

# ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

## V COLOQUIO INTERNACIONAL

**ACTAS 2010**

**Coordinador:**  
Uldarico Malaspina Jurado

DEPARTAMENTO  
DE CIENCIAS  
SECCIÓN MATEMÁTICAS - IREM



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ

# **V Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas**

**10, 11 y 12 de febrero 2010**

## **ACTAS**

**Pontificia Universidad Católica del Perú**

Departamento de Ciencias

Sección Matemáticas-IREM

Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas

Coordinador: Uldarico Malaspina Jurado

*Enseñanza de las Matemáticas*  
*Actas 2010*  
*V Coloquio Internacional*

Primera edición, diciembre 2010

Tiraje: 100 ejemplares

Coordinador: Uldarico Malaspina Jurado  
Diseño de carátula: Elit León  
Diagramación de interiores: Doris Moreno Alvarez  
Impresión: Dist. Imp. Edit. Lib. Moshera S.R.L.

© Editado e impreso por la Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias, 2010.  
Avenida Universitaria 1801, Lima 32  
626 2000-anexo 4151  
E-mail: irem@pucp.edu.pe  
Dirección URL: <http://www.pucp.edu.pe/irem/index.html>  
Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: 978-612-45391-2-1  
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú:  
2010-13982

Impreso en el Perú – Printed in Perú

## Presentación

Como lo venimos haciendo desde el 2006, decidimos organizar este **Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas**, con el propósito de brindar a profesionales y estudiantes de matemáticas y de su didáctica, foros de discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina, que contribuyan a avanzar en la construcción de una educación matemática de mayor calidad en el Perú y en los países que nos visitan con motivo de estos encuentros académicos.

Consideramos que la mejora de la calidad del aprendizaje de las matemáticas de nuestros alumnos, en los diversos niveles educativos, requiere del aprendizaje permanente de los profesores. Aprendizaje que se nutra de las numerosas investigaciones que se vienen realizando en la joven disciplina científica de la didáctica de las matemáticas. Por ello, nos esforzamos por estimular la investigación de nuestros estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y por contar con los aportes de investigadores en educación matemática en diversos campos; en particular, en la estadística y en las probabilidades, que son temas relativamente nuevos en educación básica. En este coloquio contamos con los aportes de investigadores de Argentina, Brasil, Chile y España que ofrecieron interesantes conferencias plenarias y talleres, en los que desarrollaron temas de sus respectivos campos de investigación.

En el **V Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas**, se han desarrollado 5 conferencias plenarias, 15 talleres, 10 sesiones de socialización de experiencias y 8 sesiones de reportes de investigación, tratando diversos temas, que se pueden ver en el índice. En este volumen, presentamos los trabajos extensos o los resúmenes de las actividades mencionadas, según los envíos que nos hicieron los autores. La versión grabada de todas las conferencias plenarias está en: <http://www.pucp.edu.pe/irem/publicaciones.htm>.



El Comité Organizador del **V Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas** expresa su agradecimiento a todos los participantes que, con su masiva presencia, mostraron su confianza en encontrar en este evento un espacio de calidad para la reflexión sobre su práctica docente; a los colegas que tan generosamente aceptaron dar las conferencias plenarias y los talleres; a los profesores y estudiantes de posgrado que presentaron sus experiencias para socializarlas o sus reportes de investigación; y a quienes integraron el Comité Científico y las diversas comisiones de trabajo en la organización de este coloquio.

Expresamos un agradecimiento especial a la Pontificia Universidad Católica del Perú, que con su apoyo franco, por intermedio de sus autoridades, nos brinda las mejores condiciones para poder seguir realizando eventos de esta naturaleza. Agradecemos también al Centro de Altos Estudios Universitarios de la Organización de Estados Iberoamericanos (CAEU-OEI) y al Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA), que nos brindaron su generoso apoyo para hacer posible el viaje de algunos conferencistas.

Nos complace manifestar que el éxito del coloquio y la publicación de estas actas, es la consecuencia de una suma de esfuerzos y apoyos de instituciones, autoridades, investigadores, profesores, alumnos de posgrado y personal administrativo del Departamento de Ciencias de la PUCP. Agradecemos en particular a Marixa Solórzano y Doris Moreno por su eficiente trabajo y dedicación, aún más allá de las horas de oficina.

El Comité Organizador

## **Convocan**

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las  
Matemáticas (IREM) - Perú

Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de  
Posgrado de la PUCP

## **Presidente**

Uldarico Malaspina Jurado

## **Coordinadora General**

Cecilia Gaita Iparraguirre

## **Comité Científico**

Elizabeth Advíncula Clemente  
Jorge Bazán Guzmán  
Miguel Gonzaga Ramírez  
Mariano González Ulloa  
Francisco Ugarte Guerra

## **Comité organizador**

Juan Accostupa Huamán  
Elton Barrantes Requejo  
Rosa Cardoso Paredes  
Miguel Cutimanco Panduro  
Maritza Luna Valenzuela  
Nélida Medina García  
Rudy Rosas Bazán  
Edwin Villogas Hinostroza



# Índice General

## CONFERENCIAS PLENARIAS

|                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Contra la ilusión de trivialidad en didáctica de las matemáticas. Respuesta de la teoría antropológica de lo didáctico al problema de la formación del profesorado<br><i>Josep Gascón</i> | 1  |
| Desafío y oportunidades en la enseñanza de la estadística<br><i>Elda Micheli</i>                                                                                                          | 3  |
| Enseñanza de la estadística mediante configuraciones didácticas diferenciadas<br><i>Hugo Alvarado Martínez</i>                                                                            | 19 |
| La geometría de los grafos o los grafos de los poliedros<br><i>Teresa Braicovich</i>                                                                                                      | 49 |
| Importancia del pensamiento probabilístico en la educación básica<br><i>Paulo Cézar Pinto Carvalho</i>                                                                                    | 61 |

## TALLERES

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Desarrollo e investigación de actividades matemáticas de enseñanza media con Geogebra<br><i>Carlos Rald Cortez Rodriguez</i> | 63 |
| La enseñanza de la geometría espacial utilizando Cabri 3D<br><i>Jesús Flores Salazar</i>                                     | 71 |
| Uso del WIKI en el aprendizaje de las matemáticas<br><i>Sumaya Jaimes Reátegui</i>                                           | 79 |

|                                                                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Experimentos aleatorios y sus representaciones<br><i>Hugo Alvarado y Lidia Retamal</i>                                                     | 93  |
| Materiales didácticos para el desarrollo del pensamiento geométrico y la intuición espacial.<br><i>César Fernando Solís Lavado</i>         | 115 |
| Aprendizaje de la matemática vía antiquísimos problemas<br><i>Alejandro Ortiz Fernández</i>                                                | 125 |
| Resolución de problemas de Olimpiadas Matemáticas<br><i>Uldarico Malaspina, Sergio Vera, Jorge Tipe, John Cuya</i>                         | 139 |
| Problemas de conteo y probabilidad elemental en la Educación Básica<br><i>Paulo César Pinto Carvalho</i>                                   | 159 |
| Aplicaciones de matemática y física con Geogebra<br><i>Rubén Agapito y Edgardo Chunga</i>                                                  | 167 |
| Curvas y superficies con MATLAB<br><i>Mariano González y Roy Sánchez</i>                                                                   | 177 |
| Estadística aplicada a la Investigación<br><i>Elda Micheli</i>                                                                             | 207 |
| Una Introducción a los números complejos<br><i>Rudy Rosas Bazán</i>                                                                        | 257 |
| El Problema de Pólya: ¿Por qué los estudiantes no construyen estrategias de resolución de problemas (de geometría)?<br><i>Josep Gascón</i> | 289 |
| Grafos y su potencial educativo<br><i>Teresa Braicovich</i>                                                                                | 293 |
| Revisión crítica de la contextualización matemática que involucra conceptos físicos<br><i>Analía Zabala</i>                                | 305 |

## SOCIALIZACIONES DE EXPERIENCIAS

|                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Hacemos transformaciones geométricas con ayuda de Geogebra<br><i>Joel Ascencio Gonzáles</i>                                                                                                                                                 | 329 |
| Visualizando las funciones con MS Excel<br><i>María Elena Villanueva Pinedo</i>                                                                                                                                                             | 335 |
| Las matemáticas y los proyectos didácticos<br><i>Guadalupe Castillo Hernández</i>                                                                                                                                                           | 337 |
| Inteligencias Múltiples en Matemáticas<br><i>José Luis Morón Valdivia</i>                                                                                                                                                                   | 345 |
| La importancia de las conjeturas en el aprendizaje de las matemáticas<br><i>Olimpia Castro</i>                                                                                                                                              | 349 |
| Situación didáctica para la rotación de ejes coordenados<br><i>Nélida Medina García</i>                                                                                                                                                     | 357 |
| Aplicación del software libre GeoGebra en temas de Derivada con soporte en la teoría de registros de representación de R. Duval y su efecto en el rendimiento académico de estudiantes de ingeniería<br><i>Carlos Mediver Coaquira Tuco</i> | 365 |
| I Concurso de fotografía matemática-Mateflash 2009<br><i>Jovita Piedra Valdez</i>                                                                                                                                                           | 371 |
| Estrategias gráficas de resolución de problemas<br><i>Jorge Arrasco Alegre</i>                                                                                                                                                              | 375 |
| Proyecto Musimática<br><i>Irma Flores y Virginia Coronado</i>                                                                                                                                                                               | 381 |

## REPORTES DE INVESTIGACIÓN

- Desarrollo profesional de los maestros en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva situada.  
*Edith Arévalo Vásquez, Rafael González Porras, Eduardo Ortiz Jaramillo* 383
- Análisis a priori de una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, en el nivel superior  
*Elizabeth Advíncula Clemente* 393
- Algebra temprana: efecto del contexto de presentación en la resolución de problemas con relaciones numéricas  
*Huberto Noriega Noriega, Sandra López Romano, Augusto Ospino Martínez, Luz López Silva* 401
- Registros de representación semiótica del concepto de función real en estudiantes de humanidades  
*José Chiroque Baldera* 407
- La enseñanza del concepto de mediatriz y circuncentro basada en la teoría de Van Hiele, aplicada en estudiantes del 3° grado de secundaria empleando como uno de sus instrumentos un software de geometría dinámica  
*Pedro Patrício Sudario* 417
- Significado de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades.  
*Javier Sayritupac Gutiérrez* 427
- Implementación de una propuesta de enseñanza aprendizaje de temas de geometría en el marco del programa de años Intermedios haciendo uso de la teoría de situaciones didácticas  
*Isabel Torres Céspedes* 437

|                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| El efecto del programa de formación de docentes<br>“enseñando a pensar”, en el conocimiento del contenido<br>pedagógico y la práctica en la enseñanza de la geometría<br>a través de la resolución de problemas | 443 |
| <i>Huberto Noriega Noriega, Sandra López Romano,<br/>Augusto Ospino Martínez, Luz López Silva</i>                                                                                                               |     |



## Índice de Autores

|                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| Advíncula: 393       | López Romano: 401, 443 |
| Agapito: 167         | López Silva: 401, 443  |
| Alvarado: 19, 93     | Malaspina: 139         |
| Arévalo: 383         | Medina: 357            |
| Arrasco: 375         | Micheli: 3, 207        |
| Ascencio: 329        | Morón: 345             |
| Braicovich 49, 293   | Noriega: 401, 443      |
| Carvalho: 61, 159    | Ortiz Fernández: 125   |
| Castillo: 337        | Ortiz Jaramillo: 383   |
| Castro: 349          | Ospino: 401, 443       |
| Chiroque: 407        | Patrício: 417          |
| Chunga: 167          | Piedra: 371            |
| Coaquira: 365        | Retamal: 93            |
| Coronado: 381        | Rosas: 257             |
| Cortez: 63           | Sánchez: 177           |
| Cuya: 139            | Sayritupac: 427        |
| Flores Salazar: 71   | Solis: 115             |
| Flores: 381          | Tipe: 139              |
| Gascón: 1, 289       | Torres: 437            |
| González Porras: 383 | Vera: 139              |
| González: 177        | Villanueva: 335        |
| Jaimes: 79           | Zabala: 305            |

# **CONFERENCIAS PLENARIAS**



# **Contra la ilusión de trivialidad en didáctica de las Matemáticas. Respuesta de la teoría antropológica de lo didáctico al problema de la formación del profesorado**

Josep Gascón <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En la primera parte de la conferencia se mostrará la necesidad que tiene la Didáctica de las Matemáticas, como toda ciencia, de emanciparse de la visión del mundo que proviene de las instituciones a las que los investigadores están sujetos. En particular se explicitarán las razones para negar cuatro de los principales “dogmas” sobre la Educación Matemática sustentados por la cultura dominante. Esta ruptura de la ilusión de trivialidad constituye, a la vez, una primera caracterización de los presupuestos básicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En la segunda parte se planteará, utilizando los instrumentos que proporciona la TAD, el problema de la formación del profesorado de matemáticas como un problema de investigación en didáctica de las matemáticas y se presentarán algunos elementos, de carácter teórico y experimental, para responder a dicho problema.*

---

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Barcelona-España



# Desafío y oportunidades en la enseñanza de la Estadística

Elda Micheli <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En los últimos años la enseñanza de la estadística se ha incorporado, de forma generalizada, en los diferentes ciclos de la enseñanza. Esto sucede como respuesta a la necesidad de incorporar su carácter instrumental de aplicación y uso interdisciplinario y su importancia en una sociedad caracterizada por la creciente disponibilidad de información.*

*Puesto que la estadística no es sólo una colección de conceptos y técnicas, sino sobre todo, una forma de razonar en situaciones en las que prevalece la incertidumbre, permitiendo realizar inferencias y tomar decisiones a partir de los datos, controlando el error, es importante que se construya los conocimientos no de forma abstracta sino que estos surjan de la relación con el ambiente socio-cultural en que vive el alumno.*

*Los entornos colaborativos de enseñanza-aprendizaje se fundamentan en trabajar con temas relacionados con la realidad cotidiana del estudiante, donde el conocimiento de un aspecto de determinado dominio, normalmente viene dado por cierto número de conceptos y sus vinculaciones; es decir, por una estructura, la cual puede ser dinámica y variar de acuerdo a la situación. Todos estos son elementos fundamentales en la didáctica de la Estadística.*

*La estadística no puede enseñarse como un compendio de fórmulas y métodos, es una disciplina fundamental para crear un pensamiento crítico y la capacidad de hacer elaboraciones más allá de lo que muestran los gráficos y cuadros contextualizados en la realidad del problema.*

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Comahue- Argentina

*Reconociendo la importancia de trabajar con nuevas herramientas en los entornos de enseñanza y aprendizaje colaborativo, es pertinente desarrollar el andamiaje que brindan las TIC para hacer realidad la alfabetización estadística enfatizando “la sensibilidad cuantitativa de la ciudadanía en una democracia para poder participar integralmente en ella”.*

## **Introducción**

El eje principal de esta ponencia es sintetizar los distintos paradigmas que generaron los cambios en el desarrollo de la Ciencia Estadística y consecuentemente relatar cómo ha sido su inserción en los ambientes escolares para llegar a las prácticas que se realizan actualmente en las escuelas, reflexionar sobre ellas y presentar algunas propuestas para este nuevo desafío que es enseñar Estadística en el siglo XXI.

En primer lugar, es significativo acordar que la estadística como ciencia, tiene su propio objeto de estudio, sus principios y metodología. Es una ciencia que tiene un carácter instrumental y coadyuva al proceso científico junto a otras disciplinas. Por ser una ciencia de aplicación a las más variadas ciencias (medicina, sociología, economía, informática por citar algunas) su crecimiento ha sido tan vertiginoso en los últimos años. Por otra parte el interés por la estadística, en su relación e incidencia en la vida diaria de los ciudadanos, genera y promueve el desarrollo de ésta como ciencia y como herramienta fundamental en la investigación, la técnica y el desempeño profesional.

El desarrollo teórico –práctico de la estadística tuvo dos momentos trascendentales en su crecimiento. Para introducirme en el tema recordaremos que la estadística desde la antigüedad en distintos pueblos se utilizaba como una herramienta para recopilar información para conocer el número de personas (censos), producción de las actividades agrícolas, ganaderas, etc. Paralelamente a estas actividades, en los ámbitos académicos se avanza en los desarrollos matemáticos, por ejemplo, se formalizan las bases de la teoría de probabilidad de la inferencia, etc. Es importante resaltar entonces los dos aspectos que se

venían trabajando: uno que se refiere el campo empírico de la estadística y el otro el campo de la teoría estadística.

Volviendo a lo dicho anteriormente, se puede expresar que el primer momento de gran crecimiento como resultado de investigaciones aplicadas es en el transcurso de la Segunda Guerra mundial, donde se realizan experimentaciones, trabajando fuertemente en el área de control de calidad (armas utilizadas en la contienda), es también en ese momento cuando se realizan avances en lo que se refiere a los primeros estudios relacionados con la genética. El otro momento fundamental en el desarrollo y crecimiento de la ciencia se ubica en la última década del siglo XX con el advenimiento de las herramientas informáticas para procesar información, dando esto la posibilidad de realizar análisis bivariados y multivariados de gran complejidad. En ese momento se abre e inicia un área de investigación y estudio dentro de la ciencia que es muy amplia y en estos momentos se encuentra en los albores de su desarrollo (data mining, redes neuronales, etc.).

### **Cultura Estadística y Alfabetización Estadística**

Pero así como los desarrollos teórico - prácticos de la Estadística se vienen realizando en los ámbitos académicos de experimentación, el ciudadano a través de los medios de comunicación, en este auge de la comunicación e información, recibe datos que debe entender, comprender y analizar para luego sacar conclusiones. Esto lleva a promover la necesidad de que la *cultura estadística*, entendida como la *“capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos”* (Gal. 2002) sea un requerimiento de formación para todo individuo..

Según Biggeri, la Cultura Estadística es *“La sensibilidad cuantitativa de la ciudadanía en una democracia para poder participar integralmente”*.

En función de estas necesidades, el ciudadano debe tener la capacidad de interpretar y evaluar la realidad a través de



razonamientos estocásticos y este ha llevado a que en los últimos años la enseñanza de la estadística se ha incorporado, de forma generalizada, en los diferentes ciclos de la enseñanza. Esta incorporación, además, responde a la necesidad de incorporar su carácter instrumental de aplicación y uso interdisciplinario y su importancia en una sociedad caracterizada por la creciente disponibilidad de información.

Puesto que la estadística no es sólo una colección de conceptos y técnicas, sino sobre todo, una forma de razonar en situaciones en la que prevalece la incertidumbre permitiendo realizar inferencias y realizar la toma de decisiones a partir de los datos, controlando el error, es importante que se construya los conocimientos no de forma abstracta sino que estos surjan de la relación con el ambiente socio-cultural en que vive el alumno. Por lo tanto la estadística no puede enseñarse como un compendio de fórmulas y métodos, es una disciplina fundamental para crear un pensamiento crítico y la capacidad de hacer elaboraciones más allá de lo que muestran los gráficos y cuadros contextualizados en la realidad del problema. Por lo tanto se debe promover la alfabetización estadística y el desarrollo del pensamiento estocástico.

La alfabetización estadística pone de manifiesto dos componentes interrelacionados:

- a) La capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y
- b) La capacidad para discutir o comunicar opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

Como corolario, la alfabetización estadística es, entre otras cosas, la habilidad de leer e interpretar información cuantitativa, de usar estadísticas en argumentos, analizar críticamente.

## **Enseñanza de la Estadística**

Esta tarea de alfabetización estadística y de promoción de la cultura estadística en los ambientes escolares ha sido encomendada, en los niveles no universitarios, a los profesores de Matemática.

Muchos profesores que ejercen la docencia han recibido como formación en Estadística un curso que forma parte de las currícula del Profesorado en Matemática. Batanero et al (1994), reconoce que la educación que reciben está basada normalmente en una lógica determinística y que los cursos de Estadística deben desarrollar una nueva lógica, que en algunos aspectos puede diferir con la que han desarrollado.

En los distintos programas de formación de los docentes en matemática, no se encuentra una materia o asignatura en la que se enseña a “como enseñar Estadística”; es decir, Didáctica de la Estadística. Por lo tanto, el docente que actualmente está enseñando conceptos de Estadística no se encuentra seguro o no tiene las herramientas didácticas para enseñar. Esto explicaría que dentro de los temas que debe desarrollar durante el año académico, lo deje para el final y siempre exista algún motivo para que los temas de estadística que están en algunos programas de escuela media, no se dicten.

Es importante volver sobre el concepto que la didáctica de la Estadística es distinta a la didáctica de la matemática, esencialmente porque los ámbitos en los cuales se desarrollan son distintos. Uno es determinístico y el otro es aleatorio. La estadística trabaja en ambientes inciertos por lo tanto la forma que ocurren los fenómenos es distinta.

Este aspecto es señalado por Fischbein (1975) cuando describe el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemática tuvo hasta 1975, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de fenómenos aleatorios. Más tarde, Begg (1997) señala que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores,

trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da hoy gran importancia

La formación específica de Estadísticos como profesores es prácticamente inexistente, la producción de trabajos referidos a la didáctica de la Estadística recién está comenzando. Esta disciplina está en sus albores y creciendo en distintas escuelas de formación académica. El lugar que viene ocupando los tópicos relacionados a la Didáctica de la Estadística es cada vez más importante, así es que se puede apreciar que son más las ponencias que se presentan y es creciente el número de profesores - investigadores que proponen actividades y tareas dentro de los foros de discusión. En tal sentido, se puede mencionar que la SAE (Sociedad Argentina de Estadística) en su reunión de Octubre de 2007 por primera vez integró en su congreso anual una mesa de discusión sobre aspectos de la enseñanza de la estadística, repitiéndose esa experiencia con muy buenos resultados en los años siguientes.

Es un punto de coincidencia en los distintos países ya sea de América o Europa que la tarea de enseñar estadística en los diversos niveles de educativos está encargada a los docentes que imparten la asignatura de Matemática. En este sentido, no se puede dejar de mencionar, que en la formación del docente en matemática la simbología que se utiliza, tal cual se enseña tiene una significación solamente en el ámbito de la operatoria, esto implica que los objetos matemáticos en tanto que son entes abstractos no tienen la necesidad de estar asociados a ningún objeto real para ser comprendidos. En la enseñanza de la Estadística, de acuerdo con Batanero (2000), al planificar la enseñanza es necesario tener en cuenta los cinco tipos de elementos que constituyen el significado de un objeto matemático: elementos intensivos (definiciones y propiedades), elementos extensivos (reconocimiento de los problemas en donde se aplica el concepto), elementos ostensivos (notaciones y representaciones del concepto), elementos actuativos (habilidad operatoria) y elementos validativos (capacidad para argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones).

Al aplicar las técnicas y métodos propios de la Estadística, los objetos matemáticos abstractos se trasladan conjuntamente con su hábitat, y se visten de un significado porque interpretan una realidad, en un mundo real, que es incierto

La carencia de esta formación en los institutos de formación y en las universidades de los futuros docentes es una problemática que debe ser resuelta. La situación descrita pone de relieve la necesidad de realizar acciones que promuevan la enseñanza de la estocástica, desde la revisión del currículum hasta la realización de planes de actualización y perfeccionamiento de docentes en servicio, junto con la renovación de los planes de formación de grado de los profesores de matemática.

En este sentido, se debe generar un perfil de profesores que incluya el amplio conocimiento de los contenidos, la capacidad de reflexionar y mejorar sus prácticas de enseñanza de estos contenidos y el potencial para innovar los materiales curriculares.

Por lo tanto, se debe promover en los planes de formación inicial y de actualización la utilización de una metodología apropiada que pueda servir de referente en la práctica pedagógica como el uso de una serie de actividades que le permitan al profesor pasar por los mismos estadios y procesos por los que pasarán luego los alumnos, de tal manera que el paradigma educativo en el cual se formen les sirva de modelo para su futura profesión.

La relación entre el objeto matemático y el razonamiento estadístico es una cuestión central, se trata de un problema de gran interés para la pedagogía, que implica dar un principio de respuesta doble a la cuestión de cómo se aplica el conocimiento adquirido previamente por el alumno en su vida cotidiana y simultáneamente cómo se traslada el nuevo conocimiento a la vida cotidiana.

Se debe ponderar en su justa medida la capacidad de poder realizar la vinculación entre el plano de lo abstracto (con su lógica interna) y el plano de lo real en el cual se producen las interpretaciones.

Subestimar esta condición inherente al razonamiento estadístico es darle solución a todos nuestros problemas con el uso de un software exclusivamente. Tal situación se presentaría si se acepta que el alumno adquiere la significación del promedio aritmético con sólo conocer la forma de su cálculo. Por el contrario, importa evaluar el razonamiento estocástico con el fin de encontrar un significado estadístico en la simbología de los objetos, para no quedarse en los aspectos de resolución del cálculo, sino ir más allá y trabajar con los aspectos semánticos, realizando interpretaciones, descubriendo relaciones; adquiriendo así sentido la evaluación de la coherencia entre los objetos matemáticos y los objetos contextualizados en la vida real.

El significado de un concepto, procedimiento u otro objeto estadístico, es por tanto complejo y estructurado en un conjunto de relaciones entre los diferentes componentes. Es preciso también reconocer que en diferentes instituciones se dota a un mismo objeto (como la media) de diferentes significados. Así, mientras que en la escuela primaria se considera que un alumno comprende bien la media si es capaz de definirla, calcular la media de un pequeño número de datos no agrupados y aplicarla en problemas sencillos, para los estudiantes de la universidad pedimos una comprensión mucho más amplia que abarque otras propiedades y generalizaciones (tales como las ideas de esperanza matemática o momentos) así como su aplicación en una serie de modelos estadísticos, como los contrastes de hipótesis o los modelos lineales.

Las anteriores consideraciones señalan la conveniencia de cambiar el enfoque tradicional expositivo en la clase de estadística, abandonar el énfasis excesivo en los aspectos teóricos y reforzar el trabajo práctico en pequeños grupos de alumnos, a partir de los problemas que dan sentido a los conceptos. Es importante trabajar para incrementar la capacidad argumentativa, la comprensión de las diferentes representaciones y el cambio de una representación a otra.

Estas recomendaciones coinciden plenamente con la esencia actual de la estadística que no se limita al paradigma clásico de

confirmación de hipótesis formuladas antes de recoger los datos sino que es también un instrumento de exploración y descubrimiento. Puesto que los ordenadores actualmente hacen innecesario que los alumnos empleen largas horas en aprender los algoritmos de cálculo o la elaboración manual de gráficos, es posible concentrarse en los restantes elementos del significado de los objetos estadísticos; propiedades, representaciones, problemas y argumentaciones. Por ello, en la escuela se debe propiciar la filosofía del análisis exploratorio de datos y el trabajo con proyectos que permitan dotar de un significado más completo a los conceptos estadísticos, a partir de situaciones variadas conectadas con otras áreas curriculares o con los intereses de los alumnos.

Para llevar adelante la tarea tan compleja de dar significación a los contenidos, Etienne Wenger propone una nueva perspectiva para aprender más efectivamente y generar un aprendizaje de tipo organizacional. Los elementos básicos de esta perspectiva consideran que el aprendizaje es inherente a la naturaleza humana, no es una actividad separada. La enseñanza no es la causa del aprendizaje, (todo el tiempo estamos aprendiendo) y lo que hace falta es crear condiciones que favorezcan el aprendizaje. Es decir, contribuir a que el docente pueda crear las condiciones para favorecer el aprendizaje.

Así mismo, Aldanondo agrega que el aprendizaje natural del ser humano parte del modelo del aprendiz, “se aprende haciendo”, cometiendo errores, reflexionando y rectificando casi siempre con ayuda de alguien más experto. Es un proceso fundamentalmente social, que se da cuando la gente trabaja en forma conjunta participando en actividades en contextos sociales

### **Aprendizaje Colaborativo**

La principal línea teórica que sustenta la propuesta de enseñanza aprendizaje de los contenidos de Estadística, utilizando herramientas multimediales, es la definida por los estudiosos como la pedagogía interactiva, que exige a los formadores ser vehículos de nuevas habilidades y competencias, en quienes aprenden, para que sean capaces de relacionar,

comparar, clasificar, categorizar, explicar, justificar y fundamentar.

En este sentido, a través de las estrategias basadas en las nuevas tecnologías y los nuevos ambientes de enseñanza es que se permite al alumno desarrollar habilidades personales y sociales, logrando que cada integrante del grupo se sienta responsable no sólo de su aprendizaje, sino del de los restantes miembros del grupo.

Los ejes de la pedagogía interactiva, trabajados como contenidos procedimentales, se basan en la concepción constructivista del conocimiento. Se deben adecuar los contenidos para ser llevados a una estructura donde cada tema sea abordado a través de situaciones problemáticas.

El trabajo con recursos colaborativos se basa en las siguientes premisas:

- Es un conjunto de métodos de instrucción y entrenamiento apoyados con tecnología así como estrategias para propiciar el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social)
- Responde al enfoque sociocultural.
- Promueve el desarrollo de aprendizajes interculturales.
- Los alumnos son quienes diseñan su estructura de interacciones y mantienen el control sobre las diferentes decisiones que repercuten en su aprendizaje.
- Favorece la puesta en práctica de formas de trabajo colaborativo entre alumnos y docentes que contribuyen al desarrollo de una cultura colaborativa en las escuela.
- Logra una alfabetización digital y estadística en alumnos y docentes.
- Genera un espacio de colaboración y reflexión conjunta que permite replantear las estrategias metodológicas de enseñanza y de evaluación utilizadas tradicionalmente.
- Propicia que el docente sea el productor de sus propios materiales didácticos.

- Propone estrategias didácticas no convencionales para la implementación de los contenidos de estadística en las áreas disciplinares.
- Fomenta habilidades cognitivas tales como interpretar, analizar, sintetizar, concluir y tomar decisiones

### **Fundamentos Teóricos Metodológicos**

Al hacer uso de las TIC como elemento motivador se favorece la creación de una dinámica de grupo participativa y el aprendizaje se da en un entorno de interacción respetuosa, afectiva y estimulante para disfrutar y aprender en un ambiente de percepciones, problemas y logros compartidos que da significación a una tarea propuesta que combina el uso las TIC y la alfabetización estadística.

Esta tecnología que está al alcance de casi todos, debe adaptarse a la realidad social, a la cultura del lugar y no al contrario. Intrínsecamente, lo que se trata es de ceder el control de la tecnología a los pueblos. Es lo que Castells argumenta con toda lógica al afirmar que “el impacto positivo en una economía de las TIC ni es inmediato ni es espontáneo, requiere de un tiempo de adaptación y de un caldo de cultivo previo basado en la propia cultura o nivel de formación de las empresas (en su conjunto) para asimilar estas nuevas tecnologías y, lo que es más importante, saber incorporarlas a su quehacer diario transformando modelos y metodologías de funcionamiento.

Área Moreira (1997) define en el artículo titulado “¿Tecnología educativa es tecnología y educación?”, a la Tecnología Educativa como la disciplina cuyo objeto de estudio son los efectos socioculturales e implicaciones curriculares que para la educación escolar poseen las tecnologías de la información y comunicación en cuanto formas de representación, difusión y acceso al conocimiento y a la cultura de los ciudadanos, esta propuesta de asociar los trabajos colaborativos y la Estadística, bien puede pertenecer al ámbito de la Tecnología Educativa.

Al incluir las tecnologías en el aula se exige comprender la enseñanza y el uso de las herramientas informáticas como



procesos y producciones eminentemente sociales, políticas, culturales, históricas y prácticas

La propuesta de trabajo colaborativo se fundamenta en los aportes vigostkianos que subrayan las ventajas que tiene el trabajo colectivo de los alumnos con situaciones problemáticas y la importancia de sus interacciones para lograr un progreso en el aprendizaje.

Begg (1997) señala que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da hoy gran importancia.

La propuesta del uso de las TIC es de acuerdo a lo que plantea Pere Marqués Graells (2000), en relación a la actividad que debe realizar el docente con el propósito de procesar información, como medio/soporte de comunicación, utilizando las TIC como instrumento cognitivo, aprovechando las nuevas fuentes de recursos para el aprendizaje, aprender en la red, etc. Las tecnologías de red generan un nuevo espacio social y, por ende, un nuevo espacio educativo.

Desde lo actitudinal, incorporar herramientas digitales podría permitirle, en la práctica áulica, estimular la curiosidad, plantear espacios de trabajo/aprendizaje individuales y/o colaborativos, motivar e incentivar, propiciar la adquisición de autonomía y reflexión sobre el propio aprendizaje, entre otras destrezas y habilidades.

El mecanismo de apropiación de los recursos disponibles en el entorno social se encuentra regido por la *Ley de doble formación*, según la cual “en el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica), y después en el interior del propio niño (intrapsicológica).

Entonces incluir distintos recursos en la enseñanza posibilitaría la apropiación de los instrumentos culturales presentes en la

sociedad y este proceso estaría vinculado con el desarrollo intelectual de los alumnos. (Recursos históricos)

## **Propuesta**

Como recomendación metodológica la propuesta es adherir a los principios constructivistas, de tal forma que se sugiere utilizar las herramientas de las TIC como fuente de motivación y recurso para la educación-acción , en función de sus intereses y expectativas, de tal forma que tenga sentido para el alumno y capture su motivación e interés. Es que la aplicación de las herramientas colaborativas en estos entornos de aprendizaje coadyuvan a fomentar la alfabetización estadística entendida como la *“capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos”*

- Se debe propiciar que la actitud del estudiante se modifique, dejando la actitud pasiva a una activa, lo cual potenciará el dominio de capacidades para adaptarse a un entorno que se transforma rápidamente:
- Trabajar en equipo de forma colaborativa,
- Aplicar la creatividad a la resolución de problemas,
- Aprender nuevos conocimientos y asimilar nuevas ideas rápidamente,
- Tomar iniciativas y ser independientes,
- Aplicar las técnicas del pensamiento abstracto e identificar problemas y desarrollar soluciones.

Esto le permitirá alcanzar *“las competencias que deben poseer los individuos de la sociedad de la información: competencias cognitivas, competencias metacognitivas, competencias sociales y disposición efectiva para un trabajo eficaz”* (Birenbaum 1996).

Desde el punto de vista del docente, se necesita una figura reflexiva, con un bagaje cultural y pedagógico importante para organizar un ambiente y un clima propicio para el aprendizaje.

El profesor pierde su estatus de transmisor de la información, y se potencia como evaluador y diseñador de situaciones mediadas

de aprendizaje. Al mismo tiempo deberá de poseer habilidades para trabajar y organizar proyectos en equipo, transformándose en un organizador dinámico del currículum estableciendo y adoptando criterios para la creación de un entorno colaborativo para el aprendizaje

Partiendo de estos supuestos se sustenta el compromiso, con el advenimiento de las nuevas herramientas colaborativas de enseñanza-aprendizaje, generar espacios virtuales que le brinde al alumno-docente herramientas para que construya esquemas y estructuras mentales de razonamiento estadístico aplicables y útiles para resolver situaciones reales y decidir/actuar a partir de un análisis crítico de los resultados obtenidos.

Queda mucho camino por hacer, muchas tareas que se deben realizar para que la Estadística sea trabajada en todos los niveles de la enseñanza como asignatura en los colegios, además de que sea una Ciencia cuyo resultado sea respetado como herramienta fundamental en la toma de decisiones en los ámbitos empresariales y de gobierno en cada país. Para ello se debe aspirar a tener cada vez mejores profesionales, con mejor preparación tanto empírica como teórica para que sean respetados por sus conocimientos y producciones. .

## Referencias

Adell, J. (2004). "Internet en el aula: las WebQuest". Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 17. Disponible en [http://www.uib.es/depart/gte/edutec-e/revelec17/adell\\_16a.html](http://www.uib.es/depart/gte/edutec-e/revelec17/adell_16a.html).

Aiello, M. y Willem, C. [El blended learning como práctica transformadora](http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos/n23/n23art/art2302.htm). (Universidad de Barcelona, España). Disponible en <http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos/n23/n23art/art2302.htm>

Batanero, C (2001). Didáctica de la Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). [¿Hacia dónde va la educación Estadística?](#) *Blaix*, 15, 2-13.

Batanero, C. (2001) Didáctica de la estadística. Granada, España: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

[www.ugr.es/~batanero/](http://www.ugr.es/~batanero/)

Batanero, C. (2002). [Los retos de la cultura Estadística](#). *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferencia inaugural.

Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G. y Truran, J. (2000). [Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias](#). *Statistical Education Research Newsletter* 1(2).

Burriel, Gail. (1990). Quantitative literacy: leadership training for Masters teachers. En. *Training teachers to Teach Statistics*. Anne Hawkins (Ed). International Statistical Institute. UNESCO. The Netherlands.

Duart Joseph M. y Sangrà Albert. (2000). Aprender en la virtualidad. Universidad Oberta de Catalunya.

Echeverría, Javier (2000). "Educación y tecnologías telemáticas" en *Revista Iberoamericana de Educación* - [Número 24](#)

Etienne Wenger (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Paidós.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children.

Franzini, Dora. (1999). Enseñanza de la Estadística: El desafío de desarrollar el pensamiento probabilístico y el pensamiento estadístico. *Alternativas. Serie Espacio Pedagógico. Año 4 N° 17*. Universidad Nacional de San Luis.

Gerwec, Barujel (2005). El uso de blogs en la docencia universitaria, *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 4 (1), 9-23.

[[http://www.unex.es/didactica/RELATEC/sumario\\_4\\_1.htm](http://www.unex.es/didactica/RELATEC/sumario_4_1.htm)].

Haedo, A. (2001). An overview of teaching of statistics at school and University in Argentina. *Proceedings of the 53<sup>rd</sup> Session of International Statistical Institute, Bulletin of ISI (book 2, 165-167)*. Seul. International Statistical Institute.

Escudero, Juan Manuel (1997). Tecnología Educativa: algunas reflexiones desde la perspectiva de la innovación y la mejora de la educación. Universidad de Murcia.

Mittag, Hans-Joachim (2000). Multimedia and Multimedia Databases for Teaching Statistics- Distance University of Hagen, Economics Department, P. O. B. 940, D 58084 Hagen, Germany.

Palamidessi, Mariano (2008). Conferencia en plataforma Pent-Flacso 14 de Marzo 2008

Marques Graells, Pere (2000). Las TIC y sus aportaciones a la sociedad <http://www.pangea.org/peremarques/tic.htm>

# Enseñanza de la Estadística mediante configuraciones didácticas diferenciadas

Hugo Alvarado Martínez <sup>1</sup>

## Resumen

*En la docencia de probabilidad y estadística se afirma con frecuencia que los alumnos no comprenden una determinada proposición y, por tanto, la aplican en situaciones donde no corresponde o no son capaces de inferir consecuencias directas. En este trabajo se plantean algunas reflexiones, siguiendo el ciclo de Smyth, sobre la enseñanza de la estadística. Se analiza el diseño de configuraciones didácticas diferenciadas, a partir del significado de referencia de unos campos específicos de problemas, incorporando la tecnología y el aprendizaje situado, y el acoplamiento progresivo entre el significado institucional del concepto estadístico y la construcción del significado personal del estudiante. Como consecuencia de la práctica reflexiva se valora la idoneidad del proceso de instrucción en el tópico de la distribución muestral.*

**Palabras clave:** Estadística, Configuraciones didácticas, idoneidad del proceso, ciclo de Smyth.

## Introducción

En la docencia de pregrado existen altos grados de deserción estudiantil y reprobación de los alumnos en asignaturas de matemática y un alto grado de desmotivación de los estudiantes, que se observan en las diferencias de ritmos de aprendizaje y en el hecho de que muchos no muestran un trabajo sistemático de estudio clase a clase. Es habitual encontrar en matemática instrumentos de evaluación con énfasis en el desarrollo algebraico, donde no se muestra una descripción detallada de los

---

<sup>1</sup> Universidad Católica de la Santísima Concepción- Chile

elementos de significados logrados de una unidad específica y que conlleven a determinar qué competencias se han adquirido y en cuáles se manifiestan dificultades. Esto se debe en parte a la tradición docente de los profesores y a no disponer de la tecnología adecuada para cursos numerosos. Por lo general, se cuestiona la actitud del estudiante frente al aprendizaje, sin embargo, son escasos los análisis acerca de la eficacia de la actuación docente. Más aún, como producto del sistema de acreditación institucional a lo que deben someterse las universidades, habría que analizar la actitud del profesor frente a la enseñanza, determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe poseer el profesor para una “buena” enseñanza y delimitar su campo de acción en la investigación y su conexión con la docencia. Esto nos conduce a reflexionar si en el aula se favorece la comprensión de los conceptos y si buenas presentaciones en la clase consideran más de una forma de acercarnos al significado institucional implementado (o previsto) o simplemente llegan a los alumnos como un producto dogmático y acabado. La situación es compleja para el profesor de matemática. Este debe considerar la transición del contenido matemático entre la educación media y el primer año universitario y, como académico, generar y apropiarse del conocimiento matemático. Cabe señalar, que el uso del término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso universitario, especialmente en el desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación. Por un lado, los informes de agencias acreditadoras internacionales, así como la Comisión Nacional de Acreditación (CNA) en Chile, ratifican la tendencia a definir los planes de estudios en términos de competencias y criterios de evaluación. De acuerdo a los métodos tradicionales hay consenso acerca de que los alumnos adquieran conocimientos pero no necesariamente acerca de potenciar sus habilidades y favorecer el análisis crítico. La noción de competencia no deja de ser compleja. Hay confusión en el modo en que se usan los constructos de conocimiento, comprensión, competencia, destrezas, etc., en el ámbito de la innovación curricular. Sin embargo, su logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas

facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Godino (2002) ayuda a discernir algunas características de las nociones cognitivas de competencia entendida como “saber hacer” y comprensión que implica saber qué hacer y por qué. Ambas nociones se complementan mutuamente; la competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico relacional. La expresión “ $X$  es competente para realizar la tarea  $T$ ”, indica que el sujeto  $X$  domina la técnica  $t$  que resuelve o permite hacer bien la tarea  $T$ . En esas circunstancias decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica. En cambio, la expresión, “ $X$  comprende la técnica  $t$  que permite realizar la tarea  $T$ ” se aplica si  $X$  conoce por qué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas. Entendida en sentido amplio, la competencia implica los diversos elementos del significado descrito para el conocimiento matemático: problemas, definiciones, propiedades, algoritmos, lenguaje y argumentación.

En este trabajo, del ámbito de la didáctica de la estadística en el contexto de la ingeniería, se profundiza en la enseñanza práctico-reflexiva. La estadística en ciencias básicas, por su carácter metodológico e instrumental, contribuye en el diseño de experimentos y en la mejora de procesos. Se abordarán cuestiones tales como la delimitación de los elementos básicos que caracterizan el desarrollo profesional del profesor en términos de lo que debe ser una buena enseñanza (Alvarado, 2004), la relación entre la metodología de enseñanza empleada en el aula y el aprendizaje del conocimiento matemático-estadístico de conceptos importantes, y la utilización de configuraciones didácticas para describir criterios de idoneidad de un proceso de estudio (Godino, Contreras y Font, 2006).

A objeto de analizar algunas acciones en la metodología de enseñanza de la estadística para describir en los estudiantes habilidades requeridas en las especialidades, se sigue un proceso de reflexión sobre la acción realizada a través del modelo cíclico de Smyth (1991) cuyas cuatro fases son:

1. Descripción: Identificación de la práctica. ¿Qué hago?



2. Información: Soporte de las prácticas. ¿Qué significado tiene lo que hago?
3. Confrontación: Percepción de otras prácticas y teorías.
4. Reconstrucción: Nuevo plan de acción. ¿Qué haría en una nueva ocasión?

El ciclo comienza cuando el profesor detecta un problema profesional surgido en el transcurso de la práctica (Flores, 1998), y las diferentes fases suponen por parte del docente un esfuerzo de explicitación del problema, así como la reflexión de su práctica. En la Tabla 1, se presenta las fases cíclicas de reflexión a analizar en este trabajo:

|                       |                    |                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Descripción</i>    | Profesor           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tendencia a mejorar el rendimiento académico</li> <li>- Desarrolla un clima positivo y comunicativo en el aula</li> <li>- Plantea actividades contextualizadas de tipo algebraico</li> </ul> |
| <i>Información</i>    | Estudiantes        | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Carencia de competencias matemáticas básicas</li> <li>- Perfil del estudiante universitario</li> <li>- Desempeño docente</li> </ul>                                                          |
| <i>Confrontación</i>  | Contenido          | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Conexión entre conocimiento matemático y contenido didáctico</li> <li>- Idoneidad del proceso de instrucción en estadística</li> </ul>                                                       |
| <i>Reconstrucción</i> | Profesor Reflexivo | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliza configuraciones didácticas progresivas</li> <li>- Analiza el significado y comprensión de los objetos matemáticos</li> </ul>                                                         |

**Tabla 1.** Ciclo de Smyth sobre la enseñanza de la estadística

## Fases de reflexión de la práctica docente

### 1. Descripción

En asignaturas de ciencias básicas las sesiones de clase se han desarrollado generalmente sólo en el aula, presentando a los estudiantes actividades de ejercicios con desarrollo algebraico y demostraciones de propiedades deducidas de teoremas y corolarios. Se observa desinterés y bajos resultados globales de las evaluaciones en las asignaturas, lo que implica que las materias son tópicos difíciles para los estudiantes. A continuación se muestra un ejercicio algebraico típico en el aula de estadística:

*Ejercicio 1.* Se supone que  $X$ , el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con  $\mu = 2$ . Si el número de accidentes durante seis meses es mayor que 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. Calcular la probabilidad aproximada de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado.

Para resolver el ejercicio y determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas, el alumno ha de considerar una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_6$  y definir la variable  $\sum X_i$ : número de accidentes en seis meses, y luego utilizar el teorema central del límite  $\sum X_i \approx N(6 \times 2; 6 \times 2)$ .

Para obtener el cálculo de probabilidad aproximada de una distribución de Poisson a la distribución normal, se debe aplicar las propiedades de cálculo de la media y varianza de una suma de variables aleatorias, corrección de continuidad y la estandarización. El comentario esperado es que, como la probabilidad de ocurrencia de obtener más de 10 accidentes es aceptable, el estado podría realizar la reconstrucción del cruce.

$$P\left(\sum_{i=1}^6 X_i > 10\right) \approx P\left(Z \geq \frac{10,5 - 12}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \phi(0,43301) = 0,6664$$

Desde el año 1998, se ha intentado llevar a cabo innovaciones pedagógicas en la Universidad Católica de la Santísima

Concepción (UCSC) a través de proyectos internos de docencia para mejorar el interés y motivación por las asignaturas y desarrollar habilidades de comunicación. Se han estudiado las características de los estudiantes de tipo sociodescriptivas, psicométricas y estrategias de aprendizaje, a objeto de caracterizarlos en función de su rendimiento académico (Alvarado y cols. 2000, 2003). Cabe mencionar que la evaluación del desempeño de los docentes es una tarea que se realiza de forma sistemática en las universidades con un énfasis de diagnóstico, sin involucrar necesariamente la toma de decisiones. En la UCSC los resultados indican una buena evaluación, sin embargo la dimensión de metodología es de la promedios más bajos y son mejores evaluados los docentes con menor número de alumnos.

En Chile hay pocas experiencias de análisis didáctico del contenido matemático y más aún en estadística. Si bien hay deficiencias en competencias matemáticas básicas de los estudiantes, se carece de acciones efectivas sobre la forma de cómo se comunica el conocimiento específico en el aula (idoneidad mediacional). En pocos escenarios educativos universitarios se tiene en cuenta las competencias matemáticas-estadísticas y conductas de entrada que deben poseer los estudiantes en una asignatura particular, a modo de considerar que las prácticas reúne elementos diversos cuya comprensión debe adquirir el estudiante antes de abordarlo, lo que hace complejo el proceso de instrucción. La investigación didáctica es aún escasa en el contexto universitario, en cuanto a cómo se enseña y qué dificultades tiene la enseñanza de la estadística. Para Ordóñez (1994) la formación básica de los estudiantes que no van a ser científicos, sino que requieren ese conocimiento como fundamento de un quehacer profesional vinculado con la ciencia y la tecnología, es responsabilidad de los académicos-especialistas-investigadores en las disciplinas que enseñan. La situación se percibe más complicada, al constatarse que esos académicos formados para investigar, deben asumir un rol pedagógico para lo cual, en un alto porcentaje, no están preparados. Actuar en dos niveles diferentes, la generación y la

apropiación del conocimiento, conduce a sobrevalorar los aspectos cognitivos de su disciplina. Se ha generado, de esta forma, una enseñanza de las ciencias básicas con propósitos claramente selectivos más que formativos.

## *2. Información*

El bajo rendimiento académico en los cursos de matemática y la deserción estudiantil es una problemática generalizada en las universidades chilenas y de otros países. Uno de los factores puede atribuirse a Fonseca (2003), respecto a que las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y el primer ciclo universitario, ponen en evidencia la atomización y rigidez del bagaje matemático de los alumnos cuando llegan a la universidad. Cada vez es más evidente que la calidad educativa pasa por la calidad de la docencia que se imparte (Rizo, 1999). Se desprende entonces, que el deseo de un sistema universitario de calidad pasa, en primer término, por un desempeño docente eficiente, objetivo que debe concebirse desde una postura analítica y crítica basada en una evaluación que permita de manera objetiva, válida y confiable determinar el nivel de logro del mismo. Parra y cols. (2001) analizan los resultados de una encuesta aplicada a estudiantes universitarios, a través de la cual se obtiene información sobre el quehacer docente desarrollado durante cinco semestres. En los antecedentes expuestos, se hace referencia a los aspectos generales del curso, motivación, relaciones interpersonales, metodologías de enseñanza y evaluación. En consideración a la importancia del tema, se destaca la necesidad de fortalecer, en los académicos, una cultura evaluativa permanente, lo que supone sustentar la capacidad de autocrítica frente a su propio desempeño profesional.

Los resultados mostrados por la Dirección de Estudios Estratégicos en las Jornadas de Reflexión de la Docencia de la UCSC, acerca del porcentaje de reprobación de estudiantes de las distintas especialidades de ingeniería en matemáticas han generado preocupación por los diversos colectivos implicados en la formación académica, ya que sitúa a la docencia impartida del

Departamento de Matemática y Física Aplicadas que no está formando adecuadamente a los estudiantes. Un tema que suscita controversia es ¿Cuál debe ser el perfil del docente de matemáticas de la UCSC? y que derivan en cuestiones como ¿Se requiere un formador de futuros profesionales orientado a la tutoría y a transferir a su práctica el fruto de sus propias investigaciones?, ¿Será que los docentes de matemáticas carecen de modelos claros de referencia que les permitan modificar sus habituales formas de planificar y desarrollar su enseñanza apoyada en un análisis y reflexión sobre el contexto, el conocimiento y su aprendizaje? o ¿Será que la causa se deba a limitaciones al plan actual de estudios? En nuestra actuación docente nos preguntamos ¿cómo enseñamos estadística en el aula universitaria? Una de las respuestas podría ser que estamos enseñando como fuimos enseñados, con un modelo instruccional clásico.

En el caso de Ciencias de la Ingeniería, los sistemas como la Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET, EE.UU) y Canadian Council of Profesional Engineers (CEAB, Canadá), están exigiendo a las Facultades y Escuelas de Ingeniería cambios en el desarrollo curricular, debido a que las formas tradicionales de enseñanza no ayudan a adquirir competencias transversales, y tienen en cuenta el perfil de egreso de un ingeniero, entendida como el conjunto de competencias (generales, especializadas y actitudinales) necesarias en la profesión (Alvarado, 2007). Ello ha originado un gran interés por estructurar carreras de ingeniería enfocada al desarrollo de competencias (Letelier y cols., 2005) y mejorar la enseñanza en este campo, como se muestra en los congresos que organiza desde 1987 la Sociedad Chilena de Educación en Ingeniería (SOCHEDI), con áreas temáticas principales tales como la formación de competencias para la innovación, formación por competencias e innovación en la enseñanza de las ciencias básicas en ingeniería.

Se hace necesario un cambio en los métodos de enseñanza utilizados a objeto de obtener mejores resultados académicos. En el caso de la estadística (Moore, 1997) recomienda una

renovación tanto en los métodos como en el contenido. Algunas consideraciones que se ha tenido en cuenta en la enseñanza: a) El aprendizaje es un fenómeno social: es importante conocer las características del estudiante, tanto pedagógicas como el clima en el aula, b) Las prácticas didácticas deben promover el desarrollo cognoscitivo y afectivo del estudiante. Las directrices formativa de nuestro proceso de intervención en el aula de probabilidad y estadística han sido la resolución de ejercicios prácticos con pequeñas bases de datos de iniciación a la investigación social entre los compañeros y con actividades de exploración y planteamiento de problemas cercana en lo posible con la especialidad de los estudiantes. Por ejemplo, las aplicaciones de las distribuciones muestrales surge al estimar la distribución muestral de la suma de variables aleatorias, en situaciones de procesos de simulación tales como: el tiempo entre llegadas de clientes a un servicio o piezas a una máquina, donde se utiliza las distribuciones uniforme y exponencial; la resistencia de materiales en el diseño de edificios es considerada una variable aleatoria ya que en el proceso de fabricación, transporte y montaje pueden ocurrir situaciones no calculadas; el tiempo en procesar una pieza es modelada por distribuciones continuas de la familia gamma; tiempo de espera en los procesos de fileteado y congelado de peces en los desembarque; número de unidades falladas en una muestra de control de calidad utilizando la distribución binomial o beta.

### 3. *Confrontación*

La enseñanza empleada en cursos de estadística se ha centrado en el rendimiento académico y valoración por la asignatura. Cabe preguntarse si en nuestra práctica hubo comprensión de proposiciones estadísticas fundamentales entregado en clase. Al relacionar el conocimiento matemático-estadístico y contenido didáctico, surgen inquietudes como las siguientes ¿cómo caracterizar la eficacia de un proceso de instrucción?, ¿Qué dispositivos didácticos (manipulativo, computacional, libros de textos, etc.) son los adecuado para la enseñanza de la estadística en el nivel universitario?, o ¿qué efecto tiene la informática como

recurso de apoyo a la docencia? Hay dos aspectos a considerar, la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión de propiedades de la distribución muestral, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un rol importante (delMas, Garfield y Chance, 1999) y, lo otro, que las tecnologías son medios y recursos didácticos, movilizados por el profesor, que algunas veces aumentan los problemas educativos en vez de resolverlos. Hoy en día, se tiene acceso a suficiente literatura disponible en internet sobre la utilización de tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Sin embargo, se carece de metodologías para evaluar instrumentos de aprendizaje. Una clasificación de los recursos que ofrece la web son los Software libre (programa estadístico R y el programa @risk de licencia limitada); los miniprogramas Java Applet y Geogebra para ilustrar, simular y explorar conceptos estocásticos en un ambiente dinámico y gráfico; materiales educativos en línea (libros en línea como The World of Visual Statistics; HyperStat; Electronic Statistics Textbook); y revistas electrónicas y boletines de información (Journal of Statistics Education, Statistics Education Research Journal, Statistics Teacher Network boletín de la National Council Teachers of Mathematics).

La perspectiva didáctica que se empleará como nuevo plan de acción se sustenta en el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática, desarrollada en la Universidad de Granada, que toma los siguientes supuestos como base:

1. *Significado institucional y personal.* Los objetos matemáticos surgen de situaciones problemáticas internas o externas a la propia matemática y evolucionan progresivamente. Una práctica es significativa para una persona o para una institución, si cumple una función para resolver el problema, comunicar, validar o entender su solución, y están orientadas a un objetivo que implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona y las herramientas semióticas que mediatizan la acción (Godino y Batanero, 1998). Para estudiar la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los

conocimientos del sujeto, los autores distinguen el *significado institucional* de un objeto matemático, como aquel compartido dentro de una institución y el *significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Este proceso es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento el objeto matemático es reconocido como tal por la institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Luego, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

2. *Elementos de significado.* Para Godino (2002), la comprensión personal de un objeto es, en este modelo, la “apropiación” del significado institucional de dicho objeto. Se propone una tipología de objetos matemáticos primarios, que denominan “elementos del significado” (entendiendo aquí el significado en el sentido sistémico-pragmático) y son los siguientes: *Situaciones-problemas* que originan actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones) de donde surge el objeto; *Lenguaje* o representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática; *Procedimientos* o modos de actuar ante situaciones o tareas (algoritmos, operaciones, reglas de cálculo); *Conceptos* introducidos mediante definiciones o descripciones; *Proposiciones* que tratan específicamente las propiedades asociadas al tema; y *Argumentos* o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas.

3. *Configuraciones didácticas.* Los seis tipos de entidades primarias descritos anteriormente están relacionados entre sí formando *configuraciones*, que Godino, Contreras y Font (2006) definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Conciben la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. La evaluación de la comprensión de un sujeto tiene que ser relativizada a los contextos institucionales. Una



institución dirá que un sujeto “comprende” el significado de un objeto si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado de dicho objeto institucional, además de fundamentarlas y reflexionar sobre el proceso seguido.

4. *Criterios de idoneidad.* También, definen los siguientes criterios de idoneidad, con el propósito de describir, analizar y explicar fenómenos específicos ligados a los procesos de instrucción matemática:

- Idoneidad *epistémica*: Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.
- Idoneidad *cognitiva*: Expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.
- Idoneidad *semiótica*: Tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados.
- Idoneidad *mediacional*: Es el grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad.
- Idoneidad *emocional*: Describe el grado de implicación de los alumnos en el proceso de estudio.

Este trabajo se interesa por describir el punto hasta el cuál el proceso de instrucción ha sido eficaz, principalmente en los criterios de la idoneidad cognitiva y mediacional con que los profesores de estadística desarrollan su práctica docente. La propuesta considera acciones para mejorar la comprensión teórica y práctica de las distribuciones muestrales en un curso de

estadística universitario mediante la apropiación progresiva de tres configuraciones epistémicas diferenciadas. En la Tabla 2 se presentan las conexiones de elementos de significado de dos configuraciones epistémicas.

- En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen objetos matemáticos específicos como experimento aleatorio y estadístico, variable estadística, su distribución y momentos, y el tipo de demostración preferente es el estudio de ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.
- La *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra y análisis. Los procedimientos serían analíticos y algebraicos, además de incorporar el uso de las tablas de distribuciones para calcular probabilidades. Aparecen la idea de convergencia, momentos, tipificación, etc.
- La *configuración computacional* amplía notablemente el lenguaje, sobre todo el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas. Además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen algunos conceptos como el de aproximación y distribución muestral asintótica.

| <b>Elementos de significado</b> | <b>Configuración algebraica</b>                                                                                                                       | <b>Configuración computacional</b>                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Problemas                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Obtener modelos matemáticos para la distribución de estadísticos</li> </ul>                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Obtención experimental de distribuciones muestrales asintóticas</li> <li>- Investigar el comportamiento de las distribuciones muestrales cuando cambian los parámetros</li> </ul> |
| Lenguaje                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representación simbólica</li> <li>- Expresiones matemáticas específicas</li> </ul>                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representaciones dinámicas</li> <li>- Términos e íconos del programa</li> </ul>                                                                                                   |
| Procedimiento                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo de probabilidades</li> <li>- Transformaciones algebraicas</li> </ul>                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Simulación, variación de parámetros, experimentación</li> </ul>                                                                                                                   |
| Conceptos                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Variables y convergencia</li> <li>- Modelo y parámetros</li> </ul>                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Aproximación, distribución muestral asintótica</li> <li>- Función densidad</li> </ul>                                                                                             |
| Propiedades                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tamaño muestral y efecto en la convergencia</li> <li>- Buen estimador y corrección de continuidad</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Aproximación normal de distribuciones clásicas</li> <li>- Efecto de los parámetros sobre la aproximación</li> </ul>                                                               |
| Argumentos                      | Demostración deductiva                                                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Visuales, generalización y comprobación de ejemplos</li> </ul>                                                                                                                    |

**Tabla 2.** Configuraciones epistémica algebraica y computacional de la distribución muestral

#### 4. *Reconstrucción*

El nuevo plan de acción, con enfoque descriptivo y exploratorio, está centrada en el diseño, experimentación y evaluación de la distribución muestral y la formación de ingenieros, y se fundamenta en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (ver <http://www.ugr.es/~jgodino/>). A continuación se describen las etapas, cada una de las cuales poseen un fin en sí misma.

##### *Etapas del nuevo plan de acción*

Una primera fase es el análisis epistémico a objeto de fijar el significado institucional de referencia, que es la base del diseño de la secuencia didáctica de las distribuciones muestrales. Para ello, se ha tenido presente las investigaciones de proposiciones y conceptos relacionados con la distribución muestral (Alvarado, 2007), y se ha desarrollado el análisis conceptual-epistemológico del significado del teorema central del límite presente en los libros de estadística para ingenieros (Alvarado y Batanero, 2005, 2008). Se destaca la importancia y los problemas didácticos asociados a la enseñanza de los conceptos. La falta de rigor matemático del teorema detectado en el análisis de textos universitarios, se considera que dificulta su comprensión y a apreciar su alcance de aplicación. Además, de la carencia de problemas con dispositivos de simulación manipulable y la débil rigurosidad en los ejercicios resueltos. Sobre la base del diseño de la enseñanza del tema, a continuación se analizan dos etapas acerca de la implementación y evaluación de las configuraciones epistémicas empleadas.

- *Enseñanza basada en configuraciones didácticas diferenciadas*

La distribución muestral relaciona las distribuciones de probabilidades con la inferencia estadística y es importante en el trabajo del ingeniero, al proporcionarle herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Se considera una simulación como un experimento estadístico de muestreo.

La trayectoria didáctica del proceso de estudio de la distribución muestral ha tenido en cuenta:

1. Delimitar los contenidos y secuencia de enseñanza de la distribución muestral: diseño de la muestra, distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales, distribución de estimadores obtenidos de variables aleatorias discretas, distribución de estimadores obtenidos de variables aleatorias continuas.

2. Considerar un acercamiento global a propiedades importantes, como el teorema central del límite, siguiendo el desarrollo histórico; la aplicación en resolución de problemas específicos de ingeniería; la comprensión de propiedades importantes como la corrección de continuidad, supuestos de aplicación y rapidez de convergencia; basado en la tecnología: Uso de @risk, Excel, applets y la plataforma virtual ev@; el diseño de evaluaciones parciales y finales.

3. Implementar en el diseño los elementos más importantes del significado de referencia de la distribución muestral, adaptado al tiempo disponible y conocimientos previos.

4. Utilizar en la enseñanza los diversos recursos didácticos a través de las configuraciones epistémicas en los campos de problemas aplicados a la ingeniería.

5. Establecer los objetivos de la evaluación, que fue evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado. Dos objetivos específicos se plantearon: Estimar la proporción de alumnos en el grupo que muestran una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza, e identificar cuáles de estos elementos resultaron difíciles. Por tanto, la evaluación va más allá de medir resultados, es un proceso de delimitar, obtener y proporcionar información útil para la toma de futuras decisiones docentes.

A partir del 2006 se han implementado de forma sistemática experimentos de enseñanza con distintos grupos de estudiantes

de cinco especialidades de ingeniería (Informática, Industrial, Civil, Acuicultura y Pesca y Marítimo Portuario). Se ha llevado a cabo la observación de la enseñanza, la recogida de respuestas abiertas de los estudiantes en tareas seleccionadas con un análisis cualitativo y mediante tablas se resumen los elementos de significado observados durante las cuatro lecciones. A continuación, se muestran actividades empleadas en las configuraciones epistémicas.

**Actividad 1. Configuración manipulativa.** Una caja contiene 4 fichas de las cuales 2 fichas son verdes. Simular la extracción de  $m$  muestras de tamaño  $n$ ; formando las matrices  $n \times m$  (tamaño muestral  $\times$  número de réplicas),  $(n,m) = (4,5), (10,1), (10,10)$  y  $(30,10)$ . Para cada caso: a) Construya una tabla de frecuencias del número de fichas verdes por muestra obtenida, b) Represente los datos en un gráfico de barras y comente sus características, c) Compare la media y varianza del experimento con la media y varianza teórica.

Es una actividad experimental de simulación con fichas, orientada a llegar a un enunciado intuitivo de aproximación de la suma de variables aleatorias a la distribución normal a partir de dispositivos didácticos, y se realizó colectivamente en el aula. Se seleccionaron al azar 10 alumnos, sacando cada uno una ficha de la bolsa que contiene 2 de color verde de un total de 4. Cada alumno repitió el experimento 10 veces; se anota en el pizarrón la matriz de orden  $10 \times 10$ , de valores 0 y 1 en las celdas. A continuación los estudiantes sumaron por columna el total de "1", pensada como una distribución binomial de parámetros  $n=10$  y  $p= \frac{1}{2}$ . Se construyó así una distribución de frecuencias en clases individuales del número de fichas verdes obtenidas en las 10 extracciones. Luego, los estudiantes dibujaron un gráfico de barras, con eje  $X$  los valores del recorrido 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, y el eje  $Y$  las frecuencias absolutas de "1" en cada muestra. Se comparó la media teórica con su valor experimental correspondiente. La actividad resultó sencilla, y sirvió de introducción a otras actividades para realizar individualmente fuera de la clase (Actividad 2 y 3), ejercitando el cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias, cálculo de

probabilidades a partir de materiales manuales; la media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias; la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas.

**Actividad 2. Configuración manipulativa.** Suponga que gana si obtiene un “6” al lanzar un dado legal. Simular las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado  $(n,m) = (5,5), (10,10)$  y  $(30,10)$ . Compare sus resultados con la actividad 1.

**Actividad 3. Configuración manipulativa.** Una máquina produce artículos con cierto tipo de defecto, identificados como 0, 1 y 2. Suponiendo que en una partida hay 20 artículos sin defecto, 30 con un defecto y 50 con dos defectos, se saca un artículo al azar y se anota su valor,  $X_1$ . La distribución de  $X_1$  será:

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 1 \\ 0,5 & x = 2 \end{cases}$$

a) Suponga que el artículo escogido primero se devuelve a la partida y luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor,  $X_2$ . Obtenga la distribución de probabilidades del promedio de tres y cuatro artículos extraídos.

b) Dibuje con lápiz y papel y/o Excel las distribuciones de las medias muestrales de tamaño 2, 3 y 4. ¿En un mismo gráfico trace en línea discontinua cómo sería la distribución muestral de la media de tamaño 5?

c) Comente si la distribución de la suma  $S_n$  y el promedio  $\bar{X}_n$  son similares.

d) Enuncie al menos una pregunta de contexto y resuelva aplicando el teorema central del límite.

A modo de ilustración se presentan dos actividades, apoyada con applet, en que se describe su contenido y los posibles errores que, a priori, es previsible que encontremos en las respuestas de los alumnos participantes.

**Actividad 4. Configuración computacional.** La aproximación de la distribución binomial  $\text{bin}(n,p)$  a la distribución normal es suficientemente buena cuando:

- a)  $n$  es menor que 30 y  $np$  aproximadamente igual a 5
- b)  $n$  es mayor que 30 y  $p$  menor que 0,05
- c)  $n$  es mayor que 30 y  $p$  aproximadamente igual a 0,5
- d)  $n$  es mayor que 30 y cualquier  $p$
- e)  $n$  es mayor que 30 y  $p$  igual a 0,9

Esta actividad, presentado mediante expresiones verbales y simbólicas, pretende evaluar si el alumno reconoce las condiciones que han de cumplir  $n$  y  $p$  para que la aproximación de la distribución binomial a la normal sea suficientemente precisa. Considera las propiedades de que la aproximación mejora con el número de sumandos y aproximar una distribución discreta por una continua. El alumno debe razonar acerca de la convergencia como caso especial de un resultado general. La respuesta correcta sería la alternativa (c), ya que la forma de la distribución es simétrica y cumple las condiciones de muestras de tamaño mayor a 30 y ser tanto  $np$  como  $nq$  mayores a 5. Los distractores incluidos evalúan los siguientes errores: (a) pensar que la aproximación es buena para tamaños pequeños de muestra; (b) aunque  $n$  es mayor que 30, el valor esperado  $np = 1,5$  es menor que 5; (d) reconocer la precisión de aproximación a la binomial sólo mediante el tamaño muestral y no el parámetro  $p$ ; (e) pensar en una buena convergencia para valores del parámetro cercanos a 1; si bien cumple la regla, por ejemplo para  $np = 30 \times 0,9 = 27$  no se cumple para el complemento  $nq = 30 \times 0,1 = 3$ .

**Actividad 5. Configuración computacional.** Se supone que  $X$ , el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con  $\mu = 2$ . Si el número de accidentes durante seis meses es mayor a 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado.

- a) La diferencia entre la probabilidad aproximada y probabilidad exacta es de:



- I. 0,01363      II. 0,0      III. 0,03919      IV. 0,00715  
V. Ninguna de las anteriores.

b) ¿Será considerada la reconstrucción del cruce en el programa de emergencia del estado? Comente.

En esta actividad, cuya solución algebraica es dada en el Ejercicio 1, el alumno usará símbolos y expresiones verbales, también utilizará el gráfico y el cálculo de la media, desviación estándar y probabilidad exacta ofrecida por el applet de la distribución Poisson, como se muestra en la Figura 1. Los distractores incluyen los siguientes errores: b) no considerar la corrección de continuidad, c) calcular la probabilidad a partir del valor 10 de la variable aleatoria y sin considerar la corrección de continuidad, d) calcular la probabilidad mayor o igual a 10 o realizar otro cálculo con error en el recorrido de la variable aleatoria.

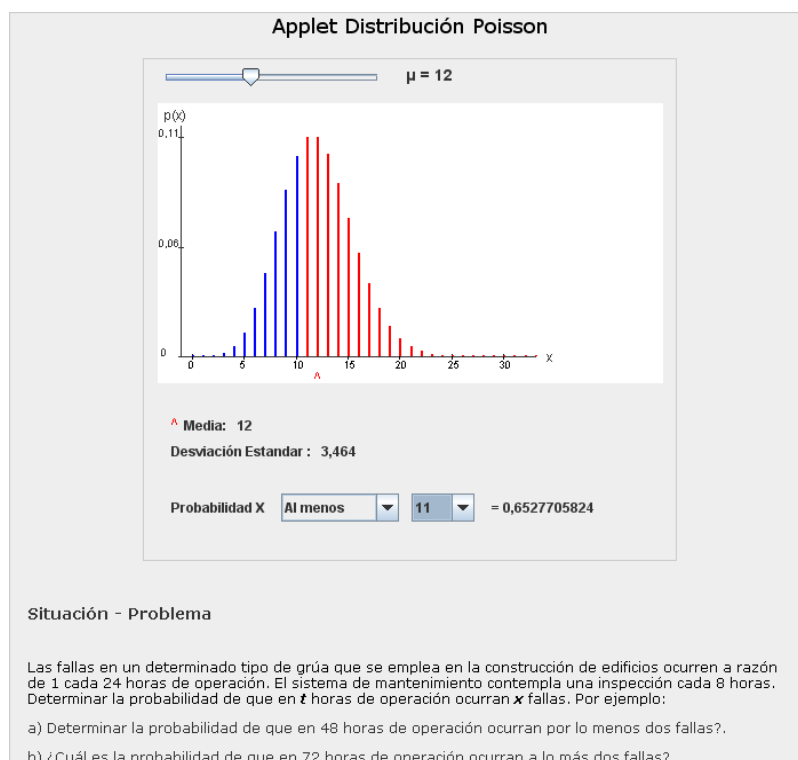


**Figura 1.** Applet de la distribución de Poisson

La Actividad 6 de tipo algebraica es una aplicación del teorema central del límite a variables continuas con distribución exponencial. Previo a los 20 minutos que dará el profesor para

que intenten individualmente resolverlo, se les recuerda que en el proceso de Poisson los eventos ocurren al azar independientemente y a una tasa uniforme por unidad de tiempo, definiendo la v.a.  $Y$  como número de eventos en el intervalo  $(0,t]$ . Si estamos interesados en  $X$  que es el tiempo que transcurre hasta que el primer evento ocurre, entonces  $X$  es la llamada v. a. exponencial con parámetro  $\lambda$  y se le menciona la fórmula de su función de densidad, así como sus propiedades. Una vez cumplido el tiempo de desarrollo de la actividad, el profesor utiliza la pizarra para desarrollarla de forma algebraica en conjunto con el grupo de alumnos, atendiendo algunas preguntas planteadas. Posteriormente se analiza la frecuencia de respuestas de algunos elementos de significados del teorema en un grupo de alumnos.

**Actividad 6. Configuración algebraica.** Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con una media de 1,5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas?

Según los datos del problema el algoritmo de resolución esperado del alumno es el siguiente: Tenemos  $E(X)=1,5=1/\lambda$ , donde  $\lambda=2/3$ . Entonces la v.a.  $X \sim \exp(\lambda=2/3)$ , y además la varianza es  $V(X)=1/\lambda^2=9/4$ . Considerando una muestra de 100 personas  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  anotamos  $P(\sum X_i < 120) = P(\bar{X} < 1,2)$ . Utilizando el teorema central del límite para  $n=100$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu=1,5, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9/4}{100}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-1,5}{3/20} \sim N(0,1)$  Así, la probabilidad pedida es  $P\left(Z < \frac{1,2-1,5}{3/20}\right) = P(Z < -2) = 0,02275$ .

La implementación de la secuencia didáctica de la distribución muestral se ha realizado con base en investigaciones relacionadas, en un estudio histórico del teorema central del

límite y el análisis de libros de texto de estadística para ingenieros. Los experimentos de enseñanza han detectado dificultades que posiblemente surgirían en las evaluaciones finales, y de algunas diferencias con respecto al significado pretendido.

- *Idoneidad del proceso de estudio*

Se entiende la evaluación como la correspondencia entre el significado institucional presentado en la enseñanza y el significado personal efectivamente construido por los alumnos (Godino y Batanero, 1998), identificando sus dificultades y errores. Durante los últimos semestres académicos se han caracterizado los elementos de significado puestos en juego por los alumnos, a través del análisis de sus soluciones escritas a cuestionarios para evaluar la comprensión de los alumnos sobre las distribuciones muestrales. A objeto de describir los elementos de significado usados correcta e incorrectamente por los estudiantes en la resolución y las conexiones que establecen entre los mismos, se han llevado a cabo la aplicación de distintos instrumentos de evaluación:

- Cuestionarios con ítems de tipo conceptual y algebraico (Alvarado y Batanero, 2007) en la cual se analiza las dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial;
- Problemas abiertos de tipo algebraico (Alvarado, 2007) que permite un análisis más detallado del uso de argumentos y procedimientos de los alumnos;
- Proyecto de aplicación a la ingeniería con apoyo informático (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007), en que los alumnos con Excel y el programa @risk han simulado datos para distintos valores de los parámetros la convergencia de distribuciones de probabilidades;
- Implementación de un cuestionario en línea con la plataforma moodle. El diseño contempla preguntas de opción múltiple de respuesta única, un enlace web de las distribuciones de probabilidades binomial y de Poisson para resolver como una herramienta de cálculo y de simulación.

La Figura 2 muestra parte del cuestionario presentado a una muestra de estudiantes.

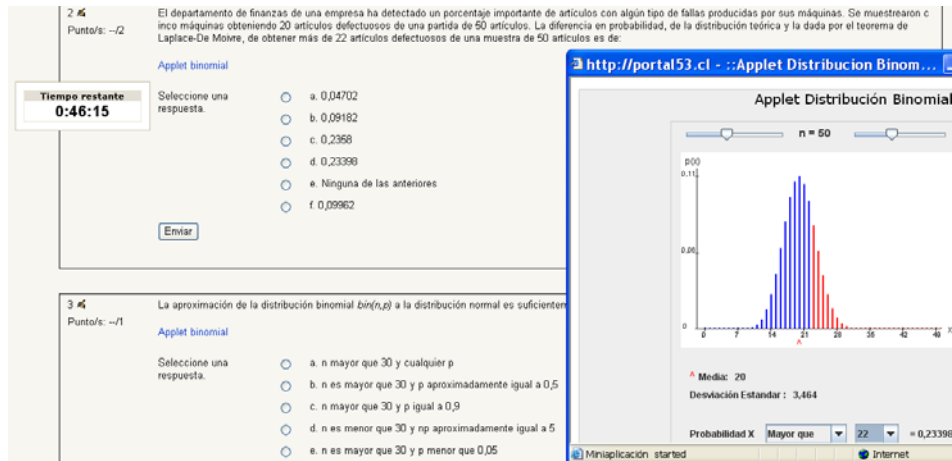


**Figura 2.** Ítems de la evaluación en línea de la distribución muestral

La actividad 3 estudia la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas y es interesante de analizar, debido a que requiere estudiar algebraicamente y gráficamente el comportamiento de la distribución de la suma o media muestral a medida que se van agregando variables. Se le pidió a una sección de alumnos desarrollarla en parejas, comenzando por la distribución de la media de tamaño 3 y otra sección debían comenzar por el estadístico de la suma de variables aleatorias. No hubo dificultades en formar las 27 muestras posibles y la distribución de la suma de v.a de tamaño 3, como se ilustra a continuación:

| $s_3$ | $P(s_3 = s_2)$                                                    |
|-------|-------------------------------------------------------------------|
| 0     | $(0,0,0) = (0,2)^3 = 0,008$                                       |
| 1     | $(0,0,1)(0,1,0)(1,0,0) = 3(0,012) = 0,036$                        |
| 2     | $(0,0,2)(0,1,1)(0,2,0)(1,0,1)(1,1,0)(2,0,0) = 3(0,02) + 3(0,008)$ |
| 3     | $(0,1,2)(0,2,1)(1,0,2)(1,1,1)(1,2,0)(2,0,1)(2,1,0) = 0,207$       |
| 4     | $(0,2,2)(1,1,2)(1,2,1)(2,0,2)(2,1,1)(2,2,0) = 0,285$              |
| 5     | $(1,2,2)(2,1,2)(2,2,1) = 0,225$                                   |
| 6     | $(2,2,2) = 0,125$                                                 |

De forma análoga los estudiantes desarrollaron la distribución de la suma o media muestral de tamaño 4 (apartado a)), obteniendo ahora  $3^4 = 81$  muestras posibles. De los 66 estudiantes la mayoría dibujó con lápiz y papel milimetrado o en Excel el comportamiento de la distribución de la suma de variables aleatorias según aumenta el tamaño de la muestra de 1 a 4, y observando que a medida que va aumentando el tamaño extraído de la muestra, la curva que se obtiene va tomando la forma de la distribución normal. Se ilustra una gráfica donde se va mostrando por separado su comportamiento simétrico.

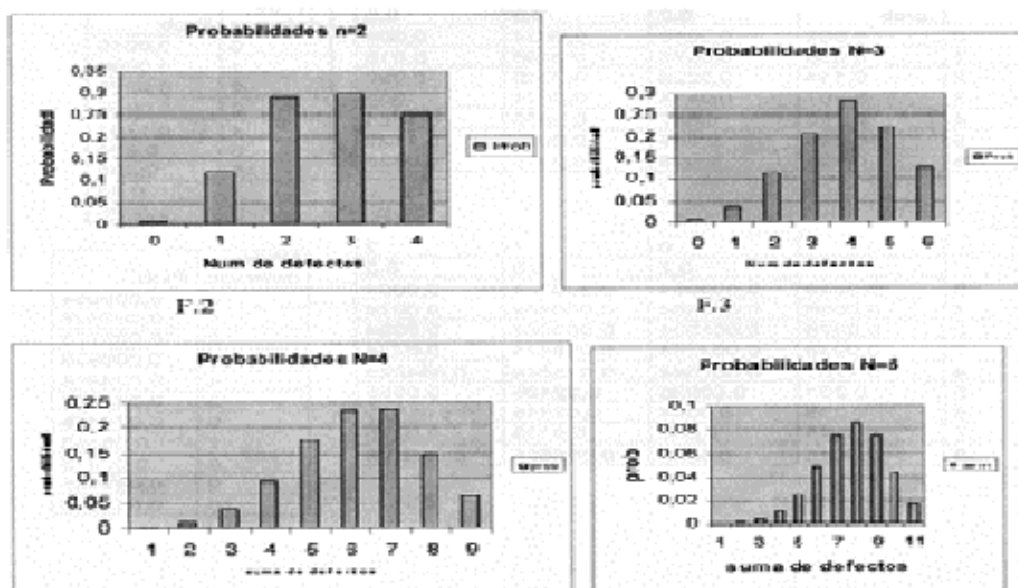


**Figura 3.** Distribución de la suma de 2, 3 y 4 variables aleatorias

Los comentarios realizados fueron en relación a la simetría y similitud con la distribución normal. Otra gráfica presentada para la suma de variables aleatorias con la predicción intuitiva del teorema central del límite es la siguiente:

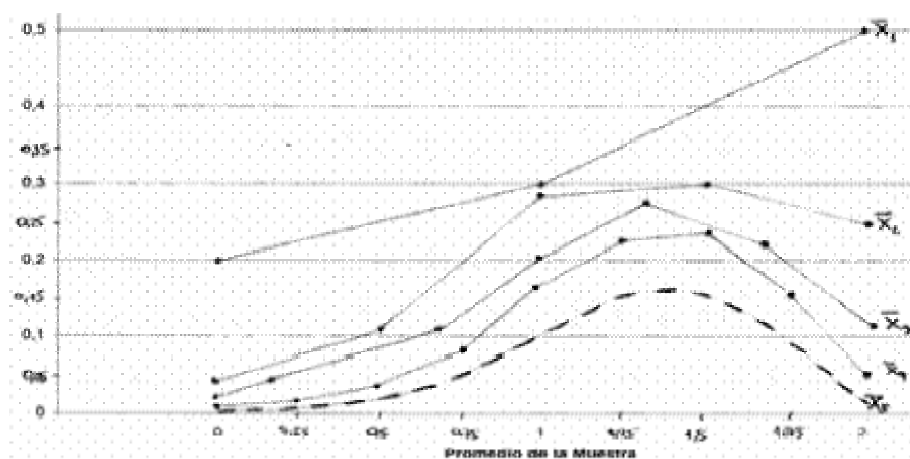


**Figura 4.** Predicción intuitiva del teorema central del límite

Un resumen de frecuencias de respuestas a los procedimientos de la actividad 3 se muestra en la siguiente tabla:

|                                                            | Aciertos(%) | Errores(%) |
|------------------------------------------------------------|-------------|------------|
| Determinar la distribución muestral de $\bar{X}_3$ o $S_3$ | 60 (90,9)   | 6 (9,1)    |
| a) Obtener la distribución muestral $\bar{X}_4$ o $S_4$    | 56 (84,8)   | 6 (7,1)    |
| b) Dibujar la distribución de las sumas de v.a.            | 34 (51,5)   | 2 (3,0)    |
| b) Dibujar la distribución de los promedios de v.a.        | 22 (33,3)   | 2 (3,0)    |
| c) Comparar las distribuciones de la suma y el promedio    | 50 (75,8)   | 4 (6,1)    |
| d) Cálculo y transformación algebraica de v.a.             | 38 (57,6)   | 6 (9,1)    |
| d) Determinar la media de la suma o promedio               | 36 (54,5)   |            |
| d) Determinar la varianza de la suma o media muestral      | 32 (48,5)   | 2 (3,0)    |

**Tabla 3.** Frecuencias (porcentajes) de respuestas de la Actividad 3 ( $n = 66$ )

Resultados preliminares, en diferentes actividades presentadas a los estudiantes, sobre concordancias y diferencias entre el significado personal y el significado institucional de la distribución muestral se mencionan a continuación:

- Los estudiantes de ingeniería han mostrado una mejor comprensión: en el análisis de la distribución aproximada de la media muestral que provienen de poblaciones binomiales, el uso del lenguaje simbólico con algunas excepciones, el procedimiento algebraico y la tipificación, la simulación en la resolución del proyecto, las propiedades de la media y la varianza de la suma de variables aleatorias.
- Los elementos que dan origen a conflictos semióticos son: no reconocer campos de problemas en situaciones específicas de aplicación a la ingeniería, expresión verbal incorrecta de conceptos relacionados con el teorema central del límite, errores de estandarización al confundir la suma por el promedio, no aplicar la corrección de continuidad, no ser capaz de dar una decisión en base al análisis de propiedades.

## **Conclusiones**

En este trabajo se ha descrito el rol del docente de estadística centrada en su enseñanza a objeto de establecer en el mediano plazo un modelo de actuación docente pertinente y que contribuya a la valoración sobre los criterios de idoneidad epistémica, mediacional y cognitiva del aprendizaje en los estudiantes. La práctica docente debe ser reflexiva, entendida en el sentido que el profesor analice las distintas variables involucradas en el proceso de instrucción matemática y, consecuentemente, sus formas de intervenir en ellos.

Se han abordado una secuencia didáctica de diseño, implementación y evaluación de las distribuciones muestrales. Se busca información sobre las dificultades de contenido observadas en grupos de estudiantes universitarios, que nos ayudará a mejorar la enseñanza y favorecer la habilidad para realizar experimentos de simulación en el diseño de procesos, uso de técnicas y programas estadísticos para modelar, analizar

y resolver problemas que describan fenómenos aleatorios en la práctica. Se considera un avance en presentar formas alternativas de instrumento de evaluación, en la cual se han identificado muchos conflictos semióticos en las tres configuraciones que nos proporcionará los medios para aumentar la idoneidad en futuras experiencias. En cuanto a la idoneidad del proceso de instrucción en estadística, con base en el análisis epistémico, podemos mencionar avances preliminares que consideraremos en futuras experiencias con los estudiantes:

- **Idoneidad cognitiva:** Se evidencia en el aprendizaje mostrado en las distintas pruebas de evaluación, aunque han sido desigual. Logran familiarizarse con los recursos informáticos presentados siendo capaces de simular experimentos y utilizan más elementos de significado correctamente en las actividades. Sin embargo existe diferencias de intensidad de implementación, por ejemplo en la argumentación, y hay que dedicar más tiempo al tema.
- **Idoneidad mediacional:** Se considera positiva pues permite a los estudiantes el trabajo de las propiedades de la distribución muestral desde tres configuraciones didácticas diferenciadas para facilitar la comprensión progresiva y su generalización. Se amplían las representaciones conectando los modelos de probabilidad con la experimentación. El uso de medios como la plataforma virtual aumenta las posibilidades de trabajo, aunque hay que tener presente el esfuerzo cognitivo de los estudiantes.
- **Idoneidad emocional:** Para valorarla hay que tener en cuenta las características de los estudiantes de ingreso a la universidad cuyas competencias matemáticas son débiles y la metodología de enseñanza tradicional del docente, que en alguna medida inciden en las tasas de reprobación y desmotivación de los estudiantes. No obstante, se observa implicación alta en las distintas actividades implementadas.



## Agradecimientos

Este trabajo es parte del Proyecto Fondecyt 11080071.

## Referencia

Alvarado, H. (2004). Significado y comprensión de un teorema estadístico: elementos básicos en el desarrollo profesional del profesor para una buena enseñanza. *Boletín de Investigación Educativa*, 19, N°1, 227-244.

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2005). El significado del teorema central del límite: evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras (Ed.): *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, pp. 257-277. Jaén: Universidad de Jaén.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estud. Pedagóg.* Vol. 34, N° 2, 7-28.

Alvarado, H., Sánchez, I., Retamal, L. y Ramos, J. (2003). Una propuesta metodológica hacia el aprendizaje activo en las matemáticas. *Boletín de Investigación Educativa*, 18, 111-126.

Alvarado, H., Sánchez, I. y Uribe, M. (2000). Correspondencia entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Boletín de Investigación Educativa*, 15, 70-88.

delMas, R. C., Garfield, J. B., y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students' statistical reasoning. *Journal of Statistic education*. Vol. 7, 3.

- Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesores reflexivos. *UNO*, 17, pp. 37-48.
- Fonseca, C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.
- Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, 9-19.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R. y Pérez, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Rev. Fac. Ing.* Vol. 13(2), 91-96.
- Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 123-155.
- Ordóñez, L. (1994). La enseñanza de las ciencias básicas en Chile: Una visión desde la didáctica. Editor Silva, M. CPU.
- Parra, E., Alvarado, H., Morales, J., Constenla, J. y Díaz, C. (2001). Percepción del estudiante y del docente de la UCSC respecto del desempeño académico en el aula. *Boletín de Investigación Educativa*, 16, 246-264.
- Retamal, L., Alvarado, H. y Rebolledo, R. (2007). Comprensión de las distribuciones muestrales en un curso de estadística para ingenieros. *Ingeniare*, 15, 6-17.

Rizo, H. (1999). *Evaluación del docente universitario*. Revista electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. Revista de educación, 294, pp. 275-300.

# La Geometría de los grafos o los grafos de los poliedros

Teresa Braicovich <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En esta conferencia se presentarán las conclusiones de una investigación de tipo cualitativa llevada a cabo en diferentes establecimientos educacionales, de distinto contexto social, con el fin de analizar si sería positivo introducir el tema grafos en las currículas escolares. A partir del análisis de las experiencias llevadas a cabo, se concluyó que el trabajar con algunos conceptos de grafos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, intuyendo, explorando, descubriendo y planteando diversas conjeturas, las que luego validarán o refutarán, con justificaciones adecuadas a sus edades. También pueden utilizar a los grafos como “organizadores” y facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas. Por último, el tema resulta motivador para los alumnos, dando la posibilidad de un cambio de actitud frente a la asignatura matemática.*

*En esta conferencia, además de exponer estas conclusiones, se hará referencia a la didáctica y metodología a utilizar en los distintos niveles educativos.*

*Por último, se presentarán, a modo de ejemplo, actividades que relacionan la geometría y los grafos, en particular los poliedros eulerianos y los grafos planares.*

## **Introducción**

El tema grafos, que es el que nos ocupa, no se encuentra, en general, en las currículas escolares, es una temática relativamente nueva en la que aún queda mucho por descubrir.

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional del Comahue -Argentina

*“Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aún aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a los que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía hace ya cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación”....¿Quién dijo que se sabía “todo”? El solo hecho de que “aceptemos” esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la “matemática real”, la que investiga porque no sabe, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que mostrar, la que hay que sugerir.” (Paenza, 2007).*

Con el fin de realizar un análisis sobre la factibilidad de introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en las currículas escolares se llevó a cabo una investigación de tipo cualitativa. Se realizaron experiencias en varios establecimientos educacionales públicos, de distintos niveles educativos y de diferentes contextos sociales (establecimientos públicos de radio céntrico, de radio periférico, rurales y de gestión privada). Además, se dictaron talleres a docentes de nivel primario, medio y universitario con el fin de analizar si consideraban accesible el tema para ser dado a los alumnos y también conocer su opinión respecto de la inclusión del mismo en las distintas currículas.

A partir de este estudio, se concluyó que la inclusión de ciertos conceptos de la teoría de grafos es positiva, pues hace que:

- Los alumnos realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, mediante la intuición, la exploración, el descubrimiento, el planteo de distintas hipótesis y la corroboración, o no de las mismas. Siempre atendiendo a que el alumno debe apropiarse del conocimiento matemático, *“el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y*

*piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades...y conjeturan y demuestran". (NCTM, 2003).*

- Los estudiantes sean capaces de utilizar a los grafos como “organizadores” para así facilitar la comprensión y por lo tanto el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones utilizando esta estructura matemática. *“los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas, para seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas...”*. (NCTM, 2003).
- Se trabaje en un entorno motivador, donde los alumnos pueden desarrollar su creatividad, su ingenio, sus conocimientos, pero en cierta forma despojados de concepciones previas sobre su propio accionar en matemática. Esto, sin duda, es importante, ya que contribuye a que aumenten su autoestima y por ende cambien de actitud frente a esta asignatura.

## **Grafos y la enseñanza**

*“Escribí este libro con varios objetivos: enseñar al lector algunos de los temas vigorosos y excitantes del campo de la teoría de grafos, mostrar que los grafos son aplicables en una gran variedad de campos, dentro y fuera de la matemática, incrementar los conocimientos de los estudiantes y facilitar las demostraciones o pruebas matemáticas y por último, no por ser lo menos importante, para que disfruten con la matemática”.*

Prólogo del libro *"Introductory Graph Theory"*.  
G. Chartrand (1985).

En una primera parte se hará un sucinto comentario sobre la Teoría de Grafos, desde el punto de vista de la matemática y también de la educación.

Desde el primer artículo publicado por Leonard Euler (1707–1783), en las Actas de la Academia de San Petesburgo en 1736, con el problema denominado “*Los puentes de la ciudad de Königsberg*”, que sentó una de las piedras angulares de la topología, el tema grafos no ha dejado de preocupar a todas las generaciones de matemáticos. A partir del año 1936, cuando König publicó el libro “*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*”, relacionando grafos con diagramas moleculares y redes eléctricas, esta teoría se convirtió en una disciplina autónoma que atrajo a matemáticos de todas las épocas y es hoy un campo abierto de investigación, que seguramente seguirá siéndolo durante mucho tiempo, tanto desde la teoría matemática como desde los contenidos educativos. Es importante mencionar que esta teoría en sus comienzos se ocupaba principalmente de pasatiempos y rompecabezas, sin embargo, avances posteriores en la matemática y especialmente en sus aplicaciones la han impulsado en gran medida, siendo actualmente una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge.

En el siglo XIX se usaban los grafos en áreas tales como circuitos eléctricos o diagramas moleculares, en la actualidad estos son una herramienta natural y tienen muchas aplicaciones a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros y además está presente en campos tan dispares como la economía, la sicología y la biología.

Los temas trabajados con los alumnos en la investigación llevada a cabo fueron, entre otros, recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, planaridad, coloreo y árboles. Los instrumentos de evaluación en esta investigación, de tipo cualitativa, fueron: las observaciones de las clases, las producciones de los alumnos, las opiniones de los docentes asistentes al taller y también de los que se encontraban a cargo de los cursos en los cuales se desarrollaron las distintas experiencias. Además se tuvieron en cuenta, para realizar el análisis, las entrevistas cognitivas realizadas a un grupo de alumnos al año de concluidos los encuentros mantenidos con ellos.

Es importante hacer hincapié en la importancia de dar actividades a nuestros alumnos que no sean una mera ejercitación rutinaria, sino aquellas que hagan movilizar los conocimientos previos y engendrar nuevos para lograr resoluciones correctas, haciendo que los propios estudiantes sean quiénes construyan el conocimiento, proponer actividades que requieran de la elaboración de conjeturas, de su justificación y de su posterior demostración. *“El tratamiento de la demostración formal sin realizar previamente un acercamiento a través del planteo de conjeturas, formulación de hipótesis, desarrollo de argumentos, conduce a un aprendizaje memorístico y a confundir el propósito de la demostración”*. (Scaglia y otras, 2008).

A modo de síntesis, puede establecerse que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en las currículas de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997), donde se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.



## Grafos y poliedros

A modo de ejemplo, en esta conferencia se presenta la relación entre los grafos planares y los poliedros. En NCTM (2003), dentro de los objetivos para los últimos tres años de la enseñanza media, se plantea utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la representación geométrica en la enseñanza y dentro de este objetivo se propone utilizar a los grafos para modelizar y resolver problemas. Para esto comenzaremos mencionando el concepto de planaridad de un grafo.

Una representación en el plano de un grafo  $G = (V, U)$  es una función  $f$  tal que a cada vértice  $v \in V$  le hace corresponder un punto del plano y a cada arista  $a \in U$  le hace corresponder una curva simple con extremos en los puntos del plano correspondientes a los puntos extremos de la arista  $a$ , de manera que tal curva no contiene otros puntos correspondientes a vértices del grafo. Un grafo  $G$  admite distintas representaciones, sin embargo, es importante destacar que una representación determina un único grafo.

Un grafo  $G$  se dice grafo planar si admite una representación en el plano tal que curvas correspondientes a aristas distintas no se cortan salvo, tal vez, en sus puntos extremos. Una tal representación se dice una representación plana de  $G$  o una inmersión de  $G$  en el plano. Un grafo plano es un grafo planar con una dada representación plana.

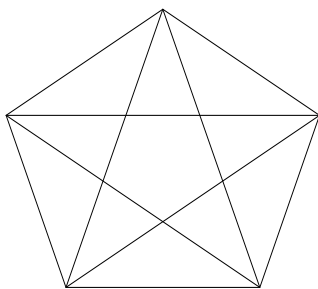
Para la introducción del tema se utilizará un antiquísimo problema, el llamado comúnmente “*Problema de los recursos*”. En el mismo, es esencial decidir si se puede o no dibujar un grafo en el plano sin intersecciones entre puntos interiores de las aristas. El enunciado se presenta a continuación:

*“En un terreno se han construido tres casas y se han excavado tres pozos de agua para uso de sus ocupantes. El clima y la naturaleza del terreno son tales que es frecuente que uno u otro de los pozos se seque; por ello, es importante que los habitantes de*

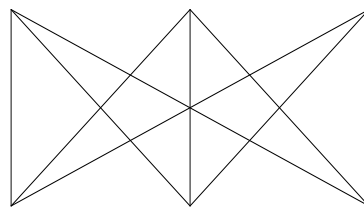
*cada una de las casas tengan acceso a cada uno de los tres pozos. Al cabo de un tiempo, los residentes a, b y c desarrollan una fuerte antipatía mutua, por lo que quieren construir caminos al mismo nivel hasta los tres pozos x, y, z, de manera que puedan evitar el encontrarse en el camino de ida y de vuelta a los pozos, la pregunta es si será posible hacer esto”.*

Cabe aclarar que este mismo problema suele ser presentado de otras maneras, por ejemplo, tener desde las tres casas conexiones a los servicios de gas, agua y luz mediante cañerías que no se crucen pero que se encuentren en el mismo plano.

Con esta situación como disparadora se presentará la *Conjetura de Kuratowski*. En el año 1930, el matemático polaco Kazimierz Kuratowski da a conocer un teorema en el que demuestra que un grafo es planar si y sólo si, ignorando sus vértices de grado dos, no contiene subgrafos isomorfos al bipartito completo  $K_{3,3}$  o al completo  $K_5$ , ambos grafos se esquematizan a continuación:



**Grafo  $K_5$**



**Grafo  $K_{3,3}$**

La Fórmula de Euler para grafos dice: “Sea  $G$  un grafo planar conexo con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $r$  regiones. Entonces se tiene que:  $v - a + r = 2$ ” Cabe mencionar que esta es equivalente a la *Fórmula Poliedral de Euler*, tomando cantidad de caras del poliedro en lugar de cantidad de regiones del grafo.

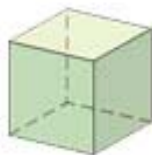
Dado un grafo planar  $G$ , se puede construir un nuevo grafo  $G'$ , llamado *grafo dual* de  $G$ , el mismo se construye asociando un vértice a cada región del grafo  $G$  y si una arista limita dos regiones en  $G$ , se añade en el grafo dual  $G'$  una arista uniendo

los vértices correspondientes a esas regiones. Como dos regiones pueden estar limitadas por más de una arista en común, pueden existir aristas paralelas. Asimismo, en el grafo dual pueden existir bucles, los mismos representan aristas que no limitan distintas regiones en el grafo  $G$ .

En un poliedro regular todas las caras son polígonos regulares congruentes entre sí y a cada uno de sus vértices concurre el mismo número de aristas. Es importante recordar que existen exactamente cinco poliedros regulares, los mismos son llamados sólidos platónicos, en honor a Platón, por ser quién los mencionó por primera vez en su libro Timeo. Se presentan estos a continuación:



**Tetraedro**



**Cubo**



**Octaedro**

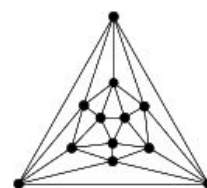
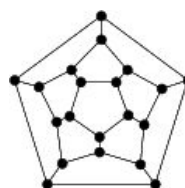
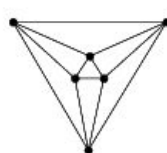
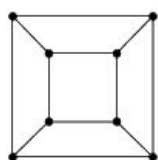
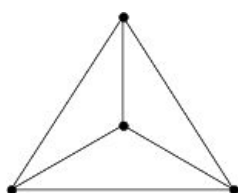


**Dodecaedro**



**Icosaedro**

Atendiendo a la importancia que tiene el trabajar con distintas representaciones, se representan los grafos planares asociados a los poliedros regulares. Tomaremos cada vértice del poliedro como un vértice del grafo y uniendo los mismos con aristas si son adyacentes, obteniéndose así los grafos que se presentan a continuación, dados en el mismo orden que los poliedros:



Un grafo regular plano  $G$  es completamente regular si su grafo dual  $G'$  es también regular y existe una correspondencia entre los sólidos platónicos y los grafos completamente regulares.

Además de la representación realizada anteriormente, se pueden representar los poliedros mediante grafos en los cuáles cada vértice del grafo represente una cara del poliedro y los mismos estén unidos mediante aristas si las caras que representan son contiguas. Comparando las dos representaciones realizadas de cada poliedro se tiene que:

- Son iguales para el tetraedro, pues el mismo coincide con su grafo dual y además el poliedro conjugado de un tetraedro es un tetraedro.
- El grafo que representa al cubo realizado en primer lugar coincide con el realizado en segundo lugar para el octaedro y viceversa, esto nos permite observar que estos dos poliedros son conjugados.
- Entre el dodecaedro y el icosaedro sucede lo mismo que entre el cubo y el octaedro, es decir son poliedros conjugados.

Se presenta este ejemplo, en el que se hace hincapié en grafos duales, poliedros regulares, grafos completamente regulares y poliedros conjugados, con el fin de proporcionar a los docentes una puerta para introducir el tema grafos en alumnos de los últimos años de la enseñanza secundaria.

Se puede seguir trabajando en este tema, a modo de ejemplo, con el coloreo de grafos, si se quieren construir los poliedros de manera que caras contiguas tengan distinto color, se puede hallar el número cromático del grafo que lo representa, siendo este valor la cantidad de colores necesarios para construir el poliedro con las especificaciones pedidas. Cabe aclarar que en este caso se debe trabajar con la representación en la que los vértices del grafo son las caras del poliedro.

## Referencias

Appel, K. y Haken, W. (1989). *“La solución del problema de los cuatro colores”*. Investigación y Ciencia. Número 15. Pags. 78-91. Buenos Aires. Argentina.

- Ausubel, D. (1978). *"Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo"*. Trillas, México.
- Braicovich, T. (2005) *"Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica"*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.
- Brousseau, G. (1986). *"Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques"*, en Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 N° 2.
- Coriat, M. (2004) *Algunos usos escolares de los grafos*. Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
- Chartrand, G. (1985). *"Introductory Graph Theory"*. Dover, Nueva York.
- Chiappa, R. (1989). *"Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos"*. Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.
- Guzmán, M. (1984). *"Juegos matemáticos en la enseñanza"* Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
- Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). *"Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook"*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.
- Menendez Velazquez, A. (1998) *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

- Paenza, A. (2005). *"Matemática...¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades"*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Paenza, A. (2007). *"Matemática...¿estás ahí? episodio 3"*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Paenza, A. (2008). *"Matemática... ¿estás ahí? episodio 100"*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Rosentein, J., FRANZBLAU, D., ROBERTS, F. Editores. (1997). *"Discrete Mathematics in the Schools"*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- Santaló, L: (1993). *"Matemática 1. Iniciación a la creatividad"*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.
- Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario. VII CAREM. Santa Fe. Argentina.
- Wilson, R. (1979). *"Introduction of Graph Theory"*. Longman. New York.



# Importancia del pensamiento probabilístico en la Educación Básica

Paulo César Pinto Carvalho <sup>1</sup>

## **Resumen**

*El uso de la probabilidad es cada vez más importante en todos los ámbitos de actividad. Por esta razón, su enseñanza en la escuela primaria se ha introducido en los planes de estudios de muchos países (entre ellos el Perú). Sin embargo, los maestros generalmente se sienten inseguros con el tema, ya sea por falta de formación adecuada en el tema, o por las dudas sobre el enfoque adecuado al enseñar a los estudiantes. En esta conferencia trataré ambos aspectos y propondré una posible línea de acción para la enseñanza de la probabilidad en la escuela media.*

---

<sup>1</sup> Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Brasil





# **TALLERES**



# Desarrollo e Investigación de actividades Matemáticas de Enseñanza Media con Geogebra

Carlos Rald Cortez Rodriguez<sup>1</sup>

## Resumen

*En la actualidad no se discute la importancia que la informática ejerce en la producción y circulación del conocimiento, es por ello que el presente taller tiene como objetivo enseñar a los profesores a aprovechar las bondades del software de geometría dinámica geogebra, a través del desarrollo de actividades que involucren el manejo de sus herramientas y, de esta manera, motivarlos a que elaboren sus propias actividades, para que las mismas sean desarrolladas por sus alumnos usando el software como herramienta facilitadora para la construcción de conocimientos matemáticos. Las actividades a desarrollar estarán planteadas de manera que permitan las etapas de enseñanza de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau.*

*Palabras clave:* Geometría dinámica, situación didáctica.

## Introducción

Mi interés surgido por la enseñanza y aprendizaje de diferentes softwares de contenido matemático radicó en sus inicios en ayudar a los alumnos en la realización de sus portafolios de investigación puesto que uno de los criterios de evaluación es el uso de medios tecnológicos. Sin embargo, pude notar que muchos de los profesores que impartían también el programa de diploma de la OBI no manejaban softwares y que esto no permitía que sus alumnos lograsen los puntos correspondientes. No obstante, pude notar durante los talleres dirigidos a los alumnos que estos al desarrollar dichas investigaciones sobre

---

<sup>1</sup> Colegio Peruano Norteamericano Abraham Lincoln-Perú

cierto contenido matemático específico con el software sus resultados en las evaluaciones eran mejores comparadas con la de otros grupos. Queda entonces para nosotros diseñar situaciones que ofrezcan a los alumnos la posibilidad de construir el conocimiento.

“El ingreso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) a la vida de todo el planeta ha generado una serie de exigencias hacia el cambio” (García, 2009, p. 3) esto implica que las TIC nos llevan a un nuevo escenario de aprendizaje no tradicional, para el cual el docente debe estar preparado.

De acuerdo a Quitana (2000), considera que las competencias tecnológicas que posea el profesorado han de ser tendentes a potenciar la integración curricular de las tecnologías de la información en todos los niveles educativos.

Perrenoud (2002), ha llegado a nombrar diez familias de competencias:

1. Organizar y dirigir situaciones de aprendizaje.
2. Administrar el progreso de los aprendizajes.
3. Concebir y hacer evolucionar los dispositivos de diferenciación.
4. Involucrar a los alumnos en sus aprendizajes y en su trabajo.
5. Trabajar en equipo.
6. Participar de la administración de la escuela.
7. Informar e involucrar a los padres.
8. Utilizar las nuevas tecnologías.
9. Enfrentar los deberes y los dilemas éticos de la profesión.
10. Administrar la propia formación continua.

### **El software**

El presente taller se desarrolló usando el software gratuito Geogebra 3.0. Geogebra es un software que permite construir y explorar objetos geométricos de forma interactiva, dinamizando no solo el estudio de la geometría plana, más también del álgebra y del cálculo. Este software permite construir, desde el punto de

vista geométrico, puntos, vectores, rectas, segmentos, cónicas, etc. Desde el punto de vista algebraico permite la construcción de gráficos y un estudio detallado de diversas funciones. Otra de las ventajas de geogebra radica en que permite crear hojas dinámicas; es decir, que las construcciones realizadas pueden ser exportadas como páginas web y ser manipuladas por otras personas sin necesidad de tener instalado el programa.

## El taller

### *Actividad: Reconociendo Geogebra*

#### *Objetivo*

Analizar una de las propiedades de ángulos en la circunferencia.

#### *Comentarios*

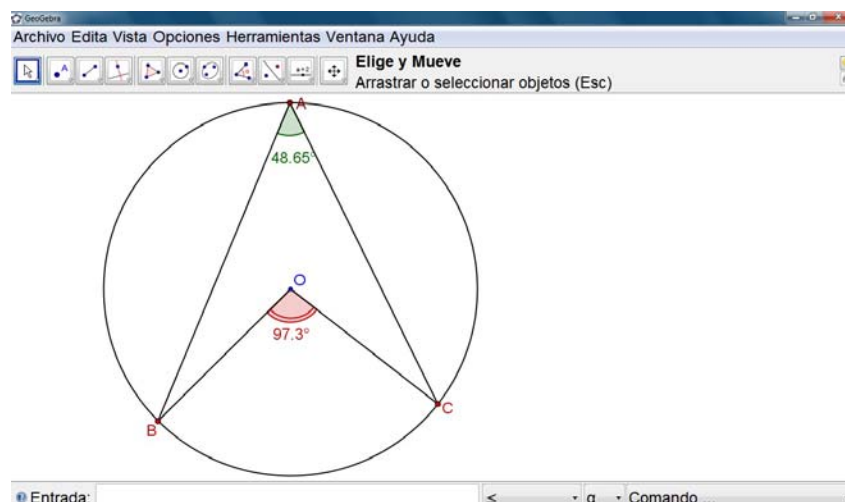
La visualización usando el software geogebra permite formular hipótesis sobre las relaciones existentes de los ángulos formados en figuras inscritas en una circunferencia.

#### *Construcción*

1. Inserte un punto O con coordenadas  $(4,4)$
2. Cree una circunferencia dada su centro O y su radio igual a 4
3. Inserte 3 puntos A, B y C en la circunferencia.
4. Construya los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{OB}$  y  $\overline{OC}$  usando la herramienta **segmento entre dos puntos**.
5. Usando la herramienta **ángulo** determine la medida del ángulo  $\hat{BOC}$  y del ángulo  $\hat{BAC}$ .
6. Usando la herramienta **Elige y mueve** manipule el punto A. Describe lo que sucede con la medida del ángulo  $\hat{BAC}$  a medida que mueve el punto A.
7. Mueva los puntos B o C para cambiar la medida del ángulo  $\hat{BOC}$ . Describa lo que sucede a medida que el ángulo cambia.
8. Manipule los ángulos  $\hat{BAC}$  o  $\hat{BOC}$  para que midan lo indicado y complete la tabla.

| $\hat{BAC}$ | $\hat{BOC}$ |
|-------------|-------------|
| $42^\circ$  |             |
| $34^\circ$  |             |
| $28^\circ$  |             |
|             | $98^\circ$  |
|             | $122^\circ$ |
|             | $164^\circ$ |

9. Usando los datos de la tabla, formule una relación existente entre la medida del ángulo  $\hat{BOC}$  y la medida del ángulo  $\hat{BAC}$ .



### Actividad: Trinomios y parábolas

#### Objetivo

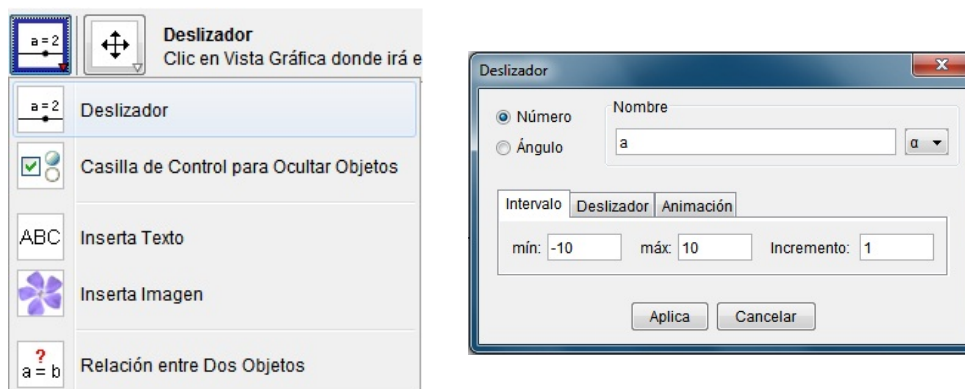
Estudiar el efecto de los coeficientes  $a, h$  y  $k$  usando el gráfico del trinomio de segundo grado cuya expresión tiene la forma  $y = a(x - h)^2 + k$ .

#### Comentarios

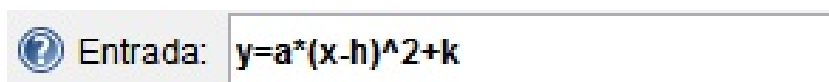
La visualización usando el software geogebra permite identificar de manera rápida el papel que desempeñan los coeficientes.

### Construcción

1. Inserte 3 deslizadores horizontales o verticales  $a$ ,  $h$  y  $k$  con intervalo mínimo -10 y máximo 10, y con incremento 1.



2. Ingrese en el **campo de entrada** de geogebra la función  $y = a \times (x - h)^2 + k$



3. Ingrese en el **campo de entrada** de geogebra el **punto A** con coordenadas  $h, k$



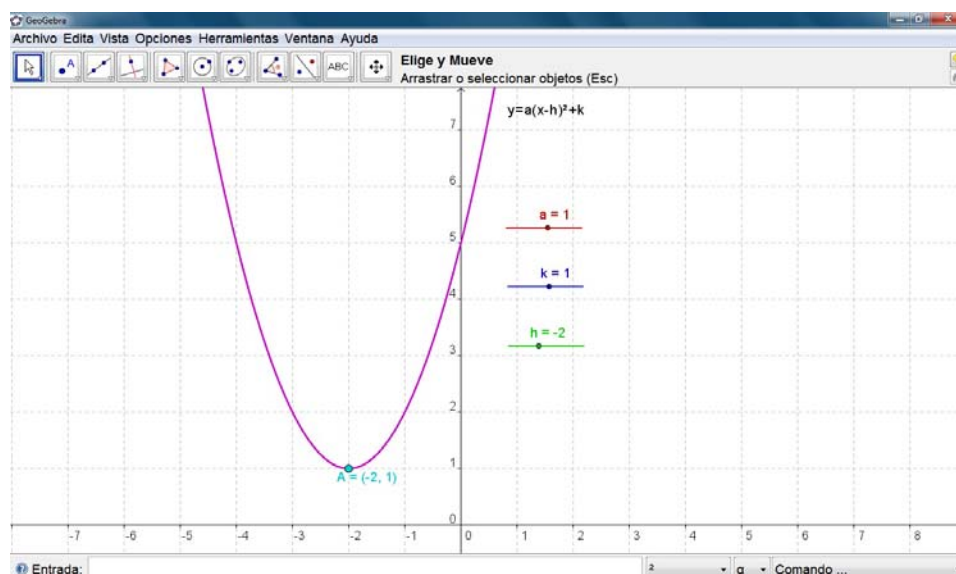
4. Active la opción de ver el nombre y el valor del punto A, para visualizar sus coordenadas.
5. Active la opción cuadrícula.
6. Para  $a > 0$ , manipule el deslizador  $a$  y observe el movimiento de la parábola cuando el valor de  $a$  aumenta. Describa ese movimiento.
7. Para  $a > 0$ , manipule el deslizador  $a$  y observe el movimiento de la parábola cuando el valor de  $a$  disminuye. Describa ese movimiento.
8. Para  $a < 0$ , describa lo que sucede cuando el valor de  $a$  varía.



9. Observe la parábola y manipule el deslizador “h” de manera que cambie su valor. Describa lo que sucede a medida que se modifica su valor.
10. Observe la parábola y manipule el deslizador “k” de manera que cambie su valor. Describa lo que sucede a medida que se modifica su valor.
11. Relacione los valores de  $h$  y  $k$  con las coordenadas del vértice.
12. Escoja los valores de  $a, h$  y  $k$  y manipule los deslizadores de modo que obtenga la función  $y = x^2$ .
13. Con la información dada complete la siguiente tabla.

|   | A  | h | k  | $y = a(x - h)^2 + k$ | VÉRTICE     |
|---|----|---|----|----------------------|-------------|
| 1 | 1  | 2 | -3 |                      | ( , )       |
| 2 | 2  | 2 | -3 |                      | ( , )       |
| 3 | -2 | 2 | -3 |                      | ( , )       |
| 4 | -3 | 2 | -3 |                      | ( , )       |
| 5 | 3  | 1 | 3  |                      | ( , )       |
| 6 | -4 | 2 | 5  |                      | ( , )       |
| 7 | 2  |   |    |                      | ( 3 , 6 )   |
| 8 | 3  |   |    |                      | ( -4 , -2 ) |

14. Si la función  $y = a(x - h)^2 + k$  con  $a = 2$  y vértice con coordenadas  $(-1; -2)$  se traslada 3 unidades en el sentido positivo del eje  $x$ , y 5 unidades en el sentido positivo del eje  $y$ . Exprese la función en la forma  $y = a(x - h)^2 + k$ .
15. Si la función  $y = 4(x - 1)^2 - 3$  se traslada 2 unidades en el sentido negativo del eje  $x$ , y 2 unidades en el sentido positivo del eje  $y$ . Exprese la función en la forma  $y = a(x - h)^2 + k$ ; y además, de las coordenadas del vértice.



## Referencias

Bennet D. (2002). *Geometry with the geometer's sketchpad*. California: Key Curriculum Press.

Bongiovanni V., Mendoza T., Almouloud S. (1997). *Descobrimdo o Cabri-Géomètre, caderno de atividades*. São Paulo: Editora FTD S.A.

Ferreira M., Nogueira R., Almouloud S., Bongiovanni V. (2002). *Explorando conteúdos do ensino médio e fundamental com cabri-géomètre* (2ª edição). São Paulo: Editora PROEM.

García M. (2009). *Uso de las TIC en el aula*. Lima: Editorial Santillana.

Manrique A., Lutaif B., Antonio B., Goulart M. Giusti V. (2002). *Atividades para o estudo de Funções em ambiente computacional*. São Paulo: Editora Iglu.

Raposo M., Fuentes E. y González M. (2006). *Desarrollo de competencias tecnológicas en la formación inicial de maestros*. Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa.



# La Enseñanza de la Geometría espacial utilizando Cabri 3D

Jesús Flores Salazar <sup>1</sup>

## **Resumen**

*El presente taller tiene por objetivo construir figuras geométricas utilizando el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. Pensamos que las herramientas y recursos que el Cabri 3D tiene, puede favorecer el tratamiento de figuras, en el sentido de Duval (1995), como la visualización y la apropiación de algunas propiedades de objetos geométricos espaciales. Creemos también, que las herramientas y recursos de este ambiente, artefactos en un primer momento, pueden transformarse en instrumentos para sus usuarios (estudiantes y profesores) de acuerdo con el abordaje Instrumental de Rabardel (1995). Así, el taller constará de dos partes. En la parte I, presentamos actividades introductorias al Cabri 3D (actividades básicas) orientadas a la exploración de sus principales herramientas y recursos. En la parte II, presentamos actividades más complejas que tienen por objetivo la solución de situaciones problemas de geometría espacial.*

*Palabras Clave:* Geometría Espacial; Cabri 3D, visualización.

## **Introducción**

Algunas investigaciones en Educación Matemática, como las de Parzysz (1988; 1991), Cavalca (1997; 1998), Rommevaux (1999), Kaleff (2003), Montenegro (2005), Flores (2002; 2007) y Salazar (2009), señalan la necesidad de investigaciones, que pongan en evidencia cómo se produce el proceso de aprendizaje de geometría espacial.

De acuerdo a esto, el *Cabri 3D* se presenta como una alternativa, ya que permite construir, manipular, explorar figuras espaciales y modificar el punto de vista del observador de manera intuitiva.

---

<sup>1</sup> Universidad Federal del Río Grande del Norte- Brasil

Al mismo tiempo, con este ambiente de geometría dinámica, los estudiantes pueden conjeturar y verificar las propiedades de estas figuras.

También pensamos que el *Cabri 3D*, se puede transformar en instrumento, en el sentido de Rabardel (1995). Afirmamos esto, por que consideramos que el dinamismo de este ambiente puede mejorar el aprendizaje de la geometría espacial, ya que pone a disposición diversas herramientas y recursos para trabajar y visualizar situaciones tridimensionales.

### **Base teórica**

De acuerdo con Duval (2003), es de fundamental importancia en el funcionamiento cognitivo la distinción entre un objeto y su representación, y la comprensión de la matemática como una actividad que moviliza una variedad de registros de representación semiótica. Para el autor, los registros de representación son las representaciones semióticas utilizadas en el funcionamiento matemático. Así, los clasifica en cuatro tipos: lenguaje natural, algebraico, gráfico y registro figural.

El registro figural es muy importante para el estudio de la geometría, porque puede presentar de forma mas directa y simple la idea de solución que en otros registros. Duval (2002) destaca cuatro formas diferentes de aprehender una figura: *aprehensión perceptiva, discursiva, secuencial y operatoria*. A pesar de que todas las aprehensiones sean necesarias para la composición del pensamiento geométrico, es la aprehensión operatoria, por medio de las manipulaciones físicas o mentales sobre la representación de un objeto matemático o parte de ella, que permite dar un sentido dinámico a las características de la figura.

En este sentido, con base en el registro figural creado por Duval (1995) y con el surgimiento de la geometría dinámica, se hace necesario considerar el **registro figural dinámico**. Entendemos como *registro figural dinámico*, como el registro figural utilizado en ambientes de geometría dinámica. Como en el presente taller,

las figuras son construidas utilizando *Cabri 3D*, el *registro figural dinámico*, debe ser considerado.

En lo que se refiere al abordaje Instrumental de Rabardel (1995), el autor define como instrumento a una entidad mixta, compuesta por el artefacto (material o simbólico) y esquemas de utilización. En esta teoría, la transformación de artefacto a instrumento articula al sujeto, con sus habilidades y competencias cognitivas, al instrumento y al objeto para el cual la acción es dirigida. Ese proceso de transformación de artefacto a instrumento, es llamado por Rabardel de Génesis Instrumental (G.I.).

De acuerdo con el autor, la G.I. tiene dos dimensiones: la *instrumentación*, orientada hacia el sujeto, en la que el artefacto es integrado a su estructura cognitiva, por medio de los esquemas de utilización y que en general exige adaptación. La *instrumentalización*, orientada hacia el objeto, está determinada por las posibilidades que el sujeto atribuye al instrumento al actuar sobre el objeto, construyendo propiedades funcionales que permiten esa acción.

Este proceso puede ser observado cuando se trabaja tecnologías, específicamente, con el *Cabri 3D*, que presentaremos a continuación.

### ***Cabri 3D***

El ambiente de geometría dinámica *Cabri 3D* se basa en la tecnología *CABRI*<sup>2</sup>, desarrollada por Jean-Marie Laborde y su grupo de investigación (asociado a la Universidad Joseph Fourier, en Grenoble, Francia).

Este ambiente pone a disposición varias herramientas para representar figuras en tres dimensiones, siendo posible manipularlas directamente y modificar el punto de vista ver (figura 1). Así, con sus herramientas es posible construir diversos sólidos como prismas, pirámides, cilindros, conos,

---

<sup>2</sup> La sigla CABRI viene del francés *Cahier de Brouillon Informatique*, que significa Cuaderno de proyecto Informático.

esferas, etc. De acuerdo con Hugot (2005), su desarrollo se basa en los principios de manipulación directa, colocando al usuario en una posición central en el proceso de concepción del software.

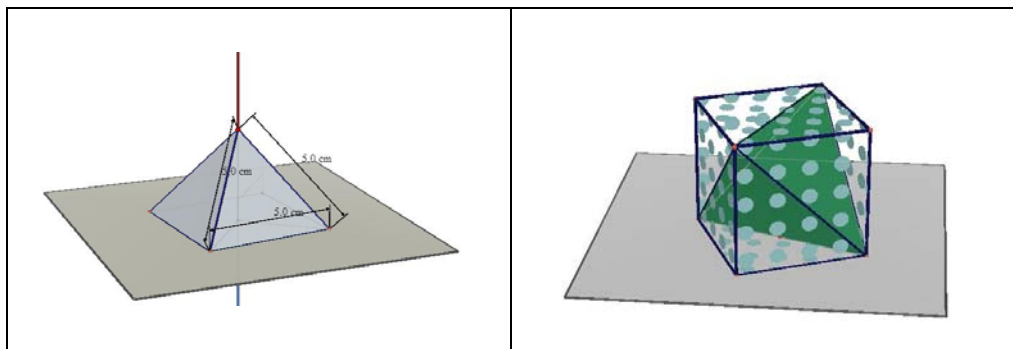


Fig. 1. Ejemplos de construcciones con *Cabri 3D*

También, el autor señala que las funciones didáctico pedagógicas que este ambiente posee son varias, tales como: Promover un ambiente de simulación, por que respeta las leyes del modelo de geometría euclidiana espacial; Motivar, por que su interactividad puede despertar curiosidad en el usuario. Por ejemplo, el uso de la ventana de “atributos” (color, tamaño, textura, etc.) hace que las figuras sean más atractivas dinámicas y “legibles”.

En la actualidad, el *Cabri 3D* se encuentra en su segunda versión (*Cabri 3D v2*), y posee nuevas herramientas (figura 2) como por ejemplo: “suma de vectores”, “producto vectorial”, “producto escalar” y “coordenadas y ecuaciones”.

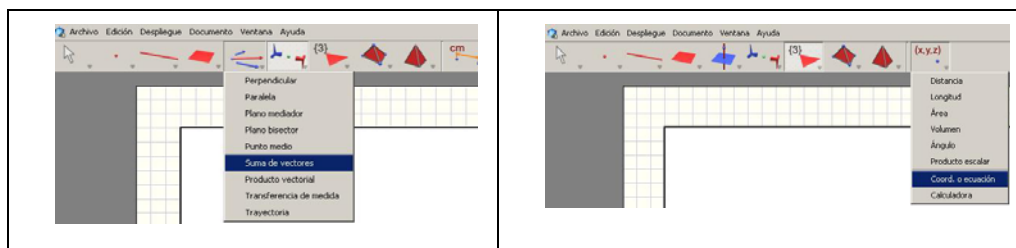


Fig. 2. Herramientas nuevas del *Cabri 3Dv2*

## Los participantes

El taller esta orientado para profesores de secundaria y de nivel superior. Es preferible pero no indispensable que los

participantes tengan experiencia con Cabri II o con otros ambientes de geometría dinámica.

### Desarrollo de las actividades

Las actividades a ser desarrolladas en el taller están planeadas en dos etapas:

- Etapa I, exploración de diferentes recursos y herramientas del *Cabri 3D*, tales como: “ayuda de herramientas”, “deshacer”, “cambio de punto de vista”, “ocultar/mostrar”, etc. Se utilizan algunas otras herramientas y/o recursos en actividades de construcción directa, como por ejemplo, tetraedros, pirámides y prismas; cuerpos redondos; polígonos y poliedros regulares, como muestra la figura 3.

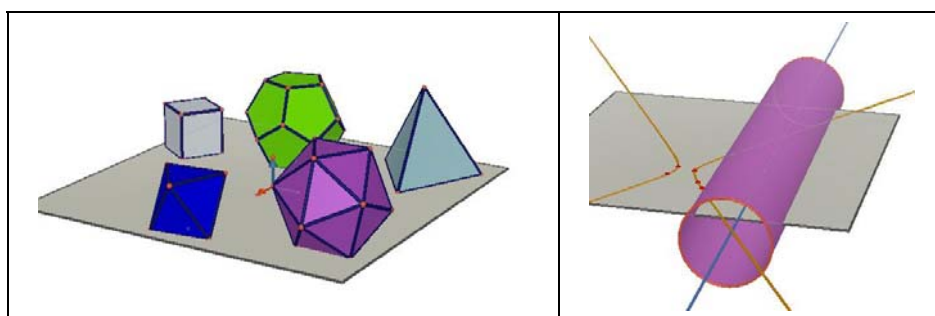


Fig. 3. Construcción de poliedros y cuerpos redondos

- Etapa II, las actividades están orientadas a la solución de situaciones problemas que envuelven el uso de otras herramientas, recursos y también de recursos de animación (ver figura 4).

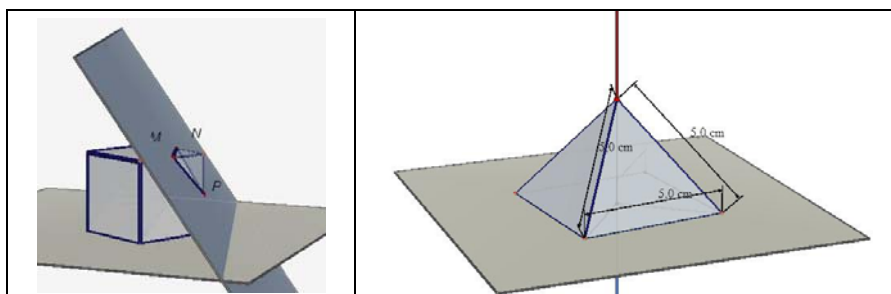


Fig. 4. Ejercicios de geometría espacial



Utilizaremos también las herramientas de transformaciones geométricas en el espacio, y del recurso de animación, que el *Cabri 3D* posee para construir modelos animados. Pensamos que es posible que estos modelos, puedan motivar a los alumnos a estudiar geometría espacial y así, contribuir en el proceso de aprendizaje de esta área (ver figura 5).

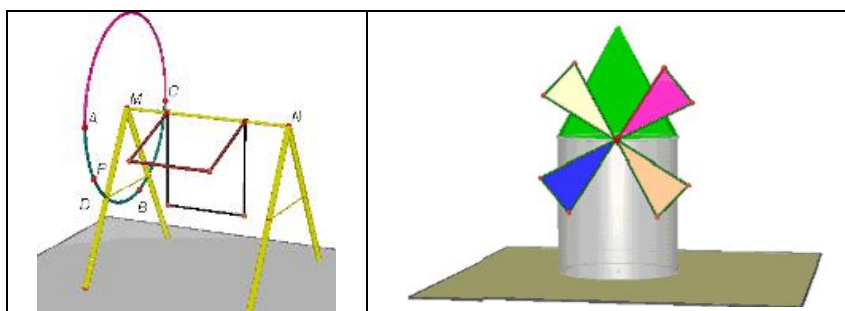


Fig. 5. Modelos animados

Creemos que las herramientas y recursos del *Cabri 3D*, ayudan a los estudiantes a hacer conjeturas sobre las propiedades de las figuras (registro figural dinámico) y visualizarlas de manera mas rápida.

También es posible observar el proceso de Génesis Instrumental (instrumentación e instrumentalización) durante el desarrollo del taller.

## Referencias

CABRI 3D, Manual do usuario. Disponible en: <[http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user\\_manual\\_pt\\_br.pdf](http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf)>

Cavalca, A. de P. (1997). Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. Tesis (Maestría en Educación Matemática), Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo.

Duval, R.(1995). *Semiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

\_\_\_\_\_. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: Representations and Mathematics Visualization. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA-Cinvestav-IPN. Ed. Fernando Hitt. p. 311-335, Mexico.

Flores, C. R. (2002). Abordagem histórica no ensino de Matemática: o caso da representação em perspectiva. Contrapontos. v. 2, n. 6. p. 423-437.

\_\_\_\_\_. (2007). Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva. São Paulo. Editora Musa.

Hugot, F. (2005). Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D. Mémoire de Recherche, Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et Didactique. Université Joseph Fourier Grenoble I, França.

Kaleff A. M. (2003). Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. EdUFF.

Montenegro, G. (2005). Inteligência Visual e 3-D: Compreendendo conceitos básicos da Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blücher.

Parzysz B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, n.19, p. 79-92.

\_\_\_\_\_. (1991). Representation of space and students' conceptions at High school Level. Educational Studies in Mathematics, n. 22, p. 575-593.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995. 239 p.

Rommevaux, M.-P. (1999). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. Revista Educação Matemática Pesquisa. v. 1, n. 1, p 13-65.

Salazar, J.V.F. (2009). Gênese Instrumental na interação com *Cabri 3D*: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tesis (Doctorado en Educación Matemática), Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo.

# Uso del WIKI en el aprendizaje de las Matemáticas

Sumaya Jaimes Reátegui <sup>1</sup>

## **Resumen**

*Un Wiki es una página web que puede ser editada por diferentes personas a través de la web. El wiki que crearemos es para uso educativo; esta podrá ser de dos tipos:*

- 1. Wikis vistos por cualquier persona pero editados sólo por los miembros del Wiki*
- 2. Wikis vistos y editados únicamente por los miembros del wiki.*

*Al finalizar el taller, los participantes serán capaces de*

- a. Crear y personalizar su Wiki,*
- b. Utilizar el wiki en el aprendizaje de las matemáticas colaborativamente.*

*Dado que muchos centros educativos no cuentan con presupuesto para pagar una licencia de wiki, usaremos el wiki del tipo 1, el cual es brindado por el [wikispaces.com](https://www.wikispaces.com) gratis.*

*La utilización del Wiki mejora el rendimiento de los alumnos y permite disponer de más tiempo para tratar los temas.*

## **Pertinencia**

Dado que la preocupación es mejorar la DIRECCIÓN DEL APRENDIZAJE de las matemáticas, y teniendo numerosas herramientas y tecnologías que nos brinda la web, muy usada por los alumnos de estos tiempos, con programas a veces no tan educativos, he optado usar los wikis como instrumento educativo que permite a los estudiantes dedicar más tiempo para el estudio y la investigación de las matemáticas en forma

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco- Perú

colaborativa con sus demás compañeros y monitoreado por sus profesores creadores del wiki.

## **Definiciones básicas**

*Página Web.* Es una fuente de información que puede contener hiperenlaces a otras páginas, las cuales pueden ser accesibles a los usuarios desde un estado físico o internet.

*Web 1.0.* Es un sitio web conformado por páginas web mayormente de lectura y estáticos, donde los usuarios participan como consumidores y no participan en la creación, producción y actualización de dichas páginas.

*Web 2.0.* Termino empleado por primera vez por Tim O'Reilly en el 2004 para referirse a una segunda generación de web basada en comunidades de usuarios como las redes sociales, los blogs, los wikis que fomenta la colaboración en línea y el intercambio activo de información entre los usuarios y participan en la creación, producción y actualización de dichas páginas web.

*Wiki.* Es una página web que puede ser editada por diferentes usuarios a través de la web.

*Colaborativamente.* Con la asistencia, participación y apoyo de todos los usuarios.

*Monitorear.* Supervisión del docente creador del wiki. Con el wiki se desarrollarán los contenidos curriculares de matemáticas de Educación Básica y Superior. Ciertamente, como también pueden desarrollarse los contenidos de otras asignaturas.

## **Elementos básicos en un Wiki**

- *Editar.-* Nos permite editar la página de color blanco, podemos subir imágenes, archivos, videos, tablas.
- *Editar navegador.-* Nos permite editar la barra de navegación.
- *Página.-* Cada wiki puede tener varias páginas. Cada página es una página web, que puede tener contenidos y enlaces a otras páginas.

- *Discusión.*- Cada página tiene su propia área de discusión o foro.
- *Historia.*- Puede verse los cambios realizados en las páginas. Permite revertir a un estado anterior en caso que se quiera corregir errores o se ha sufrido un ataque.
- *Notificarme.*- Le notifican sobre los cambios en las páginas del wiki.
- *Página Nueva.*- Nos permite crear páginas nuevas. Por ejemplo, página de enlace para cada alumno.
- *Cambios Recientes.*- Nos permite ver los cambios realizados en el wiki.
- *Administrar Wiki.*- Permite administrar a los miembros del wiki: las páginas, archivos, cambiar el logo, los permisos, las subscripciones, discusión o foro, notificaciones, estadísticas del wiki.

## **Metodología**

Dado que muchos centros educativos no cuentan con presupuesto para pagar una licencia de wiki, usaré el wiki del tipo 1, el cual es brindado por el wikispaces.com gratis.

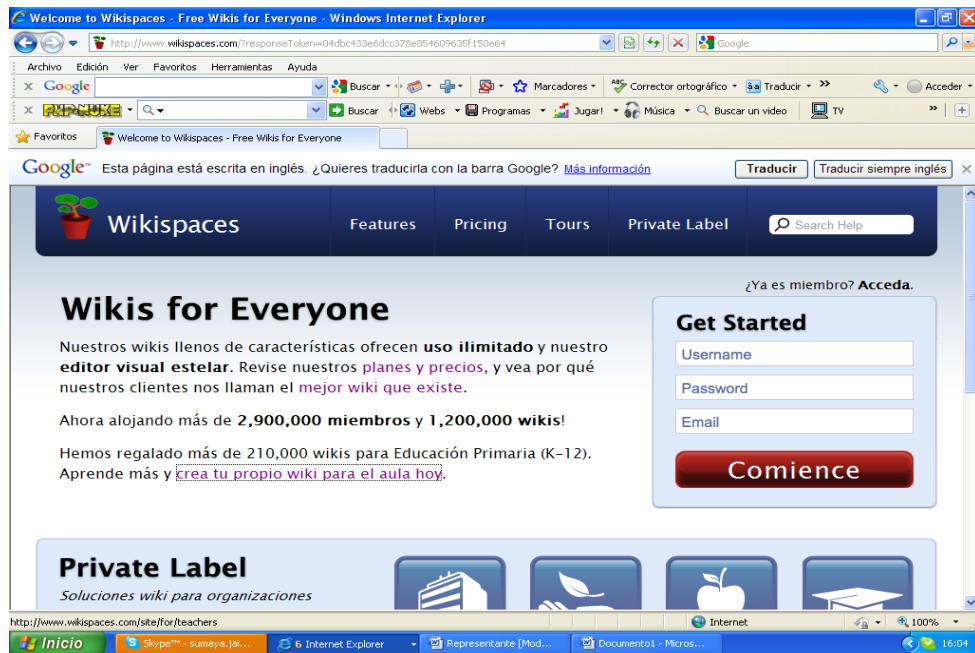
La utilización del Wiki mejora el rendimiento de los alumnos y permite disponer de más tiempo para tratar los temas.

En este taller los participantes realizarán las siguientes actividades durante las dos sesiones de 80 minutos cada una.

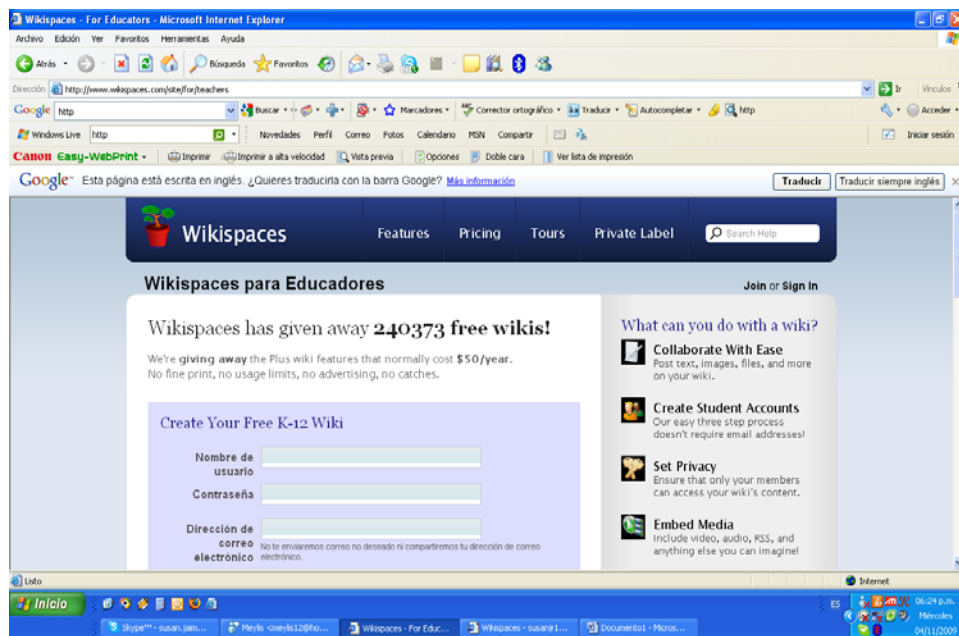
*Actividad 1:* crear una cuenta y un wiki.

Para realizar esta actividad sigue los siguientes pasos:

- Ingresa a <http://www.wikispaces.com> y obtienes la siguiente pantalla

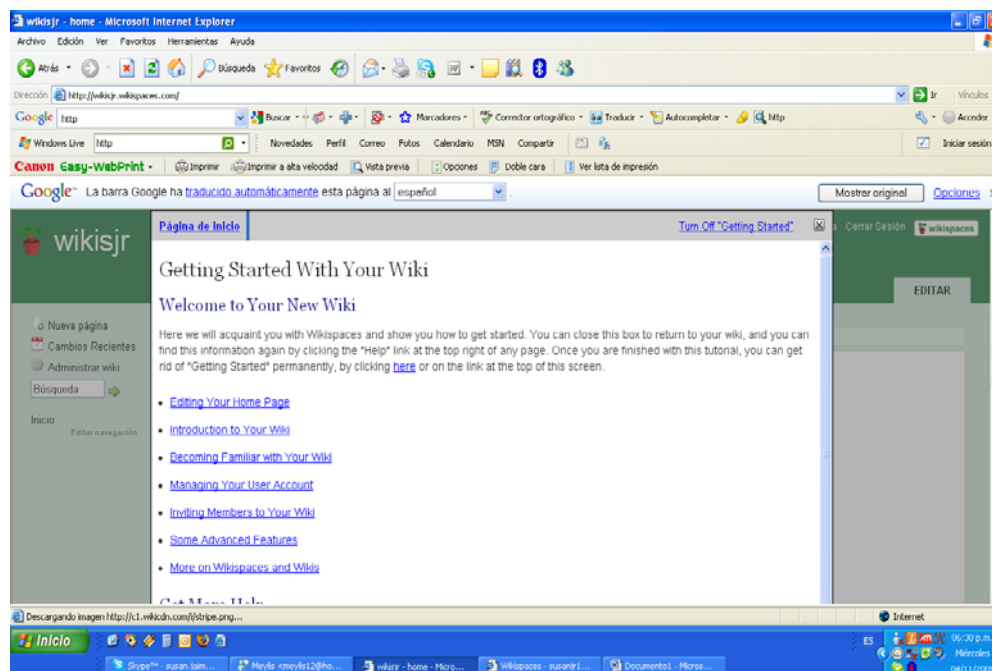


- Ir a “Get Started”; rellena el cuadro, hacer clic en “comience”, obtienes la siguiente pantalla



- Rellena el formulario y hacer clic en únete

- Luego obtendrás la siguiente pantalla, creando tu wiki

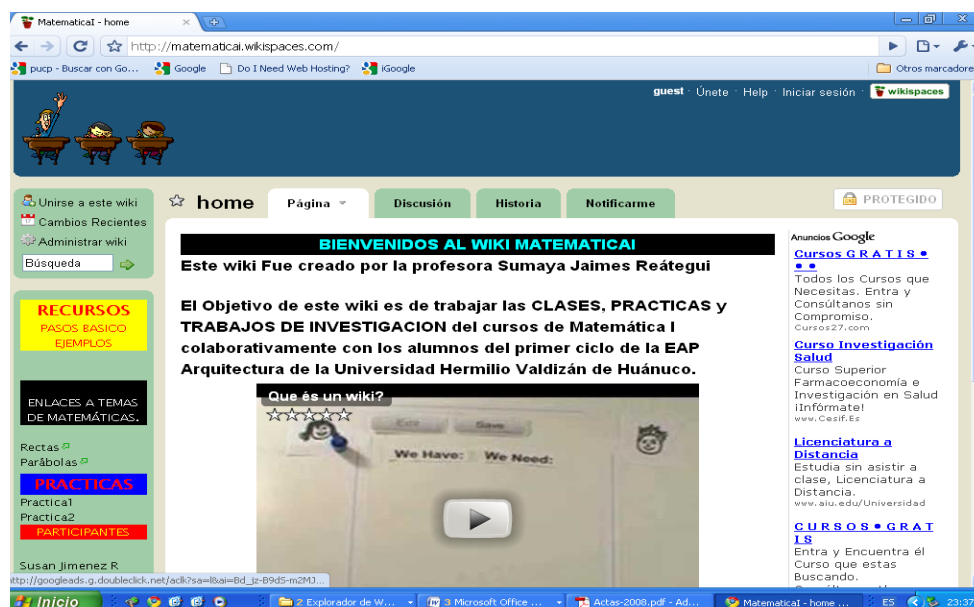


Al finalizar los 4 pasos anteriores el alumno estará cumpliendo el objetivo de crear su propio wiki.



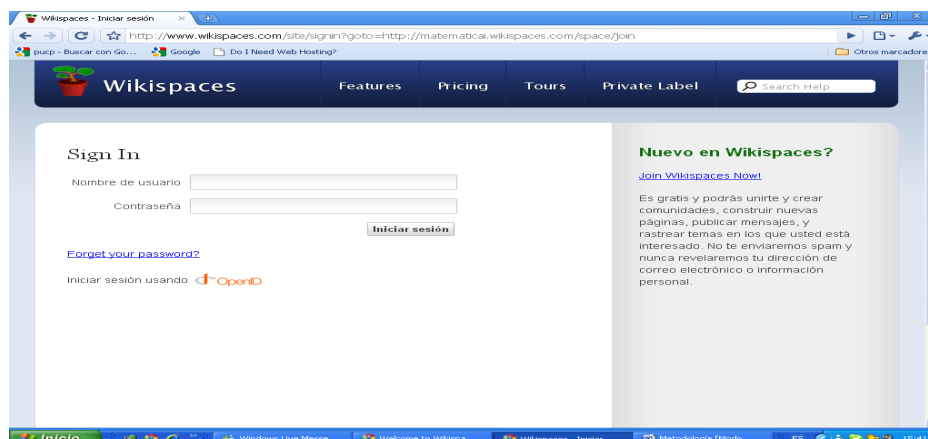
*Actividad 2:* Participación colaborativa como alumno en una clase de matemática. Tema: LA RECTA.

He creado el wiki llamado <http://matematicai.wikispaces.com/> con fines didácticos para este evento. Ver pantalla.

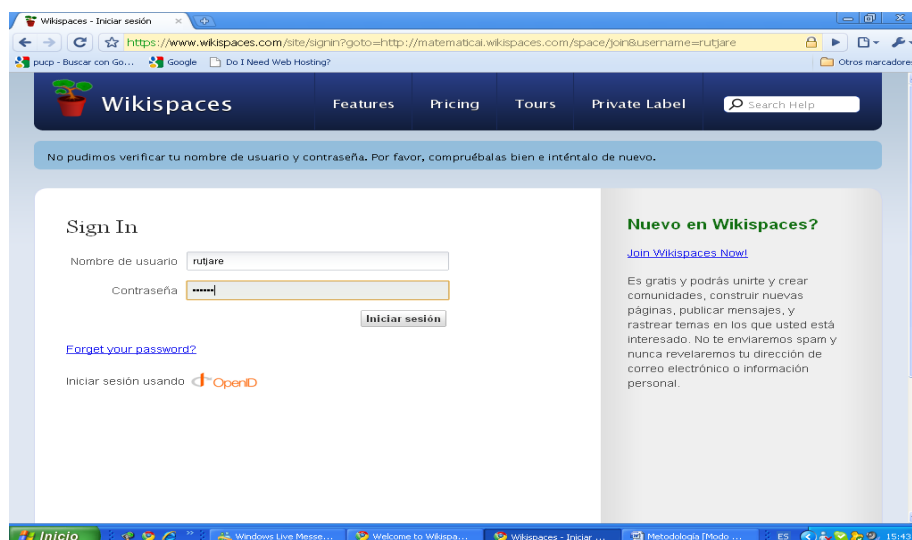


Este wiki se creó para el curso de Matemática I del primer ciclo de EAP de arquitectura de Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco, se observa que el diseño es de tal manera que se puede incluir enlaces a los temas matemáticos de la recta y la parábola, se consigue proporcionar listas de ejercicios en el enlace de prácticas, incluir página para cada alumno del curso y como también plantear trabajos de investigación y grupos de trabajo. Este wiki lo puede ver cualquier persona pero sólo lo pueden editar los miembros del wiki.

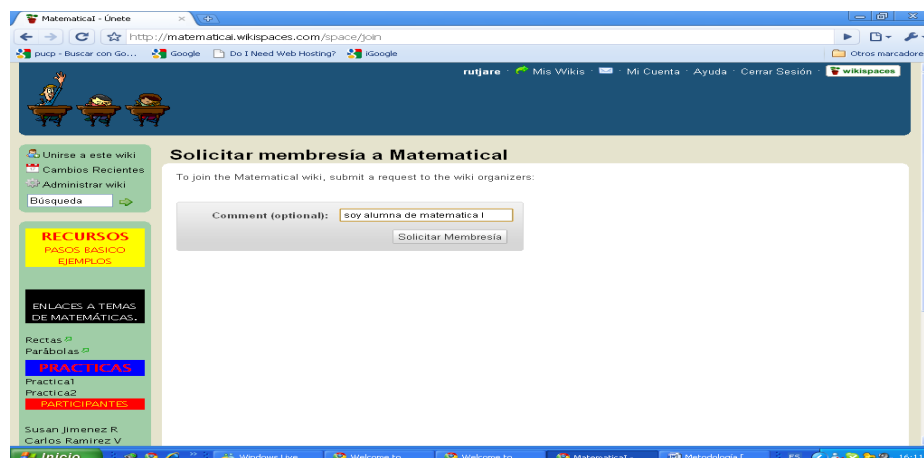
- Para que cada participante del taller sea miembro del [www.matematicai.wikispaces.com](http://matematicai.wikispaces.com) ingresará al <http://matematicai.wikispaces.com/>. Haciendo clic en UNIRSE A ESTE WIKI (Join this Wiki) obtendrá la siguiente ventana:



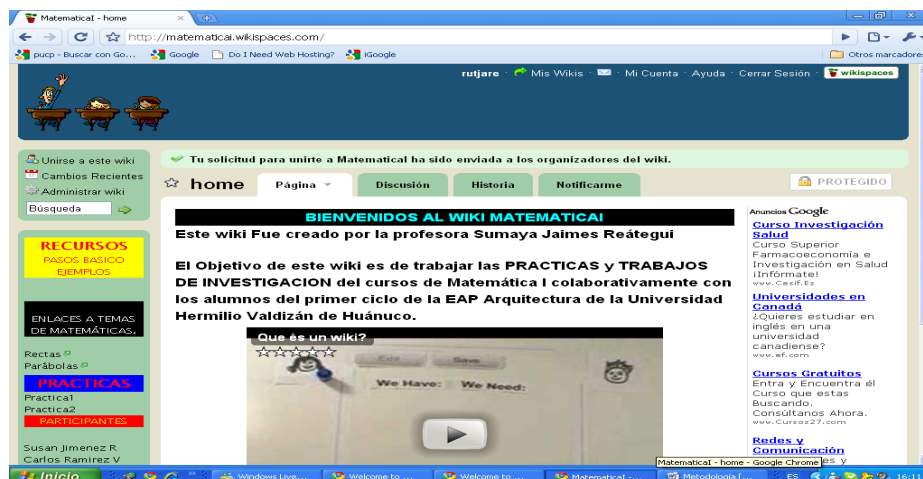
- Rellena el formulario y hacer clic en “iniciar sesión”



- Obtendrá la siguiente ventana. En esta ventana escribe un comentario adicional colocando su nombre o una referencia y hacer clic en “solicitar membresía”.



Obtendrá una pantalla con el mensaje “Tu solicitud de membresía ha sido enviada a los organizadores del wiki”



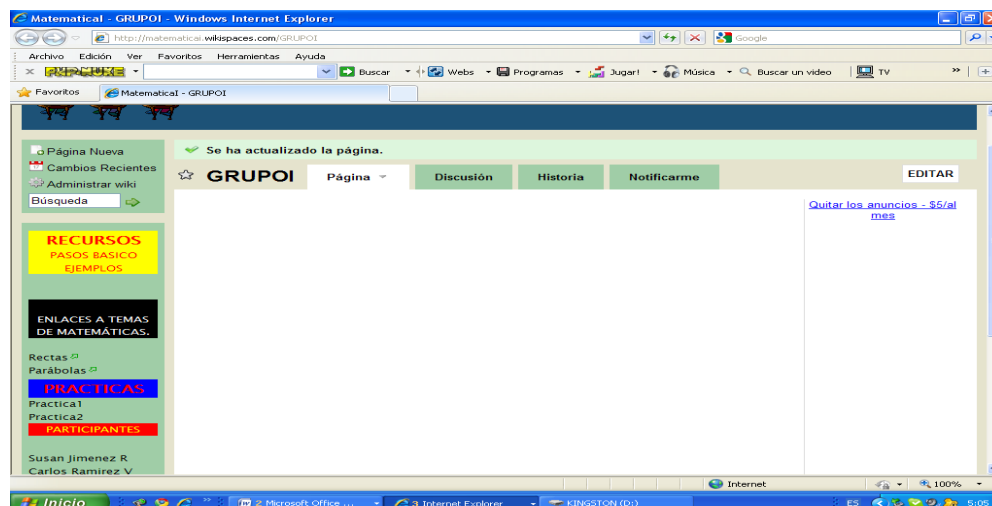
- Después que el organizador del wiki “[www.matematicai.wikispaces.com](http://www.matematicai.wikispaces.com)” acepta la membresía de cada alumno, obtendrás la siguiente pantalla, actualizando.



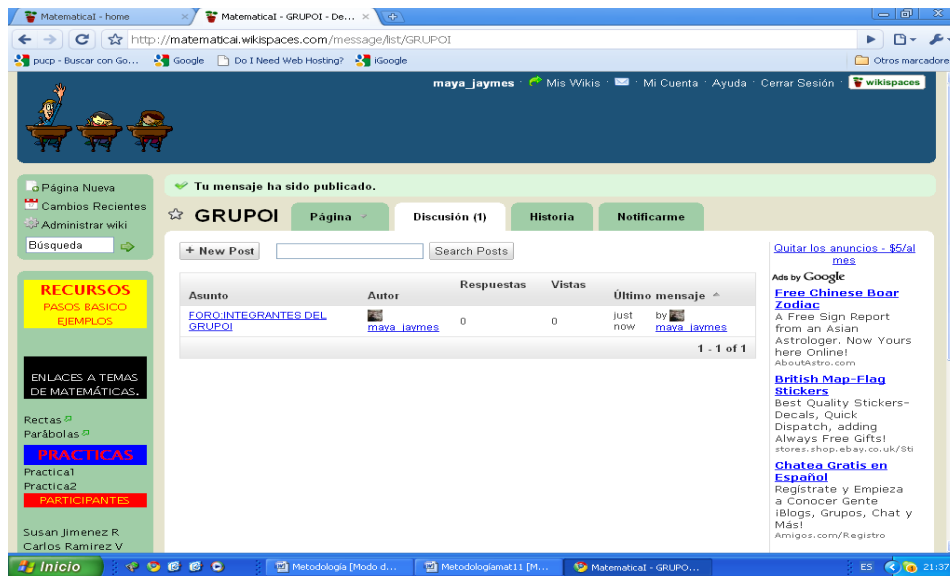
- Se forman grupos de trabajo, enumerándolos y registrándolo en el [www.matematicai.wikispaces.com](http://www.matematicai.wikispaces.com). Cada grupo de trabajo ingresa a su respectivo grupo.



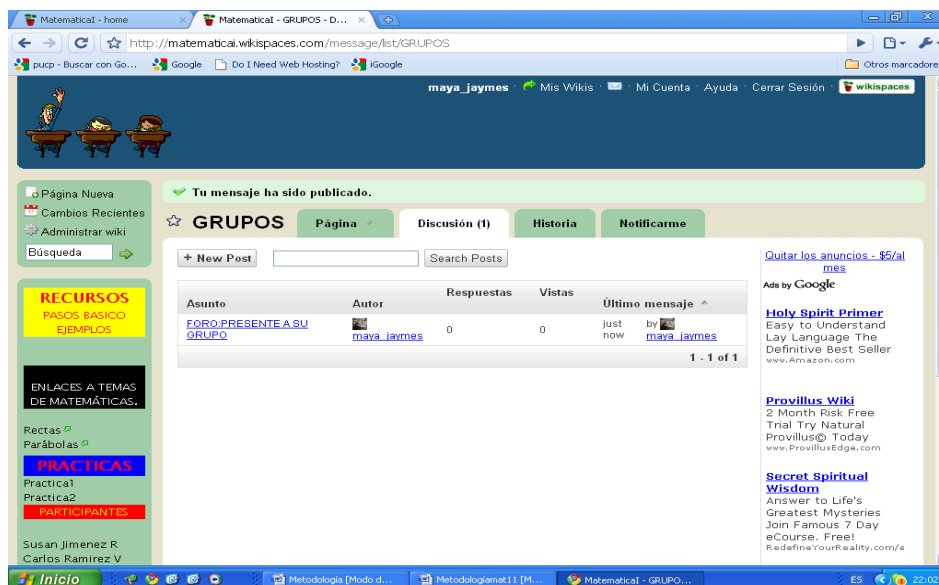
- Cada grupo hace clic en el grupo (por ejemplo en el GRUPO I) que le corresponde y obtendrá



- En esta ventana, cada integrante de grupo irá al enlace discusión (ubicado en la parte superior de la página) e ingresará al FORO INTEGRANTES DE GRUPO I y participarán en dicho foro haciendo una pequeña presentación. El grupo elegirá un nombre y un representante para el grupo curso.



- El representante de cada grupo hará una breve presentación de su grupo a los demás grupos del curso en el enlace discusión en el “FORO PRESENTE A SU GRUPO” en la página de enlace “GRUPOS”



- El profesor del curso verificará las presentaciones. Cada grupo irá al enlace. Actividad 1. En dicha actividad se presentará el concepto de recta, sus propiedades más importantes y se propondrán un cuestionario con el propósito que cada grupo aporte sus ideas y reflexiones del concepto de recta.

Al finalizar los 9 pasos anteriores el participante estará cumpliendo el objetivo de participar colaborativamente en el desarrollo del tema rectas en el espacio Euclidiano

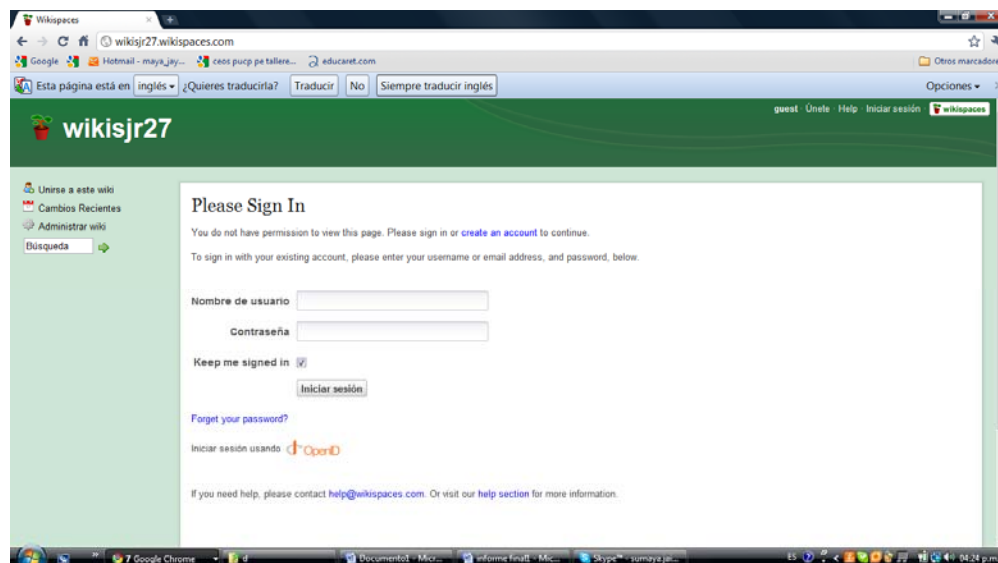
*Actividad 3:* Diseño de su wiki, elaboración de una sesión de clase del tema matemática “Parábola”, Monitorear su wiki.

- Cada alumno del curso ingresará a su wiki creado. En dicho wiki hará una descripción de los objetivos de su wiki y insertará una imagen en su perfil, luego irá al enlace Pagina Nueva y en Nombre de Pagina colocará: “clase de la parábola”, en dicha pagina realizará una sección de clase de la parábola incluyendo en esta: un video, definiciones principales, que pueden ser obtenidas en internet o en sus libros de consulta y adicionar un cuestionario con por lo menos tres preguntas referente a la parábola.
- En el foro Integrantes del grupo cada integrante de un grupo pedirá a sus demás compañeros de grupo que se unan a su wiki proporcionándole su página web de su wiki y que respondan a su cuestionario en el enlace discusión de la página clase de parábola. Al finalizar los 2 pasos anteriores el participante estará cumpliendo el objetivo de Diseño de su wiki, elaboración de una sesión de clase del tema “Parábola”; él monitorea su wiki como profesor del desarrollo de este tema.

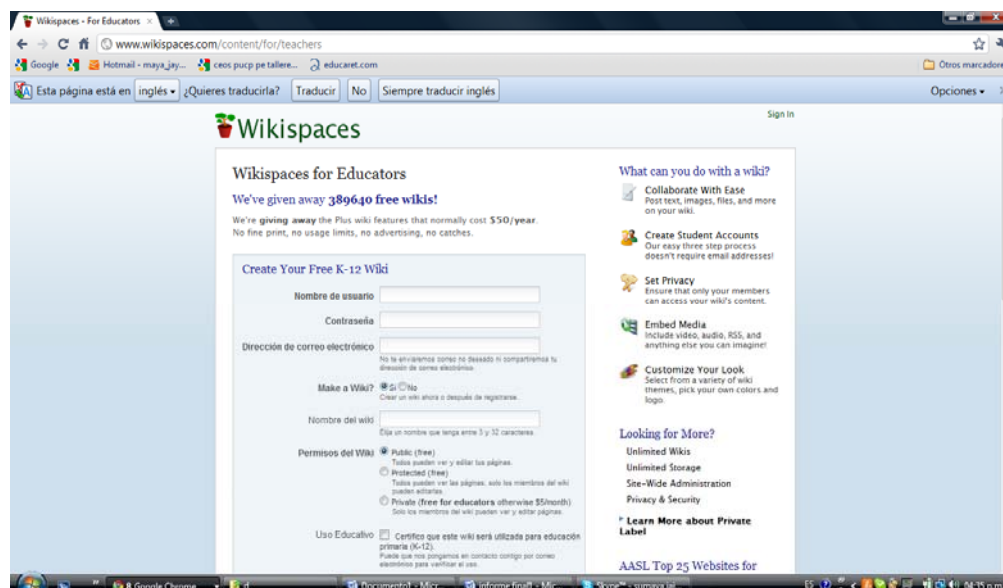
### **Observación**

En caso de enseñanza primaria y secundaria el [www.wikispaces.com](http://www.wikispaces.com) ofrece una cantidad limitada de wikis del tipo II, es decir los wikis que pueden ser vistas y editadas solo por los miembros del Wiki; además, no tiene publicidad en el wiki.

Por ejemplo el wiki llamado <http://wikisjr27.wikispaces.com/> fue creado como un wiki que puede ser visto y editado solo por los miembros del wiki. Al ingresar a este enlace se obtendrá la siguiente pantalla.



Si deseamos crear un wiki que solo lo vean y editen los miembros del wiki ingresamos a <http://www.wikispaces.com> y luego hacemos clic en Wikis for Individuals and Groups y luego, al ir a Learn more and create your own classroom wiki today, obtendremos la siguiente pantalla en cual rellenando el formulario podemos crear estos tipos de wikis.



## Definición y problemas

Presentamos, a manera de ejemplo, la definición de recta en el espacio euclidiano utilizada, así como uno de los problemas a trabajar durante el taller.

*Definición.*-Llamaremos recta al lugar geométrico de los puntos del espacio euclidiano, tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera  $P_1=(x_1, y_1)$ ,  $P_2=(x_2, y_2)$  del lugar, el valor de la pendiente, calculado por la formula  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  es siempre

constante.

### *Problemas*

- Interpretar geoméricamente la pendiente de la recta.
- Escribir la ecuación de la recta, si se conoce su pendiente y un punto de ella.
- Escribir la ecuación de la recta si se conoce dos puntos de ella.
- Escribir la ecuación general de la recta.
- Identificar analítica y geoméricamente cuando un punto pertenece a una recta.
- Identificar analíticamente y geoméricamente los tipos de recta.

### *Resultados Esperados*

1. Crear y Personalizar su wiki.
2. Utilizar el wiki en el aprendizaje de las matemáticas colaborativamente.
3. Utilizar el wiki en la enseñanza de las matemáticas.
4. Mejorar el rendimiento de los alumnos y permite disponer de más tiempo para tratar los temas de clase.

## Referencias

Lehmann, C. (1986). Geometría Analítica. México: Editorial Limusa, S.A.

Kletenik, D (1986). Problemas de Geometría Analítica (5th ed). Perú: Editorial Latinoamericana.



Saal. R. C, Aznaran C. J (1984). Problemas de Básica I. Perú: Editorial Gómez

Wikispaces.com es un sitio web que permite crear wikis gratis. (<http://www.wikispaces.com>).

Web Descartes es un excelente sitio web para el área de matemáticas, en la enseñanza primaria, secundaria y superior. (<http://descartes.cnice.mec.es/>)

# Experimentos aleatorios y sus representaciones

Hugo Alvarado y Lidia Retamal <sup>1</sup>

## Resumen

*La enseñanza de la probabilidad y estadística en la educación secundaria con apoyo informático, proporciona una mayor potencia en el cálculo de probabilidades, las representaciones gráficas y la introducción de ideas de inferencia como las distribuciones en el muestreo. El diseño del Taller considera la generación de resultados aleatorios y situaciones de aprendizaje con ficheros de datos. Las actividades proporcionan aspectos interpretativos y conceptuales sobre la organización de datos, la distribución de frecuencias, parámetro y estadístico y las conexiones con otros conceptos tales como las variables aleatorias y su distribución. En consecuencia, se evalúa la correspondencia entre experimentos aleatorios sencillos y su aplicabilidad a situaciones reales mediante los dispositivos de la planilla Excel y applet del modelo binomial.*

**Palabras clave:** Experimentos aleatorios, dispositivos didácticos, probabilidad binomial.

## Introducción

Los procesos de instrucción en estadística están en una etapa de cambio en los métodos de enseñanza que se utilizan, teniendo en cuenta que los alumnos usan comúnmente el lenguaje de la tecnología. Esto conduce al profesor de matemática a modificar su actuar en el aula, teniendo presente que algunas veces estos recursos informáticos aumentan los problemas educativos en vez de resolverlos. Surgen preguntas básicas en la exploración de experimentos aleatorios acerca de qué dispositivos didácticos

---

<sup>1</sup> Universidad Católica de la Santísima Concepción- Chile

(dados, fichas, Excel, software, plataforma virtual, Internet, libros de textos, etc.) son los adecuados para la enseñanza de la estadística en los distintos niveles educativos y qué efecto tiene la informática a favor de un aprendizaje significativo. DelMas, Garfield y Chance (1999) señalan que la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión de propiedades de la distribución en el muestreo, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un rol importante. Moore (1997) recomienda una renovación tanto en los métodos como en el contenido. Es conveniente que los estudiantes tengan nociones de probabilidad si pretendemos que entiendan el significado de la inferencia estadística. El estudio de las frecuencias relativas en un experimento aleatorio proporciona las bases sobre las cuales se elabora el concepto de probabilidad. Por lo general se presenta la probabilidad en el contexto de juegos de azar con resultados equiprobables. Muchas situaciones probabilísticas conllevan una serie de experimentos aleatorios donde la simulación permite obtener una estimación de la solución. Batanero (2003) señala que en los estudiantes de secundaria la simulación contribuye a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica.

En este trabajo se pretende plantear actividades que permitan el tratamiento estadístico de un experimento aleatorio desde varios acercamientos de representaciones progresivas para familiarizar a los participantes con la noción de modelo de probabilidad. La primera sesión considera actividades de experimentos aleatorios sencillos con dispositivos manipulables y con uso de Excel. Se desarrolla el caso del experimento de simulación de lanzamientos de dos dados de seis caras. La segunda sesión contempla reforzar algunas actividades planteadas, contextualizándola a situaciones reales con argumentos de visualización y cálculo tanto de la planilla Excel como el miniprograma applet, escrito en Java, del modelo de probabilidad binomial. Finalmente, se propone analizar una base de datos sobre consumo de luz y se implementa un cuestionario en línea, con ítems conceptuales de selección múltiple y de cálculo de probabilidad, a desarrollar por los participantes con apoyo de los recursos tecnológicos.

## • Tipos de representaciones

Las actividades que se plantean en el Taller se sustentan en las configuraciones didácticas del enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006). En un sentido amplio, la noción cognitiva de competencia entendida como “saber hacer” implica los diversos elementos del significado para el conocimiento matemático, que se describen en: problemas, definiciones, propiedades, algoritmos, lenguaje y argumentación. Estas entidades primarias están relacionadas entre sí formando *configuraciones* que se definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. En este trabajo, las actividades propuestas conducen a la apropiación progresiva mediante tres tipos de representaciones para argumentar los experimentos aleatorios. Se entiende por recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que facilitan la comunicación hacia la exploración, aplicación y argumentación de conceptos importantes en el aula de estadística.

- *Representación manipulativa* el alumno trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen la noción de experimento aleatorio y estadístico, y se argumenta mediante ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.
- La *representación algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra. Los procedimientos serían analíticos.
- La *representación computacional* amplía la variedad de gráficas dinámicas. Además, del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen algunos conceptos como el experimento de probabilidad binomial.

## • Recursos en internet

Actualmente existe bastante información disponible en internet sobre la enseñanza de la probabilidad y estadística; sin embargo, se carece de metodologías para evaluar instrumentos de aprendizaje. El papel del profesor de matemática es fundamental en la iniciación de experimentos aleatorios mediante la informática educativa en estadística, que por su carácter metodológico e instrumental la estadística contribuye en el diseño de experimentos. Una descripción de los recursos que ofrece la web es la siguiente:

- a) *Software libre*: ver <http://statpages.org/javasta2.html>. Los estudiantes universitarios en la UCSC han usado el programa @risk, de licencia limitada, a diferencia del programa estadístico R que no tiene costo.
- b) *Java Applet*: Este recurso se ha diseñado e implementado en nuestro curso mediante proyectos de docencia e investigación en las distribuciones de probabilidades discretas con el fin de ilustrar, simular y explorar conceptos estocásticos en un ambiente dinámico y gráfico.  
Ver [http://fyl.cl/fondecyt/Binomial\\_aprox/Inicio.html](http://fyl.cl/fondecyt/Binomial_aprox/Inicio.html). En el caso continuo los estudiantes están experimentando con Geogebra las distribuciones de probabilidad normal, gamma y beta.  
Ver [http://fyl.cl/fondecyt/Gamma\\_aprox/Inicio.html](http://fyl.cl/fondecyt/Gamma_aprox/Inicio.html).
- c) *Materiales educativos en línea*: se pueden encontrar libros en línea de interés que incorporan representaciones interactivas y que se puede manipular para explorar los conceptos estadísticos, por ejemplo The World of Visual Statistics; Introductory Statistics: Concepts, Models and Applications; HyperStat; The Little Handbook of Statistical Practice; Electronic Statistics Textbook.
- d) *Revistas electrónicas y boletines de información*: De gran interés son los resultados de investigación, siendo las de mayor divulgación: Journal of Statistics Education (JSE) publicada por la American Statistical Association (ASA); Statistics Education Research Journal (SERJ) principal revista electrónica de responsabilidad de la Internacional

Association for Statistics Education (IASE); Teaching Statistics; Statistics Teacher Network boletín de la Nacional Council Teachers of Mathematics (NCTM).

## De la experimentación a la generalización

El Taller considera la participación activa de los estudiantes comenzando con experimentos manipulables sencillos de juego de dados, cuyos resultados de los experimentos se tabulan y se representan gráficamente en Excel y luego se formaliza con el cálculo de probabilidades de forma algebraica y con un applet, disponible en la plataforma virtual de aprendizaje EV@ que ofrece la Dirección de Docencia de la UCSC. Las actividades propuestas en las dos sesiones serán desarrolladas en el curso “Coloquio matemática” disponible en la plataforma EV@: <http://uvirtual.ucsc.cl/>



**Figura 1.** Diseño del Taller en la Plataforma virtual EV@

Las sesiones del Taller está planificada sobre la base de la experiencia de experimentos de enseñanza de la estadística para estudiantes universitarios en la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), mediante la utilización del programa @risk (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007), la planilla Excel en actividades de simulación, análisis de las

dificultades de comprensión de distribuciones de probabilidad aproximadas (Alvarado y Batanero, 2007) y el análisis de libros de texto de estadística (Alvarado, 2004).

- **Selección de conceptos a tratar**

A continuación se mencionan los conceptos básicos para el estudio de las nociones de probabilidad que se tratarán en este taller. Contextos sobre predecir el consumo de luz y contestar un cuestionario sorpresa pueden servir para apreciar las características de los fenómenos aleatorios.

1. *Variable estadística*. En un estudio estadístico recogemos datos de los individuos de una población. Si las características o variables que queremos estudiar son cualitativas, los datos obtenidos clasifican a la población en categorías y se llaman categóricas o cualitativas. Así por ejemplo, el nivel educacional (básica, media, superior) y lugar de vacaciones donde le gustaría tener “más espacio” (en el avión, en la habitación del hotel, otro) son variables cualitativas. Una característica la llamamos variable estadística porque los valores que toma pueden variar en los distintos individuos de la población.

Cuando, al estudiar alguna característica, obtenemos datos numéricos, se trata de una *variable numérica*. Por ejemplo, son variables numéricas número de hijos de las familias chilenas, altura de los alumnos de una clase. En el primer caso se trata de una variable discreta porque la variable no puede tomar ningún valor intermedio, mientras que en el segundo caso se trataría de una variable continua. Cabe señalar, que en general se trabaja con resultados discretizados, ya que los resultados que se recogen en cualquier proceso de medición siempre son aproximados, y muchas veces es conveniente redondear para simplificar los cálculos. Hay que considerar que cuando una variable numérica puede tomar muchos valores, por ejemplo, tiempo que se demora un alumno el ir de la casa al colegio, resulta apropiado agrupar los datos y representarlos mediante un histograma.

2. *Parámetros estadísticos*. Un solo parámetro estadístico da poca información sobre la distribución y es adecuado calcular el

máximo posible, por ejemplo la media aritmética, mediana, rango, cuartiles y desviación estándar.

Las tablas de frecuencias y sus correspondientes gráficos son instrumentos útiles para visualizar cómo se distribuyen los datos organizados. Nuestro interés en este trabajo es tratar las variables numéricas, cuya descripción puede resumirse en algunos parámetros. A objeto de hacer comparaciones entre distintas poblaciones es conveniente disponer de parámetros teniendo presente que se pierde información al resumir los datos. Los parámetros de interés son la media aritmética, el rango y la desviación estándar.

La *media* representa el centro de gravedad de un conjunto de datos. Si se representa los datos gráficamente, con su correspondiente frecuencia sobre una barra horizontal, la media correspondería al punto respecto del cual la barra mantendría el equilibrio. Sin embargo, se aporta más información cuando este parámetro va acompañado con la dispersión de los datos. El *rango* de la distribución es la longitud del intervalo donde se distribuyen los datos. Es fácil de calcular e interpretar, aunque es sensible a la existencia de valores extremos. La *desviación estándar* es la más usada y mide la dispersión de las observaciones respecto a la media aritmética.

3. *Experimento aleatorio*. Hay que diferenciar dos tipos de experimentos. En un experimento determinista, a partir de las mismas condiciones iniciales se obtienen los mismos resultados, mientras que en un ***experimento aleatorio*** se conocen todos los posibles resultados pero no se puede determinar cuál va a ser el resultado que se va a obtener. Un *suceso* es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio; será elemental cuando no puede descomponerse en otros más simples, en caso contrario se denominan sucesos compuestos.

Es importante, antes de entrar en la iniciación al cálculo de probabilidades, describir de forma adecuada en qué consiste el experimento aleatorio y luego identificar todos los posibles resultados que constituyen el espacio muestral. Esto facilitará la simulación de fenómenos aleatorios realistas con diversos



materiales. La idea de aleatoriedad en sus comienzos se entendía como aquello cuyas causas son desconocidas y el “azar” estaría personificado como la causa de los fenómenos aleatorios (Batanero, 2001).

4. *Simulación.* Llamamos simulación a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente con el cual se experimenta para obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al primer experimento. La estimación de probabilidad que se obtiene con el experimento simulado es tan válida como si tratase del experimento real.

5. *Variable aleatoria.* La variable estadística representa únicamente los  $n$  resultados de  $n$  realizaciones de un experimento aleatorio. Si el experimento se repite infinidad de resultados posibles da origen a la noción de variable aleatoria asociada al experimento. En general, cada resultado de un experimento puede ser asociado con un número que es especificado por una regla de asociación. Por ejemplo, el número de artículos defectuosos de una partida de 100 en una semana. Esta regla de asociación es llamada una variable aleatoria; una *variable* ya que valores numéricos diferentes son posibles y *aleatoria*, pues el valor observado depende de cuales de los resultados posibles del experimento ocurre. Una variable aleatoria es *discreta* si su recorrido es un conjunto discreto de números (finito o numerable), es decir, sus elementos pueden ser listados de manera que hay un primer elemento, un segundo elemento, ..etc, en la lista (asumen sólo ciertos valores, comúnmente número enteros y resulta principalmente del conteo).

6. *Función de probabilidad.* Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con recorrido  $R_X$ . Sea  $p$  una función que asigna a cada  $x \in R_X$  un número  $p(x) = P(X = x)$  llamado probabilidad de  $x$ . La función de probabilidad  $p$  de la v.a.  $X$  debe satisfacer las siguientes propiedades:

$$\text{a) } p(x) > 0, \forall x \in R_X, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{b) } \sum_{x \in R_X} p(x) = 1$$

La función  $p$  es expresada usualmente como los pares  $(x, p(x))$   $\forall x \in R_X$ , llamada *distribución de probabilidades*, que es una lista de todos los resultados posibles de un experimento y de la probabilidad relacionada con cada resultado.

7. *Experimento de probabilidad binomial*. Es el experimento integrado por ensayos repetidos, que posee las siguientes propiedades:

- a) Hay  $n$  ensayos repetidos independientes e idénticos
- b) Cada ensayo tiene dos resultados posibles (éxito o fracaso)
- c)  $\text{Prob}(\text{éxito}) = p$ ,  $\text{Prob}(\text{fracaso}) = 1 - p = q$
- d) La variable aleatoria binomial  $X$  es el conteo del número de ensayos con éxito que ocurren, donde  $x$  puede adoptar cualquier valor entero de cero a  $n$ .

La propiedad de ensayos independientes significa que el resultado de un ensayo no afecta la probabilidad de éxito de cualquier otro ensayo en el experimento. En otras palabras, la probabilidad de “éxito” permanece constante a lo largo de todo el experimento. Las propiedades c) y d) están relacionada con la notación algebraica de cada ensayo de todo el experimento. Es importante que  $x$  y  $p$  estén asociadas con “éxito”.

Lo fundamental para trabajar con cualquier experimento de probabilidad es su distribución de probabilidad, pues permite encontrar las probabilidades para cada valor posible de  $x$ . En particular, se define la *función de probabilidad binomial*:

Para un experimento binomial, sean  $p$  la probabilidad de un “éxito” y  $q$  la probabilidad de un “fracaso” en un solo ensayo; entonces  $P(X = x)$ , la probabilidad de que haya exactamente  $x$  éxitos en  $n$  ensayos, es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

8. *Esperanza matemática*. Así como en estadística descriptiva se calcula la media de un conjunto de datos, también se puede determinar la media de una distribución de probabilidad. La

esperanza matemática de una variable aleatoria discreta es la media ponderada de todos los posibles resultados en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados, y se refiere al centro de gravedad de una distribución de masa a través de una línea. Tanto el valor esperado como la varianza de una variable son llamados parámetros de una distribución y sirven para especificar completamente la distribución de probabilidad. En términos simbólicos el *valor esperado* de  $X$  se define por:

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in R_X} x \cdot p(x)$$

La varianza de una distribución de probabilidad es el promedio de las desviaciones al cuadrado con respecto de la media, y se escribe como:

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 \cdot p(x) = E(X^2) - \mu^2$$

## • Secuencia de las sesiones

### Sesión 1.

La primera sesión comienza comunicando el objetivo del taller, los tipos de representaciones que conforman una experimento aleatorio y se comentan los conceptos de variable estadística, parámetro estadístico experimento aleatorio y simulación. Posteriormente se plantean algunos experimentos aleatorios analizando en caso del juego de dados mediante dispositivos manipulables y con uso de Excel.

El objetivo es apoyar a los profesores a comprender el significado de experimento aleatorio, observar las frecuencias relativas, observar cómo varían y cómo se estabilizan. En los experimentos de dados u otros hay que tener presente que intuitivamente se asignan probabilidades considerando la simetría. Por ello, es necesario en la experimentación que los participantes tiren dados y anoten los resultados obtenidos. La observación de una larga secuencia de resultados, obtenidos a

partir de su propia experimentación. Las actividades planificadas son las siguientes:

*Actividad 1.1.* Se ha llevado a cabo una encuesta a un grupo de alumnos. Clasifica las siguientes características, según la escala de medida y tipo de variable: Peso, religión, número de hermanos, orden de nacimiento respecto a sus hermanos, si tiene o no licencia de conducir, tiempo que tarda en completar la encuesta, deporte preferido, número de años de escolaridad, tiempo para completar una tarea, número de sillas de una clase.

*Actividad 1.2.* Indicar qué tienen en común los siguientes experimentos. En algunos de ellos describe un suceso simple u otro compuesto.

- a) Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
- b) Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.
- c) Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.
- d) Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en un periodo de 24 horas.
- e) Se fabrica una ampolleta. Luego se prueba su duración en una casa y se anota el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.
- f) En un lote de 10 artículos hay 3 defectuosos. Se elige un artículo después de otro (sin sustituir el artículo elegido) hasta que se obtiene el último artículo defectuoso. Se cuenta el número total de artículos sacados del lote.
- g) Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.
- h) De una urna que contiene sólo bolitas negras, se escoge una bola y se anota su color.

*Actividad 1.3. Juego de dados.* Observar las caras que muestran dos dados al ser lanzados al aire. Este experimento tiene 36 eventos elementales. Considere los eventos:

$A_1$  : “La suma de los dos números es divisible por 4”

$$A_1 = \{(i, j) \in \Omega / i + j = 4n, n = 1, 2, 3\} = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

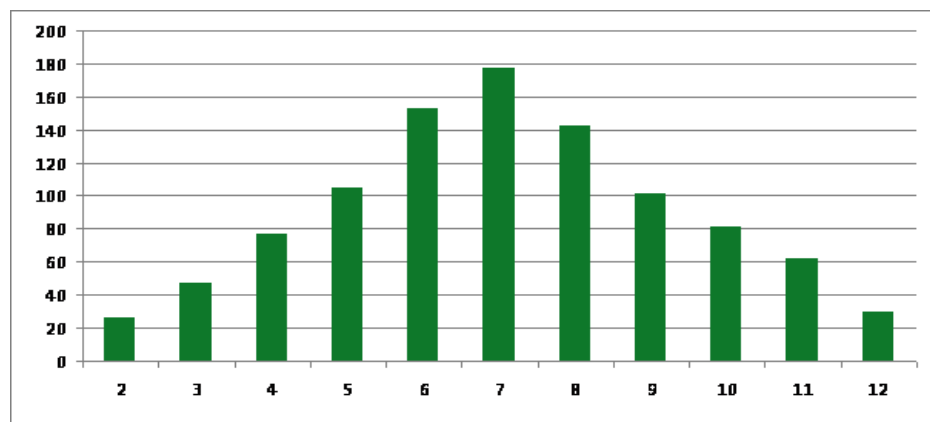
$A_2$  : “Los dos dados muestran el mismo número”

$$A_2 = \{(i, j) \in \Omega / i = j\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

La probabilidad de que la suma de los dos números de los dados sea divisible por 4 es  $P(A_1) = 1/4$  y la probabilidad de que los dos dados muestran el mismo número es  $P(A_2) = 1/6$

*Actividad 1.4.* Generar números aleatorios con la planilla Excel. Del experimento del lanzamiento de dos dados, simular la suma en 1000 lanzamientos. Las representaciones que se discutirán en el laboratorio serán de la forma siguiente:

|             |    |    |    |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| $D_1 + D_2$ | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10 | 11 | 12 |
| Frecuencia  | 26 | 47 | 77 | 105 | 153 | 177 | 142 | 101 | 81 | 62 | 29 |



*Actividad 1.5. Simulación con dados.* Suponga que gana si obtiene un “6” al lanzar un dado legal. Simule las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado  $(n, m) = (4, 5), (10, 10)$  y  $(30, 10)$ . Observe que  $n$  es el número de ensayos y  $m$  el número de réplicas.

| Tabla de experimento con dados para (30,10) |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |   |   |   | Tabla de distribución de frecuencias |   |  |  |  |
|---------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------------------|---|--|--|--|
| X1                                          | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X2                                          | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0                                    | 1 |  |  |  |
| X3                                          | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X4                                          | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X19 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1                                    | 0 |  |  |  |
| X5                                          | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | X20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X6                                          | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X21 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X7                                          | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X8                                          | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | X23 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X9                                          | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | X24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X10                                         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | X25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X11                                         | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | X26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X12                                         | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1                                    | 0 |  |  |  |
| X13                                         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | X28 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
| X14                                         | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X29 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1                                    | 0 |  |  |  |
| X15                                         | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | X30 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0                                    | 0 |  |  |  |
|                                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Σ   | 7 | 5 | 3 | 7 | 7 | 7 | 6 | 3 | 4                                    | 2 |  |  |  |

| obt.<br>el<br>"6" | Ni | Ni | fi  | Fi  |
|-------------------|----|----|-----|-----|
| 2                 | 1  | 1  | 0,1 | 0,1 |
| 3                 | 2  | 3  | 0,2 | 0,3 |
| 4                 | 1  | 4  | 0,1 | 0,4 |
| 5                 | 1  | 5  | 0,1 | 0,5 |
| 6                 | 1  | 6  | 0,1 | 0,6 |
| 7                 | 4  | 10 | 0,4 | 1,0 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|

El procedimiento común de análisis es comenzar introduciendo una notación simbólica para designar la variable y modelar el experimento por medio de una sucesión de variables aleatorias identificando el parámetro  $p$ :

Se define  $X_i$ : Obtener un 6 al lanzar un dado. Considere  $X_i = 1$ , si se obtiene el número "6" y 0, en otro caso

El parámetro  $p = P(E) = P(\text{obtener el "6"}) = 1/6$

Los estudiantes pueden simular los experimentos mediante una representación matricial, y llegar a definir la variable suma de los resultados. Construir una distribución de frecuencias con su representación gráfica. En la segunda sesión se modelará este experimento por medio de la probabilidad binomial; identificando los parámetros  $n$  y  $p$ , comparar y utilizar los conceptos de parámetro, estimador, media y varianza (teórica y experimental) como se muestra en la siguiente tabla:

| $(n, m)$ $m$ réplicas<br>de $n$ ensayos | Parámetros y<br>estimadores | Simulación |
|-----------------------------------------|-----------------------------|------------|
| (4,5)                                   | Media teórica               | 0,667      |
|                                         | Media experimental          | 1          |
| (4,5)                                   | Varianza teórica            | 0,55       |
|                                         | Varianza experimental       | 1          |
| (10,10)                                 | Media teórica               | 1,667      |
|                                         | Media experimental          | 1,8        |
| (10,10)                                 | Varianza teórica            | 1,389      |
|                                         | Varianza experimental       | 1,734      |
| (30,10)                                 | Media teórica               | 5          |
|                                         | Media experimental          | 5,1        |
| (30,10)                                 | Varianza teórica            | 4,167      |
|                                         | Varianza experimental       | 3,878      |

Se proponen algunos ejercicios a desarrollar al final del taller.

*Ejercicio 1.1. Lanzamientos de dos dados.* Imagina que estás jugando dados con un amigo. Tu compañero indica que hay tres posibilidades diferentes al lanzar dos dados:

- I) que los números sean pares;
  - II) que los números sean impares;
  - III) haya un par y un impar.
- a) El afirma que los tres casos son igual de probables. ¿Tú que opinas?
  - b) Otro compañero sugiere que realices el siguiente experimento para resolver la discusión. Trata de adivinar cuantas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuantas el 5 si lanzas un dado 20 veces. Escribe este número en la columna “número esperado de veces”

| Resultado | Recuento | Frec.<br>absoluta | Frec.<br>relativa | Número<br>esperado de<br>veces |
|-----------|----------|-------------------|-------------------|--------------------------------|
| a)        |          |                   |                   |                                |
| b)        |          |                   |                   |                                |
| c)        |          |                   |                   |                                |
| Total     |          | 20                | 1                 | 20                             |

- c) Lanza el dado 20 veces y anota los resultados en la tabla.
- d) A continuación se mostrará en la pizarra los resultados de toda la clase. Compara estos resultados con los vuestros y con la estimación realizada. ¿Cuál de los sucesos es más probable?

*Ejercicio 1.2.* Alonso y Sofía han inventado un juego de dados con la siguiente regla: Lanza dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Si resulta una diferencia de 0,1 ó 2 entonces Alonso gana una ficha. Si resultan 3,4 ó 5 es Sofía quien gana una ficha. Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más. ¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar, ¿Cuál jugador preferirías ser? (Godino y Batanero, 1996).

### Sesión 2.

La segunda sesión tiene por objeto intentar generalizar los experimentos por medio de modelos de probabilidad. Se introduce los conceptos de variable aleatoria, función de probabilidad, experimento de probabilidad binomial y la esperanza matemática. A continuación, con uso de la planilla Excel y el applet del modelo binomial, se argumentan de forma visual y con cálculo de probabilidades los experimentos aleatorios del juego de dados. Se espera, a través de las actividades graduando su nivel, contar con una panorámica de representar los experimentos, anotando los resultados con objetos tangibles, solución de forma algebraica y de visualización computacional.

*Actividad 2.1.* Identifique las propiedades comunes de los siguientes experimentos.

- a) Lanzar una moneda 50 veces y llevar un registro de las caras que se obtienen.
- b) Si usted fuera un inspector en una línea de producción de una fábrica de televisores, estaría preocupado por identificar el número de televisores defectuosos.
- c) Lanzar tres monedas. Calcular la probabilidad de obtener al menos dos caras.



- d) Supongamos que el 10% de lámparas de una fábrica es defectuosa. Las lámparas se venden en cajas de 4 unidades. Simular el experimento consistente en abrir una caja y contar el número de defectos.
- e) Un comerciante garantiza que ninguno de sus paquetes con 12 huevos contiene más de uno en mal estado. Si un paquete contiene más de un huevo en mal estado, él sustituirá toda la docena y permitirá que el cliente se lleve los huevos originales. Si la probabilidad de que un huevo individual esté en mal estado es de 0.05, ¿cuál es la probabilidad de que el comerciante tenga que reemplazar un paquete de huevos?

*Actividad 2.2.* En el caso de experimentos de probabilidad binomial podemos utilizar el microprograma applet disponible en la plataforma, para representar gráficamente y calcular probabilidades binomiales para distintos valores de sus parámetros  $n$  y  $p$ . ¿Qué observas de las gráficas para los siguientes valores de los parámetros? Valores para  $p = 0,3$  con  $n = 4, 8, 24$  y para  $p = 0,1$  con  $n = 4, 8$  y  $50$ . Envía tus comentarios al Foro de EV@.

En esta Actividad, los alumnos pueden interactuar con el modelo de probabilidad binomial, cualquiera sean los parámetros  $n$  y  $p$ , por medio de un applet. Esperamos que estudien la forma de la función de probabilidad para distintos valores de sus parámetros.

*Actividad 2.3.* Usar el Applet disponible en la plataforma EV@. Un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95. (Es decir, la probabilidad de que la componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0,95). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, se pretende estudiar acerca de la confiabilidad del sistema. ¿Cómo desarrollarías esta actividad con los conocimientos previos del Taller? ¿Qué aspectos destacarías en este problema?

*Actividad 2.4. Experimento de probabilidad binomial.* Un profesor aplica a sus alumnos un cuestionario sorpresa con cinco ítems de opción múltiple. Uno de los alumnos no ha estudiado el material del cuestionario y, por tanto, decide contestar los cinco ítems al azar, adivinando las respuestas sin leer las preguntas ni las opciones de respuestas.

Hoja de respuestas del cuestionario. Instrucciones: encierre en un círculo la mejor respuesta de cada ítem

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
| 1. | A | B | C |
| 2. | A | B | C |
| 3. | A | B | C |
| 4. | A | B | C |
| 5. | A | B | C |

Encierre en un círculo sus respuestas antes de continuar. Antes de ver las respuestas correctas del cuestionario y encontrar cómo le fue a este alumno, se considerarán algunos hechos que podrían suceder si un cuestionario se contesta de esta forma.

- ¿Cuántos de los cinco ítems es probable contestar correctamente?
- ¿Cuán probable es contestar de manera adecuada más de la mitad de los ítems?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir las respuestas acertadas de los cinco ítems?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir las respuestas incorrectas de los cinco ítems?
- Si todo un grupo contesta al azar el cuestionario, ¿cuál cree que será el número promedio de respuestas correctas del grupo?

Para responder estas interrogantes, de forma algebraica, se obtiene el espacio muestral  $\Omega$  de 32 formas. Cada ítem fue contestado correcta(C) o incorrectamente (I).

$\Omega = \{CCCCC, CCCC I, CCCIC, CCICC, CCCCC, ICCCC, CCCII, CICIC, ICICC, CCHC, CHCC, HCCC, ICCCI, ICCIC, CICC I, CCICI, CCHH, CHIC, HHCC, ICICI, HCIC, CHCI, HCCI, ICCII, CICI, ICIC, CHH, ICII, HCII, HHCI, HHIC, HHH\}$

Considere la variable aleatoria,  $X$  el “número de respuestas correctas” en el cuestionario cuando éste fue contestado al azar por alguna persona. La variable  $X$  puede adoptar cualquiera de los valores: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 para cada cuestionario. Debido a que cada ítem individual tiene una sola respuesta correcta de las tres posibles, la probabilidad de elegir la respuesta correcta de un ítem individual es  $1/3$ . La probabilidad de elegir una respuesta incorrecta en cada ítem es  $2/3$ . Las probabilidades de cada valor  $X$  es:

La probabilidad de que cero ítem hayan sido contestados correctamente y que cinco hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.13169$$

La respuesta a cada ítem individual es un evento separado e independiente, por lo que es posible multiplicar las probabilidades.

La probabilidad de que un ítem haya sido contestado correctamente y los otros cuatro hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=1) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 5 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243} = 0.32922.$$

La probabilidad de que dos ítems hayan sido contestados correctamente y los otros tres hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=2) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0.32922.$$

La probabilidad de que tres ítems hayan sido contestados correctamente y los otros dos hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=3) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} \\ = 0.16461.$$

La probabilidad de que cuatro ítems hayan sido contestados correctamente y uno tres hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=4) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243} \\ = 0.04115$$

Finalmente, la probabilidad de que los cinco ítems haya sido contestados correctamente es:

$$P(X=5) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} = 0.00412$$

Así, se obtiene la distribución de probabilidad para el cuestionario de cinco ítems. Las respuestas a las interrogantes son:

- La ocurrencia más probable es obtener una o dos respuestas correctas.
- Tener más de la mitad de las respuestas correctas se representa con 2 ó 3, su probabilidad total es 0.49383. Es decir, el cuestionario se aprueba sólo el 49% de las veces, si se contesta al azar.
- Todas las respuestas son correctas  $P(X=5)$  sólo el 0.4% de las veces.
- Las cinco respuestas son incorrectas  $P(X=0)$  sólo el 13% de las veces.
- Puede esperarse que el promedio del grupo sea 1/3 de 5, o 1.666, respuestas correctas.

| $X$   | Elementos de $\Omega$                                      | Probabilidad de $X$ | $X \cdot P(X)$ |
|-------|------------------------------------------------------------|---------------------|----------------|
| 0     | IIII                                                       | 0.13169             | 0              |
| 1     | CIHI, ICII, IICI, IICI, IIIC                               | 0.32922             | 0.32922        |
| 2     | CCII, CIIC, IICC, ICIC, ICIC, CHCI, ICCI, ICCI, CICI, ICIC | 0.32922             | 0.65844        |
| 3     | CCCI, CICI, ICIC, CCIC, CIIC, ICCC, ICCI, ICCI, CICI, CCIC | 0.16461             | 0.49383        |
| 4     | CCCC, CCCI, CCIC, CCCC, ICCC                               | 0.04115             | 0.1646         |
| 5     | CCCCC                                                      | 0.00412             | 0.0206         |
| sumas | 32 elementos                                               | 1                   | 1.6669         |

Muchos experimentos están compuestos de ensayos repetidos cuyos resultados pueden clasificarse en alguna de las siguientes categorías: éxito o fracaso. Estos experimentos se denominan experimentos de probabilidad binomial. Así,  $X$  se distribuye binomial con  $n = 5$  y  $p = 1/3$ . La probabilidad de que tres ítems hayan sido contestados correctamente y los otros dos hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{4}{243} = 0.16461.$$

La esperanza de la variable aleatoria  $X$  está dada por

$$E(X) = n p = 5 \times \frac{1}{3} = 1.666$$

*Actividad 2.5.* Con apoyo de Excel, simular la aplicación del cuestionario anterior a 20 alumnos, de manera independiente.

- Elabore una distribución de frecuencias de la variable “número de respuestas correctas en cada cuestionario” y grafique.
- Estimar el número de respuestas correctas por alumno.
- La próxima semana los 20 alumnos deben desarrollar otro cuestionario compuesto de cinco preguntas de verdadero y falso. Estime el número de respuestas correctas por alumno y compare.
- Compare los resultados de cálculo de probabilidades obtenidos en la Actividad 2.4 mediante la planilla Excel y el Applet del modelo binomial.

## Conclusiones

Enseñar conceptos y propiedades básicas de probabilidad y estadística de una manera práctica y con apoyo de recursos informáticos es aún un desafío con algunas dificultades como el tiempo requerido para el profesorado. Es deseable tener una visión amplia de lo que significa la estadística para que una práctica realista y significativa se implemente en el aula. El objetivo del taller, por un lado es la de animar a profesores en la dinámica de conducir actividades de experimentos aleatorios hacia su generalización con uso de dispositivos didácticos. Por otro lado, es la búsqueda y comunicación de los temas principales de la estadística y probabilidad en los diferentes niveles educativos.

## Agradecimientos

Este trabajo es financiado en parte por el proyecto Fondecyt N°11080071.

## Referencias

- Alvarado H. (2004). *Significados del teorema central del límite y sus campos de problemas en los textos de estadística para ingenieros*. Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada, España.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía*, 35, 37-64.
- delMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students' statistical reasoning.

*Journal of Statistic Education*, 7, 3. On line:  
<http://www.amstat.org/publications/jse>.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M<sup>a</sup>. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Fonts, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 123-155.

Retamal, L., Alvarado, H. y Rebolledo, R. (2007). Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers. *Ingeniare*, Vol. 15, pp. 6-17.

# **Materiales didácticos para el desarrollo del pensamiento geométrico y la intuición espacial**

César Fernando Solís Lavado <sup>1</sup>

## **Resumen**

*El desarrollo de la propuesta del taller “Materiales didácticos para el desarrollo del pensamiento geométrico y la intuición espacial”, es pertinente debido a la crisis de la educación matemática actual en nuestro país, hecho que se ve reflejado en los recientes resultados de las evaluaciones censales de nuestro niños y adolescentes, y corroborado en los resultados de las evaluaciones a los docentes del magisterio. Muchos docentes desconocen la existencia de materiales didácticos para la enseñanza de la geometría y, más aún, desconocen la metodología para su aplicación en el aula. Mediante el desarrollo de este taller se mostrarán y manipularán diversos policubos, rompecabezas, modelos de desarrollos planos de poliedros, entre otros materiales didácticos para mejorar la enseñanza de la geometría en educación primaria y secundaria.*

## **Introducción**

En la enseñanza de la geometría es conveniente desarrollar: transformaciones de figuras mediante reflexiones, traslaciones, rotaciones, ampliaciones y reducciones; medir dimensiones geométricas como longitudes, ángulos, superficies y representar los diferentes principios matemáticos en el sistema de coordenadas. Se debe estimular el desarrollo del pensamiento geométrico, a través del contacto con la realidad; es decir, desarrollar habilidades de: concepción del espacio, orientación espacial, pensamiento espacial, habilidad para la percepción visual, percepción de la situación espacial, percepción de relaciones espaciales.

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional del Centro del Perú, Huancayo- Perú



También se debe brindar la oportunidad de desarrollar en los alumnos: la habilidad motriz, la estética, la matematización de conceptos reales, reconocimiento de fenómenos matemáticos en la naturaleza, comprensión del arte y la fantasía.

En primaria, los educandos deben estar en contacto con la geometría; aprendiendo a medir y dibujar; creando cuerpos y figuras. En esa etapa, se ofrecen las primeras oportunidades para fomentar la riqueza imaginativa y la orientación espacial en los educandos. En la secundaria, adquieren importancia las figuras geométricas y las propiedades de las simetrías; ofreciendo condiciones ventajosas para el "aprendizaje por descubrimiento".

El empleo de materiales didácticos manipulativos en el aprendizaje de la geometría permite revalorar la esencia de esta disciplina, por lo que se debe iniciar con un trabajo intuitivo, es decir, partir de la experimentación y de los referentes cotidianos para llegar a la fase de formalización. Sólo el trabajo de taller o laboratorio puede estructurar un aprendizaje significativo que conlleve a que el pensamiento y la acción sean vinculados totalmente.

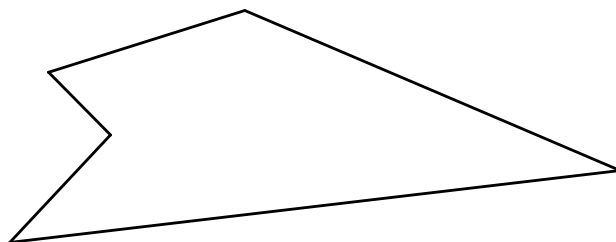
A continuación se detallan las actividades que se desarrollarán:

*1. Construcción de figuras geométricas.*

Construya un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 cm y 4 cm. Luego con una regla y un transportador mida la hipotenusa y los ángulos respectivamente y anótelas en un gráfico.

Construya un hexágono de 2,5 cm de lado y un triángulo equilátero de 5 cm de lado. No olvide que el ángulo interior de un hexágono mide  $120^\circ$  y el de un triángulo equilátero es  $60^\circ$

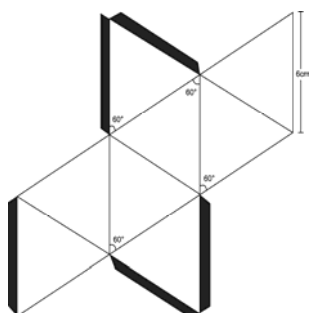
Halle las medidas de los lados (en mm) y la medida de los ángulos del siguiente polígono irregular. Anote sus mediciones en el gráfico.



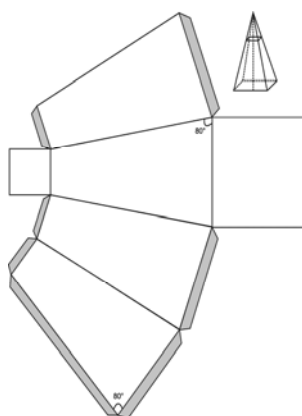
## 2. Modelos para la construcción de poliedros

En el Taller los docentes participantes deben construir los siguientes poliedros en base al uso de un transportador, regla, cartulina, tijeras y goma. Los desarrollos planos que se muestran permitirán obtener poliedros para el estudio de sus propiedades:

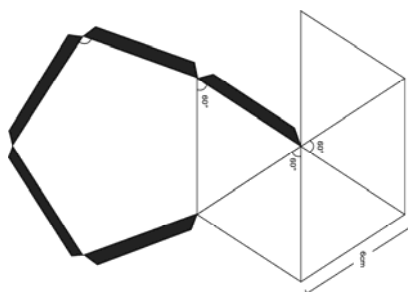
Octoedro



Pirámide Truncada

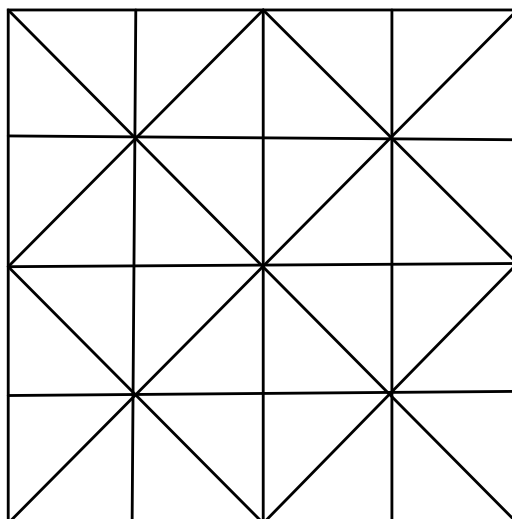


Pirámide pentagonal



### 3. Geometría dinámica del triángulo

Conocida también como papiroflexia, debido a que mediante dobleces realizado en un papel de forma cuadrada, como se muestra en la figura:



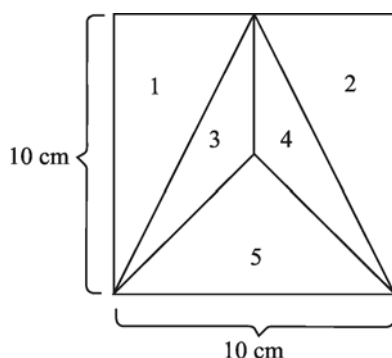
En base a los dobleces realizados se forman una cantidad finita de triángulos rectángulos isósceles, los que a su vez sirven de insumos para construir siluetas y nuevas figuras geométricas como: triángulos, paralelogramos (cuadrados, rectángulos, rombos, romboides, etc.), trapecios (rectos e isósceles), diversos polígonos convexos y cóncavos.

Esta técnica tiene como objetivos potenciar la capacidad de observación y de realización de construcciones geométricas en los educandos, a partir de la experimentación y el correspondiente desarrollo de la intuición, concluyendo finalmente en actividades de carácter deductivo.

Finalmente se debe hallar el máximo número de figuras geométricas que se puede hallar, luego es necesario realizar mediciones para hallar su perímetro y su área respectivamente.

#### 4. *Un tangram especial*

El Tangram especial es un material didáctico que consta de cinco piezas; es muy adecuado para realizar actividades en el área de matemática sobre longitudes, ángulos, áreas, proporcionalidad, etc., mediante el uso de herramientas conceptuales muy simples. El tamaño ideal es el de un cuadrado de 10 cm x10 cm, debiéndose realizar los trazos de acuerdo como se muestra en el siguiente gráfico:

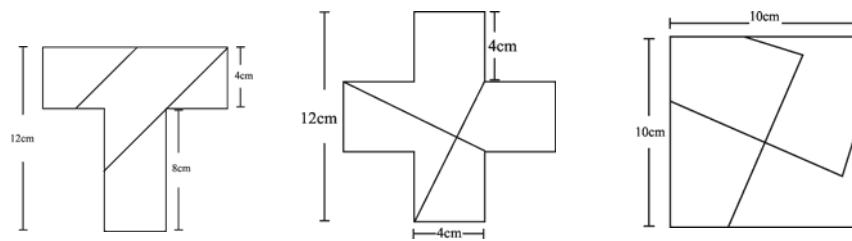


Con fines didácticos, es conveniente enumerar cada una de las piezas; lo cual va a facilitar su identificación al momento de formular las situaciones problema. Con éste material, vamos a desarrollar actividades sobre contenidos de geometría como: clasificación de triángulos; cuadriláteros; relaciones entre los lados de un triángulo; ángulos en un triángulo; cálculo de longitudes y áreas. Las actividades se deben desarrollar en grupos de trabajo de dos o tres alumnos.

#### 5. *Rompecabezas Geométricos*

Los rompecabezas son juegos muy valorados, desde el punto de vista educativo, porque a la vez fomentan la creatividad, el desarrollo de las capacidades de análisis y síntesis, la visión espacial, las estructuras y los movimientos geométricos. Son entretenidos y resultan divertidos para la gran mayoría de las personas de cualquier edad.

A continuación, les presento algunas propuestas que deben ser planteadas a los estudiantes de educación primaria o secundaria, según el grado de dificultad de los problemas:



## 6. Los policubos

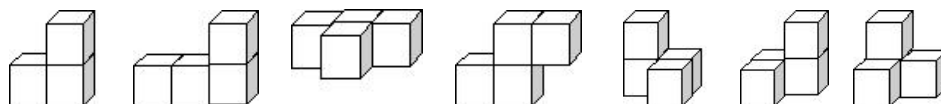
La teoría de policubos es una rama de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de unidades modulares cúbicas, tal que unidas por sus caras configuran formas en el espacio tridimensional. Si bien el módulo básico es un cubo, la combinación de varios cubos permite obtener una gran variedad de módulos que conservan ortogonalidad entre sus caras y, dentro de la sencillez de sus formas, aportan riqueza volumétrica y modularidad, estableciendo correspondencias con formas de uso arquitectónico.

### a) El cubo Soma

El Cubo Soma es un puzzle de tres dimensiones que fue inventado en 1936 por el matemático danés Piet Hein. El Cubo Soma, esta formado por seis tetracubos y un tricubo no lineal. Con él, se pueden construir una gran variedad de formas geométricas; figuras de animales, muebles, etc.

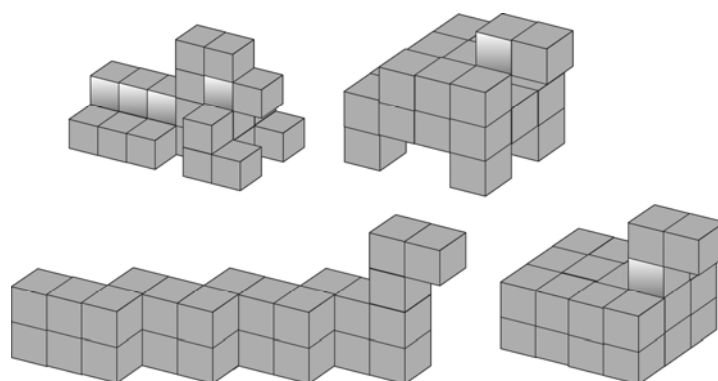
Todos estos puzzles especiales están formados por piezas construidas cada una de ellas a partir de varios cubitos (en total constan de 27); piezas que al unirse permiten obtener un cubo de lado triple al de los cubitos que las forman.

Las siete figuras o piezas del Cubo Soma se identifican frecuentemente con un número o con una letra.



El problema "base" que se puede formular al inicio de las actividades con este material es el de formar un cubo de  $3 \times 3 \times 3$  con las siete piezas del cubo soma.

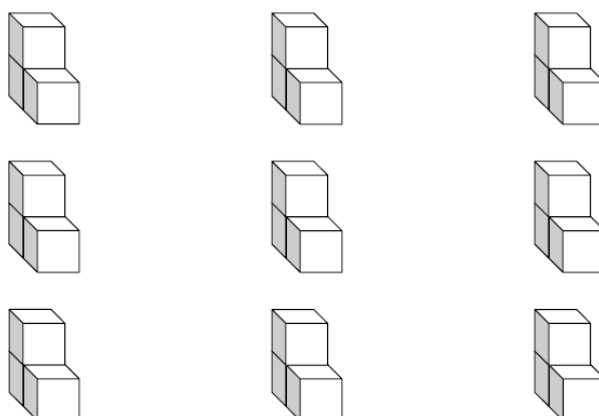
En el taller se llevará ocho juegos de cubosomas para que los docentes participantes puedan manipular con el material y deberán formar las siguientes figuras utilizando las siete piezas del cubo Soma:



*b) El cubo de O'Bernie y el cubo de Lesk*

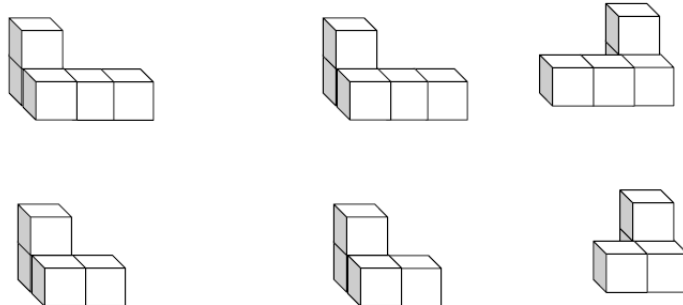
El cubo de **O'Berine** que está formado por nueve piezas iguales al tricubo en ángulo, o el Cubo Diabólico que es progresivo, es decir, sus piezas tienen, todas, distintos números de cubos, desde dos hasta siete.

Con las siguientes piezas construye un cubo:



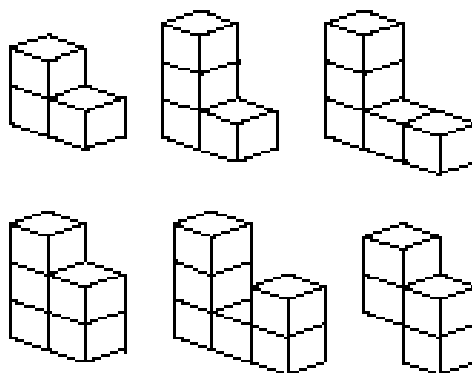
## Las piezas del cubo de **Lesk**:

Construye un cubo con las siguientes piezas:



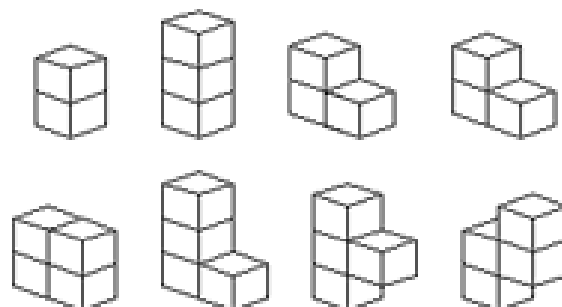
### c) *El cubo de Hans*

El material necesario son seis policubos de 3, 4, 5 y 6 cubos, como se muestra a continuación:



### d) *El cubo de Muñoz*

El cubo de Muñoz está compuesto por las siguientes piezas:

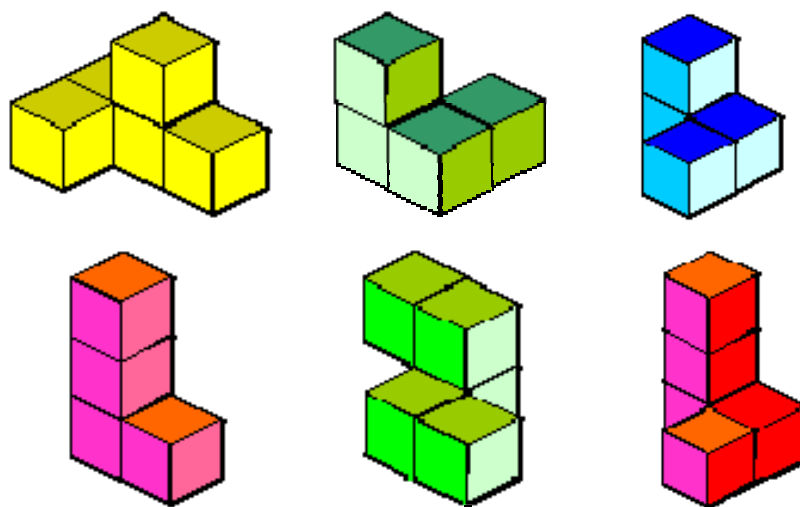


e) *La sierpe progresiva*

Está formado por 6 piezas policúbicas. El número de cubos unitarios de las piezas es progresivamente 2; 3; 4; 5; 6 y 7.

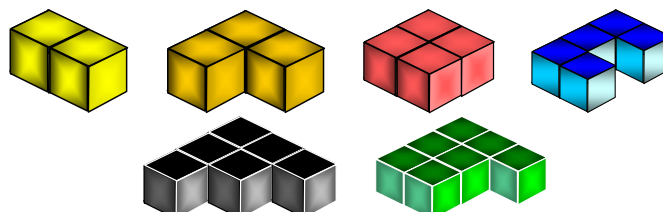
f) *El cubo de Steinhaus*

Es muy parecido al Cubo Soma, pero está compuesto por 6 piezas:



g) *El cubo mágico*

El cubo mágico también es conocido con el nombre de cubo diabólico. Este cubo mágico es muy parecido al cubo Soma; está compuesto por seis piezas y es progresivo; es decir, todas sus piezas tienen distinto número de cubitos; desde dos hasta siete cubitos. Cada cubito puede ser elaborado de madera de 3 cm x 3 cm x 3 cm y luego se pega de acuerdo a los modelos geométricos que les corresponde. A continuación, se muestra los modelos geométricos de las seis piezas del cubo mágico:





Sabemos que:  $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ , además:  $27 = 3^3$ . El problema es mostrar que, con las piezas que tiene este número de "cubitos", es posible construir un cubo de arista 3.

## Referencias

Alsina A. Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva*. Madrid: Narcea S.A. de ediciones.

Cabanne, N. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires: Bonum.

Calvo, X., Carbó, C., Farell, M., Fortuny, J., Galera, P. (2002) *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Barcelona: Graó de Irif. S. L.

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Educación, S.A.

Ricotti, E. (2005). *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*. Buenos Aires: Ediciones novedades educativas.

# Aprendizaje de la Matemática vía antiguísimos problemas

Alejandro Ortiz Fernández <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En estas lecturas vamos a presentar un conjunto de ejercicios – problemas, ya discutidos en la Antigüedad, cuyos mensajes nos son aún de utilidad.*

## **Breve visión de la matemática en la antigüedad**

Desde remotos tiempos la matemática tuvo importancia en el desarrollo del progreso humano. La aritmética y la geometría, a través de los números y de las figuras básicas, fueron dos aéreas naturales en el hombre de la Antigüedad. Dos civilizaciones que tuvieron progreso matemático fueron Egipto y Babilonia. Conocemos la matemática egipcia por los papiros de Moscú (1850 A.C.) y el de Rhind (1650 A.C) en donde apreciamos abundante información matemática. La cultura babilónica se inicia alrededor del 3,000 A.C.; algunas placas matemáticas se ubican en el periodo 2300-1600 A.C.; la tablilla Plimpton 322 es uno de los más importantes documentos que disponemos.

La humanidad continuó avanzando y resolviendo problemas que la naturaleza le planteaba; así fueron surgiendo nuevas ideas matemáticas y métodos para resolver tales cuestiones. Las condiciones se dieron para el surgimiento de una gran cultura, la civilización griega, la que pasó por tres básicos periodos: (a). Periodo Helénico, que comienza con los albores del pensamiento griego y termina con la muerte de Aristóteles; a este periodo pertenece Tales de Mileto. (b). Periodo Helenístico, es la etapa de mayor esplendor matemático; Alejandría es el faro que ilumina al mundo científico; sus tres más grandes representantes son:

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

Euclides, Arquímedes y Apolonio. (c). Periodo greco-Romano que corresponde a la etapa del declive de esta cultura y a los esfuerzos que hicieron algunos pensadores para mantener al menos el legado de los grandes maestros; este periodo llega a su final alrededor del siglo V D.C.

En conclusión, podemos decir que en la antigüedad, y sobre todo en Grecia, la matemática alcanzó significativos progresos, aún en el campo teórico, en donde enfrentaron delicados problemas, algunos de los cuales tardaron siglos en ser clarificados.

### **La historia de la matemática como recurso pedagógico**

Vía algunos problemas, que discutiremos en este escrito, vamos a realizar un breve viaje por la Antigüedad desde aproximadamente 2000 años antes de Cristo hasta alrededor de la era cristiana; este viaje debe seguramente dejarnos una sensación de aprecio y nostalgia por aquellos tiempos, y por el legado que nos dejaron seres inteligentes y que aún hoy apreciamos. Creo que a todos nos gusta este tipo de información y que mejor al tener esta cultura para aprender y/o enseñar la matemática respectiva. En las últimas décadas surgió la tendencia de motivar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática haciendo uso de las fuentes históricas, es decir, de hacer “matemática y su historia”. Por ejemplo, la enseñanza del cálculo infinitesimal podría ser motivada con las ideas que tuvo Newton para llegar y usar las nociones de derivada e integral, así como con temas de la física básica. Al usar esta metodología, la enseñanza y el aprendizaje se haría de un modo unificado pues Newton usó ideas de la geometría, del álgebra y de la física para crear su nuevo lenguaje matemático.

Por otro lado, el conocimiento de la historia de la matemática (en sus distintos niveles) nos permite comprender mejor muchas ideas que aprendemos en secundaria y en la universidad: por ejemplo, los babilonios vivieron alrededor de 4 mil años antes que nosotros, sin embargo ellos llegaron a calcular  $\sqrt{2}$ , y otros números “irracionales” con una buena aproximación; aún más, llegaron a establecer triples pitagóricas.

Así, estos conocimientos nos permiten visualizar mucho mejor nuestro aprendizaje de los números irracionales y del teorema de Pitágoras.

El lector interesado en ampliar lo tratado en las secciones 1 y 2 puede consultar: [BOY], [COL], [EVE], [HEA], [ORT.1], [ORT.2]. En las últimas décadas se han escrito excelentes libros relacionados con la historia de la matemática, algunos de los cuales se encuentran en la Biblioteca de Ciencias de la PUCP.

### Algunos antiguos ejercicios – problemas

#### I. [Babilonia]

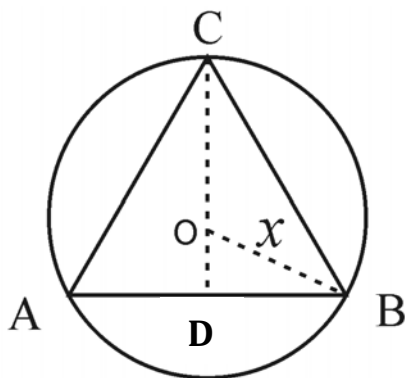
Encontrar el radio  $x$  de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC sabiendo que

$AB = 60$  y  $AC = BC = 50$ .

(Los babilonios ya conocían al después llamado “Teorema de Pitágoras”).

*Solución*

Este problema aparece en la tablilla de Susa. Se tiene la figura,



Los babilonios conocían algunas propiedades del triángulo. Si CD es la altura (pasa por el centro!),  $AD = DB = 30$ . Luego, por “Pitágoras”,  $AC^2 = AD^2 + CD^2$  ó  $50^2 = 30^2 + CD^2$ , de

donde  $CD = 40$ . En el triángulo rectángulo ODB:  $x^2 = 30^2 + (40 - x)^2$ , de donde  $x = \frac{125}{4}$

## II. [Egipto]

Calcular: (i)  $24 \times 37$   
(ii)  $847 \div 33$

*Solución*

(i)  $24 = 16 + 8$   
Múltiplos de 37  
(de la forma):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{r} 37 \\ 74 \\ 198 \end{array} \\
 + \left[ \begin{array}{r} 8 \\ 16 \end{array} \begin{array}{r} 296 \\ 592 \end{array} \right] \\
 \hline
 \begin{array}{r} 24 \\ 888 \end{array}
 \end{array}$$

Luego,  $24 \times 37 = 888$

(ii) Como en (i)

$$\begin{array}{r}
 + \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{r} 33 \\ 66 \\ 132 \end{array} \\
 + \begin{array}{r} 8 \\ 16 \end{array} \begin{array}{r} 264 \\ 528 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 25 \\ 825 \end{array}
 \end{array}$$

Esto motiva la  
descomposición:

$$\begin{aligned}
 847 &= 528 + 319 \\
 &= 528 + 264 + 55 \\
 &= 528 + 264 + 33 + 22
 \end{aligned}$$

Luego,  $847 \div 33 = 25$ ,  
con residuo 22

## III. [Egipto; una progresión aritmética]

Distribuir 100 panes entre 5 personas de manera que  $\frac{1}{7}$  del total de las tres primeras sea igual al total de las dos últimas. ¿Cuál es la diferencia?

*Solución*

Esta cuestión es el problema 40 que aparece en el papiro de Rhind; los egipcios usaron el método de “falsa posición”, lo que es aplicado en el presente problema que implica una progresión aritmética. Sea  $A$  la parte más pequeña; luego asume que  $A = 1$  y así, las partes serán  $1, 1 + D, 1 + 2D,$

$1 + 3D$  y  $1 + 4D$ . El escriba asume que  $D = 5\frac{1}{2}$ , lo que seguramente es motivado por la hipótesis:  $1 + 1 + D = \frac{1}{7}$  ( $1 + 2D + 1 + 3D$  y  $1 + 4D$ ), lo que implica  $D = 5\frac{1}{2}$ . Entonces las partes serán  $1, 6, \frac{1}{2}, 12, 17, \frac{1}{2}$  y  $23$ , cuya suma es  $60$ , pero quisiéramos que la suma sea  $100$ ; faltan así  $40$  panes, que es los  $\frac{2}{3}$  de  $60$ . Esto exige agregar a cada anterior término sus  $\frac{2}{3}$ ; obtenemos así la distribución:  $\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}$  y  $\frac{115}{3}$ , cuya suma es  $100$  y donde la diferencia es  $9\frac{1}{6}$ .

#### IV. [Arquímedes]

Si en una progresión aritmética ascendente, que consiste de las magnitudes  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , la diferencia es igual al menor término  $A_1$ , entonces:

$$n A_n < 2(A_1 + A_2 + \dots + A_n), \quad (*)$$

$$n A_n > 2(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}), \quad (**)$$

##### *Solución*

Esta cuestión es la proposición 11 en el libro "Sobre Espirales" de Arquímedes, obra en la cual resuelve vitales problemas geométricos; el presente lema es aplicado a otras desigualdades y al estudio de la elipse. La idea de Arquímedes fue adaptada a la siguiente metodología. Por hipótesis, tenemos que  $A_n - A_{n-1} = A_1$ , ó  $A_1 + A_{n-1} = A_n$ .

También,  $A_2 + A_{n-2} = A_n$  (pues  $A_2 + A_{n-2} = A_1 + A_1 + A_{n-1-1} = A_n$ ); similarmente  $A_3 + A_{n-3} = \dots = A_n$ .

$$\text{Si:} \quad S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n, \quad \text{ó}$$

$$S_n = A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_1,$$

$$\begin{aligned} \text{Luego} \quad 2S_n &= A_n + (A_1 + A_{n-1}) + (A_2 + A_{n-1}) + \dots + \\ &\quad (A_{n-1} + A_1) + A_n \\ &= A_n + nA_n = (1+n) A_n. \end{aligned}$$

De donde:  $nA_n < 2S_n$ , que es (\*)

Veamos ahora (\*\*), esto es,  $nA_n > 2S_{n-1}$ . En efecto, tenemos:

$2S_n = A_n + nA_n$  ó  $2S_{n-1} + A_n + A_n = A_n + nA_n$  ó  $2S_{n-1} + A_n = nA_n$ ,  
de donde  $nA_n > 2S_{n-1}$

## V. [Grecia]

Probar que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables.

*Prueba*

Por la tablilla Plimpton 322 sabemos que los babilonios conocían al “teorema de Pitágoras”. Problema: “encontrar enteros (“positivos”) a, b, c los cuales representan los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo”; la terna (a, b, c) se llama un triple pitagórico. Por tal tablilla vemos que los babilonios conocían cómo calcular algunos triples; los pitagóricos sabían que si m es impar entonces

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 ; \text{ y si m es par o impar se tiene}$$

$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ . Estas fórmulas no producen todos los triples pitagóricos pero en los Elementos de Euclides se da una solución completa del problema.

Por otro lado, el teorema de Pitágoras condujo al crucial problema:

«Estudiar la razón entre la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados».

Si asumimos que el lado del cuadrado mide 1, la diagonal mide  $\sqrt{2}$ . ¿es  $\sqrt{2}$  conmensurable con 1?, (es decir, ¿existe una “longitud básica” que entre un número finito de veces en la diagonal y en el lado?).

Supongamos que:  $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ , donde m y n son primos

entre si; luego  $m^2 = 2n^2$ , es decir  $m^2$  es par o aún, m es par.

Desde que  $\frac{m}{n}$  es irreducible se tendría que n es impar.

Pero, siendo  $m$  par,  $m^2$  es divisible por 4 y  $n^2$  sería divisible por 2, luego  $n$  sería par, ( $\rightarrow \leftarrow$ ).

*Conclusión:* si  $\sqrt{2}$  fuera un “número racional” se llega a una contradicción; luego, la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables (son “inconmensurables”!).

En otras palabras, en el cuadrado no existe una terna pitagórica.

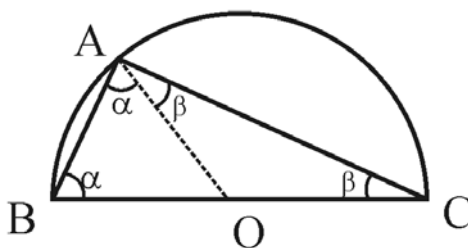
*Nota:* Existe una prueba geométrica de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ . En verdad, los antiguos matemáticos, al discutir este tipo de cuestiones, habían llegado a un nivel de alta matemática cuya complejidad los llevó a una profunda crisis, la que solo fue superada en el siglo XIX.

## VI. [Tales de Mileto]

Un ángulo inscrito en un semi-círculo es un ángulo recto.

*Solución*

El primer matemático griego de la Escuela Jónica fue Tales de Mileto quien vivió aproximadamente en el periodo 640 – 550 A.C.; fue un gran pensador y notable científico; estando en Egipto calculó la altura de la pirámide de Keops mediante una ingeniosa aplicación de la semejanza de triángulos. Se le atribuye diversos resultados geométricos, entre ellos el del ángulo inscrito en una semi-circunferencia, resultado que aparece probado en los Elementos de Euclides, Libro III. 31. Aristóteles se preguntaba: ¿Por qué el ángulo de una semi-circunferencia siempre es un ángulo recto?...



A es punto arbitrario. Probar:  $\angle BAC$  es recto.

En efecto,  $\triangle BAO$  es isósceles; Tales sabía que  $\angle ABO = \angle OAB$ . Similar con  $\triangle AOC$ .

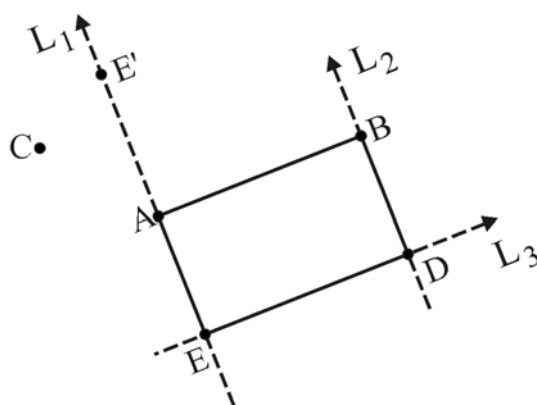


Sabía también que:  $2 \text{ ángulos rectos} = \alpha + \beta + \beta + \alpha = 2(\alpha + \beta)$ ;  
luego,  $\angle BAC$  es recto.

## VII. [Grecia]

Dados tres puntos A, B, C, construir un rectángulo ABDE tal que  $AE \cong AC$  (esto es AE es “congruente” con AC).

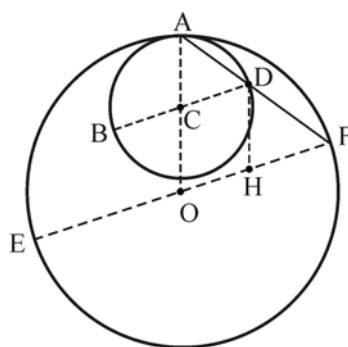
*Solución*



Construyamos  $L_1$  perpendicular a AB en A (los griegos sabían hacer esta construcción); con centro en A y radio AC se construye un circunferencia  $\mathcal{C}$ , la que intersecta a  $L_1$  en los puntos  $E'$  y E. Ahora construimos  $L_2$  perpendicular a AB en B, y  $L_3$  perpendicular a  $L_1$  en E.  $L_2$  no es paralela a  $L_3$  (si lo fuera, AE y AB serían paralelas, falso), luego ellas se intersectan en un punto D. Se observa que cada par de lados opuestos de ABDE son paralelos y tres ángulos son rectos. Conclusión: ABDE es un rectángulo.

## VIII. [Arquímedes]

Si dos circunferencias se tocan en A y si BD y EF son dos diámetros paralelos, entonces ADF es una línea recta.



### *Solución*

Esta cuestión aparece en el Libro de Lemas. Proposición 1. Se sabía que OCA es una línea recta. Se traza DH paralela a OA, la cual encuentra a OF en H.

La tesis queda probada si verificamos que:  $\angle ADC + \angle CDF =$  dos ángulos rectos. (Esta propiedad aparece en los Elementos de Euclides).

En efecto,  $OH = CD = CA$  y  $OF = OA$ ; luego,  
 $HF = OF - OH = OA - CA = CO = DH$ .

Así, el triángulo DHF es isósceles y (se conocía entonces)  $\angle HDF = \angle HFD$ . Luego los triángulos CAD y HDF son isósceles y  $\angle ACD = \angle DHF$ ; también  $\angle ADC = \angle DFH$ .

Finalmente,  $\angle ADC + \angle CDF = \angle CDF + \angle DFH =$  dos ángulos rectos, como se quería.

## **IX. [Euclides. Libro IX]**

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último números iguales al primero, entonces, tal y como el exceso del segundo es al primero, de la misma manera el exceso del último serán a todas las anteriores a él.

### *Solución*

Esta cuestión es la proposición 35 del Libro IX, la que nos indica la forma de hallar la suma de los términos de una progresión geométrica; observemos que la forma

presentada, es un tanto “enredada”; sin embargo, los argumentos hechos por Euclides son correctos.

Veamos, sean  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$   $n+1$  términos en progresión geométrica, entonces Euclides hace el siguiente argumento:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \dots = \frac{a_2}{a_1}, \quad \text{y de esta manera}$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Ahora, por la proposición 12 del libro VII se tiene

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}, \text{ de donde concluye: } a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dots = \frac{(a_1 (a_{n+1}) - a_1)}{a_2 - a_1}.$$

*Nota:* si expresamos esta última expresión en términos de la razón  $r$ , obtenemos:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dots = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}.$$

## X. [Euclides. Libro IX]

Todo número entero positivo de la forma  $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  es un número perfecto si  $2^m - 1$  es un número primo.

*Solución*

Se conjetura que este resultado fue probablemente descubierto por los pitagóricos.

Por hipótesis  $p = 2^m - 1$ , es primo, luego los divisores de  $2n = 2^m p$  ó  $n = 2^{m-1}p$  son  $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, \dots, 2^{m-1}p$ .

Luego la suma de los divisores de  $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  es

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^{m-1}p \\
&= (1 + p) + 2(1 + p) + 2^2(1 + p) + \dots + 2^{m-1}(1 + p) \\
&= (2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1})(1 + p) = (2^m - 1)(1 + p) = (2^m - 1)2^m \\
&= 2(2^m - 1)2^{m-1} = 2p2^{m-1} = 2n.
\end{aligned}$$

Por tanto  $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  es un número perfecto.

*Nota:* recordamos que un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios.

## XI. [Arquímedes. Método de Exhaustación]

Si  $S = |A| + |B| + |C| + |D| + |E|$  tal que

$|A|:|B| = |B|:|C| = |C|:|D| = |D|:|E| = 4 : 1$ , probar que

$$S = \frac{4}{3} |A| - \frac{1}{3} |E|.$$

*Prueba*

Por hipótesis:  $|B| = \frac{1}{4} |A|$ ,  $|C| = \frac{1}{4} |B|$ ,  $|D| = \frac{1}{4} |C|$ , y  $|E| = \frac{1}{4} |D|$

$$\text{Luego; } \frac{4}{3} S = \frac{4}{3} (|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) = \frac{4}{3} |A| + \frac{4}{3}$$

$$(|B| + |C| + |D| + |E|) = \frac{4}{3} |A| + \frac{1}{3} (|A| + |B| + |C| + |D|) = \frac{4}{3}$$

$$|A| + \frac{1}{3} (|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) - \frac{1}{3} |E|,$$

$$\text{Esto es: } \frac{4}{3} S = \frac{4}{3} |A| + \frac{1}{3} S - \frac{1}{3} |E|, \text{ lo que implica la tesis.}$$

*Nota:* este resultado puede ser extendido a cualquier número de sumandos.

## XII. [China. $\pm 300$ ]

Tenemos cierto número de objetos. Si los contamos de 3 en 3 nos sobran 2, si los contamos de 5 en 5 nos sobran 3, y si los contamos de 7 en 7 nos sobran 2. ¿Cuál es el número de objetos?

### Solución

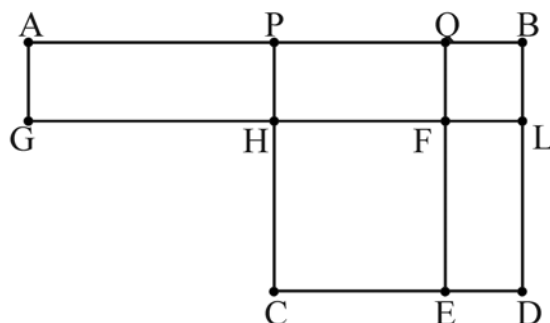
Observemos el siguiente argumento:

|    |   |    |    |    |    |    |    |    |       |     |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|-------|-----|
|    | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27    | ... |
| +2 | 5 | 8  | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29... |     |
|    | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45    | ... |
| +3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48... |     |
|    | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63    | ... |
| +2 | 9 | 16 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65... |     |

Por tanto, 23 es el número de objetos.

### XIII.[Euclides ]

Si una línea es dividida en partes iguales y en partes desiguales, el rectángulo contenido en las partes desiguales, junto con el cuadrado sobre la línea entre los puntos de la sección, es igual al cuadrado sobre la mitad de la línea.



En otras palabras, sea AB la línea dada, dividida en partes iguales en P, y en desiguales en Q. entonces se tiene:  $(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$ .

### Solución

Si  $AQ = 2a$ ,  $QB = 2b$ , entonces  $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$   
ó si  $AB = 2a$ ,  $PQ = b$ , entonces  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Se tiene, PCDB y QFLB son cuadrados; entonces

$$\begin{aligned}
 (AQ)(QB)+(PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF. \\
 &= PHLB+PHFQ+HCEF=PHLB+FEDL+HCEF \\
 &= (PB)^2.
 \end{aligned}$$

### **Algunas Reflexiones**

- (I). En Egipto y en Babilonia, milenarias civilizaciones, ya existía una matemática que sirvió para resolver problemas concretos; se alcanzó un cierto grado de progreso que influyó en posteriores desarrollos.
- (II). En la antigua Grecia, siglos antes de Cristo, ya hubieron seres pensantes que investigaron delicados problemas matemáticos; algunos de ellos llegaron a la cúspide del pensamiento abstracto (Arquímedes, Apolonio, Euclides, ...).
- (III). Las cuestiones estudiadas en esta oportunidad nos dejan un sabor de haber “viajado” a aquellas civilizaciones y apreciado el progreso habido entonces.
- (IV). La “nostalgia” generada nos motiva psicológicamente para aprender y enseñar con estos recursos históricos; la matemática se aprende mejor cuando tenemos las adecuadas motivaciones.
- (V). La cultura matemática es una parte importante en todo profesional que enseña; el manejar ideas y métodos según los propios creadores es algo vital que tenemos que valorar en nuestro medio.

### **Comentarios**

Actualmente disponemos de variados libros sobre historia de la matemática, muchos de ellos conteniendo información sobre el Siglo XX; otros relacionados con la problemática de la enseñanza de la matemática en diferentes niveles. Daremos algunas referencias bibliográficas que a su vez contienen muchas otras referencias.

- [BOY] Boyer, Carl B. :“Historia de la matemática” Alianza Editorial. 1987.
- [COL] Collete, Jean Paul. : “Historia de las matemáticas” Vols. I – II. Siglo XXI. 1986.
- [EVE] Eves, Howard: “An Introduction to the History of Mathematics”. Holt. Chicago. 1969.
- [HEA] Heath, Thomas: “A History of Greek Mathematics”. Vols. I – II. Oxford at the Clavendon Press. 1921.
- [ORT.1] Ortiz Alejandro: “Historia de la matemática” Vol 1. “La Matemática en la Antigüedad” PUCP. 2005.
- [ORT.2] Ortiz Alejandro: “Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática”. PUCP – UNT. 2006.

# Resolución de problemas de Olimpiadas Matemáticas

Uldarico Malaspina<sup>1</sup>, Sergio Vera <sup>1</sup>, Jorge Tipe<sup>2</sup>, John Cuya <sup>2</sup>

## **Resumen**

*Considerando la resolución de problemas, como una forma de hacer matemáticas, presentamos una descripción del desarrollo del taller, incluyendo las situaciones problemáticas que propusimos en él y las respectivas soluciones de las actividades individuales y grupales.*

## **Introducción**

El objetivo fundamental es contribuir a la formación matemática de los participantes del taller, a partir de reflexiones individuales y en grupo sobre soluciones de problemas no rutinarios de matemáticas, propios de olimpiadas matemáticas internacionales. Consideramos que la resolución de problemas es fundamental en la formación básica y continua de los profesores, tanto porque en general la resolución de problemas es una forma de hacer matemáticas, como porque el profesor, en ese marco, debe estimular las capacidades de descubrimiento y creatividad de sus alumnos en el proceso de aprendizaje, y es muy importante que él mismo viva la experiencia de afrontar retos similares a los que viven los estudiantes. Para ello, resultan muy pertinentes los problemas de olimpiadas matemáticas.

Este taller resulta importante no sólo por el valor formativo de la resolución de problemas en general, sino también por la institucionalización y relevancia que van teniendo en el Perú las olimpiadas matemáticas. El taller está orientado principalmente a profesores de educación secundaria, pero puede ser útil también a profesores de nivel superior.

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú

<sup>2</sup> Universidad Nacional Mayor de San Marcos-Perú



## Metodología

La metodología prevista para el desarrollo de este taller se basa en el aprendizaje colaborativo, partiendo de situaciones problemáticas y estimulando a los participantes a que resuelvan problemas de dificultad graduada en torno a tal situación, en fichas especialmente elaboradas para trabajos individuales y otras para trabajos grupales. El propósito es que la solución de los problemas que se les vaya presentando contribuya a que los participantes examinen distintos aspectos del pensamiento matemático y reúnan elementos para resolver un problema de olimpiadas. Los responsables del taller atienden consultas, valoran las iniciativas, estimulan el análisis de los problemas y ponen en común reflexiones importantes en torno a las soluciones de los problemas. Lo ideal es que haya exposiciones de los grupos, pero esto no siempre se puede hacer por limitaciones de tiempo. Es importante también que alguno de los responsables del taller haga una exposición aclarando e integrando ideas en torno a la situación y los problemas trabajados y que se concluya con la exposición de un aspecto teórico relacionado con la solución de alguno(s) de los problemas.

## Situaciones problemáticas

### *Situación 1: Tablero incaico*

En cada casilla de un tablero  $n \times m$  ( $n$  y  $m$  números enteros mayores que 1) se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama *tablero incaico* si en cada una de sus casillas, el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas.

Nota: Se llaman casillas vecinas a aquellas que tienen en común uno de sus lados.

### *Actividades individuales*

- I1. Construir tableros incaicos  $3 \times 3$
- I2. Construir tableros incaicos  $3 \times 4$
- I3. Construir tableros incaicos  $4 \times 4$
- I4. Construir tableros incaicos  $5 \times 5$

### *Solución*

Mostramos tres tableros incaicos en cada caso

#### I1. Construir tableros incaicos 3x3

|    |    |    |
|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 |

|   |    |    |
|---|----|----|
| 2 | 2  | -6 |
| 4 | 4  | -4 |
| 6 | -2 | -2 |

|    |    |    |
|----|----|----|
| 1  | -3 | -2 |
| -2 | -1 | -1 |
| 5  | 3  | -4 |

#### I2. Construir tableros incaicos 3x4

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  | -1 |
| 1  | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | 2  |

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| 2 | 2  | -6 | 2  |
| 4 | 4  | -4 | -4 |
| 6 | -2 | -2 | -2 |

|    |    |    |   |
|----|----|----|---|
| -2 | -1 | -4 | 5 |
| -3 | -1 | 3  | 1 |
| 1  | -2 | 5  | 4 |

#### I3. Construir tableros incaicos 4x4

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  | -1 |
| 1  | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | 2  |
| 1  | -2 | -1 | 3  |

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| 2 | 2  | -6 | 2  |
| 4 | 4  | -4 | -4 |
| 6 | -2 | -2 | -2 |
| 2 | 4  | 6  | 8  |

|    |    |    |   |
|----|----|----|---|
| -2 | -1 | -4 | 5 |
| -3 | -1 | 3  | 1 |
| 1  | -2 | 5  | 4 |
| -1 | 2  | 1  | 3 |

#### I4. Construir tableros incaicos 5x5

|    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|---|
| 2  | -1 | 2  | -1 | 2 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| -1 | 2  | -1 | 2  | 1 |
| 1  | -2 | -1 | 3  | 2 |
| -1 | 2  | -3 | 6  | 4 |

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| 2 | 2  | -6 | 2  | 2  |
| 4 | 4  | -4 | -4 | 4  |
| 6 | -2 | -2 | -2 | 6  |
| 2 | 4  | 6  | 8  | 2  |
| 4 | -2 | 2  | 4  | -2 |

|    |    |    |   |   |
|----|----|----|---|---|
| -2 | -1 | -4 | 5 | 3 |
| -3 | -1 | 3  | 1 | 2 |
| 1  | -2 | 5  | 4 | 2 |
| -1 | 2  | 1  | 3 | 1 |
| 2  | 1  | 1  | 2 | 1 |

### *Actividades grupales*

G1. Examinar si es posible construir tableros incaicos 6x6. En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

- G2. Examinar si es posible construir tableros incaicos  $11 \times 11$ . En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.
- G3. Examinar si es posible construir tableros incaicos  $n \times n$ , para todo  $n > 2$ . Justificar completamente sus afirmaciones.

### *Solución*

Veremos que es posible construir tableros incaicos  $n \times n$  para todo  $n > 2$ , con base en los ejemplos de las actividades individuales.

- G1. Examinar si es posible construir tableros incaicos  $6 \times 6$ . En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

|    |    |    |    |   |    |
|----|----|----|----|---|----|
| 2  | -1 | 2  | -1 | 2 | 1  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 3  |
| -1 | 2  | -1 | 2  | 1 | -2 |
| 1  | -2 | -1 | 3  | 2 | 1  |
| -1 | 2  | -3 | 6  | 4 | 3  |
| 7  | 6  | 8  | 5  | 1 | 2  |

|   |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|
| 2 | 2  | -6 | 2  | 2  | 2  |
| 4 | 4  | -4 | -4 | 4  | 4  |
| 6 | -2 | -2 | -2 | 6  | -2 |
| 2 | 4  | 6  | 8  | 2  | 4  |
| 4 | -2 | 2  | 4  | -2 | 6  |
| 2 | 6  | 4  | -2 | 2  | -4 |

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |

- G2. Examinar si es posible construir tableros incaicos  $11 \times 11$ . En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

|    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|---|
| 2  | -1 | 2  | -1 | 2 | 1  | 2  | -1 | 2  | -1 | 2 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 3  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| -1 | 2  | -1 | 2  | 1 | -2 | -1 | 2  | -1 | 2  | 1 |
| 1  | -2 | -1 | 3  | 2 | 1  | 1  | -2 | -1 | 3  | 2 |
| -1 | 2  | -3 | 6  | 4 | 3  | -1 | 2  | -3 | 6  | 4 |
| 7  | 6  | 8  | 5  | 1 | 2  | 7  | 6  | 8  | 5  | 1 |
| 2  | -1 | 2  | -1 | 2 | 1  | 2  | -1 | 2  | -1 | 2 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 3  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| -1 | 2  | -1 | 2  | 1 | -2 | -1 | 2  | -1 | 2  | 1 |
| 1  | -2 | -1 | 3  | 2 | 1  | 1  | -2 | -1 | 3  | 2 |
| -1 | 2  | -3 | 6  | 4 | 3  | -1 | 2  | -3 | 6  | 4 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  |
| 2  | 1  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 |
| -1 | 1  | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2  | 1  | -1 | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  |
| -1 | 1  | 2  | 1  | -2 | -1 | 3  | 1  | -2 | -1 | 3  |
| 2  | 1  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 |
| -1 | 1  | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2  | 1  | -1 | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  | -1 | 2  |
| -1 | 1  | 2  | 1  | -2 | -1 | 3  | 1  | -2 | -1 | 3  |

|    |    |    |   |    |    |    |   |    |    |    |
|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|----|
| 2  | 2  | -6 | 2 | 2  | -6 | 2  | 2 | 2  | -6 | 2  |
| 4  | 4  | -4 | 4 | 4  | -4 | -4 | 4 | 4  | -4 | -4 |
| 6  | -2 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 |
| 2  | 4  | 6  | 2 | 2  | -6 | 2  | 2 | 2  | -6 | 2  |
| 2  | 4  | -2 | 4 | 4  | -4 | -4 | 4 | 4  | -4 | -4 |
| -6 | -4 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 |
| 2  | -4 | -2 | 2 | 4  | 6  | 8  | 2 | 4  | 6  | 8  |
| 2  | 4  | 6  | 2 | 2  | -6 | 2  | 2 | 2  | -6 | 2  |
| 2  | 4  | -2 | 4 | 4  | -4 | -4 | 4 | 4  | -4 | -4 |
| -6 | -4 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 | 6 | -2 | -2 | -2 |
| 2  | -4 | -2 | 2 | 4  | 6  | 8  | 2 | 4  | 6  | 8  |

G3. Examinar si es posible construir tableros incaicos  $n \times n$ , para todo  $n > 2$ . Justificar completamente sus afirmaciones.

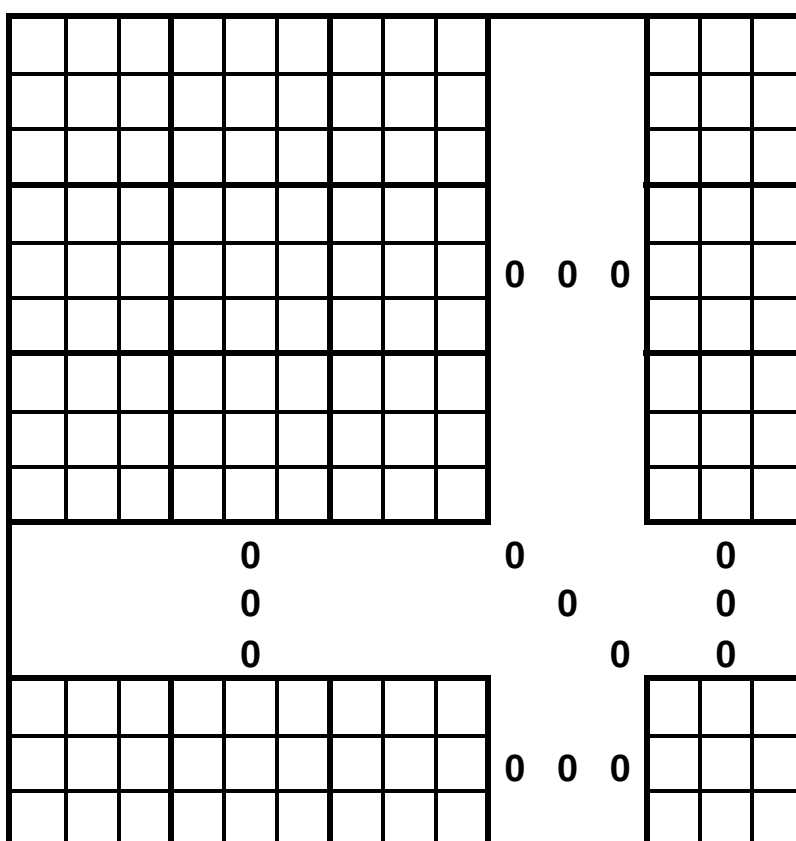
Como se puede observar en los ejemplos anteriores, los tableros de mayor tamaño pueden ser cubiertos con

tableros menores. En particular, afirmamos que todos los tableros  $n \times n$ , con  $n > 5$ , pueden ser llenados con subtableros de  $3 \times 3$ ,  $3 \times 4$  y  $4 \times 4$ . A continuación veremos la demostración de esta afirmación.

Primero, es conocido que todos los números naturales  $n > 5$ , pueden ser múltiplos de 3; ó dejar resto 1, al ser divididos entre 3; ó dejar resto 2, al ser divididos entre 3. Veamos la demostración de la afirmación para cada uno de estos casos:

***i)  $n = 3k$ :***

En este caso, basta dividir el tablero  $n \times n$  en  $k^2$  subtableros de  $3 \times 3$ , de la siguiente manera:



Ahora, basta llenar cada subtablero  $3 \times 3$ , con alguno de los ejemplos dados en las actividades individuales, y como en cada subtablero se cumple la condición de tablero incaico, entonces

en el tablero de  $n \times n$  también se cumplirá la condición de tablero incaico, pues el número escrito en cada casilla es igual a la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas.

Veamos un ejemplo de llenado del tablero:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|----|----|----|
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |   |   |   | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |   |   | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |   |   |   | -1 | 2  | -1 |
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |   |   |   | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0 | 0 | 0 | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |   |   |   | -1 | 2  | -1 |
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |   |   |   | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |   |   | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |   |   |   | -1 | 2  | -1 |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |
| 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  | 2  | -1 | 2  |   |   |   | 2  | -1 | 2  |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0 | 0 | 0 | 1  | 1  | 1  |
| -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 | -1 | 2  | -1 |   |   |   | -1 | 2  | -1 |

**ii)  $n = 3k+1$**

En este caso, como  $n > 5$ , tenemos que  $k > 1$  y podemos decir que  $n = 3(k-1) + 4$ , por lo cual podemos dividir el tablero de  $n \times n$  en  $(k-1)^2$  subtableros de  $3 \times 3$ ,  $(k-1)$  tableros de  $3 \times 4$ ,  $(k-1)$  tableros de  $4 \times 3$  y 1 tablero de  $4 \times 4$ . Veamos:



Veamos un ejemplo de llenado del tablero:

|    |    |    |    |    |    |   |   |   |    |    |    |   |   |    |   |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|----|----|----|---|---|----|---|
| 2  | 2  | -6 | 2  | 2  | -6 | 0 | 0 | 0 | 2  | 2  | -6 | 2 | 2 | -6 | 2 |
| 4  | 4  | -4 | 4  | 4  | -4 |   |   |   | 4  | 4  | -4 | 4 |   |    |   |
| 6  | -2 | -2 | 6  | -2 | -2 |   |   |   | 6  | -2 | -2 | 6 |   |    |   |
| 2  | 2  | -6 | 2  | 2  | -6 |   |   |   | 2  | 2  | -6 | 2 |   |    |   |
| 4  | 4  | -4 | 4  | 4  | -4 |   |   |   | 4  | 4  | -4 | 4 |   |    |   |
| 6  | -2 | -2 | 6  | -2 | -2 |   |   |   | 6  | -2 | -2 | 6 |   |    |   |
| 0  |    |    |    |    |    | 0 |   |   | 0  |    |    |   |   |    |   |
| 0  |    |    |    |    |    | 0 |   |   | 0  |    |    |   |   |    |   |
| 0  |    |    |    |    |    | 0 |   |   | 0  |    |    |   |   |    |   |
| 2  | 2  | -6 | 2  | 2  | -6 | 0 | 0 | 0 | 2  | 2  | -6 | 2 | 2 | -6 | 2 |
| 4  | 4  | -4 | 4  | 4  | -4 |   |   |   | 4  | 4  | -4 | 4 |   |    |   |
| 6  | -2 | -2 | 6  | -2 | -2 |   |   |   | 6  | -2 | -2 | 6 |   |    |   |
| 2  | 4  | 6  | 2  | 4  | 6  |   |   |   | 2  | 4  | 6  | 2 |   |    |   |
| 2  | 4  | -2 | 2  | 4  | -2 |   |   |   | 2  | 4  | -2 | 4 |   |    |   |
| -6 | -4 | -2 | -6 | -4 | -2 |   |   |   | -6 | -4 | -2 | 6 |   |    |   |
| 2  | -4 | -2 | 2  | -4 | -2 | 0 |   |   | 2  | -4 | -2 | 2 | 4 | 6  | 8 |

### iii) $n=3k+2$

En este caso, como  $n > 5$ , tenemos que  $k > 1$  y podemos decir que  $n = 3(k-2) + 8$ , por lo cual podemos dividir el tablero de  $n \times n$  en  $(k-2)^2$  subtableros de  $3 \times 3$ ,  $2(k-2)$  tableros de  $3 \times 4$ ,  $2(k-2)$  tableros de  $4 \times 3$  y 4 tableros de  $4 \times 4$ . Veamos:





|    |    |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |   |
|----|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|---|
| 1  | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1  | -3 | -2 | -2 | -1 | -4 | 5 | -2 | -1 | -4 | 5 |
| -2 | -1 | -1 |   |   |   | -2 | -1 | -1 | -3 | -1 | 3  | 1 | -3 | -1 | 3  | 1 |
| 5  | 3  | -4 |   |   |   | 5  | 3  | -4 | 1  | -2 | 5  | 4 | 1  | -2 | 5  | 4 |
| 0  |    |    | 0 | 0 |   |    | 0  |    |    |    |    |   |    |    |    |   |
| 0  |    |    | 0 | 0 |   |    | 0  |    |    |    |    |   |    |    |    |   |
| 0  |    |    | 0 | 0 |   |    | 0  |    |    |    |    |   |    |    |    |   |
| 1  | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1  | -3 | -2 | -2 | -1 | -4 | 5 | -2 | -1 | -4 | 5 |
| -2 | -1 | -1 |   |   |   | -2 | -1 | -1 | -3 | -1 | 3  | 1 | -3 | -1 | 3  | 1 |
| 5  | 3  | -4 |   |   |   | 5  | 3  | -4 | 1  | -2 | 5  | 4 | 1  | -2 | 5  | 4 |
| -2 | -3 | 1  | 0 | 0 | 0 | -2 | -3 | 1  | -2 | -1 | -4 | 5 | -2 | -1 | -4 | 5 |
| -1 | -1 | -2 |   |   |   | -1 | -1 | -2 | -3 | -1 | 3  | 1 | -3 | -1 | 3  | 1 |
| -4 | 3  | 5  |   |   |   | -4 | 3  | 5  | 1  | -2 | 5  | 4 | 1  | -2 | 5  | 4 |
| 5  | 1  | 4  |   |   |   | 5  | 1  | 4  | -1 | 2  | 1  | 3 | -1 | 2  | 1  | 3 |
| -2 | -3 | 1  |   |   |   | -2 | -3 | 1  | -2 | -1 | -4 | 5 | -2 | -1 | -4 | 5 |
| -1 | -1 | -2 |   |   |   | -1 | -1 | -2 | -3 | -1 | 3  | 1 | -3 | -1 | 3  | 1 |
| -4 | 3  | 5  |   |   |   | -4 | 3  | 5  | 1  | -2 | 5  | 4 | 1  | -2 | 5  | 4 |
| 5  | 1  | 4  |   |   |   | 5  | 1  | 4  | -1 | 2  | 1  | 3 | -1 | 2  | 1  | 3 |

Con esto hemos concluido la demostración. Considerando los ejemplos de tableros incaicos de  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  y  $5 \times 5$ , podemos afirmar que es posible conseguir tableros incaicos  $n \times n$ , para todo  $n > 2$ .

## Situación 2

*En una reunión hay cierto número de personas; algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas.*

Representaremos a las personas como puntos en el plano (también llamados vértices) y cada vez que dos personas se conocen unimos los vértices correspondientes mediante una línea (también llamada arista). Esta representación de vértices y aristas recibe el nombre de *grafo*.

De esta forma, podemos representar cualquier grupo de personas mediante un grafo. Este grafo nos dará la información acerca de las personas que se conocen y las que no.

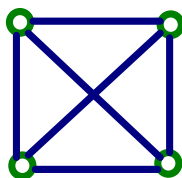
### *Actividades individuales*

- I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.
- I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.
- I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

### *Solución*

- I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.

Es fácil ver que cada persona puede conocer a las otras tres, representando la situación mediante un grafo:



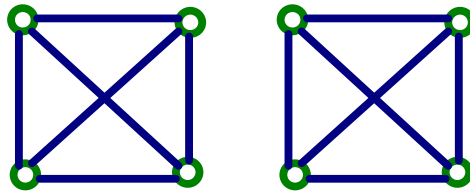
A este grafo suele llamarse grafo 4-completo.

Sin embargo, no se cumple que haya algunas personas que no se conocen entre sí. Por esta razón, concluimos que no es posible que haya solamente 4 personas en la reunión.

- I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.

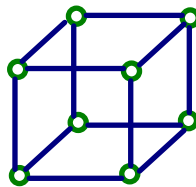
Sí es posible, y vamos a mostrar dos formas de resolver el problema.

Primera forma. Dividimos a las 8 personas en dos grupos de 4, y en cada grupo hacemos que todos se conozcan entre sí. De esta forma obtenemos un grafo que consiste en la “duplicación” del grafo del problema anterior:



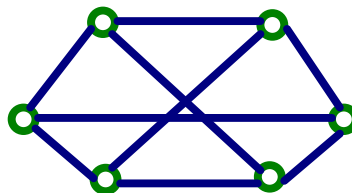
Dicho de otra forma, este grafo está formado por dos grafos 4-completos.

Segunda forma. El grafo a continuación, es un poco más elaborado y surge del hecho de que un cubo tiene 8 vértices, y de cada vértice salen 3 aristas:



- I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

Sí es posible. El siguiente grafo lo muestra:



### *Actividades grupales*

- G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.
- G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.
- G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

- G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.
- G5. Enunciar y demostrar un teorema, a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos

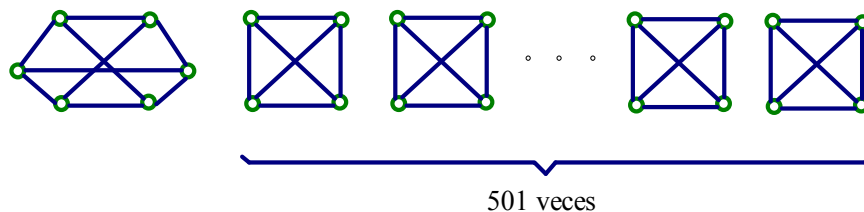
*Solución*

- G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.

Sí es posible, solo necesitamos separar a las 40 personas en 10 grupos de 4, y hacer que en cada grupo todas se conozcan entre sí. Es decir, con las 40 personas formamos 10 grafos 4-completos.

- G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.

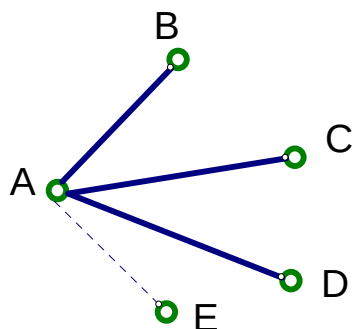
Como  $2010 = 4 \times 501 + 6$  formamos un grupo de 6 personas y 501 grupos de 4, y en cada grupo ya sabemos cómo resolver el problema, es decir, el grafo sería:



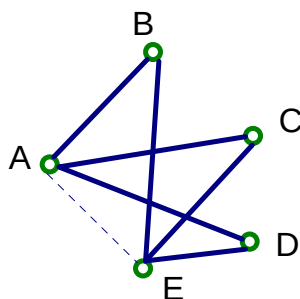
- G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

Vamos a demostrar que no es posible.

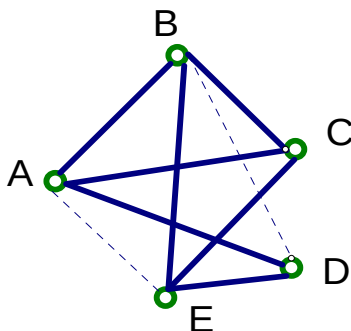
Supongamos que haya 5 personas A, B, C, D, E, tales que cada una conoce a otras 3. Digamos que A conoce a B, C, y D, entonces A no conoce a E, hasta ahora tendríamos:



(las líneas punteadas significan que no se conocen) Como E debe conocer a otras tres personas, éstas deben ser B, C, D:



Como B debe conocer a uno más, podemos suponer sin pérdida de generalidad que conoce a C, y no a D.



Vemos que C ya conoce a 3, entonces C no conoce a D, pero entonces D solo conocería a 2 personas, que contradice la condición inicial.

- G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.

Vamos a demostrar que no es posible. Es más, vamos a demostrar que no es posible que haya un número impar de personas.

Sea  $n$  un número impar. En un grupo de  $n$  personas, no es posible que cada una conozca a 3 personas.

#### *Demostración*

Supongamos que sea posible. Una persona que no pertenece al grupo, escoge dos personas, si ellas se conocen les da un caramelo a cada una, si no se conocen sigue de largo; y hace lo mismo con todas las parejas que se pueden formar en el

grupo (para ser exactos, hace  $\binom{n}{2}$  veces la misma

operación). Cuando acaba de repartir los caramelos es claro que ha repartido un número par de caramelos, pues en cada operación reparte 0 ó 2 caramelos. Por otro lado, al final cada persona termina con 3 caramelos, pues cada una conoce a 3 personas. Por lo tanto, la cantidad total de caramelos es  $3n$ , y como  $n$  es impar, la cantidad total de caramelos es impar, lo cual es una contradicción.

En particular si  $n=5$ , obtenemos una nueva demostración del problema anterior.

- G5. Enunciar y demostrar un teorema, a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos

*Teorema. Decimos que un grupo de  $n \geq 4$  personas es cúbico, si cada una de ellas conoce a otras 3 personas del grupo.*

**a).** *Si  $n$  es impar, no es posible encontrar un grupo cúbico de  $n$  personas.*

**b).** *Si  $n$  es par, es posible encontrar un grupo cúbico de  $n$  personas.*

#### *Demostración*

La parte a) ya fue demostrada en el problema anterior.

Para la parte b):

- Si  $n = 4k$ , formamos  $k$  grupos de 4 personas cada uno, y hacemos que en cada grupo todas las personas se conozcan.
- Si  $n = 4k + 2$ , formamos un grupo de 6 personas tales que cada una conozca a 3 de ellas (problema 3 de las Actividades individuales) y las  $4k - 4$  personas que quedan las separamos en  $k - 1$  grupos de 4, y en cada grupo hacemos que todas las personas se conozcan.

### *Problemas sobre múltiplos*

1. *Si se tienen siete números enteros cualesquiera, ¿siempre hay dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de 6?*

#### *Solución*

Todo número entero al ser dividido por 6 deja un resto igual a 0, 1, 2, 3, 4 ó 5, es decir, sólo tenemos 6 posibilidades, entonces por el principio de casillas entre estos 7 números hay dos con el mismo resto, los cuales van a tener una diferencia múltiplo de 6.

2. *Si se tienen tres números enteros cualesquiera, ¿siempre hay dos de ellos cuya suma es múltiplo de 2?*

#### *Solución*

Todo número entero tiene dos opciones, ser par o impar, entonces por el principio de casillas entre estos 3 números hay dos con la misma paridad, los cuales van a tener una suma múltiplo de 2.

3. *Si se tienen siete números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

#### *Solución*

Todo número entero al ser dividido por 3 deja un resto igual a 0, 1 ó 2, es decir, sólo tenemos 3 posibilidades, entonces por el principio de casillas entre estos 7 números hay tres con el mismo resto  $r$ , los cuales van a tener una suma múltiplo de 3.



4. *Si se tienen cinco números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

*Solución*

Todo número entero al ser dividido por 3 deja un resto igual a 0, 1 ó 2, es decir, sólo tenemos 3 posibilidades. Si entre los 5 números hay uno de cada resto entonces estos 3 números van a sumar múltiplo de 3, en caso contrario, hay un resto que no aparece entre los cinco números, entonces nos quedaríamos sólo con 2 posibilidades y por el principio de casillas entre estos 5 números hay tres con el mismo resto  $r$ , los cuales van a tener una suma múltiplo de 3.

5. *Si se tienen cuatro números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

*Solución*

La respuesta es NO y basta mostrar un ejemplo: 0, 1, 3, 4.

6. *Encontrar el menor entero positivo  $n$  con la siguiente propiedad: para  $n$  números enteros cualesquiera siempre es posible encontrar 18 de ellos cuya suma es múltiplo de 18. (Selectivo IMO – Perú, 2002)*

*Solución*

Vamos a demostrar que el menor entero positivo  $n$  con dicha propiedad es  $n = 35$ . Primero demostremos que  $n = 35$  cumple dicha propiedad. Supongamos que tenemos 35 números enteros cualesquiera, entonces entre dichos números hay 3 cuya suma es múltiplo de 3, sean  $a_1, b_1, c_1$  dichos números, entonces  $a_1 + b_1 + c_1 = 3m_1$ .

Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 32 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, sean  $a_2, b_2, c_2$  dichos números, entonces  $a_2 + b_2 + c_2 = 3m_2$ .

Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 29 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya

suma es múltiplo de 3, sean  $a_3, b_3, c_3$  dichos números, entonces  $a_3 + b_3 + c_3 = 3m_3$ .

Y así sucesivamente podemos encontrar los números  $a_4, b_4, c_4, \dots, a_{11}, b_{11}, c_{11}$ , donde  $a_4 + b_4 + c_4 = 3m_4, \dots, a_{11} + b_{11} + c_{11} = 3m_{11}$ .

Obsérvese que los números  $m_1, m_2, \dots, m_{11}$  también son enteros, entonces entre dichos números hay 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos sin pérdida de generalidad que sean  $m_1 + m_2 + m_3 = 3k_1$ . Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 8 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos que sean  $m_4 + m_5 + m_6 = 3k_2$ . Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 5 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos que sean  $m_7 + m_8 + m_9 = 3k_3$ .

Finalmente, entre los números  $k_1, k_2, k_3$  hay dos cuya suma es múltiplo de 2, supongamos que sean  $k_1$  y  $k_2$ ; luego la suma de los 18 números  $a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + \dots + a_6 + b_6 + c_6 = 3m_1 + 3m_2 + \dots + 3m_6 = 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) = 3(3k_1 + 3k_2) = 9(k_1 + k_2)$ , el cual es múltiplo de 18.

Por lo tanto  $n = 35$  cumple la propiedad del problema y para demostrar que este valor es el mínimo basta mostrar un contraejemplo con  $n = 34$  el cual puede ser:

$$0, 3, 6, \dots, 48, 1, 4, 7, \dots, 49.$$



# Problemas de conteo y probabilidad elemental en la Educación Básica

Paulo César Pinto Carvalho <sup>1</sup>

## **Resumen**

*Presentamos problemas sencillos de conteo y su aplicación en la solución de problemas simples de probabilidad. Pueden ser trabajados con éxito en la escuela primaria, usando principios simples, que no dependen del conocimiento de fórmulas. En este taller, veremos una serie de problemas con estas características. Varios de estos problemas fueron propuestos en la Olimpiada Matemática de Brasil de las Escuelas Públicas.*

## **Problemas presentados en el taller**

1. Un grupo de 4 alumnos (Alice, Bernardo, Carolina y Daniel) necesita escoger un líder y un vice-líder para un debate.
  - a) Haga una lista de todas las posibles formas de escoger un candidato (use la inicial de cada nombre, para facilitar la escritura). Organice su lista de la siguiente forma: primero, escriba todas las posibilidades en que Alice es la presidente, después aquellas en que Bernardo es presidente, y así sucesivamente.
  - b) ¿Cuántas posibilidades encontró?
  - c) No es necesario enumerar todas las posibilidades para contarlas. Basta dividir, en etapas, las posibles formas de escoger un candidato. Esto conduce a un diagrama de árbol de decisiones, como muestra la Figura 1. Complete la figura, indicando las posibles maneras de escoger un líder en cada etapa.

---

<sup>1</sup> Instituto de Matemática Pura y Aplicada - Brasil

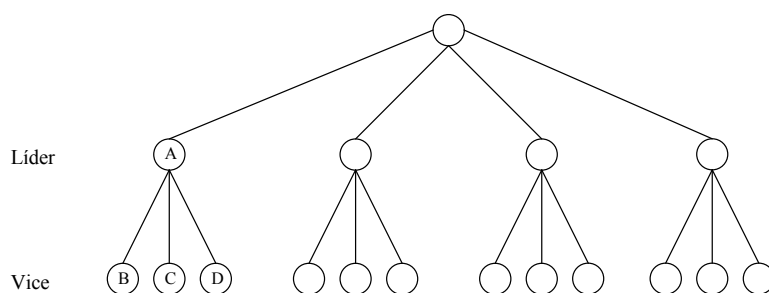


**Figura 1**

- d) Se puede escoger el líder de \_\_\_\_ maneras. Esta forma de escoger el líder, afecta a los posibles vice-líderes, pero no al número de posibilidades, que es siempre igual a \_\_\_\_\_. Luego, el número total de posibilidades para escoger un líder y en seguida, un vice-líder es igual al producto \_\_\_\_\_  $\times$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_.

**Principio Multiplicativo:** Si una decisión puede ser tomada de **p** maneras y cualquiera que ésta sea, una segunda decisión puede ser tomada de **q** maneras, entonces el número de maneras de tomar consecutivamente las dos decisiones es igual a **pq**.

- e) Usando el principio multiplicativo, encuentre cuántas son las posibles maneras de escoger un líder y un vice-líder para el caso en que sean 6 alumnos y 6 alumnas y además, los escogidos deben ser de sexos diferentes.
- f) Repita para el caso en que sean 6 alumnos y 8 alumnas.
2. Un restaurante presenta un menú popular, en el cual, el cliente escoge una ensalada (entre ensalada verde, ensalada rusa ó salpicón), un plato principal (bistec con papas fritas, pescado con puré, pollo con legumbres ó lasaña) y un postre (ensalada de frutas ó pudín). ¿Cuántas son las posibles comidas?
  3. Para pintar la bandera (Figura 2), hay 4 colores disponibles. ¿De cuántas maneras puede ser pintada la bandera de modo que, las fajas adyacentes tengan diferentes colores?

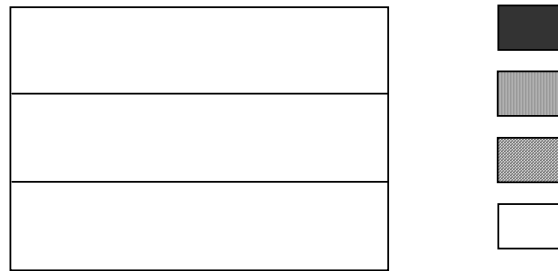


**Figura 2**

4. Para pintar la bandera (Figura 3), están disponibles seis colores dados, de tal forma que las regiones adyacentes deben ser pintadas de diferentes colores

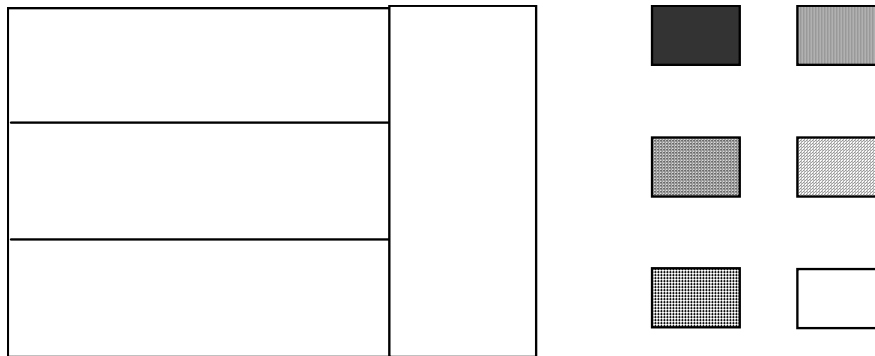
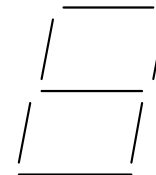


**Figura 3**

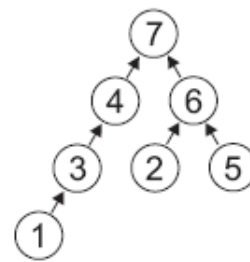
- a) ¿Cuál es el número mínimo de colores a ser usados?  
 b) ¿De cuántas maneras puede ser pintada la bandera?
5. Cada dígito de una calculadora es mostrado, en su pantalla, encendiendo filamentos dispuestos como se muestra en la figura del lado. ¿Cuántos símbolos diferentes pueden ser representados? (No incluya el caso en que ningún filamento esta encendido.)
6. ¿Cuántos son las posibles respuestas de un examen de 10 preguntas (tipo alternativas), que tiene 5 alternativas por



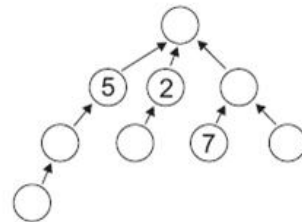
pregunta? ¿En cuántas de estas respuestas la letra A aparece exactamente una vez? ¿En cuántas la letra A no aparece?

7. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 personas en 5 sillas puestas en fila?
8. Liste todos los subconjuntos de  $\{1, 2, 3\}$ . ¿Cuántos son? De modo general, ¿Cuántos son los subconjuntos de un conjunto que tiene  $n$  elementos?

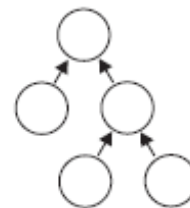
9. (OBMEP 2008) los círculos de la figura del lado, fueron completados con los números del 1 al 7, de modo que, todas las flechas apuntan de un número menor para un numero mayor. En este caso, decimos que la figura fue *correctamente completada*.



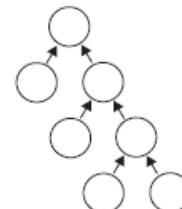
- a) Complete la figura del lado con los números del 1 al 9, de modo que esté correctamente completada.



- b) ¿De cuántas maneras la figura del lado puede ser correctamente completada con los números del 1 al 5?



- c) ¿De cuántas maneras, la figura del lado puede ser correctamente completada con los números del 1 al 7?



10. (OBMEP 2008) Las piezas de la Figura 4 son hechas de cuadraditos de cartulina gris, de un lado y blanca del otro. La Figura 6 muestra una manera de encajar esas piezas con el lado gris hacia arriba, en los cuatro cuadrados de la Figura 5. ¿De cuántas maneras diferentes es posible hacer esto?

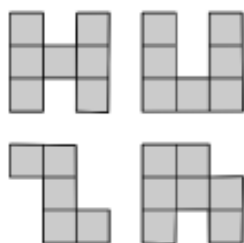


Figura 4

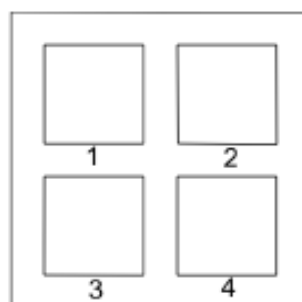


Figura 5

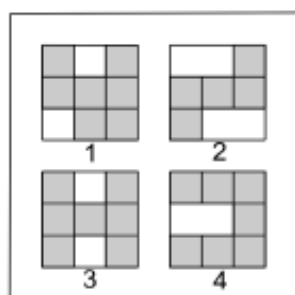


Figura 6

11. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser colocadas 6 personas en fila?

**Permutaciones simples:** El número de maneras de ordenar  $n$  objetos distintos es igual a  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

12. Un anagrama de una palabra es una nueva “palabra” obtenida reordenando sus letras (esta nueva palabra puede no tener sentido).
- ¿Cuántos son los anagramas de la palabra **SAVEIRO**?
  - ¿Cuántos de ellos comienzan con **S**?
  - ¿Cuántos de ellos terminan con **vocal**?
  - ¿Cuántos presentan el pedazo **VEIR**?



13. ¿De cuántas maneras se puede organizar en una repisa, 5 libros de Matemática, 3 de Biología y 2 de Física (todos diferentes entre si), de modo que libros de la misma disciplina permanezcan juntos?
14. En una fiesta hay 5 hombres y 5 mujeres, que formarán 5 parejas para un baile de cuadrilla. ¿De cuántas maneras se pueden formar esas parejas? ¿Y si hubieran 5 hombres y 8 mujeres?
15. ¿De cuántas maneras 5 hombres y 5 mujeres pueden sentarse en 5 bancos de 2 lugares, si en cada banco debe haber un hombre y una mujer?
16. Considere un grupo de 20 alumnos.
  - a) ¿De cuántas maneras se puede escoger un representante, un secretario y un tesorero?
  - b) Considere ahora que queramos escoger tres de los alumnos, para formar una comisión. ¿Por qué la respuesta no es la misma que la del ítem anterior?
  - c) ¿Qué es necesario hacer con la respuesta del ítem **a** para obtener la respuesta del ítem **b**?

**Combinaciones simples:** El número de modos de escoger **p** entre **n** objetos es  $C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

17. Cada pieza de un dominó presenta un par de números del 0 al 6, no necesariamente distintos. ¿Cuántas son estas piezas?
18. En un grupo hay 12 chicos y 15 chicas. ¿Cuántos son los modos de escoger una comisión de 4 personas:
  - a) sin restricciones?
  - b) que incluyan a José (que es uno de los alumnos)?
  - c) que no incluyan a Marcia (que es una de las alumnas)?
  - d) con 2 chicos y 2 chicas?
  - e) que tengan por lo menos un chico y una chica?

19. En el juego de la *Tinka* son sorteados, a cada extracción, 6 de los números del 1 al 45.
- ¿Cuántos son los resultados posibles de la *Tinka*?
  - Un jugador apuesta en los números 2, 7, 21, 34, 41 y 43. ¿Cuál es su chance de ganar? ¿Y si él hubiese apostado en los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6?
  - ¿Cuántas veces más, son las oportunidades de ganar de quien apuesta en 8 números?
  - Suponga que el número 17 no es sorteado hace mucho tiempo. ¿Esto modifica las posibilidades de ser sorteado la próxima vez?

**Probabilidad:** Si un determinado fenómeno aleatorio puede ocurrir de **n** modos posibles, todos equiprobables, y si en **p** de ellos ocurre un determinado evento **A**, la probabilidad de **A** es

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

20. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado honesto?
21. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 caras al lanzarse una moneda honesta 3 veces?
22. Un dado es lanzado dos veces.
- ¿Cuántos son los posibles resultados?
  - ¿Cuál es la chance de obtener un duplo 6?
  - ¿Cuál es la chance de obtener suma 7?
23. En una urna hay 5 bolas rojas y 4 negras, todas del mismo tamaño, y hechas con el mismo material. Retiramos dos bolas sucesivamente de la urna, sin reponerlas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean retiradas dos bolas rojas?
24. (OBMEP-2010) Cuatro equipos, entre los cuales el *Quixajuba*, disputan un campeonato de volei en que:
- Cada equipo juega contra cada uno de los otros una única vez;

- Cualquier partido termina con la victoria de uno de los equipos;
  - En cualquier partido, los equipos tienen la misma probabilidad de ganar;
  - Al final del campeonato, los equipos son clasificados en orden por el número de victorias.
- a) ¿Es posible que, al final del campeonato, todos los equipos tengan el mismo número de victorias? ¿Por qué?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el campeonato termine con el *Quixajuba* aislado en primer lugar?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el torneo termine con tres equipos empatados en primer lugar?

# Aplicaciones de Matemática y Física con Geogebra

Rubén Agapito y Edgardo Chunga <sup>1</sup>

## Resumen

*GeoGebra es un software de matemática para educación en todos sus niveles, que reúne dinámicamente, aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, física elemental y cálculo. Ofrece múltiples representaciones de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. En tanto GeoGebra es un sistema de geometría dinámica centrado en el tratamiento dinámico de objetos geométricos, conecta representaciones geométricas, algebraicas y numéricas interactivamente. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que, a posteriori, pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos. Así se pueden graficar funciones con facilidad, operar con deslizadores para investigar su comportamiento paramétrico, encontrar derivadas e integrales.*

## Pertinencia del tema abordado

Debido a cuestiones de tiempo en muchas de nuestras exposiciones en clase recurrimos a la intuición del estudiante. Gracias al uso del GeoGebra se puede hacer una exposición didáctica y dinámica de conceptos intuitivos gráficamente, con el objetivo de clarificar y ganar la confianza del alumno en el uso de una definición o teorema dado en pizarra. Es aquí en donde el

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

mismo estudiante puede contestar (o incentivar su curiosidad para preguntar) ¿qué sucede si cambio este dato?, ¿qué pasaría si pongo una parte de la figura en otro lado, si la achico, agrando, o si es rotada?

En un tiempo breve de clase, GeoGebra permite explicar en forma interactiva situaciones reales de un tema, así como brindar una cantidad suficiente de ejemplos, para que el estudiante pueda asimilar el contenido trazado por el profesor para una clase. GeoGebra, debido a su carácter gratuito, puede también ser usado en casa, lo cual permite al estudiante asimilar un concepto a su propia velocidad, cambiar datos, y con un poco de práctica, crear sus propios ejemplos para ilustrar el uso de un concepto o teorema, o verificar la validez de alguna conjetura que haya creado en su mente respecto a un tema en particular.

### **Marco teórico en el que se basa el trabajo**

Uso de las TIC para la enseñanza media y superior.

### **Contenidos matemáticos a tratar**

|                     |                                                                         |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Aritmética          | : Tanto por ciento – Razones y Proporciones.                            |
| Algebra             | : Sistemas de ecuaciones lineales – Productos Notables.                 |
| Geometría           | : Triángulos – Circunferencias.                                         |
| Trigonometría       | : Razones trigonométricas – Funciones trigonométricas de variable real. |
| Rzto. Matemático    | : Juegos de ingenio – Método deductivo.                                 |
| Física Elemental    | : Cinemática – Estática de fluidos.                                     |
| Cálculo Diferencial | : Noción de límite – Noción de derivada.                                |
| Cálculo Integral    | : Integral de Riemann – El logaritmo como integral.                     |
| Cónicas             | : Parábola – Elipse – Hipérbola.                                        |

**Desarrollo de algunos ejemplos (las figuras se adjuntan al final de este documento)**

Ejemplo 1: Representación de situaciones físicas de modo interactivo.

Se mostrará interactivamente que a velocidades constantes distintas, los alcances en un mismo tiempo son diferentes.

Ejemplo 2: Razones trigonométricas

Se mostrará interactivamente que en cualquier triángulo rectángulo si cambiamos las longitudes de sus lados se mantienen constantes las razones trigonométricas correspondientes a uno de sus ángulos.

Ejemplo 3: Sumas de Riemann.

Se mostrará interactivamente que se puede aproximar el área bajo una curva (ver figura) mediante sumas de áreas de rectángulos derechos, izquierdos y centrales; y que ésta aproximación se mejora cuando se incrementa el número de rectángulos.

### **Resultados Esperados**

- Incentivar en la audiencia la preparación de clases dinámicas con el uso del software GeoGebra.
- Mostrar con ejemplos, que el software no sólo se reduce a conceptos básicos de Geometría y Álgebra elemental, sino a temas que incluyen conceptos físicos y matemáticos de los primeros años de universidad.
- Con respecto al estudiante, promover en la audiencia la creación de tareas que puedan ser resueltas en casa por el estudiante. Esto debido a la proliferación de computadoras personales en casa, que muchas veces son sólo usadas por los jóvenes para chatear, chequear el correo, o tipear documentos.

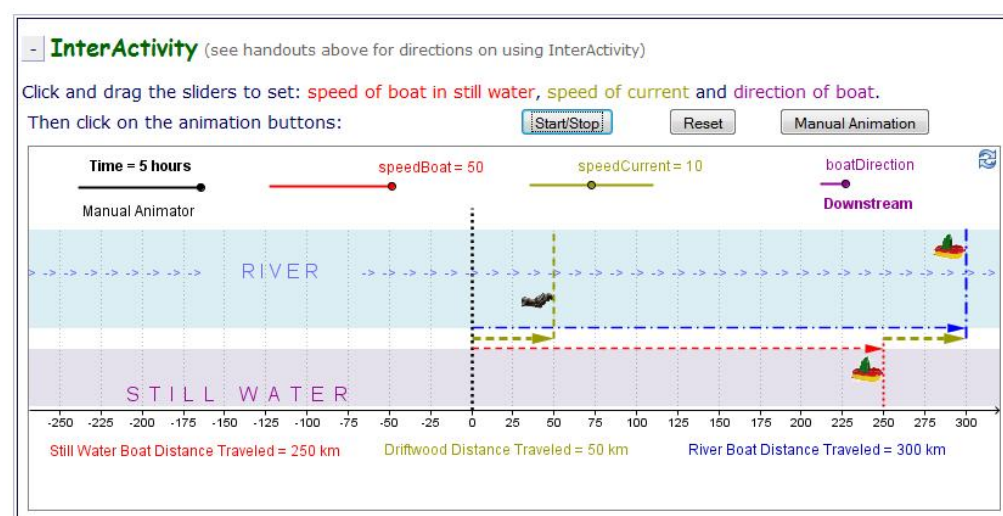
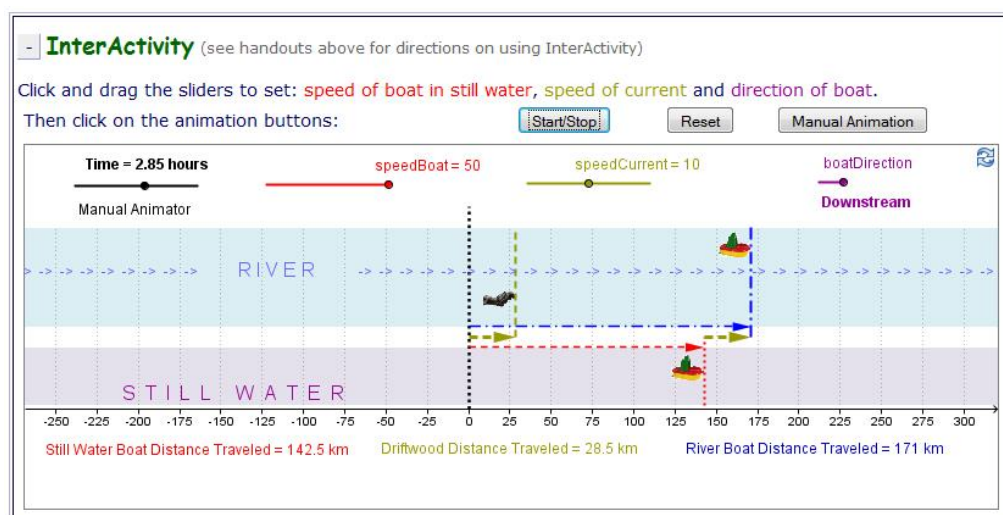
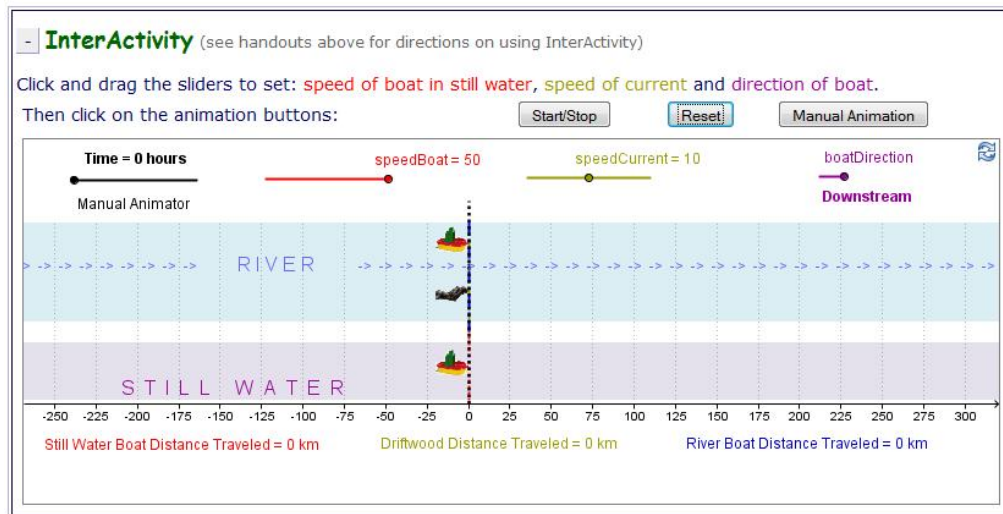
### **Referencias**

GeoGebra Developers. (2001-2009). GeoGebra en Castellano. Recuperado el 20 de noviembre de 2009, de GeoGebra: <http://www.geogebra.org/cms/>  
GeoGebra Users. (n.d.). Teaching Materials. Retrieved noviembre 20, 2009, from GeoGebraWiki: <http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/English>

Stewart, J. (2008). Calculus, Early Transcendentals (6th Edition ed.). CA: Thomson Brooks/Cole.

TRILCE, Asociación educativa. (2005). Compendio de Matemáticas TRILCE. Lima: TRILCE.

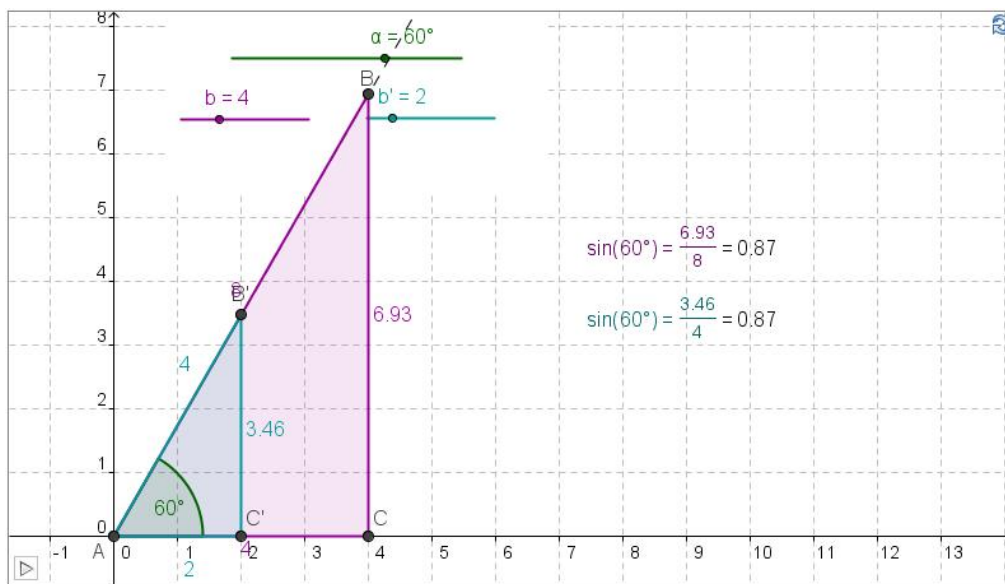
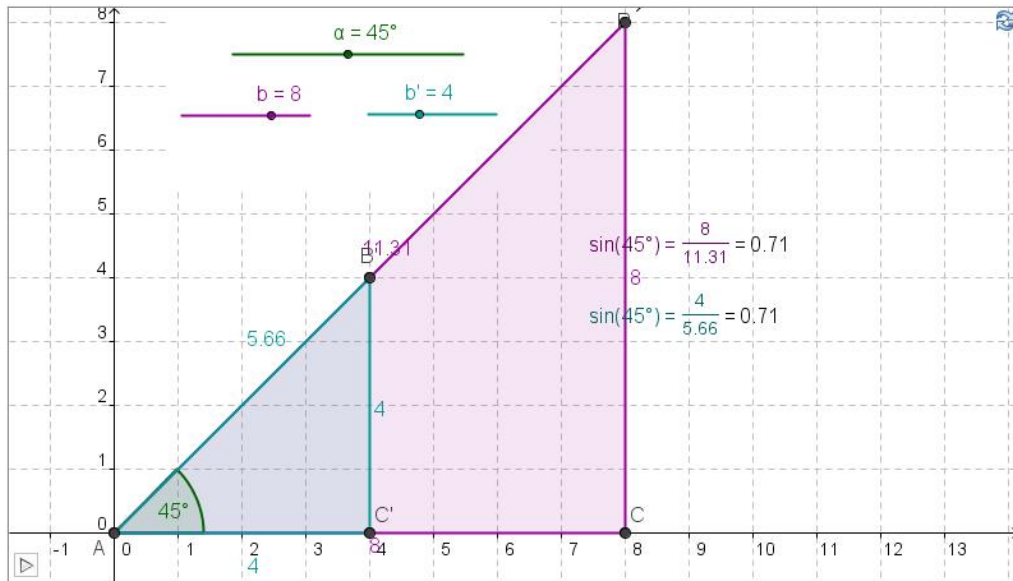
## Ejemplo 1: Representación de situaciones físicas de modo interactivo.

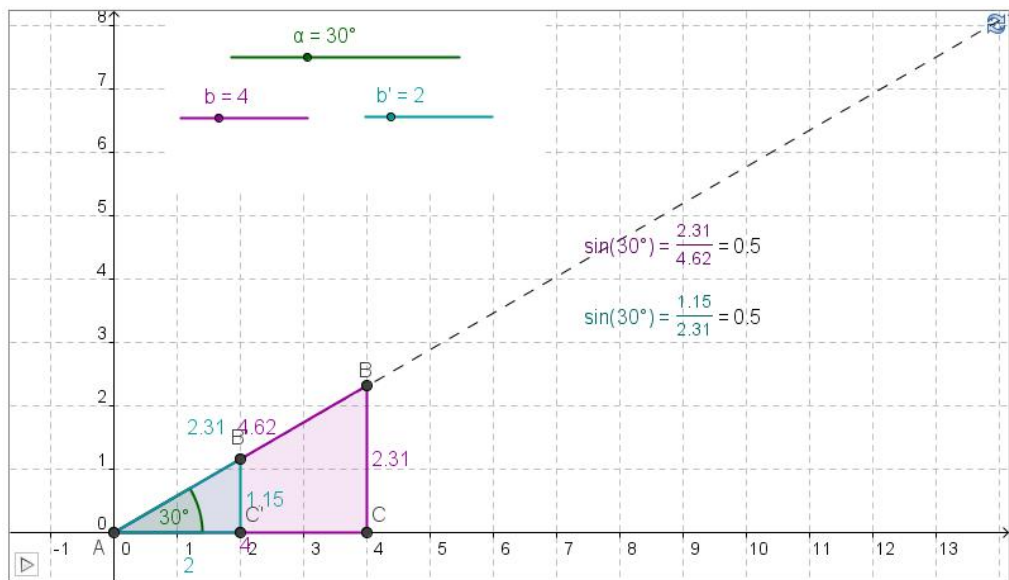
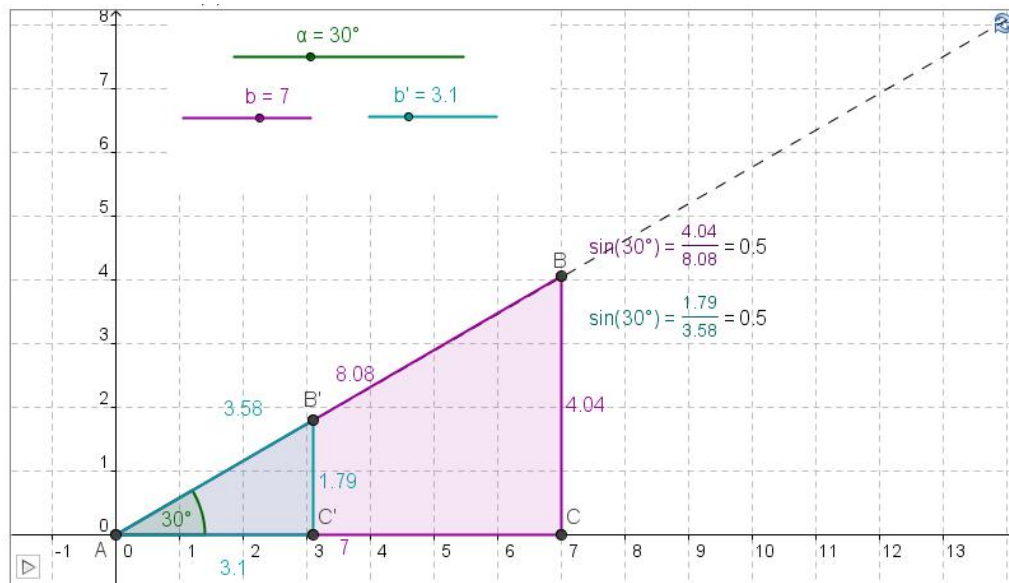




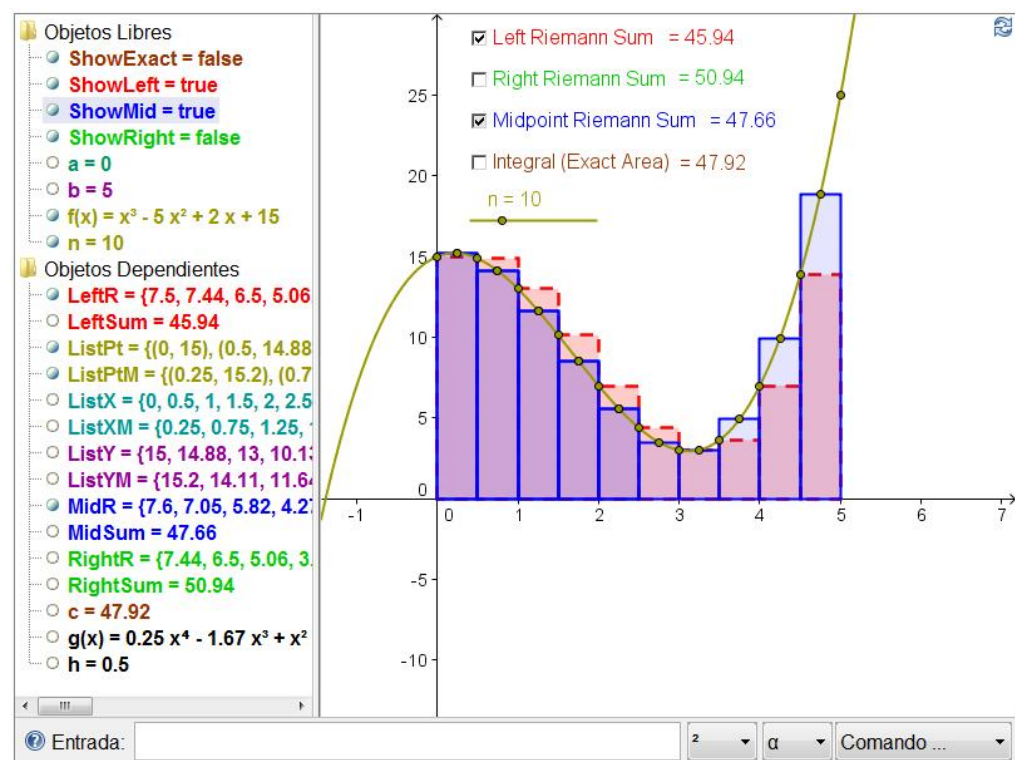
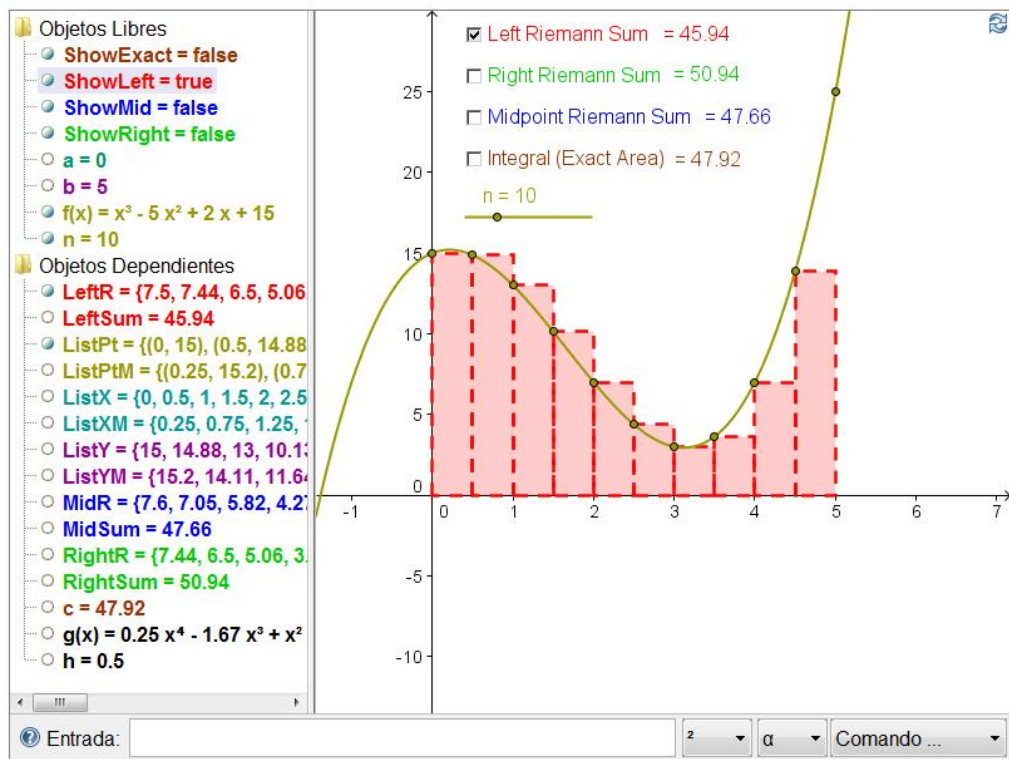


## Ejemplo 2: Razones trigonométricas

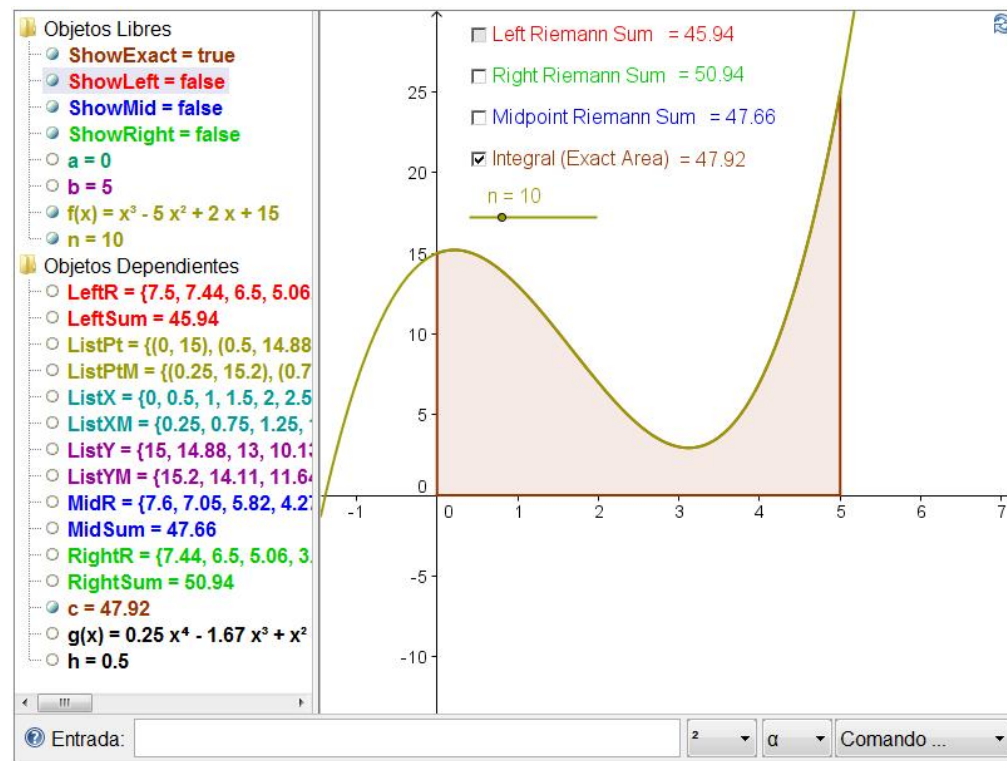
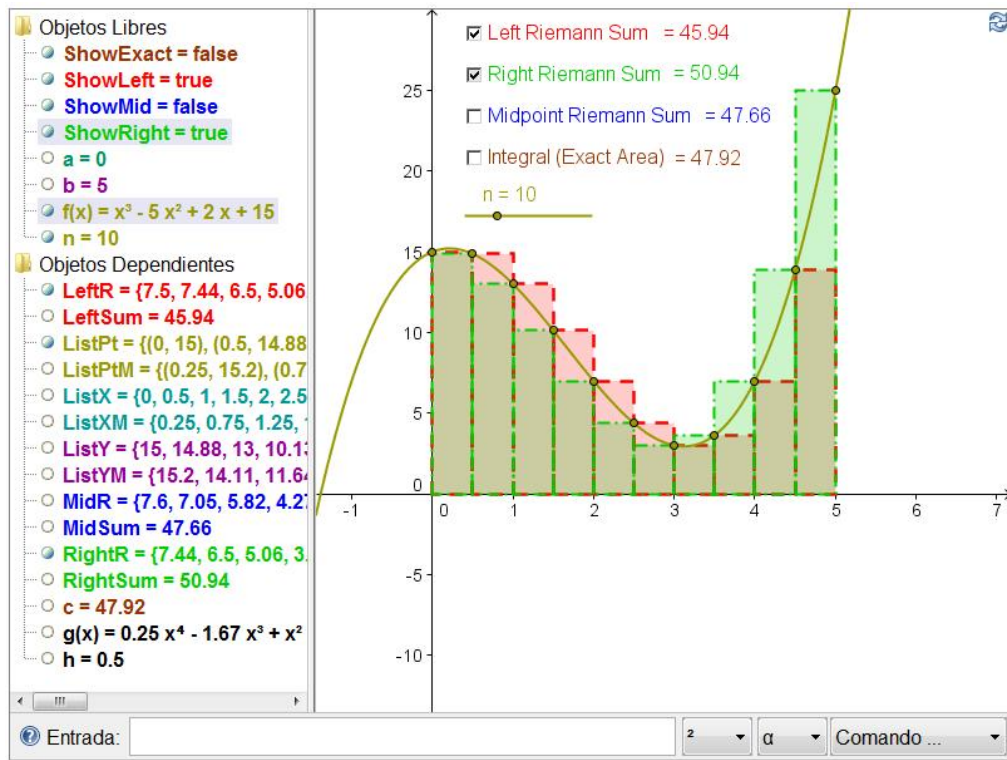




### Ejemplo 3: Sumas de Riemann







# Curvas y superficies con MATLAB

Mariano González y Roy Sánchez <sup>1</sup>

## Resumen

*Sabemos que las curvas y superficies son objetos representables en el plano y en el espacio tridimensional mediante funciones de una sola variable o de dos variables.*

*La representación gráfica en las computadoras facilita el estudio de las curvas y superficies. Mostraremos gráficamente las rectas tangentes a las curvas tanto en el plano como en el espacio tridimensional, así como los planos tangentes a las superficies y las curvas de nivel.*

*Palabras claves:* Curvas, superficies, gráficas por computadora, Matlab.

## Objetivo

El taller debe servir como una introducción a la construcción gráfica de curvas y superficies en las computadoras usando Matlab.

## Curvas

Al construir la gráfica de una función  $y=f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , se debe tener presente que Matlab dibuja las curvas punto a punto; es decir, calcula los puntos  $(x; f(x))$ , para los valores de  $x$  que se le indique, luego se unen dichos puntos mediante segmentos. Por ello, se empieza estableciendo la matriz fila  $x$  cuyos elementos son los valores de  $x$  para los que se calculará el valor correspondiente de  $f(x)$ . Si la distancia entre dos valores consecutivos de  $x$  es “suficientemente pequeña”, el aspecto final será el de una verdadera curva en lugar de una poligonal. El

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

comando *fplot*('f',[a,b]) grafica la función  $f$  en el intervalo  $[a,b]$  siendo  $f$  la regla de correspondencia.

Para crear otros gráficos bidimensionales también se usa *plot*( $x$ ,  $y$ ), donde los argumentos  $x$  e  $y$  son vectores con el mismo número de elementos.

Para representar una función del tipo  $y=f(x)$  con el comando *plot*, el usuario necesita crear primero un vector con los valores de  $x$  del dominio de la función. En seguida, crear el vector  $y=f(x)$  con los correspondientes valores de  $f(x)$  y finalmente graficar la función  $f$  con *Plot*( $x$ ,  $y$ ).

En el espacio de tres dimensiones la forma más sencilla de crear un gráfico 3-D es mediante la función *plot3*, cuya sintaxis es bastante similar a la de la función *Plot* en el plano.

Otro comando es  $x=\textit{linspace}(a, b, n)$  que crea el vector  $x$  de  $n$  elementos en el cual el primer elemento es  $a$  y el último es  $b$ , todos igualmente espaciados.

Existen otros comandos en Matlab para graficar funciones tales como *inline*, que transforma en función la cadena de caracteres. Por ejemplo, para graficar la función  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ , con *inline*('x.^2+y.^2','x','y') se crea la función  $f$ . En Matlab se usa el signo % para escribir los comentarios. Toda expresión después del signo % es ignorado por Matlab. También usaremos los comandos *subplot*, *contour*, *contour3*, *quiver*, *comet*, etc.

## Curvas en el plano

Empezamos graficando funciones reales continuas definidas en un intervalo. Si  $f$  es una función real de variable real, su gráfica es el conjunto

$$\text{Gr}(f) = \{(x;y)/y = f(x), x \in \text{Dom}(f)\}.$$

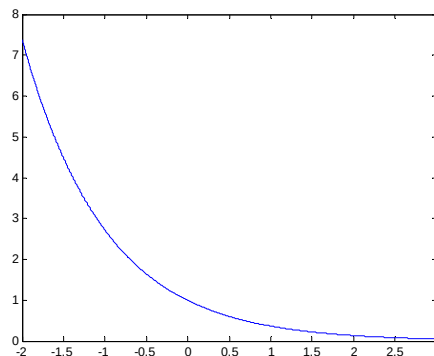
### Ejemplos

1. Sea la función  $f(x) = e^{-x}$ , para  $-2 \leq x \leq 3$ . La gráfica de esta función en Matlab se obtiene mediante la siguiente secuencia:

`x=linspace(-2,3,3000);` % divide el intervalo  $[-2,3]$  en 3000 partes y crea el vector  $x$  con esas componentes.

`y=exp(-x);` % crea el vector de la misma dimensión de  $x$ , que son las imágenes de las componentes de  $x$ .

Graficamos con `plot(x,y)`, `grid on`, `title('f(x)=exp(x)')`.



Otra forma de graficar  $f$ : `fplot('exp(-x)',[-2,3])`.

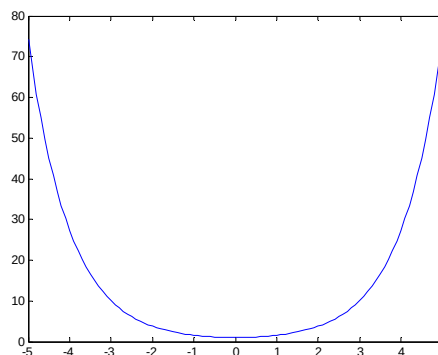
2. *Catenaria*. La función que describe esta curva es  $f(x)=\cosh(x)$ . Vamos a graficarla en el intervalo  $[-5,5]$ .

Su gráfica se obtiene directamente con:

`x=-5:0.1:5;` % crea el vector  $x$ .

`y=cosh(x);` % evalúa  $f$  en cada punto  $x$  de la división.

`plot(x,y)`.



3. Funciones seccionadas usando comandos lógicos. Consideremos la función



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ -x+3, & 1 \leq x \end{cases}$$

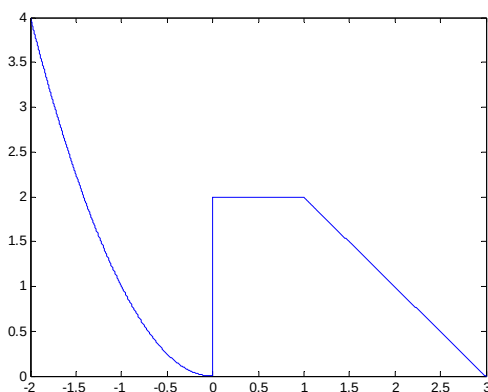
Para graficar seguimos los siguientes pasos:

`x=linspace(-2,3,3000);` % divide el intervalo [-2,3] en 3000 partes.

`y=(x.^2).*(x<0)+2.*((0<=x)&(x<1))+(-x+3).*(1<=x);`

%evalúa f usando índice lógico

`plot(x,y).`



4. Gráfica de dos funciones definidas en un mismo intervalo.  
Sean las funciones,  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$ , con  $x$  en el intervalo  $[0,10]$ .  
Con `fplot('[\sin(x),\cos(x)]',[0 10])` % gráfica de  $f$  y  $g$ .
5. Curva de Agnesi para  $a=2$  en  $y=a^3/(x^2+a^2)$ . Ejercicio.

### Curvas dependientes de un parámetro

Sea  $F(x, y)=0$  la ecuación cartesiana de una curva  $C$ . Si tanto  $x$  como  $y$  son funciones de una tercera variable  $t$ , entonces la curva queda representada por las ecuaciones

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I = [a, b],$$

denominadas ecuaciones paramétricas de  $C$  y  $t$  el parámetro.

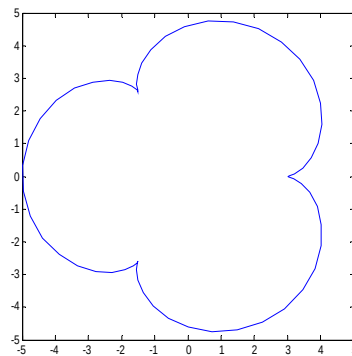
Para cada valor de  $t$ , las ecuaciones paramétricas determinan valores correspondientes de  $x$  y de  $y$ , siendo  $(x; y)$  un punto de la curva.

### *Ejemplos*

1. Sea la curva con ecuaciones paramétricas

$$C: \begin{cases} x(t) = 4\cos(t) - \cos(4t), & t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = 4\sin(t) - \sin(4t), \end{cases}$$

Su gráfica se obtiene según la secuencia  
`t=0:0.1:2*pi; % división del intervalo`  
`x=4*cos(t)-cos(4*t);`  
`y=4*sin(t)-sin(4*t);`  
`plot(x,y) % gráfica de C.`



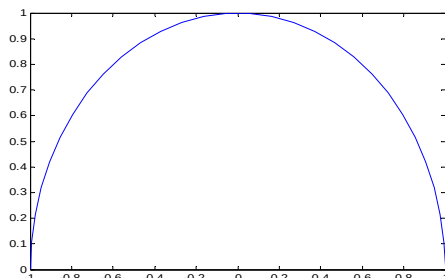
Si guardamos la secuencia anterior en un archivo con la extensión `.m`, tal archivo se puede invocar para graficar la curva en otro momento.

2. Sea  $C$  la semicircunferencia unitaria con ecuaciones paramétricas

$$C: \begin{cases} x(t) = \cos t, & t \in [0, \pi] \\ y(t) = \sin t, \end{cases}$$

Gráfica de  $C$ .

```
t=linspace(0,pi,30);
plot(cos(t),sin(t))
```



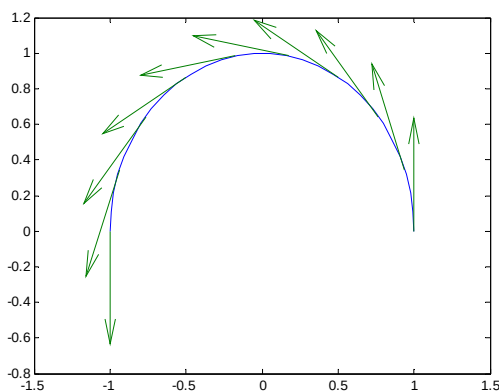
3. Vectores tangentes a la semicircunferencia anterior en 10 puntos de la curva.

A la semicircunferencia anterior le adicionamos los vectores tangentes con:

hold on % permite adicionar otros gráficos en el mismo sistema de coordenadas.

```
t=linspace(0,pi,10);
```

```
quiver(cos(t),sin(t),-sin(t),cos(t).% gráfica de vectores  
tangentes a la curva
```



*Nota.* `quiver3` grafica los vectores tangentes a una curva en el espacio.

4. *Folio de Descartes.* Definida por las ecuaciones

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, -1 < t$$

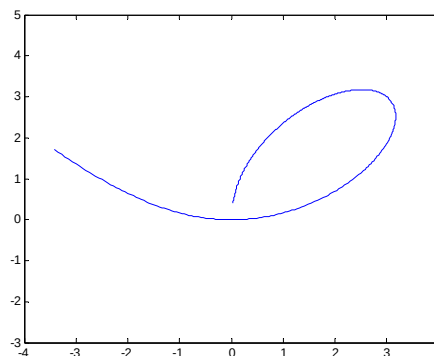
$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad a > 0.$$

Para  $a=2$  en el intervalo  $[-0.5, 45]$ , graficamos la curva

```
t=linspace(-0.5,45,2000);
```

```
x=6*t./(1+t.^3); y=6*t.^2./(1+t.^3);
```

```
plot(x,y)
```



## Curvas en coordenadas polares

Las coordenadas polares de un punto P las denotaremos por  $(r, \theta)$ , donde  $r$  representa el radio vector y  $\theta$  el ángulo polar.

### Ejemplos

1. *Cardioide*. Ecuación  $r = 1 + \cos(\theta)$  donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

```
teta=linspace(0,2*pi,60);
```

```
r=1+cos(teta);
```

```
polar(teta,r)
```

2. *Lemniscata de Bernoulli*.

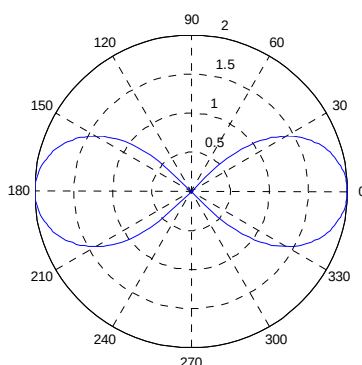
Generada por la ecuación  $r^2 = 4\cos(2\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

La gráfica se obtiene mediante

```
theta=linspace(0,2*pi,300);
```

```
r=sqrt(4*cos(2*theta)); % no considera los valores complejos de r.
```

```
polar(theta, r)
```



## Curvas en el espacio tridimensional

Existe una conexión muy estrecha entre las funciones vectoriales continuas de una variable con las curvas.

Una función vectorial  $\mathbf{r}$  definida sobre un intervalo  $I = ]a, b[$ , es una correspondencia entre los puntos de  $I$  con los vectores del espacio, mediante  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)); t \in I$ .

La función vectorial  $r$  es continua en  $t = c \in I$  si y solo si sus funciones componentes  $x, y, z$  son continuas en  $t = c$ .

### *Curvas paramétricas en el espacio tridimensional*

Sea  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , funciones reales continuas en el intervalo  $I$ . El conjunto  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I\}$  se denomina curva en el espacio.

Las ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in I$ , se llaman ecuaciones paramétricas de  $C$  y  $t$  el parámetro. En algunos casos es conveniente parametrizar la curva mediante el parámetro longitud de arco.

El vector posición de cada punto de la curva es la función vectorial de la curva. El vector  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)); t \in I$ , es el vector tangente (o vector velocidad) de la curva en  $t$ .

*Curva regular* es aquella que tiene recta tangente en cada uno de sus puntos.

### *Ejemplos*

1. *Hélice circular recta*. Sus ecuaciones paramétricas son

$x=\sin(t), y=\cos(t), z=t, t \in [0, 10\pi]$ .

La curva C es la que envuelve al cilindro  $S: x^2 + y^2 = 1$ .

Vamos a graficar C de dos formas.

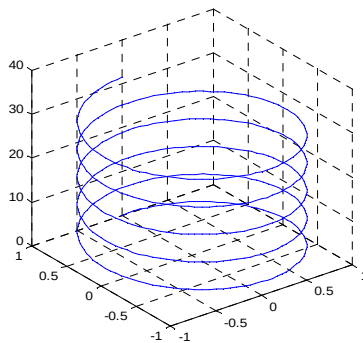
Usando *plot3*

```
t=0:pi/50:10*pi; %la longitud del intervalo es opcional
```

```
plot3(sin(t),cos(t),t)
```

```
grid on
```

```
axis Square.
```



Otra opción. *ezplot3*. Para ello, declaramos simbólicamente al parámetro t y graficamos con animación

```
syms t
```

```
x=cos(t);
```

```
y=sin(t);
```

```
z=t./(2*pi);
```

```
ezplot3(x,y,z,[0,10*pi],'animate') % sobre la curva C recorre un punto de color rojo con una velocidad proporcional a su módulo.
```

2. Hélice circular recta junto a vectores tangentes, con *quiver3*.

Sea la curva:  $x=\cos t, y=\sin t, z=\frac{t}{2\pi}, t \in [0, 10\pi]$ .

Gráfica de la curva con 20 vectores tangentes.

```
t=linspace(0,10*pi,101);
```

```
x=inline('cos(t)');
```

```
y=inline('sin(t)');
```

```

z=inline('t/(2*pi)');
plot3(x(t),y(t),z(t))% gráfica de la hélice.
hold on
for s=linspace(0,10*pi,20)
quiver3 (x (s) , y (s), z(s), - y(s), x (s), 1/(2*pi)) % vectores
tangentes
end
hold off
view(135,45).

```

*Curvas que resultan de la intersección de dos superficies.*

Existen muchos casos donde no se puede visualizar la curva que resulta de la intersección de dos superficies.

*Ejemplos*

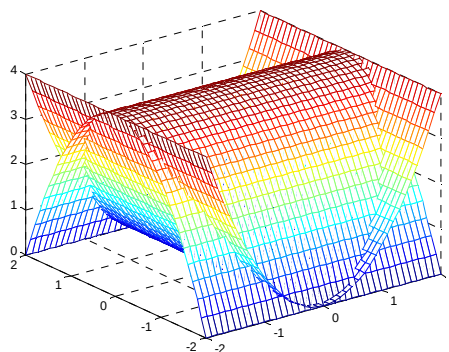
1. La intersección de los cilindros:  $z=x^2$  ,  $z=4-y^2$  es una curva en el espacio. Vamos a graficar las dos superficies y luego la curva intersección.

Gráfica de las superficies

```

[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);
z=x.^2; mesh(x,y,z) % primer cilindro
hold on % autoriza a la otra gráfica
z=4-y.^2; %segundo cilindro
mesh(x,y,z)

```



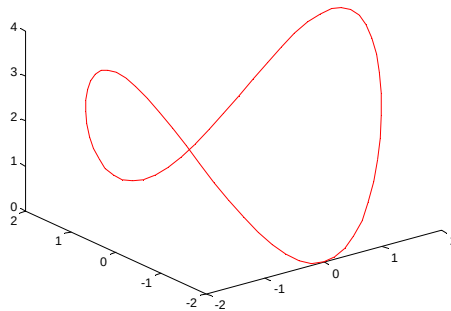
Ahora la curva de intersección

```

t=0:pi/32:2*pi;
u=2*cos(t);

```

```
v=2*sin(t);
w=4*(cos(t)).^2;
plot3(u,v,w,'r')
```



Para obtener la proyección de esta curva al plano XY, reemplazar  $w=0$  en `ones(1,65)`;

2. Sean las superficies  $S_1 : z=x^2+y^2$ ,  $S_2 : z=2+y$ .
  - a. Halle las ecuaciones paramétricas de la intersección de las dos superficies
  - b. Grafique la curva.

Proyectando la curva al plano XY, esto es, igualando las ecuaciones se obtiene  $x^2 + (y - 1/2)^2 = 9/4$ .

Ecuaciones paramétricas de la curva

$$x(t) = (3/2)\cos t$$

$$y(t) = (3/2)\sin t + (1/2)$$

$$z(t) = 5/2 + (3/2)\sin t. \text{ Reemplazando } y(t) \text{ en } z(t).$$

Gráfica de las dos superficies

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);% dominio D común.
```

$$z=x.^2+y.^2;$$

```
mesh(x,y,z)
```

```
hold on
```

$$z=2+y;$$

```
mesh(x,y,z)
```

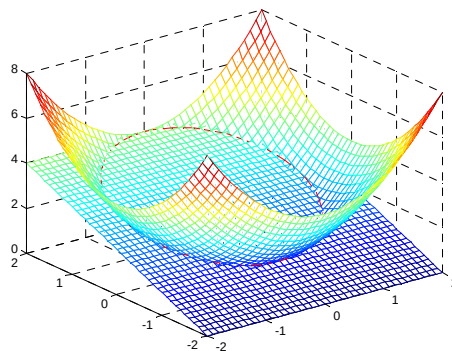
Grafica de la curva mediante



```

t=0:pi/32:2*pi;
u=1.5*cos(t);
v=1.5*sin(t)+0.5;
w=2.5*ones(1,65)+1.5*sin(t);
plot3(u,v,w,'r')%curva en rojo

```



### *Curvas de nivel*

Sea  $S$  una superficie representada por  $z=f(x; y)$ .

La importancia de las curvas de nivel radica en que trazando un número adecuado de ellas, podemos obtener una buena descripción de la superficie.

### *Ejemplo*

- Las curvas de nivel de la superficie  $S: z=f(x,y)=4x^2+y^2$  respecto al valor  $k$  son familias de elipses  $4x^2+y^2 = k$ ,  $k>0$ , concéntricas en el origen de coordenadas con semiejes  $\sqrt{k}/2$  y  $\sqrt{k}$ ,  $k>0$ .

Gráfica de la superficie y algunas curvas de nivel.

$$4x^2+y^2 = k \Rightarrow \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

Gráfica de la superficie y algunas curvas de nivel.

```

[x, y] = meshgrid (-2:1:2); % crea una malla en la región
[-2,2] x [-2,2].
z=4*x.^2+y.^2; % evalúa f.

```

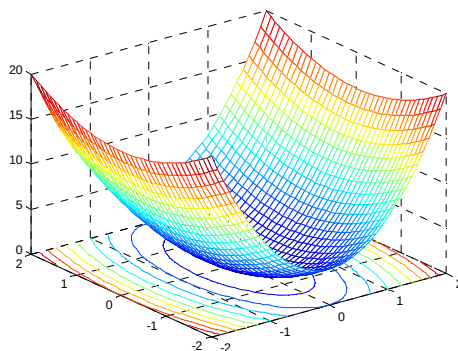
Varias opciones para graficar las curvas de nivel.

`contour(x,y,z,10)` % se obtiene 10 curvas de nivel en el plano XY.

`contour3(x,y,z,10)` % las curvas están ubicadas sobre la superficie.

`meshc(x,y,z)` % la superficie y las curvas de nivel proyectadas al plano XY.

La superficie y las curvas de nivel están graficadas con `meshc`.



## Superficies

En general cada uno de nosotros tenemos una idea de superficie. El plano es la superficie más simple de todas. Una idea intuitiva para construir otras superficies es ir pegando pedazos de plano por sus bordes hasta construir una aproximación a la superficie deseada. Por ejemplo, una pelota de fútbol de 32 paños es una buena aproximación a la esfera.

Una superficie  $S$  puede ser descrita como un conjunto de puntos  $(x; y; z)$  que satisfacen una ecuación de la forma  $f(x;y;z)=0$ , donde  $f$  es una función continua.

Si es posible despejar de la ecuación  $f(x; y; z) = 0$  una de las variables en función de las otras, se obtiene una representación explícita de  $S$  o de una parte de  $S$ . Si no es posible, se llama representación implícita de  $S$ .

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto

$Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 / z = f(x, y), (x, y) \in D\}$  donde  $D$  es una región conexa del plano.

El conjunto  $Gr(f)$  representa a una superficie  $S$  en el espacio de forma tal que su proyección sobre el plano  $XY$  es  $D$ , el dominio de  $f$ . En consecuencia, a cada punto  $(x; y)$  en  $D$  le corresponde un punto  $(x; y; z)$  en la superficie y, recíprocamente, a cada punto  $(x; y; z)$  en la superficie le corresponde un punto  $(x; y)$  en  $D$ .

*Definición.* Un subconjunto  $S$  de  $\mathbf{R}^3$  se denomina una superficie regular si para cada  $p$  en  $S$  existe una vecindad  $V \subset \mathbf{R}^3$  de  $p$ , un abierto  $U \subset \mathbf{R}^2$  y una biyección  $\varphi: U \rightarrow V \cap S$  con las siguientes propiedades:

1.  $\varphi \in C^\infty$
2.  $\varphi$  es un homeomorfismo ( $\varphi^{-1}: V \cap S \rightarrow U$  es continua).
3. Para cualquier  $q \in U$  la matriz jacobiana  $J\varphi(q)$  tiene rango dos.

### Gráfica de una superficie

Para graficar una superficie se debe tener en cuenta los siguientes pasos

1. Crear una malla o rejilla que cubra el dominio de  $f$ .
2. Calcular el valor de  $f(x; y)$  en cada punto  $(x; y)$  de la rejilla.
3. Ubicar en  $\mathbf{R}^3$  los puntos  $(x; y; f(x; y))$ .

Sea  $S: z=f(x; y)$  una superficie definida en el rectángulo  $D=[a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ .

1. Particionamos el rectángulo  $D$  en pequeños rectángulos de dimensiones  $\Delta x$  y  $\Delta y$ .

$$\text{Las longitudes son: } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ y } \Delta y = \frac{d-c}{m}$$

Esta partición genera un vector fila  $\mathbf{x}$  y un vector columna  $\mathbf{y}$  de  $n + 1$  y  $m + 1$  componentes, respectivamente

Los vértices de los rectángulos en la partición de  $D$  constituyen la malla de  $(m+1) \times (n+1)$  puntos.

2. Con esos puntos vamos a construir matrices  $X$  y  $Y$  de orden  $(m+1) \times (n+1)$ .

En Matlab, esas matrices se generan mediante:  
`[X,Y]=meshgrid(x,y).`

- 3 Ingresamos la función  $f(x; y)$  en Matlab mediante `f=inline('f(x,y)','x','y')`.
- 4 Evaluamos  $f$  en las matrices  $X$  y  $Y$  mediante `Z=f(X; Y)`.
- 5 Gráfica de la superficie `surf(X, Y, Z)`.

### Ejemplos

1. *Paraboloide elíptico.* La ecuación de la superficie,  
 $S: z=f(x,y)=10x^2+y^2, (x,y) \in D=[-5,5] \times [-4,4]$ .
  - a. Partición de  $D = [-5, 5] \times [-4, 4]$ , con subintervalos de longitudes  $\Delta x = \Delta y = 0.4$ . Se forma el vector fila `x=-5:0.4:5`; de  $n+1=26$  elementos y el vector columna `y=-4:0.4:4`; de  $m+1=21$  elementos.
  - b. `[X,Y]=meshgrid(x,y)%` construye matrices  $X$  y  $Y$ , cada una de ellas de orden  $(21) \times (26)$ .
  - c. `f=inline('10*x.^2+y.^2','x','y')%` ingresa  $f$
  - d. `Z=f(X,Y)%` evalúa  $f$  en los vectores  $X$  y  $Y$ .
  - e. `surf(X,Y,Z)%` gráfica de la superficie.  
Existen otras opciones para las superficies: `mesh(X,Y,Z)` o `plot3(X,Y,Z)`.
2. *Superficie embudo*  
La gráfica de la superficie  $S: z=\ln(x^2+y^2)$  que tiene forma parecida a un embudo.  
`[X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);`  
`Z=log(X.^2+Y.^2);`  
`mesh(X,Y,Z).`

Además de la superficie S se puede graficar, en el mismo sistema, n curvas de nivel.

```
[X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);
```

```
Z=log(X.^2+Y.^2);
```

```
meshc(X,Y,Z).
```

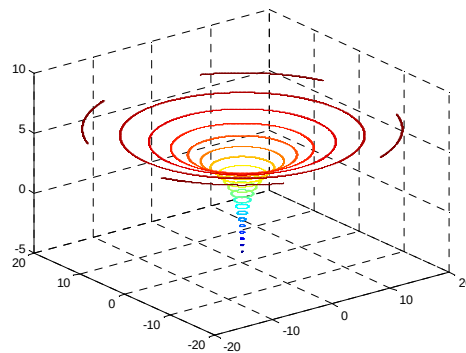
Gráfica de n curvas de nivel.

```
[X,Y]=meshgrid(-20:0.1:20);
```

```
Z=ln(X.^2+Y.^2);
```

```
contour3(X,Y,Z,20).% el número 20 indica el número de curvas.
```

Con `contour3` se ha graficado las 20 curvas de nivel que aparecen en la figura adjunta.



Otra opción es con `surf(x, y, z)`.

2. Gráfica de la superficie denominada “volcán”.

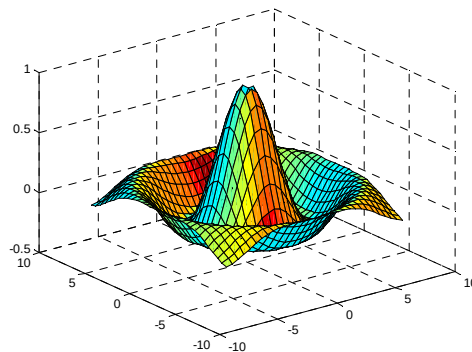
$$S: z = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La gráfica de S en Matlab, según la secuencia:

```
[x,y]=meshgrid(-7.5:0.5:7.5);
```

```
z=sin(sqrt(x.^2+y.^2))./sqrt(x.^2+y.^2);
```

```
surf(x,y,z);%dibujo con sombreado
```



Gráficas sombreadas se consigue con el comando shading interp.

### Superficies de revolución

Una superficie de revolución es la generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de la curva.

La curva plana se llama *generatriz*, y la recta fija *eje de revolución* o, simplemente eje de la superficie. Cualquier posición de la generatriz se llama *meridiano*, y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz se llama *paralelo* de la superficie.

Para determinar la ecuación de una superficie de revolución, no se pierde generalidad si se toma la generatriz en uno de los planos coordenados y como eje de revolución a uno de los ejes coordenados contenidos en ese plano.

Sea  $G$  la curva generatriz contenida en el semiplano superior  $YZ$ ,  $G : z=f(y) \geq 0$  y el eje de revolución el eje  $Z$ . Sea  $P(x;y;z)$ , un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por  $P$  corta a  $G$  en un punto del plano  $YZ$ , digamos  $Q(0;y';z')$ , y su centro  $A(0;0;z')$  está sobre el eje de revolución, el eje  $Z$ .

Por ser radios del mismo paralelo,  $|AP|=|AQ|$  entonces  $z' = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ . Además,  $P$  y  $Q$  están en el mismo plano, entonces  $z'=z$ . Como  $Q \in G : z'=f(y')$ .

Reemplazando  $y'$ ,  $z'$ , en  $z'=f(y')$  se obtiene la ecuación de la superficie de revolución  $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$

Graficaremos las superficies de revolución como si fueran superficies paramétricas, considerando a  $x$  e  $y$  como parámetros.

### Ejemplo

Sea la curva  $C: z=y^2$  en el plano  $YZ$ . Si el eje de rotación es el eje  $Z$ , halle la ecuación de la superficie de revolución que genera  $C$ .

### Solución

En el plano  $z=z_0$  se encuentra un paralelo, cuyo centro es  $A(0;0;z_0)$ .

El punto  $Q(0;y_0;z_0)$  es un punto que resulta de la intersección de  $C$  con el plano  $z=z_0$ . Si  $P(x; y; z)$  es un punto arbitrario de la superficie que se encuentra en el paralelo entonces  $|AP|=|AQ|$  y

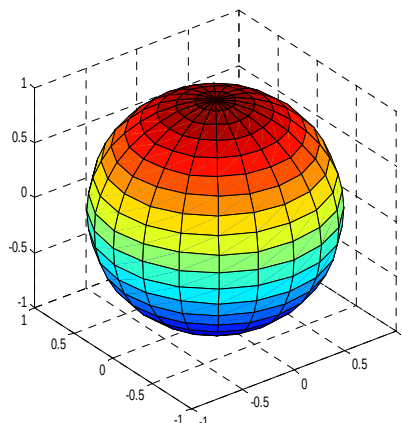
esto implica que  $|y_0|=\sqrt{x^2+y^2}$ . Como  $Q \in C: z_0=y_0^2$ , entonces la ecuación de la superficie es  $S:z=x^2+y^2$ .

### Superficies de revolución definidas en MatLab

Se pueden graficar directamente ciertas superficies de revolución conocidas como esferas, cilindros, elipsoides, etc.

*Esfera.* Su grafica se obtiene con el comando  $sphere(n)$ , donde  $n$  es el número de puntos en los que queda dividido tanto el ecuador como el meridiano principal. A raíz de esa división se grafica la esfera con  $n$  paralelos y  $n$  meridianos.

Con  $sphere(20)$  se obtiene el gráfico adjunto.



**Vectores normales** a una esfera. Se obtiene con

`[x,y,z]=sphere(20); surfnorm(x,y,z)`. Los vectores se ubican en cada punto de intersección de los paralelos con los meridianos.

*Cilindro.* Con el comando `cylinder(R, n)` se grafica automáticamente un cilindro de revolución de radio R con eje el eje Z y considerando n segmentos como generatrices. La circunferencia de la base del cilindro se divide en n puntos, por donde pasan dichas generatrices.

Lo *más importante* de esta aplicación es que se puede graficar superficies de revolución que tienen el perfil de la curva  $r=r(t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

### Superficies Paramétricas

Una superficie S puede ser representada por una función vectorial  $r(u,v) = (x, y, z)$ , donde  $(u,v) \in D$ , región conexa del plano. Las funciones x, y, z dependen de los parámetros u y v. A las ecuaciones

$$x=x(u,v),$$

$$y=y(u,v),$$

$$z=z(u,v),$$

se denomina ecuaciones paramétricas de S.

#### Ejemplos

1. Superficie de revolución con perfil la curva definida por  $r=\sqrt{t}$ ,  $t \in [0,2]$ .

$$t=\text{linspace}(0,2,20);$$

$$r=\text{sqrt}(t);$$

$$\text{cylinder}(r)$$

$$\text{xlabel}('t'); \text{ylabel}('r(t)'); \text{zlabel}('z(t,r)').$$

2. Superficie de revolución de perfil  $2+\cos t$

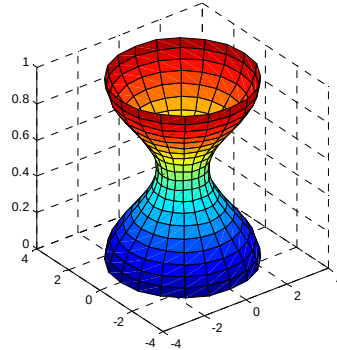
$$t = 0:\pi/10:2*\pi;$$

$$[X,Y,Z] = \text{cylinder}(2+\cos(t));$$

$$\text{surf}(X,Y,Z)$$



```
axis square
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z').
```



### 3. Cilindro como superficie de revolución

```
r=(0:0.1:2*pi)';
t=-pi:0.1:2*pi;
X=cos(r)*sin(t);
Y=sin(r)*sin(t);
Z=ones(1,size(r))'*t;
surf(X,Y,Z)
axis square
```

### 4. El Toro. Considere en $R^3$ la circunferencia $C=\{(x,y,z):(y-2)^2+z^2=1, x=0\}$ .

Al rotar  $C$  alrededor del eje  $Z$  se obtiene el toro.

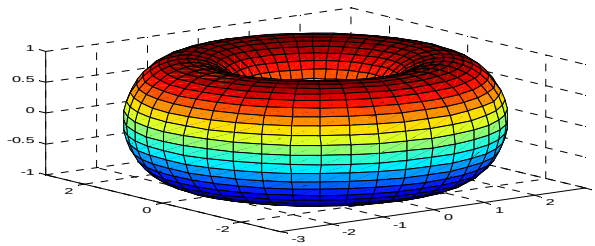
Una parametrización está dada por:

$$\varphi(u,v) = (\cos u(2+\cos v), \sin u(2+\cos v), \sin v).$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Gráfica del toro.

```
u=linspace(0,2*pi,41); v=u;
[U,V]=meshgrid(u,v);
X=cos(U).*(2+cos(V));
Y=sin(U).*(2+cos(V));
Z=sin(V);
surf(X,Y,Z)
axis([-3 3 -3 3 -1 1])
```



5. Identifique y dibuje la superficie  $S$  generada por

$$\mathbf{r}(u,v) = 2\cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + 2\sin u \mathbf{k}.$$

Las ecuaciones paramétricas de  $S$ :  $x(u,v)=2\cos u$ ,  $y(u,v)=v$ ,  
 $z(u,v)=2\sin u$ .

Identificamos a  $S$  eliminando los parámetros  $u$  y  $v$ .

$$x^2 + z^2 = 4, y = v.$$

La superficie es un cilindro circular de radio 4, con eje el eje  $Y$ . La variable  $y=v$  puede tomar cualquier valor real.

Para graficar en Matlab restringimos los parámetros a,  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq 4$ .

Ahora la superficie es un cilindro circular recto de radio 2 y altura 4.

$u=(0:0.1:2*\pi)'$ ; %vector columna de m elementos

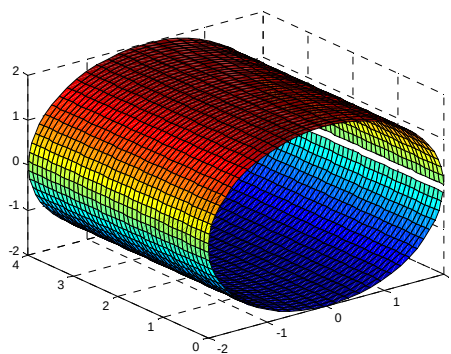
$v=0:0.1:4$ ; %vector fila de n elementos

$X=2*\cos(u)*\text{ones}(\text{size}(v))$ ;

$Y=\text{ones}(\text{size}(u))*v$ ;

$Z=2*\sin(u)*\text{ones}(\text{size}(v))$ ;

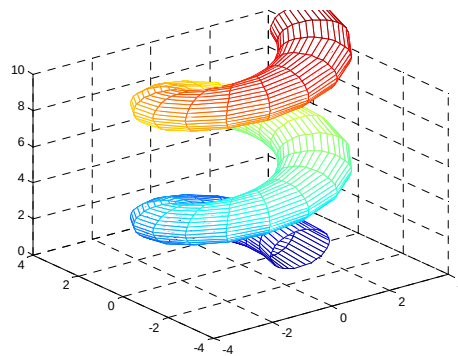
$\text{surf}(X,Y,Z)$



6. Superficie “Boa Amazónica” o “Tobogán”, se obtiene variando la gráfica del toro.

```
u=(0:pi/8:4*pi)';%vector columna de m=33 elementos
v=0:pi/16:2*pi;%vector fila de n=33 elementos
X=cos(u)*(2+sin(v));%X, Y y Z son matrices de orden
mxn=33x33
Y=sin(u)*(2+sin(v));
Z=u*ones(size(v))+ones(size(u))*cos(v);
mesh(X,Y,Z)%surfl(X,Y,Z)%surf(X,Y,Z)
axis([-4 4 -4 4 0 10])
```

*Nota.* Se multiplica por *ones(size())* en Z para la consistencia de multiplicación de matrices.



7. El unicornio. Ecuaciones paramétricas:

$$x = 2[1 - e^{u/(6\pi)}] \cos(u) \cos^2\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$y = 2[-1 + e^{u/(6\pi)}] \sin(u) \cos^2\left(\frac{v}{2}\right),$$

$$z = 1 - e^{u/(3\pi)} - \sin(v) + e^{u/(6\pi)} \sin(v).$$

$$0 \leq u \leq 6\pi \text{ y } 0 \leq v \leq 2\pi.$$

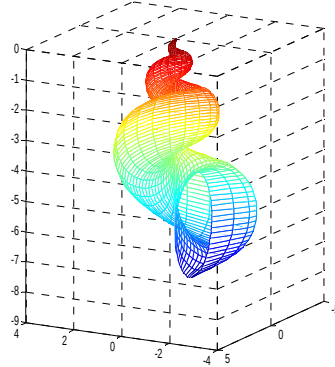
La gráfica en Matlab

```
u=linspace(0,6*pi,60);
v=linspace(0,2*pi,60);
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=2*(1-exp(u/(6*pi))).*cos(u).*cos(v/2).^2;
y=2*(-1+exp(u/(6*pi))).*sin(u).*cos(v/2).^2;
```

```

z=1-exp(u/(3*pi))-sin(v)+exp(u/(6*pi)).*sin(v);
mesh(x,y,z)

```

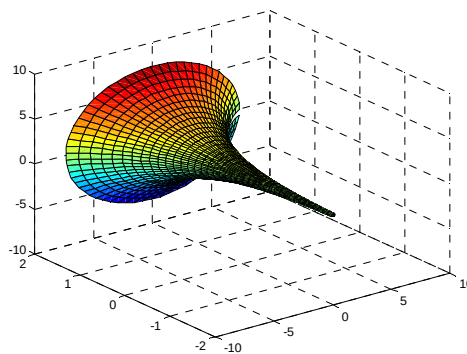


### 8. *Trompeta de Gabriel*

```

u=(-2:0.1:2)';
v=0:0.1:2*pi;
X=exp(u)*cos(v);
Y=u*ones(size(v));
Z=exp(u)*sin(v);
surf(X,Y,Z)
xlabel('v');ylabel('u');zlabel('z')

```



9. Dos cilindros perpendiculares, uno de ellos tiene como eje el eje Z y radio 1 y el otro tiene como eje el eje Y y radio 1/2.

Cilindro de radio 1.

```

x=cos u
y=sin u
z=v

```

Cilindro de radio  $\frac{1}{2}$ .

$$x=(1/2)\cos u$$

$$y=v$$

$$z=(1/2)\sin u$$

Gráfica en Matlab.

```
u=linspace(0,2*pi,41);
```

```
v=linspace(-2,2,41);
```

```
[U,V]=meshgrid(u,v);
```

```
%Cilindro de radio 1
```

```
surf(cos(U),sin(U),V);
```

```
hold on
```

```
%Cilindro de radio 1/2
```

```
surf(0.5*cos(U),V,0.5*sin(U));
```

10. *La Cinta de Möbius*. Es una superficie que se puede construir a partir de una tira de papel de forma rectangular ABCD. Torciendo la tira, una sola vez, de manera que se haga coincidir el vértice A con el vértice C y el vértice B con el vértice D obteniendo la superficie mencionada.

Se genera con la función vectorial  $r(u,v)$  definido por

$$\left[ \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \right],$$

$$0 \leq u \leq 2\pi; -1 \leq v \leq 1.$$

La gráfica en Matlab.

```
u=linspace(0,2*pi,30);
```

```
v=linspace(-1,1,15);
```

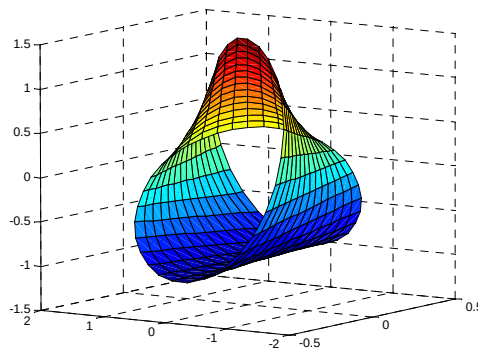
```
[u,v]=meshgrid(u,v);
```

```
z=(1+v/2.*cos(u/2)).*cos(u);
```

```
y=(1+v/2.*cos(u/2)).*sin(u);
```

```
x=v/2.*sin(u/2);
```

```
surf(x,y,z)
```



11. *Superficies tubulares.* A partir de una curva conocida vamos a generar una superficie tubular. Sean las ecuaciones de la hélice circular recta.

$x=\cos(t)$ ,  $y=\sin(t)$  y  $z=t/2$ , con  $t$  en  $[0, 4\pi]$ .

La superficie se forma considerando como eje la hélice circular.

Sus ecuaciones paramétricas, con  $t=u$ , son

$$X = \cos(u) - 0.5\cos(u)\cos(v) + (0.5/\sqrt{5})\sin(u)\sin(v)$$

$$Y = \sin(u) - 0.5\sin(u)\cos(v) - (0.5/\sqrt{5})\cos(u)\sin(v)$$

$$Z = 0.5u - (1/\sqrt{5})\sin(v)$$

La gráfica en Matlab.

%Superficies tubulares: eje la hélice circular recta.

$u=(0:\pi/8:4*\pi)'$ ; %vector columna de  $m=33$  elementos

$v=0:\pi/16:2*\pi$ ; %vector fila de  $n=33$  elementos

$X=\cos(u)*\text{ones}(\text{size}(v)) -$   
 $\cos(u)*\cos(v) + 1/\text{sqrt}(5)*\sin(u)*\sin(v);$

$Y=\sin(u)*\text{ones}(\text{size}(v)) - \sin(u)*\cos(v) -$   
 $1/\text{sqrt}(5)*\cos(u)*\sin(v);$

$Z=u/2*\text{ones}(\text{size}(v)) + 2/\text{sqrt}(5)*\text{ones}(\text{size}(u))*\sin(v);$

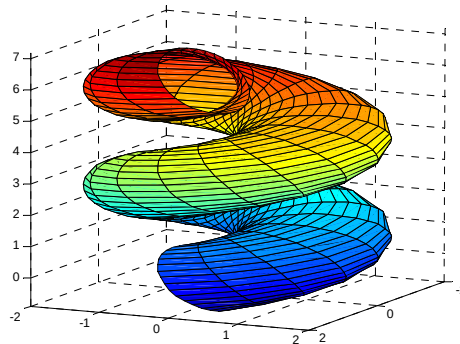
$\text{surf}(X,Y,Z)$  % otras opciones  $\text{mesh}(X,Y,Z), \text{surfl}(X,Y,Z)$

$\text{axis}([-2 \ 2 \ -2 \ 2 \ -2 \ 10])$

$\text{view}(50,30)$

$\text{axis tight}$

$\text{axis}([-2 \ 2 \ -2 \ 2 \ -2 \ 10])$



12. En las ecuaciones paramétricas de un elipsoide perturbamos un poco en la dirección x, para generar la gráfica de un plátano.

Sean las ecuaciones paramétricas de un elipsoide

$$x(u,v) = \cos(u)\cos(v)$$

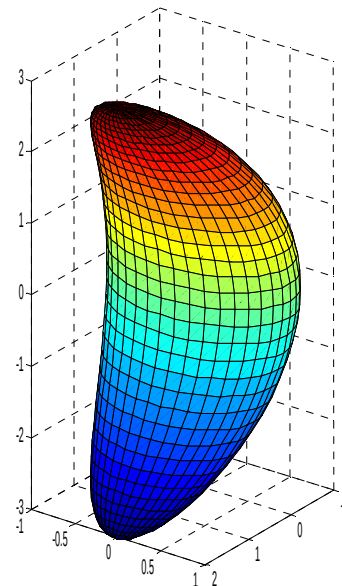
$$y(u,v) = \sin(u)\cos(v)$$

$$z(u,v) = 3\sin(v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi; -(\pi/2) \leq v \leq (\pi/2).$$

Alteramos un poco en la primera ecuación por  $x(u,v) = \cos(u)\cos(v) + 2\sin^2(v)$ .

La gráfica del plátano se obtiene de las siguientes instrucciones.

```
u=linspace(0,2*pi,41);
v=linspace(-0.5*pi,0.5*pi,41);
[U,V]=meshgrid(u,v);
X=cos(U).*cos(V)+2*sin(V).^2;
Y=sin(U).*cos(V);
Z=3*sin(V);
surf(X,Y,Z)
axis([-1 2 -1 1 -3 3])
```



### Ejercicios

1. Sea la función  $f(x) = 4\arctan(x)$  definida en el intervalo cerrado  $[-5,5]$ . La grafica de  $f$  en dicho intervalo con `fplot('atan(x)',[-5,5])`.

2. La Cicloide. Las ecuaciones paramétricas son.

$$C: \begin{cases} x(t) = t - \sin(t), & t \in [-2\pi, 4\pi] \\ y(t) = 1 - \cos(t), \end{cases}$$

La deducción de estas ecuaciones se puede encontrar en el texto de Ch. Lehmann [1980].

```
t=-2*pi:0.1:4*pi;
```

```
x=t-sin(t);
```

```
y=1-cos(t);
```

```
plot(x,y)
```

```
axis([-2 8 0 2])% para la escala en los gráficos.
```

3. Grafique la curva en coordenadas polares  $r = 2(1 - \cos(\theta))$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
4. Halle la gráfica de la rosa de 4 pétalos  $r = 4\sin(2\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
5. Las gráficas de las siguientes ecuaciones se asemejan al de una mariposa. Fueron descubiertas por Temple H. Fay en 1989.

1.  $r = e^{\cos \theta} - 2\cos(4\theta)$ .

2.  $r = e^{\cos \theta} - 2\cos(4\theta) + \sin^5(\theta/12)$ ,  $0 \leq \theta \leq 24\pi$ .

Visitar la página:

<http://revistas.pucp.edu.pe/enblancoynegro/numeros-publicados>

6. Grafique la superficie  $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$  con la siguiente secuencia en Matlab.
- ```
x=linspace(-2,2,30);
y=linspace(-2,2,30);
[x,y]=meshgrid(x,y);
z=sin(sqrt(x.^2+y.^2));
mesh(x,y,z)
axis tight
view(120,30)
```



7. Grafique la superficie

$$\begin{aligned}x(u,v) &= u \cos v \\y(u,v) &= u \sin v \\z(u,v) &= v \\0 \leq u \leq 8\pi, 0 \leq v \leq 4.\end{aligned}$$

8. Cilindro transparente.

Un cilindro de altura 1 y radio r, transparente con cylinder de Matlab

t=input('dame t'); Número de generatrices que corta a la circunferencia base.

r=input('radio');

[x,y,z]=cylinder(r,30);

surf(x,y,z,'FaceAlpha','flat','AlphaDataMapping','scaled',...  
'AlphaData', gradient(z),'FaceColor','red').

9. Grafique el elipsoide de ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos(u) \sin(v), \quad y = 4 \sin(u) \sin(v), \quad z = 5 \cos(v), \quad u \in [0, 2\pi] \text{ y} \\v &\in [0, \pi].\end{aligned}$$

10. Grafique el hiperboloide de dos hojas

$$\begin{aligned}x &= \sinh(u) \cos(v), \quad y = \sinh(u) \sin(v), \quad z = \cosh(u), \quad u \in [-2, 2] \text{ y} \\v &\in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

11. Pseudoesfera con ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= \cos(u) \sin(v), \\y &= \sin(u) \sin(v), \\z &= \cos(v) + \ln(\tan(v/2)), \quad u \in [0, 2\pi] \text{ y } v \in [0, \pi].\end{aligned}$$

## Conclusiones

- En este taller mostramos las cualidades del software Matlab, programa que nos ayudó a visualizar las curvas y superficies en las computadoras en el espacio de tres dimensiones.
- Para comprender mejor las propiedades de las curvas y superficies es necesario representar gráficamente en la

computadora a sus vectores tangentes, a las curvas de nivel, a las curvas generatrices, a las directrices, etc.

- Matlab ayuda a entender mejor el Análisis Matemático y facilita el cálculo de las longitudes de arco, áreas, volúmenes y otros cálculos
- Es posible profundizar en las investigaciones sobre superficies tubulares y sobre las superficies en cuatro dimensiones.

### **Bibliografía**

1. Lehmann Ch. *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, México, 1980.
2. Lang Serge. *Cálculo I y II*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
3. Marchand, P., Holland, T. *Graphics and GUIs with MATLAB*, editorial Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2003.
4. Manfredo Do Carmo, *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Alianza Editorial 1976
5. González, Mariano  
<http://macareo.pucp.edu.pe/~mgonzal/publicaciones archivos/Superf Tub.pdf>



# Estadística aplicada a la investigación

Elda Micheli <sup>1</sup>

## **Resumen**

*La Estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Esta relevancia ha producido un interés creciente por la enseñanza de la Estadística, como se refleja en diferentes documentos curriculares, donde se insiste en la necesidad de comenzar lo antes posible, y, al menos, en la educación secundaria obligatoria con la enseñanza de la misma.*

*Todo ello convierte a la Cultura Estadística en un requerimiento de formación necesario en un número creciente de personas, provocando una gran demanda de formación básica en esta materia que tiene como punto de partida la práctica del método científico en procesos y desarrollos tecnológicos en el ambiente áulico. En el desarrollo del taller se presentará una visión general de los métodos estadísticos que permiten describir a los individuos según las variables de interés*

## **Conceptos Generales**

La concepción profana de la Estadística suele incluir en su concepto la recopilación de grandes masas de datos y su presentación en cuadros y gráficos, así como el cálculo de totales, promedios, porcentajes, entre otros. Esta concepción resulta simplista, considerando que estas operaciones más o menos rutinarias constituyen solamente parte incidental de la Estadística de hoy.

Los métodos y procedimientos de la Estadística como ciencia, se utilizan en diversos campos técnicos y científicos. Muchos

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional del Comahue- Argentina

estudiosos o investigadores, sean personas de negocios, empresarios, profesionales, administradores públicos o privados, trabajando en un entorno propio a su actividad requieren información sobre características o comportamientos de dicho entorno, tanto para progresar en el conocimiento del problema, indagar sus causas, como para tomar decisiones.

Es función del estadístico recopilar y caracterizar información con análisis sencillos o más profundos y complejos, dependiendo esto último de la cuestión a estudiar y de los objetivos especificados para su análisis. En algunos casos el avance en el uso de las herramientas informáticas facilita el almacenamiento masivo y la disponibilidad de información, en otros, se deberá recurrir a operativos específicos para su obtención.

- La Estadística es la *ciencia de la experimentación*; el conocimiento de las Técnicas Estadísticas ayuda a tratar datos experimentales y a programar experimentos de una forma más eficiente.

Utilizando el término experimentación en su acepción más amplia, se debe entender que la Estadística proporciona no solo métodos de análisis de datos disponibles, sino que, también, contribuye a la planificación y organización de las tareas inherentes a la obtención de información. Al aplicar sus procedimientos se alcanza en cada etapa: mayor eficacia, mínimo error, aumento del rendimiento, economía en material, personal y tiempo empleado, entre otras cuestiones.

- Se describe a la Estadística como la *tecnología del método científico* que proporciona instrumentos válidos para la toma de decisiones, cuando prevalecen condiciones de incertidumbre. Estos instrumentos pueden ser de aplicación completamente general y útiles en cualquier campo de la ciencia: físico, biológico ó social.

Mediante el razonamiento y en algunas situaciones la intuición el método científico busca llegar a la verdad, para ello a partir de la teoría pertinente, aplica un razonamiento deductivo o simplemente la inducción. En muchos planteos no

determinísticos, la experimentación es el punto de partida para el avance en el conocimiento científico; para estas situaciones el principio básico que se sustenta es: la evaluación debe ser objetiva y controlada. Para ello se plantean hipótesis y se diseñan experimentos adecuados, contrastando de manera objetiva dichas hipótesis. Los resultados proporcionados por el experimento se analizan estadísticamente y así se desecha o no la hipótesis planteada.

Sucintamente se puede decir que a los efectos de estudiar la Estadística como disciplina aplicada a desarrollos experimentales y como instrumento de apoyo en la generación de nuevos conocimientos, se señalan tres aspectos característicos del método científico: 1) Ejecución de experimentos, 2) Obtención de conclusiones objetivas a partir de los experimentos, 3) Construcción de leyes que simplifiquen la descripción de conclusiones fundadas en amplias clases de experimentos.

En este esquema, la Estadística participa robustamente en los dos primeros de estos aspectos, a través del *Diseño Experimental*, *la Estadística Metodológica* y *la Estadística Inferencial*.

- *Estadística Descriptiva* es el conjunto de métodos y procedimientos que permiten la recopilación, presentación y análisis de datos, referidos a conjuntos de unidades de observación que interesa investigar; esto se realiza con el objeto de describir en forma apropiada las diversas características de las mismas.

Cuando al recopilar información la finalidad deja de ser una actividad meramente descriptiva del conjunto de datos disponibles y se desea concluir respecto al conjunto mayor de unidades de referencia, esta actividad corresponde a la Estadística Inferencial. En esta situación la Estadística plantea y resuelve temas inherentes a estimar características o parámetros poblacionales (conjunto mayor) sobre la base de datos observados de una muestra (conjunto menor). También realiza predicciones evaluando tendencias para un futuro

inmediato o mediato, analizando el comportamiento pasado y presente.

En todas éstas y otras aplicaciones siempre se trabajará con cierto grado de incertidumbre por tratarse de una estimación o pronóstico. Sin embargo, queda claro que el principio básico que se sustenta es: las predicciones confiables son necesarias en la toma de decisiones.

Ante interrogantes que se plantea el investigador en el campo de la experimentación, tales como ¿hasta qué punto es posible generalizar?, ¿con qué grado de incertidumbre se está trabajando?, los métodos estadísticos aportan las herramientas para atender estas exigencias.

El aporte más importante que realiza la Estadística como ciencia es que proporciona métodos de análisis que brindan una medida de precisión en sus conclusiones. El lenguaje formal para expresar esta incertidumbre será una medida de probabilidad, como se explicará en capítulos subsiguientes.

- *Estadística Inferencial* es el conjunto de métodos que posibilitan la estimación o pruebas de hipótesis, referidas a características de la población, sobre la base de la información obtenida a partir de una muestra. La comprensión acabada de esta definición se logrará al finalizar la lectura del texto.

Las restricciones, a las que están sometidas ciertas experiencias o investigaciones, provocan que las observaciones sólo puedan realizarse a un número reducido de individuos. En consecuencia los resultados obtenidos corresponderán a ese conjunto de observaciones realizadas. Dada esta situación, es evidente que ninguna investigación tendría trascendencia si sus conclusiones sólo fueran válidas para los elementos que han sido seleccionados como grupo representativo y no pudieran generalizarse al resto.

Realizada esta breve discusión, es posible enunciar la definición conceptual de la ciencia que nos ocupa, en su acepción más amplia.

*La Estadística como disciplina, permite aplicar y desarrollar métodos lo más eficientes posibles para: Recopilar, Organizar, Presentar, Analizar e Interpretar la Información Estadística, datos u observaciones, de tal forma que los errores que se puedan cometer al sacar conclusiones y al hacer estimaciones sobre la base de esos datos observados, puedan ser evaluados a partir de un razonamiento inductivo fundamentado en la Teoría de Probabilidades.*

Para poder introducir los procedimientos básicos de la Estadística como disciplina, es necesario acordar y acotar algunos conceptos, como así también en algunos casos enunciar definiciones:

- *Objetivo de la Estadística:* Es el estudio del comportamiento de conjuntos de datos correspondientes a grupos medianamente numerosos, para poder así enunciar a partir de ellos leyes generales, obtener conclusiones y tomar decisiones.

Si bien en los problemas que generalmente afronta la Estadística, el número de observaciones varía sensiblemente, según las distintas situaciones, su objeto de estudio es un conjunto, nunca individuos aislados.

- *Métodos estadísticos:* Como se trata de un gran volumen de información cuanti o cualitativa, se requiere disponer de métodos sistemáticos que puedan ser utilizados para organizar, presentar, analizar e interpretar la información en forma eficiente. Estos deben permitir extraer conclusiones válidas y tomar decisiones con mínimo riesgo.

Los métodos estadísticos son objetivos y controlados, permiten, entre otras acciones, ajustar funcionalmente tendencias, encontrar comportamientos subyacentes del conjunto de individuos y modelizar estos comportamientos. Son esencialmente métodos para tratar datos obtenidos mediante operaciones reiterativas o susceptibles de repetición. Para el análisis e interpretación de resultados, los métodos se fundamentan en el conocimiento de las leyes del azar y son



aplicables a todas las investigaciones en las que la complejidad y cantidad de los factores de variación exigen un diseño experimental propio.

- *Modelo*: Es la representación teórica de la realidad. La experiencia indica que muchas operaciones empíricas y reiterativas se comportan como si se produjeran en circunstancias esencialmente estables. En tales condiciones es posible construir un modelo matemático adecuado al comportamiento observado. Estos modelos se puede entonces emplear para, por ejemplo, estudiar sus propiedades y extraer conclusiones referentes al mismo, hacer predicciones sobre la frecuencia esperada con que se presentan ciertos resultados, entre otras posibilidades.

En su desarrollo histórico, el estadístico empírico considera a la probabilidad como una idealización de la proporción de veces que se presenta un determinado resultado en las pruebas repetidas de un experimento. En consecuencia un modelo de probabilidad es el tipo de modelo matemático elegido por él.

Por tratarse del ajuste del comportamiento empírico a una expresión analítica matemática no debe considerarse que el modelo se presente exento de error al momento de usarlo como instrumento de predicción. No es una fórmula mágica, es un instrumento. Las conclusiones que de él se obtengan únicamente son “significativas” en la medida en que el modelo elegido sea una aproximación suficientemente “buena” de la situación real. Citando a Benzecri (1988) “el modelo debe seguir a los datos y no los datos ajustarse al modelo”.

Dada la naturaleza de los datos y el concepto de “modelo”, es lógico que la *Teoría de Probabilidades* sea la herramienta fundamental en la *Teoría Estadística*.

- *Teoría Estadística*: En general responde a las siguientes cuestiones: fundamentar el uso de diversas técnicas y métodos que coadyuven a encontrar soluciones a determinados problemas empíricos o teóricos; diseñar experimentos, estudios o investigaciones, que estén condicionados a los

objetivos planteados, al análisis deseado, garantizando eficiencia y, por último, evaluar la precisión midiendo los errores en las estimaciones y predicciones.

- *Universo ( $U_N$ ):* Es el conjunto de todas las unidades elementales, objeto de estudio, definido en el tiempo y en el espacio. Es fundamental su especificación detallada, determinando las características que le definen una composición o estructura. Esto permite determinar, taxativamente, si un elemento pertenece o no a la Población en estudio.

Frecuentemente los términos *Universo y Población* se utilizan indistintamente. Esto se debe a que el concepto de “población” tiene amplio alcance para la Estadística de modo que, según el campo de aplicación del que se trate, se puede estar trabajando con poblaciones de personas, plantas, días, frutos, tornillos, etc..Sin embargo en la teoría Estadística el término población, se utiliza para referirse a las distribuciones teóricas de las variables involucradas en el análisis, concepto que se desarrollará más adelante.

Podría mencionarse como dos ejemplos de posibles universos a estudiar: Alumnos que cursan carreras de Economía en las Universidades Nacionales Argentinas en el año 2008; o Producción de tornillos fabricados por la empresa TT en el último mes del corriente año.

Una población estadística puede ser finita o infinita, en el sentido de que está constituida por un número limitado o ilimitado de elementos.

Solamente en el caso de población finita puede establecerse el marco poblacional enumerando sus elementos o listándolos físicamente. El número total de elementos que la componen se simboliza con **N**.

A los efectos de un muestreo, de existir un marco poblacional este será la base sobre el cual deben definirse los procesos de selección. Este marco en general posee deficiencias que deben detectarse y remediarse antes de ser utilizado.

Las unidades que componen el Universo deben ser susceptibles de ser observadas y presentar una o varias características de interés a las que se referirán los resultados del Análisis Estadístico.

- *Censo*: Es un operativo de recopilación de información que se realiza considerando todos los elementos de la población. Ejemplos de ellos son: Censo de Población, Hogares y Viviendas; Censo Económico, Censo Agropecuario, etc. En general son realizados por organismos oficiales municipales, provinciales o nacionales habilitados a tal fin, tales como el INDEC o las Direcciones de Estadística Provinciales.
- *Muestra ( $M_n$ )*: Es un subconjunto de elementos seleccionados de un Universo. Para que su estudio reemplace al de la población completa, la selección de los elementos que la componen, deben ser representativos de la población y haber sido seleccionados siguiendo un método fundamentado en leyes del azar. El número total de elementos que la componen, se simboliza con **n**. Ejemplo de estudio por muestreo son: las Encuestas a hogares, Sondeos de opinión, Controles de calidad, etc.
- *Unidad Estadística (u.e)*: Es cada uno de los elementos a observar, que en forma conjunta componen la población o muestra, objeto de estudio. Estos elementos pueden ser: personas, animales o cosas, de existencia abstracta o tangible. Por ejemplo son unidades estadísticas: alumnos, turistas, cobayos, unidad productora (chacra), tornillos, expedientes, viviendas, días, hogares; a ellos es a quienes se les registra una o más características.
- *Características ( $x, y, z, \dots$ )*: Así se designa a las variables que interesan en el análisis estadístico. Como ejemplo, para algunas de las unidades estadísticas mencionadas anteriormente, podrían enumerarse tres características para cada una :  
Alumnos (sexo, nacionalidad, edad)

Turistas (ingreso mensual, tiempo de estadía, gasto diario)  
Tornillos (defectuoso, peso en g, long en mm)  
Viviendas (número de habitantes, característica de los pisos, número de cuartos)

Por extensión el término características también se aplica a aquellos cálculos realizados utilizando los valores observados de las variables, por ejemplo: proporción de varones, promedio de ingreso mensual, longitud máxima y mínima, índice de hacinamiento, etc.

- *Datos Estadísticos*: Es el conjunto de valores que asumen las variables cuando éstas son observadas o medidas en las unidades estadísticas. Estos datos deben ser tales que puedan ser comparados, analizados e interpretados, y deben estar presentados en forma ordenada y sistemática. Como ejemplo en el caso que el conjunto de datos recopilados correspondiente para la variable sexo con modalidades varón - mujer, correspondiente a cinco alumnos la información podría reflejar el siguiente resultado: VVMVM. Para el caso de observar la variable número de errores por expediente los datos estadísticos pueden ser: 0,4,3,2,2,3,0,..., etc.
- *Parámetros* ( $\mu, \sigma, p$ ): Son los valores que asumen en la población determinadas características referidas a la variable estudiada. Ejemplos: promedios, dispersiones, proporciones, totales, etc. Los parámetros en general son desconocidos, excepto el caso en que se realice un operativo censal.
- *Estadísticos* ( $\bar{x}, S_x, h$ ): Son los valores descriptivos o características que resultan de algún cálculo realizado con los datos observados de una variable en la muestra. Ejemplos: edad promedio de los alumnos, valor máximo de errores observados en un conjunto de expedientes, proporción de tornillos defectuosos, dispersión en la distribución de los ingresos.

- *Estimador*: Se define como estimador de un parámetro a una función de las observaciones muestrales. Es una expresión matemática que puede ser lineal, cuadrática, etc.
- *Estimación*: Es el valor numérico del estimador que se obtiene reemplazando en la expresión matemática los resultados obtenidos a través de una experiencia o experimento.

## **Introducción al muestreo**

Los conceptos anteriormente expuestos, permiten realizar una presentación general sobre qué implica el Muestreo Estadístico.

Es evidente que el empleo de una muestra es el único medio que permite estudiar una población infinita o finita pero muy extensa. Aún en el caso de poblaciones finitas que podrían ser abarcadas en su totalidad, el uso de muestras suele tener ventajas pues no sólo economiza esfuerzos al reducir costos y tiempos, sino que además permite obtener información más detallada que la que se puede conseguir mediante un examen de toda la población.

Si las muestras responden a un diseño estadísticamente planificado, es posible cuantificar el error de muestreo y el estudio proporciona información confiable. En algunos casos, la obtención del dato es destructiva, haciéndose imprescindible el uso de una muestra, ya que la observación de todas las unidades que componen la población destruiría la misma. Por ejemplo: a los efectos de calcular el voltaje necesario para que un componente eléctrico falle, se ponen a prueba los componentes eléctricos seleccionados por muestreo hasta que fallen, por lo tanto la obtención del dato destruye a la unidad estadística seleccionada.

Por supuesto que no siempre se va a recomendar el uso de muestras. En ciertos casos, la muestra tiene que ser tan grande que habrá pequeñas diferencias entre emplear un censo completo o un muestreo. Algunos de los factores que influyen en la decisión de usar o no muestreo, es evaluar las condiciones para enfrentar las dificultades, el costo de su ejecución y, en

algunos casos, la complejidad del diseño experimental, también depende del alcance y precisión que se pretende dar a las conclusiones obtenidas.

Cabe una aclaración complementaria: para recolectar información, la cantidad de trabajo y el gasto requerido por unidad, es siempre mayor mediante una muestra que mediante un censo completo, siendo que en este último se buscan características generales y en algunos casos determinar marcos de poblaciones específicos, como por ejemplo personas con capacidades diferentes, indígenas; que luego serán utilizados en estudio específicos más extensos a través de encuestas por muestreo. Esto conduce a que el tiempo requerido para formalizar la recopilación es siempre mayor en la encuesta por muestreo que en un operativo censal, la preparación que requiere el encuestador es más compleja que la del censista.

Por otra parte respecto a las características calculadas a través de un censo estas también están sujetas a errores; debido al grado de cobertura, temporalidad, errores de captación, etc.

Finalmente se puede señalar como ventajas del muestreo sobre un censo completo a las siguientes particularidades:

- a) Economía.
- b) Rapidez y oportunidad.
- c) Único recurso si la observación es destructiva.
- d) Calidad y precisión.

A su vez, los censos poseen ventajas especiales en algunas situaciones:

- a) Se pueden obtener datos de unidades atípicas con marcos poblacionales desconocidos.
- b) La aceptación pública es más fácil de alcanzar para relevamientos completos en los cuales se involucran organismos oficiales.
- c) La colaboración y la respuesta del público se pueden obtener con mayor facilidad.

- d) El sesgo de cobertura puede ser más factible de evaluar y de reducir.
- e) No se requieren estadísticos expertos en muestreo.

El uso de muestras aleatorias permite en primera instancia obtener información y realizar un estudio exploratorio descriptivo. Si el objeto de estudio así lo requiere se podrá realizar complementariamente alguna inferencia estadística.

*Siempre que la muestra sea representativa y aleatoria, su estudio sustituye al estudio de todo el Universo.*

El muestreo es un medio no un fin en sí mismo. Toda recopilación de información por muestreo debe estar respaldada por métodos y procedimientos estadísticos que garanticen obtener conclusiones precisas factibles de ser evaluadas en términos de probabilidad. Para comprender el sentido de los conceptos precisión, confianza y su evaluación, resulta necesario comenzar explicando el concepto de error en Estadística.

Los **errores** se presentan y afectan a los resultados obtenidos en una investigación por muestreo, son esencialmente de dos tipos:

- *Errores de muestreo:* Son errores de representatividad, es decir, los que resultan de tomar una muestra en lugar de toda la población. Cualquiera sea el método aplicado para seleccionar una muestra, una estimación por muestreo de una determinada característica de la población, diferirá inevitablemente del verdadero valor poblacional. Esta diferencia entre la estimación o estadístico, obtenida de la muestra y el verdadero valor poblacional o parámetro (desconocido), se llama error de muestreo.

Por ejemplo para una población constituida por todos los alumnos que concurren a una universidad, se obtiene una muestra representativa de éstos. Utilizando los datos recopilados, se calcula la proporción con que se presenta la modalidad “el alumno es de sexo varón”, esta proporción obtenida con la información muestral, simbólicamente **h**, no

necesariamente coincide con el verdadero valor de dicha proporción en la población total, simbólicamente  $p$ , la diferencia entre ambas proporciones constituye el Error de Muestreo:

$$|h - p|$$

Considerando el mismo conjunto de alumnos se registra el ingreso familiar para cada uno de ellos y luego se calcula el ingreso familiar promedio, simbólicamente  $\bar{x}$ ; esta característica muestral diferirá del promedio poblacional  $\mu$ , esta diferencia o Error de Muestreo se expresa en valor absoluto:  $|\bar{x} - \mu|$

- *Errores tendenciales:* Llamados también inclinaciones, vicios o sesgos. Se presentan con persistencia, en un determinado sentido y en magnitud aproximadamente constante de observación en observación. Esto ocurre cuando las observaciones se hallan sujetas a las mismas condiciones experimentales, por ejemplo: entrevistador mal entrenado o mal seleccionado; cuestionario con alguna pregunta incorrectamente formulada; instrumento de medición mal calibrado; etc.
- *Errores accidentales:* Son introducidos por una infinidad de circunstancias fortuitas, como pueden ser: entrevista de duración excesiva; pertinencia del horario en que se realiza la entrevista; algún suceso personal que repercuta en el ánimo del entrevistado; etc.

Para resolver las cuestiones expuestas anteriormente la *Teoría de Muestreo* desarrolla fundamentalmente Métodos de Selección de Muestras y Métodos de Estimación, vinculados estrechamente al tamaño de la muestra ( $n$ ) de manera tal que proporcionen con mínimo error y al menor costo posible las características de la población objeto de estudio con la confianza deseada.

Teniendo en cuenta estos conceptos introductorios a la teoría del muestreo se puede señalar los aspectos vinculados a la *precisión* de los resultados obtenidos en las estimaciones o predicciones realizadas. Estos son:



- *Tamaño de la muestra:* Es el número de unidades elementales que la componen, que se simboliza con **n**. Su cálculo, requiere conocimientos teóricos específicos en la materia. Sin embargo, se puede decir que varía según el tipo de muestreo, dependiendo del error que se admite en las estimaciones, de la probabilidad de dicho error o confianza deseada de él o de los parámetros a estimar, de la variancia del estimador y, en algunos casos, del costo del muestreo. En general, a mayor tamaño de muestra implica mayor confianza y precisión en las estimaciones y predicciones.
- *Diseño de la muestra:* en algunas circunstancias esta etapa requiere de un análisis bastante complejo que obliga a una planificación con procedimientos propios, que no es posible desarrollar en esta introducción, sin embargo se hace a continuación referencia a dos aspectos considerados relevantes:

Un concepto que requiere comprensión precisa, es qué se entiende por *Unidad de Muestreo*, ésta es la unidad o parte elemental en que se divide el universo. El conjunto de todas las unidades de muestreo debe constituir el total del universo.

La Unidad Estadística objeto de estudio no necesariamente coincide con la Unidad de Muestreo, por lo tanto, se presentan dos situaciones:

A veces las *Unidades Estadísticas o de Muestreo* son los elementos individuales que en forma conjunta constituyen la población sobre la cual se requiere el relevamiento. En otros casos la *Unidad de Muestreo* es un conjunto de *Unidades Estadísticas*, agrupamiento que se realiza con el objeto de facilitar la obtención del dato.

## **Etapas Operativas de la Investigación Estadística**

La Estadística se encuentra íntimamente relacionada al Método Científico. Son muchos los procesos de Investigación en ciencias naturales o sociales que generan o requieren datos de diversa índole y necesitan utilizar los métodos y procedimientos que proporciona la Teoría Estadística para garantizar que el proceso resulte tan eficiente como sea posible.

En este orden de ideas, se plantean algunas consideraciones acerca del Método Científico, para luego poder hacer explícitas las etapas operativas consideradas más relevantes en el proceso de investigación que utilizan metodología estadística.

Es importante delimitar los alcances del tema a los fines de establecer los conceptos estadísticos que interesa desarrollar. Para ello, se reconoce que no existe un único método científico, en el pasado se planteaban problemas cuyas características lógicas eran menos complejas que las actuales. En particular éste es el caso de las investigaciones sociales, tanto para estudios que proponen explicar modificaciones cualitativas como aquellos que analizan cambios cuantitativos. Además, el tipo de método no sólo depende de las cuestiones que se planteen, sino también del perfil del investigador. Vale decir, que un mismo problema puede ser abordado de diferentes modos por dos o más investigadores o por un mismo investigador.

Aún pensando en la existencia de distintas metodologías según las diversas situaciones, se indica que a nivel operativo, existen aspectos generales que son comunes a todas las *Ciencias*:

- I. Revisión de hechos, teorías y proposiciones.
- II. Formulación de hipótesis.
- III. Puesta a prueba de tales hipótesis, generalmente sobre la base de resultados experimentales.

Es en esta última etapa donde interviene la *Estadística* como herramienta fundamental, sustentando metodológicamente las siguientes acciones:

- a) Programación de *experimentos o investigaciones*.
- b) Obtención de *conclusiones objetivas o generalizaciones* a partir de estos experimentos o investigaciones, cuantificando o controlando la incertidumbre.

Resulta de interés para detallar los procedimientos y métodos propios de la Estadística enunciar un conjunto de *Etapas* que se deben cumplir en forma ordenada y precisa. Sin pretensiones de exhaustividad se enumeran esas etapas, exponiendo algunas cuestiones que se deberán tener en cuenta en su desarrollo.

### **Formulación del problema**

Para poder llevar adelante una Investigación Estadística, inicialmente, se requiere disponer de un conocimiento acabado del problema-objeto de la investigación o de los objetivos propuestos. Una vez que se conoce el objetivo de la investigación, se debe formular el problema en la forma más precisa y completa posible, para poder determinar cuáles serán los datos más relevantes y necesarios para la puesta en marcha de la investigación. Aunque el objetivo esté enunciado puede ser útil hacerse preguntas sencillas como: ¿qué quiero saber?, ¿porqué quiero saberlo?, ¿si se avanza en el conocimiento sobre el problema se notará alguna diferencia en cuanto a la teoría o la práctica dentro del área de Investigación?, ¿existe la posibilidad de encontrar nuevo conocimiento que permita avanzar en la solución del problema?, ¿es posible recoger datos y tratarlos de modo que aporten al conocimiento esperado? Es de relevancia en el proceso de investigación definir y delimitar el problema en forma precisa ya que si el problema se enuncia con esas características este orientará en forma clara la investigación

En la búsqueda de estas repuestas el investigador se puede encontrar con la situación que el problema planteado ya ha sido estudiado y resuelto, en estas situaciones la investigación puede ser replanteada con el objeto de corregir, aclarar o extender conclusiones.

Otra cuestión de interés a tener en cuenta en los inicios de una investigación Estadística es evaluar la capacidad del investigador

preguntar si el investigador está preparado para enfrentar el problema con recursos teóricos, técnicos y financieros o requiere de la consulta a asesores de otras disciplinas.

Todos estos planteos se deben hacer a priori, no atender este análisis previo podría conducir a realizar acciones totalmente innecesarias que no hacen a la investigación o se omitan o dejen de lado otras relevantes, de importancia básica.

Concretamente, como en cualquier proceso, además de evaluar y controlar el aspecto operativo, es necesario saber con qué *materia prima* se trabajará ya sea para la consecución del objetivo establecido como así también para realizar un diagnóstico o una generalización entre otras tareas. Esto equivale, en el tema que nos ocupa, a definir qué *información* se debe obtener, cómo se especifican y eventualmente se elaboran los conceptos, sin olvidar que la calidad de los análisis y conclusiones estadísticas dependerán básicamente de esta información que a su vez, quedará vinculada a la precisión empleada al momento de la formulación del objetivo en la investigación científica, o a la clara concepción del problema a estudiar y sus factores subyacentes.

### **Diseño del experimento- encuestas por muestreo**

Propuesto el problema con precisión, corresponde desarrollar esta segunda etapa que hace a la decisión sobre los aspectos de la investigación que se refieren a la *ejecución del experimento*, que da origen a la producción de datos y conlleva un diseño de campo o, en su defecto la ubicación de la fuente de información.

Sin un plan coherente y racional de trabajo, sin una estrategia general orientada a la correcta selección de las técnicas de recolección y análisis de datos, es difícil pensar que se está trabajando científicamente.

Al cumplimentar la primera etapa se definió “el qué”, y ahora se debe definir “el cómo”.

En primer lugar, se tendrá que tomar la decisión si se va a estudiar toda la población, en cuyo caso se deberá hacer una

*enumeración completa*, o bien, si se va a estudiar una parte representativa de la misma, para lo cual se usará una **muestra**.

Cuando se realiza recopilación de información sobre todos los elementos de la población este operativo se denomina **Censo**. Ejemplos para nuestro país son: Censo de Población, Hogares y Viviendas, Censo Económico, Censo Agropecuario, Censo Escolar Provincial o Nacional, etc., estos operativos ,por lo general, son llevados a cabo por Organismos Públicos habilitados a tal fin, tales como el INDEC o Direcciones de Estadística Provinciales.

En el caso de un *Censo*, al ser un operativo de relevamiento para toda la población, se puede sucintamente decir que éste proporciona una información completa y confiable para un momento determinado del tiempo, en el que se tiene como objetivo recabar información macro sobre temas diversos que brindan un marco de referencia completo y general. Los datos censales suelen ser el marco de referencia para la planificación de otros estudios referidos a cuestiones específicas. Algunos censos se realizan en intervalos de tiempo específicos, incluso se ejecutan simultáneamente a nivel mundial, con contenidos conceptuales acordados en reuniones internacionales.

No se puede dejar de mencionar que un censo resulta oneroso, pues se necesita de gran cantidad de recursos humanos y materiales. En su organización y ejecución intervienen etapas similares y rutinarias, operativamente más complejas que las involucradas en los estudios por muestreo.

Los estudios e investigaciones utilizando *Muestras* son los de mayor uso en la práctica. Este procedimiento conduce a resultados que presentan cierto grado de incertidumbre, pero se recuerda que el uso de métodos estadísticos permite evaluar el grado de error y confiabilidad de los resultados obtenidos. El uso de muestras es a veces una opción para llevar adelante el diseño de la investigación, sin embargo en otras oportunidades resulta imperativa su aplicación.

En el caso de tener que decidir por uno u otro se debe considerar que el procedimiento muestral es menos costoso que el censal y se puede incluir mayor cantidad de factores considerados

importantes en el tema objeto de estudio. Esto permite responder ampliamente a los objetivos específicos establecidos por quien requiere de métodos estadísticos en su análisis de información. Sin embargo, se debe tener en claro que la muestra proporciona información que permite sólo estimar a las características poblacionales cuyo valor exacto lo proporciona un Censo, siempre que se logre un 100% de cobertura y una optima ejecución.

En general, se puede decir que en el diseño de investigaciones, utilizando muestras, el problema suele consistir en equilibrar los factores ajenos a las características en estudio y así obtener muestras representativas de toda la población.

Pocas veces el interés se limita a sacar conclusiones sólo para el conjunto de observaciones correspondientes a la muestra obtenida, realizando en ese caso un estudio exploratorio o descriptivo, sino lo que se busca, en la mayoría de las investigaciones, es hacer inferencia a la población de origen. Para ello es fundamental que se trabaje con una *muestra representativa y aleatoria*.

Además de las características anteriormente mencionadas la muestra debe cumplir con los principios de la Teoría Estadística. En este sentido se deberá responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de datos se van a recopilar?
- ¿Cuáles son las características de interés para la investigación?
- ¿Cómo se obtendrá la información?
- ¿Qué error se admite en las estimaciones?
- ¿Con qué grado de confianza?
- ¿De qué tamaño debe ser la muestra?
- ¿Qué método de selección de muestra se va a aplicar?

Estas son algunas de las cuestiones que se resuelven con un buen *Diseño de muestras o diseño de experimentos*. El riesgo que se corre de no cumplimentar correctamente esta etapa, es que se llegue a conclusiones espurias que no brinden avances en la investigación encarada.

Un buen Diseño de Experimento equilibra cuatro propósitos en relación a la investigación:

- Mantener los objetivos establecidos en el estudio o investigación en cuestión.
- Buscar la escala de medición u operacionalización de los conceptos requeridos.
- Lograr practicidad en el operativo.
- Garantizar la eficiencia del procedimiento aplicado.

En particular para el *Diseño de Muestras*, no se pueden obviar tres actividades:

La *Teoría del Muestreo* permite diseñar y obtener muestras válidas, óptimas, evitando sesgos de selección para lograr una eficiencia razonable. Proporciona los fundamentos teóricos, los procedimientos, los métodos para la inferencia, así como las fórmulas de trabajo necesarias, según sea el método de selección aplicado. Permite también evaluar los resultados de los muestreos realizados, juzgar su validez, su uso para las inferencias, medir su precisión, entre otras cuestiones.

Los conceptos y el manejo de los procedimientos de muestreo de poblaciones estadísticas son aplicables tanto para realizar encuestas como para la selección, en general, de elementos representativos para el avance en el conocimiento científico.

Si el objeto que se estudia corresponde a un campo desconocido o poco analizado, para diseñar eficientemente una Muestra, es conveniente realizar previamente un **estudio piloto**, con el cual obtener información útil al diseño definitivo.

El *tamaño de la muestra* juega un rol determinante en el proceso de muestreo e inferencias. Es así como una muestra será considerada demasiado pequeña si sus resultados carecen de la precisión suficiente para contribuir de manera apreciable a las decisiones.

El *Marco* como concepto general, hace referencia a listas físicas, como también a aquellos procedimientos que pueden tener en cuenta a todas las unidades de muestreo sin el esfuerzo físico de listarlas efectivamente. Por ejemplo: en muestreo por áreas el

marco consiste en planos que proporcionan los límites dentro de los cuales se deberá seleccionar viviendas o comercios. Los mapas son utilizados como marcos cuando se desea seleccionar flora o fauna.

Las encuestas mal realizadas provocan escepticismo sobre sus resultados, por eso se debe tomar conciencia de la importancia que éstas, sean diseñadas de acuerdo a los procedimientos que proporciona la Estadística. Sólo así se garantiza disponer del margen de error que es inherente al uso de una muestra y evitar los errores ajenos al muestreo.

Frecuentemente se hacen inferencias acerca de características poblaciones utilizando muestras informales y arbitrarias que, estadísticamente, resultan no válidas. Por ejemplo: un comprador juzga la calidad de un producto seleccionando una unidad del conjunto disponible, cuando correspondería que acepte el envío después de inspeccionar varias unidades seleccionadas aleatoriamente del total. Cuando se realizan encuestas de opinión y se trabaja con encuestadores con insuficiente entrenamiento o utilizando cuestionarios de confección deficiente los datos recopilados carecerán de validez para la investigación.

En la etapa de Diseño del Experimento, haciendo referencia exclusivamente a *Encuestas por muestreo*, se recomienda tener en cuenta algunos aspectos específicos, según se detallan a continuación:

### **Elaboración de un plan general**

Variables a considerar:

Formulación de preguntas y redacción del cuestionario

Los factores a tener en cuenta en la preparación de un cuestionario son numerosos, entre los cuales cabe mencionar:

- Las preguntas deben ser sencillas, claras, precisas, específicas y directas.
- No hacer preguntas que impliquen la respuesta. Estas preguntas denominadas “preguntas intencionadas”, inducen o



motivan al entrevistado a emitir una respuesta que no necesariamente es su verdadera opinión.

- No fiarse de la memoria del entrevistado: las preguntas deben limitarse al pasado inmediato, ayudando al entrevistado a retroceder paso a paso en el tiempo, para que recuerde con la mayor fidelidad posible la información que interesa.
- No hacer preguntas que obliguen al entrevistado a realizar cálculos. Es necesario elaborar la pregunta para obtener respuestas más exactas y con mayor facilidad.
- Evitar preguntas embarazosas, preguntas que impliquen juicio de valor o elementos de emotividad.
- Evitar preguntas abiertas, en las que el entrevistado no se enfrenta a categorías establecidas para su respuesta, porque da lugar a una diversidad de respuestas difíciles en general de clasificar a posteriori. Sin embargo en caso de estudios exploratorios y de diagnóstico estas pueden ser la mejor opción.
- Usar preferentemente preguntas cerradas, dando opciones múltiples. Habrá que elaborar un conjunto de posibles respuestas o categorías, entre las que pueda elegir el entrevistado la que más concuerde con su opinión. También puede ser que en primera instancia no se muestre o sugieran las opciones, sino que esto se haga ante la duda o poca precisión del encuestado al responder. En la elaboración del cuestionario se debe recordar el principio que es preferible una pregunta específica a una general. Esta recomendación es especialmente útil cuando se trata de respuestas que no pueden expresarse con exactitud o presentan una gama demasiado amplia de posibilidades, en estos casos, las categorías que se presenten serán exhaustivas y excluyentes, y se podrá utilizar como cierre la categoría: “otros”. Otra ventaja importante frente a la pregunta abierta, es que la cerrada puede ayudar a que el entrevistado recuerde respuestas que podría olvidar en caso contrario. Como recomendación no se debe dejar de considerar que al brindar las alternativas de respuesta, ésta no sea inducida.

- Incluir preguntas que puedan complementarse, de forma tal que el “sí” o el “no” de la primera pregunta excluya o requiera las siguientes. Esto proporciona agilidad a la entrevista y evita errores en la captación de datos.
- Incluir preguntas control, para realizar luego un análisis de consistencia a los cuestionarios cumplimentados.
- Ordenar las preguntas del cuestionario siguiendo la secuencia lógica del pensamiento. Si es necesario, por la variedad de temas incluidos, puede resultar conveniente dividir el cuestionario, agrupando las preguntas relacionadas con un mismo ítem. Es recomendable comenzar con aquellas preguntas descriptivas que correspondan a un marco general y continuar luego con las más específicas, cuidando en especial la ubicación de aquéllas que podrían ser motivo de rechazo a la entrevista. De algún modo la secuencia debe ser tal que se logre comprometer e interesar al entrevistado por la problemática en cuestión.
- No confeccionar cuestionarios extensos: es preferible tener poca información de buena calidad y no mucha de calidad poco satisfactoria.
- Tener cuidado con la mala redacción y ortografía. Las preguntas adecuadas están asociadas a una buena redacción.
- Si resulta de utilidad en el cuestionario se pueden presentar tabulaciones o cuadros preelaborados para consignar datos múltiples.

### **Recopilación de datos estadísticos**

Consiste en recopilar o recoger aquellos datos, cuantitativos o cualitativos, que responden al problema de interés.

Como etapa del proceso estadístico se pueden dar recomendaciones y pautas a tener en cuenta, sin embargo, es muy importante lo que se aprende por propia experiencia, por la adquisición del conocimiento práctico y objetivo del procedimiento, que desarrolla la habilidad para reconocer el grado de confianza que merecen los datos a utilizar.

Existe una propensión a aceptar datos estadísticos sin dudar de su exactitud, por ello la ejecución de esta etapa se debe asumir con la responsabilidad que merece. Algunas veces, el estudioso se servirá de datos disponibles en el medio en que estudia o actúa. En otras ocasiones, la recopilación la efectuará de materiales publicados, ya sean periódicos, semanarios económicos, revistas especializadas, publicaciones de estadísticas oficiales o privadas, etc. En estos casos, la recopilación no involucra grandes costos ni insume gran cantidad de tiempo pero, por lo general, se encuentra que el problema no es tan simple y que se necesita una información que no es fácil encontrar, que no está disponible, o peor aún, que no existe.

De este modo se puede clasificar la forma de obtención de datos según su origen:

*Fuente Directa:* cuando los datos son recabados directamente por el investigador que realiza el relevamiento estadístico. Obtener información de primera mano es una de las tareas importantes con que tiene que enfrentarse el Estadístico. Comúnmente, el investigador obtiene datos empíricos a través de sus propios experimentos o experiencias. Los experimentos, en general, se refieren a tareas realizadas, por ejemplo, en un laboratorio, mientras que las experiencias corresponden a la recopilación empírica a través de encuestas por muestreo. El conocimiento del procedimiento a seguir en estos casos, será útil para hacer un uso inteligente de la información estadística disponible.

*Fuente Indirecta:* cuando los datos son obtenidos de trabajos realizados por otros, ya sean estudios particulares o de organismos oficiales, estén publicados o no. Esta fuente podrá ser a su vez:

*Fuente Primaria:* cuando existe una sola fuente, vale decir, que los datos provienen de un sólo recopilador o estudio anterior, que fue el que originalmente los recogió.

*Fuente Secundaria:* cuando los datos han sufrido una reimpresión realizada por un organismo ajeno al recopilador primigenio.

Las fuentes indirectas deben proporcionar dos elementos de gran importancia:

- *seguridad del dato:* éste debe ser preciso y confiable, por ello hay que conocer y asegurar que su obtención se hizo con una metodología apropiada, usando los procedimientos correctos, que las definiciones de conceptos y las tabulaciones son las adecuadas, entre otras cuestiones etc
- *ser susceptibles de comparación:* en el caso en que se utilice más de una fuente, estas deberán usar las mismas definiciones, utilizar igual métodos de cálculo, etc.

En este punto, es necesario aclarar que la fuente primaria es más confiable que la secundaria; generalmente está exenta de errores propios de la transcripción. Las fuentes primarias no omiten información explicitada referente a términos, unidades, métodos utilizados, etc. Al ofrecer más detalle, no omite categorías.

En cuanto a la recopilación, vista como proceso en el tiempo, esta puede realizarse utilizando uno de los siguientes métodos de *Relevamiento estadístico*:

*Relevamiento dinámico:* Se refiere a los datos obtenidos en operaciones que se realizan en forma continuada, ininterrumpidamente a través del tiempo y de modo sistemático. Podrían ser registros permanentes como el del Registro Civil, en el cual la información se proporciona a la autoridad competente cuando ocurre el hecho, por ejemplo nacimientos, defunciones, cambio de domicilio, etc. Se trata también de relevamiento dinámico, cuando se realiza el registro secuencial de un hecho, por muestreo, en una línea de producción. La información también puede ser interna, o sea, registros llevados por el mismo organismo que hace el estudio.

*Relevamiento estático:* Es el que se realiza en un momento determinado, como es el caso de los Censos de Población,

Hogares y Viviendas o las Encuestas por Muestreo, en las que el trabajo de campo se realiza con un equipo de encuestadores o censistas que trabajan en forma simultánea.

La etapa de recopilación de los datos, en la mayoría de los casos, es costosa y rutinaria; generalmente demanda mucho tiempo, personal y gastos importantes en bienes e insumos.

Retomando el caso de *Encuestas por muestreo*; en la etapa de recopilación para que la salida a campo sea ejecutada con eficiencia y precisión, hay que planificar las tareas pertinentes, las que a su vez, deberán estar ajustadas a un cronograma. En esta planificación se llevarán adelante tareas como: cartografía, croquis de recorridos, prueba piloto del cuestionario, preparación de encuestadores, supervisores, organización general del operativo, entre otras cuestiones.

Respecto a la Prueba Piloto del cuestionario, este se aplica sobre un número limitado de personas de diferente condición para la interpretación de las preguntas. Esta prueba permite descubrir los defectos, eliminar los equívocos y ambigüedades, escoger la oportuna formulación de las preguntas según los objetivos de la entrevista.

Se hará uso del cuestionario mediante la entrevista personal en la que intervienen: los entrevistadores o encuestadores, de quienes depende en gran parte el éxito del operativo. Para llegar a ser un buen entrevistador se requieren largos períodos de práctica, cursos especiales de adiestramiento e instrucciones precisas, además de comprensión y compromiso con el estudio encarado. Se podrán elaborar manuales para los entrevistadores e instrucciones para cumplimentar el cuestionario. Para la elección de los entrevistadores, se exigen requisitos como: preparación, personalidad, facultad de adaptación, honestidad, memoria, precisión, mentalidad investigadora, cordialidad, discreción en el manejo de la información obtenida, etc. Un encuestador puede afectar la precisión de la respuesta al leer mal las preguntas, al registrar las respuestas de manera equivocada o al polemizar con el entrevistado. También pueden integrar el equipo de trabajo los supervisores, quienes controlan

el trabajo de los entrevistadores y el método de selección de las unidades de observación si correspondiere. Completando el cuadro de actores partícipes del operativo se tiene el cuestionario en sí y al entrevistado, que constituye la Unidad Estadística y es quien responde al mismo en forma individual.

### **Organización de la información**

Cuando se obtienen los datos a través de una encuesta, es decir, de fuente directa, éstos se deberán organizar y ordenar en forma sistemática y adecuada en función de los fines planteados en la primera etapa. Previamente, serán consistidos para asegurar su pertinencia y, en caso de tener alguna unidad de observación con información de calidad no satisfactoria, ésta podrá ser reemplazada con una segunda recopilación llamada “de recuperación”.

En algunas ocasiones los datos son utilizados en bruto y, en otros, necesitan de cálculos o reducciones posteriores de acuerdo a las necesidades de la investigación.

Cuando los datos son extraídos de publicaciones internas o externas, es decir, fuente indirecta, la corrección de los mismos no demandará gran cantidad de tiempo, ni dará lugar a grandes incomodidades pero, cuando hayan provenido de una encuesta, pueden surgir diversas situaciones provenientes del modo en que se originaron.

Según Stephen P. Shao, el recopilador tendrá que realizar algunas de estas tareas:

- Solucionar el problema de la inconsistencia de los datos.
- Tratar de solucionar aquellos problemas surgidos como consecuencia de una escritura pobre.
- Tratar de que todas las preguntas sean contestadas o, de lo contrario, consignarlas como sin información respecto del sujeto a quien fueron dirigidas.
- Establecer cálculos precisos de las cifras proporcionadas por el informante.

Efectuada la depuración, se inicia el trabajo de procesamiento, con el objeto de realizar la elaboración final.

Según los recursos informáticos disponibles, y la dimensión de los datos recopilados, se procede a la generación de una Base de Datos que luego se completará con la información recabada en el campo. En algunos casos y para algunos ítems se hace uso de una Codificación previa, que consiste en la asignación de un número a cada posible respuesta, número que corresponde a una clave cuidadosamente preparada. En otros casos, los ítems, por su naturaleza, no necesitan de un código. Una u otra situación están íntimamente relacionada con el tratamiento informático utilizado.

Haciendo uso del Plan Tabulatorio, ya elaborado, se procesan los datos de la Base obteniendo las salidas correspondientes.

### **Presentación de la información**

Una vez que se ha recopilado y organizado el conjunto de datos estadísticos, es muy probable, mas allá del análisis que se realice luego, que sea necesario presentarlos como el resultado obtenido de nuestra tarea. Si esta es la situación, existen pautas a tener en cuenta para lograr un informe claro y preciso.

Muchos lectores tienen tendencia a no leer en un informe escrito las cifras estadísticas que se señalan; una forma de evitar esto, es presentarlas en cuadros estadísticos sencillos y claros, o en gráficos simples y atractivos, o sea, recurriendo a alguna forma de presentación que cumpla con el objetivo de ofrecer una descripción de un fenómeno.

Las formas en que se pueden presentar los datos estadísticos son:

- Párrafos de textos
- Cuadros estadísticos
- Gráficos estadísticos.

Estos métodos de presentación tienen particularidades propias, que se detallan a continuación.

## **Párrafos de textos**

Si el resultado del trabajo de investigación es la obtención de valores que por su importancia merecen un tratamiento especial, estos resultados se deben presentar en un párrafo. Esta presentación sólo es recomendable cuando se trabaja con pocas cifras o pocos conceptos. En cambio, cuando se trabaja con un conjunto numeroso de datos, ésta forma de presentación es poco clara e ineficiente, por lo que se debe recurrir a otros métodos. Tiene ciertas ventajas, como la de poder expresar con palabras la importancia de ciertas cantidades específicas, así como la de efectuar y destacar comparaciones que se crean necesarias hacer. A continuación se presentan dos ejemplos:

“Analistas privados ubican a la inflación del mes de Julio entre el 1,2% y el 1,5%. Según la medición del organismo oficial alimentos y bebidas bajaron un 0,8% mientras que el rubro de mayor incremento fue el de esparcimientos”

Fuente: Diario Río Negro- 11-08-08

“La proporción de la población por debajo del umbral de pobreza alcanzó en el primer semestre del año 30,2 por ciento, según aseguró ayer en un informe la consultora Ecolatina. El estudio señaló que tal marca supera la estimación”

Fuente: Diario Río Negro- 13-08-08

## **Cuadros estadísticos**

Esta forma de presentación de información suele usarse con mayor frecuencia que el anterior. Consiste en el arreglo sistemático de las cifras en una matriz, identificando filas y columnas, o sea utilizando una tabla de doble entrada. Para su construcción existen ciertas normas básicas que permiten que el cuadro cumpla con su objetivo que es presentar la información ordenadamente, facilitando su interpretación y análisis.

De acuerdo al propósito para el que se construyen los cuadros estadísticos, pueden clasificarse en:

- a) *Cuadros generales o de referencia:* son los usados como fuente de información, no tienen un propósito determinado



sino que simplemente proporciona información detallada. Es el tipo de cuadro que presentan las publicaciones de organismos generalmente gubernamentales, que recogen información primaria.

- b) *Cuadros de texto o de resumen*: son aquellos que tienen un propósito específico: generalmente son de menor tamaño que los anteriores; son breves y claros y van acompañados de algún texto correspondiente a una investigación particular; incluyen datos relacionados entre sí y eventualmente algún tipo de elaboración propia del autor.

Recopilada y organizada la información que se desea presentar, será posible determinar el propósito de una tabla, estructurando la misma teniendo en cuenta sus partes componentes.

Las *partes principales de un cuadro* son: Título, Encabezados, Columna Matriz o Conceptos, Cuerpo, Fuente de Información y Notas de Introducción y al Pie. Todas ellas son importantes y contribuyen conjuntamente a que el cuadro que se presente sea claro, preciso y de fácil interpretación. Brevemente se expondrá qué significan y cómo se confeccionan cada una de las partes mencionadas:

*Título*: debe ir en la parte superior del cuadro y expresar en forma clara y precisa el contenido (datos) del cuadro, para lo cual resulta útil tener en cuenta, al redactarlo, las siguientes cuestiones: ¿Qué?, ¿Dónde? ¿Cómo? y ¿Cuándo? Es decir el título indica que datos se están presentando, a qué área geográfica corresponden, la clasificación los datos y a qué período (meses, años, etc.) corresponde la información.

*Encabezados*: son los títulos que corresponden a cada columna componente del cuadro y se colocan en la parte superior de las mismas. El primer encabezado corresponde a la columna matriz o concepto, los siguientes corresponden a las columnas de datos. En algunos casos se presentan encabezados y sub-encabezados.

*Columna Matriz o Conceptos*: es la primera columna que se presenta en un cuadro, en la cual se colocan los conceptos que identifican cada fila de un cuadro. Estos conceptos corresponden

a una determinada clasificación cuya naturaleza se señala en el encabezado correspondiente a esta columna. Es posible, si se presenta la necesidad, dividir cada concepto en sub-conceptos.

*Cuerpo:* es la parte del cuadro en la que se presenta el conjunto de datos estadísticos, cuyo arreglo en filas y columnas se hará de acuerdo a las clasificaciones que se presentan en la Columna Matriz y en los Encabezados.

*Fuente:* es el origen de la información o el lugar de dónde se obtuvo, y se indica al pie del cuadro. Si los datos fueron recopilados por el mismo investigador, se colocará “elaboración propia”, pero, en caso de que los datos hayan sido proporcionados por otro organismo o equipos de trabajo o se hayan obtenido de publicaciones, deberá colocarse el origen de los mismos, indicando autor, nombre de la institución, título de la publicación, número de serie, volumen, página, edición, editorial, fecha de publicación, etc., según corresponda. Puede ocurrir que sea necesario indicar más de una fuente. Si se desconoce el origen de la información, se colocará: “Fuente Desconocida”.

La indicación correcta de la fuente de información de un cuadro permitirá al lector evaluar la confiabilidad de las cifras presentadas, y obtener información adicional en la fuente original, si así lo deseara.

*Notas de Introducción:* son las que tienen por objeto aclarar ciertos aspectos generales, relativos a todo el cuadro, que no han sido señalados en el título; por ejemplo: la unidad de medida correspondiente a los datos presentados en el cuadro. Otro ejemplo ilustrativo es que en esta nota se indique el total de casos que representa el 100% de la información cuando el cuadro presenta únicamente cifras relativas. Generalmente se colocan entre paréntesis o con letras de menor tamaño que las utilizadas para el título.

*Notas al pie:* están ubicadas en la parte inferior, por fuera, del cuerpo del cuadro y antes que la fuente; en ellas se consignan explicaciones relativas a algún dato particular, o a alguna fila o columna en especial.

### Ejemplo 2-1

*Tasas de empleo y desempleos del total de aglomerados urbanos de la República Argentina, año 2008*

| Años<br>Trimestre<br>Clasificación | 2008             |                 |                  |                 |
|------------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|
|                                    | 1 <sup>ero</sup> | 2 <sup>do</sup> | 3 <sup>ero</sup> | 4 <sup>to</sup> |
| Actividad                          | 45.9             | 45.9            | 45.7             | 46.0            |
| Empleo                             | 42.0             | 42.2            | 42.1             | 42.6            |
| Desocupación                       | 8.4              | 8.0             | 7.8              | 7.3             |
| Sub-Ocupación                      | 8.2              | 8.6             | 9.2              | 9.1             |
| Demandante                         | 5.8              | 6.3             | 6.3              | 6.0             |
| No Demandante                      | 2.4              | 2.3             | 2.9              | 3.1             |

(total: 31 aglomerados)

Fuente: INDEC, Encuesta Permanente de Hogares Continua

En este cuadro resulta posible identificar que: la información estadística presentada corresponde a resultados obtenidos a través de la Encuesta Permanente de Hogares Continua, operativo realizado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos de nuestro país, según se consigna en la fuente del cuadro. En la nota introductoria se hace referencia a qué corresponden los datos, en este caso se trata de 31 aglomerados.

Respecto al cuerpo del cuadro este presenta información, resultante de operativos que se realizan por muestreo en diferentes momentos en el tiempo y en el mismo se presentan las tasas resultantes del cálculo específico. Por ello una primera columna matriz que presenta la clasificación cualitativa, en este caso según condición de actividad. En las columnas subsiguientes se hace uso de encabezados separando los valores de las tasas según los trimestres correspondientes al año 2008.

Para lograr una correcta interpretación de los datos presentados en un cuadro, resulta útil tener en cuenta ciertas *normas básicas* en su elaboración.

- Tener cifras ordenadas en columnas y filas facilita las comparaciones entre sí. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que es más fácil comparar cifras ubicadas en columnas que en filas, y que las comparaciones entre columnas adyacentes es más factible de hacer que entre columnas separadas, esto último se debe tener presente sobre todo cuando existen subencabezados.
- Si hay cifras que por alguna razón se deben destacar del resto de la información, deberán colocarse en aquellas posiciones de la tabla adecuadas para tal fin. Como nuestros hábitos hacen que se lea de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, resulta que las posiciones de mayor énfasis serán para los encabezados de la izquierda (columna adyacente a la columna matriz) y de la fila superior. Por lo tanto, los Totales irán en la primera o última fila (o columna) según se quiera o no resaltar sus cifras.
- Tanto en la Columna Matriz como en los Encabezados, teniendo en cuenta la naturaleza de los datos estadísticos que se presentan las clasificaciones posibles son: cronológica, geográfica, cualitativa y cuantitativa, y la elección de una u otra se hará de forma tal que facilite el análisis y las comparaciones por parte del lector. Es posible ordenar estas clasificaciones de acuerdo a dos arreglos: alfabético o por magnitud.
- Cuando es necesario presentar la información en valores relativos utilizando porcentajes, debe indicarse respecto a qué es relativo el porcentaje, si respecto al total, si es de aumento o de disminución, a un año base, etc., o sea consignar cuál es la cifra a quien le corresponde el 100%.
- Si la precisión que presentan las cifras es innecesaria a los fines del cuadro, deberán ser redondeadas siguiendo el método tradicional: si la última cifra significativa es mayor que 5, se la elimina y se agrega una unidad a la cifra anterior; en caso contrario, simplemente se la elimina. Incluso, si éstas cifras son números grandes, puede llevarse el dato a miles o millones, en cuyo caso deberá indicarse la unidad utilizada

(esto puede ser en las notas de introducción).

- Si algún dato se desconoce, debe colocarse el símbolo: s/i (aclarando en una nota su significado). Y si algún dato es cero, debe colocarse una rayita.
- Por último, se recomienda simplicidad en la presentación de los cuadros, para lo cual se sugiere tratar el menor número posible de temas por tabla, elegir tamaño y forma adecuadas al informe que se presenta, no trazar más rayas de las necesarias para dividir columnas o filas, dejar sólo las esenciales que separan encabezados, subencabezados, la columna matriz y los totales. Todo el cuadro debe enmarcarse en un recuadro.

*Ejemplo 2-2:*

*Estadía promedio de los turistas internacionales no residentes en Argentina, por modalidad del viaje, según tipo de alojamiento  
Año 2001*

(la información corresponde a número de noches)

| Tipo de alojamiento      | Total       | EER (1)    | Modalidad del viaje   |            |                   |            |                        |            |
|--------------------------|-------------|------------|-----------------------|------------|-------------------|------------|------------------------|------------|
|                          |             |            | Con paquete turístico | EER        | Por cuenta propia | EER        | Por cuenta de terceros | EER        |
| <b>Total</b>             | <b>13.1</b> | <b>2,0</b> | <b>8.4</b>            | <b>4,4</b> | <b>14.8</b>       | <b>2,2</b> | <b>11.2</b>            | <b>3,7</b> |
| Casa de familia o amigos | 20.9        | 2,2        | 26.5                  | 14,5       | 20.6              | 2,4        | 21.8                   | 5,2        |
| Hotel 1 y 2 estrellas    | 16.5        | 4,7        | 11.3                  | 9,4        | 17.5              | 5,2        | 11.7                   | 11,4       |
| Hotel 3 estrellas        | 8.5         | 3,6        | 6.7                   | 5,9        | 9.1               | 3,9        | 8.6                    | 9,0        |
| Hotel 4 estrellas        | 6.2         | 2,2        | 6.0                   | 4,0        | 6.6               | 3,2        | 6.0                    | 3,3        |
| Hotel 5 estrellas        | 5.1         | 2,3        | 5.7                   | 5,4        | 5.2               | 3,7        | 4.9                    | 3,3        |
| Casa propia              | 19.5        | 8,0        | 23.8                  | 24,6       | 20.0              | 8,4        | 15.1                   | 19,5       |
| Alquiler                 | 58.0        | 7,7        | 23.0                  | 23,9       | 54.2              | 7,8        | 77.5                   | 16,7       |
| Otro                     | 30.1        | 7,6        | 21.8                  | 18,5       | 28.3              | 9,8        | 36.4                   | 11,0       |

*Nota:* (1) Error estándar relativo (EER): es un indicador de la precisión de los resultados obtenidos a partir de la muestra seleccionada. Cuanto menor es el EER, mayor es el nivel de precisión de la estimación correspondiente. En general se expresa en porcentaje y no tiene unidad de medida. Es habitual considerar que errores estándar relativos menores o próximos al 10% señalan resultados muestrales confiables.

*Fuente:* INDEC, Encuesta de Turismo Internacional 2001.

En el cuadro, que se presenta además de las consideraciones realizadas en el anterior, se puede señalar que, por tratarse de información obtenida por muestreo, en el cuadro se presentan columnas que indican el valor del EER, este corresponde al error estándar relativo, el cual es un indicador de la precisión, cuyo conocimiento es necesario manejar en toda estimación obtenida utilizando datos recopilados en operativos por muestreo estadísticamente diseñados y esta información está debidamente aclarada y expresada en la nota al pie.

### **Gráficos estadísticos**

Tienen por objeto presentar los datos estadísticos por medio de figuras: líneas, áreas, volúmenes, dibujos, etc.

Esta forma de presentar información suele reemplazar o complementar a los cuadros estadísticos, que sólo presentan cifras y que resultan inexpresivos; en cambio, un gráfico ayuda a visualizar rápidamente una situación, mostrándola en forma gráfica describiéndola haciendo posible su descripción, debido a su claridad, a su facilidad de comprensión y la explicitación de resultados. Un gráfico destaca ciertos hechos esenciales de los fenómenos observados y sirve como medio de control, ya que hace particularmente visible toda variación y toda discontinuidad crítica en la marcha del fenómeno en observación. Es el indicador óptimo de máximos y mínimos y de evoluciones de tendencia. Es el instrumento ideal para la comparación de clasificaciones referidas a un mismo fenómeno y representadas en la misma escala de magnitudes. Por último, diremos que un gráfico resulta siempre más atractivo y comprensible para su análisis que un cuadro, por lo cual,

difícilmente se lo deje de lado en la lectura de un texto, hecho que puede ocurrir con los cuadros.

Se debe señalar ciertas limitaciones de esta forma de presentación de información:

- En un gráfico no se puede presentar una gran cantidad de información como lo permite hacer un cuadro, ya que puede resultar confuso si en un mismo gráfico se pretende comparar varias clasificaciones.
- Al trabajar con escalas, relega la precisión del dato por lo tanto no presenta la misma precisión que los cuadros, que permiten la lectura exacta de las cifras presentadas.
- En general, la selección y confección del gráfico adecuado lleva más tiempo que la elaboración de un cuadro.

Las partes componentes de un gráfico coinciden prácticamente con las de un cuadro se puede indicar en el siguiente orden: título, diagrama, escalas, referencias, notas y fuente. Las referencias y escalas, se incluirán, según corresponda. Para el título, la fuente y las notas son válidas las mismas indicaciones que las hechas para los cuadros, salvo respecto al título que puede ir colocado en la parte superior o inferior del diagrama.

El diagrama correspondería al cuerpo del cuadro, puede presentar distintas formas y su objeto es mostrar la información a través de un gráfico; los más comunes son barras, líneas, áreas, volúmenes, mapas estadísticos y símbolos, que darán lugar a una clasificación posterior de los gráficos estadísticos. Según el tipo de diagrama utilizado será necesario hacer referencias entre simbología utilizada y rangos, cantidades, porcentajes, modalidades representadas, etc.

La escala es una de las partes de un gráfico con la que hay que tener especial cuidado. Cuando se construyen los diagramas en correspondencia al sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, en general, se ubican, en el eje de las abscisas (X) las clasificaciones cuantitativas o cronológicas, y en el de las ordenadas (Y) se representa las magnitudes que corresponden a la variable presentada. En estas situaciones se necesita tomar una escala cuyo límite inferior esté por debajo del menor valor

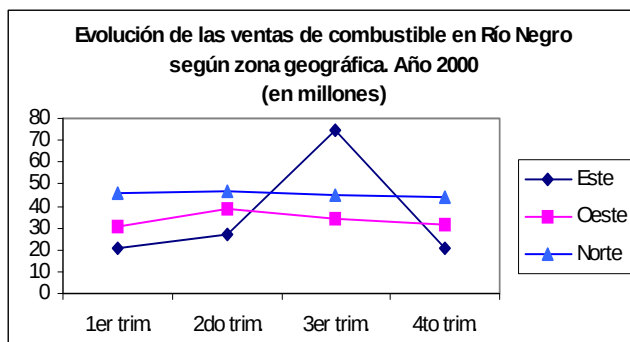
observado y cuyo límite superior cubra al mayor valor observado. La escala se marca a partir del origen del sistema (al cual le corresponde el cero); si las magnitudes tienen un rango alejado del origen, será necesario cortar el eje. Si la clasificación es cualitativa o geográfica, ésta se ubica en el eje de las ordenadas (Y).

Los gráficos se clasifican según el tipo de diagrama utilizado. A continuación, se presentan algunos de ellos elaborados con datos hipotéticos razón por la cual no se indica la fuente correspondiente.

*Gráficos lineales:* Se utilizan para presentar información cuando es de interés mostrar evoluciones, tendencias, comportamientos, ciclos, etc., en los que la variable tiempo se considera predeterminada. Son muy usados para representar la evolución de series de datos correspondientes a ingresos y egresos, llamados gráficos de Saldos Netos. Son los específicamente utilizados para Series Cronológicas tanto económicas, climatológicas, como demográficas.

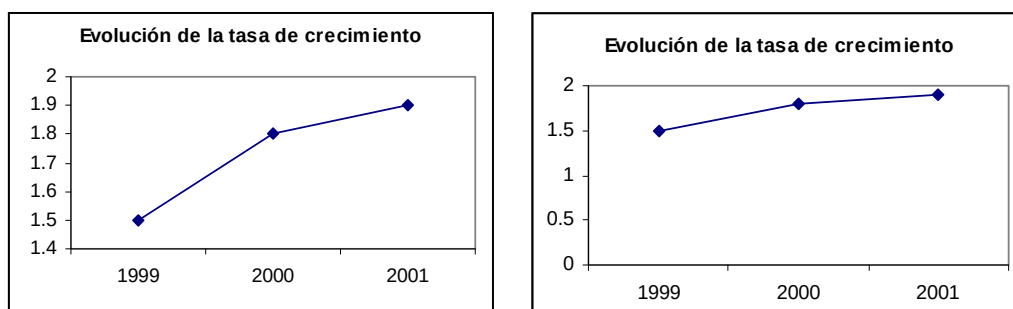
Como ejemplo, se presenta el siguiente gráfico, que permite evaluar la evolución de las ventas de combustible a través del tiempo. Como lo indican las referencias, estas ventas están clasificadas según la zona geográfica; el tiempo de observación corresponde a períodos trimestrales y la magnitud de ventas está dada utilizando una escala en millones de pesos.

En cuanto a la interpretación de la información presentada, se observa una suba importante en el tercer trimestre para el sector Este, mientras que para los otros sectores presentan una leve tendencia a disminuir.





En general, en todos los gráficos, hay que tener cuidado en la elección de la escala. La elección de una escala inadecuada puede desvirtuar la información que se quiere representar. Los siguientes gráficos lineales muestran la misma información utilizando diferentes escalas lo que da lugar a diferentes impactos visuales.



Otro aspecto a tener en cuenta es que, para hacer referencia a una evolución o tendencia se debe tener como mínimo cinco observaciones en el tiempo y que, al construir el gráfico, las escalas de las ordenadas debe tener una altura de aproximadamente la tercera parte de la escala de las abscisas.

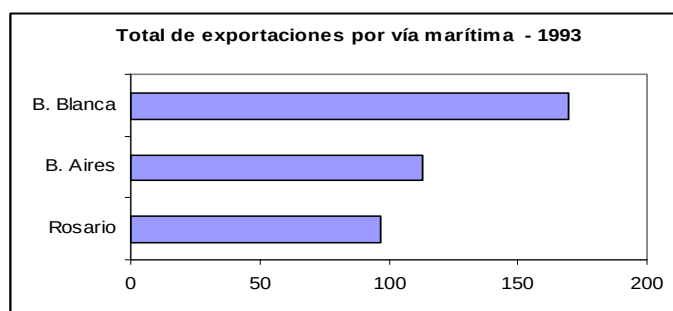
**Gráficos de barras:** Se utilizan cuando interesa presentar magnitudes absolutas o relativas según la clasificación establecida. Se recomienda no utilizar estos gráficos cuando las diversas modalidades clasificatorias sean numerosas. Se construye utilizando barras cuya longitud representa, según escala, la magnitud del dato.

Son varios los tipos de gráficos que utilizan este diseño: barras simples absolutas y porcentuales, barras subdivididas absolutas y porcentuales, barras compuestas, barra única y del de barras direccionales.

En el gráfico de *barras absolutas simples*, las barras son absolutas porque representan cantidades netas y no porcentajes, y son simples porque cada barra indica una las modalidades correspondientes a la clasificación de interés.

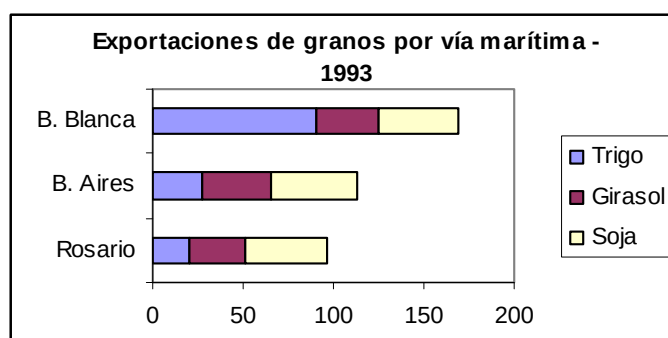
En el siguiente gráfico se observa que las barras se trazan de forma horizontal porque la variable clasificatoria "puerto de

exportación” es cualitativa y resulta recomendable que sea así, para una mejor lectura. Constatando que el mayor volumen de exportación de trigo por vía marítima se realiza por el puerto de Bahía Blanca, y que la diferencia con los otros dos puertos es muy importante. Un gráfico de este tipo, pero que utilice una escala de valores en porcentaje, es un gráfico de barras porcentuales simples.

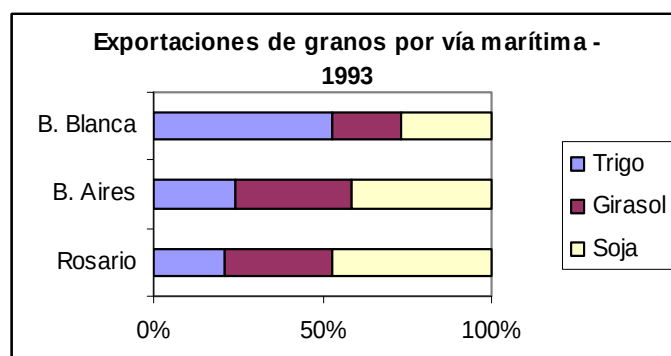


Los gráficos de *barras subdivididas* permiten presentar conjuntamente mayor cantidad de clasificaciones. En los ejemplos siguientes, se presenta la clasificación de las exportaciones según puerto de exportador y, a su vez, se las considera a éstas según clase de grano. Cada barra se subdivide de acuerdo con la composición de la misma.

En las *barras subdivididas absolutas* el valor máximo de la barra indica el total. Este gráfico permite comparar tanto el *total* de exportaciones de cada lugar como la *cantidad* de exportaciones de cada modalidad (trigo, girasol etc.).

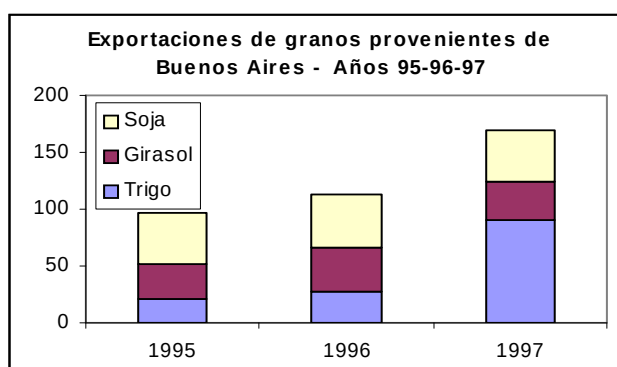


En el gráfico de *barras subdivididas porcentuales* se compara la *proporción* de exportación de cada tipo de grano, respecto al total, en los diferentes lugares.

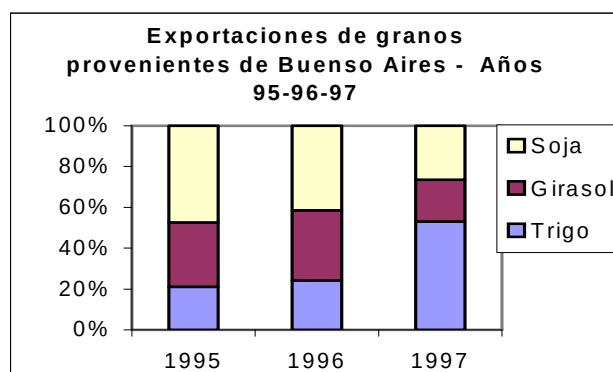


Leyendo el gráfico se observa que hay un mayor volumen de exportación desde el puerto de bahía blanca y que, en este puerto, la exportación de trigo es la más significativa. En el gráfico porcentual podemos observar que la proporción de soja exportada desde el *puerto de rosario es mayor a la de los otros puertos*.

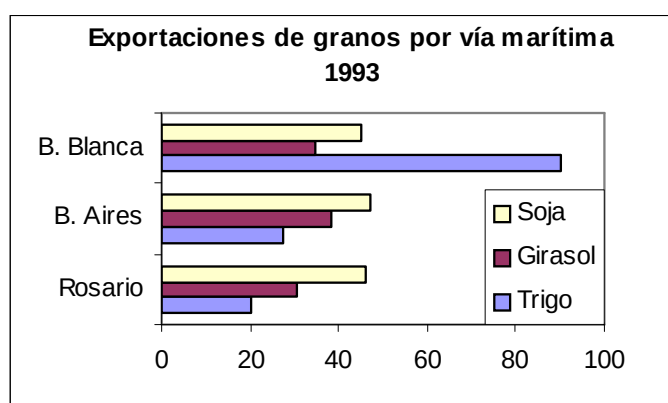
De la misma manera, es posible confeccionar gráficos de barras subdivididas verticales cuando la variable clasificatoria es cronológica o cuantitativa.



El siguiente gráfico corresponde a *barras subdivididas porcentuales*, en éste se observa la composición de cada barra relativa a cada total a quien corresponde el 100%. La lectura se realiza por ejemplo: la proporción de soja en el año 1995 es mayor que en el 1996 y 1997, gráfico de la derecha, aunque la exportación total de ese año sea mucho menor que en los otros.



Los gráficos de *barras compuestas* utilizan una barra para cada una de las modalidades de la subclasificación “granos” correspondientes a cada una de las categorías definidas en la primera clasificación “puerto de exportación”. Estas barras permiten una mejor comparación entre las modalidades correspondiente a granos.

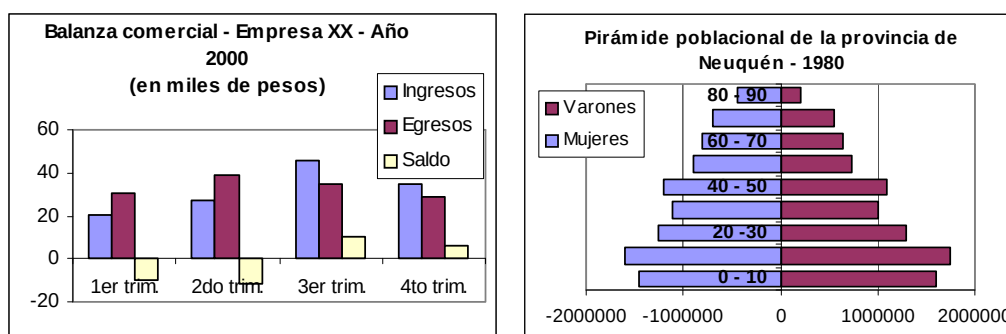


Interpretando los datos presentados en el gráfico, puede observarse que la exportación de trigo varía considerablemente según el lugar, la producción de soja es casi igual y se observa una pequeña diferencia en la producción de girasol.

La cercanía de las barras en la subclasificación permite una mejor comparación que entre la clasificación realizada inicialmente. Esto conlleva la posibilidad de intercambiar en el ejemplo, granos como clasificación primaria, por puerto de exportación como subclasificación

En las *barras direccionales*, el sentido de las barras asume un significado específico.

Las aplicaciones más frecuentes de estas barras es cuando se presenta información de datos con saldos que pueden ser positivos o negativos referidos a la Balanza Comercial. Otra aplicación es en Demografía al presentar datos referidos a la edad y sexo de las poblaciones en estudio, en este caso se presenta a la población según rango de edades, medido sobre el eje de ordenadas y se utilizan barras en dos direcciones; las de la izquierda representan el número de mujeres, y las otras el número de varones.



*Gráficos de áreas:* en este tipo de gráficos se representan las magnitudes en relación al área, es decir mayor área corresponde a mayor magnitud del dato.

Así se construyen por ejemplo los gráficos de sectores, comúnmente llamados “gráficos de torta”, los gráficos de franjas o partes componentes, entre otros.

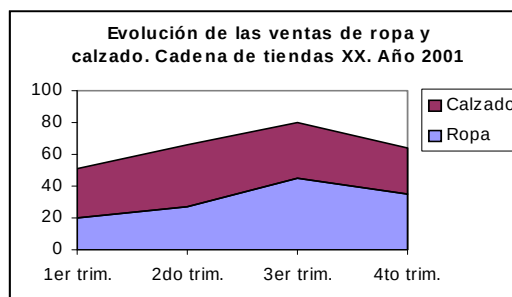
El gráfico de sectores es siempre porcentual y es equivalente a realizar un gráfico con una barra porcentual única. En el ejemplo presentado a continuación, el sector circular de mayor área corresponde a fútbol, indicando en consecuencia que es el deporte preferido. Por tratarse de un gráfico que presenta información en cifras relativas, es conveniente indicar en el mismo cual es la cifra correspondiente al 100%, en este caso se consigna en la nota al pie.



*Nota:* El 100% corresponde a 250 alumnos

*Fuente:* Elaboración propia.

El gráfico de franjas muestra los valores totales de las ventas y su composición según áreas resultantes de las franjas componentes para diferentes rubros; además se puede observar como gráfico lineal la tendencia o evolución, al considerar la información para los cuatro trimestres del año.

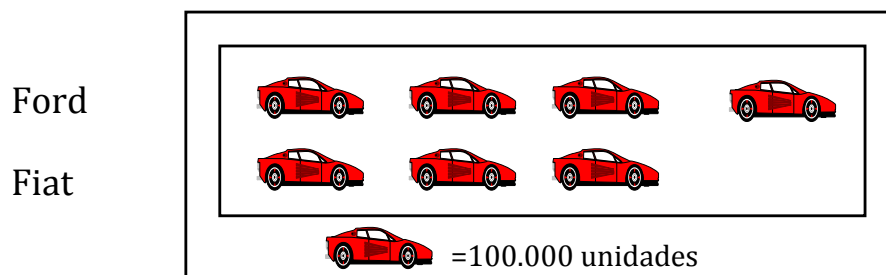


*Fuente:* Dirección de Industria y Comercio

Entre otros tipos de gráficos encontramos: Gráficos de volumen, pictogramas, mapas estadísticos, etc.

En los pictogramas -se presenta un ejemplo a continuación- cada dibujo indica una cierta cantidad de unidades. No se puede variar el tamaño del dibujo pero sí se puede cortar proporcionalmente.

#### Producción automotriz 2001



Concluyendo, algunas *reglas generales* que son útiles al momento de decidir que tipo de gráfico se utilizará, más algunas recomendaciones para graficar la información son las siguientes:

- Los gráficos lineales son ideales para representar series de tiempo. En caso de existir más de una clasificación, se usan distintos trazos, que deben ser aclarados en las referencias.
- Los gráficos de barras verticales generalmente, se usan para las clasificaciones cronológicas o cuantitativas.
- Los gráficos de barras horizontales se utilizan generalmente, para clasificaciones cualitativas o geográficas, por una cuestión de claridad en la lectura.
- Las barras son rectángulos horizontales o verticales, todos de igual ancho y cuya longitud es proporcional al dato que representan.
- Las barras no deben ser excesivamente cortas y anchas, ni largas y angostas.
- Entre barra y barra debe dejarse un espacio menor que el ancho de la barra y mayor que la mitad de dicho ancho.
- No deben rayarse las barras con líneas horizontales ni verticales, ni usar ningún tipo de sombreado que produzca efectos ópticos de dimensiones espurias.
- No debe usarse un número excesivo de barras por gráfico, (no más de 6).
- Las escalas pueden ser en valor absoluto o porcentual.
- Las barras subdivididas son ideales para reflejar las cifras correspondientes al total general conjuntamente con las correspondientes a subclasificaciones.
- La barra única generalmente es horizontal, la escala es en valores porcentuales y su longitud total corresponde al 100%. En valores relativos se representan las partes componentes del total.
- Las barras compuestas se utilizan para comparar dos series de datos. Una considerada como clasificación y la otra como subclasificación.

- Si la serie cronológica corresponde a menos de cinco observaciones, se recomienda utilizar gráfico de barras; si supera este número se utilizará un gráfico lineal.
- Las barras direccionales se utilizan para reflejar las variaciones en uno y otro sentido: ingresos y egresos; importaciones y exportaciones; migraciones y emigraciones; positivo y negativo; masculino y femenino.

### **Análisis de la información**

El investigador, frecuentemente, se encuentra en la situación de requerir para su trabajo gran cantidad de datos, resultándole imposible absorberlos en su totalidad. Del mismo modo, en caso de disponer de ellos, tampoco puede comprender intuitivamente lo que los datos contienen. En estos casos debe resumir la información recopilada, para lo cual emplea métodos de cálculo de medidas, coeficientes, que le permiten sustituir la masa total de información por algunas pocas cantidades. En esta etapa el investigador deberá explicar comportamientos de la variable que se han estudiado, realizar pronósticos o estimaciones, buscando los modelos adecuados. En casos de datos multidimensionales, deberá trabajar con técnicas que le permitan detectar factores subyacentes, definir grupos de clase homogéneos, etc. En general, para fundamentar sus conclusiones, recurre a alguno de los métodos que proporciona la Estadística.

En cualquiera de las situaciones mencionadas es importante indicar claramente las limitaciones a las que queda sujeta la conclusión obtenida, explicando los alcances de la información suministrada, así como las condiciones de los métodos aplicados.

Es claro que si la investigación demanda realizar una inferencia acerca de los valores poblacionales el trabajo de recopilación de información se realizó trabajando con diseño experimental que garantiza muestras representativas y aleatorias.



## **Interpretación de resultados**

En esta etapa, el investigador da una explicación comprensiva de la investigación y de los resultados hallados, para así arribar a una conclusión confiable.

En principio resulta recomendable responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las conclusiones que se desprenden del análisis?
- ¿Qué nos dicen las cifras, que sea novedoso para el conocimiento actual del tema?
- ¿Este trabajo refuerza, modifica, hipótesis establecidas, o da lugar a la formulación de nuevas hipótesis de trabajo?
- ¿Es el estudio lo suficientemente amplio que compruebe o refute opiniones anteriores?

Los resultados deben interpretarse a la luz de las limitaciones del material original. No deben deducirse conclusiones demasiado precisas de datos que, por si mismas, no son más que aproximaciones. Sin embargo, es de esencial importancia que el investigador descubra y aclare todo lo que haya de útil o aplicable en sus datos.

Así como en el momento de recopilar la información existe una propensión a aceptar cualquier dato estadístico sin dudar de su exactitud, también suele ocurrir que se mal usen o se mal interpreten algunos resultados provenientes de estudios fundamentados en métodos estadísticos, tal como es el caso de tasas de desocupación obtenidas por lo general como resultado de encuestas por muestreo, que se generalizan a toda la población y no a las sub poblaciones de donde se extrae la muestra.

Para evitar esto, en esta etapa no se debe dejar de mencionar cual fue el marco poblacional sobre el que se seleccionó la muestra y, si es posible dar el grado de error o el intervalo de confianza con que se realiza la predicción o estimación presentada.

### *Práctico*

1- Justificándose en las definiciones de los conceptos básicos vistos en la teoría indique en cada uno de los siguientes casos si se trata de un estadístico, un dato o una inferencia estadística:

- a) Una muestra de 250 asalariados del sector frutícola del alto valle señaló un ingreso per cápita de 144,60 pesos
- b) Basándose en una muestra aleatoria de 250 asalariados de una empresa frutícola se conjetura que el ingreso medio de todos los asalariados de esta ciudad es aproximadamente de 145 pesos
- c) Este año mis gastos en capacitación fueron de 480 pesos
- d) El programa especial de TV. emitido el lunes último fue visto por 23.500 personas.

2- Una firma industrial está comprometida en la producción de artículos metálicos para la industria espacial. Entre sus productos hay tornillos para los cuales existen estrechos márgenes de tolerancia respecto a sus diámetros. Como parte de los procedimientos de control de calidad, se selecciona cierto número de tornillos de la producción diaria y se los mide cuidadosamente:

- a) Los tornillos seleccionados para su estudio constituyen:
  - a.1) la población
  - a.2) una variable
  - a.3) una muestra
  - a.4) un estadístico
  - a.5) un parámetro
- b) Los diámetros de los tornillos constituyen
  - b.1) estadísticos
  - b.2) parámetros
  - b.3) datos
  - b.4) variables
- c) El diámetro promedio de los tornillos de la muestra constituye:
  - c.1) un parámetro
  - c.2) una variable

- c.3) un dato
- c.4) un estadístico
- d) Se desea generalizar el resultado obtenido mediante la muestra a la producción total del día obteniendo:
  - d.1) un dato
  - d.2) un valor de variable
  - d.3) un parámetro
  - d.4) la población total
- e) El diámetro medio de todos los tornillos producidos en un día constituye:
  - e.1) el parámetro
  - e.2) la variable
  - e.3) el dato
  - e.4) la población
  - e.5) el estadístico

3- Para los ejemplos sobre definiciones de términos comúnmente usados en estadística, conteste:

- a) Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello recoge uno de cada 100 tornillos fabricados y lo analiza. El conjunto de tornillos analizados: ¿es población o muestra? ¿Por qué?
- b) Un fabricante de vasos de vidrio quiere estudiar la resistencia que presentan a la rotura. El procedimiento consiste en someterlos a presiones paulatinamente crecientes, hasta que se parten. ¿Puede hacer el estudio sobre la población o debe sacar una muestra? ¿Por qué?
- c) Un campesino posee 127 gallinas. Para probar la eficacia de un cierto tipo de alimento, las pesa a todas antes y después de los 20 días que dura el tratamiento. El conjunto de estas 127 gallinas, ¿es población o muestra?
- d) Los métodos usados en el ejercicio a) y c), son relativos a la estadística descriptiva o a la estadística inferencial?

4 - Bosquejar un cuadro para presentar la información referida a las publicaciones recibidas por el Consejo Provincial de Educación durante el año 2009:

- Áreas Administración, Estadísticas, Congresos
- Tipo Provinciales, Nacionales
- Forma de Adquisición Compradas, donadas

5 - Bosquejar un cuadro para presentar la información referida al personal obrero de una empresa textil en el primer semestre de 2009, según:

- Sexo Varón Mujer
- Categoría 14, 15, 16
- Inasistencias Justificadas, Injustificadas

6 - De acuerdo a la Edición Especial '95 de la revista Becas & Empleos la cantidad de carreras con título de master en la República Argentina en el año 1995 es la siguiente:

|                             | Cs. Básicas<br>y Tecnológicas | Ciencias<br>Sociales | Ciencias<br>Humanas | Ciencias<br>Médicas | Total |
|-----------------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------|---------------------|-------|
| Univ. y Centros<br>Privados | 16                            | 81                   | 7                   | 8                   | 112   |
| Universidades<br>Nacionales | 69                            | 55                   | 21                  | 16                  | 161   |
| Total                       | 85                            | 136                  | 28                  | 24                  | 273   |

- Comparar gráficamente la oferta global de ambos sectores.
- Comparar gráficamente ambos sectores de acuerdo a las diferentes especialidades.
- Comparar gráficamente la composición relativa de ambos sectores de acuerdo a las diferentes especialidades.



# Una introducción a los Números Complejos

Rudy Rosas Bazán <sup>1</sup>

## Introducción

En el tratado *Ars Magna* de 1545, Girolamo Cardano expone varios métodos para resolver las ecuaciones cúbicas. En particular, para la ecuación

$$x^3 = 3px + 2q$$

Cardano da la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Aunque es fácil “comprobar” esta fórmula por simple sustitución, ella trae consigo varias preguntas, que permanecieron sin respuesta por muchos años, por ejemplo, para la ecuación  $x^3 = 15x + 4$  la fórmula nos da:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Por otro lado, es fácil verificar que  $x = 4$  es una raíz de esta ecuación. Entonces: ¿cómo es posible obtener  $x = 4$  de la expresión anterior? ... además ... siendo  $x = 4$  una solución real, ¿por qué su cálculo pasa por “números que no existen”? ... ¿es inevitable pasar por estos números “extraños” para obtener la solución real  $x = 4$ ? ... estas eran algunas de las preguntas que se plantearon en la época, y es así que comienza la historia de los números complejos.

Ya en la secundaria aprendemos a tratar con números complejos, aunque no los comprendamos del todo, su manipulación es algebraicamente sencilla. Ya en esta época nos encontramos con la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

que quizás sea la fórmula más misteriosa que aprendemos en la secundaria. ¿Que sentido tiene la exponencial de un número imaginario? ... en particular, para  $\theta = \pi$  obtenemos la famosa identidad

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta igualdad, tan maravillosamente sencilla, relaciona algunos de las constantes más importantes de toda la matemática: la base de los logaritmos naturales, la razón entre una circunferencia y su diámetro, la unidad y el ¡cero!... ¿Qué sentido tiene esta expresión? ...

Estas son algunas de las preguntas que esperamos aclarar en estas páginas...

### **Primera presentación de los números complejos**

En un primer momento, al menos así se hace en la secundaria, se define un número complejo como una expresión de la forma  $a + ib$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales cualesquiera. Los números  $a$  y  $b$  son llamados parte real y parte imaginaria del número complejo, respectivamente. Dos números complejos son iguales si y solamente si, son iguales sus partes reales y sus partes imaginarias. La manera de manipular o realizar operaciones con números complejos sigue las mismas reglas que gobiernan a los números reales, tratando el símbolo  $i$  como si fuera "una variable" y teniendo además en cuenta la igualdad  $i^2 = -1$ , la cual vale por definición. Así por ejemplo:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(5 - 2i) &= (3 + 2i)(5) + (3 + 2i)(-2i) \\ &= (15 + 10i) + (-6i - 4i^2) \\ &= 15 + 10i - 6i - 4(-1) \\ &= 19 + 4i.\end{aligned}$$

Por definición, el cociente del número complejo  $a + bi$  por el número complejo  $c + di$  es (si existe) un número complejo  $x + yi$  tal que

$$(a + bi) = (c + di)(x + yi),$$

o sea

$$a + bi = (cx - dy) + (cy + dx)i.$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias obtenemos un sistema lineal con dos incógnitas, cuya única solución será  $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ ,  $y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ , siempre que  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Es decir, la división de números complejos está bien definida y es única, siempre que el divisor sea diferente de  $0 + 0i$ . El número  $0 + 0i$  es llamado "cero" y se denota simplemente por 0. En general, todo complejo de la forma  $a + 0i$  ó  $0 + bi$  se escribe simplemente como  $a$  y  $bi$  respectivamente<sup>2</sup>. De esta manera, los complejos de la forma  $a + 0i = a$  son naturalmente interpretados como números reales, así que usualmente pensamos que el conjunto de los números reales (denotado por  $\mathbb{R}$ ), está contenido en el conjunto de los números complejos (denotado por  $\mathbb{C}$ ).

### Y ¿cómo aparecieron los números complejos?

En la sección anterior vimos la manera en que usualmente se produce nuestro primer encuentro con los números complejos. Pero, ¿cómo aparecieron en realidad los números complejos?

#### *La ecuación cuadrática*

Desde muy jóvenes aprendemos a resolver ecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde  $a \neq 0$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. Como sabemos, esta ecuación nos plantea el problema de encontrar un número real  $x$  tal que al calcular la expresión  $ax^2 + bx + c$ , el resultado sea igual a cero. Puesto que  $a \neq 0$ , es equivalente tener  $x^2 + (b/a)x + c/a = 0$  y un tal  $x$  debe también satisfacer la igualdad:

---

<sup>2</sup> Esto se puede considerar también como una "regla algebraica":  
 $0x = 0$  y  $0 + x = x$ .



$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Es fácil verificar que el primer miembro de esta ecuación es lo mismo que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Luego, el número  $x$  (si existe) deberá satisfacer la igualdad:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Entonces, puesto que el cuadrado  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  no puede ser un número negativo, nuestro  $x$  existirá si y sólo si  $b^2 - 4ac \geq 0$  (ya que  $4a^2 > 0$ ) y en este caso tendremos dos posibilidades:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta es la clásica fórmula de las raíces de una ecuación cuadrática, muy conocida por todos nosotros, ¿cierto? De lo visto arriba, concluimos que nuestra ecuación cuadrática tendrá alguna solución real si y sólo si el número  $b^2 - 4ac$  no es negativo. Si tuviéramos  $b^2 - 4ac < 0$ , a pesar de que no existen soluciones reales, “aprendimos” que en este caso las soluciones son números complejos y simplemente dejamos indicada la raíz del número negativo  $b^2 - 4ac$  o simplificamos la expresión usando la igualdad  $\sqrt{-1} = i$ . Así por ejemplo, para la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{obtenemos las “soluciones”} \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

*Ejercicio 1.* Si  $a$  y  $b$  son números reales cuya suma es igual a  $S$  y cuyo producto es igual a  $P$ , entonces estos números son iguales (en algún orden) a las raíces de la ecuación  $x^2 - Sx + P = 0$ . Luego, para que existan tales números reales  $a$  y  $b$ , deberemos

tener  $S^2 - 4P \geq 0$  y en este caso los números buscados serán iguales a

$$\frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \text{ y } \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2},$$

en algún orden.

El método para resolver las ecuaciones cuadráticas se conoce desde la antigüedad. Se sabe que los egipcios y babilonios sabían resolver ecuaciones cuadráticas utilizando esencialmente el mismo método descrito arriba, aunque estas civilizaciones no concebían ni siquiera el concepto de número negativo y mucho menos usaban la (muy útil) notación moderna.

### *La ecuación cúbica*

Podría pensarse que la resolución de ecuaciones cuadráticas causó la aparición de los números complejos, pero esto es incorrecto. Así por ejemplo, la ecuación  $x^2 + x + 1 = 0$  era considerada simplemente irresoluble, ya que no existía ningún número real que la cumpliera y en realidad este tipo de ecuaciones no tenían ningún interés para los matemáticos de la antigüedad. Aparentemente, fue el italiano Girolamo Cardano (1501+75=1576) el primero en utilizar, aunque tímidamente, expresiones que involucraban raíces cuadradas de números negativos.

En su obra *Ars Magna* (1545), Cardano describe por primera vez un método para resolver las ecuaciones cúbicas (aunque este método fue en realidad descubierto por Scipione del Ferro y Tartaglia, independientemente). Para ilustrar este método, resolvamos la ecuación  $x^3 - 6x - 6 = 0$ .

Hagamos  $x = r + s$  y sustituyamos esto en la ecuación:

$$(r + s)^3 - 6(r + s) - 6 = 0.$$

Efectuando el cubo y agrupando convenientemente, obtenemos:

$$\begin{aligned} r^3 + s^3 + 3rs(r + s) - 6(r + s) - 6 &= 0 \\ (r^3 + s^3 - 6) + (3rs - 6)(r + s) &= 0. \end{aligned}$$

Para tener esta igualdad, sería suficiente encontrar números reales  $r$  y  $s$  que satisfagan simultáneamente las ecuaciones  $r^3 + s^3 - 6 = 0$  y  $3rs - 6 = 0$ . De ahí obtenemos  $r^3 + s^3 = 6$  y  $r^3 s^3 = 8$  y aplicando el ejercicio 1, vemos que  $r^3$  y  $s^3$  serán las raíces de la ecuación  $t^2 - 6t + 8 = 0$ . Por consiguiente  $r$  y  $s$  serán iguales (en algún orden) a  $\sqrt[3]{4}$  y  $\sqrt[3]{2}$  y obtenemos finalmente que  $x = r + s = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$  es una solución de la ecuación cúbica. Es posible probar, y Cardano lo sabía, que esta ecuación posee una única solución real, así que este método nos da una solución completa en este caso.

En general, Cardano considera una ecuación de la forma  $x^3 = 3px + 2q$ . En este caso, procediendo exactamente igual que arriba ([hágalo!]), vemos que es suficiente encontrar números reales  $r$  y  $s$  que satisfagan simultáneamente las ecuaciones  $r^3 + s^3 - 2q = 0$  y  $3rs - 3p = 0$ . Luego  $r^3$  y  $s^3$  deberán ser las raíces de la ecuación  $t^2 - 2qt + p^3 = 0$ , es decir, iguales a

$$q + \sqrt{q^2 - p^3} \text{ y } q - \sqrt{q^2 - p^3} \text{ (siempre que } q^2 - p^3 \geq 0 \text{)}.$$

Así,  $r$  y  $s$  serán iguales a los números

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} \text{ y } \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

y finalmente obtenemos la solución:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Cabe señalar que la exposición de Cardano es muy laboriosa y está dividida en muchos casos, esto porque Cardano sólo admite coeficientes positivos y por ejemplo trata como casos diferentes las ecuaciones  $x^3 = 6x + 6$  y  $x^3 + 6x = 6$ . Además, la notación que se usaba en aquel tiempo hacia que los razonamientos sean aún mas pesados, de hecho, Cardano daba incluso enunciados verbales de muchos de sus resultados. Así, con nuestra notación moderna, conseguimos exponer en pocas líneas lo que a Cardano le ocupó dos o tres páginas.

Observe que el método expuesto arriba, en principio, no podría realizarse si  $q^2 - p^3 < 0$ . Este problema se vuelve mucho mayor si intentamos pensar como personas del siglo XVI, ni siquiera los números negativos eran completamente aceptados en esta época, así que muchísimo mas extraña era la idea de extraer la raíz cuadrada a un número negativo, esto simplemente ¡no existía! Sin embargo, queda en el aire una pregunta: ¿qué ocurre si  $q^2 - p^3 < 0$ ? ... esto significa que la ecuación  $x^3 = 3px + 2q$  no tiene soluciones? Pues el siguiente ejemplo, ya conocido por Cardano, aclara un poco esta cuestión. Considere la ecuación  $x^3 = 15x + 4$ . Es fácil ver que  $x = 4$  es una raíz de esta ecuación. Sin embargo, en este caso tenemos que  $q^2 - p^3 = 2^2 - 5^3 = -121$  es un número negativo y ¡no admite raíz cuadrada! A pesar de esto, si “aplicamos” la regla de Cardano en este caso, obtenemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (3.1)$$

¿Qué significado puede tener esta expresión? ... ¿mediante qué método podría obtenerse la solución  $x = 4$ ? Aparentemente, Cardano nunca pudo resolver esta cuestión. Sin embargo, esta no era la primera vez que Cardano trataba con raíces cuadradas de números negativos. En otra parte de su libro se plantea el problema de hallar dos números que sumen 10 y que su producto sea 40. Cardano concluye que la solución tendría que ser dada por los “números”  $5 + \sqrt{-15}$  y  $5 - \sqrt{-15}$ . Las raíces de números negativos, que Cardano llama “sofísticas”, deberían cumplir las mismas reglas que los números reales, así:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.$$

Sin embargo, Cardano mismo considera este resultado como un ejercicio inútil.

### *La idea de Bombelli*

Fue el italiano Rafael Bombelli (1526+47=1573) quien, “sin temor”, comenzó a tratar con expresiones que involucran raíces cuadradas de números negativos. El fue el primero en aceptar sin reservas la existencia de  $\sqrt{-1}$  como “un número más”. Así, Bombelli se propuso obtener la raíz  $x = 4$  a partir de la fórmula 3.1 y su gran idea fue suponer que la raíz cúbica del número  $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1}$  debía ser también un número de la forma  $a + b\sqrt{-1}$ . Entonces se dispuso a encontrar números reales  $a$  y  $b$  tales que:

$$(a + b\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

luego:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3 &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1} &= 2 + 11\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Naturalmente, Bombelli sabía que los números  $A + B\sqrt{-1}$  y  $C + D\sqrt{-1}$  sólo podían ser iguales si  $A = C$  y  $B = D$ : en la igualdad  $(A - C) = (D - B)\sqrt{-1}$  no podría tenerse  $D - B \neq 0$  ya que entonces se tendría  $(A - C)/(D - B) = \sqrt{-1}$ , lo que es absurdo ya que la raíz cuadrada de  $-1$  no es igual a ningún número real, entonces  $B = D$  y  $A = C$ . Así, la ecuación de arriba se reduce a encontrar soluciones reales para el sistema

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 &= 2 \\ 3a^2b - b^3 &= 11. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando miembro a miembro, obtenemos:

$$\begin{aligned} (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2 &= 125 \\ a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 &= 125 \\ (a^2 + b^2)^3 &= 125 \\ a^2 + b^2 &= 5. \end{aligned}$$

Reemplazando  $b^2 = 5 - a^2$  en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}a^3 - 3a(5 - a^2) &= 2 \\4a^3 &= 15a + 2.\end{aligned}$$

Es fácil verificar que  $a = 2$  es una solución de esta última ecuación. Luego encontramos  $b = 1$ . Así que ahora podríamos escribir la igualdad:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}.$$

Análogamente, podemos verificar que  $2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$ , así que podríamos también escribir

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

y finalmente de la ecuación 3.1 obtendríamos

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}),$$

O sea ¡ $x = 4$ !

Todo este procedimiento no nos da en realidad un algoritmo para calcular las raíces de una ecuación cúbica. Observe que a mitad del argumento nos hemos topado con otra ecuación cúbica ( $4a^3 = 15a + 2$ ), para la cual hemos hallado una solución por “pura suerte” (la misma suerte que nos hizo observar que la ecuación original tiene como raíz a  $x = 4$ ), intentar resolver esta última ecuación nos introduciría en un “procedimiento cíclico”, sin obtener ningún resultado. Sin embargo, la importancia de las consideraciones de Bombelli son mas bien de naturaleza teórica o hasta filosófica. Bombelli muestra que es posible hallar soluciones reales de una ecuación cúbica, pasando, en el camino, por “números que no existen”, números que, aunque no se comprendan, al final nos llevan a una ¡solución correcta!

## El plano complejo

A pesar de los trabajos de Bombelli sobre el empleo de los números complejos en la resolución de las ecuaciones cúbicas, estos números permanecieron rechazados por la mayoría de

matemáticos de aquel tiempo. Estos números eran considerados imposibles o “imaginarios”, como si fueran entes de otro mundo. Esta situación permaneció así por mucho tiempo, y los números complejos sólo fueron plenamente aceptados después de que se concibiera su interpretación geométrica.

A continuación consideraremos un plano  $P$ , sobre el cual definiremos dos operaciones binarias. Primero, fijemos un sistema de coordenadas cartesianas en  $P$ : todo punto de  $P$  será representado por un único par  $(a, b)$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales. Definiremos sobre  $P$  una operación que a cada par  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  de puntos de  $P$ , le asocia el punto  $s = (a + c, b + d)$  de  $P$ . Este punto es llamado “suma” de  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  y resumiremos esta situación escribiendo  $p + q = s$ , es decir:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

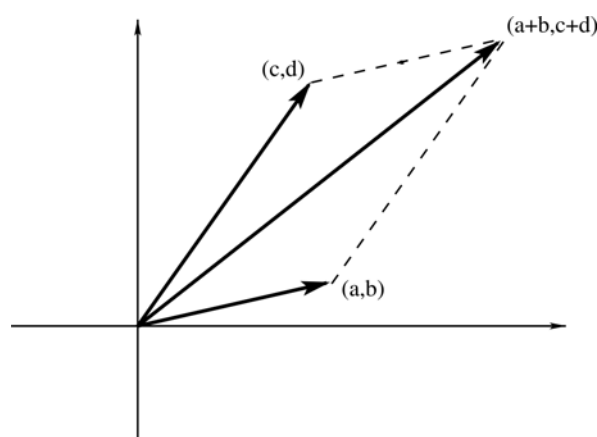
A pesar de que usemos la palabra “suma” y el signo  $+$  para la operación que hemos definido (podríamos usar cualquier otra palabra y cualquier otro signo), no tenemos porque relacionar esta operación con la conocida suma de números reales. Recuerde que los elementos de  $P$  son puntos de un plano y no números, y esta suma sólo nos da una regla para, a partir de un par de puntos de  $P$  y como si fuera un juego, obtener un tercer punto de  $P$  (suma). Sin embargo, una vez definidas las reglas del juego y “después de jugar un rato” podemos deducir ciertas propiedades para esta operación:

1.  $p + q = q + p$  para cualesquiera  $p, q \in P$   
(conmutatividad)
2.  $(p + q) + r = p + (q + r)$  para cualesquiera  $p, q, r \in P$  (asociatividad)
3. El punto  $(0, 0)$ , que denotaremos por  $\tilde{0}$ , es tal que  $\tilde{0} + p = p + \tilde{0} = p$  para todo  $p \in P$
4. Para cualquier  $p \in P$ , existe un único punto, denotado por  $-p$ , tal que  $p + (-p) = (-p) + p = \tilde{0}$

El punto  $\widetilde{0}$  es llamado elemento neutro para la suma de puntos y el punto  $-p$  es llamado el opuesto aditivo de  $p$ . Usaremos el símbolo  $p - q$  para denotar el punto  $p + (-q)$  (diferencia entre  $p$  y  $q$ ).

No debemos confundir estas propiedades (aunque luzcan iguales) con las propiedades de la suma de números reales (no olvide que estamos tratando con puntos en un plano), así que todas estas propiedades deben ser demostradas. Sin embargo, las demostraciones son muy sencillas y se basan en las propiedades de la suma de números reales, así que dejaremos esta tarea para el lector.

*Nota 1.* Esta suma de puntos es la conocida suma de vectores y una manera gráfica de entenderla se consigue vía el método del paralelogramo.



Definiremos a continuación una segunda operación en el  $P$ . A partir de un par de puntos  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  en  $P$ , definimos el punto  $s = (ac - bd, ad + bc)$ . Este punto es llamado “producto” de  $p$  y  $q$  y escribiremos  $s = p \cdot q^3$ , es decir:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Igual que antes, a pesar de que usemos el mismo nombre y el mismo símbolo que en el caso del producto de números reales,

---

<sup>3</sup> O simplemente  $s = pq$ .



no olvidemos que esta es una operación entre puntos de un plano, es sólo una regla para obtener un punto a partir de un par de puntos dados. Naturalmente, se puede también en este caso deducir algunas propiedades para el producto de puntos:

1.  $p \cdot q = q \cdot p$  para cualesquiera  $p, q \in P$  (conmutatividad)
2.  $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$  para cualesquiera  $p, q, r \in P$  (asociatividad)
3. El punto  $(1, 0)$ , que denotaremos por  $\tilde{1}$ , es tal que  $\tilde{1} \cdot p = p \cdot \tilde{1} = p$  para todo  $p \in P$
4. Para cualquier  $p \neq 0$ , existe un único punto, denotado por  $p^{-1}$ , tal que  $p \cdot (p^{-1}) = (p^{-1}) \cdot p = \tilde{1}$

El punto  $\tilde{1}$  es llamado elemento neutro para el producto de puntos y el punto  $p^{-1}$  es llamado el inverso multiplicativo de  $p$ . Las propiedades 1 y 3 son realmente sencillas de verificar. Probemos las propiedades 2 y 3. Sean  $p = (a, b)$ ,  $q = (c, d)$  y  $r = (e, f)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 (p \cdot q) \cdot r &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\
 &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\
 &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\
 &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\
 &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\
 &= p \cdot (q \cdot r),
 \end{aligned}$$

esto prueba la propiedad asociativa. Ahora, si  $p = (a, b)$  es diferente de  $\tilde{0}$ , entonces  $a^2 + b^2 \neq 0$  y podemos definir  $p^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in P$ . Es fácil verificar que  $p \cdot (p^{-1}) = (p^{-1}) \cdot p = \tilde{1}$ . Por otro lado, si tuviéramos  $p \cdot y = y \cdot p = \tilde{1}$  para algún  $y \in P$ , entonces

$$\begin{aligned}
x \cdot (p \cdot y) &= x \cdot (\tilde{1}) \\
(x \cdot p) \cdot y &= x \\
(\tilde{1}) \cdot y &= x \\
y &= x,
\end{aligned}$$

por lo tanto, el inverso multiplicativo de  $p$  es único. Cuando  $p, q \in P$  y  $q \neq \tilde{0}$  usaremos el símbolo  $p/q$  para representar el punto  $p \cdot q^{-1}$  (cociente de  $p$  por  $q$ ).

Por último, para cualesquiera  $p, q, r \in P$  se cumple que:

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r.$$

Esta es la conocida propiedad distributiva, cuya demostración dejaremos al lector.

El lector ya debe haber notado que las 9 propiedades<sup>4</sup> que hemos mostrado para la suma y el producto de puntos de  $P$ , son las mismas propiedades que gobiernan la manipulación de números reales. Esto no es casualidad, ya que las operaciones que hemos definido para los puntos de  $P$  han sido ideadas (y esto tomo mucho tiempo y mucho esfuerzo) justamente con este propósito. Como sabemos, todas las “propiedades algebraicas” de los números reales son consecuencia de las 9 propiedades citadas arriba, así que cualquier propiedad algebraica de los números reales será también una propiedad satisfecha por los puntos de  $P$ . Por ejemplo:

$$pq = \tilde{0} \Rightarrow p = \tilde{0} \quad q = \tilde{0},$$

esta propiedad tiene como consecuencia la muy conocida regla de cancelación:

$$px = py, p \neq 0 \Rightarrow x = y.$$

---

<sup>4</sup> Estas son las propiedades que definen a un Cuerpo o Campo, así, tanto  $\mathbb{R}$  como  $P$  son ejemplos de cuerpos.

Identidades del tipo  $(-a)^2 = a^2$  y  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  valen también para puntos de  $P$ . Cualquier demostración de estas propiedades que se haga en el caso de los números reales, deberá basarse sólo en la aplicación de las 9 propiedades de arriba, así que esta misma demostración podrá reproducirse, paso a paso, en el caso de  $P$ .

Algunas identidades algebraicas tienen una escritura sutilmente distinta en el caso de  $P$ :

*Ejercicio 2.* Pruebe que  $p + p = (2, 0) \cdot p$  para todo  $p \in P$ . En general: la suma de  $n$  puntos iguales a  $p$  es igual a  $(n, 0) \cdot p$ . Use esto para probar que las identidades

$$(p + q)^2 = p^2 + (2, 0) \cdot p \cdot q + q^2$$

y

$$(p + q)^3 = p^3 + q^3 + (3, 0) \cdot p \cdot q \cdot (p + q)$$

para cualesquiera  $p, q \in P$ .

Entre la suma y el producto, sin lugar a dudas, es la segunda operación la que causa mas intriga. La regla  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$  es a primera vista muy caprichosa y aparentemente “poco natural”. Por ejemplo, una regla del tipo  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$  podría parecer a primera vista una definición razonable, sin embargo, esta regla no cumple la propiedad 4 del producto y esto hace que esta definición sea poco conveniente (de hecho, casi completamente inútil). En realidad, la regla para el producto es sólo una versión algebraica y sintetizada de una operación con mucho significado geométrico (todo depende del cristal con que se mire). En el fondo, esta definición de producto es lo mas natural que se podría idear (!), pero iremos dilucidando esto poco a poco.

Una “primera justificación” para nuestra definición de producto, es que la multiplicación de números complejos sigue exactamente la misma regla. Para esto, como hizo Gauss (aunque el no fue el primero), identificaremos cada “número” de la forma

$a + ib$  con el punto  $(a, b)$  del plano  $P$ . Esto nos da una correspondencia uno a uno entre los “números complejos” y los puntos del plano  $P$ . Es fácil ver que sumar dos números complejos equivale a “sumar” sus puntos correspondientes en  $P$ : la suma de los complejos  $a + ib$  y  $c + id$  es igual al complejo  $z = (a + c) + i(b + d)$ , la suma de los puntos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  es igual al punto  $(a + c, b + d)$  y, obviamente, este punto representa al número complejo  $z$ . Análogamente (y esto es lo más interesante), el producto de los números complejos  $a + ib$  y  $c + id$ , o sea  $(ac - bd) + i(ad + bc)$ , corresponde al producto de los puntos  $(a, b)$  y  $(c, d)$ , o sea  $(ac - bd, ad + bc)$ . Desde el punto de vista algebraico, esta situación se resume diciendo que los cuerpos  $P$  y  $\mathbb{C}$  son isomorfos. Esto tiene la siguiente consecuencia: si tuviéramos cualquier expresión con números complejos y operaciones entre ellos, podremos pensar que son puntos del plano  $P$ , efectuar las operaciones siguiendo las reglas de las operaciones en  $P$  y, al resultado final, que es un punto de  $P$ , lo “miramos” como número complejo y este sería el resultado de nuestro problema inicial. Naturalmente, el proceso inverso también vale. De esta manera, los números complejos no son “entes de otro mundo”, sino que son puntos sobre un plano. En este sentido, al menos al inicio, es conveniente pensar que los números complejos “no son números”, sino simplemente puntos sobre un plano, con los que podemos “jugar” (hacer operaciones) de una manera similar a como se juega con los números reales.

## Resolviendo ecuaciones en $P$

Uno de los juegos más divertidos que tenemos en  $P$  es, por supuesto, el juego de resolver ecuaciones. Así por ejemplo, la ecuación

$$X^2 + \tilde{1} = \tilde{0} \tag{5.1}$$

plantea el problema de encontrar los puntos  $X = (x, y)$  del plano  $P$  tales que

$$(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0).$$

Esto significa

$$\begin{aligned}(xx - yy, xy + yx) + (1, 0) &= (0, 0) \\ (x^2 - y^2 + 1, 2xy) &= (0, 0),\end{aligned}$$

lo que es equivalente al sistema de ecuaciones reales

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + 1 &= 0 \\ 2xy &= 0,\end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones  $x = 0, y = 1$  y  $x = 0, y = -1$ . Así que la ecuación 5.1 tiene como soluciones a los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$  (¡los números complejos  $i$  y  $-i$  respectivamente!). Estos puntos son, por definición, las raíces cuadradas de  $-\tilde{1}$  y los denotaremos (¡a ambos!) con el símbolo  $\sqrt{-\tilde{1}}$ . Sabemos que la ecuación  $X^2 + 1 = 0$ , como una ecuación en  $\mathbb{R}$ , no posee ninguna solución. Sin embargo, si llevamos esta ecuación al “nuevo mundo  $P$ ” y buscamos puntos (¡no números!) que la cumplan, fácilmente encontramos dos soluciones.

Hallemos ahora la “raíz cuadrada” de cualquier punto  $p = (a, b)$  de  $P$ , es decir, resolvamos la ecuación

$$X^2 = p.$$

Si hacemos  $X = (x, y)$  la ecuación es equivalente a:

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (x, y) &= (a, b) \\ (x^2 - y^2, 2xy) &= (a, b),\end{aligned}$$

lo que es equivalente al sistema de ecuaciones reales:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b.\end{aligned}$$

Es fácil ver que cuando  $p = \tilde{0}$ , este sistema tiene como única solución a  $X = (0, 0)$ . Si  $p \neq \tilde{0}$ , entonces el sistema tiene exactamente dos soluciones (dejamos esto como ejercicio) dadas por  $X_0$  y  $-X_0$ , donde

$$X_0 = \left( \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right).$$

Lo importante de todo esto es que: en  $P$  es siempre posible extraer la raíz cuadrada de un punto  $p$ , obteniéndose como resultado dos puntos opuestos entre si cuando  $p \neq \tilde{0}$ , y una única raíz (cero) cuando  $p = \tilde{0}$ . Como sabemos, esta es una propiedad bien conocida de los números complejos. Usaremos la notación  $\sqrt{p}$  para denotar las raíces cuadradas del punto  $p \in P$  (o del número complejo  $p \in \mathbb{C}$ ). Observe que  $\sqrt{p}$  denota en general a dos números distintos (!), así que a veces podremos interpretar este símbolo como el conjunto de las raíces cuadradas de  $p$ .

### ¿Y que tienen que ver los números reales con el plano $P$ ?

Considere el conjunto

$$R = \{(x, y) \in P : y = 0\}.$$

Es fácil ver que los puntos de esta recta tienen las siguientes propiedades:

1.  $(a, b) + (b, 0) = (a + b, 0)$
2.  $-(b, 0) = (-b, 0)$ , luego  $(a, b) - (b, 0) = (a - b, 0)$
3.  $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$
4.  $(b, 0)^{-1} = (b^{-1}, 0)$  (si  $b \neq 0$ ), luego  $(a, 0)/(b, 0) = (a/b, 0)$  (si  $b \neq 0$ )

Esto muestra que las operaciones entre puntos de  $R$ , nos devuelven como resultado otra vez puntos de  $R$ . Además, hacer operaciones con puntos de  $R$  se reduce a hacer las mismas operaciones con las primeras coordenadas de los puntos, por ejemplo:

$$(3, 0)(2, 0) + (20, 0)/(4, 0) - (5, 0) = (3 \times 2 + 20/4 - 5, 0) = (6, 0).$$

Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , usaremos el símbolo  $\tilde{a}$  para denotar el punto  $(a, 0) \in R$ . Así, la expresión anterior se escribiría simplemente así:

$$\tilde{3} \cdot \tilde{2} + \tilde{20}/\tilde{4} - \tilde{5} = \tilde{6}.$$

O sea, podemos tratar a los puntos  $\tilde{a}$  exactamente como si fueran números reales, así que podemos pensar que el conjunto de los números reales está “incluido en el conjunto  $P$ ”, o sea:  $\mathbb{R} \simeq R$ .

**Nota 2.** Con esta notación, las identidades del ejercicio 2 se escriben como

$$(p + q)^2 = p^2 + \tilde{2}pq + q^2$$

y

$$(p + q)^3 = p^3 + q^3 + \tilde{3}pq(p + q).$$

Ahora podemos mostrar de una forma más concreta el isomorfismo entre  $\mathbb{C}$  y  $P$ . Empecemos por denotar con la letra  $i$  al punto  $(0, 1) \in P$ . De 5 tenemos que  $i^2 = \tilde{1}$  o también  $\sqrt{-1} = \{i, -i\}$ . Es fácil ver que  $(a, b) = \tilde{a} + i\tilde{b}$  para todo  $(a, b) \in P$  (¡verifíquelo!). Entonces tenemos

$$P = \{a + ib : a, b \in R\} = \{\tilde{a} + i\tilde{b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

y es fácil verificar en este conjunto (¡hágalo!) todas las propiedades de los números complejos, por ejemplo, la regla del producto:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc), \quad a, b \in R.$$

### La Ecuación Cuadrática

Podemos ahora resolver la ecuación general de segundo grado

$$AX^2 + BX + C = \tilde{0},$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos de  $P$  (o números complejos) y  $A \neq \tilde{0}$ . Naturalmente, esta ecuación plantea el problema de hallar los puntos  $X \in P$  tales que

$$A \cdot X \cdot X + B \cdot X + C = \tilde{0}.$$

Como  $A \neq \tilde{0}$ , es lo mismo resolver  $X^2 + \frac{B}{A}X + \frac{C}{A} = \tilde{0}$  o equivalentemente:

$$\begin{aligned} X^2 + \frac{B}{A}X + \frac{B^2}{4A^2} &= \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} \\ \left(X + \frac{B}{2A}\right)^2 &= \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}. \end{aligned}$$

Luego, el punto  $X + \frac{B}{2A}$  debe ser una raíz cuadrada del punto  $\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$ , así que por lo visto en la sección 5

$$X + \frac{B}{2A} = \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}},$$

luego:

$$X = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Recuerde que esta formula representa a dos puntos distintos cuando  $B^2 - 4AC \neq \tilde{0}$  y un único punto si  $B^2 - 4AC = \tilde{0}$ .

*Ejercicio 3.* Sean  $S_0$  y  $P_0$  puntos de  $P$ . Si  $A$  y  $B$  son puntos tales que  $A + B = S_0$  y  $AB = P_0$ , entonces  $A$  y  $B$  son las raíces de la ecuación  $X^2 - SX + P = \tilde{0}$ , es decir,  $A$  y  $B$  son dados por la fórmula

$$\frac{S_0 + \sqrt{S_0^2 - 4P_0}}{2}.$$



Así,  $A$  e  $B$  serán puntos distintos cuando  $S_0^2 - 4P_0 \neq 0$  y, si tuviéramos  $S_0^2 - 4P_0 = 0$ , tendremos  $A = B = S_0/2$ . Lo importante es que: en  $P$  siempre es posible hallar dos puntos cuya suma y cuyo producto sean iguales a ciertos puntos dados previamente.

### El método de Cardano

Aplicaremos ahora el método de Cardano para la ecuación

$$X^3 - \tilde{3}pX - \tilde{2}q = \tilde{0}, \quad (8.1)$$

donde  $p, q \in P$ . Para cualquier  $X \in P$ , por el ejercicio 3, siempre existen  $r, s \in P$  tales que  $X = r + s$  y  $rs = p$ . Entonces  $X$  será solución de 8.1 si solamente si:

$$(r + s)^3 - \tilde{3}p(r + s) - \tilde{2}q = \tilde{0}.$$

Desarrollando el cubo (2) y agrupando convenientemente los términos obtenemos:

$$(r^3 + s^3 - \tilde{2}q) + (\tilde{3}rs - \tilde{3}p)(r + s) = \tilde{0}$$

$$(r^3 + s^3 - \tilde{2}q) = \tilde{0},$$

o sea

$$r^3 + s^3 = \tilde{2}q.$$

Entonces, para que  $X$  sea solución de la ecuación 8.1 es necesario y suficiente tener  $X = r + s$ , donde  $r, s \in P$  son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} r^3 + s^3 &= \tilde{2}q \\ rs &= p \end{aligned} \quad (8.2)$$

Este sistema implica

$$r^3 + s^3 = \tilde{2}q \text{ y } r^3 s^3 = p^3 \quad (8.3)$$

y por el ejercicio 3 los puntos  $r^3$  y  $s^3$  son dados por la fórmula

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{2}q + \sqrt{(\tilde{2}q)^2 - \tilde{4} \cdot p^3}}{\tilde{2}} &= \frac{\tilde{2}q + \sqrt{4(q^2 - p^3)}}{\tilde{2}} \\
&= \frac{\tilde{2} \cdot q + \tilde{2}\sqrt{q^2 - p^3}}{\tilde{2}} \\
&= q + \sqrt{q^2 - p^3}.
\end{aligned}$$

Si asumimos ahora que el símbolo  $\sqrt{q^2 - p^3}$  denota a una de las raíces cuadradas de  $q^2 - p^3$  (escogemos una), entonces  $r$  y  $s$  deben ser raíces cúbicas de los puntos

$$q + \sqrt{q^2 - p^3} \text{ y } q - \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Tales  $r$  y  $s$  cumplirán ya la primera ecuación de 8.2, así q para que  $X$  sea solución de 8.1 es necesario y suficiente tener  $X = r + s$  con  $r, s$  tales que

$$\begin{aligned}
r^3 &= q + \sqrt{q^2 - p^3} \\
p^3 &= q - \sqrt{q^2 - p^3} \\
rs &= p.
\end{aligned}$$

Este sería el enunciado preciso de la fórmula de Cardano para la ecuación 8.1. Luego, podemos concluir que toda raíz de 8.1 es dada por la formula

$$X = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}},$$

pero teniendo el siguiente cuidado: las expresiones radicales de la formula de arriba son raíces cúbicas de

$$q + \sqrt{q^2 - p^3} \text{ y } q - \sqrt{q^2 - p^3}$$

y el producto estas raíces cúbicas debe ser igual<sup>5</sup> a  $p$ . Vemos entonces que, en  $P$ , el método de Cardano siempre funciona y

---

<sup>5</sup> Debemos tener  $\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} \cdot \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} = p$ .

nos permite expresar todas las soluciones de la ecuación 8.1 en función de sus coeficientes.

### La idea de Bombelli

Volveremos ahora a la ecuación cúbica

$$x^3 - 3px - 2q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R}) \quad (9.1)$$

y daremos una versión matemáticamente rigurosa de la idea de Bombelli. Para comenzar, observe que para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos la siguiente identidad en  $P$ :

$$(x, 0)^3 - (3, 0)(p, 0)(x, 0) - (2, 0)(q, 0) = (x^3 - 3px - 2q, 0).$$

De esta expresión vemos lo siguiente:  $x$  es raíz de la ecuación 9.1 si y solamente si el punto  $(x, 0) \in P$  es raíz de la ecuación

$$X^3 - \tilde{3}pX - \tilde{2}q = \tilde{0}. \quad (9.2)$$

Entonces nuestro problema es equivalente (!) a encontrar las raíces de 9.2 que están contenidas en la recta  $R$ . Ahora podemos usar el método de Cardano para resolver esta ecuación en  $P$  y sólo tenemos que quedarnos con aquellas soluciones que estén sobre  $R$ . Si  $(a, 0)$  es una de estas soluciones, entonces  $a$  será raíz de la ecuación 9.1 y no importa (!) que al aplicar el método de Cardano tratemos en el camino con puntos de  $P - R$ .

Así: “no importa que en el camino tengamos que utilizar números complejos, si al final obtenemos una solución real, entonces podemos tener la certeza de que esta solución es correcta” (!).

### Coordenadas polares y el producto de números complejos

Desde ahora identificaremos los números complejos con los puntos del plano  $P$ . Definimos la norma del número complejo  $z = x + iy$  por la fórmula

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norma de  $z$  es simplemente la distancia euclidiana entre  $0$  y  $z$ . Para  $z \neq 0$ , sea  $\theta$  la medida del ángulo formado el semieje

positivo de las abscisas y el rayo  $\overrightarrow{0z}$ , el ángulo debe ser “medido en el sentido antihorario”. Entonces, si  $r = |z|$ , sabemos que

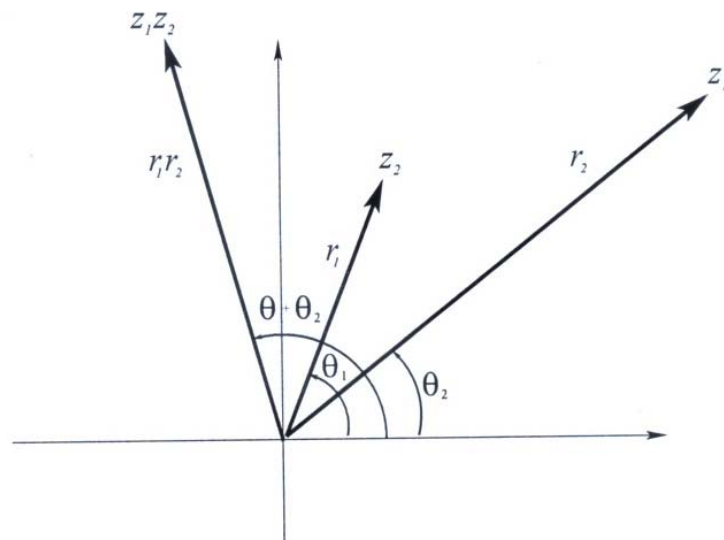
$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Esta es la representación polar del complejo  $z$  y el par  $(r, \theta)$  es una expresión de  $z$  en coordenadas polares. La representación de  $z$  en coordenadas polares no es única: si  $(r, \theta)$  son coordenadas polares para  $z$ , entonces  $(r, \theta + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) son también coordenadas polares para  $z$ . Pero ésta es toda la ambigüedad que existe: si  $(r, \theta_1)$  y  $(r, \theta_2)$  son coordenadas polares para  $z$ , entonces  $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . El ángulo  $\theta$  en cualquier expresión de  $z$  en coordenadas polares se llama argumento del complejo  $z$ .

Lo interesante de la representación polar es la forma que toma el producto de números complejos. Si  $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$  y  $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$  entonces:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Entonces, al multiplicar dos números complejos: las normas se multiplican y los argumentos se suman.



Así, por ejemplo, si aplicamos  $n$  veces esta regla, obtenemos la fórmula

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

conocida como la fórmula de Moivre.

### Un modelo geométrico para las operaciones en $\mathbb{C}$

Veremos ahora una forma geométrica de entender los números complejos y sus operaciones. Comencemos con la operación más sencilla, es decir, la suma. Todo punto  $a \in \mathbb{C}$  define una transformación del plano de la manera siguiente. Imaginemos que el punto  $0 \in \mathbb{C}$  se traslada en línea recta hasta llegar al punto  $a \in \mathbb{C}$ . Suponga que, al mismo tiempo, cada punto del plano se traslada en línea recta en una trayectoria paralela a la descrita por el punto  $0 \in \mathbb{C}$  y una distancia igual a la recorrida por  $0 \in \mathbb{C}$ . O sea, el plano se traslada paralelamente hasta que  $0 \in \mathbb{C}$  “se coloque” en la posición de  $a$ . Esto define una función  $T_a : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  tal que  $T_a(z)$  es el punto final de la trayectoria que describe  $z$ . Este tipo de funciones se conocen como traslaciones. Es fácil ver que si  $a \neq b$ , entonces las traslaciones  $T_a$  y  $T_b$  son diferentes. Luego, la correspondencia  $a \mapsto T_a$  define una biyección entre el Plano  $\mathbb{C}$  y el conjunto de las traslaciones del plano. Entonces podemos imaginar que cada punto del plano representa en realidad a una traslación del plano. Lo interesante de este punto de vista es lo siguiente. Cuando tenemos dos traslaciones del plano, existe una operación muy natural que podemos efectuar con ellas... ¿qué podemos hacer?... ¡pues podemos componerlas!: primero trasladamos cada punto del plano siguiendo la regla de la traslación  $T_a$  e “inmediatamente” después volvemos a trasladar cada punto siguiendo esta vez la regla dada por  $T_b$ . De esta manera, obtenemos un “movimiento” del plano que viene definido por la función

$$\begin{aligned} T_b \circ T_a : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ T_b \circ T_a(z) &= T_b(T_a(z)). \end{aligned}$$

Ahora, es fácil ver (geometría elemental) que esta función es también una traslación, o sea  $T_b \circ T_a = T_c$  para algún  $c \in \mathbb{C}$ . Además tenemos las siguientes propiedades:

1.  $T_a \circ T_b = T_b \circ T_a$
2.  $(T_a \circ T_b) \circ T_c = T_a \circ (T_b \circ T_c)$
3. La traslación  $T_0$ , asociada al punto  $0 \in \mathbb{C}$ , es tal que  $T_0 \circ T_a = T_a \circ T_0 = T_a$  para toda traslación  $T_a$
4. Para toda traslación  $T_a$ , tenemos la traslación  $T_{-a}$  que verifica que  $T_a \circ T_{-a} = T_{-a} \circ T_a = T_0$ .

Estas propiedades<sup>6</sup> son esencialmente de naturaleza geométrica así que dejaremos que el mismo lector se convenza de su validez. Finalmente, ¿qué ocurre si interpretamos la composición de traslaciones como una operación entre números complejos?... ¿a qué número complejo corresponde la traslación  $T_c = T_a \circ T_b$ ?... pues es fácil ver (verifíquelo) que en este caso debemos tener  $c = a + b$ . Luego, la composición de traslaciones corresponde a la suma de complejos y las 4 propiedades de arriba se traducen en las 4 propiedades de la suma de números complejos (o puntos de  $P$ ).

Ahora lo más interesante, ¿cómo podemos interpretar el producto de números complejos? Dado un punto  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ , definiremos ahora otro movimiento del plano asociado a este punto. Lo que pretendemos, es “mover” el plano de manera tal que al final del movimiento tengamos lo siguiente:

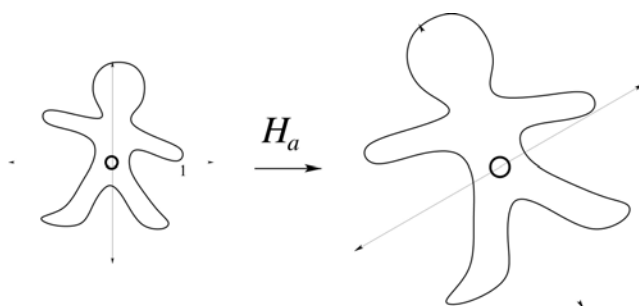
1. El punto  $0 \in \mathbb{C}$  permanece fijo
2. El punto  $1 \in \mathbb{C}$  se “coloca” sobre el punto  $a \in \mathbb{C}$ .

¿Qué tipo de transformación del plano puede cumplir con estos requisitos? Si  $a$  fuera un número real mayor que 1, es fácil ver que sería suficiente hacer una “amplificación del plano” para conseguir colocar el punto 1 sobre el punto  $a$ . Si  $a$  fuera un real entre 0 y 1, sería suficiente hacer una “reducción del plano”.

---

<sup>6</sup> Estos son los axiomas que definen a un grupo.

Claramente, si  $a = 1$  no haría falta hacer nada<sup>7</sup> ¿Y si  $a$  no esta sobre el semieje positivo de los reales? Pues en este caso podemos hacer antes una rotación del plano hasta que el punto 1 y el punto  $a$  se encuentren sobre un mismo rayo con origen en  $0 \in \mathbb{C}$  y después de esto: amplificamos el plano (si  $|a| > 1$ ), reducimos el plano (si  $|a| < 1$ ) o no hacemos nada ( $|a| = 1$ ). Al final obtenemos una transformación del plano, conocida como homotecia compleja de factor  $a \in \mathbb{C}$  y denotada por  $H_a$ .



La homotecia  $H_a$  es una función de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $H_a(z)$  es el punto donde se coloca  $z$  después de efectuar la homotecia  $H_a$ . De la descripción dada arriba, podemos obtener una expresión de  $H_a$  usando coordenadas polares. Así, si  $a = r_a(\cos\theta_a + i\sen\theta_a)$  y  $z = r(\cos\theta + i\sen\theta)$ , es fácil ver que<sup>8</sup>:

$$H_a(z) = (rr_a)(\cos(\theta + \theta_a) + i\sen(\theta + \theta_a)). \quad (11.1)$$

Cuando  $a = 0$ , definimos la homotecia  $H_0$  como la aplicación nula, es decir  $H_0(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ <sup>9</sup>. Como antes, la correspondencia  $a \mapsto H_a$  define una biyección entre  $\mathbb{C}$  y el conjunto de homotecias complejas del plano. Naturalmente, así como las traslaciones, dos homotecias del plano también se pueden componer (aplicar una y después aplicar la otra) y esto define una nueva homotecia (¿cierto?). Así, la composición de

<sup>7</sup> transformación identidad.

<sup>8</sup> la rotación aplica  $z$  sobre  $r(\cos(\theta + \theta_a) + i\sen(\theta + \theta_a))$  y finalmente la amplificación (o reducción) es hecha multiplicando el factor  $r_a$  (ya que  $|a| = 1 \cdot r_a$ ).

<sup>9</sup> Esto sería una "reducción infinita".

homotecias es una operación muy natural y goza de las siguientes propiedades:

1.  $H_a \circ H_b = H_b \circ H_a$
2.  $(H_a \circ H_b) \circ H_c = H_a \circ (H_b \circ H_c)$
3. La homotecia  $H_1$ , asociada al punto  $1 \in \mathbb{C}^{10}$ , es tal que  $H_1 \circ H_a = H_a \circ H_1 = H_a$  para toda homotecia  $H_a$
4. Para toda homotecia  $H_a \neq H_0$ , tenemos la homotecia  $H_{a^{-1}}$  que verifica que  $H_a \circ H_{a^{-1}} = H_{a^{-1}} \circ H_a = H_1$ .

Nuevamente, dejaremos estas propiedades como tarea para el lector. Finalmente, ¿qué ocurre si interpretamos la composición de homotecias como una operación entre números complejos? ... ¿a qué número complejo corresponde la homotecia  $H_b \circ H_a$ ?... pues veamos: si  $a = r_a(\cos\theta_a + i\operatorname{sen}\theta_a)$  y  $b = r_b(\cos\theta_b + i\operatorname{sen}\theta_b)$ , usando 11.1:

$$\begin{aligned} H_b \circ H_a(z) &= H_b(rr_a(\cos(\theta + \theta_a) + i\operatorname{sen}(\theta + \theta_a))) \\ &= rr_ar_b(\cos(\theta + \theta_a + \theta_b) + i\operatorname{sen}(\theta + \theta_a + \theta_b)) \end{aligned}$$

y como

$$ab = r_ar_b(\cos(\theta_a + \theta_b) + i\operatorname{sen}(\theta_a + \theta_b)),$$

concluimos que

$$H_b \circ H_a(z) = H_{ab}(z),$$

o sea

$$H_b \circ H_a = H_{ab}.$$

por lo tanto, la composición de homotecias corresponde al producto de números complejos y las 4 propiedades de la homotecia se traducen en las 4 propiedades del producto de números complejos. Esto muestra que, a pesar de que su formulación algebraica sea misteriosa y nada sencilla, el

---

<sup>10</sup> Esta homotecia es la función identidad.



producto de números complejos tiene un trasfondo geométrico y muy natural<sup>11</sup>.

## La función exponencial

Quizás la fórmula más intrigante cuando empezamos a tratar con los números complejos sea:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad (12.1)$$

Frecuentemente se presenta esta fórmula como una definición de  $e^{i\theta}$ , lo cual no es incorrecto, pero es al extremo antinatural.

### *Polinomios complejos*

Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Esta función pertenece a la clase más simple de funciones reales: las funciones polinómicas<sup>12</sup>. Para obtener el valor  $f(a)$  sólo debemos efectuar un número finito de sumas y productos involucrando al número  $a$  y a los coeficientes del polinomio. Aquí viene lo importante: estas operaciones las podemos efectuar inclusive si  $a$  es un número complejo, aunque podríamos obtener resultados complejos también. Entonces, la función  $f$  se extiende de manera natural a una función

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ \tilde{f}(x) &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Por simplicidad, se acostumbra denotar a la extensión  $\tilde{f}$  con la misma letra  $f$ . En resumen: “las funciones polinómicas reales

---

<sup>11</sup> De hecho, si interpretamos el producto de números reales como composición de homotecias reales  $x \mapsto ax$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) de la recta, la extensión de este producto al caso del plano se insinúa muy claramente.

<sup>12</sup> Funciones cuya regla de correspondencia es dada por un polinomio.

tienen perfecto sentido si dejamos que la variable tome también valores complejos”.

### *La función exponencial*

Ahora veremos que la función exponencial también tiene la propiedad descrita arriba para las funciones polinómicas. La función exponencial real satisface la siguiente fórmula:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (12.2)$$

Si fijamos un  $x \in \mathbb{R}$ , el miembro de la derecha es una suma de números que, a pesar de tener infinitos sumandos, es finita cualquiera que sea  $x \in \mathbb{R}$ <sup>13</sup>. No demostraremos esta fórmula aquí, ya que su prueba pasa por consideraciones delicadas acerca de convergencia de series y necesita también de una definición precisa de lo que es  $e^{x14}$ . Lo importante: la serie en 12.2 tiene sentido incluso si permitimos que la variable sea un número complejo, así que para  $x = z \in \mathbb{C}$  obtenemos la serie

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

pero que pasa en este caso?... tiene sentido esta suma infinita si  $z \in \mathbb{C}$ ? ... pues la respuesta es sí!, esta serie infinita tiene siempre una suma finita:

*Teorema. Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , la serie*

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

*es convergente (y su suma es en general un número complejo).*

Luego, esta serie define una función

$$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$

---

<sup>13</sup> En este caso se dice que la serie es convergente.

<sup>14</sup> Sin embrago, quizás sea tranquilizador calcular la serie de Taylor de la función exponencial y comprobar que esta serie coincide con aquella de la fórmula 12.2.

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

que extiende la función exponencial  $e^x$ . Naturalmente, escribiremos  $f(z) = e^z$ . Esta es la función exponencial compleja.

Son conocidas las siguientes expresiones de  $\text{sen}\theta$  y  $\text{cos}\theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) como series infinitas<sup>15</sup>:

$$\begin{aligned}\text{sen}\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \text{cos}\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots\end{aligned}\quad (12.3)$$

Teniendo esto en cuenta, para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \text{cos}\theta + i\text{sen}\theta,\end{aligned}$$

o sea, hemos obtenido la clásica fórmula 12.1.

Naturalmente, todas las funciones trigonométricas se extienden como funciones de variable compleja, y esto es sólo el comienzo de una de las ramas más bellas de las matemáticas, que comenzó como algo “loco” o imposible”, pero que con el tiempo ha mostrado estar presente en terrenos muchas veces insospechados de las matemáticas y el mundo físico.

---

<sup>15</sup> Nuevamente, puede ser tranquilizador el calculo de las series de Taylor para  $\text{sen}\theta$  y  $\text{cos}\theta$ .

## Referencias

- [1] La Matemática de la Enseñanza Media, vol. 1, 2 y 3, Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner y Augusto César Morgado, Colección Textos del IMCA.
- [2] Mi Profesor de Matemática y otras historias, Elon Lages Lima, Colección Textos del IMCA.
- [3] Historia de La Matemática, Carl Boyer, Madrid: Alianza Editorial, 1987.



# El Problema de Pólya: ¿por qué los estudiantes no construyen estrategias de resolución de problemas (de geometría)?

Josep Gascón <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En la presentación del taller se explicará brevemente el Problema de Pólya y se mostrará con un ejemplo muy sencillo que la problemática sintética puede constituirse como la razón de ser de la Geometría Analítica escolar (incluyendo la que se estudia en los primeros cursos universitarios).*

*La actividad matemática del Taller se iniciará con un tipo de problemas de Geometría Analítica escolar en los que el sistema de referencia (arbitrario) está dado de antemano y es transparente. Continuará reformulando estos problemas en el ámbito de la Geometría Sintética (utilizando la técnica de construcción de figuras con regla y compás) y culminará con la elección de un sistema de referencia “ligado” a la configuración geométrica inicial, lo que permitirá llevar a cabo un “estudio de casos” sistemático fruto de la interpretación de las soluciones de un sistema de ecuaciones paramétricas.*

## **Primera Sesión: El Patrón sintético de dos lugares geométricos**

Para cada uno de los siguientes problemas enunciados en una versión *analítica particular* (tal como aparecen en los libros de texto de Bachillerato) vamos a poner entre paréntesis el *sistema de referencia arbitrario* en el que está formulado y empezar a estudiar las propiedades intrínsecas (geométricas) del problema.

---

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Barcelona-España

- (1) Empieza proponiendo la versión *euclidiana general* y resuélvelo (con el **Patrón de los dos lugares geométricos**) como un problema de construcción con regla y compás.
- (2) Resuelve a continuación la versión *analítica particular* inicial con la técnica cartesiana, utilizando como guía la resolución con regla y compás.

## **Segunda Sesión: Proceso de algebrización de la Geometría Sintética**

- (3) Enuncia la versión *analítica general* y después de elegir un sistema de referencia “adecuado”, resuélvelo utilizando *parámetros*.
  - (4) En función de las relaciones entre los datos, ¿en qué casos el problema tendrá (o no tendrá) solución? ¿En qué casos la solución será única? Interpreta *geoméricamente* cada uno de los casos obtenidos (*estudio de casos*).
1. Busca los triángulos  $ABC$  con  $B(2, 1)$ ,  $C(-1, 4)$  y sabiendo que las longitudes de la mediana y de la altura relativas al lado  $BC = a$  son, respectivamente,  $m_a = 6$  y  $h_a = 8$ .
  2. Busca las circunferencias tangentes a las rectas  $x + y - 10 = 0$  y  $x + y - 2 = 0$  que pasen por el punto  $P(3, 1)$ . ¿Cómo cambia el problema si las rectas no tienen que ser necesariamente paralelas?
  3. Busca las circunferencias que tienen el centro sobre la recta de ecuación  $x + 2y + 1 = 0$  y son tangentes a las rectas  $3x + 4y = 0$  y  $4x + 3y + 1 = 0$ .
  4. Busca los triángulos  $ABC$  con  $A(3,0)$ ,  $B(-3,0)$  y sabiendo que la altura relativa al lado  $c$  mide  $h_c = 6$  y la mediana relativa al lado  $BC = a$  mide  $m_a = 5$ .
  5. Busca las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$  en el punto  $(2, 4)$ .

6. Busca los triángulos  $ABC$  con  $A(3, -5)$ ,  $B(0, 2)$  y sabiendo que las medianas relativas a los lados  $a$  y  $c$  miden, respectivamente,  $m_a = 7,5$  y  $m_c = 6$ .
7. Busca las circunferencias de radio 3 que tienen el centre sobre la recta  $2x + 5y = 0$  y son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ .
8. Busca los triángulos  $ABC$ , conociendo las longitudes de dos lados  $AC = b = 7$  y  $AB = c = 8$  y la longitud de la altura  $h_a = 5$  relativa al tercer lado  $BC = a$ .
9. Busca las circunferencias de radio 7 que pasan por el punto  $P(2, -5)$  y son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$ .
10. Busca los triángulos cuyas medianas miden respectivamente  $m_a = 8$ ,  $m_b = 10$  y  $m_c = 6$ .

|                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b><i>Componentes de la Estrategia de Resolución de Problemas de Geometría</i></b></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|

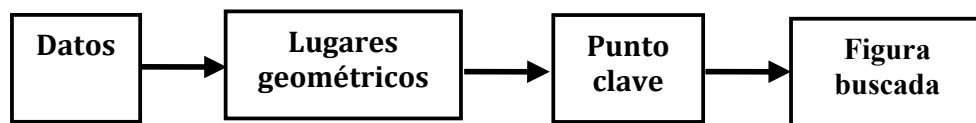
1. Técnicas de construcción de *lugares geométricos*.
2. Patrón *sintético* de dos lugares geométricos planos.
3. Patrón *analítico* como desarrollo del sintético.
4. Técnica de asociar un *sistema de coordenadas* a una situación geométrica dada.
5. Modelización algebraica con parámetros y estudio analítico-sintético de casos.

|                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b><i>Técnica de los dos lugares Geométricos para Construir Figuras con Regla y Compás</i></b></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|

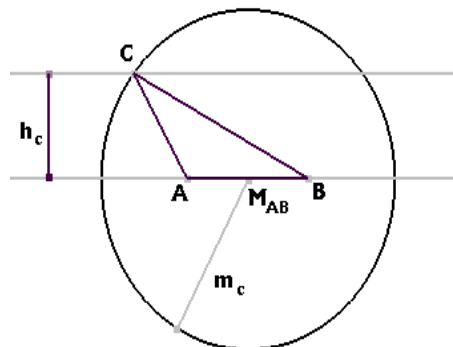
1. Supón el problema resuelto (esto es, que la figura buscada está construida).
2. Reduce el problema a dibujar un punto ("*punto clave*").
3. ¿Qué condiciones geométricas debe cumplir el punto clave?



4. ¿Se pueden construir con regla y compás los lugares geométricos correspondientes (de los puntos que cumplen cada una de dichas condiciones) a partir de los datos?
- 3'. Construye con regla y compás los lugares geométricos a partir de los datos.
- 2'. Dibuja el punto (o los puntos) clave como intersección de los lugares geométricos.
- 1'. Dibuja la figura buscada a partir del punto clave.



*Ejemplo:* Construir con regla y compás un triángulo  $ABC$  dados la longitud de un lado:  $AB = c$ , y las longitudes de la altura  $h_c$  y la mediana  $m_c$  relativas a dicho lado  $AB$ .



# Grafos y su potencial educativo

Teresa Braicovich <sup>1</sup>

## **Resumen**

*Luego de realizar investigaciones en distintos niveles educativos y en diferentes contextos sociales, se llegó a la conclusión que el trabajar con algunos conceptos de grafos ayuda a los alumnos en varios aspectos dentro del proceso de enseñanza. En particular, hace que los alumnos realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de la intuición, exploración, descubrimiento y planteo de distintas hipótesis. También pueden utilizar a los grafos como “organizadores”, con el fin de facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas.*

*Muchos docentes desconocen el tema, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando manejan más conceptos de esta temática no saben cómo presentarlo a sus alumnos.*

*El objetivo del dictado de este curso es transferir el tema, es importante destacar que se hará referencia a la didáctica y a la metodología a utilizar de acuerdo a las edades de los niños con quienes se desee trabajar. Por último, cabe agregar que con estos encuentros se busca generar en los asistentes la inquietud de profundizar en el estudio de esta teoría en el futuro y movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos.*

## **Introducción**

Puede observarse en los distintos niveles educativos, incluida la enseñanza universitaria, las serias dificultades de los estudiantes para lograr un aprendizaje significativo: les resulta difícil proponer razonamientos propios, en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que pueden presentarse en

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional del Comahue -Argentina

la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Es probable que esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo; podemos tomar las palabras de Moisés Coriat: *“No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas”*. Por otro lado, no se puede dejar de mencionar lo difícil que resulta a los docentes despertar el interés de los alumnos.

Una posible respuesta a la problemática anteriormente planteada, estaría dada por la idea de plantear situaciones donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, descubrir, crear, ensayar, probar, generar hipótesis y conjeturas, discutirlos y analizarlos. En este sentido, a partir de investigaciones realizadas he concluido que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. La Teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que, en general, no se encuentra en las currículas escolares y que permite realizar análisis y razonamientos muy interesantes. Es decir, no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, por lo que considero que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. Podemos citar nuevamente a Coriat: *“Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos”*.

La finalidad del dictado de este curso es transferir algunos contenidos de grafos a los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio. Se presentarán distintos conceptos de la temática en cuestión, haciendo hincapié en las actividades y metodología a utilizar en su enseñanza. Además, como un currículo debe estar bien articulado se propondrá, en forma

sucinta, una posible graduación de ciertos temas de esta teoría para los distintos niveles educativos.

### **Pertinencia de la propuesta**

A partir de investigaciones de tipo cualitativas realizadas pude concluir que el introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en distintos niveles educativos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de la intuición, exploración, descubrimiento y planteo de distintas hipótesis. También pueden utilizar a los grafos como “*organizadores*”, con el fin de facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas. Por último, es un tema que resulta motivador para los alumnos, dando la posibilidad de cambiar de actitud frente a la asignatura matemática.

La planificación y el desarrollo de este trabajo tienen como marco teórico las teorías constructivistas, las cuales consideran al alumno con una desarrollada capacidad de gestionar su propio aprendizaje; de usar su conocimiento, habilidades previas y seleccionar estrategias de aprendizaje adecuadas en la tarea que se encuentra trabajando. Los procesos de aprendizaje que se inducen en las clases tienen como objetivo facilitar al alumno nuevas posibilidades de pensar, sentir y valorar, procesos que deberían hacer que el alumno sea capaz de actuar y juzgar de manera satisfactorias en situaciones nuevas que le puedan ser planteadas. Para que esto realmente sea así, es necesario que sean contruidos los nuevos contenidos del quehacer y del pensamiento, éste es el aspecto dinámico del proceso de construcción: hacer que el alumno busque e investigue, para que así pueda crear una nueva forma de actuar o de pensar por propio impulso.

Como muchos docentes aún no conocen el tema grafos, la finalidad de este curso es transferir algunos conceptos del mismo a los asistentes, haciendo referencia a la didáctica y a la metodología a utilizar en los distintos niveles educativos. Es decir, dar el puntapié para generar en ellos la inquietud de

profundizar en el estudio del tema en el futuro, de manera que se sientan movilizados a introducirlo en el dictado de sus clases.

Grafos, no se encuentra, en general, en los currículos de ninguno de los niveles educativos; es relativamente nuevo, en él queda aún mucho por descubrir.

*“En definitiva, uno nunca llega al punto de poder usar su creatividad. No parece haber nada por hacer, como si todo estuviera contestado, todo dicho...y no solo no es así, sino todo lo que hay por descubrir o inventar es de un volumen increíble. Miles de matemáticos en todo el mundo piensan problemas cuya solución se ignora, y no sólo hoy, porque hay preguntas que se plantearon hace cuatrocientos años y aún no se sabe qué decir al respecto. Es hora, entonces, de buscar diferentes maneras de seducir...” (Paenza, 2008)*

A modo de síntesis, puede establecerse que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los currículos de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997), donde se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

## Contenidos a desarrollar

Es muy amplia la variedad de contenidos que se desprenden de la teoría de grafos y más aún, la cantidad de ejemplos posibles; para acotarlos, en función del tiempo permitido por este curso son seleccionados aquellos que dan el puntapié inicial para empezar a comprender esta teoría. Nos centraremos tanto en el desarrollo teórico, como en narrar las experiencias que resultan muy significativas para transmitir y motivar la búsqueda de nuevos conocimientos en cada participante desde el ámbito personal, como también en la transmisión a sus alumnos. Cada docente generará sus propias herramientas para llevar al aula, pero ofrecemos la experiencia para poder graduar los contenidos.

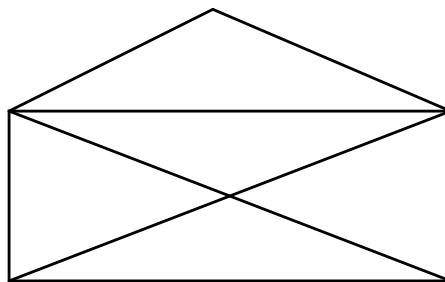
Los temas que se presentarían en el curso se dan a continuación, junto a ciertos conceptos que se considera pertinente aclarar:

### *Recorridos Eulerianos*

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez?* Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

1. *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*
2. *Un grafo conexo contiene un camino  $S_{ab}$  que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si  $a$  y  $b$  son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto.*

El problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado: *"figura del sobre"*, que se presenta a continuación:



Grafo que representa al juego del sobre

Como en este grafo hay sólo dos vértices de grado impar, existe camino euleriano abierto, para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni repetir aristas. Debe comenzarse el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro.

### *Lema del apretón de manos*

Es un importante resultado dentro de la teoría de grafos, que se debe también al matemático suizo Leonhard Euler, que dice: “*en cualquier grafo la suma de los grados de los vértices es par, es decir que en cualquier grafo existe un número par de vértices de grado impar*”.

### *Grafos planares*

Son aquellos grafos que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2 (vértices + regiones - aristas = 2). Este concepto es el correspondiente a un conocido pasatiempo; en él se pregunta si es posible proveer de luz, agua y electricidad, a tres casas, de forma tal que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersequen. Contestar a esta pregunta equivale a determinar si el grafo determinado es planar. Como no lo es, se puede afirmar que no es posible que las redes de distribución no se superpongan.

### *Coloreo de grafos*

Un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores

con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores. El problema que parece haber dado origen a este tema es el mencionado por Moebius en 1840 y es consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas, que dice: *“Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos”*. Este problema tuvo en vilo por más de un siglo a los más famosos matemáticos del mundo, recién fue demostrado en 1976 por Appel y Haken.

### *Grafos bipartitos*

Son aquellos grafos en los cuales el conjunto de vértices puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos  $A$  y  $B$ , tales que sólo hay aristas entre  $A$  y  $B$ . Todo grafo bipartito puede colorearse con 2 colores.

El grafo que representa al problema de los recursos es bipartito, cada uno de los tres vértices que representan a las casas está unido con cada uno de los tres vértices que representan a los servicios.

### *Grafo completo*

Un grafo es completo cuando cada vértice está relacionado mediante una arista con todos los demás. El número cromático de un grafo completo de  $n$  vértices es igual a  $n$ .

### *Grafo valuado*

Cuando a cada arista del grafo se le asocia un peso o valor.

### *Árbol*

Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de  $n$  vértices hay siempre un número igual a  $(n-1)$  aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente



100 años después de la aparición del primer escrito de Euler, que fue mencionado anteriormente. En la actualidad tiene muchas aplicaciones en algoritmos para computación.

Un árbol minimal cubriente de un grafo  $G$  es el árbol de menor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo  $G$  y un árbol maximal cubriente de un grafo  $G$  es el árbol de mayor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo  $G$  y

### *Recorrido hamiltoniano*

Es un recorrido que pasa una y solo una vez por cada uno de los vértices del grafo. Tiene aplicaciones en muchos problemas, el más conocido, sea probablemente el denominado “El viajante de Comercio”.

Este último tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo de la enseñanza media, cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de comprender que no está “*todo resuelto*” en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

A partir de las experiencias llevadas a cabo y atendiendo a que un currículo debe estar bien articulado a través de los diferentes niveles, se da, a continuación, una posible graduación de los contenidos:

- *Nivel Inicial*

En este nivel, uno de los ejes de la matemática es la construcción del espacio, por eso es factible trabajar los conceptos de cierre, vecindad, separación y orden. Los chicos pueden jugar realizando distintos recorridos en un grafo (los vértices son lugares indicados con dibujos, por ejemplo), sobre todo en el sentido hamiltoniano, ya que es más fácil para ellos, pasar por determinados lugares y no por determinados caminos.

- *Primera parte de la enseñanza primaria*

En este ciclo se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento del niño de esta edad hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, pero sugerimos enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base “fértil” para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades.

También se puede hacer que los niños coloreen grafos o regiones, tratando que lo hagan con la menor cantidad de colores posibles, a esta edad no lo harán de manera algorítmica, lo harán, en general, por ensayo y error.

- *Segunda parte de la enseñanza primaria*

Se continuará trabajando con grafos que representen situaciones cotidianas, un poco más complejas que en el nivel anterior, poniendo la mirada en clasificaciones sencillas y en la definición de los elementos del grafo, para estimular la búsqueda de regularidades, discutir sus propias conjeturas y obtener conclusiones.

Se dan aquí los primeros pasos hacia la argumentación y formulación de hipótesis, aunque luego la manera de verificarlas o refutarlas siga siendo la realización reiterada de la experiencia. Ya en este nivel son capaces de hallar generalizaciones, por ejemplo, las condiciones de existencia de recorridos eulerianos abiertos y cerrados.

Se puede trabajar en este nivel con problemas que tengan solución utilizando el coloreo de grafos y también con el lema del apretón de manos, es importante destacar que este problema tiene cierto acercamiento al concepto de infinito.

- *Primera parte de la enseñanza secundaria*

En esta etapa se producen cambios cognitivos en los alumnos, ellos pueden acceder a un mejor nivel de abstracción y representación que en los años anteriores. Por lo tanto, en este ciclo, podrán plantearse los problemas de grafos como tales, sin

necesidad de estar ligados a un problema concreto, realizando razonamientos propios de la matemática discreta y generalizando. Se puede también trabajar de manera inversa, darles grafos y pedir que ellos busquen situaciones que puedan ser representados por estos.

Pueden trabajar con grafos planares, encontrar la relación de Euler a partir de ejemplos concretos. En este nivel los alumnos están en condiciones de realizar justificaciones de la misma, por supuesto acordes a sus edades.

Como en esta etapa se dan los primeros pasos hacia un pensamiento lógico-formal, se debe seguir estimulando la capacidad de conjeturar, hacer uso de las propiedades ya conocidas, realizar justificaciones. También se debe hacer que encuentren algunos algoritmos, por ejemplo, los necesarios para encontrar árboles minimales y maximales cubrientes. Citando a Landa, *“Enseñar a los alumnos a descubrir procesos es más valioso que dárselos ya formulados”*.

- *Segunda parte de la enseñanza secundaria*

Los estudiantes se encuentran plenamente en la etapa de desarrollo del pensamiento formal, ya son capaces de razonar con hipótesis verbales y al razonar sobre hipótesis la realidad se vuelve secundaria en relación con la posibilidad, lo real se subordina a lo posible, justamente la deducción lógica es uno de sus instrumentos. Por lo tanto, en este nivel se puede presentar a los alumnos situaciones para que ellos realicen demostraciones y también problemas en los cuales deban plantear distintas conjeturas y evaluar el valor de verdad de las mismas, con justificaciones ya más formales. Cabe aclarar, que es necesario y fundamental que los estudiantes reconozcan el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la matemática.

En este nivel es interesante que los alumnos hallen la relación entre grafos y poliedros, o equivalentemente entre la relación de Euler trabajada en el nivel anterior y la relación poliedral, ya que es muy importante que los estudiantes trabajen con distintas representaciones.

Con respecto a los temas, se profundizarían los vistos en el nivel anterior y se incluirían algunos nuevos. Un tipo de actividad interesante es que los alumnos encuentren algoritmos y que los escriban formalmente, ya sea para hallar árboles minimales y maximales cubrientes, para coloreo óptimo o para casos relacionados con los recorridos eulerianos.

### **Bibliografía**

- Appel, K. y Haken, W. (1989). *La solución del problema de los cuatro colores*. Investigación y Ciencia. Número 15. Pags. 78-91. Buenos Aires. Argentina.
- Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México.
- Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.
- Braicovich, T., Caro, P., Cerda, V., Oropeza, M., Osio, E., Reyes, C. (2009) *Introducción a la Teoría de Grafos*. Editorial Universitaria Educo. Argentina.
- Brousseau, G. (1986). *Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*, en Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 N° 2.
- Coriat, M. (2004). *Algunos usos escolares de los grafos*. Revista de Didáctica de la Matemática. Universidad Complutense de Madrid.
- Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.
- Chiappa, R. (1989). *Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*. Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.
- Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

- Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). *"Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook"*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.
- Menéndez Velazquez, A. (1998). *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. (1998) SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (2003). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.
- Paenza, A. (2005). *Matemática...¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Paenza, A. (2007). *Matemática...¿estás ahí? episodio 3*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Paenza, A. (2008). *Matemática...¿estás ahí? episodio 100*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. Editores (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- Santaló, L: (1993). *Matemática 1. Iniciación a la creatividad*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.
- Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). *Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario*. VII CAREM. Santa Fe. Argentina.
- Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.

# Revisión crítica de la contextualización Matemática que involucra conceptos físicos

Analía Zabala <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En el taller se realizará un análisis crítico de algunas situaciones problemáticas que se presentan en los libros de texto para contextualizar conceptos matemáticos.*

*La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno; sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente a fin de que el alumno pueda extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.*

*Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo, es necesario una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real. Caso contrario, se fomenta el hecho de que los estudiantes se aislen del contexto y busque la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.*

## **Pertinencia del tema abordado**

En el marco del proyecto: “Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia”, actualmente en ejecución en la Facultad de Ingeniería de la

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional de San Juan-Argentina

Universidad Nacional de San Juan - Argentina; uno de cuyos objetivos específicos es reconocer áreas claves del conocimiento en matemática con dificultades de aprendizaje en la enseñanza media<sup>2</sup>; se realizó, en una primera etapa, el análisis de los “errores” más frecuentes cometidos por los estudiantes en la resolución de ejercicios y situaciones problemáticas en las evaluaciones de Ingreso a la facultad. Los resultados obtenidos muestran que los temas en los que el porcentaje de recurrencia de errores es mayor son los relacionados a la interpretación de gráficos y análisis de los resultados numéricos obtenidos al resolver una situación problemática. En algunas entrevistas personales argumentaron que “nunca pensaban si el resultado es coherente o no porque era una evaluación de matemática...”

La situación no refleja una dificultad “local” en la situación de enseñanza aprendizaje de la matemática; que se da no sólo en la escuela media, sino también en el ciclo básico universitario.

A nivel mundial, es conocido el hecho del alto índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas en áreas de ingeniería, la reprobación es sólo un síntoma de toda la problemática. En este conflicto inciden muchos factores de tipo social, económico, de orden curricular, asociados a la didáctica, que inciden en el aprendizaje y en la enseñanza de la matemática, inherentes a la formación de los docentes, inferidos al propio tema de estudio, por causas de la infraestructura cognoscitiva de los alumnos, etc. Los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia. Desde esta perspectiva, la desarticulación que existe entre los cursos de matemáticas y las demás asignaturas que cursa el estudiante se convierte en un conflicto cotidiano para los alumnos. (Camarena, 2008)

---

<sup>2</sup> En San Juan- Argentina el Nivel Medio se refiere a la secundaria, que comprende el Ciclo Básico de tres años y el Ciclo Orientado (4º, 5º y 6º año), las orientaciones ofrecidas dependen de la institución escolar, las más frecuentes entre las que puede optar el estudiante son: Naturales, Sociales y Economía. Las edades de los estudiantes en el Ciclo Básico fluctúan entre 12 y 15 años y en el Ciclo Orientado entre 15 y 18 años. Universidad Nacional de San Juan-Argentina

Ahora bien, si la contextualización de conceptos matemáticos no se realiza con una transposición didáctica adecuada, el alumno no puede realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; lo que fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busquen la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.

El aprendizaje no es una simple reproducción de contenidos sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que cobran especial importancia los aportes de los alumnos, en este marco el papel del profesor es más complejo.

El profesor pasa de ser un mero transmisor de conocimientos a ser un orientador o guía que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados.

Es por todo ello que en la actualidad hay un cierto consenso en que las competencias profesionales que los profesores de matemática tendrían que intentar desarrollar son las siguientes (Font, 2005):

a) Competencia en el dominio de los contenidos matemáticos. Para ello, las matemáticas que debe saber el profesor no se pueden limitar a contenidos formales y descontextualizados organizados de manera deductiva. El profesor necesita saber también cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas. El diseño de las unidades didácticas se ha de basar, como mínimo, en los seis aspectos que se describen a continuación.

- La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo y del proyecto de centro correspondiente.
- Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.
- El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de



problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).

- Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.
- El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado
- Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.

Con relación a las actividades diseñadas hay que tener presente que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende. Hay que procurar incorporar actividades que permitan superar el aprendizaje pasivo, como el uso de materiales y recursos informáticos, problemas contextualizados, uso de diferentes representaciones.

c) La capacidad de gestión de las secuencias didácticas en el aula. La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica". Las actividades didácticas se deben adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos. El profesor ha de ser competente en el análisis de las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico. Por otra parte, hay que ser conscientes de que el profesor se va a encontrar con

determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular individual.

Para ser competente en la planificación, diseño y gestión de secuencias didácticas tal como se ha formulado en los párrafos anteriores es necesario que el profesor sea competente en:

d) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos de los alumnos.

Estas cuatro competencias profesionales de los profesores de matemáticas tienen implicaciones importantes para su formación. Una formación matemática adecuada debe tener en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real y a otras ciencias.

Este taller, en el que se realizará una revisión crítica de algunos de los conceptos básicos de Física usados frecuentemente en la bibliografía para contextualizar algunos temas matemáticos, surge ante las dificultades manifestadas por los docentes de matemática del nivel secundario y de los primeros cursos universitarios:

- Al orientar al alumno para que pueda realizar una validación del modelo o el análisis de los resultados obtenidos si los mismos involucraban conceptos físicos.
- Para reconocer si la situación problemática propuesta corresponde a una “transposición didáctica” que muestra un significado sesgado o incorrecto.
- Conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos que involucran modelos estudiados en Física.
- Seleccionar los problemas contextualizados adecuados para promover un aprendizaje significativo.

### **Marco teórico**

Resulta importante que los estudiantes de los cursos de Matemática sepan y conozcan que la matemática es y ha sido un valioso instrumento a través del cual muchas disciplinas, técnicas y ciencias se van estructurando y o perfeccionando, y que muchas de sus funciones no serían factibles sin la utilización

de ideas, conceptos, ejercicios y aplicaciones de matemática. Investigaciones que se han preocupado por la introducción de los problemas contextualizados en el currículum. ("Realistic Mathematics Education" del instituto Freudenthal)

La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno; sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente a fin de que el alumno pueda extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.

En caso contrario, "La matemática que se enseña es ese cúmulo procedimental algorítmico, lógico formal, cargado de ejercicios irrelevantes.... " "...hay que propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas otorgando un sentido al conocimiento matemático- en donde se establezca un lazo con los usos de la Matemática...." "La modelización matemática estrategia didáctica y pedagógica- asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales permitiendo, a su vez, la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes" (De Katz, Mancipar , 2009)

Tanto en la enseñanza como en la investigación o las aplicaciones, las matemáticas conviven e interactúan con otros saberes, lo que ha dado lugar a fenómenos de adaptación. Entre estas adaptaciones, en ocasiones, surgen "deformaciones" o empleos incorrectos. Otro aspecto conflictivo se refiere a la dificultad de comunicación entre el matemático y el especialista en otras ciencias, de cara a la realización de trabajos en cooperación, debido al empleo de lenguajes científicos diferentes en cada especialidad. Los usuarios de las matemáticas son los que plantean los problemas, pero es el matemático quien tiene las herramientas para su solución. En los procesos de planteamiento del problema al matemático por parte del usuario y de comunicación de las soluciones alcanzadas por el

matemático, aparece un doble proceso de transposición didáctica de una a otra materia, en el cual pueden producirse desajustes que perturben la adecuada utilización de las herramientas matemáticas. (Godino, 2003).

Para el desarrollo de una "convivencia simbiótica" de las matemáticas con otros saberes se precisa del desarrollo de un lenguaje común que haga posible el mutuo entendimiento y la comunicación.

Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo, es necesario una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan. El docente de matemática debe procurar reducir en sus clases el desarrollo de ejercicios de memoria en forma mecánica sin la debida comprensión.

Por ello, "...el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto....Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado..." (Godino, 2003).

Si realmente quiere contribuir a un aprendizaje significativo de sus alumnos, el docente de matemática debe realizar un uso adecuado de los Fundamentos de Física involucrados en la contextualización de conceptos matemáticos.

De acuerdo con Brousseau (1986), el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles. Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo de matemático profesional: debe producir una re contextualización y una re personalización de los conocimientos,

ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones, las cuales serán sus propios conocimientos.

El profesor debe ofrecer a los alumnos los medios de encontrar lo que es el "saber cultural" que se le quiere enseñar. Los alumnos deben, a su vez, redescontextualizar y redespensalizar su saber de modo que identifiquen su producción con el saber que se usa en la comunidad científica y cultural de su época.

Una interpretación ingenua del constructivismo conduce a atribuir un papel limitado a la enseñanza, esto es, al trabajo del profesor en su labor de facilitar el aprendizaje; esta quedaría reducida a la selección de situaciones problemáticas significativas para los alumnos. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. (Carmen Batanero, Juan D. Godino y Virginia Navarro-Pelayo).

La atención a los tres aspectos del conocimiento matemático (quehacer, lenguaje, sistema conceptual) en los procesos de enseñanza-aprendizaje hace más compleja la labor de los profesores en las aulas, por lo que se precisa el desarrollo de materiales curriculares que, sin sofocar su necesaria creatividad, hagan viable la renovación de la educación matemática. La selección de situaciones problemáticas prototípicas precisa de un conocimiento profundo del campo de problemas y del

contenido correspondiente, que normalmente no está al alcance de los profesores. Frecuentemente, el discurso psico-pedagógico ignora las complejidades del contenido de enseñanza, reclamando del profesor tareas que no están a su alcance, exigiéndole que aplique a su práctica cotidiana análisis que requieren un tiempo y unos conocimientos teóricos que no están a disposiciones de los profesores. La investigación didáctica debe aportar soluciones prácticas a estos problemas. La elaboración de textos para la formación inicial y permanente de profesores puede ser una contribución significativa para este fin. (Juan D. Godino y Carmen Batanero)

### **Metodología**

a) Exposición, a modo de introducción, de los principales resultados obtenidos en el marco del proyecto: “Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia”, actualmente en ejecución en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan – Argentina. Se realizará el análisis de problemas didáctico-matemático específicos detectados.

b) Presentación de una síntesis de algunas de las conclusiones, expuestas durante los últimos años por investigadores en educación matemática referidas a la tendencia actual de presentación de matemáticas contextualizadas, como herramienta para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

c) A modo de ejemplo y con el propósito de motivar el trabajo colaborativo del taller, se mostrarán algunos problemas contextualizados y las variables didácticas específicas relacionadas con la situación (en especial los elementos de la situación que puedan afectar el proceso de enseñanza-aprendizaje).

d) Taller de análisis crítico de problemas contextualizados, usando la metodología de trabajo colaborativo en grupos pequeños. Se fomentará el trabajo participativo de los asistentes,

con la orientación permanente del docente a cargo, en las actividades propuestas.

Algunas de las tareas a proponer en el taller son:

Dados una colección de problemas contextualizados que involucran Fundamentos de Física, seleccionados de la bibliografía disponible para docentes y alumnos del nivel secundario y primeros cursos de matemática universitaria, identificar:

- posibles estrategias de resolución por parte de los alumnos;
- conocimientos matemáticos movilizados en los distintos procedimientos de resolución;
- contenidos científicos (de Física) involucrados;
- objetivos plausibles que pueden cubrirse;
- elementos de la situación que deben ser modificados por el docente para que no afecten negativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje,
- complejidad,
- validez científica de los resultados obtenidos.

Para culminar cada jornada de trabajo se realizará la exposición y argumentación de las conclusiones a las que arribaron los distintos grupos.

### **Destinatarios**

Docentes de secundaria y primeros cursos de matemática en la universidad.

### **Contenidos**

- *Didáctica de la Matemática:* Contextualización. Modelización.
- *Contenidos matemáticos involucrados:* Ecuaciones. Sistema de ecuaciones. Funciones: Función lineal. Función cuadrática. Derivada de una función
- *Contenidos físicos involucrados:* Sistema Internacional de Unidades. Cinemática de la partícula. Dinámica de la

partícula. Momento de una fuerza. Trabajo de una fuerza. Potencia.

## **Didáctica de la matemática**

Actualmente hay una tendencia a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia tiene que ver con la importancia que se da, en los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real (p.e. el estudio Pisa 2003). En dicho informe se consideran las siguientes competencias: (Font, 2008).

- Pensar y razonar. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas ... hay?”, “¿Cómo encontrar ...?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- Argumentar. Se refiere a; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
- Comunicar. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- Modelar. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.



- Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
- Representar. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; elegir entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particular.
- Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- Utilizar ayudas y herramientas. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

### **Contextualización**

En este taller nos referimos a contextualización como el proceso a través del cual se proporciona un ejemplo particular de un objeto matemático, proceso que va del objeto matemático a la realidad.

En la actualidad se observa una tendencia a la sustitución de las matemáticas formalistas por unas matemáticas más empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.). Estas matemáticas empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre

el comportamiento de los objetos materiales. (Vicenç Font, 2008).

La investigación en Didáctica de las Matemáticas ha resaltado la importancia que se debe dar a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real. Algunas de estas investigaciones muestran, con ejemplos concretos, que hay una brecha importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas hacen servir en su vida cotidiana. Para Díez (2004) la existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2001). Algunos de estos estudios han puesto de manifiesto que las personas que fracasan en situaciones matemáticas escolares, pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo contenido matemático (Lave, 1988 y Scribner, 1984). En situaciones de la vida real en las que las personas se sienten implicadas se ha observado que éstas utilizan matemáticas "propias" que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitivamente, emocional y socialmente. Estos fenómenos ponen de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. (Vicenç Font, 2008).

La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que contribuye a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno, sólo si están diseñados de manera que permitan al estudiante:

- Hacer uso de su experiencia real.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
- El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.

- La formulación de conjeturas y la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos, descartando el énfasis de la búsqueda mecánica de respuestas.
- La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.
- Comprensión de lo que ellos conocen y necesitan aprender.

Las configuraciones empiristas sugieren una sugestiva agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas: (Font, 2007)

1. ¿Cómo se puede conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos extra-matemáticos?
2. ¿Qué características han de cumplir los problemas contextualizados?
3. ¿Cómo se pueden clasificar?
4. ¿Es posible en las instituciones de secundaria implementar configuraciones epistémicas contextualizadas que permitan una actividad de modelización “rica”?
5. ¿Qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar este tipo de configuraciones epistémicas?
6. ¿Cómo se relacionan este tipo de configuraciones epistémicas con las formales y qué dificultades tienen los alumnos en la transición entre estos dos tipos de configuraciones epistémicas?

## **Modelización**

Es el proceso en el que se interpreta de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. (Font, V.) La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto. (Camarena, 2008)

Las fases de este proceso cognitivo son: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo matemático. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad

En ocasiones se espera que la respuesta a un problema matemático sea inmediata, que se responda sobre la marcha, sin una reflexión creativa (Barnett, 1988). En la práctica escolar, cada problema tiene una solución, con frecuencia única, y, en todo caso, el profesor conoce esta solución. La sociedad no valora al profesional matemático porque se entiende que la enseñanza de las matemáticas, desde la escuela a la universidad, debería capacitar a los ciudadanos y distintos profesionales a resolver sus problemas matemáticos. Esto es irreal e impide un "cultivo" idóneo de las matemáticas. Usualmente hay diversas técnicas matemáticas adaptadas para un problema dado. Además, cada una de ellas está basada en una serie de hipótesis de carácter teórico sobre los datos que en la realidad nunca se cumplen de forma exacta. El profesional matemático debe valorar, entre los diversos métodos disponibles, el grado de ajuste entre las hipótesis y los datos disponibles. La modelización matemática es con frecuencia altamente compleja y precisa de una destreza técnica sofisticada, así como un cierto nivel de creatividad. Esto sólo se puede conseguir en sujetos con un cierto nivel de especialización y dedicación profesional. (Godino, 2003)

Al hacer uso de Modelos físicos para contextualizar objetos matemáticos se debe tener en cuenta:

- El uso adecuado de los conceptos y nomenclatura de las magnitudes físicas involucradas.
- La adecuada inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo
- Debe ser factible realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan.

### **Clasificación de problemas según el contexto**

- *Contexto intra-matemático (Problemas Descontextualizados):* Formulación abstracta. Lo que se pide averiguar no permite activar ningún proceso mental.

### *Ejemplos*

- Interpretar las siguientes situaciones y escribir la función cuadrática  $f(x)$  que representa a cada caso.

a) El espacio recorrido por un auto con movimiento acelerado (y aceleración de 6 kilómetros sobre hora cuadrada) que comienza a moverse con velocidad inicial de 20 kilómetros por hora es igual a su velocidad inicial por el tiempo transcurrido, más el triple del cuadrado del tiempo transcurrido. Escribir la función  $f(x)$  que representa el espacio recorrido en función del tiempo transcurrido.

b) Las ecuaciones horarias de dos móviles son:  $x_1(t) = t^2 + 3t + 5$  y  $x_2(t) = 3t^2 - t + 7$

Hallar el instante en el cual ambos móviles están en la misma posición y especificar la posición de ambos móviles en dicho instante.

- *Contexto real*: refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.
  - *Contexto simulado*: tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características.
  - *Contexto evocado*: refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

### **Clasificación de los problemas de contexto evocado (Font, 2007)**

- Según su complejidad:
  - Problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos complejos de modelización (un extremo).
  - Problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados. (otro extremo).
  - Entre estos dos extremos hay una línea continua en la que podemos situar a la mayoría de los problemas contextualizados propuestos en los libros de textos.

- En función del momento
  - A continuación de un proceso de instrucción: El objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. Les llamaremos: Problemas contextualizados evocados de aplicación si son relativamente sencillos y problemas contextualizados evocados de consolidación cuando su resolución resulte más compleja.  
Se trata fundamentalmente de aplicar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción
  - Al inicio de un tema o unidad didáctica con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos. Les llamaremos problemas de contexto evocado introductorios puesto que se proponen al inicio de un tema matemático y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky).

De acuerdo a la situación evocada:

- *Contextualizados artificialmente*: imposibles como tales o por los datos; posibles pero insensatos (sea por la acción o por lo que se pide).

### *Ejemplos*

- En un partido de vóley un jugador salta al lado de la red y le pega a la pelota. Ésta recorre una trayectoria **recta** de 6m de longitud. La trayectoria de la pelota y el piso forman un ángulo de  $25^\circ$ . Si el jugador mide 2,10 m de altura con el brazo extendido, ¿cuánto saltó? (Pág. 153 Haciendo Números 9 Marina Andrés y Pablo Kaczor 1° ed. Ed. Santillana. Buenos Aires, Argentina, 2004)
- Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la torre CN en Toronto, 450m por arriba del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota una vez que transcurren 5 segundos. (Ejemplo 3 – Capítulo 2: Límites y

derivadas. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos – 3ª ed.- Ed. Thomson – México – 2006)

- *Realmente Contextualizados* (posibles y sensatos): El escenario tiene que ver con situaciones reales; la acción y los datos, son razonables para la situación.

#### *Ejemplo*

- En un partido de fútbol, Gaspar pateó un tiro al arco. La pelota describió una parábola de tiro de 2 m de altura máxima y su primer pique fue a 10 m de donde él estaba. Luego de picar volvió a describir otra parábola de tiro, pero su alcance fue del 40% de la primera parábola, y su altura máxima fue la mitad. En el preciso momento del segundo pique, la pelota fue detenida en el suelo por el arquero Baltasar. Consideren la pelota como un punto, tracen un sistema de ejes  $x$  e  $y$  con origen en el lugar desde donde fue pateada y grafiquen toda su trayectoria. Hallen las expresiones de  $y = f(x)$  para cada una de las parábolas de tiro e indiquen el dominio de cada función. Calculen la altura de la pelota cuando se encontraba a 11 m (horizontales) desde donde fue pateada.

¿Para qué valores de  $x$  tuvo la pelota una altura de 1,92m?

#### **Rigor de conceptos físicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**

Siendo la resolución de problemas un aspecto esencial de la matemática, la intuición y el rigor deben estar presentes al resolver problemas. Es tarea de los docentes estimular la interacción entre intuición y rigor, de modo que haya una retroalimentación positiva. Una primera aproximación intuitiva puede ser potenciada con un adecuado nivel de formalización y la búsqueda del rigor en las afirmaciones; y éstas, a su vez, pueden inducir a intuir la solución de otras partes del problema, de otras formas de resolverlo, o llevar al convencimiento de que la conjetura inicial, basada en una mirada intuitiva, no es la correcta. (Uldarico Malaspina, 2008)

*Ejemplos de algunas “aclaraciones” extraídas de textos de matemática que inducen a interpretar erróneamente los conceptos*

*físicos involucrados, reafirmando, en algunos casos, los preconceptos de los estudiantes*

- “Algo más....: En general se logra que la velocidad sea constante luego de un periodo de aceleración. Solamente podemos hablar de velocidad constante todo el tiempo cuando modelizamos situaciones ideales en un laboratorio. Sin embargo, los aviones tienen un sistema que les permite, a partir de un cierto momento, ir a determinada velocidad constante fija, este sistema se utiliza cuando se manejan con piloto automático”. (Altman, Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S. A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).
- ¿Sabían que...?: Galileo tiró desde la torre de Pisa dos cuerpos de distinto peso y observó que caían al piso simultáneamente y que aumentaban su velocidad a medida que iban cayendo. No pudo medir este cambio en la velocidad de caída debido a la poca precisión de los instrumentos que poseía – no existía el cronómetro -, pero dedujo que lo mismo debía pasar en un plano inclinado, donde pudo trabajar con unidades de tiempo que podía medir. Demostró, así, que la velocidad aumentaba en razón al cuadrado del tiempo:  $v = k \cdot t^2$ . (Altman, Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S.A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).
- La Dinámica, parte de la Física que estudia el movimiento y sus causas, se basa en una ley asombrosamente simple. Se trata de la “segunda ley de Newton”, que permite predecir la posición futura de cualquier objeto (desde pelotas hasta galaxias) si se conocen la posición y la velocidad en un momento dado y las fuerzas que actúan sobre él. (Pág. 143 Blatman, Ariel y Otros – Matemática 8 EGB – 2 ESB – Confluencias – Editorial Estrada Secundaria – Colonia Suiza República Oriental del Uruguay – 2009)
- “El área bajo la curva aceleración es la velocidad alcanzada” – (Pág. 324 Integral Definida - De Guzmán, M. & Colera, J. – Matemáticas I – C.O.U: Ed. Anaya- España – 1998).



- La velocidad de una partícula es la razón de cambio de desplazamiento con respecto al tiempo. Los físicos también se interesan en otras razones de cambio; por ejemplo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia). (Pág. 145 - Sección 2.6 - Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Límites y derivadas. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos - 3ª ed.- Ed. Thomson - México - 2006)

### **Actividad**

En este taller se analizarán los contenidos de Física involucrados en algunos problemas contextualizados para ilustrar que la preocupación por la formalización matemática y el rigor científico no siempre es adecuadamente orientada, desfavoreciendo el proceso de enseñanza- aprendizaje.

#### *Consigna*

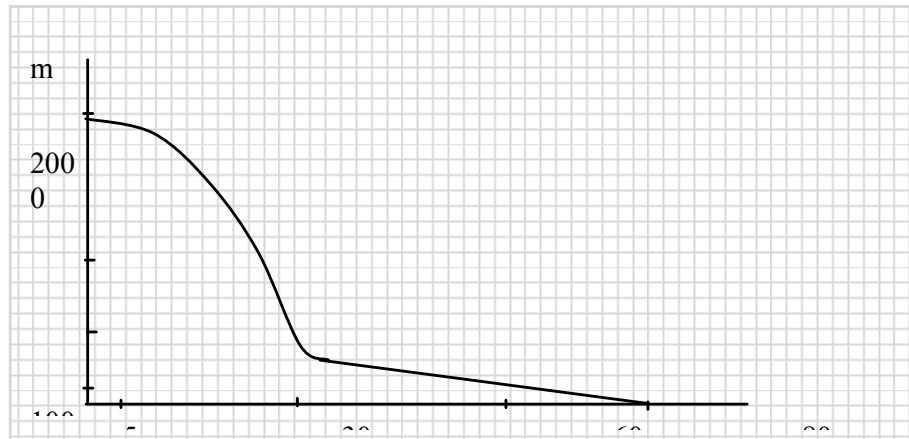
Los enunciados que se incluyen son situaciones problemáticas contextualizadas, que involucran conceptos de Física, seleccionados de libros de textos de Matemática del Nivel Secundario y primer curso universitario. Para cada uno de ellos:

- a) Esbozar la solución de los problemas propuestos a fin de identificar los conceptos y procedimientos matemáticos que necesitarían poner en juego sus alumnos para resolverlo.
- b) Identificar los contenidos de Física involucrados y la rigurosidad científica de la formulación del enunciado.
- c) Analizar la validez científica de los resultados obtenidos y su posible generalización.
- d) Si lo cree conveniente, reformular el enunciado.

Aclaración: Los enunciados han sido ordenados según el objeto matemático predominantemente involucrado de acuerdo de acuerdo al criterio de los respectivos autores

*Ejemplos de Situaciones Problemáticas a analizar contextualmente*

- Ésta es la gráfica altura-tiempo de la caída de un paracaidista.



Di cuál es la velocidad de caída libre, cuánto tiempo la mantiene y que altura cae de ese modo; cuál es su velocidad con el paracaídas abierto, cuánto tiempo la mantiene y que altura recorre así.

¿En qué instantes lleva una velocidad de 50m/s?

- Una bola de béisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64m/s. El número de metros  $m$  sobre el suelo después de  $t$  segundos está dado por la ecuación:

$$m = -16t^2 + 64t.$$

- ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 m sobre el suelo?
- ¿Cuándo regresará al piso?

- Lanzamos una pelota, la altura alcanzada  $y$  (en m) y los metros recorridos  $x$  están relacionados por la ecuación:  $y = -5x^2 + 10x$ . Calcula la máxima altura alcanzada por la pelota.

## **Resultados esperados**

- Comprender que la contextualización matemática es una estrategia didáctica y pedagógica eficiente sólo si se asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales.
- Realizar un análisis crítico de la contextualización de modelos físicos que usa el docente de matemática.
- Adquirir destreza en la contextualización matemática usando fenómenos físicos.
- Aplicar los fundamentos de la Física para orientar al alumno en el proceso de validación del modelo comparando el sistema modelo con el real a partir de los resultados obtenidos en la resolución de las situaciones problemáticas contextualizadas.

## **Bibliografía**

- Andrés, M. E. Actividades de Matemática 8. 1a ed. Buenos Aires. Santillana, 2006.
- Batanero, Carmen; Godino; Juan & Navarro Pelayo, Virginia. Conocer y aprender matemáticas: su relación con la resolución de problemas. Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática. Granada, Octubre 2003.
- Camarena Gallardo; Patricia del Instituto Politécnico Nacional, México. La Matemática en el Contexto de las Ciencias. Actas III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Editora: Cecilia Gaita Lima, 2008.
- De Guzmán, M. & Colera, J. Matemáticas II. C.O.U: Ed. Anaya. España, 1989.

- De Katz, M. Modelización: una forma de encontrar el sentido de la Matemática. Edición impresa Ambiente & Ciencia. Edición del Miércoles 22 de abril de 2009 (C) Prensa UNL, El Litoral. Artículo disponible en línea el 15/07/09.  
<http://www.ellitoral.com/index.php/diarios/2009/04/22/medioambiente/MED-02.html>
- Font, Vicenç. Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. Texto de la conferencia inaugural del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Lima, 2008.
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros- Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manual para el Estudiante. Proyecto Edumat-Maestros, 2003  
[www.ugr.es/local/godino/edumat-maestros/welcome.html](http://www.ugr.es/local/godino/edumat-maestros/welcome.html)
- Godino, J. La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática Granada, 2003
- Larson, Hostetler & Edwards. Cálculo I. Octava Edición. Mc Graw Hill. China, 2006.
- Malaspina; Uldarico. Intuición y rigor en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Actas III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Editora: Cecilia Gaita Lima. Febrero del 2008.
- Purcell, Edwin & Varberg, Dale. Cálculo con geometría analítica. Sexta Edición. Pearson.
- Serway, R. & Jewett, J. Física Para Ciencias e Ingenierías. Volumen I. 6a Ed. Thomson. México, 2005.
- Stewart, J - Cálculo. Conceptos y Contextos. 3ª ed. Thomson. México, 2006.

- Thomas, George B. Cálculo una variable. Undécima Edición. Pearson Addison Wesley. México, 2006.
- Zill, Dennis G. Cálculo con geometría analítica- Grupo Editorial Iberoamericana.

# **SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS**



# Hacemos transformaciones geométricas con ayuda de Geogebra

Joel Ascencio Gonzáles <sup>1</sup>

## **Resumen**

*A través de la experiencia realizada, se buscó mejorar el trabajo del área haciendo uso de los recursos con los que la institución contaba: un laboratorio con 10 computadoras personales, acceso a internet, proyector multimedios y un ambiente adecuado para el desarrollo de actividades con ayuda del computador.*

*Para iniciar las actividades se hizo necesario precisar la importancia y utilidad de las transformaciones geométricas en el campo de la matemática y más aún en el arte. Se les instruyó en el conocimiento del entorno del software Geogebra, se desarrolló la habilidad para ubicar puntos específicos en el plano, realizar reflexiones, traslaciones y rotaciones con ayuda del computador.*

*De esta manera se consiguió una mayor motivación en los alumnos dado que participaban en una experiencia novedosa.*

## **Justificación**

La integración de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en el mundo educativo nos permite disponer de unos recursos que, usados de forma adecuada, se convierten en una herramienta potente y con interesantes funcionalidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La predisposición por parte del alumnado para el uso de estos recursos es muy favorable. Es evidente el carácter motivador de los mismos y su eficacia para favorecer metodologías activas y participativas, que permiten además que el alumnado se sienta partícipe de su propio aprendizaje. Podrá trabajar las matemáticas de forma experimental, esto es, interactuar con

---

<sup>1</sup> CE Manuel Antonio Mesones Muro, Lambayeque-Perú



objetos matemáticos, construirlos, analizar comportamientos, comprobar propiedades, hacer conjeturas, realizar simulaciones entre otras tareas.

La intencionalidad de esta experiencia es proponer una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Se da a partir de la iniciativa docente a consecuencia de la observación diaria del desánimo del alumnado hacia el área, al considerarlo tedioso, poco atractivo, que no despierta el interés, la creatividad, etc.

La fundamentación de este trabajo radica en la importancia de ofrecer a los alumnos un adecuado acceso a los conocimientos además de garantizar aprendizajes funcionales. Se da por descontado que la herramienta dinámica Geogebra es un recurso apropiado para la realización de los aprendizajes escolares además de cómoda y sencilla herramienta con la que se puede crear material personalizado.

Geogebra, como software de geometría dinámica, permite abordar problemas geométricos y de dibujo lineal en el plano, a través de la experimentación y la manipulación de diferentes objetos que intervienen en una construcción, por lo que se podrá diseñar, construir, explorar y resolver problemas de manera interactiva.

### **Identificación de una expectativa de la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes**

Constantemente somos veedores pasivos de los resultados en las diferentes evaluaciones a nuestros estudiantes, cuyos niveles de desempeño se encuentran por debajo del Nivel Básico y más notorio aún en los alumnos de las áreas rurales. Es común encontrar en nuestras aulas alumnos que evidencian:

- Escaso dominio de las operaciones básicas.
- No comprenden textos para la solución de problemas sencillos.
- Dificultades en la ubicación de puntos en el plano.
- Temor para acceder a un computador.

- Escaso uso de la imaginación y creatividad en problemas de secuencias lógicas.

A esto tenemos que agregarle las actitudes de rechazo y desinterés por el área.

Según lo expresado, se buscó la manera de mejorar el trabajo del área haciendo uso para ello de los recursos que nuestra institución cuenta como son: un laboratorio con 10 computadoras personales, acceso a internet, proyector multimedia y un ambiente adecuado para el desarrollo de actividades con ayuda del computador.

### **Motivación**

Durante las sesiones de clase se da a conocer al alumnado la importancia del manejo funcional y productivo del computador en el área de Matemática, tratando de esta manera motivarlo a participar activamente en la experiencia.

Fue preciso también compartir con los demás colegas y padres de familia la experiencia a desarrollar con los alumnos.

### **Antecedentes**

*“La eficiencia de la intuición”.*

Esta innovación promueve el uso adecuado y eficiente del Geogebra. Su interés radica en el uso de software libre por parte del docente y el alumnado en general.

Referencia: revista “Divulgamat” del Centro de Divulgación de las Matemáticas. Octubre 2009.

### **Objetivos**

- Enfocar el aprendizaje de la matemática como una estimulante aventura intelectual.
- Explorar en el inmenso mundo del internet recursos apropiados para el desarrollo de la creatividad e inventiva con ayuda de la matemática.
- Generar un clima de confianza y seguridad en sí mismos así como de solidaridad y compañerismo entre pares.

## **Metas.**

- Desarrollar el tema “Transformaciones Geométricas” con ayuda del computador y el software libre Geogebra.
- Desarrollar habilidades para el manejo eficiente del computador.
- Organizar a los estudiantes en equipos de trabajo de tal manera que suscite en ellos la competencia sana y el compañerismo.
- Lograr la participación activa de los 62 alumnos del Primer Grado de Educación Secundaria, secciones “E” y “F” de la IE. “M.A.M.M.”

## **Recursos**

- 10 computadoras personales más 01 proyector multimedios.
- Pizarra acrílica, plumones, lápices, colores, papel cuadriculado.
- Juego de reglas: escuadras, transportador, regla.
- Acceso a internet.

## **Desarrollo de actividades**

Para iniciar las actividades se hizo necesario precisar la importancia y utilidad de las transformaciones geométricas en el campo de la matemática y más aún en el arte. Expresarles que la mejor manera de explorar el espacio es haciendo desplazamientos dentro de él; observar los cambios que tienen los objetos cuando efectuamos un cambio. Además de conocer el número de alumnos que habían tenido acceso al computador fue necesario mostrarles las bondades de su uso y las facilidades que nos brinda en determinadas construcciones matemáticas.

Se les instruyó en el conocimiento del entorno del software Geogebra, se desarrolló la habilidad para ubicar puntos específicos en el plano, realizar reflexiones, traslaciones y rotaciones con ayuda del computador y el software Geogebra.

Con ayuda del computador y el software Geogebra, se indujo al alumnado a la construcción de figuras decorativas haciendo diferentes rotaciones con una figura.

### *Resultados de la experiencia*

El balance de nuestra experiencia hasta la fecha es la siguiente:

#### *Alumnos*

- Motivación por participar en una experiencia novedosa.
- Ambiente favorable y de mayor disposición para el aprendizaje de la matemática.
- Incremento de la participación de los estudiantes en las actividades del área.

#### *Docentes*

- Mayor compromiso en su tarea docente.
- Intercambio de experiencias.

#### *Cambios*

- Una mayor aceptación y agrado por parte de los alumnos hacia el área de matemática.
- Mayor disposición para aprender matemática por parte de los alumnos.
- Los docentes se preocupan por buscar un ambiente favorable para el desarrollo del proceso enseñanza – aprendizaje del área de matemática.

#### *Dificultades*

- Dificultad en los horarios establecidos en el aula de innovación.
- Adaptación lenta de docentes y alumnos para manipular objetos en el software Geogebra.

### *Sugerencias*

- Continuar el la experiencia adaptando otros temas vinculados al Álgebra y la Geometría, así como el arte.
- Una vez logrado un paquete de experiencias, buscar mecanismos de difusión para mejorarlo y aplicarlo a otras realidades.

### **Bibliografía**

Instituto Apoyo (2004). Matemáticas para todos. 1º secundaria.(3ª edic.).Lima.

Grupo Editorial Norma (2002). Matriz 3. *Matemática para secundaria*. Lima.

Manuel Rivas Navarro (2000). Innovación Educativa. *Teoría, Proceso y Estrategias*. España.

Markus Hohenwarter, (2001). Project leader, Austria.  
[www.geogebra.at](http://www.geogebra.at)

Foro usuarios de geogebra. Recuperado 12 octubre 2009 de:  
[www.geogebra.at/forum](http://www.geogebra.at/forum)

Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas (2009). Recursos didácticos en Internet. *La eficiencia de la intuición*. Recuperado 10 octubre 2009 de:  
<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/recursosinternet>.

# Visualizando las funciones con MS Excel

María Elena Villanueva Pinedo <sup>1</sup>

## **Resumen**

*Para presentar los nuevos conocimientos, las NTIC ofrecen nuevas alternativas de medios y recursos, al mismo tiempo que permiten, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, desarrollar ciertas habilidades propias, como son las de algoritmizar, decodificar y comparar y para realizar la actividad se eligió el MS Excel por su disponibilidad y facilidad de uso. Este tipo de actividad también posibilita al estudiante afianzar y ampliar sus conocimientos ya que incentiva la investigación y pueden verificar rápidamente sus conjeturas durante el desarrollo del taller. El objetivo es que el participante, esté preparado para usar, de manera básica, la hoja de cálculo del MS Excel e incorporar en su estrategia metodológica el empleo de esta herramienta y complementar su enseñanza del tema: Funciones, promoviendo y favoreciendo la construcción de conocimiento.*

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional Agraria La Molina- Perú



# Las Matemáticas y los proyectos didácticos

Guadalupe Castillo Hernández <sup>1</sup>

## **Resumen**

*El presente trabajo aborda lo referente a la Reforma Integral de Educación Básica que se lleva a cabo en México. Particularmente, hace referencia a una experiencia de trabajo sobre los proyectos didácticos que los alumnos trabajan para alcanzar los aprendizajes esperados, que les permitan desarrollar conocimientos, habilidades, actitudes y valores, para que alcancen las competencias para la vida.*

## **Introducción**

El presente documento aborda lo referente a la Reforma Integral de Educación Básica en México. El mundo contemporáneo plantea nuevos retos a los hombres y mujeres para su inserción en la sociedad, por lo que se hace necesario revisar los planes y programas de la educación básica, con miras a preparar a los alumnos para este mundo globalizado. Esta reforma se sustenta en la necesidad de tomar en cuenta los aportes recientes de la investigación sobre el desarrollo y aprendizajes infantiles, el propósito central de la reforma curricular de este nivel educativo ha sido la transformación y el mejoramiento de las prácticas pedagógicas orientándolas a favorecer en los niños el desarrollo de competencias.

En México, desde el 2004 se inició un proceso de reforma de la educación básica, que incluye el nivel preescolar, primary y secundario; esto como resultado de los requerimientos del mundo actual, que cada vez más altos los niveles educativos solicitados a hombres y mujeres para participar en la sociedad y resolver problemas de carácter práctico. En este contexto se hace necesaria una educación básica que contribuya al desarrollo de competencias, que le permitan al alumno

---

<sup>1</sup> Secretaría de Educación , Nueva León- México



enfrentarse exitosamente a los retos de la comunidad, vivir y convivir en una sociedad más compleja. Esto implica un aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser; por lo que exige que el alumno viva dentro del aula procesos de aprendizaje donde su papel pase a ser de sujeto pasivo a sujeto activo; que desarrolle competencias.

Dentro del Plan de estudios 2009, se menciona que “una competencia implica un saber hacer (habilidades), con saber (conocimiento) así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (Plan de Estudios, 2009); esto significa que una competencia revela la puesta en práctica de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para la solución de una situación. Las competencias que propone el plan son cinco: competencias para el aprendizaje permanente, para el manejo de la información, competencias para el manejo de situaciones, para la convivencia, y competencias para la vida en sociedad, mismas que el niño deberá alcanzar al culminar su proceso de educación básica que concluye con la secundaria.

Desde el 2004, se inició la Reforma Integral de Educación Básica, con la reforma a los planes y programas de estudio del nivel de preescolar, continuando en el 2006 con la educación secundaria, para terminar en este 2009 con el nivel de primaria, articulando así los tres niveles, planteando cuatro campos formativos que conforman el mapa curricular, que son lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y comprensión del mundo natural y social y, por último, el desarrollo personal y social. Esta organización pretende que las asignaturas que conforman el currículo de cada nivel se articulen en uno solo, para que muestre más integración entre los enfoques y contenidos de las asignaturas, para que también a su vez se asegure la vinculación y cumplimiento de las competencias que los alumnos deben desarrollar y poner en práctica.

Cada campo y asignatura tiene a su vez competencias a alcanzar, éstas varían según el nivel (preescolar, primaria y secundaria), organizándose de forma vertical y horizontal, en un esquema que permite apreciar la secuencia entre los campos y asignaturas. En

el nivel primaria las asignaturas que se abordan son español, matemáticas, ciencias naturales, geografía, historia, formación cívica y ética, educación física y educación artísticas.

### **Las Matemáticas en el enfoque por competencias**

La asignatura de matemáticas a su vez plantea que a partir de seguir el enfoque y la metodología que más adelante abordaré, el alumno deberá alcanzar a lo largo de seis años el logro de competencias matemáticas tales como: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

Resolver problemas de manera autónoma: implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones, por ejemplo, problemas en los que los alumnos plantean las preguntas, problemas con una solución o con varias. Que sean capaces de resolver problemas utilizando más de un procedimiento, que reconozcan cuál o cuáles son más eficaces; esto partiendo de plantear una situación cotidiana o contextualizada, donde cada alumno lo resuelva a partir de sus recursos propios, utilizando sus propios procedimientos, para luego socializar al interior del equipo dicho proceso, y de esta manera los alumnos conocen varias formas de encontrar la solución, eligiendo así las más eficaces, para llegar a una generalización. Es importante que el docente parta de reconocer los conocimientos previos del alumno, para que le proporcione los recursos materiales necesarios para la solución del mismo, que conozca sus procedimientos informales para llegar así al uso de procedimientos de expertos. Al principio tal vez resuelva con ayuda para llegar a resolver problemas de manera autónoma.

Comunicar información matemática: esta competencia implica la posibilidad de expresar y representar información matemática contenida en una situación o de un fenómeno, así como interpretarla. Se requiere que el alumno comprenda y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación, que establezca relaciones entre estas representaciones, que exponga con

claridad sus ideas, que deduzca la información derivada de esas representaciones e infiera propiedades.

Validar procedimientos y resultados: esta competencia implica que los alumnos adquieran la confianza suficiente para expresar sus procedimientos y defender sus aseveraciones con pruebas empíricas y argumentos a su alcance, aunque éstos disten de la demostración formal, son justamente su antecedente. Por eso es importante que el docente logre que los alumnos asuman la responsabilidad de buscar al menos una manera de resolver el problema que se les plantea, pues así crea las condiciones para que se vean en la necesidad de formular argumentos que validen sus procedimientos y soluciones encontradas.

Manejar técnicas eficientemente: esta competencia, implica el uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora, en muchas ocasiones esto marca la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución diferente. Esta competencia no se limita al uso mecánico de las operaciones aritméticas, apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema, en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema y en evaluar la pertinencia de los resultados.

A partir de lo anterior, es importante revisar el enfoque, el papel del alumno y el docente, así como la metodología; respecto al enfoque de las matemáticas, el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas para la educación primaria consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen sus resultados.

El conocimiento de los algoritmos, reglas, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida que los niños los puedan utilizar de manera flexible, para solucionar problemas.

Esta manera de abordar el estudio de las matemáticas parte de papel determinante que desempeña el medio, entendido como la situación o las situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretende estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir sus nuevos conocimientos y superar los obstáculos que surgen en el proceso de aprendizaje.

Lo anterior redimensiona el papel del maestro y el alumno, así como el significado de lo que es enseñar y aprender, ahora el docente tendrá que buscar nuevas formas de plantear los problemas mas que buscar explicaciones más sencillas, de manera que sean interesantes para los alumnos para que aprovechen lo que saben y construyan a partir de ahí nuevos conocimientos más significativos.

El maestro deberá concebir el aula como un espacio donde los alumnos piensan, comentan, discuten con interés y aprenden, esto implica en algunos casos un cambio radical en la forma de concebir la enseñanza de las matemáticas; se habrá de trabajar de manera sistemática para que los alumnos se interesen por buscar la manera de resolver los problemas que se les plantean.

Convencer a los alumnos de la importancia de leer cuidadosamente la información que se presenta, que tengan una actitud participativa en cuanto se trabaje en equipo y colaborativamente, que se brinden espacios para que compartan sus experiencias. Al principio esta forma de trabajar hará que se invierta mucho tiempo pues los alumnos no están acostumbrados a ello. Es importante que los docentes inviertan tiempo en este tipo de actividades, pues en ocasiones la presión del tiempo nos agobia y limita por lo que optamos por seguir de manera tradicional.

El enfoque por competencias implica que los docentes asuman como sujetos en proceso de formación, que reflexionen sobre su desempeño y sobre como cada uno de nosotros como docentes, también vamos desarrollando competencias, como vamos organizando y animando situaciones de aprendizaje, como vamos gestionando la progresión de los aprendizajes de nuestros

alumnos, como implicamos a los alumnos en su aprendizaje y en su trabajo, si trabajamos colaborativamente. (Perrenoud, 2004)

A partir de concebir el papel del maestro desde otra perspectiva, donde el papel activo lo lleva el alumno y el docente guía, facilita, orienta, modera y organiza las situaciones de aprendizaje, es indispensable un análisis y reflexión docente, que me permita detectar las acciones que sean mis áreas de oportunidad, con el fin de diseñar estrategias para superarlas.

En el estado de Nuevo León se han capacitado a los docentes del nuevo plan de estudio y los programas de grado. Actualmente se implementa en fase de piloteo 131 escuelas, que trabajan con la puesta en práctica de los nuevos materiales de segundo a quinto grado, pues primero y sexto grado, se ha generalizado en todas las escuelas del país la implementación de la reforma.

### **Los proyectos didácticos**

Las experiencias obtenidas hasta el momento son positivas, la metodología de trabajo es el proyecto es una propuesta de esta reforma, en ella los alumnos trabajan para alcanzar un producto final vinculando varias asignaturas y alcanzando aprendizajes esperados según los temas a tratar. En el caso de las matemáticas en ocasiones es difícil vincularlas al proyecto, por lo que se ha trabajado por separado, esto depende del tema a tratar y de la habilidad del docente para vincularlo.

El trabajo por proyecto permite que los alumnos se planteen interrogantes sobre cosas que les interesen, diseñen sus procesos de trabajo, se relacionen de un modo más activo con el mundo, que expongan sus formas de pensar y sus concepciones del mundo y de las cosas, que pongan en juego sus ideas, que movilicen sus teorías y las confronten con otros, que participen activamente en la construcción de aprendizajes, que alcancen logros afectivos, sociales cognitivos y metacognitivos.

Se pretende que el alumno aprenda haciendo, situando su aprendizaje en un contexto cotidiano, partiendo de sus conocimientos previos, de manera que movilice sus saberes y que a partir de ellos construya otros, tanto por las acciones

individuales como de los procesos de socialización durante el desarrollo del proyecto.

Es importante que las ideas surjan de los alumnos, el maestro puede comenzar indagando sobre qué temas les son de su interés, se enlistan, para después seleccionar uno sobre el cual se construirá el proyecto, se procede después a enlistar una serie de cuestiones que los alumnos quieren saber sobre el mismo, dichas preguntas se trasladan a actividades con tiempos, recursos y productos esperados. Por ejemplo, el maestro deberá conocer los temas y aprendizajes esperados a trabajar en un periodo de tiempo, una semana, dos semanas, etcétera, para cuando pregunte a los alumnos sobre el tema su interés pueda orientar las actividades a alcanzar el logro de los aprendizajes esperados y abordar todos los temas.

El proyecto se puede organizar desde cualquier asignatura y de ahí vincular las otras asignaturas, el tema de interés de los alumnos servirá de enlace, por ejemplo si los niños de primer grado quieren saber sobre los animales, ver desde español la escritura de los nombres de los animales, desde matemáticas se puede hacer una gráfica de barras sobre las mascotas de los niños del grupo, desde ciencias naturales conocer los animales vivíparos y ovíparos, desde geografía en que ecosistema viven, desde historia la importancia de los animales en el desarrollo de las sociedades y así desde cada asignatura vincular los temas.

Lo importante es partir del interés de los niños, pues de esta manera se comprometen con el proyecto, y se responsabilizan de su proceso de aprendizaje, aquí entran la autoevaluación y coevaluación pues el alumno estará en condiciones de juzgar sus acciones de forma constructiva, favoreciendo los procesos de metacognición.

En comentarios de los docentes expresan que esta forma de trabajo produce que los alumnos se vuelven más investigadores, que se interesan por las actividades, más participativos, creativos y con iniciativa; los niños expresan que ahora ya saben que es lo que tienen que lograr al final del proyecto y eso orienta su trabajo, pues ya saben que deberán lograr.

## **Referencias**

Casanova, Ma. A. (1998), Evaluación educativa, México, SEP/Muralla (Biblioteca para la actualización del Magisterio).

Díaz Barriga, Frida (2006), La enseñanza situada, México, McGrawHill.

Gardner, H. (1997), La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar en las escuelas, México, SEP/Fondo Mixto/Paidós (Biblioteca para la actualización del Magisterio).

Perrenoud, P.(2004), Diez nuevas competencias para enseñar, México, SEP (Biblioteca para la actualización del Magisterio).

SEP (2009), Plan de Estudios 2009, Educación Básica, Primaria, México, p.40

SEP (2009), Programas de estudio, Sexto grado, Educación Básica, Primaria, México.

SEP (2009), Programas de estudio, Primer grado, Etapa de prueba, Educación Básica, Primaria, México.

SEP (2009), Programas de estudio, Tercer grado, Etapa de prueba, Educación Básica, Primaria, México.

SEP (2009), Programas de estudio, Cuarto grado, Etapa de prueba, Educación Básica, Primaria, México.

## **Artículos**

Balbuena, H. (2006), El desarrollo de competencias matemáticas en la educación básica, México.

# Inteligencias múltiples en Matemáticas

José Luis Morón Valdivia <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En el presente trabajo se desea compartir tres experiencias o actividades dirigidas a fomentar y potenciar las inteligencias múltiples de los docentes, en el marco del Programa Pronafcap, dirigido a docentes de la Educación Básica Regular de Nivel Primaria. Las experiencias estuvieron basadas en el desarrollo de una cometa tetraédrica, para el tema de Geometría del Espacio; elaborar canciones para describir el área de una región plana; participación en una obra de teatro, donde se personalizan los estimadores de tendencia central. Los docentes demostraron mucho entusiasmo y una actitud positiva en cada una de las actividades.*

## **Pertinencia del tema abordado**

Se comentará brevemente la pertinencia de los temas abordados con cada una de las actividades.

- a. *Cometa tetraédrica:* Permitió explorar los elementos básicos de los sólidos geométricos como: vértices, aristas, caras. Comprobándose la fórmula de Euler. Así también se desarrolló una ficha de trabajo grupal, donde se aplicaron conceptos de áreas de regiones planas, y volúmenes.
- b. *Cantando las fórmulas de áreas de regiones planas:* Permitió conocer a fondo cada una de las fórmulas de las regiones planas principales como: triángulo, cuadrado, rectángulo, paralelogramo, trapecio, rombo y regiones circulares. Cada uno de los grupos presentó una de las fórmulas con gran creatividad.

---

<sup>1</sup> Programa Pronafcap- Perú



- c. *Teatro en la estadística:* La personalización de los estadísticos como la Media, Mediana, Moda, sus propiedades, permitió una mejor conceptualización de dichos temas.

### **Marco teórico**

El trabajo realizado se basa en las Inteligencias Múltiples propuestas por Howard Gardner.

Desarrollo de algunos ejemplos:

- a. *Cometa tetraédrica:* Permitió explorar la inteligencia espacial, las cometas se desarrollaron en base al modelo desarrollado por Alexander Graham Bell. La cual está basada en la unión de celdas, la cual representa a un tetraedro. Cada tetraedro, tiene cubierto solo 2 caras de las 4 que posee.

Las cuales pueden ser ensambladas en series, o en modelos recursivos. El aspecto lúdico estuvo presente. Los docentes al final de la sesión pudieron salir al patio a volar las cometas creadas por cada uno de los grupos. Los grupos estuvieron integrados entre 4 a 6 participantes. Se proporcionaron previamente los materiales necesario como: pajillas, papel crepé, cintas, tijeras y la ficha de trabajo.

Se puede visualizar un video de los docente volando las cometas en <http://videos.pucp.edu.pe>  
<http://videos.pucp.edu.pe/videos/ver/24deed162db7c2a46e844f61bbe4a6bd>



- b. *Cantando las fórmulas de áreas de regiones planas:* Cada uno de los grupos pudo representar una de las fórmulas del área de las regiones planas, a través de una canción conocida o un tema popular; asimismo debieron realizar la explicación de cada una de ellas. La exposición de la fórmula, fue grupal. Los grupos estuvieron integrados por 4 ó 5 participantes.
- c. *Teatro en la estadística:* Se elaboró un guión previo sobre la personalización de los estadísticos como la Media, Mediana, Moda, los cuales explican a un grupo de números, como pueden hacer para que uno de ellos sea el representativo del grupo. Paso a paso la Media, Mediana, Moda, van planteando las soluciones a dicho grupo de números.

### **Análisis de resultados**

El considerar las inteligencias múltiples en el desarrollo de las actividades, permitió integrar otros estilos de aprendizaje de los

docentes. El aspecto lúdico, creo un clima motivador, y realizó un cambio de actitud hacia la forma de ver a las matemáticas como algo integrador de otros saberes y divertidas. Se facilitó la comprensión de los conceptos matemáticos a través de la utilización de materiales concretos, y situaciones cotidianas. Luego de ser evaluados los docentes mejoraron en su rendimiento.

### **Bibliografía**

Prieto Sánchez, María Dolores. (2003). Las inteligencias múltiples: diferentes formas de enseñar y aprender. Madrid, Pirámide.

Suay, J. (2000). Al final del Hilo. El Tetraedro de Alexander Graham Bell.

# La Importancia de las conjeturas en el aprendizaje de las Matemáticas

Olimpia Castro <sup>1</sup>

## **Resumen**

*La presente comunicación está dirigida a enfatizar la importancia del desarrollo del razonamiento en el aprendizaje de la Matemática. Los estudiantes deben tener claro que ésta posee un sentido que hay que reconstruir mediante el desarrollo de ideas, la justificación de resultados y el uso de conjeturas, entre otras actividades. Teniendo en cuenta todo estudiante llega a la escuela con algún conocimiento, pues no existe individuo carente de nociones básicas de Matemática, los docentes buscarán estimular el natural desarrollo hacia la comprensión de nuevos conceptos y resolución de problemas más complejos.*

Entonces, los estudiantes también tienen que estar capacitados para:

- Comprender que el razonamiento y los pasos para realizar una demostración son de gran importancia en la resolución de problemas matemáticos.
- Arriesgarse a proponer y desarrollar conjeturas, mostrando solidez en el proceso argumentativo.
- Discriminar la validez de argumentos mediante ejemplos y contraejemplos y demostraciones matemáticas.

Los docentes deben inculcar a los estudiantes que toda afirmación matemática debe llevarnos a preguntar sobre su origen y validez. Es decir, no se trata de “aceptar” sin discusión lo propuesto, sino de ir hasta sus raíces para verificar su validez, cuando sea pertinente.

---

<sup>1</sup> Colegio América del Callao- Perú

Se debe acostumbrar al alumnado a cuestionar los conocimientos recibidos de manera tal que adquieran seguridad al momento de conducirse en sus propias investigaciones. Debe quedar de lado la errada idea de que algo es válido sólo porque el maestro lo dijo. Por el contrario, el único criterio que debe tenerse en cuenta al momento de respaldar una afirmación matemática es el razonamiento, es decir, el encadenamiento consistente de demostraciones.

En este enfoque centramos el trabajo en *el lenguaje y la lógica de la geometría*, que serán aplicadas en simples figuras geométricas, en otros conceptos matemáticos que tienen los alumnos, como también en situaciones cotidianas. Se podrá apreciar cómo las definiciones trabajadas cuidadosamente son la base para el razonamiento matemático.

### **Pertinencia del tema**

Nuestro actual Diseño Curricular Nacional declara que “para desarrollar el pensamiento matemático resulta relevante el análisis de procesos de casos particulares, búsqueda de diversos métodos de solución, formulación de conjeturas, presentación de argumentos para sustentar las relaciones, extensión y generalización de resultados, y la comunicación con lenguaje matemático”. (DCN 2009, p. 316)

En muchas ocasiones se suele presentar a la matemática como una ciencia puramente deductiva, identificándola con su abstracción axiomática formal, el matemático recorre distintos caminos heurísticos para elaborar, contrastar y validar conjeturas. En el quehacer matemático, no sólo tienen lugar razonamientos deductivos, sino que existen ciertos razonamientos que se consideran provisionales y viables, así como ciertos procedimientos tendientes a descubrir la solución de los problemas que se abordan.

La demostración, a la hora de ser transmitida, consiste en una cadena de implicaciones fundamentadas en axiomas u otras demostraciones independientes de ella. Se aprecia como un camino fácil, directo, único y claro para alcanzar la demostración

requerida y no se toman en cuenta lo sucedido en el proceso de elaboración de la prueba formal, donde tienen lugar distintos caminos de descubrimiento, con idas y vueltas, acercamientos con algunos rodeos, aproximaciones en espiral.

Si queremos que los alumnos adquieran competencia y comprensión sobre los distintos componentes de un contenido matemático, debemos tener en cuenta dichos componentes al planificar y llevar a cabo la enseñanza. Así, le podemos dar vida a los conceptos, a los métodos y a los procesos para que los estudiantes puedan disfrutar de los resultados, es decir, tener una vivencia y una emoción. De esta manera se constituye una educación matemática de calidad, más versátil y actual, alejada de la monotonía, centrada en un enfoque creativo, preocupada por presentar menos ejercicios y más problemas, con menos memoria y más razonamiento. Una Matemática para que los estudiantes dejen atrás viejos temores e inseguridades.

### **Marco teórico**

Los procesos planteados se sustentan en el marco teórico que aportan Polya y Lakatos. El primero lleva a analizar los razonamientos implicados en la elaboración y contrastación de conjeturas, y el segundo se sitúa en una fase de validación, enfocando la crítica de la conjetura o de la prueba mediante contraejemplos globales y locales.

Los alumnos utilizan el razonamiento inductivo cuando observan situaciones particulares para identificar patrones de comportamiento tanto visuales como numéricos y esto les permite hacer predicciones o conjeturas. Luego se les presenta el uso del *razonamiento deductivo* para explicar por qué estos patrones son ciertos. Los estudiantes exploran las relaciones entre los elementos observados y aprenden a utilizar argumentos lógicos para explicar por qué estas conjeturas son ciertas.

Se tomará como base el trabajo heurístico en matemática en instancias de elaboración, contrastación y validación de conjeturas. En esta dinámica de clase el rol del maestro es muy

importante, invitando a los alumnos a analizar situaciones, atender elementos particulares y si es posible generar conflicto cognitivo en el proceso de aprendizaje de un nuevo concepto.

Se examinarán ejemplos que ilustren las nociones teóricas, para facilitar su comprensión y discusión. Para desarrollar la parte práctica correspondiente, permitir la exploración de conjeturas y ejemplificar los elementos teóricos, se contará con una extensa gama de situaciones con elementos geométricos, en especial, con cuadriláteros.

Siguiendo estos enfoques, se presenta la metodología del descubrimiento matemático mediante la lógica de pruebas y refutaciones, a través del diálogo y cuestionamientos entre el profesor y los alumnos en momentos de clase en los que se discute las clasificaciones y propiedades de los cuadriláteros a partir de la jerarquía de formación.

Se mostrará el funcionamiento de la matemática desde la formulación de conjeturas, hasta la confirmación o refutación de las mismas. Se apreciará cómo van apareciendo ejemplos que no encajan con la conjetura o con la prueba (contraejemplos), mostrando su función de falsación o refutación.

Como indica Juan Godino, "...el tipo de discurso -comunicación oral o escrita- del profesor y los alumnos es un aspecto determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si sólo hay comunicación del profesor hacia los alumnos, en una enseñanza expositiva, a lo más con apoyo de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas, que si el profesor les anima a que comuniquen sus ideas a otros niños y al profesor". (Godino, J. p. 67)

Por consiguiente, hemos de cuidar no sólo el currículo, sino también la metodología de enseñanza si queremos desarrollar la capacidad matemática de los estudiantes.

## Algunos ejemplos

Los estudiantes deben tener alguna experiencia en reconocer y formular sus propios problemas, actividad que se encuentra en el centro mismo del quehacer matemático. Por ejemplo:

### I. “Puppy mi perrito mascota”

Se tiene 16 metros de malla metálica para hacer un cerco rectangular en el jardín, donde habitaría “Puppy mi perrito mascota”.



- a) ¿Qué dimensiones puede tener el cerco rectangular?
- b) ¿En qué caso tiene Puppy el terreno más amplio? Argumenta tu respuesta.
- c) Si tuviera una malla metálica de 20 metros ¿Qué dimensiones son las mejores para el terreno de Puppy? Argumenta tu respuesta
- d) Si tuviera una malla de 14 metros. En este caso ¿Qué dimensiones son las mejores para el terreno de Puppy? Argumenta tu respuesta
- e) Explica a qué conclusión has llegado con respecto a las figuras rectangulares con un perímetro determinado.

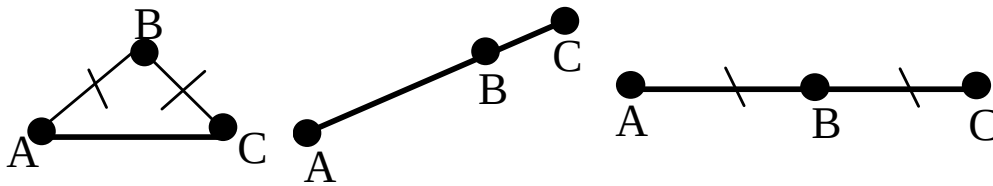
Estas actividades permiten formular nuevos problemas, como por ejemplo: dado un área determinada, ¿cuál sería el menor perímetro posible?

También tenemos ejemplos en donde los alumnos analizan situaciones, establecen relaciones para afianzar conceptos nuevos y tomar una actitud de exploración, investigación, un esfuerzo de dar buenas definiciones y no sólo una recepción pasiva de conocimientos.

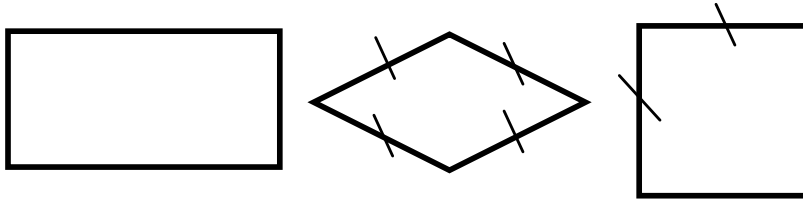
### II. Dada la proposición, indicar si el caso presentado corresponde a “ejemplo”, “contraejemplo” o “ninguno” para cada uno de ellos.

- a) Si un punto B equidista de los extremos del segmento AC, entonces B es punto medio del segmento.





b) El rombo es un polígono regular



III. Dar un ejemplo y un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

(De ser posible)

- Si la suma de los ángulos internos de un polígono es  $360^\circ$ , entonces es un rectángulo.
- Dos ángulos agudos son complementarios.
- Dos ángulos complementarios son agudos.
- En un polígono regular de “n” lados se forman con el ángulo central “n” triángulos equiláteros.

IV. Dar dos ejemplos y un contraejemplo para las siguientes proposiciones:

- El paralelogramo tiene sus diagonales perpendiculares entre sí.
- El trapecio tiene sólo dos líneas de simetría

### Análisis de resultados

En un comienzo, el 80% de los alumnos de cuarto de secundaria respondía con error a situaciones como éstas, al dar el valor de verdad de las proposiciones dadas. Esto se debía a:

- Conceptos matemáticos no bien comprendidos  
Ej. El trapecio tiene sólo dos líneas de simetría. “¿Qué es línea de simetría?”

- Dada una proposición pensaban inmediatamente en un ejemplo, por lo tanto la proposición es verdadera.  
Ej. Dos ángulos agudos son complementarios. *“Verdadero, por ejemplo  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .”*
- No tenían claro qué es un contraejemplo.  
Ej. Si  $x < 15$  entonces  $x < 10$  *“Un contraejemplo es 20, porque no cumple”*

Luego de considerar en los diferentes momentos del aprendizaje de la matemática el formular y evaluar conjeturas, los alumnos se detenían para analizar más cada enunciado, se esforzaban en buscar contraejemplos, en formular hipótesis de lo que aprendían, etc.

Esto ayudó para que aprendan bien nuevos conceptos, se preocupen por enunciar bien definiciones, propiedades, postulados, etc. y les dio herramientas para resolver de mejor manera los problemas. El 80% de los alumnos de cuarto de secundaria lograron responder con éxito preguntas de este tipo.

## Conclusiones

Los estudiantes pueden usar variedad de estrategias como modelos con dibujos, registrando los datos en una tabla, encontrando un patrón y con esto formulan predicciones o conjeturas. Es por medio de contextos que los alumnos se animan a la investigación, la colaboración y la comunicación, se promueve el planteamiento de problemas así como su resolución. Además, de la discusión sobre técnicas específicas de planteamiento de problemas se benefician todos los estudiantes.

Con esta experiencia observamos otras cualidades en la metodología aplicada por los docentes, permitió:

Integrar aspectos pedagógicos y matemáticos.

Anticipar posibles dificultades.

Poner en práctica teorías estudiadas.

Trabajar en equipo, en un ambiente de respeto y confianza.

Desarrollar habilidades de comunicación oral y escrita.

Crear seguridad en los propios conocimientos.

Reflexionar sobre problemas no triviales de la enseñanza, de solución no única.

## **Bibliografía**

Godino, Juan D; Batanero, Carmen; Font, Vicenç.- (2003). Fundamentos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.- España . Proyecto Edumat-Maestros. 03

Holliday, M; Cuevas, C y otros (2003). Algebra 1 – Glencoe Mathematics. Glencoe/McGraw-Hill. USA.

Ministerio de Educación del Perú (2006). Guía para el Desarrollo del Pensamiento a través de la Matemática. Lima.

Ministerio de Educación del Perú (2009). DISEÑO CURRICULAR NACIONAL DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR. Lima.

Ministerio de Educación del Perú (2007). Aprendizaje de la Matemática y el Desarrollo de Capacidades. Lima

Saenz Castro, César (2001). Sobre Conjeturas y Demostraciones en la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid UAM. España.

Siñeriz, L; Ferraris, C; Ferrero, M (2008). La Trastienda de la Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche – UNComahue. Argentina.

Usiskin, Z; Coxford, A y otros (2000) Geometry – Integrated Mathematics. The University of Chicago School Mathematic Project. Scott Foresman and Addison Wesley. USA

# Situación didáctica para la rotación de ejes coordenados

Nélida Medina García <sup>1</sup>

## Resumen

*Como una aplicación del capítulo Geometría Analítica Plana del curso Matemáticas Básicas de Estudios Generales Ciencias de la Universidad Católica desarrollamos la actividad colaborativa “Rotación de ejes coordenados”.*

*En este curso se propicia que los estudiantes desarrollen la capacidad de comprender y aplicar conceptos básicos y propiedades de las cónicas, rotación de ejes coordenados.*

*A las clases asiste un promedio de 60 alumnos. Durante el desarrollo de las actividades cooperativas, los alumnos trabajan en grupos de cuatro. El docente y dos asistentes de docencia, que conocen la actividad y sus objetivos, asesoran a los estudiantes en el desarrollo de la misma.*

La actividad consta de tres partes.

- Parte individual  
Los alumnos responden individualmente una pregunta para obtener la ecuación de una parábola y una hipérbola usando la definición correspondiente..
- Trabajo en parejas  
Hay dos parejas con tareas diferentes y complementarias sobre las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola.
- Trabajo grupal  
El grupo usa los insumos que aportan las dos parejas. La actividad presenta información sobre las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola. Los alumnos aplican

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú

estas propiedades para resolver un problema contextualizado (Telescopio de Cassegrain).

### **Marco teórico**

Definición de parábola, hipérbola. Elementos.

Gráfica de cónicas

Rotación de ejes coordenados

Graficar de cónicas rotadas.

Propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola.

### **Actividad: Rotación de ejes coordenados**

#### *Parte I: Individual*

Pregunta:

Dada la parábola  $P : x^2 - 4x - 6y - 8 = 0$ , considere su vértice  $V$  y el punto  $B$ , extremo con abscisa positiva de su lado recto, halle:

- a) la ecuación de la elipse de focos  $V$ ,  $B$  y distancia entre sus vértices 8 unidades.
- b) la ecuación de la hipérbola con focos  $V$ ,  $B$  y distancia entre sus vértices 2 unidades.

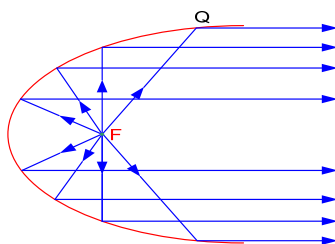
#### *Parte II: Trabajo en parejas*

##### *Pareja 1*

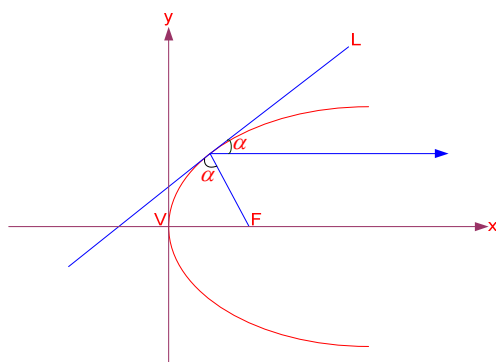
#### *Propiedades ópticas de la parábola*

Consideremos la parábola  $P$  con foco  $F$ . Por un punto  $Q$  de  $P$  se traza una recta  $l$  tangente a  $P$ . Se verifican las siguientes propiedades:

*Propiedad 1:* La luz de una fuente que se coloca en el foco de una superficie con sección transversal parabólica, se refleja de modo que es paralela al eje de  $P$ . Análogamente, la luz que llega al reflector parabólico en forma de rayos paralelos al eje focal, se concentra en el foco  $F$ .



*Propiedad 2:* La medida del ángulo que forman  $Ll$  y  $\overline{FQ}$  es igual a la medida del ángulo que forman  $L$  y la recta paralela al eje focal, trazada por el punto  $Q$ .



### Pregunta

Considere la parábola  $P: y^2 = 4px$ . Sea  $Q$  un punto cualquiera de  $P$ .

- Verifique, usando propiedades de reflexión de la parábola, que la pendiente de la recta tangente a  $P$  en el punto  $Q(x_Q, y_Q)$  es  $\frac{2p}{y_Q}$ .
- Si la curva  $P$  se rota un ángulo  $\frac{\pi}{6}$  en sentido antihorario, halle la ecuación de la parábola rotada en el sistema  $x - y$  y gráfiquela.

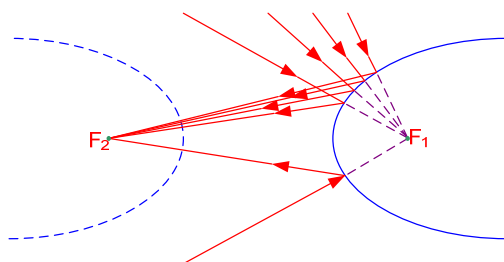
## Pareja 2

### Propiedades ópticas de la hipérbola

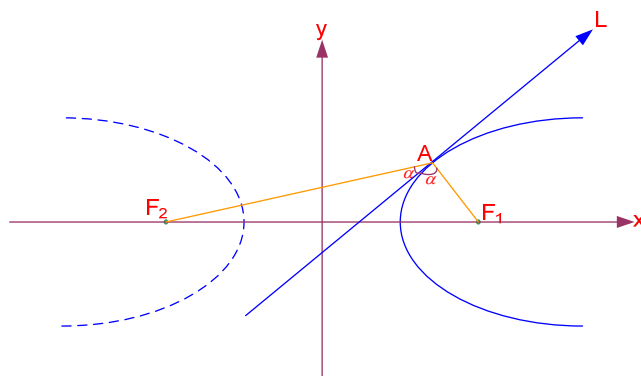
Consideremos la hipérbola  $H$  con focos  $F_1$  y  $F_2$ . Por un punto  $A$  de  $H$  se traza la recta  $L$ , tangente a  $H$ .

Se cumplen las siguientes propiedades:

*Propiedad 1:* Si un rayo que se dirige a uno de los focos de  $H$  choca con la superficie de la hipérbola, este se reflejará hacia el otro foco de  $H$ .



*Propiedad 2:* La medida del ángulo que forman  $L$  y  $\overline{F_1A}$  es igual a la medida del ángulo que forman  $L$  y  $\overline{F_2A}$ .



### Pregunta

Dados la hipérbola  $H: \frac{u^2}{9} - \frac{v^2}{16} = 1$  y el punto  $A(6; \sqrt{48})$

(cuyas coordenadas han sido dadas en el sistema  $u-v$ ), resuelva las preguntas a) y b) en el sistema  $u-v$ .

- a) Halle la pendiente de la recta que contiene al rayo que incide sobre  $H$  en  $A$  y que pasaría por el foco  $F_1$  de  $H$  (foco de mayor abscisa). Halle también la pendiente del rayo reflejado.
- b) Usando propiedades de reflexión en  $H$ , halle la ecuación de la recta tangente a  $H$  en  $A$ .
- c) Si el sistema de coordenadas  $u-v$  resultó de rotar los ejes  $x$  e  $y$  un ángulo  $\pi/4$  en sentido antihorario, halle la ecuación de  $H$  en el sistema  $x-y$ .

### *Parte III: Trabajo grupal*

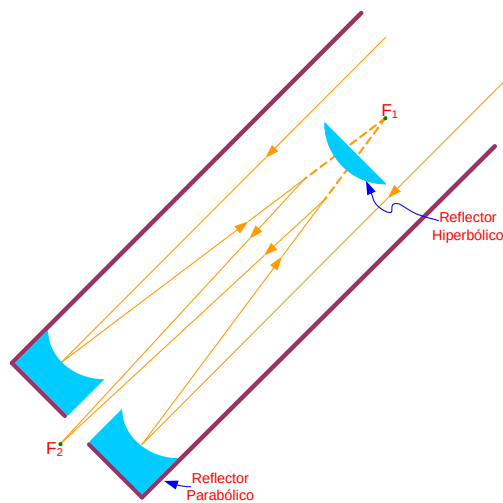
Los telescopios de tipo Cassegrain están en funcionamiento en algunos de los observatorios astronómicos más importantes del mundo. En tamaño más reducido, son utilizados por astrónomos aficionados.

El Cassegrain es un tipo de telescopio reflector cuyo objetivo está constituido por un espejo primario cóncavo parabólico y un espejo secundario convexo hiperbólico. Recoge la luz del objeto observado y en un primer momento la refleja sobre el espejo primario, de modo que el rayo reflejado intenta formar la imagen en el foco  $F_1$ , justo detrás del espejo secundario pero esto no ocurre. La luz se refleja en este último espejo y es enviada hasta un agujero existente en el centro del espejo primario; una vez traspasado este agujero, la imagen se forma en el foco  $F_2$  y luego es ampliada por un ocular. Esta trayectoria del rayo luminoso es posible debido a que  $F_1$  es un foco común a la parábola y a la hipérbola.

La siguiente figura ilustra la situación descrita:

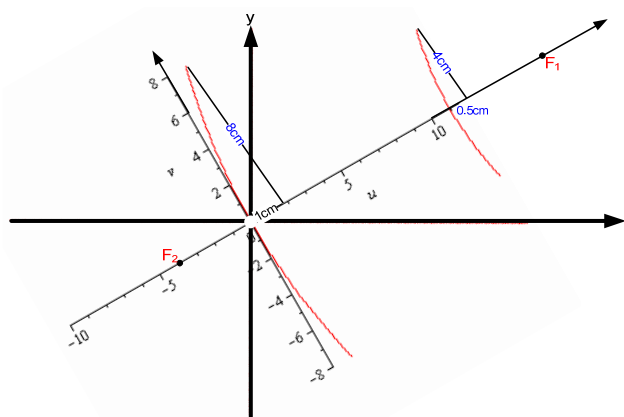






Se desea observar una determinada estrella empleando un telescopio Cassegrain. Para ello se ubica un telecopio Cassegrain de modo que su eje forme un ángulo cuya medida es  $\frac{\pi}{6}$ , con el eje horizontal.

Por la distancia a la que se encuentra la estrella, se puede considerar que los rayos de luz que esta emite son paralelos al eje del telescopio. Si uno de esos rayos incide sobre el espejo primario en el punto A y, debido a los fenómenos de reflexión de las lentes parabólica e hiperbólica, se obtiene una imagen final en el punto  $F_2$  ubicado a 4cm detrás del vértice del espejo parabólico,



- a) Determine dónde debe ubicarse el espejo hiperbólico (es decir, las coordenadas de los vértices de la hipérbola que lo contiene) para que ambos espejos tengan como foco común a  $F_1$ .

Nota.: La única solución positiva de la ecuación  $4a^3 + 65a^2 - 400a - 100 = 0$  es  $a = 4,95$ .

- b) Determine las ecuaciones en el sistema  $x - y$  de las secciones cónicas descritas por los espejos del telescopio.

Nota: De las restricciones sobre  $u$  y  $v$  para describir solo la porción de cónica que corresponde a los espejos.



# **Aplicación del Software libre GeoGebra en temas de derivada con soporte en la teoría de registros de representación de R. Duval y su efecto en el rendimiento académico de estudiantes de ingeniería**

Carlos Mediver Coaquira Tuco <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En los últimos años las nuevas tecnologías han impactado en general el currículo de las Matemáticas, introduciendo entre otras cosas, software que resulta apropiado para apoyar el aprendizaje y comprensión de los estudiantes sobre conceptos y temas matemáticos que forman parte de sus materias de estudio. El definir la derivada y resolver problemas de derivada por medio de la técnica tradicional pizarra - plumón hace que el problema se vuelva rutinario favoreciendo una visión estática del mismo. La propuesta de esta investigación se centra en los Registros de Representación de Raymond Duval, abordando entre otras temáticas lo referente a los ambientes de Geometría Dinámica aprovechando las características y/o posibilidades de software como GeoGebra en cuanto a la creación de construcciones geométricas y la posibilidad de manipularlas en diferentes registros.*

## **Pertinencia del tema abordado**

En la Universidad, el rendimiento académico de la mayoría de estudiantes inscritos en cursos de Matemática es bajo, el impacto de este bajo rendimiento, como lo mencionan varios investigadores, afirmando que los estudiantes construyen un conocimiento matemático parcial por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo

---

<sup>1</sup> Universidad Peruana Unión, Juliaca – Perú

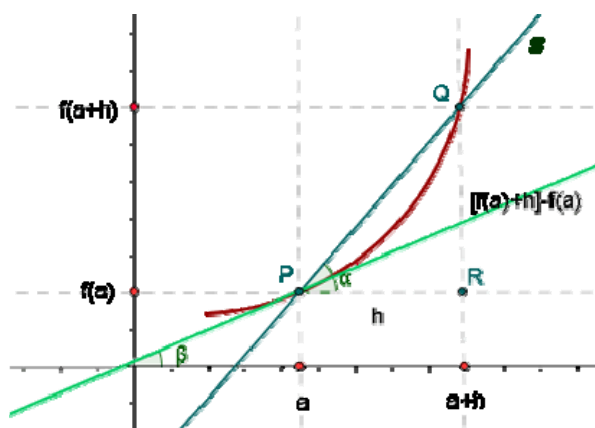
procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos, hecho que también ha sido comprobado a través de nuestra experiencia docente.

Esto permite señalar que los educandos manejan rutinariamente los símbolos, pero no logran otorgar significado a los contenidos matemáticos. Es, por esta razón, que en esta comunicación presentamos una alternativa para el estudio de derivadas con soporte en la teoría de registros de representación.

### Marco teórico

*Derivada:* La derivada de la función  $f(x)$  en el punto  $x = a$  es el valor del límite, si existe, de un cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



*Geogebra:* El software elegido para la realización de este proyecto de investigación es GeoGebra. El programa es versátil, fácil de usar y obtener, corre en distintos sistemas operativos y es gratuito.

El uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico disponible tanto para el profesor transmitir como para los alumnos investigar y manipular, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto.

## **Registros de representación**

El aprendizaje de las Matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como el razonamiento, la resolución de problemas, etc. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes.

Raymond Duval (1993), analiza y enfatiza la importancia de la representación en Matemáticas y establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Asimismo, un registro está constituido por signos tales como símbolos, íconos o trazos, es decir, son medios de representación.

Este autor afirma que sólo por medio de las representaciones es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y se caracteriza como un sistema de representación, el cual puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas, a saber:

- a) La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo: el enunciado de una frase o la escritura de una fórmula.
- b) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- c) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

## **Fases de Enseñanza**

El esquema de nuestra experiencia se apoya en cuatro fases básicas que, por orden de aparición, irán ayudando a consolidar

y estructurar las ideas y conceptos matemáticos de nuestros estudiantes:

1. Fase verbal
2. Fase de representación simbólica
3. Fase de representación visual
4. Fase de manipulación

Cuando un profesor inicia a sus alumnos en el estudio de un nuevo concepto, como puede ser el de sucesión, función, límite, derivada, etc., el primer paso consiste, en general, en dar una definición o explicación oral, obviamente se trata del enunciado; con ello, en la mente de cada individuo se creará una primera aproximación o imagen mental de lo que el profesor desea transmitir.

Posteriormente, el docente introducirá la simbología que permitirá formalizarlo y aclarar, en muchos casos, la definición.

Con la representación gráfica o diagrama correspondiente, tercera fase, la idea comienza a ser asimilada por el alumno que hace de la misma “algo” propio e interior. La imagen que el alumno ha captado se identifica con esta forma material.

Por tanto, el estudiante está en condiciones de comenzar a trabajar y manipular la realidad matemática, explorándola e investigándola para así obtener conclusiones.

Tradicionalmente, la enseñanza de las Matemáticas ha participado de las dos primeras etapas de nuestro esquema conceptual. Pero muchas veces la fase de representación visual ha sido una herramienta poco explotada durante mucho tiempo; unas veces, por rechazo por parte de las corrientes puramente formalistas y otras, porque no se le ha dado importancia como elemento de trabajo que facilita y clarifica la adquisición de contenidos:

Muchos autores están de acuerdo en la utilidad de las representaciones visuales a la hora de construir el conocimiento; no obstante esto no es suficiente, la comprensión de un concepto matemático requiere del manejo del mismo a partir de

representaciones de distinto tipo, formadas por signos y símbolos, pero con la misma estructura.

A estas representaciones propuestas por R. Duval las denomina “representaciones semióticas”. Concretamente, a las representaciones específicas correspondientes a un concepto y sus tratamientos internos las denominan “registros de representación”.

*“La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación...”*

## **Referencias**

Bonacina y otros (Junio, 2004). Las Funciones en la Resolución de Problemas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 17. CLAME. En: <http://www.clame.org.mx/alme.htm>

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Figuerola García R. (2004). Cálculo 1. Editorial América.´

Godino, J. D., (1998), Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática, Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica. En: <http://www.ugr.es/~jgodino>.

Hitt F. (2000). Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Ramírez G. Elsa (2007). Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20. CLAME. En: <http://www.clame.org.mx/alme.htm>





# I Concurso de fotografía Matemática-Mateflash 2009

Jovita Piedra Valdez <sup>1</sup>

## **Resumen**

*Este proyecto buscó brindar a los estudiantes la posibilidad de explorar y descubrir nuevas conexiones entre objetos de uso diario, de su vida cotidiana, de su entorno y algunas nociones matemáticas que ellos conocen. El modo en que relacionaron ambos elementos fue mediante la fotografía digital.*

*Los estudiantes hallaron diversas caminos para encontrar la matemática en su vida, como objetos de la naturaleza, sus mascotas y hasta pequeños montajes elaborados por ellos mismos.*

*El descubrimiento no fue sólo para los alumnos sino para los propios profesores del área de matemática que reconocimos la habilidad de nuestros alumnos para visualizar de modo insospechado su realidad, organizando lo mejor posible el sustento matemático referido a la foto elegida así como un nombre pertinente y creativo, lo que les permitió comunicarse en forma matemática de una manera motivadora.*

## **Descripción**

Este proyecto se realizó a partir del mes de Agosto del año 2009 en el Liceo Naval Contralmirante Lizardo Montero.

Los estudiantes hallaron diversas caminos para encontrar la matemática en su vida, como objetos de la naturaleza, sus mascotas y hasta pequeños montajes elaborados por ellos mismos.

Los criterios que se utilizaron para evaluar las fotos por parte del Jurado fueron:

---

<sup>1</sup> Liceo Naval Contralmirante Lizardo Montero, Lima-Perú

1. Originalidad e Idoneidad del título (Relación de la imagen con el tema matemático). (5 pts)
2. Calidad y técnica en la fotografía tomada. (Nitidez en la foto, belleza en su forma, calidad plástica). (2 pts)
3. Sustento matemático. (Explicación del contenido matemático de la fotografía, correspondiente al grado del participante). (8 pts)
4. Originalidad en la fotografía. (abordaje novedoso del tema en la foto). (5 pts)

En total hubo 65 propuestas. A continuación se muestran dos de ellas.

### Los Secretos Escondidos de un Cuidador



José Carlos Marcelo, Circuito de Miraflores.

La bicicleta, una gran máquina de transporte para cuidar el medio ambiente, también cuida una gran bolsa de secretos matemáticos, que no se pueden ver a simple vista. Hay que ser muy observador para notarlos:

- Podemos encontrar ángulos geométricos y trigonométricos, como los coterminales en la llanta de atrás.
- Sistemas radiales en las llantas de adelante y atrás.
- Longitudes de arco en el sector circular como la llanta adelante.
- Razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud.
- Triángulo rectángulo que están en el centro de la bicicleta.
- Ángulo vertical de color amarillo.

Las apariencias engañan no es solo un transporte que cuida el medio ambiente, sino una gran máquina matemática con muchos secretos.



“Caparazón Geométrico”

Aarón Falcón Poccotay – mi casa 10-09-09

Sustento matemático

En el caparazón de la tortuga se puede observar figuras geométricas que son pentágonos que se encuentran en los bordes del caparazón y hexágonos que se encuentra en el centro del caparazón también podemos observar que su caparazón tiene simetría.

### **Bibliografía**

<http://cf.inspiration.com>. aprendizaje Visual.

[http://www.sector](http://www.sectormatematica.cl/fotos) matematica.cl/fotos



# Estrategias gráficas de resolución de problemas

Jorge Arrasco Alegre <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En matemática debe fomentarse la resolución de problemas a través de diversas estrategias. Las estrategias numéricas y algebraicas suelen ser bastante comunes, pero las estrategias gráficas permiten desarrollar otros tipos de habilidades como la visualización espacial, la traducción simbólico-gráfica, nociones de medidas, entre otras.*

*En el taller se pretende mostrar cómo desarrollar estrategias gráficas aplicadas a diversos tipos de problemas, donde no está implícito su uso y así diversificar los recursos que disponen los docentes para la enseñanza-aprendizaje de la matemática.*

*En muchos de los casos se puede auxiliar el recurso gráfico con el uso de recursos tecnológicos para su presentación y desarrollo, pero no es necesario contar con estos medios para poder implementarlos.*

## **Pertinencia del tema tratado**

El trabajo en el área de matemática en la educación básica en el aspecto lógico se centra principalmente en los procesos algorítmicos, siendo privilegiados los cálculos numéricos y la reducción de expresiones algebraicas.

Pero es importante también desarrollar la capacidad de visualización espacial y análisis gráfico, lo cual no se reduce sólo a los problemas geométricos, sino como una habilidad generalizada que complementa el trabajo simbólico – numérico.

---

<sup>1</sup> IEP Excelencia, Chiclayo. Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo-Perú

Además el desarrollo de la capacidad de comunicación matemática significa que el estudiante esté en la capacidad de ver en forma equivalente el trabajo con diferentes formas de representación: numérica, algebraica, gráfica, etc., y para ello hay que desarrollar actividades que permitan el tránsito de una forma a otra de representación. (MINEDU 2008)

El presente taller busca centrarse en estrategias de desarrollo de problemas a partir de recursos gráficos, en situaciones relacionadas a la aritmética y el álgebra, principalmente.

### **Marco teórico**

El aprendizaje significativo que se busca lograr en los estudiantes debe basarse en formar un pensamiento reversible y flexible, que se centre en el análisis de situaciones problemas y la búsqueda de diversas estrategias de solución de problemas, por lo cual debe evitarse procesos que tiendan a mecanizar el pensamiento y en el uso de problemas “tipo”. (Valiente, 2000)

El desarrollo de la visualización espacial y el pensamiento gráfico requieren el desarrollo de habilidades asociadas a la graficación, medición, comparación, análisis, entre otras; y para ello deben desarrollarse actividades de aprendizaje que permitan al estudiante ver formas alternativas de desarrollo a partir de recursos gráficos que complementen el trabajo numérico y algebraico.

### **Contenidos matemáticos a tratar**

Problemas diversos relacionados temas aritméticos y algebraicos como:

- Cardinalidad de conjuntos
- Operaciones en  $\mathbb{N}$
- Fracciones
- Porcentajes
- Edades

Requiriéndose en la mayoría de los casos utilizar:

- Ecuaciones lineales con una variable
- Ecuaciones lineales con dos variables
- Ecuaciones sencillas de segundo grado

### *Ejemplos*

**Tienda de Cerámicas:** Carmen tiene su negocio de venta de adornos de cerámica. Del último lote que le ha llegado, en el fin de semana ha vendido la tercera parte. Por la noche al arreglar los productos se le quebraron 35, pero todavía le quedan los tres octavos del lote inicial ¿De cuántas piezas constaba el lote?

#### *Solución 1*

- Total de piezas de cerámica al inicio:  $x$
- Se vende la tercera parte:  $x/3$
- Luego de la venta queda:  $x - x/3 = 2x/3$
- Se rompen: 35
- Quedan luego de romperse:  $2x/3 - 35$
- Lo que queda al final equivale a  $3x/8$
- Igualando:  $2x/3 - 35 = 3x/8 \Rightarrow 16x - 840 = 9x \Rightarrow 7x = 840 \Rightarrow x = 120$
- Respuesta: El lote inicial constaba de 120 piezas

#### *Solución 2*

- El total de piezas de cerámica al inicio representa la unidad: 1
- Se vende:  $1/3$
- Luego de la venta queda:  $1 - 1/3 = 2/3$
- Al final queda:  $3/8$
- Las piezas rotas representan:  $2/3 - 3/8 = 7/24$
- Los  $7/24$  son las 35 piezas rotas
- El total de piezas será:  $35 \div 7/24 = 120$
- Respuesta: El lote inicial constaba de 120 piezas



### Solución 3

- Total de piezas de cerámica al inicio:



- Se vende la tercera parte:  $1/3 = 8/24$



- Al final queda:  $3/8 = 9/24$



- Los 8 que se rompieron son la parte que queda y deben distribuirse en las 7 casillas



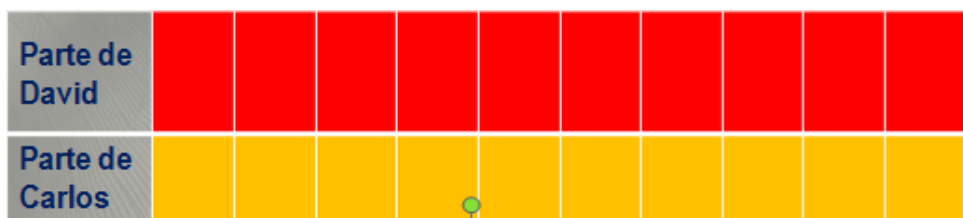
- Al ser 24 casillas, el total será  $24 \times 5 = 120$



- Respuesta: El lote inicial constaba de 120 piezas

*Trabajando juntos:* David y su hijo Carlos pueden hacer una obra en 10 días. Si después de 8 días de trabajar juntos se retira David y Carlos termina lo que falta de obra en 7 días. ¿En cuántos días puede hacer toda la obra, David solo?

- Trabajo a realizar juntos en 10 días



- Luego de 8 días de trabajo

|                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Parte de David  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Parte de Carlos |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Lo que falta realizar lo hará Carlos en 7 días: 2 de su parte que le queda y las dos partes del padre las hará en 5 días

|                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |
|-----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-----------------------------|
| Parte de David  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 días de trabajo de Carlos |
| Parte de Carlos |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |

- David haría todo en:  $10 + 2 + 2 = 14$  días

|                 |                          |    |    |    |    |                          |    |    |    |    |
|-----------------|--------------------------|----|----|----|----|--------------------------|----|----|----|----|
| Parte de David  | 1d                       | 1d | 1d | 1d | 1d | 1d                       | 1d | 1d | 1d | 1d |
| Parte de Carlos | David lo haría en 2 días |    |    |    |    | David lo haría en 2 días |    |    |    |    |

- Respuesta: David sólo haría el trabajo en 14 días

## Resultados esperados

- Que los docentes exploren variadas formas de resolver problemas con sus estudiantes para de esta forma desarrollar las capacidades de reversibilidad y flexibilidad de pensamiento.
- Que las soluciones gráficas complementen el trabajo con formas numérico algebraicas y que aprovechen la capacidad de intuición de los estudiantes.

## Bibliografía

Ministerio de Educación. (2008) Diseño Curricular Nacional. MINEDU. Lima.

Valiente Barderas, S. (2000). Didáctica de la Matemática. Editorial la Muralla. Madrid.



# Proyecto Musimática

Irma Flores<sup>1</sup> y Virginia Coronado<sup>2</sup>

## **Resumen**

*Esta experiencia tiene como objetivo brindar un espacio a los participantes para que a través de la exploración del campo sonoro, rítmico, musical descubran sus propias capacidades expresivas, favoreciendo las posibilidades de establecer vínculos con la matemática. De esta manera, se busca identificar los beneficios del campo sonoro, rítmico musical en el desarrollo del aprendizaje de la matemática.*

*Se presentarán avances obtenidos sobre la metodología adecuada para vincular el aprendizaje de la matemática con la música.*

*Se analizará qué capacidades están inmersas en el aprendizaje de la matemática y la música de manera simultánea.*

*Esto se conseguirá a través de actividades matemáticas que partan de la experimentación con ritmos y sonidos para relacionar de manera práctica la música con la matemática.*

*Se empleará una metodología activa, donde el descubrimiento y la experimentación serán elementos fundamentales para el desarrollo de capacidades. Esto se conseguirá propiciando la creación colectiva.*

---

<sup>1</sup> Colegio Villa Maria – Lima - Perú

<sup>2</sup> Colegio Weberbauer – Lima - Perú



# **REPORTES DE INVESTIGACIÓN**



# Desarrollo profesional de los maestros en la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva situada

Edith Arévalo Vásquez <sup>1</sup>

Rafael González Porras, Eduardo Ortiz Jaramillo

## Resumen

*Se presentarán los resultados obtenidos en un proyecto de intervención en una escuela primaria, titulado “Desarrollo profesional de los maestros en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva situada”; teniendo como propósitos:*

- *Diseñar y experimentar estrategias para el desarrollo profesional de los maestros en relación a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.*
- *Desarrollar en los docentes competencias para generar entornos de aprendizaje que promuevan el desarrollo de competencias para la enseñanza de las matemáticas.*

## Introducción

Hoy en día, es difícil encontrar un ámbito social, económico y cultural en el que no esté implícito el uso del conocimiento matemático adquirido a través de la formación académica (NCTM, 2000). Por ello, empoderar a los niños y jóvenes con los conocimientos y competencias matemáticas requeridas para su desarrollo integral y su participación plena en la sociedad, constituye un objetivo prioritario de las políticas educativas en México.

Sin embargo, en algunos ámbitos escolares, las matemáticas se caracterizan por una serie de prácticas mecanicistas que poco o nada favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y el interés de los estudiantes por aprender (Aguerrondo, 2000;

---

<sup>1</sup> Escuela Normal “Miguel F. Martínez”, Monterrey, Nueva León- México



Martínez, 2005). En estos casos el panorama es desalentador, considerando que en las prácticas de los docentes el trabajo cotidiano está basado primordialmente en la resolución de las actividades de los libros de texto, escasa o nula utilización de materiales didácticos, limitado uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC'S), entre otras; resultando un patrón de interacción unidireccional en el aula y con poca relación hacia las necesidades reales y los usos sociales fuera del contexto escolar, reflejado indudablemente en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Así mismo, las evaluaciones nacionales como el Examen de la Calidad y el Logro Educativo (Excale), la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE); e internacionales como el Programme for International Student Assessment (PISA), muestran resultados poco favorables en el aprendizaje de las matemáticas de los niños y jóvenes del país. Esta situación que lleva sin duda, a replantear la necesidad de mejorar los resultados, basadas en prácticas pedagógicas que ofrezcan una enseñanza acorde a la metodología didáctica que sustentan los programas actuales para la educación primaria (Plan de Estudios 2009), el cual implica desarrollar en las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos, que les posibiliten resolver problemas de manera autónoma, los inviten a reflexionar y alcanzar los aprendizajes esperados, validen procedimientos y resultados; y que a su vez de manera natural, se genere la intergración de contenidos propios de la asignatura con el resto de las del currículum (SEP, 2009).

Ante esta necesidad de mejora, docentes de la Normal "Miguel F. Martínez" y del Instituto de Investigación, Innovación y Estudios de Posgrado para la Educación han puesto en marcha un proyecto de intervención en una escuela primaria, titulado "Desarrollo profesional de los maestros en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva situada"; teniendo como propósitos:

- Diseñar y experimentar estrategias para el desarrollo profesional de los maestros en relación a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

- Desarrollar en docentes competencias para generar entornos de aprendizaje que promuevan el desarrollo de competencias para la enseñanza de las matemáticas.

La estrategia general para la formación continua de maestros en el ámbito de la educación matemática que se ha implementado en el proyecto, se enmarca en una perspectiva reflexiva de formación del profesorado (Gimeno y Pérez 1997) y las teorías de la cognición situada señaladas en Putnam y Borko (2000); en virtud de que, la reflexión es tratada como la piedra angular que posibilita modificar la práctica docente, en donde los docentes reflexivos aceptan la realidad cotidiana y buscan alternativas para solucionar situaciones (Elliot, 1999; Zeichner y Liston, 1999). Conceptualizando además, como práctica docente a las actividades que regularmente conducen (realizan) los profesores, teniendo en cuenta el contexto en el que trabajan y los significados e intenciones que en ellas se generan (Ponte y Chapman, 2004; citado Llinares 2004).

En el ámbito de las teorías de la cognición situada o contextualizada, el conocimiento está inicialmente incluido en las circunstancias de su construcción; resultando el aprendizaje un producto de la participación continua en las actividades diarias en la “vida en” el mundo (Lave, 1999). Desde esta perspectiva (García, 2000; Martínez, 2005), y para el caso en particular, valoramos la necesidad de contextualizar este programa de formación partiendo de problemas o necesidades concretas de los profesores y del centro educativo en el que trabajan; con la intención de asegurar la adquisición del conocimiento profesional del docente para enseñar y en consecuencia, la transferencia de este conocimiento a la práctica de aula.

Se participa como agentes externos, con la finalidad de ofrecer apoyos al colectivo docente para identificar con mayor claridad los problemas de la práctica que les preocupan; que los docentes de primero a sexto grado, cuenten con un servicio de acompañamiento o asesoría pedagógica que les facilite poner en

juego sus saberes y competencias didácticas. Además, servir como interlocutor “experto” del grupo para generar explicaciones e implementar soluciones a los problemas que se les presentan en el aula. Como instrumentos didácticos en este proceso (Figura 1), se recurrirá al Ciclo de reproducción e itinerario de formación (García, 2005); ya que son medios de articulación para llevar al trabajo cotidiano, las implicaciones derivadas de considerar el aprender a enseñar como una práctica social y, por tanto, como el desarrollo de las formas de participar en una comunidad. En ellos se parte de una situación o tarea que puede tomar diferentes formas, ya sea estudio de casos, protocolos, entrevistas clínicas, problemas matemáticos, “teaching portafolios” o situaciones de microenseñanza.

El proyecto es en apoyo a doce docentes de una escuela de educación primaria (Escuela Asociada), que a su vez forman parte de un programa de actualización con el Instituto de Investigación, Innovación y Estudios de Posgrado para la Educación (IIIEPE) en el estado de Nuevo León. Simultáneo al proyecto, se ha iniciado una investigación de tipo cualitativo con los docentes de esta institución, centrada en la metodología de Estudio de Caso; cuyos objetivos son:

- Identificar las preocupaciones que experimentan los docentes en torno a la relación enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar las dificultades de la gestión del conocimiento matemático en el aula.

En el estudio se están utilizando instrumentos y técnicas para la recogida de información tales como: observaciones de clase, entrevistas semiestructuradas, videograbación de algunas sesiones de clase entre profesores, portafolios y producciones de los alumnos; con la finalidad de recuperar toda una serie de evidencias que posibiliten triangular la información (Stake, 1999) y determinar el logro de los propósitos del proyecto. Para llevar a efecto el análisis de los datos obtenidos mediante los videos se utilizará el software En vivo. De igual forma, se

integrará un portafolio para cada maestro con la finalidad de dar seguimiento a través de la recopilación de evidencias que documenten los cambios específicos, los obstáculos encontrados y las estrategias de solución puestas en práctica por los profesores. Así mismo, se utilizará una matriz descriptiva como técnica de análisis, que permitirá conocer la evolución del proceso grupal de innovación en el aula, detectando cambios en sus estrategias de enseñanza.

Las actividades programadas para el desarrollo del proyecto de formación comprenden:

- Observación de clase en las aulas por el equipo de investigadores, para identificar fortalezas y áreas de oportunidad (Una clase quincenal por grupo – octubre y noviembre de 2009)
- Reunión de retroalimentación (Dos horas por ciclos – diciembre de 2009).
- Seminario de Análisis de la práctica: planeación, desarrollo y análisis de la puesta en práctica de secuencias didácticas. (Sesiones quincenales de 3 horas – enero a junio de 2010)
- Observación de clase entre pares, haciendo uso del video. Una clase mensual (enero-junio de 2010)
- Asesoría virtual a través de la Plataforma EVA (Espacios Virtuales de Aprendizaje) (enero – junio de 2010)

Con respecto a la investigación:

- Observación de clase en las aulas por el equipo de investigadores, para identificar fortalezas y áreas de oportunidad (Una clase quincenal por grupo – octubre y noviembre de 2009)
- Entrevistas a docentes (diciembre de 2009)
- Integración de portafolios con evidencias de trabajo (octubre de 2009 -junio de 2010)
- Informe parcial de la investigación (marzo de 2010)

- Sistematización de la información recuperada ( junio - septiembre de 2010)
- Informe de los resultados (septiembre de 2010)

Como grupo colaborador pretendemos contribuir a la formación continua de los docentes en servicio, poniendo en juego nuestras competencias docentes adquiridas a través de la experiencia profesional y de la actualización en la que estamos siendo partícipes con la implementación del nuevo Plan de Estudios para la educación primaria, en el país. La intención ha sido poner en práctica el programa de intervención en una institución durante este ciclo escolar, analizar los resultados obtenidos, para posteriormente con los ajustes necesarios, presentar la propuesta a la Secretaría de Educación del Estado, esperando sea multiplicada en otros centros educativos.

Dentro de las expectativas de los docentes de la escuela primaria se encuentran adquirir herramientas para abordar las matemáticas con base al enfoque actual, para que resulte más efectiva la enseñanza; generar el intercambio de experiencias entre los colegas, compartiendo prácticas exitosas; fortalecer las competencias y habilidades docentes, para diseñar actividades y estrategias ajustadas a las necesidades matemáticas de los estudiantes; adquirir mayor conocimiento en el área de las matemáticas; establecer un equipo de trabajo donde se persiga un fin común; lograr una mejor interpretación de la reforma educativa y analizar los resultados obtenidos de la propia práctica docente.

Como productos finales se esperan obtener con base a la experiencia, una propuesta para la formación continua de maestros en el área de matemáticas, cuadernillos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de contenidos del currículum de matemáticas, videgrabaciones que modelan procesos de intervención educativa en el aula de matemáticas y un banco de materiales de apoyo a la enseñanza de esta asignatura, en la educación primaria.

A la fecha se han llevado a efecto las observaciones programadas, identificando entre algunas de las fortalezas de los docentes: disposición a la implementación del nuevo Plan de Estudios, organización de actividades en equipo, planeaciones de clase semanales, elaboración y aplicación de instrumentos de evaluación. Con referencia a las áreas de oportunidad se han de citar: empleo de limitadas estrategias de enseñanza, las actividades de clase giran en torno a dar respuesta a los ejercicios del libro de texto, poco uso de material concreto sobre todo en los grados superiores (4º, 5º y 6º), se profundiza poco en los contenidos, se generan pocos espacios para la socialización de los saberes, entre otros.

Con base a estos hallazgos se ha iniciado la elaboración del programa de intervención, en atención a las áreas de oportunidad y a las necesidades manifestadas por los docentes de la institución; esperando dar cuenta de la experiencia a los colegas durante el Coloquio.

Dentro de los resultados que se pretenden presentar al finalizar la investigación están recuperar la experiencia de los doce docentes de la institución, estando en posibilidad de dar cuenta de los resultados del proyecto en cuestión; en el que además se atienden las necesidades e inquietudes de la implementación de un nuevo Plan de Estudios para las escuelas primarias en el ciclo escolar 2009-2010, a nivel nacional.

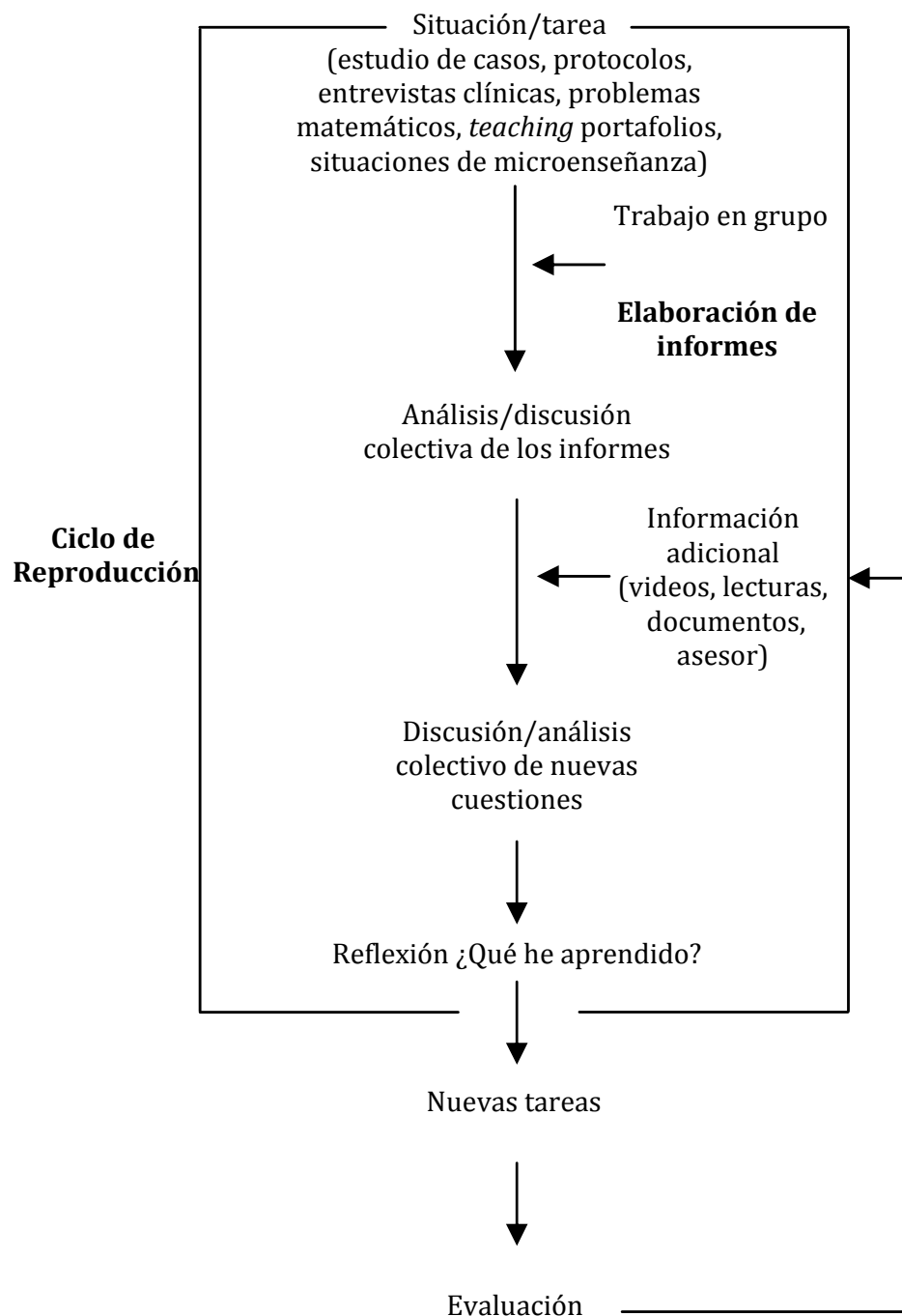


**Figura 1.** Ciclo de reproducción e itinerario de formación.  
García (2005)

## Referencias bibliográficas

- Aguerrondo, Inés. 2000. Innovaciones pedagógicas. Las instituciones de formación docente como centros de innovación pedagógica, Editorial Troquel S.A., Argentina
- Ávila R., Martínez, M., Ramírez, J.L. (2007). Programa de Fortalecimiento Académico para Maestros de Educación Básica en el Área de Matemáticas. DGFCMS. SEP. México.
- Elliot, J. 1999. El cambio educativo desde la investigación acción. Editorial Morata. Madrid, España
- García, M. (2000). El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: implicaciones para la formación inicial de maestros. IV. Simposio propuestas metodológicas y de evaluación en la formación inicial de los profesores del área de didáctica de las matemáticas. Universidad de Oviedo.
- García, M., Sánchez V. (2000). Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática: adoptando una perspectiva situada. En Luis C. Contreras y Lorenzo J. Blanco: *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Cáceres, España: Universidad de Extremadura.
- García, Ma. M. (2005). Formación de profesores de matemáticas, un campo de estudio y preocupación. *En Educación Matemática. Vol. 17, No.2*. Ed. Santillana. México.
- García, M. Sánchez, V. Escudero, I: and Llenares, S. (2003). The dialectic relationship between theory and practice in Mathematics Teacher Education. CERME, Bellaria, Italy. <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>
- Gimeno, J.; Pérez, A. (1997). *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid, España: Morata.
- Llinares, S. (2004). Building virtual learning communities and student teacher learning of mathematics. Regular Lectures. Icem-10, Copenhagen, Denmark. <http://www.icme-10.dk>



- Pérez, A. (1985). El Pensamiento práctico del profesor: implicaciones en la formación del profesorado". En *Perspectivas y problemas de la función docente*. Segundo Congreso Mundial Vasco. Madrid: Narcea.
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona, España: Paidós.
- Martínez, (2005). Matemáticas para todos. Aportes para el desarrollo profesional de los maestros. Volumen 1 y 2. Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO. Monterrey, México.
- NCTM (2000): Principles and Standards for School Mathematics. <http://standards.nctm.org/document/index.htm>
- Putnam, R.; Borko, H. (2000). El aprendizaje del profesor: implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición. En Bruce, J., Thomas, L., Ivor, G. *La enseñanza y los profesores I. La profesión de enseña* (pp. 219-299). Barcelona, España: Paidós.
- Secretaría de Educación Pública. 2009. Plan de Estudios 2009, Primaria Educación Básica. Subsecretaría de Educación Básica de la SEP. México.
- Stake, Robert E. 1999. Investigación con estudio de casos. Ediciones Morata, S. L. Madrid, España
- Zeichner, K.; Liston, P. (1999). Enseñar a reflexionar a los futuros docentes. En A. Pérez; J. Barquín; J. F. Angulo (eds.): *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica*. Madrid: Akal, pp.506-532.

# **Análisis a priori de una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, en el nivel superior**

Elizabeth Advíncula Clemente <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En este trabajo de investigación, se aborda la función exponencial debido a la dificultad que presentan los alumnos para entender su noción y comportamiento, tanto en forma gráfica como analítica.*

*Se busca determinar qué situación didáctica se podría diseñar para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades del nivel superior, de manera que participen en la construcción de dicho conocimiento. Se propone una secuencia didáctica para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades del nivel superior de manera que la interacción entre profesor, alumno y situación didáctica les permita construir el concepto de la función exponencial.*

## **El problema de investigación**

En este trabajo de investigación, se aborda la función exponencial debido a la dificultad que presentan los alumnos para entender su noción y comportamiento, tanto en forma gráfica como analítica, como lo señala Laura Rivera (2009).

Asimismo, Edison de Faria Campos (1997) menciona tres dificultades que tienen los estudiantes para construir la noción de la función exponencial: dificultades para elevar números a distintas potencias y en ocasiones dificultad para interpretar el significado de esas operaciones, dificultades para interpretar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú

continuo de su representación gráfica), y dificultades para relacionarla con la función logarítmica.

Ante esta problemática, Marcela Ferrari (2001) menciona la necesidad de proponer una alternativa de enseñanza que permita que los estudiantes participen en la construcción de su conocimiento a partir de situaciones que los acerque a algunas aplicaciones de esta función.

Así también, Lezama (1999) menciona la necesidad de proponer una situación didáctica, que le permita al alumno dotar, de un significado propio y útil, al conocimiento que se desea impartir así como percatarse de que el conocimiento adquirido pueda ser utilizado en la resolución de otros problemas, no solo dentro del campo de las Matemáticas sino también en algunos fenómenos observables, con tasas de crecimiento o decrecimiento constantes, tales como fenómenos vinculados con la Economía, la Medicina, la Química, la Física, entre otros.

Así, el problema de investigación de este trabajo responde a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué situación didáctica se podría diseñar para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades del nivel superior, de manera que participen en la construcción de dicho conocimiento?
- ¿Qué secuencia didáctica se recomienda seguir para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades del nivel superior de manera que la interacción entre profesor, alumno y situación didáctica les permita construir el concepto de la función exponencial?

### **Marco teórico**

El marco teórico de esta investigación se basa en la Teoría de las situaciones didácticas, establecida en Francia por Guy Brousseau a fines del siglo XX y concebida en una hipótesis sobre la construcción del significado de una noción.

Para Brousseau (2000), una situación didáctica es un conjunto de relaciones entre el saber matemático, el profesor y el alumno.

Es decir, esta teoría estudia la naturaleza de los fenómenos que ocurren dentro del aula durante el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático, tomando en cuenta los conocimientos impartidos, la forma en la cual se enseñan, la forma mediante la cual aprenden los alumnos y las posibles restricciones bajo las cuales se llevan a cabo.

Según la teoría de las situaciones didácticas, el alumno aprende adaptándose a un medio, que es factor de contradicciones, de dificultades y de desequilibrio. El saber adquirido, producto de la adaptación del alumno, se manifiesta cuando este se apropia del conocimiento (Brousseau, 1986).

En la teoría de las situaciones didácticas Brousseau establece que en el proceso de enseñanza se requiere de la participación activa del alumno, quien ha de manifestar una respuesta al interactuar con un objeto de conocimiento. También, manifiesta que la devolución se da en la comunicación entre profesor y alumno frente a un objeto de conocimiento, en ambos sentidos. Así, la devolución es el acto mediante el cual es el profesor le devuelve al alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje, le delega la exploración, la búsqueda, la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el mismo. A su vez, el alumno al involucrarse con el problema, devuelve al profesor el papel de mediador entre los saberes sociales y los producidos en el aula, produciéndose así, el proceso de aprendizaje de ambos (Ferrari, 2001).

Las fases de las situaciones didácticas son: 1) Fase de acción, se relaciona con el medio, que favorecen el surgimiento de teorías implícitas que después funcionarán en la clase como modelos, 2) Fase de formulación, en la que se favorece la adquisición de modelos y lenguajes explícitos, 3) Fase de validación, en la que se requiere de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas, con medios que subyacen en los procesos de demostración, 4) Fase de institucionalización, que tienen por finalidad establecer y dar un status oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase.

En esta investigación, la situación didáctica propuesta tiene por finalidad proponer las condiciones necesarias para que los alumnos puedan producir y aprender los conocimientos relacionados con la función exponencial.

## **Metodología**

Se empleará como metodología de investigación la Ingeniería didáctica, que se caracteriza por construir sus productos a partir de un esquema experimental apoyado en realizaciones didácticas en clase, en base a la concepción, realización, observación y análisis de situaciones de enseñanza; considerando que la validación es interna y se fundamenta en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Las fases de la metodología de la Ingeniería didáctica son cuatro: 1) la fase de análisis preliminar, 2) la fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, 3) la fase de experimentación; y finalmente, 4) la fase de análisis a posteriori y validación.

Este trabajo comprenderá las dos primeras fases de la Ingeniería didáctica, pues tiene por objetivo el diseño de una situación didáctica; es decir, incluirá el análisis preliminar para el diseño de una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, y el análisis a priori, a partir de la interacción entre el saber matemático (función exponencial), el profesor y el alumno.

## **Algunos ejemplos y análisis de resultados**

A continuación mostramos a modo de ejemplos los resultados del análisis de dos preguntas, 1b) y 2a) de la situación didáctica propuesta. Este análisis se basa en la información recogida al aplicar en aula la situación didáctica propuesta, con dos grupos de estudiantes de las carreras de humanidades del curso Matemáticas en el semestre 2009.2, en Estudios Generales Letras, Pontificia Universidad Católica del Perú. En cada grupo había 64 alumnos.

### Situación 1

Miguel, hace dos meses, presentó síntomas de gripe y fue a una consulta con el doctor para que le dé algún tratamiento. Debido a las noticias sobre la propagación del virus de la influenza, el doctor le recomendó quedarse en observación. Luego de unas horas, le indico el siguiente tratamiento: tomar una dosis oral de 75 mg de Oseltamivir, un antiviral selectivo contra el virus de la influenza, dos veces al día durante 5 días.

Si la vida media del Oseltamivir es de 8 horas, entendiendo que la vida media de un medicamento es la cantidad de tiempo necesaria para que la mitad de la cantidad de medicamento ingerido sea eliminada del torrente sanguíneo, y Miguel solo ha tomado la primera dosis, responda las siguientes preguntas:

- a) Complete la siguiente tabla calculando, en primer lugar, la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas y, posteriormente, la variación porcentual de dicho medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

| Intervalo de tiempo<br>$[t_i; t_f]$ | Cantidad inicial<br>$C_i$ | Cantidad final<br>$C_f$ | Variación = $C_f - C_i$ | Variación porcentual = $\frac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$ |
|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $[0; 8]$                            |                           |                         |                         |                                                             |
| $[8; 16]$                           |                           |                         |                         |                                                             |
| $[16; 24]$                          |                           |                         |                         |                                                             |

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

- b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación es constante?
- b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación porcentual es constante?

### *Análisis de resultados*

- Una minoría de parejas no entendió el concepto de vida media y obtuvo resultados incorrectos para la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas, llegando a obtener una variación constante de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas y una variación porcentual variable cada 8 horas.
- La mayoría de parejas entendió el concepto de vida media y completó la tabla correctamente. Lo que les permitió concluir, posteriormente, que la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas era variable, pero que la variación porcentual del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas era constante.
- La mayoría de parejas logro establecer la diferencia entre variación y variación porcentual.

### *Situación 2*

Considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis de Oseltamivir y que la variación porcentual del medicamento en su organismo a lo largo del tiempo es constante, responda las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 1, 2, 3 y 4 horas de haberlo ingerido?

Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales:

| Tiempo t<br>(en horas) | Cantidad de medicamento en el organismo<br>después de t horas<br>(en mg) |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 0                      | 75                                                                       |
| 1                      |                                                                          |
| 2                      |                                                                          |
| 3                      |                                                                          |
| 4                      |                                                                          |

### *Análisis de resultados*

- La mayoría de grupos, no consideró el dato sobre la variación porcentual constante a lo largo del tiempo. Algunos, consideraron variación constante a pesar de que no era dato y obtuvieron resultados incorrectos para la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada hora, llegando a obtener una variación constante de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada hora y una variación porcentual variable de medicamento cada hora.
- Algunos de los grupos que consideraron que la variación porcentual era constante a lo largo del tiempo utilizaron como estrategia formar una progresión geométrica, para indicar la variación porcentual constante de la cantidad de medicamento que quedaba en la sangre después de cada hora. Luego, calculaban el valor de la razón de la progresión y completaban la tabla correctamente. Otros grupos, utilizaron como estrategia la variación porcentual para indicar la cantidad de medicamento que quedaba en la sangre de Miguel de hora en hora hasta las 8 horas para lograr una ecuación y así poder completar la tabla.

### **Referencias bibliográficas**

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1998). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques.

Brousseau, G. (2000) Ecuación y didáctica de las Matemáticas. Revista de Educación Matemática 12. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. México: Editorial SEP.



De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1, Número 2. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y evolución de la relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Área de educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Rivera, L. (2009). Ingeniería didáctica de la función exponencial. Recuperado el 20 de agosto de 2009, de [http://www.itesm.mx/va/dide2/enc\\_innov/3er08/memorias/pdfs/laura\\_rivera\\_01.pdf](http://www.itesm.mx/va/dide2/enc_innov/3er08/memorias/pdfs/laura_rivera_01.pdf).

# **Álgebra Temprana: efecto del contexto de presentación en la resolución de problemas con relaciones numéricas**

Huberto Noriega Noriega,<sup>1</sup> Sandra López Romano,  
Augusto Ospino Martínez, Luz López Silva

## **Resumen**

*Durante las últimas dos décadas el interés por el estudio de las dificultades para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en primaria ha generado grandes perspectivas tanto para investigadores como para docentes. De acuerdo con diversas investigaciones, el álgebra temprana (EA) se puede definir como una propuesta curricular que introduce en la aritmética formas de pensamiento algebraico desde la matemática escolar, en los primeros cursos de básica primaria, es decir la “algebrarización del currículo”*

*En ese marco, se plantea el objetivo general del trabajo a presentar: Determinar el efecto del contexto de presentación de problemas en los procesos cognitivos y metacognitivos desde álgebra temprana con relaciones numéricas.*

*El presente estudio dará luces a la comunidad educativa acerca de la forma en la que los estudiantes resuelven problemas algebraicos en grados tempranos.*

## **Introducción**

En la actualidad, muchos docentes de matemáticas reconocen no solo la importancia de enseñar a través de la resolución de problemas, sino de desarrollar los diferentes pensamientos tempranamente, lo que hace que el álgebra se comience a posicionar a partir de los grados menores en la escuela y de una manera diferente a la que se enseña en los grados intermedios de la secundaria. Esta álgebra temprana, enriquece las

---

<sup>1</sup> Universidad del Norte de Barranquilla-Colombia

situaciones problema con contextos donde el estudiante es capaz de sacar conclusiones directamente, introduce de manera gradual la notación formal del álgebra y se relaciona directamente con los tópicos de la matemática temprana, de tal manera que se puede dar un carácter algebraico a la matemática elemental.(Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008). Es así como en este estudio se quiere responder lo siguiente:

¿Cómo incide el contexto de presentación de problemas sobre procesos cognitivos y metacognitivos desde algebra temprana con relaciones numéricas en el grado tercero de básica primaria?

## **Marco teórico**

### *Contexto*

- *Contexto y educación*

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2008), la palabra contexto proviene del latín contextus, que significa entorno lingüístico de una palabra, frase o fragmento considerados, del que depende muchas veces su sentido; por extensión, situación o conjunto de circunstancias en las que se sitúa algo.

Según el diccionario pedagógico (2006), el contexto en educación se define como todos los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido al aprendizaje.

- *Contexto matematico*

Los lineamientos curriculares en el área de matemática del Ministerio de Educación Nacional y los estándares básicos de competencias (MEN, 1998, 2006), definen el contexto matemático, como el entorno que rodea al estudiante, donde se construye el sentido y el significado de las situaciones y contenidos matemáticos desde el cual se establecen conexiones con el estudiante, la escuela, su familia, y el ambiente: local, regional, nacional o internacional. Además, de acuerdo a estos planteamientos, el contexto en matemática se subdivide en: (a) contexto desde la matemática, (b) contexto de la vida diaria, y (c) contexto de

las otras áreas. Para efectos de la presente investigación, se tomarán dos categorías, una relacionada con el contexto desde la matemática y otra, que reúne el contexto de la vida diaria y el producido desde otras áreas, en una categoría llamada, contexto real.

- *Efecto del contexto en el desempeño matemático. Investigaciones de contexto en matemática.*

Las investigaciones como Carraher, T., Carraher, D., & A. Schelien (1991), Ramos, A. y Font, V. (2005) muestran que los estudiantes tienen un mejor desempeño en las situaciones donde los objetos matemáticos están presentados en contextos reales que en aquellos que se encuentran en un contexto desde la matemática.

#### *Resolución de problemas en matemáticas*

Investigadores en el campo de solución de problemas matemáticos, como Lester (1980); Schoenfeld (1985, 1992) y Silver (1985), coinciden en sus postulados sobre el rol tan importante que juega la metacognición en la solución de problemas. La investigación sobre cognición y metacognición ha considerado no solamente los procesos individuales de manera aislada, sino también cómo todos se relacionan entre sí durante un evento de solución de problemas. Aunque los autores señalados han utilizado diferente terminología para referirse a los procesos involucrados en el evento de solución de problemas (Pólya, fases; Lester, categorías; Schoenfeld, episodios; Lawson & Rice, eventos; y Artz & Armour-Thomas), sin importar la terminología utilizada, todos se están refiriendo a las actividades del pensamiento en que subyace la resolución de problemas. La presente investigación al igual que la de López (1992) utilizará el término “proceso”, definido según Garófalo & Lester (1985) para referirse al pensamiento que ocurre cuando los individuos están pensando sobre la solución a un problema expresado en palabras.

## *Álgebra temprana*

Durante las últimas dos décadas el interés por el estudio de las dificultades para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en primaria ha generado grandes perspectivas tanto para investigadores como para docentes. De acuerdo con las investigaciones de Kaput (1998), Carraher & Schlieman, (2007), el álgebra temprana (EA) se puede definir como una propuesta curricular que introduce en la aritmética formas de pensamiento algebraico desde la matemática escolar, en los primeros cursos de básica primaria, es decir la “algebrarización del currículo” (Kaput, 2000).

### **Objetivo**

#### *Objetivo general*

Determinar el efecto del contexto de presentación de problemas en los procesos cognitivos y metacognitivos desde álgebra temprana con relaciones numéricas.

#### *Objetivos específicos*

- Determinar el efecto del contexto de presentación sobre los procesos cognitivos y meta cognitivos en la resolución de problemas.
- Determinar el efecto del contexto de presentación sobre estrategias utilizadas en la resolución de problemas.
- Analizar la exactitud de acuerdo al contexto de presentación en la resolución de problemas.

### **Metodología**

Para el desarrollo de la investigación acerca del contexto en situaciones con relaciones numéricas y su efecto en los procesos de resolución de problemas, desde la perspectiva del álgebra temprana, esta se realizará una investigación de enfoque cuantitativo, de tipo no experimental, con el objeto de describir el efecto del contexto en situaciones con relaciones numéricas, en el desempeño de los estudiantes, en torno a los procesos cognitivos y metacognitivos, y la comprensión del signo igual.

Este enfoque, de acuerdo a lo planteado por Restrepo (2006), es de tipo Transversal Correlacional, implica que hay un único momento de recopilación de datos, cuyo propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación (Bonilla & Rodríguez 1994).

Para llevar a cabo la investigación, se tomará como población a estudiantes de Instituciones Educativas públicas de estrato 1 y 2 del distrito de barranquilla, con edades entre los 9 y 10 años; se seleccionara una muestra de 180 estudiantes, vinculados a través de la secretaría de educación.

El procedimiento consta de varias fases: la evaluación del desempeño de los estudiantes en los dos contexto aplicando la prueba estandarizada para medir problemas en contexto matemáticos y en contexto cotidiano, aplicación de Entrevistas Flexibles para Resolución de Problemas-EFRP y la descripción y análisis estadístico de los datos recolectados.

## **Resultados esperados**

Esta investigación se espera determinar:

- El efecto que tiene el contexto en los procesos cognitivos y metacognitivos.
- El desempeño de los estudiantes al solucionar problemas contextualizados.
- Los procesos cognitivos y metacognitivos utilizados para resolver problemas en distintos contextos.
- Las estrategias para resolver problemas de acuerdo con el contexto.
- El presente estudio dará luces a la comunidad educativa acerca de la forma en la que los estudiantes resuelven problemas algebraicos en grados tempranos, a partir de la cual se generan estrategia para que el aprendizaje sea más efectivo.

## **Bibliografía**

Bonilla, E. & Rodríguez, P. (1994). Más allá de el dilema de los métodos. Bogotá.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schelieman (1991), "En la vida diez, en la escuela cero", en Los contextos culturales del aprendizaje de las matemáticas, México, Siglo XXI, pp. 25-47.

DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA (2008) - Vigésima segunda edición. Pagina web <http://buscon.rae.es/drae/>

Font, V. (2006), Problemas en un contexto cotidiano. Cuadernos de pedagogía, 355, 52-54

Ministerio de Educación Nacional (1998). República de Colombia. Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. Cooperativa Editorial MAGISTERIO, Bogotá Colombia. Pág. 36-37.

\_\_\_\_\_. (2006). Los estándares básicos de competencias, en lenguaje, matemática, ciencias y ciudadana. Imprenta nacional de Colombia, Bogotá Colombia. Pág. 69-71.

Saber (2005). Resultados de las pruebas Saber. Ministerio de Educación Nacional. (En Línea): <http://www.mineduacion.gov.co/8080:/saber/>

STEMBERG, R. J. y SPEAR-SWERLING L. (1996), "La comprensión de los principios básicos y de las dificultades de enseñar a pensar", en: Teaching for Thinking, Trad. De R. Llavori Enseñar a pensar, Santillana, Madrid, pp.95-118.

TIMSS (1997). Resultados Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. Ministerio de Educación Nacional.

Ramos, A. y Font, V. (2005). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. La Matematica e la sua didattica, Anno 20, n. 4, 535-556.

# Registros de representación semiótica del concepto de función real en estudiantes de humanidades

José Chiroque Baldera <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En esta investigación se considera como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval. Desde este enfoque no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste, además de que tal objeto no debe ser confundido con su representación en varios registros.*

*Se buscará identificar, a partir de situaciones problemáticas, las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real y cómo realizan el paso de una representación a otra. Se describirán las representaciones más frecuentes que hacen los estudiantes cuando se les plantea situaciones sobre funciones reales. Y finalmente se analizará si los estudiantes logran una comprensión integral de la función real; es decir, si se produce la coordinación de al menos dos registros de representación.*

## **El problema de investigación**

Los estudiantes de las carreras de humanidades siempre reciben, como parte de su formación, cursos de Matemáticas. En la mayoría de los casos, la finalidad de estos es integrar las matemáticas a las diversas actividades de la vida cotidiana, enriquecer su cultura general y contribuir con su formación profesional. Todo esto, además de ofrecerles los conocimientos elementales que le servirán como herramientas para enfrentar con facilidad las asignaturas propias de su especialidad y de ser pieza principal para su formación científica.

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo- Perú



Sin embargo, la forma como los programas de estudio y los libros de texto abordan estos conocimientos es, en general, a través del “método tradicional”. En este método en primer lugar se exponen las definiciones y propiedades generales para luego ir a la resolución de problemas como aplicaciones de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico. Posteriormente, se realizan más problemas en contextos intramatemáticos incrementando su complejidad, ocurriendo que en la mayoría de las veces se omitan situaciones donde se aprecie la utilidad de las matemáticas.

Hitt (1998) refiere que la enseñanza de las matemáticas con el “método tradicional” no contribuye a la preparación de mejores estudiantes. Además, las tareas individualizadas de resolución de problemas aplicando algoritmos no despiertan el interés del estudiante y no permiten apreciar la utilidad de las mismas.

Por otro lado, el fracaso de algunos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre diversas representaciones; tal como lo expresa Hitt (1998) haciendo referencia a que el estudiante desarrolla algoritmos en el sistema algebraico sin una idea clara del objetivo que persigue. Esto es notorio en el quehacer diario de los estudiantes en los cursos de matemáticas, pues estos hacen diferentes representaciones de objetos matemáticos, usan representaciones numéricas, algebraicas, gráficas y algunas veces verbales, pero sin articularlas.

Nuestro interés entonces se centra en averiguar las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real, cómo realizan el paso de una representación a otra y cómo coordinan al menos dos registros de representación.

Es así, que realizamos un estudio exploratorio que considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular el concepto de función real, que ha sido estudiado bajo la modalidad del aprendizaje colaborativo.

El trabajo es relevante no sólo porque analiza las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto

función real, sino por el papel que juegan estos en la comprensión de dicho concepto.

### **Objetivos de la investigación**

Al final de la investigación se quiere lograr los siguientes objetivos:

- Determinar a partir de situaciones problemáticas las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real y cómo realizan el paso de una representación a otra.
- Describir las representaciones más frecuentes que hacen los estudiantes cuando se les plantea situaciones sobre funciones reales.
- Analizar si los estudiantes logran una comprensión integral de la función real. Es decir, analizar si se produce la coordinación de al menos dos registros de representación.

### **Marco teórico:**

En esta investigación se considera como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval (1998). Desde este enfoque no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste, además de que tal objeto no debe ser confundido con su representación en varios registros.

Duval enfatiza que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. Es decir, un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos y estos signos están asociados de manera interna y externa. De manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica. De manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones; estas reglas son propias de la red semántica involucrada.

Por otro lado, el concepto de función admite una gran variedad de diferentes Registros de Representación; por lo que este trabajo se interesa en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión del concepto de función, el cual se puede representar al menos de cuatro maneras: mediante tablas, gráficas, expresiones algebraicas y expresiones verbales, mediadas por el lenguaje cotidiano.

## **Metodología**

La metodología que opera en la investigación es el estudio de casos ya que constituye una óptima herramienta metodológica empleada para describir exhaustivamente la ocurrencia de un problema o un fenómeno dentro de un contexto definido por el investigador. Además esta metodología permite analizar la riqueza, profundidad y calidad de la información, más no la cantidad ni la estandarización de un determinado grupo.

Para la investigación se utiliza específicamente la metodología Ingeniería Didáctica que se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, M. 1995). Esta metodología se caracteriza por presentar un esquema experimental basado en cuatro fases:

**Fase 1: Los análisis preliminares:-** Se refiere propiamente al objeto en estudio, al análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, al análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, al análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, al análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, por supuesto teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

**Fase 2: La concepción y el análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería:-** Es la fase donde el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Se toman en cuenta variables macrodidácticas y microdidácticas.

Las variables macrodidácticas son ligadas a la dimensión cognitiva, al contenido y al proceso de aprendizaje. Las variables

microdidácticas consisten en la organización local de la ingeniería.

**Fase 3: La experimentación:-** En esta fase se lleva a cabo la investigación (o secuencia didáctica).

**Fase 4: El análisis a posteriori y la validación.-** El análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. En el proceso de validación interna se describe los comportamientos matemáticos y cognitivos que promovió la secuencia didáctica, las estrategias que utilizan los estudiantes, las dificultades que pueden tener, los errores que pueden cometer y el papel del docente que hizo efectiva la secuencia didáctica

### *Ejemplo*

En este ejemplo hacemos un análisis de una de las situaciones que fueron planteadas, para analizar la comprensión del concepto de función real y funciones elementales.

### *Situación 1*

Use la gráfica de la función  $f$  dada en la *Figura 1*, para responder a lo siguiente:

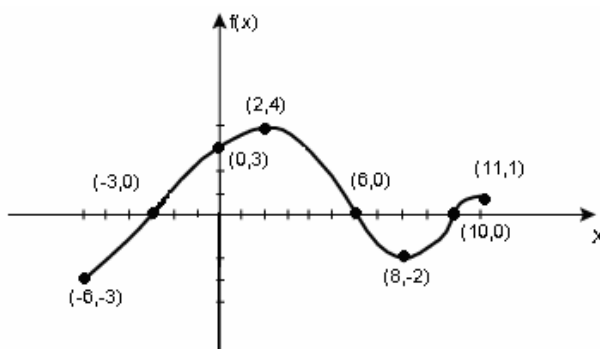


Figura 1

(a) Encuentre  $f(0)$ ,  $f(-6)$ ,  $f(6)$  y  $f(11)$ .

- (b) ¿Es  $f(2)$  positiva o negativa? ¿Es  $f(8)$  positiva o negativa?
- (c) ¿Para qué números  $x$  es  $f(x) = 0$ ?
- (d) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ? ¿Cuál es el rango de  $f$ ?
- (e) ¿Cuáles son los interceptos con el eje  $X$ ?
- (f) ¿Cuántas veces intercepta la línea  $y = 3$  a la gráfica de  $f$ ?
- (g) ¿Para qué números  $x$  es  $f(x) > 0$ ?
- (h) ¿Cuáles son los interceptos con el eje  $Y$ ?
- (i) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de  $f$
- (j) Encuentre el valor máximo y el valor mínimo a partir de la gráfica de  $f$

### *Análisis a priori*

En la *Situación 1* se espera que los estudiantes identifiquen valores numéricos; identifiquen cuándo una función es positiva o negativa, determinen intersecciones con los ejes, intersección de gráficas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como identifiquen los máximos y mínimos.

En el inciso (a) se espera que los estudiantes identifiquen los valores numéricos  $f(0)$ ,  $f(-6)$ ,  $f(6)$  y  $f(11)$  con las parejas  $(0, 3)$ ,  $(-6, -3)$ ,  $(6, 0)$  y  $(11, 1)$ , sin ninguna dificultad. Esto quiere decir que las parejas en la gráfica de la forma  $(x_0, y_0)$  la deben identificar con la pareja  $(x_0, f(x_0))$  que implicará el valor numérico deseado  $f(x_0) = y_0$ . Se presenta aquí un fenómeno de congruencia trivial (se da en el mismo registro numérico) entre la pareja  $(x_0, y_0)$  y la pareja  $(x_0, f(x_0))$ , esta congruencia le permitirá al estudiante determinar los valores pedidos.

En el inciso (b) se espera que los estudiantes se preparen para identificar las propiedades de cuando una función es positiva o

negativa, es decir que a partir de las parejas  $(x_0, y_0)$  que se localizan en el primer y segundo cuadrante indiquen que los valores de  $f(x_0)$  son positivos.

Análogamente, un comportamiento esperado es que, a partir de las parejas  $(x_0, y_0)$  que se localizan en el tercer o cuarto cuadrante indiquen que los valores de  $f(x_0)$  son negativos. Para este caso específico se espera que los estudiantes no tengan dificultad y procedan como lo hicieron en el inciso (a).

En general se espera que el estudiante responda que una función es negativa si  $f(x) < 0$  para todo  $x$ , excepto en los puntos de corte de la gráfica con el Eje  $X$  y que una función es positiva si  $f(x) > 0$ , para todo  $x$ . En este caso general se espera que se presente alguna dificultad debido a que no es lo mismo *identificar algunos puntos  $x_0$  para el cual la función es positiva o negativa*, que a *identificar los intervalos para  $x$  en el cual la función es positiva o negativa*. Esto se verá reflejado cuando los estudiantes respondan el inciso (g).

En el inciso (c) se espera que los estudiantes identifiquen el valor numérico  $f(x) = 0$  con las parejas de la forma  $(x_0, 0)$  y que a su vez deban identificar con los valores  $x_0 = -3, 6$  y  $10$  (esto equivale hallar los interceptos con el Eje  $X$  o interceptar la línea  $y = 0$  con la gráfica de  $f$ ). Se presenta aquí un fenómeno de congruencia trivial entre la pareja  $(x_0, 0)$  y el valor  $x_0$ . Pueden presentarse algunas dificultades.

En el inciso (d) se espera que los estudiantes identifiquen el recorrido de la variable  $x$  y de la variable  $y = f(x)$  sin ninguna dificultad, es decir, identifiquen los intervalos  $[-6, 11]$  y  $[-3, 4]$  que representan el dominio y rango de la gráfica de la

función. Esta identificación está asociada al cambio del registro gráfico al analítico.

En el inciso (e) se espera que los estudiantes observen los puntos que están sobre el Eje  $X$ , luego identifiquen los valores numéricos  $f(x) = 0$  con las parejas de la forma  $(x_0, 0)$  sin ninguna dificultad, y según su respuesta al inciso (c) estos deben ser  $(-3, 0)$ ,  $(6, 0)$  y  $(10, 0)$ , que vienen hacer la intersección de la función  $f$  con el eje  $X$ . Se presenta un fenómeno de congruencia entre este inciso (e) y el inciso (c).

En el inciso (f) se espera que los estudiantes interceptan la gráfica de la recta  $y = 3$  con la gráfica de la función  $f$  de manera análoga como lo hicieron en el inciso (c). Se presenta aquí un fenómeno de congruencia entre la gráfica de la recta  $y = 3$  y su expresión analítica. En este caso se espera que se presenten dificultades debido a que no se pide específicamente los puntos de intersección con la gráfica de  $f$ , si no mas bien cuántas veces intercepta la recta  $y = 3$  al gráfico de  $f$ . Esto se verá reflejado cuando los estudiantes respondan a este inciso.

En el inciso (h) se espera que los estudiantes identifiquen el valor numérico  $f(0) = y_0$  con las parejas de la forma  $(0, y_0)$  y según su respuesta este debe ser  $(0, 3)$  (esto equivale hallar los interceptos con el Eje  $Y$  o interceptar la línea  $x = 0$  con la gráfica de  $f$ ).

En el inciso (i) se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de crecimiento  $[-6, 2]$  y  $[8, 11]$ , y el intervalo de decrecimiento  $[2, 8]$ . Se presenta aquí un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento y decrecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube o baja.

En el inciso (j) se espera que los estudiantes identifiquen el mayor valor y el menor valor en la gráfica de  $f$ , es decir, deben identificar el punto mas alto de la gráfica  $(2, 4)$  con el valor numérico  $f(2) = 4$  y el punto mas bajo de la gráfica  $(-6, -3)$  con el valor numérico  $f(-6) = -3$ . Estos valores numéricos  $f(2) = 4$  y  $f(-6) = -3$  representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función.

### *Análisis a posteriori*

En este caso se observa que el estudiante responde correctamente a la mayoría de los Ítems propuestos en la *Situación 1*. El estudiante presenta algunas dificultades en los incisos (g) y (h), tal como se había previsto en el análisis a priori.

**SITUACIÓN 1:**  
Use la gráfica de la función  $f$  dada en la Figura 1a, para responder a lo siguiente:

Imagen que devuelve.

FIGURA 1a

a)  $f(0) = 3$   
 $f(-6) = -3$   
 $f(6) = 0$   
 $f(11) = 1$

b)  $f(2) = 4$  positiva  
 $f(8) = -2$  negativa

c) Para 6, 10, -3

d)  $D = [-6, 11]$   
 $R = [-3, 4]$

e)  $(-3, 0), (6, 0), (10, 0)$

f) Una vez

g) 0, 2, 11

h)  $(0, 3)$

i)  $[-6, 2], [8, 11]$  decrece  $[2, 8]$

j) máximo: 4 mínimo: -3

(a) Encuentre  $f(0)$ ,  $f(-6)$ ,  $f(6)$  y  $f(11)$

(b) ¿Es  $f(2)$  positiva o negativa? ¿Es  $f(8)$  positiva o negativa?

(c) ¿Para qué números  $x$  es  $f(x) = 0$ ?

(d) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ? ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

(e) ¿Cuáles son los interceptos con el eje  $x$ ?

(f) ¿Cuántas veces intercepta la línea  $y = 3$  a la gráfica de  $f$ ?

(g) ¿Para qué números  $x$  es  $f(x) > 0$ ?

(h) ¿Cuáles son los interceptos con el eje  $y$ ?

(i) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de  $f$ .

(j) Encuentre el valor máximo y el valor mínimo a partir de la gráfica de  $f$ .



## **Validación de los resultados**

En general la mayoría de estudiantes realizó el cambio de registro previsto, los que presentaron dificultades al responder el inciso (g) fue porque no tuvieron en cuenta el dato “la línea  $y = 3$ ” que se trataba justamente de la función constante  $y = 3$  y que es equivalente a la expresión  $f(x) = 3$  que significa lo mismo y es la que más utiliza cuando se trata de la función constante.

## **Referencias bibliograficas**

Artigue, M. & Douady, R. & Moreno, L. & Gómez, P. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana. S.A. de CV, Bogotá.

Duval, R (1988). Gráficas y ecuaciones : la articulación entre dos registros, Antología de educación matemática, Sección Matemática Educativa del CINVESTAV - IPN

Duval, R (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V. México.

Hitt, F (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the concept f Function. Journal of Mathematical Behavior.

Hitt, E (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed). Investigaciones en Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ibarra, S & Fernández, L (2007). La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente. Universidad de Sonora. México.

# **La Enseñanza del concepto de mediatriz y circuncentro basada en la teoría de Van Hiele, aplicada en estudiantes del 3° grado de secundaria empleando como uno de sus instrumentos un software de geometría dinámica**

Pedro Patricio Sudario <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En el presente reporte de investigación se realiza una descripción acerca del trabajo del título en mención. Se hace una reflexión acerca del problema de investigación, se presenta una descripción del marco teórico a utilizar y de los instrumentos a emplear. Se pretende establecer cuál es el proceso adecuado para realizar la presentación en el aula del tema de mediatriz y circuncentro de un triángulo, si es posible mejorar la adquisición de estos conocimientos utilizando un software de geometría dinámica. Así mismo, en qué medida el diseño de actividades basadas en el modelo de aprendizaje de Van Hiele, teniendo como uno de sus instrumentos un programa de geometría dinámica, contribuye o no en la adquisición de los conceptos de mediatriz y circuncentro. Se presenta algunos ejemplos de las actividades diseñadas y se analiza algunos de los resultados obtenidos.*

## **El Problema de investigación**

En el presente reporte de investigación se busca establecer que la solución de problemas geométricos de manera eficiente en la educación secundaria requiere de una clara comprensión de los conceptos matemáticos que se encuentran inmersos en tales problemas.

---

<sup>1</sup> E 0137 "Miguel Grau Seminario", Lima-Perú

El aprendizaje de estos conceptos matemáticos dependen de múltiples variables, tales como lo señalan Gutiérrez y Jaime (1996) quienes sostienen que este aspecto es un problema muy complejo pues depende del tipo de material usado, la metodología de la enseñanza, la organización de los conocimientos y del tipo de actividades que se generan. Así mismo también depende del rigor matemático del concepto en juego.

La presentación de los diversos contenidos en la escuela y en los libros se realiza bajo las siguientes formas, tal como lo anotan Gutiérrez y Jaime (1996):

- Se enuncia una definición matemática del concepto en cuestión y luego se presentan ejercicios de memorización y reconocimiento de figuras concretas.
- Se presentan figuras que representan ese concepto y se hace una descripción de sus características y luego se define el concepto. Finalmente se plantea ejercicios de memorización y reconocimiento de figuras concretas.

Es evidente que hace falta un proceso de reflexión. Es en este contexto que situamos la manera en que se realiza la enseñanza de las líneas y puntos notables de un triángulo en las diferentes instituciones educativas escolares. Estos contenidos están comprendidos en la estructura del nuevo diseño curricular de la educación básica regular elaborada por el Ministerio de Educación del Perú.

Así mismo los textos escolares de matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación, realizan la presentación de estos conceptos considerando solamente la definición matemática y la presentación de figuras prototípicas. Es así que no se pueden establecer la validez de conjeturas a menos que se realicen actividades de aprendizaje encaminadas a ese objetivo.

Existen diversas investigaciones que dan cuenta que el aprendizaje de estas líneas y puntos genera dificultades en muchos estudiantes. Uno de ellos es referido al trazado de la altura. En él, (Hershkowitz, 1990, citado en Gutiérrez y

Jaime, 1996) describe que los estudiantes con las imágenes más pobres, formadas por pocos ejemplos prototípicos, se encasillan en estos ejemplos o imágenes. Como consecuencia de ello se observa que hay éxito cuando se traza la altura trazada desde el vértice de un triángulo acutángulo y se genera fracaso cuando se traza la altura en un triángulo obtusángulo.

Gutiérrez y Jaime (1996), señalan que se genera confusión entre los conceptos de mediana y altura porque se tratan al mismo tiempo en la enseñanza elemental de los estudiantes. Se genera la integración de ambas imágenes conceptuales en una sola imagen debido a que, probablemente, los estudiantes recibieron muy pocos ejemplos prototípicos.

Si observamos que, se generan problemas con solamente dos conceptos, tales como la altura y la mediana, ¿qué podríamos esperar cuando quisiéramos presentar los cuatro conceptos (altura, mediana, bisectriz y mediatriz) al mismo tiempo? y más aún ¿qué pasaría si a cada uno de ellos les asociamos los puntos notables?

En este trabajo se busca diseñar actividades que permitan un aprendizaje correcto del concepto de mediatriz y de circuncentro en un ambiente apropiado y empleando una metodología adecuada. Una de las herramientas que se pretende utilizar en el diseño de actividades para el aprendizaje del concepto de mediatriz y circuncentro es un software de geometría dinámica.

Según el método socrático, tal como lo señala De La Torre (2003), se debe descubrir la verdad sobre el concepto que se está estudiando, pero no como resultado de una enseñanza, sino como consecuencia de una reflexión. El maestro debe estimular un proceso de reflexión e introspección en el aprendiz, gracias al cual llegará a conocer. El modelo de Van Hiele propone emplear este método. Los alumnos aprenden la materia hasta llegar a familiarizarse con los significados de los conceptos fundamentales. El maestro tiene que

asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.

Bajo esta premisa se diseñarán las actividades de aprendizaje en el trabajo de investigación realizado.

### **Marco teórico**

Superar el problema planteado implica actos de reflexión y de análisis del estudiante. En ese camino debe ser capaz de realizar construcciones geométricas que tengan significado y para ello es importante su participación activa en el proceso.

El marco teórico formulado por los esposos Van Hiele es una alternativa para ello. Es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría y la idea básica es que este aprendizaje se hace pasando por niveles de pensamiento. El método es efectivo si se garantiza que cada uno de los estudiantes alcance la solución mediante su trabajo personal. El maestro no debe intervenir. Las conversaciones colectivas deben ser guiadas por el maestro, quien calibra la dificultad del problema para que los estudiantes conserven el interés hasta el final.

Berritzegune (2001) sostiene que según Van Hiele “el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento”, “que no van asociados a la edad” y “que sólo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente”. Así mismo, toda persona que va a adquirir un conocimiento geométrico “pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente”. También refieren que en la base del aprendizaje de la geometría existen dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. Lo primero refiere que cada nivel está ligado al dominio de un lenguaje determinado. Lo último señala que solamente se puede asimilar aquello que corresponde al nivel de razonamiento que posee el individuo en ese momento.

Guillén (2004) sostiene que el modelo de Van Hiele está formado por dos componentes:

- Descripción de los distintos niveles de razonamiento geométrico, desde aquellos que van desde un razonamiento intuitivo hasta aquellos razonamientos formales y abstractos.
  - a. NIVEL 1: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO
  - b. NIVEL 2: ANÁLISIS
  - c. NIVEL 3: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN
  - d. NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL
  - e. NIVEL 5: RIGOR
- Descripción de cómo un docente organiza actividades de aprendizaje en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar un nivel de razonamiento superior al cual posean.
  - a. FASE 1: INDAGACIÓN O INFORMACIÓN
  - b. FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA
  - c. FASE 3: EXPLICITACIÓN
  - d. FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE
  - e. FASE 5: INTEGRACIÓN

## **Metodología**

Para la realización de la presente investigación se requiere de una metodología en la que el investigador debe integrarse totalmente con el trabajo a realizar. Se tendrá como escenario principal un aula del tercer grado de secundaria y los actores serán los estudiantes pertenecientes a este grado, quienes tendrán la oportunidad de manifestar sus ideas, creencias, concepciones con respecto al tema de la mediatriz y circuncentro de un triángulo.

La presente investigación buscará la interpretación de las ideas, creencias y concepciones de los estudiantes al ser enfrentados éstos a una situación de aprendizaje. Se utilizarán las acciones, los testimonios orales y escritos sobre cómo son construidas las situaciones por los protagonistas de la acción investigadora.

Un trabajo de este tipo permitirá visualizar la consolidación de un nivel en el modelo de Van Hiele, y el posterior alcance de otro.

Se propone entonces una forma de la evaluación de las respuestas de los estudiantes, de manera escrita, de test realizados, pero solo considerando ítems de respuesta libre.

Es así que se requiere del diseño de test escritos que deben suponer una aproximación a la cantidad de información que se podría obtener en una entrevista.

Propuesta esta herramienta, nos quedará señalar cómo podríamos determinar el nivel al cual ha llegado un estudiante, es decir, cuál será el número mínimo de respuestas correctas que se podría exigir para considerar que un estudiante ha alcanzado cierto nivel de Van Hiele (Usiskin 1982).

Jaime y Gutiérrez (1993) determinan que existe un progreso continuo en la adquisición de un nivel de razonamiento. Definen así el concepto de Grado de Adquisición de un nivel de Van Hiele. También plantean la forma de encontrar un procedimiento que permita evaluar a un estudiante y luego discriminar su progreso en la adquisición de un nuevo nivel. Para ello definen también Tipos de Respuesta, los cuales están enmarcados dentro de los parámetros del nivel de razonamiento en el que se contesta el ejercicio propuesto. Se toma en cuenta la veracidad y exactitud de la respuesta desde un punto de vista matemático así como la

consolidación en el uso de las características propias de ese nivel de razonamiento.

### **Algunos ejemplos y análisis de resultados**

En la actividad 1 propuesta en la investigación se procura rescatar los conocimientos previos del estudiante. Por lo tanto según el modelo de Van Hiele, dentro de sus fases de aprendizaje, esta actividad corresponde a la Fase de Información.

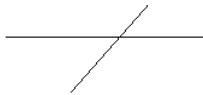
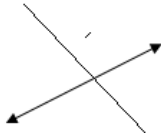
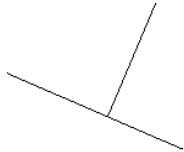
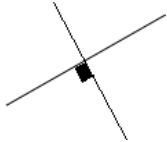
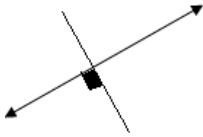
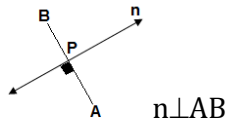
Dentro de lo que se trata de rescatar como conocimiento previo de los estudiantes se tiene lo siguiente: el trazo de una recta perpendicular, la ubicación del punto medio de un segmento y la clasificación de los tipos de triángulos existentes: acutángulos, rectángulos, obtusángulos. De esto último depende la ubicación del circuncentro al trazar las mediatrices del triángulo dado.

Considerando las posibles respuestas de los estudiantes se formulan descriptores y previamente a ello se realiza una descripción de cada ítem propuesto. De acuerdo a ello se asignará un tipo de respuesta. Así se podrá identificar el nivel de razonamiento que tiene el estudiante. Como ejemplo presentamos el siguiente cuadro:

#### **Ítem 1 (Nivel 1 y 2)**

Con esta primera cuestión se pretende saber si los estudiantes son capaces de trazar una recta perpendicular a un segmento dado, pasando ésta por un punto particular de dicho segmento. Es evidente que ello requiere del conocimiento de las notaciones que se emplean para rectas y perpendicularidad de rectas y/o segmentos.



| DESCRIPTOR                                                                                                                                     | NIVEL | TIPO | EJEMPLO                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| A) No logra realizar la perpendicular al segmento en el punto señalado.                                                                        | -     | 1    |                                                                                       |
| B) Traza un segmento que pasa por el punto señalado, pero no es perpendicular al segmento.                                                     | -     | 1    |    |
| C) Traza una recta que pasa por el punto señalado, pero no es perpendicular al segmento.                                                       | -     | 1    |    |
| D) Traza un segmento o semirrecta perpendicular al segmento comenzando desde el punto señalado y dirigido hacia uno de los lados del segmento. | 1     | 2    |   |
| E) Traza un segmento de recta perpendicular al segmento que pasa por el punto señalado y no emplea notación matemática.                        | 1     | 3    |  |
| F) Traza una recta perpendicular al segmento que pasa por el punto señalado y no emplea notación matemática.                                   | 1     | 4    |  |
| G) Traza una recta perpendicular al segmento que pasa por el punto señalado y emplea notación matemática.                                      | 2     | 6    |  |

## Referencias bibliográficas

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). *“El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría”*. En S. Linares, V. Sánchez, J. Giménez Sánchez (Ed. Comares: Granada), *“El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria”*.(pp. 143 – 170)
- Bernardis, S., & Moriena, S. (2008). *ICME 11 11th International Congress on Mathematical Education*. Recuperado el 11 de Diciembre del 2009, de <http://icme11.org/node/1253>
- De La Torre, A. (2003). *“El método Socrático y el Modelo de Van Hiele”*. *Lecturas matemáticas* (pp. 99 – 121)
- Berritzegune, F. (2001). *“Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría”*. Recuperado el 11 de Diciembre del 2009, de <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf>
- Guillen, S., (2004). *“El Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática”*. Educación Matemática, vol. 16. Santillana (pp. 103 – 125)
- Corberán, R. y otros (1994), *“Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en la Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele”*. C.I.D.E., M.E.C.: Madrid.



# Significado de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades

Javier Sayritupac Gutiérrez <sup>1</sup>

## **Resumen**

*El trabajo tiene como objetivo caracterizar los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos media, mediana y moda; usando que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).*

*La metodología empleada es básicamente de tipo cualitativo e interpretativo, y se complementará con alguna información de carácter cuantitativo, especialmente cuando se presenten los resúmenes de los resultados.*

## **Introducción**

Para el desarrollo de la investigación, se han considerando tres etapas:

- Análisis epistémico: el propósito de esta fase es fijar el significado institucional de referencia y el significado pretendido.
- Determinación del significado institucional implementado: observando de las sesiones de clase del curso matemáticas en relación al tema “medidas de tendencia central” se describirá la enseñanza tal como es llevada a cabo. Asimismo observaremos algunos posibles conflictos semióticos que los alumnos ponen de manifiesto en el transcurso de enseñanza.
- Evaluación del significado personal de los estudiantes y comparación con el significado institucional

---

<sup>1</sup> Estudiante posgrado Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

implementado: se caracterizarán los elementos de significado puestos en juego por los alumnos por medio del análisis de sus soluciones escritas a un examen que incluye problemas propuestos por el investigador.

### **El problema de investigación**

Cada vez se hacen más evidentes los grandes cambios y avances vertiginosos en las ciencias y la importancia que va adquiriendo la Estadística, debido a su amplia aplicación en diversas áreas de estudio, y aun en el quehacer cotidiano de las personas. Por ello, resulta muy importante educar a los nuevos ciudadanos con una formación general en estadística; que permita, entre muchas otras cosas, saber interpretar de manera correcta las informaciones que se presentan a diario en los diferentes medios, para formar opiniones más fundamentadas y tomar decisiones con criterios más objetivos.

Las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) son conceptos que deben formar parte de la formación general de los ciudadanos, y más aún de los profesionales de todas las especialidades, por ser conceptos estadísticos básicos y de gran aplicación práctica en la vida cotidiana.

En nuestro estudio hacemos un análisis del significado personal e institucional del objeto matemático “medidas de tendencia central, primero, por las razones mencionadas en los párrafos anteriores, y segundo, porque estos conceptos suelen presentarse con errores y dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Batanero, C., Godino, J.D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A., 1994), no solo en la educación básica, que es donde se inician los estudios sobre estos conceptos, sino también, en la educación universitaria, que es la población a la cual se dirige nuestra investigación.

En esta investigación pretendemos, en la realidad del Perú y concretamente en Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, responder a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los significados institucionales de las

medidas de tendencia central en enseñanza a estudiantes de carreras de humanidades en las que no se usa intensivamente las matemáticas? ¿Cuáles son los significados personales de los estudiantes de estas carreras sobre los conceptos de medidas de tendencia central? ¿Qué elementos se pueden obtener para hacer un estudio del acoplamiento entre los significados personales que construyen los alumnos y los significados pretendidos?

### **Marco teórico**

Como nuestro trabajo se centra en caracterizar los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos media, mediana y moda, creemos que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) desarrollada por Godino, Batanero, Font, entre otros, nos brinda las herramientas necesarias y pertinentes para tal estudio. El EOS es una teoría en didáctica de la matemática centrado en el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, poniendo una atención primaria a lo que denominan las prácticas matemáticas. Así, han desarrollado un campo de investigación bastante amplio, que proporciona diversos elementos que permiten hacer un análisis sobre los diversos tipos de significados que se dan a un objeto matemático, tanto a nivel institucional como personal.

Basados en los trabajos de Godino, J.D. y Batanero, C. (1994) y Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2008), pasamos a mencionar algunos elementos del EOS que serán de gran importancia para el desarrollo de nuestro trabajo de investigación:

*Práctica matemática:* Se refiere al quehacer matemático. Más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas, las cuales pueden ser operativas o discursivas.

*Institución:* Está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas.

*Sistema de prácticas personales:* Constituida por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas.

*Sistema de prácticas institucionales:* Constituida por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartirlas en el seno de una institución.

*Objeto personal (institucional):* Es un emergente del sistema de prácticas personales (sociales) asociadas a un campo de problemas.

*Significado personal (institucional) de un objeto:* Es el sistema de prácticas personales (institucionales) asociadas al campo de problemas de las que emergen los objetos personales (institucionales) en un momento dado.

Aquí es necesario considerar una tipología de significados (presentadas en la figura 1), importantes para el proceso de análisis de los significados.

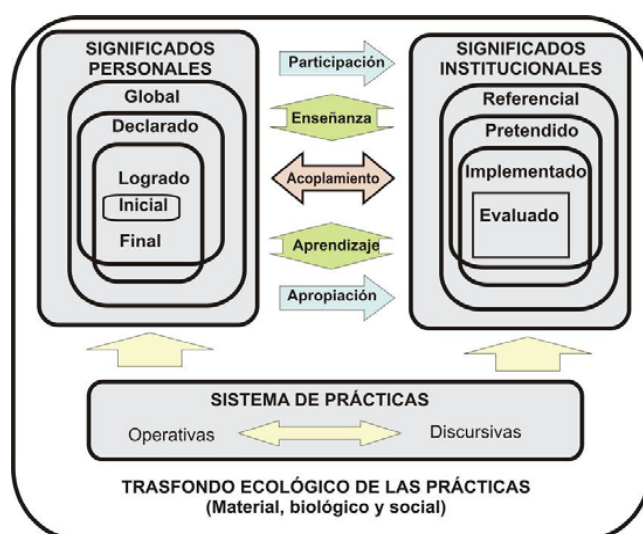


**Figura 1.**Tipos de significados institucionales y personales

Para un análisis más profundo y completo de las prácticas matemáticas, el EOS realiza una descomposición del objeto matemático, introduciendo las siguientes entidades primarias como componentes del significado de dicho objeto:

*Lenguaje:* se refiere a los términos, expresiones, notaciones o gráficos asociadas a la media, mediana y moda. Por Ej. La media se puede denotar por  $\bar{x}$ .

*Situaciones problemas:* se refieren a los problemas o ejercicios o cualquier otra situación problemática, en cuya resolución emergen los conceptos. Por ejemplo la idea de media podría surgir al presentar al alumno la siguiente situación: El peso de un objeto pequeño es medido por 5 estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en miligramos: 3.2; 3.5; 3.3 y 3.4 ¿Cuál sería la mejor estimación al peso real del objeto?

*Procedimientos:* se refiere a los algoritmos y operaciones que realiza un alumno al enfrentarse a las situaciones problemas. Muchos de estos procedimientos pueden ser algo rutinarios. Por ejemplo para calcular la media de cierto número de datos, se suman todos los datos y se divide entre el total de sumandos.

*Conceptos-definición:* introducidos mediante definiciones o descripciones. En nuestro caso, media o media aritmética, mediana y moda.

*Proposiciones:* enunciados sobre conceptos; es decir, propiedades características y su relación con otros conceptos. Por ejemplo la media de un conjunto de datos no siempre es igual a uno de los valores de los datos.

*Argumentos:* enunciados que se emplean para validar o explicar las proposiciones y procedimientos.



## Metodología

La metodología empleada será básicamente de tipo cualitativo e interpretativo, y se complementará con alguna información de carácter cuantitativo, especialmente cuando se presenten los resúmenes de los resultados.

Nuestra población de estudio está conformada por 320 alumnos distribuidos en seis horarios distintos. Todos ellos llevan el curso “Matemáticas” que se dicta en los Estudios Generales Letras (EEGGLL) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), y que está dirigido exclusivamente para alumnos que aspiran a carreras donde las matemáticas no son usadas de manera intensiva, tales como; derecho, periodismo, filosofía, historia, comunicaciones. La parte experimental de nuestra investigación se llevó a cabo en el presente semestre 2009-2.

Para el desarrollo de nuestra investigación, la hemos organizado siguiendo la pauta presentada por Alvarado, H. (2007) considerando tres etapas:

***Etapas 1. Análisis epistémico:*** el propósito de esta fase es fijar el significado institucional de referencia y el pretendido. Para lo primero, consideraremos algunos resultados de la tesis doctoral desarrollada por Cobo, B. (2003), relativos al significado de referencia de las medidas de tendencia central y así también analizaremos un texto guía usado por los profesores del curso; y para lo segundo, se realizará una entrevista a los profesores del curso, como también se hará un análisis del texto “Matemáticas para no matemáticos” (usado en clase por profesores y alumnos). Usaremos para esto el “análisis de contenido” y la “entrevista semiestructurada” respectivamente.

***Etapas 2. Determinación del significado institucional implementado:*** por medio de observaciones de las sesiones de clase del curso matemáticas en relación al tema “medidas de tendencia central” se describirá la enseñanza tal como es llevada a cabo. Asimismo observaremos algunos posibles

conflictos semióticos que los alumnos ponen de manifiesto en el transcurso de enseñanza.

La técnica a usarse para este fin será la Observación participante, y toda la información se recogerá en un *diario de observación*.

***Etapas 3. Evaluación del significado personal de los estudiantes y comparación con el significado institucional implementado:*** se caracterizarán los elementos de significado puestos en juego por los alumnos por medio del análisis de sus soluciones escritas a un examen que incluyan problemas propuestos por el investigador. Dicha caracterización y comparación servirá para describir el significado personal logrado y evaluar su comprensión. Así también se establecen algunas comparaciones entre el significado personal logrado y el significado institucional implementado.

Para el análisis del cambio de los significados personales, hemos considerado los significados previos de los alumnos que es lo que sugiere el EOS.

En esta etapa usaremos los siguientes instrumentos:

- Prueba de entrada (la cual se llamó “Cuestionario Inicial”)
- Prueba final

### **Algunos ejemplos y análisis de resultados.**

A continuación, presentamos dos ejemplos de las preguntas formuladas a los alumnos y las respectivas respuestas dadas por los mismos. El análisis de resultados, respecto al significado personal, está en proceso.

*Ejemplo 1* (tomado en la prueba de entrada, pregunta 2.a). En cierta provincia de un país, que tiene cuatro distritos, se han hecho estudios sobre el número promedio de hijos por familia.

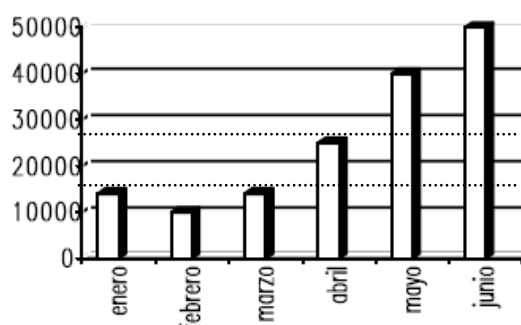
| Distrito | Número de familias | Promedio de hijos por familia |
|----------|--------------------|-------------------------------|
| A        | 35                 | 4,2                           |
| B        | 20                 | 2,6                           |
| C        | 45                 | 5,4                           |
| D        | 30                 | 3,0                           |

- a. ¿Cuál es el promedio de hijos por familia, en toda la provincia?

*Solución de un alumno (incorrecta):*

Handwritten student solution showing a weighted average calculation. It lists the averages (4,2, 2,6, 5,4, 3,0) and counts (35, 20, 45, 30) and calculates a weighted sum of 15,2. It also shows a division of 15,2 by 4, resulting in 3,8, and a concluding statement: "El promedio es 3,8 hijos."

*Ejemplo 2.* Observe el siguiente diagrama de barras que muestra el número de sándwiches que vendió la empresa Ambrossi durante el primer semestre del presente año:



- ¿Cuál es la variable observada y de qué tipo es?
- Dé un valor aproximado del *promedio* de sándwiches que la empresa vendió al mes.
- Dé un valor aproximado de la *moda* del número de sándwiches que la empresa vendió al mes.
- Dé un valor aproximado de la *mediana* del número de sándwiches que la empresa vendió al mes.

### Solución de un alumno (parcialmente correcta)

a) La variable observada es el mes en que se vendieron los sandwiches.

b) Tipo: variable ~~cuantitativa~~ Cualitativa Ordinal.

c) 
$$\frac{15000 + 10000 + 15000 + 25000 + 40000 + 50000}{6}$$
 El promedio de sandwiches que la empresa vendió al mes.

d) La moda fue <sup>en</sup> el mes de junio que se vendieron 50000 sandwiches.

e) 
$$\frac{15000 + 25000}{2} = 20000$$
 La mediana del n° de sandwiches que la empresa vendió al mes fue 20.000.

### Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2007). *Significado institucional y personal del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J. D. Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994 ). [Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales](http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm). *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547. Disponible en: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). [Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios](#). En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). [Significado y comprensión de las medidas de posición central](#). *UNO*, 2000, 25, 41-58. Disponible en: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>

Batanero, C. (2001). [Didáctica de la Estadística](#). Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C. Godino, J. D. (2001). [Análisis de datos y su didáctica](#). Materiales para la asignatura. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. ISBN 84-699-4296-6.

Bazán, J. (2006). *La estadística llega a la escuela en el Perú*. En Gonzales, M., Bazán, J. L., Sánchez, R. (eds). Coloquios sobre Matemática Educativa 2005, parte 2., 87-109. Reporte de Investigación 19. Serie C. Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994) Significado *institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355. Disponible en: [http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)

Godino, J.D. y Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de la Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). *Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato*. *UNION*, 9. Disponible en:

<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>

Ortiz de Haro, J. J. (1999). [Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato](#). Tesis doctoral. Universidad de Granada.

# **Implementación de una propuesta de enseñanza aprendizaje de temas de Geometría en el marco del programa de años intermedios haciendo uso de la teoría de situaciones didácticas**

Isabel Torres Céspedes <sup>1</sup>

## **Resumen**

*En los últimos años se ha incrementado el interés por la modelación por considerarla una estrategia viable para resolver problemas y reconstruir significados matemáticos.*

*En esta perspectiva este trabajo se propone implementar una propuesta de enseñanza aprendizaje de temas de geometría haciendo uso de patrones matemáticos basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau en primero de secundaria del Colegio Peruano Norteamericano Abraham Lincoln.*

## **Problema de investigación**

El objeto matemático que se trabajó son temas de geometría a través de patrones matemáticos que es un medio para construir conocimiento y darle sentido.

En la Guía de Matemática de la organización del Bachillerato Internacional del Programa de Años Intermedios (2007) define al patrón:

*“es el orden subyacente, la regularidad o previsibilidad entre los elementos de un sistema matemático. Reconocer un patrón es comenzar a comprender cómo se aplican las matemáticas al mundo en el que vivimos. Las características o rasgos que se repiten se pueden identificar y describir como relaciones o reglas generales”*

---

<sup>1</sup> Colegio Peruano Norteamericano Abraham Lincoln- Perú

Se ha observado que en su aprendizaje los alumnos del primero de secundaria del Colegio Peruano Norteamericano Abraham Lincoln tienen dificultades a la hora de modelar, de llegar a la generalización, de formalizar. Es posible que esta dificultad surja, porque los conocimientos adquiridos en matemática en los primeros años escolares referidos a encontrar patrones no se halla visto como tal. Por lo tanto, los alumnos no estén entrenados en este tipo de problemas o porque les cuesta mucho conectar contenidos geométricos con algebraicos.

### **Justificación del problema**

El Programa de Años Intermedios del Bachillerato Internacional contempla dentro de sus criterios de evaluación la Investigación de Patrones. Las tareas que se presentan en este rubro a los estudiantes deben permitir a los alumnos elegir sus propias técnicas matemáticas para resolver problemas y razonar de lo particular a lo general. Dichas tareas pueden tener varias soluciones y plantearse en contextos tomados de la vida real.

Además el modelar es una herramienta potente que permite hacer matemática más contextualizada y significativa. El hecho que esta componente sea relativamente nueva hace que sea interesante y mucho más atractiva para los niños.

Este contenido puede parecer desconocido para muchos docentes. Sin embargo, uno de los roles centrales de la matemática en la actualidad y particularmente en el trabajo con los computadores, es la de construir, analizar y correr simulaciones de modelos de la realidad. Puede que muchos colegios aún no lo tengan incorporado este contenido, pero si no es así es razonable esperar que pronto lo estará.

### **Marco teórico**

La tesis está conformada por siete capítulos. En la primera parte de la investigación se plantea el problema de investigación y su justificación. También, se exponen los

objetivos que ayudan a delinear y limitar los aspectos de la investigación, se incluye un plan de trabajo que permite visualizar como serán presentadas las situaciones didácticas a los alumnos. Luego hay una revisión teórica de las ideas importantes de la Teoría de Situaciones Didácticas, que sirve como base para la implementación de la propuesta de enseñanza aprendizaje. La investigación es analizada siguiendo las fases de la Ingeniería Didáctica.

Se incluye los resultados de las actividades implementadas, las cuales proponen tareas de acción, formulación, validación e institucionalización. Luego se hace un contraste a priori con los de a posteriori para establecer las semejanzas y diferencias de lo que se esperaba de los alumnos con lo que realmente ocurrió en cada actividad.

### **Metodología**

La metodología de investigación es cualitativa y a través de la Ingeniería Didáctica se diseñaron las actividades didácticas. Se realizó un análisis a priori de las situaciones didácticas diseñadas para la secuencia, se tabularon los datos que se recogieron durante la experiencia y posteriormente se confrontó el análisis a priori con el análisis a posteriori para establecer las semejanzas y diferencias.

### **Algunos ejemplos y análisis de resultados**

Con ayuda de los palitos de fósforo realizar el siguiente arreglo:



Completar el siguiente cuadro



|                                           |   |   |   |   |   |   |      |    |      |
|-------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|------|----|------|
| N° de cuadrados                           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | .... | 10 | .... |
| N° de palitos de fósforo que se necesitan |   |   |   |   |   |   |      |    |      |

Describir el proceso que seguirían para completar la tabla anterior, si en la última columna estuviera el número 50

| Algunas Respuestas Buenas |                                                                                |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| ✓                         | Se multiplica el número de cuadrados por 3 y se aumenta 1.                     |
| ✓                         | Multiplicaría $50 \times 3$ y ese producto le sumaría 1                        |
| ✓                         | Multiplicaríamos $50 \times 2$ y luego lo sumamos con el resultado de $50 + 1$ |

Indicar el tiempo que les tomó resolver esta parte de la actividad\_\_\_\_\_

Cómo generalizarían la fórmula del número de palitos de fósforos que se necesita para formar n cuadrados.

Criterio B

| Algunas Respuestas Buenas |                                                                           |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| ✓                         | La fórmula es $3n + 1$ donde n es la cantidad de cuadrados que se forman. |
| ✓                         | $2.n + (n+1)$ donde n es el número de cuadrados que se forman.            |
| ✓                         | $(n.2) + (n.1)$                                                           |
| ✓                         | $3n+1$ = número de palitos que se necesita para formar n cuadrados.       |

Indicar el tiempo que les tomó resolver esta parte de la actividad\_\_\_\_\_

| <b>Análisis a Priori</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>Análisis a Posteriori</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>Contraste</b>                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>La actividad fue presentada con un suplemento adicional para trabajar sobre el movimiento que se puede hacer con palitos de fósforo en diferentes situaciones. Se espera que sea un trabajo desafiante para los alumnos.</p> <p>Las tareas que se presentan a los alumnos son fáciles de seguir. Mantienen la misma secuencia de las actividades previas. Se espera que los alumnos las puedan desarrollar sin presentar ninguna dificultad.</p> | <p>Esta parte de la actividad fue considerada elemento distractor que no tiene nada que ver con el objetivo de la actividad de trabajar patrones matemáticos en una determinada secuencia.</p> <p>Los alumnos encontraron varias fórmulas que representaba la ley de formación en la secuencia que se había pedido.</p> | <p>La actividad se ha corregido en esta parte por desviar del objetivo.</p> <p>El usar material concreto motivó el trabajo realizado por los alumnos en la actividad.</p> |

Las actividades implementadas permitieron concluir que el ejercitarse en resolver situaciones de patrones matemáticos, facilita a los estudiantes poder generalizar cada vez mejor y representar el patrón mediante una fórmula matemática.

Por lo tanto será positivo considerar en las clases actividades que conduzcan a la modelación matemática para fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje.

Hoy en día se hace cada vez más evidente la necesidad de una aproximación científica a los problemas generados por la comunicación del saber matemático. Por lo tanto, se debe

considerar a la clase como un objeto de estudio en el que se tiene que tomar en cuenta la interacción y la dependencia entre el profesor, estudiante y el saber.

Asimismo, sería muy interesante continuar esta investigación en otros colegios para validar la experiencia. Mejorar las actividades y su diseño para futuras tesis. Este estudio se puede ampliar en la misma línea de investigación, con otros temas pertenecientes a otras áreas tales como ejemplo en álgebra, estadística

### **Referencias bibliográficas**

Almouloud, S (2007) *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba Paraná Brasil Editora UFPR

Artigue, M (1998) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Primera edición. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica.

Avila, A (2001) *El maestro y el contrato en la teoría Brousseauiana*. Artículo publicado en la Educación Matemática. Vol.13 Editorial Iberoamérica. Universidad Nacional. México.

Biembengut, María Salett e Hein Nelson (1999) *Modelación Matemática e implicaciones en el aprendizaje de las matemáticas*. Editora da FURB. Brasil

Brousseau ,G. (1980) *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1994) *Los diferentes roles del maestro en Didáctica de Matemáticas*. Aportes y reflexiones, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

# **El Efecto del programa de formación de docentes “enseñando a pensar”, en el conocimiento del contenido pedagógico y la práctica en la enseñanza de la Geometría a través de la resolución de problemas**

Huberto Noriega Noriega,<sup>1</sup> Sandra López Romano,  
Augusto Ospino Martínez, Luz López Silva

## **Resumen**

*El presente estudio determina el efecto del programa de formación de docentes “Enseñando a Pensar”, en torno al Conocimiento del Contenido Pedagógico y la Práctica en la Enseñanza de la Geometría a través de la resolución de problemas, el diseño metodológico de esta investigación es cuantitativo, con un enfoque explicativo y un diseño cuasi-experimental. El programa se aplicó a 36 docentes de instituciones educativas de Santa Marta y Barranquilla y fue evaluado a través de las técnicas de cuestionario y observación, para efectos de la investigación se utilizaron dos instrumentos: Cuestionario sobre Conocimiento del Contenido Pedagógico en lo referente a los procesos y estrategias para la resolución de problemas geométricos: Este midió el conocimiento acerca de cómo se enseña: 1) los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas geométricos; y 2) Las estrategias utilizadas en resolución de problemas geométricos. Según la evaluación, los docentes mejoraron significativamente sus prácticas al actualizar su Conocimiento del Contenido Pedagógico, referente a procesos y estrategias para la resolución de problemas geométricos, indicador de la efectividad del programa y el Formato de observación de Clase para Pensar específica para la resolución de problemas geométricos: Este es una adaptación para la geometría que extiende el formato de la Entrevista*

---

<sup>1</sup> Universidad del Norte de Barranquilla-Colombia

*Flexible diseñado por López (1992) para evaluar el pensamiento matemático y la observación de la Clase para Pensar (López, González, Arzuza & Toro, 2005). Específicamente, el formato evaluó en la clase de geometría, la enseñanza de los procesos y las estrategias inherentes a la resolución de problemas geométricos.*

*La actualización del conocimiento del contenido pedagógico permitió facilitar el desarrollo de procesos y estrategias para la resolución de problemas en el aula de clases, lo cual lleva a la construcción de una estrecha relación con la planeación de las clases, las acciones en el salón y la formación de capacidades y habilidades matemáticas para resolver. Además la Clase para Pensar permitió que los docentes incorporaran la pregunta abierta como una herramienta que desarrolla y evalúa el pensamiento de los estudiantes, haciendo explícito el pensamiento en los procesos y estrategias, fortaleciendo la metacognición y promoviendo el aprendizaje de competencias. Finalmente los docentes participantes presentan una mejor preparación y planeación de las clases, gracias a que son compartidas con otros docentes, retroalimentadas y reconstruidas.*

## **V COLOQUIO INTERNACIONAL ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

La presente obra recoge los trabajos presentados durante el V Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas realizado en la PUCP del 10 al 12 de febrero del 2010. A través de la lectura de los artículos que aquí se presentan se encontrarán reflexiones relacionadas con la Formación de Profesores, la Didáctica de la Estadística, la Investigación en Educación Matemática, los Entornos Informáticos para la Enseñanza de la Geometría y la Enseñanza de las Matemáticas Universitarias, entre otros.

