões que nos fazem refletir sobre o significado de medida, tendo em consideração o processo de mensuração. Para tanto, selecionamos um único instrumento, o báculo (*baculum*), e buscamos explorar dois casos muito pontuais de seu uso.

Esses dois casos, à primeira vista, parecem ser bastante triviais. Contudo, uma análise mais aprofundada do procedimento de medição descrito na obra revela-nos que são muito mais complexos e ricos do que imaginamos. Além de propiciar novos conhecimentos, esses dois casos servem para ilustrar como articular história e ensino de matemática sem cair nas tradicionais formulações em que a narrativa histórica é apenas reproduzida ou utilizada em sala de aula. O báculo e o conhecimento matemático nele incorporado podem levar o educador matemático a elaborar interessantes atividades na interface entre história e ensino de matemática.

Dois usos e duas medidas

Dentre inúmeros instrumentos matemáticos fabricados e utilizados no século XVI, o báculo parece ter tido ampla repercussão, visto que aparece descrito em diferentes tratados. Sua origem é desconhecida, porém a sua primeira descrição sistemática remonta ao século XIV e é atribuída a Levi ben Gerson (1288-1344).[6] Embora fosse um instrumento muito utilizado em astronomia, no século XVI, vemos sua aplicação na agrimensura e, em alguns casos, na navegação, visto que que esses dois campos de saber adquiriram importância naquela época em virtude da descoberta de novas terras e o «cercamento» de propiedades.[7]

[6] A esse respeito consulte estudos de Simonson (2013) e Roche (1981).
[7] Sobre o «cercamento» de terras, vide: Fischer (1996) e Richeson (1966).

Entre os séculos XVI e XVIII, o número de tratados que buscavam instruir sobre técnicas de medida e de mapeamento de terras aumentara significativamente. Naquela época, muitos «praticantes de matemáticas» e outros estudiosos dedicados às «matemáticas» investiram não só na fabricação de diferentes instrumentos, mas também na publicação de tratados a seu respeito.[8] Esses tratados geralmente apresentavam diferentes técnicas de medidas para diferentes situações em que instrumentos específicos eram utilizados.[9]

No caso do báculo, ele era utilizado ao lado de outros instrumentos matemáticos, tais como o quadrante num quarto de círculo, o quadrante geométrico, o bastão, o esquadro geométrico, o astrolábio e toda sorte de instrumentos topográficos, para medir distâncias (altura ou largura) inalcançáveis.[10] Cosimo Bartoli (1503-1572), em *Del modo di misurare* (1564), por exemplo, recomenda o seu uso para «*medir distâncias, tal como uma linha reta, das quais não é possível se aproximar*» (Bartoli, 1564, p. 5r sic).

O báculo foi descrito por Bartoli como um instrumento composto de duas hastes, uma maior (AB), denominada bastão e outra menor (CD), transversal. Essas duas hastes eram dispostas perpendicularmente em forma de «cruz» (figura 1). A transversal (CD), tomada como unidade de medida, servia de guia para marcação no bastão (AB), e era nela encaixada, podendo deslizar-se para frente e para trás convenientemente.

---

[8] Sobre os «praticantes de matemáticas», vide: Mosley (2009), Higton (2001) e Taylor (1954). Convém observar que antes do século XIX a matemática ainda não era um corpo autônomo e unificado de conhecimentos matemáticos, mas envolvia outros segmentos de conhecimento, tais como a astronomia, a óptica, a música, a mecânica etc., que eram consideradas disciplinas matemáticas. A esse respeito, consulte Saito (2015) e Roux (2010).

[9] Informações a respeito destes tratados podem ser consultadas em Saito (2012).

[10] Vide exemplos em Bartoli (1564) e Digges (1556).

mente per il regolo A B, *faccendo ſempre angoli a ſquadra, & chia=*
miſi queſto regolo minore C D, *come uedere ſi puo nel diſegno.*

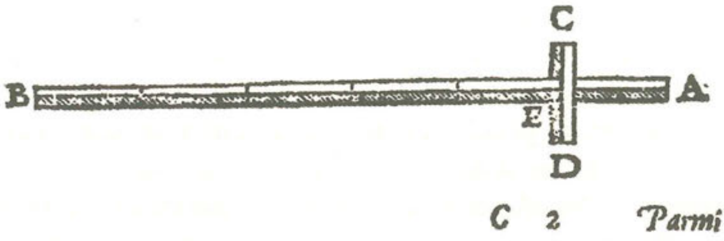
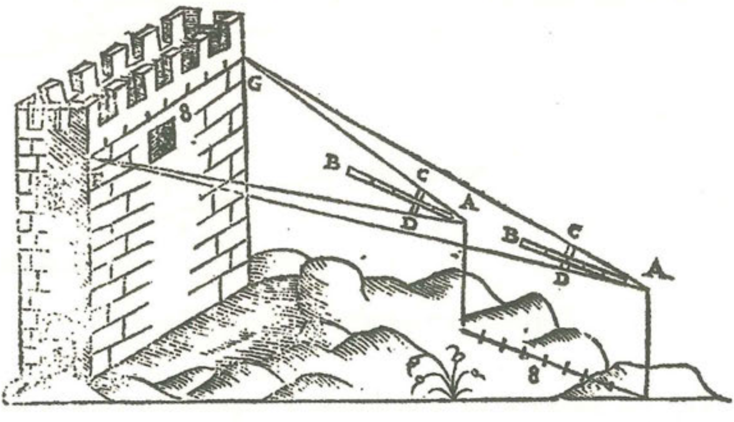


Figura 1. O báculo e suas partes (Bartoli, 1564, p. 10r).

Esse instrumento bastante simples e engenhoso era muito versátil e útil visto que era fácil de transportá-lo e de ser manuseado. Para se obter uma medida, utilizando o instrumento, bastava apenas apontá-lo para o objeto a ser medido em duas diferentes posições (figura 2).



Come ſarebbe ſe voleſsimo miſurare vna larghezza, o altezza di
vna canoniera, o vna fineſtra alta in vna muraglia, o qualche

Figura 2. O uso do báculo para se obter a medida da largura de um muro.

De pé, numa primeira posição, o observador deve ajustar a transversal numa das marcações do bastão e apontá-lo para o objeto a ser medido de tal modo a abarcar a sua largura, isto é, FG. Em seguida, o instrumento deve novamente ser ajustado, deslizando a transversal para outra marcação do bastão. Feito isso, o báculo deve ser apontado para a mesma largura que se deseja medir (FG), porém, desta vez, afastando-se gradativamente da posição original para outra de modo que a distância FG seja novamente abarcada pelo campo visual proporcionado pelo instrumento. Procedendo-se, dessa maneira, a distância FG corresponderá à distância entre essas duas posições e, uma vez que a transversal nos fornece a unidade de medida, podemos calcular a distância FG mobilizando a propriedade de semelhança de triângulos (figura 3).

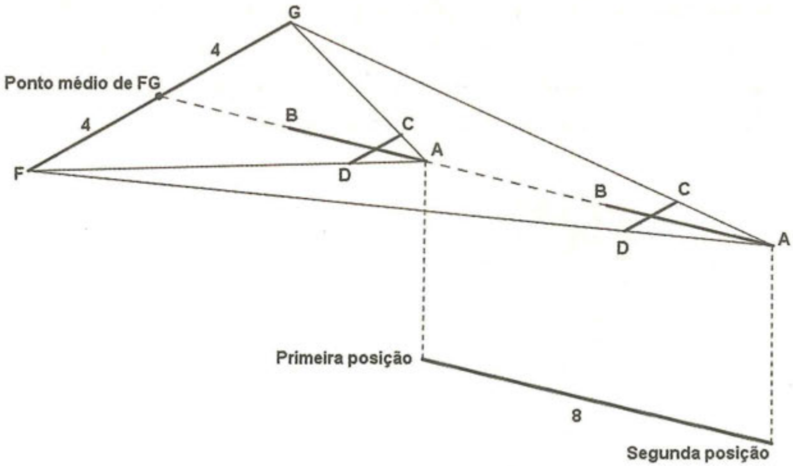


Figura 3. Esquema correspondente à figura 2 (figura nossa).

Eis aqui um ponto a ser considerado a respeito da noção própria de medida e do processo de mensuração. Note que a medida não é dada «no» instrumento, mas obtida «por meio do» instrumento. Diferentemente dos modernos instrumentos, que geralmente realizam a medida com a mínima interferência de quem os manuseia (como uma régua, por exemplo), o báculo a fornece por um procedimento em que o sujeito que mede participa da própria medida.[11] Além disso, embora o procedimento pareça bastante simples, executá-lo não é muito fácil, pois, além do conhecimento matemático que está incorporado no instrumento, ou seja, as propriedades e as relações métricas nos triângulos isósceles, requer treino no manuseio do instrumento.

O processo de mensuração por meio do báculo envolve considerar não só a habilidade e destreza de quem o manuseia, mas também outros obstáculos que impeçam a realização da medida. Vamos aqui nos referir apenas a dois deles, um relacionado às condições materiais e outro, ao conhecimento matemático implícito no processo de mensuração.

Sem entrarmos em muitos detalhes, uma das condições materiais que deve ser observada é o espaço disponível para realizar a medição, uma vez que o observador deverá afastar-se para obter a medida (o afastamento de uma posição à outra na figura 2). Assim, para medir grandes distâncias, será necessário não só um espaço maior para o observador se locomover, mas também um espaço livre de obstáculos que impeçam a realização da medida.

No que diz respeito ao conhecimento matemático implícito no processo de medição, é preciso observar a disposição do bastão, que deverá estar posicionado perpendicularmente à distância que se deseja medir em seu ponto médio (no ponto médio de FG na figura 3). Enquanto a primeira condição depende de aspectos físicos e materiais, o segundo requer que o sujeito que mede conheça algumas propriedades geométricas de triângulos. E, nesse particular, o observador pode apenas estimar o ponto médio da distância que deseja medir, tentando posicionar o bastão perpendicularmente a ele. Além disso, o afastamento para se obter a medida deve ser realizado de modo a manter as relações

[11] A esse respeito, vide: Dias e Saito (2011) e Saito (2013).

triangulares sempre no mesmo plano de observação. Ou seja, ao se deslocar de uma posição para outra, o observador deve tomar o cuidado de fazê-lo sempre mantendo os dois triângulos, formados no processo de medida, no mesmo plano geométrico.

Devemos aqui observar que o tratado não instrui nada a esse respeito. As relações métricas nos triângulos são apresentadas por Bartoli de forma bastante simplificada de modo que, com um só golpe de olhar, reconhecemos tratar-se de uma relação de semelhança de dois triângulos isósceles (figura 2 e 3). Contudo, se os dois triângulos AGF nas duas posições (figura 3) estiverem em diferentes planos, a distância de afastamento não corresponderá à largura FG que se deseja obter. Portanto, os dois triângulos devem ser coplanares.

Bartoli não fornece essas instruções em seu tratado porque tais conhecimentos faziam parte do repertório do «saber-fazer» matemático dos agrimensores. Essas instruções, bem como outras de ordem mais prática, eram transmitidas oralmente para aqueles que praticavam o ofício. Isso significa que *Del modo di misurare* não era um mero manual (do tipo faça-você-mesmo) que instruía o leitor na arte de medir. As instruções fornecidas por Bartoli eram dirigidas para um público que tinha conhecimentos em geometria prática, além do conhecimento prático do ofício.[12] Um exemplo bastante ilustrativo a esse respeito é o uso do báculo para se medir «*a altura de uma canhoneira, ou uma janela no alto de uma muralha, ou qualquer outra coisa semelhante colocada no topo de um monte*» (Bartoli, 1564, p. 11v).

[12] Sobre *practica geometriae* e a prática do ofício, cf. Homann (1991); Shelby (1972), Hugh of Saint Victor (1956, 1961 e 1991). Sobre as diferentes vias de transmissão, vide estudos em Kusukawa e MacLean (2006).

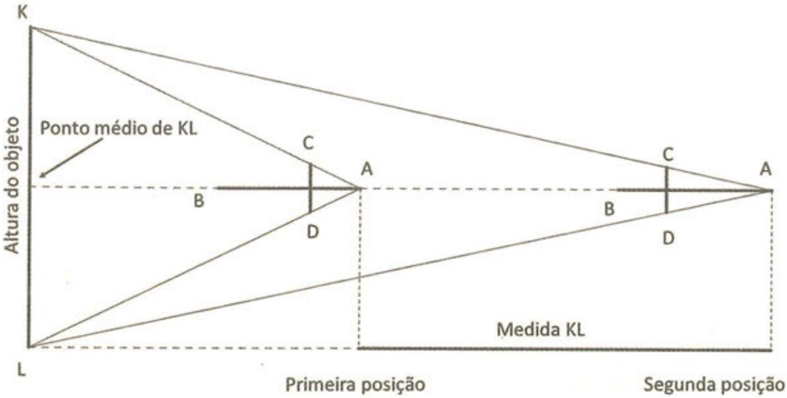


Figura 4. O uso do báculo para medir a altura de objetos (figura nossa).

À primeira vista, esse procedimento é essencialmente o mesmo que aquele descrito anteriormente. A única diferença é a orientação do instrumento que, no primeiro caso, é posicionado horizontalmente e, nesse segundo, verticalmente. Para se medir a largura do muro, a transversal é posicionada horizontalmente, paralela ao plano do solo (portanto, paralelamente a FG) e, para se medir altura de objetos, ela é posicionada perpendicularmente ao plano do solo, mantendo-a paralela à altura de um objeto (figura 4). Assim, todas as condições físicas e materiais, bem como o conhecimento matemático necessário para obter a medida no primeiro caso, se aplicam a esse segundo. Contudo, a realização da medição nesse segundo caso parece ser muito mais complexa do que a do anterior, visto que posicionar perpendicularmente o bastão no ponto médio da altura do objeto que se quer medir é muito mais difícil de ser executada na prática (figura 5).

Embora o esquema (figura 4) não ofereça nenhuma dificuldade de compreensão do ponto de vista matemático, a obtenção da medida por meio do báculo, entretanto, encerra novas dificuldades de ordem prática, já que as condições materiais para se obter a medida não poderão ser satisfeitas (figura 5). Essas dificuldades por sua vez, introduzem novos problemas matemáticos, conduzindo a discussões não só de ordem matemática, mas também prática, pois a sua resolução requisitará a mobilização de outros conhecimentos matemáticos ou mesmo o uso de outro instrumento mais adequado para se obter a medida de altura de objetos.

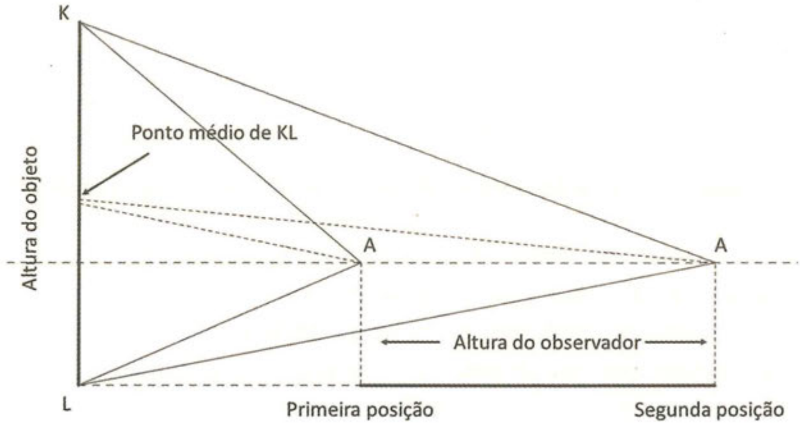


Figura 5. Medindo altura de objetos com o báculo (figura nossa).

Além disso, esse caso é interessante do ponto de vista epistemológico. A observação feita por Bartoli, isto é, que o báculo permite medir «*a altura de uma canhoneira, ou uma janela no alto de uma muralha, ou qualquer outra coisa semelhante colocada no topo de um monte*» (Bartoli, 1564, p. 11v), refere-se a um caso em que as condições materiais e, portanto, espaciais, que são encontradas numa situação prática, são descartadas. Do ponto de vista matemático, o primeiro e o segundo casos são idênticos, visto que as relações matemáticas neles implicados são as mesmas. No entanto, do ponto de vista prático, o segundo caso não pode ser resolvido concretamente, uma vez que a situação idealizada teoricamente na figura 4 não pode ser aplicada a uma outra, real e concreta.

O confronto dessas duas situações (figuras 3 e 4) levanta interessantes questões de ordem epistemológica, relativas à relação entre conhecimento teórico e prático, que podem ser exploradas pelo educador matemático.

Isso é notório também no caso do primeiro uso do báculo (figura 2). Lembremos que, para obtermos a medida da distância FG é necessário que o deslocamento do observador, de uma posição para outra, seja realizado no mesmo plano de observação de tal modo que os dois triângulos formados em suas respectivas posições sejam coplanares (figura 3). No entanto, mesmo que essas condições não sejam satisfeitas, a medida FE pode ser encontrada. Note que nesse caso os problemas de ordem prática podem, novamente, ser solucionados teoricamente com a exploração de outras relações matemáticas. Além disso, do ponto de vista epistemológico e matemático, transformam um problema de geometria plana em outro, espacial, enriquecendo as discussões didáticas. Os problemas práticos, nesse caso, reintegram a medida e o processo de medição ao seu lugar de origem, isto é, ao espaço tridimensional, ampliando o escopo de investigação didática. A medida deixa desse modo, de ser mera definição e adquire amplo significado matemático.

Note que Bartoli nada menciona a esse respeito, nem aborda sobre essas questões. Seu tratado apenas apresenta relações matemáticas bastante triviais e elementares. Porém, é justamente a esse aspecto que queremos aqui chamar a atenção. O que é mais interessante nesse tratado não é o que nele encontra-se descrito. Ele é potencialmente rico não por aquilo que instrui, mas por aquilo que pode revelar. O báculo, dessa maneira, torna-se interessante instrumento a ser explorado didaticamente se for empregado além de seu caráter meramente instrumental. Utilizá-lo apenas como uma ferramenta para confirmar uma medida, ou para se chegar a um resultado por meio das relações métricas implicadas no processo de medição, ofuscará outros atributos e características que fazem dele um construtor de conhecimento.

Considerações finais

As relações matemáticas implicadas no uso do báculo, bem como o conhecimento matemático nele incorporado, são bastante elementares. Explorar essas relações pode ser um bom começo, porém o que é mais enriquecedor do ponto de vista didático são os procedimentos de medição e suas implicações práticas e teóricas. Como vimos, desses procedimentos emergem questões de ordem não só matemática, mas também epistemológica. Questões estas que estão na base da própria noção de medida, que hoje é aceita acriticamente.

Não nos referimos aqui à mera definição de medida («o que é medida»), mas ao seu significado. Os procedimentos de medição por meio do báculo conduzem a uma compreensão mais completa de medida porque a restitui ao seu processo («como é que se mede»). Além disso, como vimos a medida não é mero resultado de aplicação de conhecimentos matemáticos bem estabelecidos, mas de um conjunto de ações em que aspectos práticos, bem como teóricos, do ato de medir convergem para o processo de mensuração. Assim, é na articulação entre esses diferentes aspectos, historicamente contextualizados, que encontramos recursos que possam ser apropriados para desenvolver novos caminhos e estratégias que integrem história e ensino de matemática.

Referências

Bartoli, C. (1564). *Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive* (...). Venetia: Francesco Franceschi Sanese.

Bennett, J. A. (1991). The challenge of practical mathematics. In: Pumfrey, S., Rossi, P. L. & Slawinski, M. (eds.). *Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe*, 176-190. Manchester, New York: Manchester University Press.

Bennett, J. A. (1998). Practical Geometry and Operative Knowledge. *Configurations*, 6, 195-222.

Bennett, J. A. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? *British Journal for the History of Science, 36*(2), 129-150.

Dias, M. S. & Saito, F. (2011). História e ensino de matemática: o báculo e a geometría. In: *Anais do Profmat 2011 e XII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática) – Lisboa: 5 a 8 de setembro de 2011*. Lisboa: Associação dos professores de matemática.

Digges, L. (1556). *A boke named Tectonicon. Briefelye shewynge the exacte, and speady reckenynge all manner lande, squared tymber, stone, steaples, pyllers, globes, etc...* London: Iohn Daye for Thomas Gemini.

Fischer, D. H. (1996). *The Great Wave: Price, Revolution and the Rhythm of History*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Hankins, T. L. & Silverman, R. J. (1995). *Instruments and the Imagination.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Higton, H. (2001). Does using an instrument make you mathematical? Mathematical practitioner of the 17th century. *Endeavour*, 25(1) 18-22.

Homann s.j., F. A. (1991). Introduction. In: Hugh of Saint Victor. (1991). *Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor*, 1-30. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press.

Hugh of Saint Victor (1956). Hvgonis de Sancto Vitore: *Practica Geometriae.* Ed. R. Baron. *Osiris*, 12, 186-224.

Hugh of Saint Victor (1961). *The Didascalicon of Hugh of St. Victor: A medieval guide to the arts.* Ed. J. Taylor. New York, London: Columbia University Press.

Hugh of Saint Victor (1991). *Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor.* Trad. F. A. Homann. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press.

Kusukawa, S. & Maclean, I. (2006). *Transmitting Knowledge: Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe.* Oxford: Oxford University Press.

Monteiro, W. (2012). *Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUCSP.

Mosley, A. (2009). Early Modern Cosmography: Fine's *Sphaera Mundi* in Content and Context. In: Marr, A. (ed.). *The Worlds of Oronce Fine: Mathematics, Instruments and Print in Renaissance France*, 114-136. Donington: Shaun Tyas.

Richeson, A. W. (1966). *English Land Measuring to 1800: Instruments and Practices*. Cambridge, London: The Society for the History of Technology/The MIT Press.

Roche, J. J. (1981). The Radius Astronomicus in England. *Annals of Science*, 38, 1-32.

Roux, S. (2010). Forms of mathematization (14th-17th centuries). *Early Science and Medicine*, 15/4-5, 319-337.

Saito, F. (2009). Algumas considerações historiográficas para a história dos instrumentos e aparatos científicos: o telescópio na magia natural. In: Alfonso-Goldfarb, A. M., Goldfarb, J. L., Ferraz, M. H. M. & Waisse, S. (eds.). *Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência*, 103-120. São Paulo: PUCSP.

Saito, F. (2011). *O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta*. São Paulo: Educ/Ed. Livraria da Física/FAPESP.

Saito, F. (2012). Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos «matemáticos» do século XVI. In: Siva, M. R. B. da & Haddad, T. A. S. (eds.). *Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP – 03 a 06 de setembro de 2012*, 1099-1110. São Paulo: EACH/USP.

Saito, F. (2013). Instrumentos e o «saber-fazer» matemático no século XVI. *Revista Tecnologia e Sociedade,* 18/especial, 101-112.

Saito, F. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *Rematec*, 9/16, 25-47.

Saito, F. (2015). *História da Matemática e suas reconstruções contextuais* [forthcoming book].

Santos, L. R. (2014). *Leon Battista Alberti (1404-1472) e a medida do tempo em sua obra* Matemática Lúdica (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUCSP.

Shelby, L. R. (1972). The Geometrical Knowledge of Medieval Master Masons. *Speculum*, 47, 395-421.

Simonson, S. (2013). The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag. Acesso em: 6 julho 2013, em: http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/MathofLevi.pdf.

Taylor, E. G. R. (1954). *The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England.* Cambridge: Institute of Navigation/Cambridge University Press.

Van Helden, A. & Hankins, T. L. (1994). Introduction: Instruments in the History of Science. *Osiris*, 9, 1-6.

História e ensino de matemática: construindo interfaces[1]

History and Math Teaching: Building Interfaces

Fumikazu Saito[2]

Resumo

Este artigo apresenta os principais pontos discutidos em seminários realizados no Programa de Maestria en Enseñanza de las Matemáticas, da Pontifícia Universidad Católica del Peru (PUCP), em outubro de 2014. Apresentamos uma proposta de articulação entre história da matemática, baseada em tendências historiográficas atuais, e ensino de matemática. Essa articulação tem por pressuposto o diálogo entre historiadores da matemática e educadores matemáticos com vistas a construção de uma interface entre história e ensino de matemática.

Palavras-chave: *história da matemática; educação matemática; interfaces.*

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – fsaito@pucsp.br

Abstract

This paper presents the main issues discussed in seminars carried out by the Master's Program in Mathematics Education of the Pontifical Catholic University of Peru (PUCP) in October 2014. We present a proposal to articulate the history of mathematics, based on current historiographical trends, and math teaching. This approach assumes a dialogue between historians of mathematics and mathematics educators in order to build an interface between history and mathematics.

Keywords: *history of mathematics; mathematics education; interfaces.*

Introdução

A história da matemática pode ser um instrumento importante para a formação docente na medida em que promove uma visão mais crítica em relação à matemática e à construção do conhecimento matemático. Utilizando-se de fontes adequadas e atualizadas, a história da matemática prepara o professor para lidar com as contingências não só relativas ao conteúdo matemático que deve dar conta, mas também a outros aspectos relativos ao processo de ensino de matemática. Apontamos, assim, para alguns pontos essenciais de ordem historiográfica e epistemológica com vistas a fundamentar as investigações que procuram alinhar teorias da didática matemática à história da matemática.

Este artigo encontra-se dividido em três partes, correspondendo a três momentos explorados nos seminários realizados no Programa de Maestria en Enseñanza de las Matemáticas, da Pontifícia Universidad Católica del Peru (PUCP), em outubro de 2014. Na primeira parte, discorremos sobre as questões de ordem epistemológica a serem observadas na construção de interfaces entre história, ensino e aprendizagem de matemática. Na segunda, tecemos algumas considerações de ordem historiográfica da história da matemática. E, na terceira, apontamos para as questões de ordem epistemológica na interface entre história da matemática e educação matemática.

Interfaces entre história, ensino e aprendizagem de matemática

Várias propostas que procuram aproximar história da matemática e ensino de matemática têm sido apresentadas e apreciadas por educadores não só no Brasil, mas também no exterior. Tais propostas, além de fornecer subsídios para compreensão do papel da história no ensino, pontuam as diferentes vertentes pedagógicas e didáticas associando-as ao uso da história da matemática para propor novos caminhos de abordagem para o ensino.[3]

Entretanto, os estudos com o intuito de avaliar e trazer novas contribuições ao ensino de matemática resumem-se em sua maior parte apenas a ensaios e relatos de aplicações. Como bem observam Baroni e Nobre (1999), a viabilização das propostas que buscam articular história da matemática e ensino de matemática carece ainda de bases teóricas mais sólidas. De fato, os parcos estudos nesse sentido reduzem-se basicamente a explorar e discutir as potencialidades didáticas e pedagógicas da história sem considerar as diferentes problemáticas que encerram a aproximação de duas áreas de conhecimento distintas do ponto de vista epistemológico.

Como toda área de conhecimento, pesquisas e estudos em história da matemática dependem de especialistas. Desse modo, pesquisas e estudos em educação matemática que buscam articular história e ensino devem considerar a especificidade do campo de investigação da história da matemática, visto que educação matemática e história da matemática são duas áreas de conhecimento que possuem contornos bem definidos por diferentes métodos e objeto de investigação (Saito, Dias, 2013).

---

[3] Vide estudos publicados, por exemplo, em Fauvel e Van Maanen (2000); D'Ambrosio (2013); Mendes (2006, 2009, 2013); Mendes, Fossa e Nápoles (2006); Miorim & Vilela, 2009; Miguel et al (2009); Furinghetti (2007); Miguel & Miorim (2005); Miguel e Brito (1996).

A articulação entre história e ensino, portanto, requer que consideremos não só aspectos epistemológicos e metodológicos ligados à história da matemática, mas, também, à educação matemática. Nesse sentido, o diálogo entre historiadores da matemática e educadores da matemática faz-se essencial, visto que é preciso alinhar e adequar o que elas têm em comum, isto é, o conhecimento matemático (Saito, 2010, 2013a).

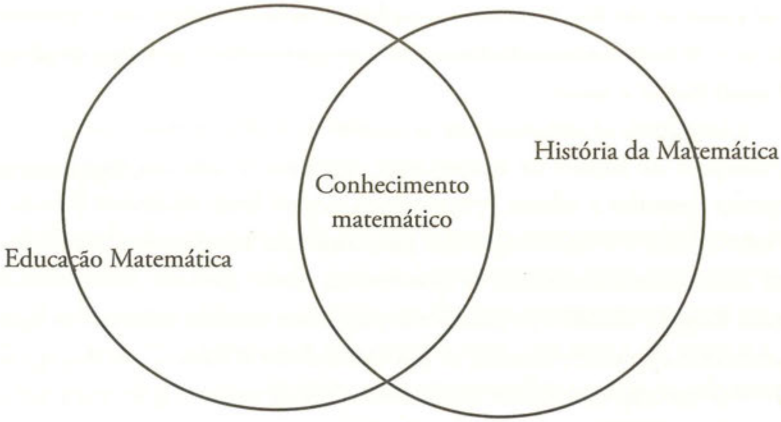


Figura 1. Articulação entre história da matemática e educação matemática (figura nossa).

O diálogo entre historiadores e educadores é necessário por duas razões: 1) para aproximar o educador matemático dos recentes desenvolvimentos da história da matemática, baseada em tendências historiográficas atuais; e 2) para sensibilizar o historiador da matemática envolvido com ensino de matemática a produzir material bibliográfico acessível aos educadores matemáticos. No que diz respeito à primeira, grande parte da produção em história da matemática, divulgada em livros didáticos, mídias e outras literaturas, está muito desatualizada, visto que esse material está ainda baseado numa perspectiva historiográfica que remonta o início do século XX. Com relação à segunda, a recente produção está voltada para especialistas em história da matemática. Embora se tenha publicado muito material novo sobre a história da matemática nos últimos vinte anos, poucos estudos chegam ou chegarão ao professor. Desse modo, como o objetivo da articulação entre história e ensino não é fazer do professor um historiador, é preciso aproximar dois diferentes perfis para que seja publicado material bibliográfico mais acessível não só ao professor, mas também aos estudantes.

Podemos dizer que, para suprir a falta de material adequado, o próprio educador matemático procurou produzi-lo. De fato, muito da produção em história da matemática partiu da iniciativa do educador matemático que produziu interessantes e bons trabalhos em história. Contudo, por não ter a formação de historiador, muitos educadores não estão conscientes das escolhas historiográficas que fizeram, ou fazem, ao preparar e elaborar seus materiais.

Por «historiografia» devemos aqui entender a «escrita da história». O educador matemático deve estar ciente de que toda narrativa da história da matemática é historiograficamente orientada. Isso significa que as narrativas históricas não são neutras e são influenciadas por diferentes fatores ligados não só à formação, mas também à concepção de ciência de quem escreve a história.[4] É por isso que a história é sempre reescrita e reinterpretada de tempos em tempos, pois além de surgir novos documentos, os historiadores adotam novas abordagens metodológicas e historiográficas[5].

Como já mencionamos, as histórias da matemática disponíveis aos professores e ao público em geral estão baseadas numa perspectiva historiográfica que remonta o início do século XX. Estas são narrativas que privilegiam aspectos internos à própria área de conhecimento, encadeando linear e progressivamente as diversas etapas e descobertas matemática. E mesmo as abordagens mais contextualizadas, que procuram fundamentar o conhecimento matemático em aspectos sociais,

[4] Sobre historiografia da história da matemática e da ciência, consulte: Beltran, Saito e Trindade (2014); Saito (2012) e Alfonso-Goldfarb e Beltran (2004).

[5] Cf. a ese respeito: Nobre (2014); Bromberg e Saito (2010) e Goulding (2010).

econômicos e políticos, reduzem o processo da construção do conhecimento a narrativas históricas do progresso do conteúdo matemático.

Com isso, entretanto, não queremos dizer que essa forma de escrever a história esteja errada ou equivocada. Como veremos mais adiante, esse tipo de narrativa tinha um propósito: por meio dele, estudiosos de matemáticas buscaram justificar a matemática no seu processo de institucionalização e, no início do século XX, ficou conhecido entre os historiadores e educadores como «história presentista».

As narrativas históricas presentistas são aquelas iluminadas pela matemática do presente. Nessa perspectiva historiográfica, o historiador «pinça» no passado somente o que lhe é familiar, deixando de lado outros aspectos do desenvolvimento do conhecimento (que, na realidade foram importantes) por serem incompreensíveis do ponto de vista matemático moderno. Essa forma de escrever a história, entretanto, encerra dois problemas, pois a história da matemática: 1) é apresentada como a história dos conceitos matemáticos que foram se aprimorando desde *priscas eras* até hoje; e 2) não apresenta o processo da construção do conhecimento matemático, visto que narra apenas a história daquilo que deu certo, ou seja, dos resultados.

Uma história presentista é sempre linear e progressista, visto que procura reconstruir o processo histórico tendo em vista a matemática do presente. Assim, ao buscar no passado a origem ou a gênese de um conceito matemático moderno, o historiador acaba encadeando cada descoberta matemática (supostamente relacionada a esse conceito matemático moderno) de forma lógica e cronológica, como se os protagonistas da história estivessem conscientes desse processo. A construção do conhecimento, dessa maneira, reduz-se apenas a organizar cada descoberta matemática, atribuindo-a a um personagem, sem considerar o contexto e a contingência histórica. São características dessa perspectiva historiográfica aquelas histórias que buscam localizar no passado os «precursores» e «pais», enfileirando artificialmente vários matemáticos até chegar ao presente. Esse percurso dá a impressão de que só existiu um único caminho que a matemática deveria trilhar de forma contínua e progressiva, reforçando a ideia de uma «história dos vencedores». Mais ainda, como observam Bromberg e Saito (2010, p. 52), visto que a história da matemática está embasada na história do mundo ocidental, ela se tornaria essencialmente eurocêntrica.

Podemos dizer que uma narrativa «presentista» não favorece o ensino (nem a aprendizagem da matemática) por meio da história, pois os estudantes e os futuros docentes não são colocados diante de questões epistemológicas ligadas à construção do conhecimento. Isso porque esse tipo de narrativa mascara, na verdade, um processo de construção de conhecimento «pronto e acabado» na medida em que se baseia apenas em «descobertas matemáticas». É como se o edifício, ou a planta de um prédio, já fosse conhecido (isto é, dado), antes mesmo de ser construído. Ao dar ênfase ao caráter heurístico do desenvolvimento da matemática, esse tipo de história parte do pressuposto de que o edifício da matemática (ou pelo menos seu «projeto») já se encontra delineado, bastando apenas que seu conteúdo seja descoberto e explicitado.

Isso, entretanto, não significa que não houve descobertas matemáticas ao longo da história, mas que essas descobertas precisam ser contextualizadas historicamente sem perder de vista o mapa do conhecimento do passado. Assim, frente a essa vertente, historiadores da matemática, juntamente com historiadores da ciência, têm se esforçado em renovar alguns pressupostos historiográficos[6]. Particularmente, o grupo HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática/ PUCSP) tem buscado recursos nas atuais tendências historiográficas da História da Ciência para suprir a carência de metodologias de abordagem e análise[7]. Essa nova proposta, que busca articular três esferas de análise (historiográfica, epistemológica e contextual), tem privilegiado

[6] Vide, por exemplo, Roque (2012) e Saito (2012).
[7] HEEMa - http://heema.org

a contextualização não só dos documentos, mas também da formação e classificação das diferentes áreas de conhecimento (Figura 2)[8].

Figura 2. As três esferas de análise (figura nossa)

Nessa vertente, encontram-se estudos que buscam compreender o desenvolvimento do conhecimento matemático como processo e não como encadeamento de resultados (Saito, Dias, 2011). A vantagem dessa abordagem historiográfica repousa no fato de que, ao situar a matemática do passado no passado, buscando-se analisar cada etapa do desenvolvimento do conhecimento matemático segundo uma rede de relações devidamente contextualizada, faz emergir do próprio processo histórico novas questões epistemológicas que podem ser exploradas pelo educador matemático. Compartilhando dessa proposta historiográfica, estudos realizados pelo grupo HEEMa têm enfatizado a possibilidade de «flagrar», no processo da construção do conhecimento, a formação do objeto matemático, buscando compreender o movimento do pensamento no momento de sua formação.

8 Cf.: Alfonso-Goldfarb (2008) e Alfonso-Goldfarb, Ferraz & Waisse (2013). Discorremos sobre as três esferas de análise mais adiante.

Assim, o grupo tem primado em analisar os objetos matemáticos de maneira contextualizada, sem encerrá-los em modelos epistemológicos pré-definidos, de modo a fazer emergir novos objetos de análise na historicidade, tais como processos que conduzem, por exemplo, a compreender o papel da representação, visualização, abstração, raciocínio, demonstração, métodos, definições, etc., na construção do conhecimento, bem como outros aspectos da matemática e de sua prática. Ao se pautar nesses processos, o grupo busca compreender não só a natureza do conhecimento matemático, mas também os meios de sua apropriação e as diferentes formas de sua difusão e transmissão, reorientando a visão do que são os objetos da matemática. O estudo do processo histórico, dessa maneira, conduz a uma linha interpretativa diferenciada que propicia a abordagem do mesmo objeto por outra perspectiva, uma vez que, ao captar o movimento da construção do conhecimento, revela, no próprio processo, os nexos conceituais em torno do objeto matemático localizado no tempo e no espaço.

Podemos dizer que a história da matemática, entendida nesses termos, temporaliza e contextualiza o objeto matemático, que livre das malhas formais da matemática (aquela axiomatizada), é restituído ao seu processo de construção. Do ponto de vista epistemológico, entretanto, isso significa balizar adequadamente o que é histórico e o que é lógico (e, portanto, formal) na construção do conhecimento. Ou seja, é preciso considerar historicamente o encadeamento das descobertas matemáticas sem reduzi-las a uma organização lógica e formal dos conteúdos, visto que tal organização (e também a discussão epistemológica a respeito desse conteúdo) é sempre posterior.

Desse modo, embora devamos reconhecer que uma descoberta matemática, de fato, antecede a outra cronologicamente, a relação entre uma e outra não pode ser entendida como causalmente determinada, tal como compreende a história presentista. Voltaremos a discorrer a esse respeito mais adiante. Basta aqui ter em consideração que o que se descobre antes nem sempre está numa relação de causa e efeito com a descoberta seguinte, visto que quem estabelece essa relação entre «antecedente» e «consequente» na narrativa histórica é o historiador.

Portanto, nenhuma narrativa da histórica é neutra, visto que depende do contexto em que se encontra o historiador. Nesse sentido, a história da matemática não está pronta e acabada de modo que não pode ser reduzida a um repositório fixo de informações em que o educador matemático poderia buscar recursos para articular história em sala de aula. É preciso antes repensar não só o papel da história da matemática no ensino de matemática, mas também considerar outros aspectos que aproximem as concepções historiográfica do historiador e didática do educador (Figuras 3)[9].

A aproximação dessas concepções é desejável para que a interface entre história e ensino contemple as questões epistemológicas que estão na base na construção do conhecimento matemático. Para tanto, o grupo HEEMa vem fazendo esforços para articular história e ensino de matemática considerando dois aspectos: 1) o contexto do desenvolvimento dos conceitos matemáticos e 2) o movimento do pensamento na formação desses mesmos conceitos (Saito, Dias, 2013). A interface entre história e ensino aqui proposta, dessa maneira, procura articular dialeticamente o histórico e o lógico na construção do conhecimento, tendo em vista uma história da matemática baseada em pressupostos historiográficos mais atualizados, como abordamos a seguir.

Algumas considerações historiográficas da história da matemática

Como mencionamos anteriormente, a historiografia é o estudo crítico do fazer histórico, ou seja, dos pressupostos da «escrita da história». Nos últimos trinta anos, a história da ciência e da matemática passaram a reavaliar seu campo de estudos e de investigação, procurando renovar

---

[9] A esse respeito, consulte: Beltran (2009).

tais pressupostos. Contudo, muitos desses estudos baseados em novas propostas e abordagens historiográficas ainda não chegaram aos educadores em geral[10].

Com isso, entretanto, não queremos dizer que a história da matemática presente em grande parte do material didático disponível aos professores ou aqueles veiculados por diferentes meios de divulgação esteja errada, mas que as narrativas dessas histórias, as quais denominaremos a partir de agora como «tradicionais», estão ancoradas em pressupostos historiográficos que remontam o início do século XX. Assim, mais do que «erradas», elas estão desatualizadas em relação aos novos estudos históricos pautados em tendências historiográficas atuais.

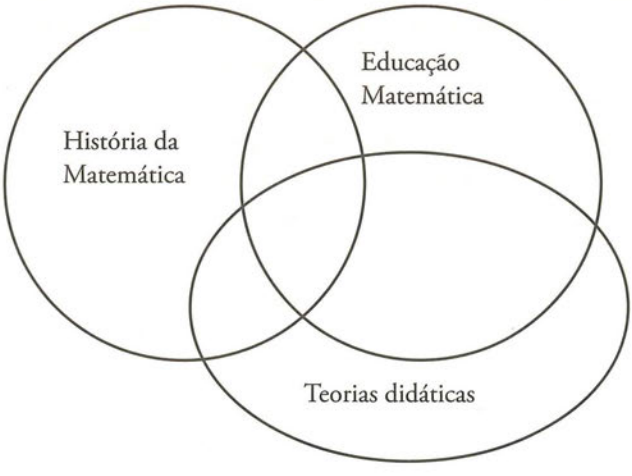


Figura 3. Historiografia e teorías didáticas (figura nossa)

[10] Sobre as novas perspectivas historiográficas da história da ciência e da matemática, consulte: Roque (2014); Beltran, Saito e Trindade (2014); Saito (2012); Mann (2011); Gray (2011); Alfonso-Goldfarb (2009); Golinski (2005); Alfonso-Goldfarb e Beltran (2004); Alexander (2002, 2006); Gavrouglu, Christiadis e Nicolaidis (1994).

Para compreendermos a diferença essencial entre essas duas historiografias, uma de vertente tradicional e outra, atual, vamos recorrer à própria «história da história da matemática» que, em grande parte, teve relação com a história da ciência. Para tanto, devemos iniciar fazendo-nos a seguinte pergunta: a história da matemática é a história de que «matemática»?

Para responder a essa pergunta é preciso considerar que aquilo que hoje reconhecemos como matemática, ou seja, a matemática moderna, teve sua origem por volta dos séculos XVI e XVII. Isso porque não podemos nos referir às áreas do conhecimento, anteriores ao século XVIII, como disciplinas específicas, visto que antes do século XIX ainda não havia «cientistas» e «matemáticos» profissionais embora existisse um corpo de conhecimentos que possamos reconhecer como «ciência» e «matemáticas» (Alfonso-Goldfarb, 1994). Desse modo, para respondermos à pergunta anterior, precisamos considerar alguns aspectos ligados à institucionalização da matemática como área autônoma de conhecimento, pois a história da matemática que nos interessa é a história dessa matemática moderna que começou a dar seus primeiros passos em direção à especialização moderna por volta do século XVI.

Isso, entretanto, não quer dizer que não existiram matemáticas anteriores a esse período, nem que elas não sejam importantes e não mereçam nossa atenção. Sem dúvidas, podemos encontrar conhecimentos matemáticos no antigo Egito, na Mesopotâmia, na antiga Grécia e na Idade Média que contribuíram para o desenvolvimento da matemática moderna. Entretanto, tais conhecimentos são vistos pelos historiadores atuais como fontes (antigas e medievais) que, interpretadas à luz de novas concepções filosófica, teológicas e estéticas, favoreceram a construção novas ideias, técnicas e conteúdos matemáticos a partir do século XVI.

Podemos dizer que esse processo, do ponto de vista histórico, não foi contínuo e natural, visto não encontrarmos indícios e evidências de que essas matemáticas antigas se desenvolveram de forma linear e contínua até chegar aos dias de hoje. Na verdade, foram os estudiosos de matemáticas dos séculos XV, XVI e XVII que se apropriaram dos conhecimentos matemáticos antigos e deram-lhes novas interpretações sob uma perspectiva essencialmente matemática, passando a investir na construção de uma grande área de conhecimento que deveria ser assentada sobre novas bases.

Em linhas gerais, esse movimento coincide com o processo que conduziu à ciência moderna. Nesse sentido, foi ligada a essa nova ciência (da qual fazia parte as matemáticas antigas e medievais) que a história da matemática ganhou impulso. Assim, muito mais do que mera narrativa histórica, a história da matemática (e também da ciência) era uma justificativa da ciência e da matemática que estava se formando e tinha, portanto, o perfil do debate que estava gerando essa formação (Alfonso-Goldfarb, 1994; Debus, 2004).

Desse modo, a distinção entre uma matemática mais antiga e outra, moderna, está relacionada ao processo da construção de uma nova expressão de conhecimento em que os conteúdos das matemáticas, antiga e medieval, foram apropriados pelos protagonistas da ciência moderna e reorganizados num contexto muito diferente em que tais conteúdos foram pensados e elaborados. Contudo, deve-se ressaltar que a passagem de uma expressão de conhecimento a outra não se fez porque a ciência e a matemática antigas eram inferiores, imprecisas e menos verdadeiras em relação à moderna. Devemos aqui observar que a ciência e a matemática moderna não são aprimoramentos de uma ciência e matemática antigas, visto que elas não só colocavam diferentes questões, mas também expressavam diferentes preocupações referentes à natureza, às técnicas e ao homem. Elas são distintas porque se encontravam ancoradas em diferentes concepções de ciência.

É importante termos em conta que os estudiosos nos séculos XV, XVI e XVII estavam bem familiarizados com a ciência de sua época, como nós hoje estamos com a nossa ciência do século XX. Estudiosos como Galileu Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650), Johannes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1643-1727), por exemplo, formaram-se numa «escola» cujo modelo estava ainda ancorado numa antiga concepção de ciência, ou seja, aristotélica. Embora esses estudiosos tenham impulsionado o movimento que culminaria na ciência moderna, suas ideias, entretanto, em parte eram novas e, em parte, antigas.

Desse modo, estudos recentes em história da ciência têm revelado que, mais do que rompimento total com o passado, a ciência moderna parece ter se constituído numa tensão entre saberes antigos e modernos, entre as novas possibilidades de conhecer a natureza (proporcionada por diferentes ideias que os estudiosos começaram a ter acesso naquela época) e o conhecimento estabelecido que, embora fosse criticado, não fora totalmente descartado de uma hora para outra.

Assim, de um lado, antigos conhecimentos, que estavam de alguma maneira perdidos ou tinham sido ignorados, tornaram-se acessíveis aos estudiosos daquela época. A recuperação de antigas doutrinas pitagóricas, platônicas, neoplatônicas, herméticas, entre tantas outras, juntamente com os conhecimentos das artes em geral, que era transmitido oralmente, deu margens a diferentes debates acerca das novas formas de investigar a natureza. De outro lado, novos conhecimentos adquiridos na recém-descoberta América e proporcionados pelas novas rotas marítimas ao extremo oriente começaram a bombardear os estudiosos da natureza por todos os lados, dando a impressão de que o mundo era muito maior do que antes se imaginava[11].

Podemos dizer que, a partir do século XV, estudiosos da natureza e de outros segmentos do conhecimento começaram a resgatar não só antigos «saberes», mas também a recolher toda sorte de conhecimentos ligadas à natureza e às «artes». Isso foi em grande medida resultado de um interesse renovado pelos textos clássicos e pela valorização das artes manuais.

[11] Sobre este assunto, consulte especialmente estudos de Debus (1996) e de Rattansi (2004).

Vale lembrar que a veneração pelos antigos e a recuperação de textos originais de Aristóteles, Ptolomeu, Galeno entre muitos outros, foram características daquele período. Assim, a leitura desses textos e o confronto com as traduções e comentários feitos pela escolástica, expressão de conhecimento dos finais da Idade Média, conduziram, posteriormente, a um intenso debate.

Mas, ao lado dessas traduções e comentários, outra literatura rica em tratados que apresentavam procedimentos empregados em várias artes também exerceu grande influência na maneira de se fazer ciência e matemática. Isso esteve associado à valorização das artes mecânicas proporcionada pelas profundas modificações que sofrera a posição social dos artesãos. Modificações essas que estiveram ligadas à ascensão da burguesia e à consolidação das monarquias nacionais que implicou na passagem da condição de mero artesão para a de burguês (Rossi, 1989).

Devemos tomar o cuidado de não entender «artes» nos séculos XV, XVI e XVII como «belas-artes». Naquela época, «arte» (*ars*) tinha um sentido mais lato, ligado à prática e à experiência, visto que esse termo designava as artes mecânicas e ao trabalho manual em oposição às artes liberais (em essência, voltada à reflexão teórica)[12]. O conhecimento das artes em geral permitia ao estudioso manipular a natureza por meio de acurada observação e experimentação. Os artesãos e toda sorte de artífices tinham conhecimentos das propriedades de diferentes plantas, metais, minerais, animais etc. que possibilitavam manipular a matéria e obter perfumes, remédios, tintas, e outros instrumentos e produtos úteis ao homem. O crescente interesse por esse tipo de conhecimento conduziu muitos artesãos e estudiosos da natureza a publicarem todo tipo de literatura, fosse para valorizar as artes como campos de conhecimento, fosse para disseminar conhecimentos que permitissem operar e controlar os fenômenos naturais.

---

[12] A esse respeito, vide estudos de Smith (2004, 2006); Long (2000, 2001, 2005); Rossi (1989).

Mas essa literatura de caráter mais operativo esteve também associada ao interesse renovado dos estudiosos da natureza pelas matemáticas antigas. Tal interesse, entretanto, não esteve relacionado apenas ao desenvolvimento da geometria ou da álgebra por exemplo. Seu efeito se fez sentir de dois modos: de um lado, fomentou o desenvolvimento de um enfoque matemático da natureza e, de outro, deu origem às investigações ocultistas relacionadas ao misticismo dos números. A recuperação de textos neoplatônicos, cabalísticos e herméticos da antiguidade tardia de teor «místico» e religioso justificaram, desse modo, novas práticas, tais como a da magia natural no século XVI, que estimulou novas maneiras de investigar a natureza baseando-se na observação, na experimentação e nas matemáticas (Saito, 2008a, 2008b, 2011).[13]

Podemos dizer que foi num profícuo diálogo com o conhecimento do passado (herdados e recuperados) que a ciência e a matemática modernas encontraram seu caminho e procurou renovar suas bases. No entanto, deve-se salientar que esse movimento não foi um fenômeno estritamente europeu. Novas ideias trazidas do oriente, principalmente aquelas desenvolvidas pelos árabes, também contribuíram para o surgimento da ciência e da matemática modernas.

Cabe observar que, após a queda do Império Romano por volta do século V, o ocidente latino teve pouco acesso ao conhecimento grego e de outras civilizações antigas, tais como aquelas egípcias e mesopotâmicas, que ficaram nas mãos dos árabes. Por um longo período, os árabes traduziram, comentaram e interpretaram antigos escritos, principalmente gregos, e introduziram novidades em diferentes segmentos do conhecimento. Lenta e gradativamente, desde a Idade Média, esses conhecimentos passaram para o ocidente latino em forma de manuscritos. Estudos nos campos da matemática, da medicina, da astronomia e da alquimia, por exemplo, passariam a ser conhecido pelos estudiosos

[13] Cf. também Rossi (2006a, 2006b), Eamon (1996), Webster (1993), Zambeli (1991), Shea (1991), Shumaker (1989) e Vickers (1986).

latinos gradativamente, influenciando posteriormente a ciência e a matemática modernas.

Mas, além da ciência árabe, a exploração marítima a partir do século XVI introduziu novos conhecimentos proporcionados pela descoberta de novas culturas nunca antes imaginadas ou vistas pelos europeus. O intenso comércio marítimo propiciado pela descoberta das Américas e da rota para o oriente introduziu «novas» plantas e animais nos herbários e bestiários, já muito comuns entre os estudos medievais. Associado a essas novidades, houve ainda intercâmbio de conhecimentos em astronomia, navegação, agricultura, medicina etc. com povos nativos das Américas e outros já considerados «antigos» que se encontravam no extremo oriente. Esse intercâmbio ainda se intensificou em séculos posteriores e contribuiu para introduzir novas ideias no corpo de conhecimentos sobre a natureza e o homem compartilhado por estudiosos europeus. Além disso, novas técnicas e procedimentos passaram a ser desenvolvidos a partir daquela época, visto que a navegação, as artes militares, a arquitetura entre muitos outros segmentos de conhecimento e setores da sociedade requeriam novas soluções para os novos problemas que emergiram naquela época. Esses novos conhecimentos passaram a receber atenção especial de príncipes e governantes que investiram em muitos desses novos desdobramentos do conhecimento. Entretanto, no que diz respeito à ciência e à matemática modernas, é preciso considerar que esses conhecimentos não estavam harmoniosamente organizados e nem as ideias e os princípios que explicavam a natureza e o homem eram concordantes entre si.

O confronto dessas diferentes ideias ligadas às matemáticas e à natureza (que muitas vezes não eram comportadas pela ciência vigente naquela época) gerou calorosos debates conduzindo muitos estudiosos da natureza a rever os pressupostos e as bases da ciência aceita até então. Nesse particular, é importante ter em conta que o motor desses debates, entretanto, não foi de natureza estritamente epistemológica, filosófica, científica, metodológica ou religiosa, como comumente se pensa.

Sem dúvidas, a ciência moderna é diferente da ciência que a antecedera, porém essa diferença deve ser entendida num contexto em que todas essas mesmas questões de natureza epistemológica, filosófica, científica, metodológica, religiosa, entre muitas outras, estavam em jogo. Aliás, os protagonistas da ciência moderna nem sabiam ao certo a que tipo de ciência se chegaria, embora todos estivessem envolvidos num mesmo «projeto».

A ciência e a matemática modernas, portanto, não surgiram de um dia para outro, nem a partir de uma única proposta. Elas foram se moldando lenta e gradativamente em meio a diversos debates em que questões de diferentes naturezas, que não estão necessariamente relacionadas ao conhecimento científico e matemático no sentido estrito, tal como hoje entendemos, se entrelaçaram. Como o edifício do conhecimento não poderia ser simplesmente escorado, estudiosos da natureza passaram a propor diferentes caminhos, buscando organizá-lo e assentá-lo em bases sólidas e firmes. Nascia aí um projeto que se consolidaria no século XIX (ou pelo menos era o que os cientistas pensavam) quando, então, a matemática, a física, a química e a biologia finalmente adquiriram feições modernas.

Como mencionamos anteriormente, os protagonistas da ciência moderna criticaram o modo de fazer de ciência de seus antecessores. Crítica essa que deve ser contextualizada, observando-se as contingências de uma época em que outros aspectos não só ligados à sociedade, mas também ao conhecimento estavam em profunda transformação como nunca antes visto, especialmente no ocidente latino.

Essas mudanças provocaram intensos debates de natureza teológica, filosófica e epistemológica em vários segmentos da sociedade e do conhecimento. Isso porque, como observamos antes, o mundo parecia ser muito maior do que se imaginava e o conhecimento até então herdado pela tradição não parecia ser total. A crescente sensação de que a ciência antiga não abarcava mais a totalidade do conhecimento do mundo conduziu estudiosos de todos os segmentos do conhecimento a tomarem a iniciativa de avançar e de conhecer melhor a natureza. Isso significava que a «verdadeira ciência» ainda estaria por vir. Inaugurava-se, assim, a ideia de progresso do conhecimento e os estudiosos da natureza, a partir do século XVII, investiram seus esforços em direção a um conhecimento total acerca do mundo (Rossi, 2000).

Esses estudiosos e outros interessados na «nova ciência» encontravam-se nas academias e sociedades que, desde o século XV, eram locais em que aqueles que tinham conhecimentos práticos e, outros de formação erudita, se encontravam e debatiam a respeito do conhecimento em geral. A ciência e a matemática modernas nasceram, assim, de um esforço colaborativo em que não só professores universitários, médicos, juristas e teólogos, mas também o artesão, os praticantes de matemáticas, o pintor, o escultor, o arquiteto entre muitos outros discutiram e debateram sobre o conhecimento da natureza. Nessas reuniões apresentavam-se novas experiências, experimentos, instrumentos, aparatos e outros procedimentos de se fazer ciencia.

Com o objetivo de divulgar para disseminar novos conhecimentos, essas sociedades e academias tiveram papel importante na institucionalização da ciência e da matemática modernas, visto que era nesses locais que o conhecimento passava a ser produzido. É nesse contexto que a história da ciência e da matemática tiveram papel essencial no processo não só de disseminação do conhecimento, mas também da construção do edifício científico e matemático, pois, em nome do progresso do conhecimento, passaram a justificar o próprio processo que conduziu à especialização moderna. Desse modo, podemos dizer que a história era mais do que mera narrativa, visto que era parte integrante do processo da construção do conhecimento. Era a história que evidenciava o progresso do conhecimento, convertendo-a num discurso legitimador da ciência e matemática modernas ao longo do século XVIII.

A esse respeito é preciso considerar que «histórias» da matemática sempre foram escritas desde a Antiguidade, mas foi a partir do século XVIII que vemos surgir grandes compêndios, tal como *Cronica de matematici: overo Epitome dell'istoria delle vite loro*, de Bernardino Baldi (1553-1617).

Essa obra, originalmente escrita no século XVI, foi publicada postumamente em 1707. Nela o autor buscou recensear matemáticos desde a antiguidade até o século XVII, dedicando uma breve biografia a cada um deles.

Na mesma época e no mesmo estilo, encontramos ainda outra importante obra intitulada *Historia matheseos universae*, publicado por Johann Christoph Heilbronner (1706-1745) em 1742. Esta obra de Heilbronner e aquela outra de Baldi, que são bem descritivas, procuravam apresentar um recenseamento das principais ideias matemáticas associando-as a seus descobridores.

Em linhas gerais, essa forma de escrita histórica de cunho biográfico e linear influenciou uma geração de historiadores até os dias de hoje. Contudo, o grande modelo de história da matemática foi, provavelmente, *Histoire des mathématiques* de Jean-Étienne Montucla (1725-1799), cujos quatro volumes foram publicados entre os anos de 1799 e 1802. Diferentemente de outras obras anteriores, a história da matemática de Montucla apresenta-se como um estudo sistematizado do pensamento matemático. Em *Histoire des mathématiques* encontramos, além das datas e nomes, o desenvolvimento das ideias e dos problemas matemáticos.

Esse modelo linear de escrita histórica, que privilegia apenas os aspectos internos e técnicos ligados à área de conhecimento matemático, consolidou-se no início do século XX, com a volumosa obra de história da matemática, intitulada *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, publicada em quatro volumes por Moritz Benedikt Cantor (1829-1920) entre 1880 e 1908. A influência dessa historiografia foi tão grande que encontramos traços dela em outras obras de história da matemática hoje bem conhecidas, tais como *History of Mathematics* de Florian Cajori (1859-1930), *Introdução à história da matemática* de Howard Eves, *História da Matemática* de Carl B. Boyer e *History of Mathematics* de David E. Smith.

Mas, diferentemente da obra de Montucla, por exemplo, o grande compêndio de história da matemática de Cantor (1880 e 1920), que foi publicado em finais do século XIX e início do XX, passou a ter outro papel. Embora a obra apresentasse aspectos similares às histórias da matemática do século anterior, valorizando o progresso do conhecimento matemático, a história da matemática passou a servir mais como um adorno, que ilustrava o desenvolvimento da matemática desde suas origens até aquela época, do que como discurso legitimador.

De finais do século XIX ao início do XX, a história começou, gradativamente, a perder seu papel no processo da construção do conhecimento científico e matemático. Isso ocorreu porque a ciência e a matemática passaram a se especializar, constituindo-se em campos de conhecimento específicos. Surgia aí o cientista (de diversas áreas de conhecimento) e o matemático profissionais que estavam preparados para tratar de sua própria área de conhecimento. Nesse contexto, a história da ciência e da matemática tinha pouco a contribuir, visto que os novos desdobramentos da ciência e da matemática, principalmente no início do século XX, revelaram não só problemas lógicos inéditos, mas também complicações na estrutura do edifício científico e matemático que o modelo histórico pouco ajudava para solucioná-las.

Desse modo, novas propostas voltadas para a reflexão em filosofia da ciência e da matemática deixariam a história à margem, recorrendo a ela apenas para ilustrar as próprias ideias filosóficas. Mais do que a história, a filosofia, dessa maneira, parecia ser mais adequada para dar conta das discussões e propor novos caminhos para a reflexão científica em geral. Surgiu, desse modo, uma espécie de «cientista-filósofo» ou «cientista-historiador» (bem como um «matemático-filósofo» ou «matemático-historiador») cuja ordem do dia era assentar a ciência e a matemática sobre bases sólidas para garantir o aprimoramento do conhecimento científico e matemático. Nesse contexto, mesmo quando valorizada, a história servia apenas como repositório fixo de informações, em que o filósofo da ciência ou da matemática, pinçava convenientemente exemplos para justificar seus pressupostos e propósitos filosóficos. Do mesmo modo, o historiador de formação filosófica buscou reconstruir a história da ciência e da matemática partindo de noções filosófica pré-concebidas. Ao proceder dessa maneira, o historiador limitava-se apenas a uma abordagem epistemológica do conhecimento deixando à margem outros aspectos não formais que foram essenciais para o desenvolvimento da ciência e da matemática (Beltran, Saito, Trindade, 2014; Saito, 2013b). Assim, a partir daí, tornou-se muito comum encontrar o par de campos «História e Filosofia da Matemática», pelo menos até a década de 1980.

Mas, atualmente, a história da matemática não se confunde mais com a filosofia da matemática. Embora não possamos estabelecer uma clara fronteira entre eles, visto que a história da matemática muitas vezes recorre à filosofia da matemática e vice-versa, é notório que o objeto de investigação e as motivações da filosofia da matemática é distinto dos da história da matemática (Beltran, Saito, Trindade, 2014).

A filosofia da matemática está mais preocupada com os aspectos formais do conhecimento matemático e dedica, dessa maneira, pouca atenção às questões de contingência histórica. Diferentemente, a história da matemática se ocupa dos processos que move o conhecimento em sua historicidade sem sobrepor a tal processo qualquer normativa filosoficamente preconcebida.

A história da matemática, embasada nas tendências historiográficas atuais, procura compreender o processo de apropriação e de transmissão de conhecimento matemático, inclusive em seus aspectos formais, devidamente contextualizados. Assim, em vez de adotar uma perspectiva normativa e filosófica, estudos em história da matemática têm insistido na necessidade de contextualizar o conhecimento científico e matemático, procurando compreender a ciência e as matemáticas do passado tal como elas eram vistas no passado, e não como elas deveriam ser vistas segundo uma perspectiva filosófica preconcebida.

Para compreendermos a natureza da ciência e da matemática, por meio de seu processo de construção histórico, é preciso avançar além da própria caracterização formal da ciência e da matemática modernas. É por essa razão que as vertentes atualizadas da história da matemática evitam sobrepor as malhas formais da filosofia e do conhecimento matemático moderno sobre o processo histórico, procurando compreender a produção do conhecimento em seu contexto. Segundo essa perspectiva histórica, não basta apenas reconhecer, por exemplo, quem elaborou o cálculo, ou quais foram as técnicas matemáticas empregadas para resolver determinados problemas matemáticos no passado. Para captar o processo, é necessário compreender o movimento que fez o conhecimento no passado para que o cálculo fosse elaborado, ou para que certas técnicas fossem empregadas para resolver problemas matemáticos. Ou seja, é preciso saber quais os conhecimentos que estavam disponíveis aos estudiosos numa determinada época, visto que a construção de conhecimento está mais relacionada ao processo de apropriação (que implica em escolhas) do que de transmissão dos conteúdos.

Como mencionamos anteriormente, nem todos os conhecimentos antigos estavam disponíveis, por exemplo, aos estudiosos medievais, visto que parte desses conhecimentos, principalmente aqueles que foram desenvolvidos no período anterior aos romanos, não chegaram até o ocidente latino antes do século X. A transmissão de conhecimento, portanto, nunca foi direta, mas passou por intermediários que o modificaram, acrescentando ou suprimindo suas partes. Além disso, no processo de apropriação desses conhecimentos, os estudiosos fizeram escolhas motivados por diferentes razões não só epistemológicas, mas também estéticas, filosóficas, éticas e teológicas. Essas escolhas que implicam tanto a aceitação, quanto o descarte de uma fonte antiga de conhecimento, podem ser motivadas por fatores extramatemáticos, conduzindo o estudioso de matemática a diferentes resultados.

O movimento da história, portanto, não é linear, visto que o conhecimento produzido numa época pode continuar a ser transmitido ou ser interrompido, para ser posteriormente recuperado. É nesse processo de «continuidades e descontinuidades» de ideias (um vai e vem constante) que um novo conhecimento é construído para ser incorporado a um conjunto de conteúdos, que estão organizados conforme critérios estabelecidos por uma comunidade de pensadores. E são esses mesmos critérios que conduzem também o historiador a organizar suas narrativas, visto que é o historiador que estabelece as relações entre os eventos na história (Saito, 2013b). Assim, como veremos a seguir, a articulação entre ensino de matemática e a história da matemática, baseada em tendências historiográficas atualizadas, pode contribuir para a formação mais crítica do professor de matemática, uma vez que a história, compreendida nesses termos, dá acesso ao processo da construção do conhecimento e desmistifica uma visão linear e progressista de conhecimento.

A interface entre história da matemática e educação matemática

Em linhas gerais, há um consenso entre historiadores da matemática e educadores matemáticos a respeito do papel da história no ensino. Segundo eles, a história da matemática contribui no processo de formação docente em três aspectos: 1) propicia a compreensão de que a matemática é resultado de atividade intelectual humana ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos; 2) reorienta a visão do que vem a ser a matemática e conhecimento matemático na medida em que o estudo do processo histórico conduz a uma linha interpretativa diferenciada, propiciando a abordagem dos objetos matemáticos por outra perspectiva e, assim, contribuindo para sua melhor compreensão; 3) alarga as fronteiras da disciplina matemática, estabelecendo uma relação dela com outros segmentos do conhecimento (Saito, Dias, 2013).

Esses três aspectos convergem para a ideia de que história da matemática promove uma visão mais crítica em relação à matemática e à construção do conhecimento matemático. Utilizando-se de fontes adequadas e atualizadas, a história da matemática prepararia o docente para lidar com as contingências não só relativas ao conteúdo matemático que deve dar conta, mas também a outros aspectos relativos ao processo de ensino e aprendizagem de matemática na medida em que propicia o docente a (re)significar e a levantar discussões sobre diferentes modelos de conhecimento, preparando-o para questões epistemológicas mais relevantes (Saito, 2013b).

Isso, entretanto, não quer dizer que devamos ensinar matemática pela história, nem repetir o percurso histórico da formação de um conceito matemático, mas buscar, no processo histórico, o movimento do pensamento no contexto da formação desse conceito. Ao aproximarmos a história e o ensino, não propomos que a pesquisa histórica seja a do professor. A articulação que aqui propomos busca construir diferentes interfaces, levando-se em consideração aspectos epistemológicos e metodológicos, ligados à história da matemática e à educação matemática, por meio da aproximação das concepções historiográfica do historiador e didática do educador (Beltran, 2009).

Convém aqui observar que não estamos nos referindo a obstáculos epistemológicos, nem reforçando as teses recapitulacionistas[14]. A nossa proposta tem primado em analisar os objetos matemáticos epistemologicamente contextualizados. A vantagem desse procedimento repousa na possibilidade de fazer emergir novos objetos de análise na historicidade, tais como processos que conduzem, por exemplo, a compreender o papel da representação, visualização, abstração, raciocínio, demonstração, métodos, definições, etc., na construção do conhecimento, bem como outros aspectos da matemática e de sua prática.

[14] Miguel e Miorim (2004) sintetizam as principais tendências de articulação entre história da matemática e ensino de matemática.

Desse modo, a interface aqui proposta não tem o propósito de «reproduzir» ou «simular» um ambiente «científico ou matemático» para que o discente «refaça» os mesmos passos do matemático pesquisador. Diferentemente, ela busca articular questões (epistemologicamente contextualizadas), que emergem no processo da construção do conhecimento, com diferentes propostas didáticas (também devidamente contextualizadas) da educação matemática, considerando dialeticamente dois movimentos: 1) o contexto do desenvolvimento dos conceitos matemáticos e 2) o movimento do pensamento na formação desse mesmo conceito (Saito, Dias, 2013).

Por contexto devemos entender a rica trama do tecido histórico de que o conhecimento matemático é parte. Faz parte dessa trama não só o conhecimento, mas também os critérios e as ações que permitem construí-lo. Assim, do ponto de vista histórico, a epistemologia deve também ser contextualizada, uma vez que ela é atravessada por problemáticas bem diversas, estabelecendo múltiplas relações com a matemática e sua história.

Devemos considerar que a epistemologia é o estudo crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados das diversas ciências. Sua principal característica é a reflexão sobre a argumentação dos processos do conhecimento que se desenvolve sobre um pano de fundo em que se entrelaçam diferentes concepções de ciência e outras posições de natureza ética, estética, filosófica, religiosa, política, ideológica etc. Assim, é sobre esse cenário que devemos situar as diferentes epistemologias para podermos compreendê-las em seu aspecto mais essencial, tomando-se o cuidado de não extraí-las de seu contexto de modo a subtrair-lhes a historicidade que lhes é inerente, uma vez que toda epistemologia é formulada e desenvolvida em meio a posições conflituosas que conduzem a controvérsias (Saito, Bromberg, 2010; Carrilho, 1991; Canguilhem, 1977).

Portanto, ao articular história e ensino, é importante considerar os diferentes vieses epistemológicos em que determinado objeto matemático é ou foi compreendido, pois épocas diferentes constroem epistemologias diferentes, visto que estão ancoradas em um modelo de conhecimento diferente. Desse modo, a articulação entre história e ensino deve também considerar a *episteme* de uma época (Foucault, 2000, 1999), isto é, um conjunto de ações, regras, critérios e conhecimento (que pode se afigurar como uma verdadeira epistemologia numa época), compartilhado por um grupo de pessoas no tempo e no espaço, que legitimam e validam um pretenso conhecimento. É por meio da compreensão do significado do objeto matemático em outra malha de relações epistêmicas que nos permite (re)significar os objetos matemáticos.

É, nesse sentido, que temos nos esforçado em delinear os contornos epistemológicos implicados no processo da construção do conhecimento na história. Esses aspectos epistemológicos não são acessíveis ao docente ou ao educador matemático à primeira vista, visto que eles emergem da análise contextualizada dos documentos que é tarefa do historiador (Saito, 2012a). Além disso, considerando-se que os discentes normalmente têm parcos conhecimentos de história e praticamente nenhum de filosofia, abordar conteúdos históricos e filosóficos de forma explícita nos materiais didáticos e mesmo em propostas de ensino e aprendizagem de matemática pode deslocar o educador de seu principal propósito com a história. Ou seja, propostas de articulação entre história e ensino que busquem restringir o papel da história apenas como recurso que propicia ao educando o acesso aos aspectos sociais, culturais e históricos no desenvolvimento de um conceito ou objeto matemático não o conduz a uma compreensão contextualizada dos mesmos. Para tanto, é necessária uma história da matemática que avalie e analise o objeto matemático considerando não só as questões de natureza interna, mas também externa que estão implicadas na própria gênese de tais objetos, tal como discorremos anteriormente.

Assim, episódios da história da matemática podem servir de porta de acesso a questões epistemológicas mais relevantes por meio das quais seria possível elaborar uma metodologia de abordagem que viabilizasse a articulação entre história e ensino. Isso, entretanto, não significa que devamos buscar um método único que possibilite tal articulação. Estudos e análises preliminares conduziram-nos a concluir que a articulação entre história e ensino requer também estabelecer um diálogo entre diferentes teorias didáticas da matemática e as atuais perspectivas historiográficas.

Tal diálogo, entretanto, deve ser devidamente contextualizado. Devemos compreender as teorias didáticas atendem a uma determinada demanda de conhecimento que é aceito (no seu sentido mais forte, cientificamente válido). Assim, é preciso também contextualizar historicamente as diferentes vertentes teóricas a que se refere o educador, levando-se em consideração a concepção de ciência em que se encontra ancorada (figura 3). A interface entre história e ensino, dessa maneira, deve considerar não só aspectos historiográficos e epistemológicos, mas também didáticos.

Assim, a articulação dos objetos matemáticos na interface deve, portanto, considerar sobretudo os aspectos epistemológicos envolvidos no processo da construção do conhecimento matemático. E, nesse sentido, como bem sabemos, a história da matemática é rica em procedimentos, métodos, técnicas e algoritmos que permitem resolver diferentes problemas matemáticos. Mas articular história e ensino não significa se apropriar desses elementos e aplicá-los em sala de aula e sim compreendê-los em seu contexto de modo a flagrar os nexos conceituais em torno do objeto matemático, devidamente localizados no tempo e no espaço.

Portanto, devemos ter muita cautela ao utilizar um documento original e transportar as ideias e os elementos nele apresentados ao presente. Isso porque tais ideias e elementos estão ancorados numa concepção de conhecimento de uma época. Utilizar, por exemplo, as antigas definições de reta, ponto e segmento dos antigos para ensinar matemática nos dias de hoje não faz sentido, visto que o professor deve dar conta da matemática institucionalizada no século XIX e não ensinar uma matemática, por exemplo, de 400 AEC[15].

O que é mais importante ter em conta na interface não são objetos matemáticos em si, nem os procedimentos, métodos, técnicas ou algoritmos, mas o processo da construção desses objetos, métodos, técnicas ou algoritmos historicamente contextualizados. Para tanto, é necessário que o historiador e o educador tenham em vista o mesmo objeto, visto que o movimento na interface é em essência dialético. O docente, ao se apropriar do conhecimento histórico, (re)significa os objetos matemáticos, pois o contato com o processo da construção desse mesmo objeto na história promove um deslocamento de concepções familiares para outras bastante incomuns. Esse deslocamento e a dialética proporcionada pela articulação entre duas diferentes concepções (do passado e do presente) favorecem a reconstrução das ideias matemáticas já preconcebidas e sedimentadas pelo docente, fazendo-o (re)significar o mesmo objeto. Nesse movimento, o objeto matemático é desconectado das malhas formais e reintegrado ao processo de sua elaboração, fazendo o docente tomar consciência de que a formalização é também uma construção (Saito, Dias, 2013).

Um exemplo disso é a atividade didática elaborada a partir do tratado *Del modo di misurare* de Cosimo Bartoli, publicada em 1564 (Saito, Dias, 2011). Esse tratado, como muitos outros disseminados nos séculos XVI e XVII ensina, entre outras coisas, como medir distâncias em diferentes situações utilizando diferentes instrumentos matemáticos. Para o desenvolvimento da atividade foram escolhidos, dentre os muitos instrumentos ali apresentados, três que eram muito comuns naquela época: o quadrante geométrico, o quadrante num quarto de círculo e o báculo (Saito; Dias, 2013)[16]. Essa atividade, elaborada na interface

[15] Há alguns anos atrás, Grattan-Guinness alertou-nos a esse respeito, vide: Grattan-Guinness (2004). Vide também Saito (2012b).

[16] Sobre a proposta da atividade e seus resultados podem ser consultados em: Dias e Saito (2010a, 2010b) e Saito e Dias (2011).

entre história e ensino de matemática, não teve por objetivo explicar, nem justificar, por meio da história, as dificuldades encontradas pelos participantes da atividade. A história da matemática foi articulada (entre outros propósitos) para promover uma reflexão sobre o significado da medida de modo a levantar questões epistemológicas acerca da medição. Podemos dizer que por meio dessa atividade de construção e uso de instrumentos, os participantes puderam visualizar parcialmente práticas e técnicas antigas de medição, flagrando no processo os aspectos conceituais fundamentais para se compreender o que é uma medida.

Um desses aspectos, por exemplo, refere-se à relação entre o sujeito, o instrumento e o ente a ser medido. Diferentemente dos modernos instrumentos, que geralmente realizam a medida com a mínima interferência de quem os manuseia (como uma régua, por exemplo), esses instrumentos requeriam não só destreza de quem os manuseava, como também de conhecimentos matemáticos relativos à medida. A medida, portanto, era obtida (ou melhor, calculada) a partir da distância em que se encontravam o observador e o ente a ser medido. Nesse processo, o observador, o instrumento e o ente medido faziam parte de um só conjunto de ações que revela importantes aspectos ligados ao ato de medir. Assim, os instrumentos matemáticos, a geometria e outros segmentos do conhecimento das artes, que estiveram na origem dos modernos instrumentos de medida, apontaram para um rico cenário que nos conduziu a refletir não só sobre as diferentes técnicas, mas também o conhecimento matemático ligado à medida. Esse cenário nos permitiu levantar questões de natureza epistemológica a respeito do significado de grandeza numérica e geométrica visto que nos deu acesso a diferentes práticas matemáticas do passado (Saito, 2013c, 2014).

Como já mencionamos, não encontramos matemáticos profissionais, nem matemática no sentido que hoje compreendemos antes do século XIX. Como bem observa Roux (2010), a matemática até meados do século XVIII não era um corpo autônomo e unificado de conhecimentos, mas um conjunto «práticas matemáticas», que tinham ou não preocupações essencialmente matemáticas. A compreensão dessas diferentes práticas matemáticas e, portanto, do conhecimento matemático nelas mobilizado e construído, nos dá acesso a diferentes questões epistemológicas que podem ser exploradas pelo educador matemático. A história da matemática articulada aos propósitos da educação matemática tem, assim, a história como ponto de partida para resignificar os conteúdos matemáticos, considerando-se os diferentes modelos de conhecimento. A interface, dessa maneira, não busca apenas elaborar atividades didáticas que articulem história e ensino, mas sim promover por meio delas uma visão mais crítica em relação à matemática e ao conhecimento matemático.

Considerações finais

A história da matemática faz parte (ou, pelo menos deveria fazer) da formação do futuro docente, visto que, historicamente, sempre teve papel essencial no processo de transmissão, apropriação e disseminação de conhecimentos matemáticos. Papel este que a história perdeu em meados do século XIX, para ser posterior e gradativamente retomado por volta da década de 1930. Muito das realizações matemáticas que hoje conhecemos, deveu-se em grande parte a esse processo de construção do conhecimento em que a história da matemática esteve sempre presente.

Em linhas gerais podemos divisar dois grandes momentos nesse processo. Num primeiro, em que a história da matemática esteve ligada ao nascimento de uma nova ciência por volta dos séculos XVI e XVIII, justificando o processo de sua formação que acabaria por se consolidar em meados do século XIX, quando se definiram campos de investigação específicos e especializados, tal como são ainda hoje reconhecíveis. Num segundo, em que a história perdeu seu papel e foi substituída, para dar conta das questões de ordem epistemológica sobre os fundamentos de uma nova área pela filosofia da matemática, quando a própria matemática procurou se firmar como área autônoma e unificada de conhecimento. A história, nesse contexto, passou a ser totalmente acessória e, assim, continuou até meados da década de 1930, quando questões de ordem didática se tornaram centrais no debate a respeito da transmissão, da disseminação e da apropriação de conhecimentos matemáticos. A agenda do dia, a partir de então, era investir na formação de futuros matemáticos para garantir e manter de pé a grande área matemática.

É curioso que foi no momento em que a formação do professor de matemática tornou-se centro dos debates que a história da matemática voltou a ser valorizada. Entretanto, a história da matemática continuou a dar ênfase apenas aos desdobramentos internos do desenvolvimento do conhecimento, mas privilegiando agora apenas os conteúdos estritamente matemáticos, pois ela deveria dar conta, junto com a filosofia da matemática, da coerência interna do discurso matemático. Esse cenário, entretanto, mudou gradativamente entre as duas grandes guerras mundiais, quando não só a matemática, mas também a ciência como um todo teve que prestar contas consigo mesma e com o público, reavaliando seu papel do ponto de vista ético. Nesse contexto, questões de ordem social, política, econômica e religiosa foram incorporadas gradativamente às narrativas históricas.

A ciência e a matemática, dessa maneira, deixaram de ser neutras e, no que diz respeito ao seu ensino, educadores, cientistas e matemáticos procuraram redimensionar seus propósitos e redefinir o perfil do professor de matemática e de ciência. Da mesma maneira, a história da matemática procurou renovar seus pressupostos historiográficos e metodológicos, abandonando uma visão linear e progressista do desenvolvimento do conhecimento matemático, de modo a dar uma dimensão social, política, ética, econômica, religiosa, cultural etc. às questões de ordem epistemológica. E é exatamente nesse aspecto que o grupo HEEMa tem investido suas investigações, ou seja, procurando elaborar diferentes ações na interface entre história e ensino de matemática.

Referências

Alexander, A. R. (2002). *Geometrical Landscape: The Voyages of Discovery and the Transformation of Mathematical Practice.* Stanford: Stanford University Press.

Alexander, A. R. (2006). Introduction: Mathematical Stories. *Isis* 97, 678-682.

Alfonso-Goldfarb, A. M. (1994). *O que é história da ciência?.* São Paulo: Brasiliense.

Alfonso-Goldfarb, A. M. (2003). Como se daria a construção de áreas interface do saber. *Kairós 6* (1), 155-66.

Alfonso-Goldfarb, A. M. (2008). Simão Mathias Centennial: Documents, Methods and Identity of History of Science. *Circumscribere* 4, 1-4.

Alfonso-Goldfarb, A. M. & Beltran, M. H. R. (orgs.). (2004). *Escrevendo a História da Ciência: tendências, propostas e discussões.* São Paulo: Educ; Ed. Livraria da Física; FAPESP.

Alfonso-Goldfarb, A. M.; Ferraz, M. H. M. & Waisse, S. (2013). Reflexões sobre a constituição de um corpo documental para a história da ciência. *Acervo, 26*(1), 42-53.

Baldi, B. (1707). *Cronica de matematici: overo Epitoe dell'istoria delle vite loro.* Urbino: Angelo Antonio Monticelli.

Baroni, R. L. S. & Nobre, S. (1999). A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.* São Paulo: Ed. da UNESP; COMPED; INEP.

Bartoli, C. (1564). *Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene....* Venezia: Francesco Franceschi Sanese.

Beltran, M. H. R. (2009). História da ciência e ensino: algumas considerações sobre a construção de interfaces. In: Witter, G. P. & Fujiwara, R. (orgs.). *Ensino de ciências e matemática: análise de problemas*, 179-208. São Paulo: Ateliê Editorial.

Beltran, M. H. R.; Saito, F. & Trindade, L. S. P. (2014). *História da ciência para formação de professores*. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES/ OBEDUC.

Bromberg, C. & Saito, F. (2010). A história da matemática e a história da ciência. In: Beltran, M. H. R.; Saito, F. & Trindade, L. S. P. (orgs.). *História da ciência: tópicos atuais*, 47-71. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES.

Cajori, F. (2007). *História da Matemática*. São Paulo: Ciência Moderna.

Cantor, M. B. (1880-1908).*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig: Von B. G. Teubner.

Canguilhem, G. (1977). Ideologia e racionalidade nas ciências da vida. Lisboa: Edições 70.

Carillho, M. M. (ed.). (1991). *Epistemologia: Posições e Críticas*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

D'Ambrosio, U. (2013). Por que e como ensinar história da matemática. *Rematec* 12, 7-21.

Debus, A. G. Ciência e história: o nascimento de uma nova área. In: Alfonso-Goldfarb, A. M. & Beltran, M. H. R. (orgs.). (2004). *Escrevendo a História da Ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas*, 13-40. São Paulo: Educ; Ed. Livraria da Física; FAPESP.

Dias, M. S. & Saito, F. (2010a). A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. In: *Anais Congresso Internacional – PBL 2010: Aprendizagem baseada em Problemas e Metodologias Ativas de Aprendizagem – Conectando pessoas, idéias e comunidades (8 a 11 de fevereiro de 2010, São Paulo, Brasil)*. São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning/USP.

Dias, M. S. & Saito, F. (2010b). O ensino da matemática por meio de construção de instrumentos de medida do século XVI. In: *Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EPEM*, 1-4. São Carlos: SBEM/SBEM-SP.

Dias, M. S. & Saito, F. (2011). História e ensino de matemática: o báculo e a geometria. In: *Anais do Profmat 2011 e XII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática) – Lisboa: 5 a 8 de setembro de 2011*, 1-11. Lisboa: Associação dos professores de matemática.

Eamon, W. (1996). *Science and the Secrets of Nature. Books of Secrets in Medieval and Early Modern Culture.* Princeton; New Jersey: Princeton University Press.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Campinas: Ed. da UNICAMP.

Fauvel, J., Van Maanem, J. (2000). *History in mathematics education: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Foucault, M. (1999). *As palavras e as coisas: uma arqueologia das ciências humanas.* 8ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Foucault, M. (2000). *A arqueologia do saber.* 6ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 66, 131-143.

Gavrouglu, K.; Christianidis, J. & Nicolaidis, E. (eds.). (1994). *Trends in the Historiography of Science*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic.

Golinski, J. (2005). *Making natural knowledge: Constructivism and the History of Science*. Chicago; London: Chicago University Press.

Goulding, R. (2010). *Defending Hypatia: Ramus, Saville, and the Renaissance Rediscovery of Mathematical History*. Dordrecht: Springer.

Grattan-guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica* 31, 163-185.

Gray, J. (2011). History of Mathematics and History of Science Reunited? *Isis* 102, 511-517.

Heilbronner, J. C. (1706-1742). *Historia matheseos universae, a mundo condito seculum P.C.N. XVI praecipuorum mathematicorum, vitas, dogmata, scripta & manuscripta complexa.* Leipzig: Joh. Friderici Gleditschii.

Long, P. O. (2000). Invention, Secrecy, and Theft: Meaning and Context in the Study of Late Medieval Technical Transmission. *History and Technology* 16, 223-241.

Long, P. O. (2001). *Openness, Secrecy, Authorship: Technical Arts and the Culture of Knowledge from Antiquity to the Renaissance*. Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press.

Long, P. O. (2005). The Annales and the History of Technology. *Technology & Culture, 46*(1), 177-186.

Mann, T. (2011). History of Mathematics and History of Science. *Isis* 102, 518-526.

Mendes, I. A. (2006). *Matemática e investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo.

Mendes, I. A. (2009). *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Mendes, I. A. (2013). História no Ensino da Matemática: Trajetórias de uma epistemología didática. *Rematec* 12, 66-85.

Mendes, I. A.; Fossa, J. A. & Nápoles, J. E. (2006). *A história como um agente de cognição na educação matemática*. Porto Alegre: Sulinas.

Miguel, A. & Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Caderno Cedes* 40, 47-61.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2004). *História na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2005). *História na Educação Matemática: Propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A. et. al. (2009). *História da matemática em atividades didáticas.* 2a. ed. São Paulo: Livraria da Física.

Miorim, M. A.; Vilela, D. S. (eds.). (2009). *História, Filosofia e Educacão Matemática.* Campinas: Alinea.

Montucla, J.-É. (1799-1802). *Histoire des mathématiques dans laquelle rend compt de leur progrès depuis leur origine jusqu'a nou jours...* 4 vols. Paris: H. Agasse.

Nobre, S. (2004). Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. *Ciência e Educação, 10*(3), 531-543.

Rattansi, P. Hermetismo e revolução científica. In: Alfonso-Goldfarb, A. M. & Beltran, M. H. R. (Orgs.). (2004). *Escrevendo a história da ciência: tendências, propostas e discussões*, 41-48. São Paulo: Educ.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Rossi, P. (1989). *Os filósofos e as máquinas, 1400-1700*. São Paulo: Companhia das Letras.

Rossi, P. (2000). *Naufrágios sem espectador: a ideia de progresso*. São Paulo: Ed. UNESP.

Rossi, P. (2006a). *Francis Bacon: da magia à ciência*. Londrina; Curitiba: Eduel; Ed. da UFPR.

Rossi, P. (2006b). *Il tempo dei maghi: Rinascimento e modernità*. Milano: Raffaello Cortina Editore.

Roux, S. (2010). Forms of Mathematization (14th-17th Centuries). *Early Science and Medicine* 15, 319-337.

Saito, F. (2008a). O experimento e a matemática: o estudo das lentes segundo a perspectiva de Giambattista della Porta (1535-1615). *Circumscribere: International Journal for the History of Science* 4, 83-101.

Saito, F. (2008b) Geometria e Óptica no século XVI: a percepção do espaço na perspectiva euclidiana. *Educação Matemática Pesquisa, 10*(2), 386-416.

Saito, F. (2010). História da Ciência e Ensino: em busca de diálogo entre historiadores da ciência e educadores. *História da Ciência e ensino: construindo interfaces* 1, 1-6.

Saito, F. (2011). *O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta*. São Paulo: Educ; Ed. Livraria da Física; FAPESP.

Saito, F. (2012a). History of Mathematics and History of Science: Some remarks concerning contextual framework. *Educação Matemática Pesquisa, 14*(3), 363-385.

Saito, F. (2012b). Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos «matemáticos» do século XVI. In: Silva, M. R. B. da & Haddad, T. A. S. (eds.). *Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP – 03 a 06 de setembro de 2012*, 1099-1110. São Paulo: EACH/USP.

Saito, F. (2013a). História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: Actas VII Congreso *Iberoamericado de Educación Matemática*, 3979-3987. Montevideo: FISEM/SEMUR.

Saito, F. (2013b). 'Continuidade' e 'descontinuidade': o processo da construção do conhecimento científico na História da Ciência». *Educação e Contemporaneidade. Revista da FAEEBA* 22 (39), 83-194.

Saito, F. (2013c). Instrumentos e o 'saber-fazer' matemático no século XVI», *Revista Tecnologia e Sociedade* 18 (especial), 101-112.

Saito, F. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *Rematec*, *9*(16), 25-47.

Saito, F. & Bromberg, C. (2010). História e Epistemologia da Ciência. In: Beltran, M. H. R.; Saito, F. & Trindade, L. S. P. (Orgs.). *História da Ciência: tópicos atuais*, 101-118. São Paulo: Ed. Livraria da Física/ CAPES.

Saito, F. & Dias, M. S. (2011). *Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI*. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Saito, F. & Dias, M. S. (2013). Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação* 19 (1), 89-111.

Shea, W. (1991). *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of R. Descartes*. New York: Science History Publ.

Shumaker, W. (1989). *Natural Magic and modern science: four treatises 1590-1657.* Binghamton; New York: Center for Medieval and Early Renaissance Studies.

Smith, D. E. (1923). *History of Mathematics.* 2 vols. Boston: Ginn and Co.

Smith, P. H. (2006). Art, Science, and Visual Culture in Early Modern Europe. *Isis* 97, 83-100.

Smith, P. H. (2004). *The Body of the Artisan: Art and Experience in the Scientific Revolution.* Chicago; London: The University of Chicago Press.

Vickers, B. (ed.). (1986). *Occult and Scientific Mentalities in the Renaissance.* Cambridge; London; New York: Cambridge University Press.

Webster, C. (1993). *De Paracelso a Newton: La magia en la creación de la ciencia moderna.* México: Fondo de Cultura Económica.

Zambeli, P. (1991). *L'ambigua natura della magia: filosofi, streghe, riti nel Rinascimento.* Milano: Il Saggiatore.

Se terminó de imprimir en
los talleres gráficos de
Tarea Asociación Gráfica Educativa
Psje. María Auxiliadora 156, Breña
Correo e.: tareagrafica@tareagrafica.com
Teléfono: 332-3229 Fax: 424-1582
Se utilizaron caracteres
Adobe Garamond Pro en 11 puntos
para el cuerpo del texto
octubre 2016 Lima - Perú

Otras publicaciones del Fondo Editorial PUCP

Iteración de polinomios y funciones racionales
Alfredo Poirier

Econometría 1
Luis García Núñez

Una economía incompleta. Perú 1950-2007
Análisis estructural
Efraín Gonzales de Olarte

Principios de microeconomía: un enfoque de sentido común
Iván Rivera

Macroeconomía intermedia para América Latina
Waldo Mendoza Bellido

Cómo investigan los economistas. Guía para elaborar y desarrollar un proyecto de investigación
Waldo Mendoza Bellido

La desigualdad de la distribución de ingresos en el Perú
Orígenes históricos y dinámica política y económica
Carlos Contreras, José Incio, Sinesio López,
Cristina Mazzeo y Waldo Mendoza

Contabilidad y análisis financiero: un enfoque para el Perú
Gustavo Tanaka Nakasone

Este libro contiene investigaciones realizadas como parte de un proyecto en el que participan el Grupo de Investigación Didáctica de las Matemáticas (DIMAT) del IREM-PUCP y el grupo Processos de Ensino e Aprendizagem de Matematica (PEA-MAT) de la Universidad Católica de São Paulo.

Los trabajos presentados ejemplifican el uso de distintos marcos teóricos para el análisis de diferentes fenómenos didácticos de la educación básica regular y superior. Así, están presentes la teoría de las situaciones didácticas, la teoría antropológica de lo didáctico, la teoría de registros de representación semiótica, la teoría de los campos conceptuales, el enfoque instrumental, el enfoque ontosemiótico, entre otros. Estamos convencidos de que este libro constituye una excelente referencia tanto para investigadores como para profesores de los niveles básicos, medio y superior, interesados en reflexionar en su práctica docente.

Francisco Ugarte
Pontificia Universidad Católica del Perú

Los trabajos que componen este libro están fundados científicamente de manera sólida, inundados por los conceptos y métodos de la didáctica francesa pero atreviéndose acertadamente a combinarlos productivamente con otros enfoques. Son pues, trabajos enraizados en la realidad del campo de la educación matemática del Perú y desarrollados en colaboración con la PUC-SP de Brasil para responder a las necesidades propias de cada uno de estos dos países.

Michèle Artigue
Université Paris Diderot - Paris 7

O livro, devido à diversidade de temáticas e problemáticas discutidas, constitui-se uma contribuição e uma base para os estudantes ou pesquisadores da área de Educação Matemática que desejam se engajar na pesquisa, bem como para professores que desejam aprofundar seus conhecimentos nas temáticas abordadas.

Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

ISBN 978-612-317-201-5
9 786123 172015

FONDO EDITORIAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS