CAPITULO 2. Movimiento rectilíneo

DEFINICIÓN DE PARTÍCULA.

El Punto Material

Es una idealización de los cuerpos que existen en la naturaleza y que llamamos punto material. Es un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables al compararlas con las otras dimensiones que intervienen en el movimiento.

La Mecánica comienza con el estudio de los puntos materiales y después extiende estos estudios a los sistemas de puntos materiales, incluyendo cuerpos rígidos y deformables.

El punto material, a diferencia de un punto geométrico, está asociado a una masa inercial; esta propiedad está íntimamente ligada al movimiento de los cuerpos, como podemos ver cuando tratamos de entender cómo se mueven los cuerpos.

CONCEPTO DE MOVIMIENTO

El **movimiento** es un fenómeno físico que se define como todo cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia, variando la distancia de dicho cuerpo con respecto a ese punto o sistema de referencia, describiendo una trayectoria. Para producir movimiento es necesaria una intensidad de interacción o intercambio de energía que sobrepase un determinado umbral.

La parte de la física que se encarga del estudio del movimiento es la cinemática.

CLASIFICACIÓN DEL MOVIMIENTO

Según se mueva un punto o un sólido pueden distinguirse distintos tipos de movimiento:

Según la trayectoria del punto: Rectilíneo y curvilíneo

Movimiento rectilíneo: La trayectoria que describe el punto es una línea recta.

Movimiento curvilíneo: El punto describe una curva cambiando su dirección a medida que se desplaza. Casos particulares del movimiento curvilíneo son la rotación describiendo un círculo en torno a un punto fijo, y las trayectorias elípticas y parabólicas.

Según la trayectoria del sólido: Traslación y rotación.

Traslación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias iguales, no necesariamente rectas.

Rotación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares concéntricas.

Según la dirección del movimiento:

Alternativo y pendular.

Alternativo: Si la dirección del movimiento cambia, el movimiento descrito se denomina alternativo si es sobre una trayectoria rectilínea o pendular.

Pendular: Si lo es sobre una trayectoria circular (un arco de circunferencia).

Según la velocidad: Uniforme y uniformemente variado.

Movimiento uniforme: La velocidad de movimiento es constante

Movimiento uniformemente variado: La aceleración es constante, como es el caso de los cuerpos en caída libre sometidos a la aceleración de de la gravedad.

SISTEMAS DE REFERENCIA. POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO.

El movimiento es una noción esencialmente relativa. Así resulta que el movimiento como el reposo son hechos relativos, no se puede decir que algo se mueve o que está en reposo sin añadir respecto a qué. En consecuencia necesitamos un sistema de referencia para descubrir el movimiento.

Sistemas de referencia. Desde el punto de vista estrictamente matemático, un sistema de referencia en un espacio vectorial de dimensión ***n*** está formado por ***n*** vectores linealmente independientes, formando una base del espacio, y por un punto, definido por ***n*** coordenadas, que suele llamarse origen del sistema de referencia.

En el dominio de la física, el espacio suele ser la base más habitual la llamada ortonormal ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$), y el origen se sitúa a conveniencia del observador. Los vectores de la base son $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$ y $\hat{k} = (0,0,1)$.

Atendiendo a su posible estado de reposo o movimiento, los sistemas de referencia pueden ser clasificados siempre y cuando hablemos de su relación respecto a otro sistema de referencia que arbitrariamente supongamos inmóvil. En efecto, debe tenerse en cuenta que cualquier sistema de referencia está moviéndose respecto a otro (este papel gira y se traslada con la Tierra alrededor del Sol, el cual a su vez se desplaza en la galaxia, que a su vez se expande en el Universo...), por lo que no cabe hablar de un sistema de referencia absoluto.

De acuerdo con lo anterior, un sistema de referencia puede estar:

a) en reposo respecto a otro

b) moviéndose con velocidad constante $\vec{v}$ respecto al supuestamente fijo

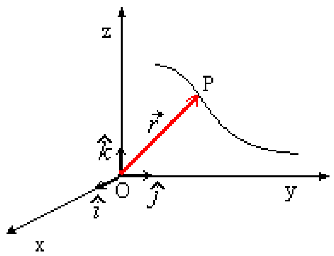
c) con una aceleración respecto al fijo.

Un buen ejemplo del primer caso podemos encontrarlo en un sistema de referencia como la pizarra, que se encuentra en reposo relativo respecto a las paredes del aula (en condiciones normales).

Un ejemplo de sistema de referencia inercial podemos encontrarlo en un tren que se mueve en un tramo de vía rectilíneo con una velocidad sensiblemente constante.

Y por último, la propia Tierra constituye un sistema de referencia no inercial, ya que gira con una aceleración normal, que si bien es pequeña, en ciertos fenómenos se observa con claridad.

Vector Posición.- Para fijar la posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas bastan tres números que pueden ser las proyecciones sobre los ejes de un sistema cartesiano ortogonal.



El vector posición del punto P es:

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

El movimiento quedará especificado si conocemos el vector posición para cada instante, es decir:

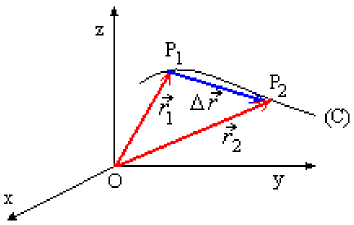
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Esto se conoce como ley de movimiento.
El vector posición puede ser expresado a través de las ecuaciones paramétricas de sus componentes en función del tiempo:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Desplazamiento.
La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.

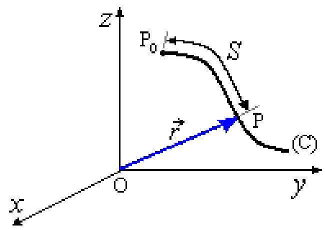


Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Los vectores posición correspondientes son

$$\overline{OP}_1 \text{ y } \overline{OP}_2 = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}.$$

Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Trayectoria y Ecuación Horaria del Movimiento.-
Se llama trayectoria de una partícula en movimiento al lugar geométrico de las posiciones efectivamente ocupadas por la partícula en el transcurso del tiempo. De acuerdo al tipo de movimiento podrá ser una recta, circunferencia, espiral, parábola o curvas tan complicadas como se nos ocurra.
La trayectoria no define el movimiento, pues no sabemos en que instante de tiempo ocupó cada punto. Sabemos dónde estuvo, pero no cuando y si estuvo varias veces en cada punto o no. Hace falta la ecuación horaria.
Para encontrar la ecuación horaria debemos medir las distancias en función del tiempo.



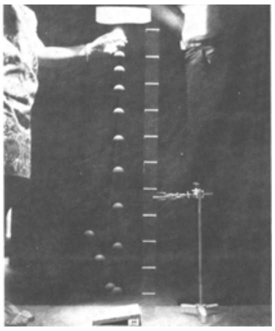
En la figura P_0 es un origen fijo sobre la curva (C) que porta la trayectoria.
Sea P la posición de la partícula en el instante t sobre la trayectoria definida por el arco

$$\overset{\frown}{P_0P} = S$$

La ecuación horaria del movimiento de la partícula P es

$$S = S(t)$$

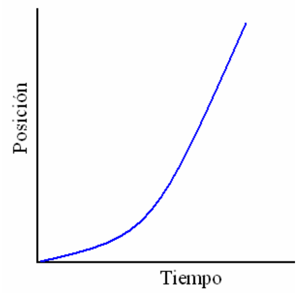
Ejemplo experimental. Estudio del movimiento de la caída libre de un cuerpo.
Solución.
Si dejamos caer un objeto, obtenemos que la trayectoria sea una recta vertical.
Para encontrar la ley del movimiento podemos intentar medir a partir de dónde la dejamos caer, distancias sucesivas para diferentes tiempos.
Una forma experimental es usando una película fotográfica y una flash electrónico que se encienda por ejemplo cada 1/30 de segundo. En una habitación oscura dispondremos el cuerpo, la película y un disparador que deje caer el cuerpo y simultáneamente accione el flash. Paralelamente a la trayectoria a seguir por el objeto se fija una regla.



La fotografía mostrada permite conocer las cotas de la foto en los diferentes instantes bien determinados. La tabla muestra los resultados de la fotografía:

Tiempo	Cota(m)
t_0	0,2480
t_1	0,3250
t_2	0,4130
t_3	0,5130
t_4	0,6235
t_5	0,7450
t_6	0,8875
t_7	1,0215
t_8	1,1760
t_1	1,3405
t_{10}	1,5155

Tracemos la curva representativa del la función $z = f(t)$



Esta curva corresponde a una parábola y su expresión matemática es

$$z = kt^2$$

Donde $\begin{cases} z \text{ está en segundos} \\ k = 4{,}9\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ t \text{ está en segundos} \end{cases}$

Luego la ecuación horaria es

$$s = kt^2$$

Si fijamos el origen del movimiento en $z = 0$, la ley del movimiento es

$$\vec{r} = -kt^2\hat{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$x = 0$, $y = 0$ y $z = kt^2$

En esencia para cualquier movimiento debemos ingeniarnos para obtener la ecuación horaria y conocida su trayectoria, queda determinado el movimiento.

VELOCIDAD Y RAPIDEZ

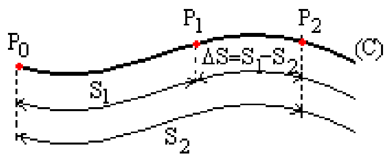
Rapidez. La rapidez (que en el lenguaje común se denomina simplemente velocidad) se define como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. La distancia s recorrida a lo largo de una trayectoria es una magnitud escalar, independiente de la dirección. Como el tiempo también es un escalar, la rapidez es también un escalar.

La rapidez se designa mediante el símbolo v y sus dimensiones son:

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1}$$

La unidad en el sistema SI es el metro por segundo (m/s).

La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curva C. En el instante t_1 esta en P_1, a una distancia S_1 de un punto P_0 de referencia. En el instante t_2 está en P_2 a una distancia S_2 del punto de referencia.



En el tiempo que transcurre entre t_1 y t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$, la partícula ha recorrido una distancia ΔS es la diferencia entre S_2 y S_1, esto es $\Delta S = S_2 - S_1$.

Se define como **rapidez media** dentro de este intervalo

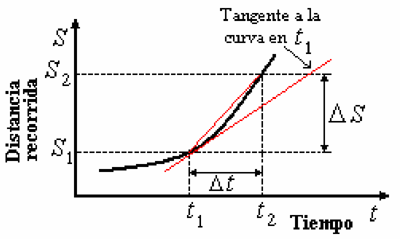
$$v_m = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

El símbolo Δ (delta) significa un incremento de una magnitud física.

Si la rapidez de la partícula varía a lo largo de la trayectoria, para conocer con mejor precisión el movimiento debemos hacer los intervalos ΔS más pequeños y tomar la rapidez media de cada uno de ellos. La figura a continuación nos muestra el gráfico distancia recorrida versus tiempo, observen que cuando t_2 tiende a t_1, Δt tiende a cero.

Mediante este proceso llamamos a la **rapidez instantánea** *v* en el instante *t*. Este proceso se expresa matemáticamente como

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$



La cantidad $\frac{dS}{dt}$ se llama "derivada de S con respecto a t" y el proceso de encontrarla se llama derivación o diferenciación. La notación dS , dt , expresa incrementos infinitesimalmente pequeños que se conocen como diferenciales.

Ejemplo 1.
a) Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria
$S = At^2$
b) Si A = 1,4 m/s ^{2} , hallar la distancia a la que se encuentra la partícula y su rapidez para 10 segundos después de iniciado su movimiento.
Solución.
a) Si en el tiempo t está en $S_{(t)}$:

$$S_{(t)} = At^2$$

Transcurrido un tiempo Δt , la partícula estará en $S_{(t+\Delta t)}$

$$S_{(t+\Delta t)} = A(t + \Delta t)^2$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 ,$$

Como

$$\Delta S = S_{(t+\Delta t)} - S_t$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t) - At^2$$
$$= 2At\Delta t + A(\Delta t)^2$$

La rapidez en el instante t es:

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2At\Delta t + A(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2At$$

b) Para $t = 10$ es

$$S_{(10)} = \left(1{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 140\,\text{m}$$

y su rapidez es

$$v_{(10)} = 2\left(1{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve según la ecuación horaria

$$S(t) = A\text{sen}(\omega t)$$

Solución.
En el intervalo de tiempo de t hasta $t + \Delta t$ la partícula que se mueve:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$
$$= A\text{sen}\,\omega(t + \Delta t) - A\text{sen}\,\omega t$$
$$= A\text{sen}\,\omega t \cos(\omega\Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega\Delta t)$$
$$- A\text{sen}\,\omega t$$

La rapidez en un instante t cualquiera es

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A\text{sen}\,\omega t \cos(\omega\Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega\Delta t) - A\text{sen}\,\omega t}{\Delta t}$$
$$v = A\omega \cos \omega t$$

El proceso desarrollado en los dos ejemplos anteriores se hace simple con la práctica.
Hay muchas reglas o fórmulas para derivar diferentes tipos de funciones. Estas pueden memorizarse o encontrarse en tablas. La tabla siguiente es una pequeña muestra de estas.

Derivadas de algunas funciones

Función	Derivada
$S = t^n$	$\frac{dS}{dt} = nt^{n-1}$
$S = c$	$\frac{dS}{dt} = 0$
$S = cu$	$\frac{dS}{dt} = c\frac{du}{dt}$
$S = u + v$	$\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
$S = uv$	$\frac{dS}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$
$S = A\text{sen}\,\omega t$	$\frac{dS}{dt} = A\omega\cos\omega t$
$S = A\cos\omega t$	$\frac{dS}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t$

Ejemplo 3. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria $S = At^2$, usando fórmulas de la tabla anterior.
Solución.
Tenemos que:

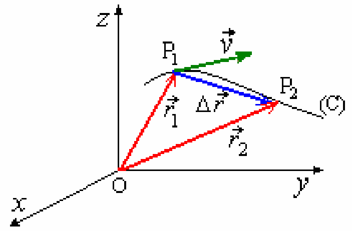
$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(At^2)}{dt} = A\frac{dt^2}{dt} = 2At$$

Ejemplo 4. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley

horaria $S(t)=A\text{sen}(\omega t)$, usando fórmulas de la tabla anterior.
Solución.
Tenemos que

$$v=\frac{dS}{dt}=\frac{d(A\text{sen}\,\omega t)}{dt}=A\frac{d\text{sen}\,\omega t}{dt}=A\omega\cos\omega t$$

Velocidad. La velocidad (que más apropiadamente sería vector velocidad), a diferencia de la rapidez debemos incluir el concepto de dirección en nuestro estudio; para esto debemos emplear vectores.
La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.



Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2=t_1+\Delta t$. Los vectores posición correspondientes son $\overline{OP}_1=\vec{r}_1$ y $\overline{OP}_2=\vec{r}_2=\vec{r}_1+\Delta\vec{r}$. Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Velocidad media. El cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo de tiempo Δt es el vector velocidad media.

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

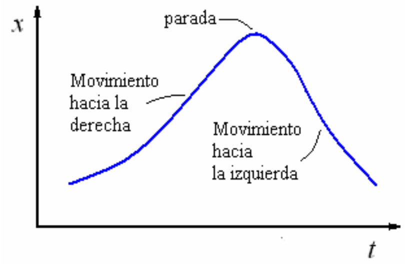
Como el desplazamiento es un vector y el tiempo es un escalar positivo, la velocidad es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento. Esto significa que si una partícula sufre un desplazamiento negativo, su velocidad será también negativa.

Velocidad instantánea. Como en el caso de la rapidez obtendremos la velocidad instantánea $\vec{v}$ tomando la velocidad media en un intervalo de tiempo cada vez menor Δt medido desde un cierto tiempo t_1. En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v}(t_1)=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

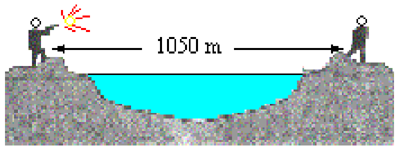
La dirección de este vector es la dirección límite del vector cuando $\Delta t\to 0$ de la figura anterior. Es evidente que en este límite la dirección de $\Delta\vec{r}$ es la de la tangente la trayectoria en P_1.

La magnitud del vector velocidad instantánea, $\vec{v}$, es decir $|\vec{v}|$ o simplemente v es igual a la rapidez instantánea en ese punto.
La velocidad es la pendiente del gráfico de *x* versus *t*, como se muestra en la figura.



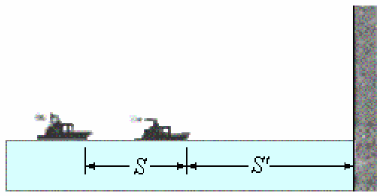
Cuando la pendiente es positiva, el objeto se está moviendo a la derecha.
Cuando la pendiente es negativa, el objeto se está moviendo a la izquierda.
Cuando la pendiente es cero, el objeto se detiene.

Ejemplo 5. Entre dos observadores hay una distancia de 1050 m, uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.



Solución.
La velocidad es:
$c = s/t = 1050/3 = 350$ m/s

Ejemplo 6. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver un fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.



Solución.
Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:
$S = 340 \text{ x } 3 = 1020$ m
El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:
$t = 11 - 3 = 8\ s \Rightarrow 2S' = 340 \text{ x } 8 \Rightarrow S' = 1360$ m
La costa está a 1020 + 1360 = 2380m.

Ejemplo 7. La posición de una partícula en coordenadas cartesianas está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

donde

$$x(t) = 5 + 6t^2, \quad y(t) = 3t, \quad z(t) = 6$$

t en segundos, x, y, z en metros.
a) Determinar el desplazamiento entre t = 0 y t = 1 s.
b) Determinar la velocidad media
c) Determinar la velocidad y la rapidez para t = 1 s.
Solución.
a) para t = 0 s, x = 5m, y = 0m, z = 6m

$$\vec{r}_0 = 5\hat{i} + 6\hat{k}$$

Para t = 1s, x = 11m, y =3m, z = 6m

$$\vec{r}_1 = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

El desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (11-5)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (6-6)\hat{k}$$
$$= 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

b) la velocidad media es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{6\hat{i} + 3\hat{j}}{1-0} = 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

c) la velocidad instantánea es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[\left(5+6t^2\right)\hat{i} + 3t\hat{j} + 6\hat{k}\right]}{dt}$$
$$= 12t\hat{i} + 3\hat{j}$$

La magnitud de v es

$$v = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$$
= 12,4 m/s

Valor que corresponde a la rapidez instantánea para t = 1s.

Ejemplo 8. Un auto está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde b = 2,40 m/s^2 y c = 0,120 m/s^3.
a) Calcule la velocidad media del auto entre t = 0 y t = 10,0 s.
b) Calcule la velocidad instantánea en
i) t = 0; ii) t = 5,0 s; iii) t = 10,0 s.
c) ¿Cuánto tiempo después de arrancar vuelve a estar parado el auto?
Solución.
a) En $t_1 = 0$, $x_1 = 0$, tal que la ecuación

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{x_2}{t_2} = \frac{(2,4)(10)^2 - (0,120)(10)^3}{(10)}$$
= 12,0 m/s

b) de la ecuación $v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, la velocidad instantánea en función del tiempo es

$$v_x = 2bt - 3ct^2 = (4,80)t - (0,360)t^2$$

tal que
i) $v_x(0) = 0$,
ii) $v_x(5) = (4,80)(5) - (0,360)(5)^2 = 15,0$ y
iii) $v_x(10) = (4,80)(10) - (0,360)(10)^2 = 12,0$
c) el auto está en reposo cuando $v_x = 0$.
Por consiguiente $(4,80)t - (0,360)t^2 = 0$.
El único tiempo después de $t = 0$ en que el auto se encuentra en reposo es $t = \frac{4,8}{0,360}$ = 13,3 s

Ejemplo 9. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas
En las cuestas arriba lleva una rapidez constante de 5 km/h y en las cuestas abajo 20 km/h. Calcular:
a) ¿Cuál es su rapidez media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
b) ¿Cuál es su rapidez media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
c) ¿Cuál es su rapidez media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?
Solución.
a) $$v_m = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{s_{subida} + s_{bajada}}{t_{total}}$$
$$= \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km / h}$$

b) $$v_m = \frac{v_1t + v_2t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
= 12,5 km/h

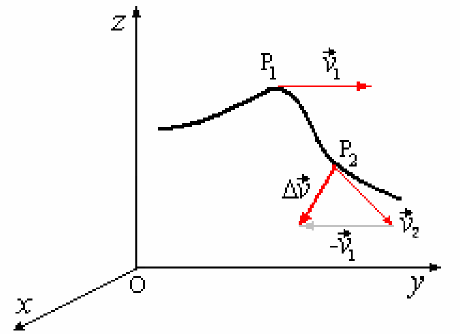
c) $$v_m = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = \frac{2 \times 5 + 20}{3}$$
= 10 km/h

(Obsérvese que la rapidez media es la media aritmética de las rapideces uniformes únicamente en el caso de que el tiempo que duran los distintos recorridos sea el mismo).

ACELERACIÓN

En el lenguaje ordinario el término aceleración se refiere sólo a incrementos del módulo de la velocidad (rapidez), pero en Física se utiliza con un sentido más amplio para designar un cambio del vector velocidad. En Física se dice que un cuerpo está siendo acelerado no sólo cuando aumenta su velocidad sino también cuando disminuye o cambia de dirección.
Se llama aceleración al cambio de la velocidad (vector velocidad) en el tiempo.

Aceleración Media.



La razón en la cual la velocidad cambia se mide por la aceleración. Así si un objeto tiene la velocidad $\vec{v}_1$ en el t_1 del tiempo y velocidad $\vec{v}_2$ en el t_2, su aceleración media es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

Supongamos que una partícula que se mueve en la trayectoria C de la figura anterior en el instante t_1 está en P$_1$ con una velocidad v_1 y en el instante $t_2 = t_1 + \Delta t$ está en P$_2$ con una velocidad v_2. Por definición el vector aceleración media de la partícula entre los instantes es t_1 y t_2 es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = LT^{-2}$

La unidad de la aceleración en el sistema SI está en metros / segundo por segundo:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aceleración Instantánea o simplemente aceleración. Cuando $t_2 \to t_1$ o $\Delta t \to 0$ llegaremos al valor de la aceleración en el instante t_1. Este proceso para el límite se expresa matemáticamente como

$$\vec{a}_{(t_1)} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Es mejor evitar el uso de la palabra común “desaceleración.”

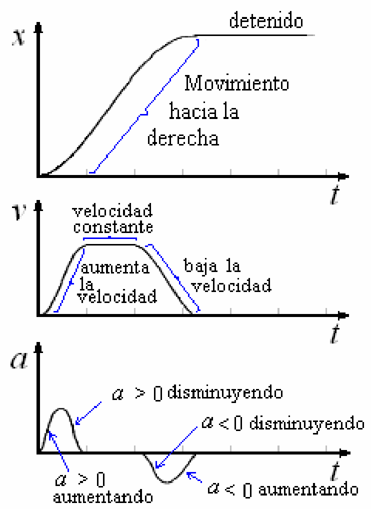
Describa la aceleración simplemente como positiva o negativa.

Observe que la aceleración negativa no significa necesariamente “bajar la velocidad”.

Cuando la velocidad y la aceleración ambas tienen el mismo signo, el objeto aumenta su velocidad.

Cuando la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, el objeto disminuye su velocidad.

Los gráficos de la figura siguiente ilustran el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para un objeto en movimiento.



Ejemplo 10. Una partícula se mueve a lo largo de una línea curva

$$\vec{r}_{(t)} = \left(t^2 + t\right)\hat{i} + (2t - 1)\hat{j} + \left(t^3 - 2t^2\right)\hat{k}$$

Encontrar:

a) La velocidad para $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

c) La aceleración y su magnitud para $t = 1\,\text{s}$.

Solución.

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t - 1$, $z(t) = t^3 - 2t^2$

Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t + 1,\quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 3t^2 + 4t$$

La velocidad es:

$$\vec{v}_{(t)} = (2t + 1)\hat{i} + 2\hat{j} + \left(3t^2 - 4t\right)\hat{k}$$

Para $t = 1\,\text{s}$: $\vec{v}_{(1)} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Para $t = 3\,\text{s}$. $\vec{v}_{(3)} = 7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y $t = 3\,\text{s}$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{(3)} - \vec{v}_{(1)}}{3 - 1} =$$

$$\frac{(7 - 3)\hat{i} + (2 - 2)\hat{j} + (15 + 1)\hat{k}}{2}$$

$$\vec{a}_m = 2\hat{i} + 8\hat{k}$$

c) la aceleración instantánea es

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t+1)\hat{i} + 2\hat{j} + \left(3t^2 - 4t\right)\hat{k}\right]$$

$$= 2\hat{i} + (6t-4)\hat{k}$$

para $t = 1s$

$$\vec{a}_{(1)} = 2\hat{i} + 2\hat{k}$$

la magnitud de la aceleración es

$$a(1) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}$$

Ejemplo 11. Una persona que se asoma por la ventana de un edificio alto de oficinas observa lo que sospecha es un ovni. La persona registra la posición del objeto en función del tiempo y determina que está dada por

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + \left(7{,}0t - 3{,}0t^2\right)\hat{k}$$

a) Obtenga los vectores de: desplazamiento, velocidad y aceleración del objeto en t = 5,0 s.
b) ¿Hay algún tiempo en que la velocidad del objeto sea cero?
c) ¿La aceleración del objeto es constante o cambia con el tiempo?

Solución.
a) El vector desplazamiento es:

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + \left(7{,}0t - 3{,}0t^2\right)\hat{k}$$

El vector velocidad es la derivada del vector desplazamiento:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -5{,}0\hat{i} + 10{,}0\hat{j} + \left[7{,}0 - 2(3{,}0)t\right]\hat{k}$$

y el vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

en t = 5,0 s:

$$\vec{r}_{(5)} = -5{,}0(5)\hat{i} + 10{,}0(5)\hat{j} + \left[7{,}0(5) - 3{,}0(5)^2\right]\hat{k}$$
$$= -25{,}0\hat{i} + 50{,}0\hat{j} - 40{,}0\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}(5)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

b) la velocidad en ambas direcciones x e y es constante y diferente de cero, luego la velocidad nunca puede ser cero
c) La aceleración del objeto es constante, ya que t no aparece en el vector aceleración.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.

Para que un movimiento sea rectilíneo uniforme su velocidad debe ser constante, es decir, que la aceleración sea siempre igual a cero.

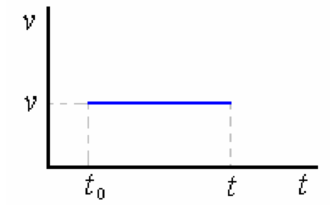
Estudio del Movimiento

Como el movimiento es uniforme $\vec{v}_m = \vec{v}$, y considerando que su trayectoria está en el eje x

$$\vec{v} = v\hat{i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} = \frac{x - x_0}{t - t_0}\hat{i}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

Diagrama velocidad-tiempo



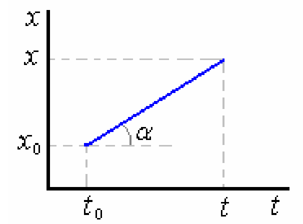
El gráfico velocidad-tiempo del movimiento uniforme es una recta paralela al eje del tiempo.

De $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$

Si el instante inicial $t_0 = 0$, tenemos

$$x = x_0 + vt$$

Diagrama espacio-tiempo



El gráfico indica las posiciones instantáneas del móvil en cada instante

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO.

Para que un movimiento sea rectilíneo uniformemente variado su aceleración debe ser constante y diferente de cero.

Estudio del Movimiento

Como la aceleración es constante, $\vec{a}_m = \vec{a}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante}$$

$$\vec{a} = a\hat{i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

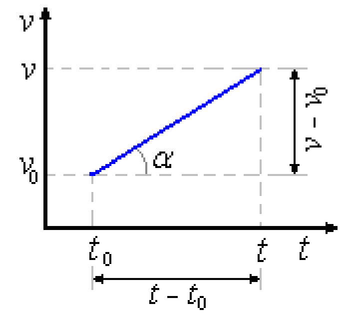
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$v = v_0 + at$$

Diagrama velocidad-tiempo



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

La velocidad media:

Si la posición en t_0 es $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y la posición en t es $\vec{r} = x\hat{i}$, la velocidad media en este intervalo es

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

La posición.

De lo anterior:

$$x - x_0 = v_m(t - t_0)$$

y $x = x_0 + v_m(t - t_0)$

Por otra parte como la velocidad es una función lineal, la velocidad media v_m es

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

y como $v = v_0 + a(t - t_0)$

resulta

$$v_m = \frac{v_0 + [v_0 + a(t - t_0)]}{2} = v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}$$

finalmente

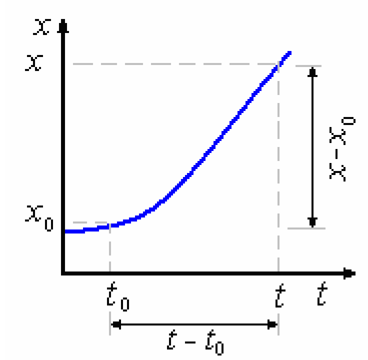
$$x = x_0 + \left[v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}\right](t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

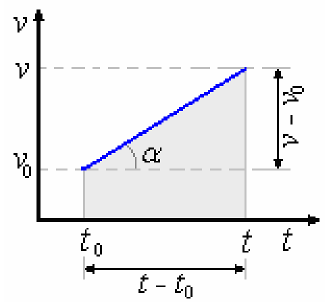
Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Diagrama espacio -tiempo



Ejemplo 12. Demostrar que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al módulo del desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.



Solución.

El área encerrada es igual al área de un trapecio cuyas bases son $b_1 = v$ y $b_2 = v_0$ con altura $h = (t - t_0)$.

$$\text{Area del trapecio} = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h$$

$$= \frac{(v + v_0)}{2}(t - t_0)$$

$$= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0)$$

Pero como $a = \tan\alpha = \dfrac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$

$$\Rightarrow (v - v_0) = a(t - t_0)$$

Luego

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Valor que precisamente corresponde al desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.

LA ECUACIÓN DE TORRICELLI.

Podemos obtener una relación muy útil eliminando el tiempo como variable en la ecuación

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Como $a = \dfrac{(v - v_0)}{(t - t_0)} \Rightarrow (t - t_0) = \dfrac{(v - v_0)}{a}$

Sustituyendo

$$x = x_0 + v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

De donde se puede despejar:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Conocida como la ecuación de Torricheli.

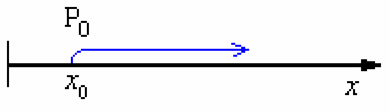
Descripción del movimiento de una partícula con aceleración constante.

Consideramos una aceleración constante $a > 0$ en el sentido positivo de la trayectoria.

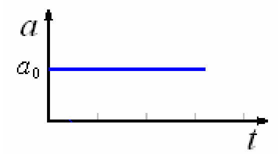
1er Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 \geq 0$.

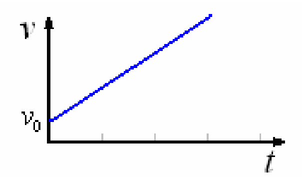
La partícula se desplaza de P_0 al infinito con un sentido constante y aumentando su velocidad.



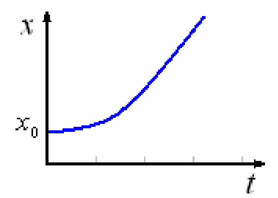
Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$



$v = v_0 + at$

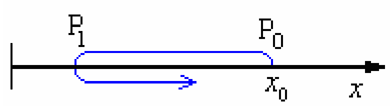


$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

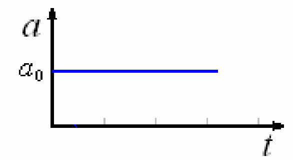
2do. Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 < 0$.

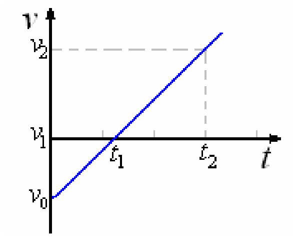
La partícula se desplaza de P_0 en sentido negativo con movimiento retardado (desacelerado) hasta detenerse en P_1 y cambia de sentido. A partir de ese instante la velocidad aumenta constantemente (acelerado) y se desplaza al infinito con un sentido constante.



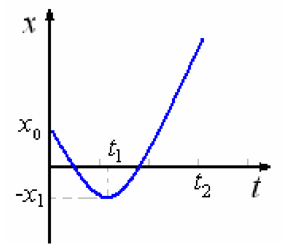
Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$



$v = v_0 + at$



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Ejemplo 13. Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje *x* con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x_{(t)}$ = 50,0 cm + (2,00 cm/s)t - (0,0625 cm/s^2)t^2 .

a) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga.

b) ¿En qué instante *t* la tortuga tiene velocidad cero?

c) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida?

d) ¿En qué instantes *t* la tortuga está a una distancia de 10,0 m de su punto de partida? ¿Que velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes?

e) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40{,}0$ s.

Solución.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2{,}00\ \text{cm/s} - (0{,}125\ \text{cm/s}^2)t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}125\ \text{cm/s}^2$$

a) En $t = 0, x = 50{,}0\,\text{cm}, v_x = 2{,}00\,\text{cm/s}$,

$a_x = -0{,}125\,\text{cm/s}^2$.

b) Hagamos $v_x = 0$ y resolvamos para t:

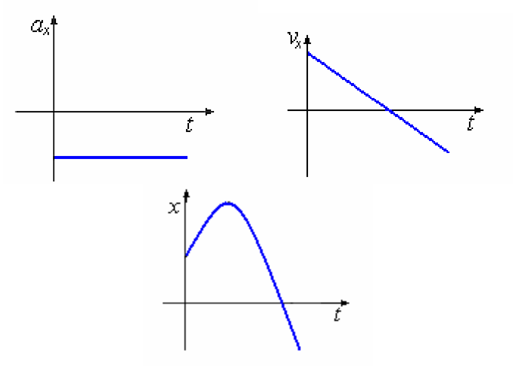
$t = 16{,}0$ s

c) Hagamos $x = 50,0$ cm y resolvamos para t.
Esto da: $t = 0$ y $t = 32,0\,\text{s}$.
La tortuga regresa al punto de partida después de 32,0 s.
d) La tortuga está a 10,0 cm del punto de partida cuando $x = 60,0$ cm o $x = 40,0$ cm.
Hagamos $x = 60,0$ cm y resolvamos para t:
$t = 6,20$ s y $t = 25,8$ s
En $t = 6,20$ s, $v_x = + 1,23$ cm/s.
En $t = 25,8$ s, $v_x = - 1,23$ cm/s.
Hagamos $x = 40,0\,\text{cm}$ y resolvamos para t:

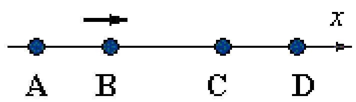
$$t = 36,4\,\text{s}$$

(la otra raíz de la ecuación cuadrática es negativa y por lo tanto sin significado físico).
En $t = 36,4$ s, $v_x = - 2,55$ cm/s.

e)



Ejemplo 14. Un móvil parte del reposo y de un punto A, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado (a =10 cm/s^2); tarda en recorrer una distancia BC = 105 cm un tiempo de 3 s, y, finalmente, llega al punto D (CD = 55 cm). Calcular:
a) La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.
b) La distancia AB.
c) El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.
d) El tiempo total en el recorrido AD.



Solución.
a)

$$\left.\begin{array}{l} BC = v_B t + \frac{1}{2}at^2 \\ 105 = v_B 3 + \frac{1}{2}10\times 3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_B = 20\ \text{cm/s}$$

$$v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50\ \text{cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD = v_C t + \frac{1}{2}at^2 \\ 55 = 50t + \frac{1}{2}10t^2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow t^2 + 10t - 11 = 0 \Rightarrow t = 1$ s

$$v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60\ \text{cm/s}$$

b) $v_B = \sqrt{2aAB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{400}{20} = 20\text{cm}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} v_B = at \\ 20 = 10t \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2\ \text{s}$$

d) Será la suma de los tiempos parciales:
$t = 2 + 3 + 1 = 6$ s

MOVIMIENTO VERTICAL CON ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

La variación de la magnitud de la aceleración g_ϕ debido a la gravedad en la superficie de la tierra con la latitud está dada por la fórmula internacional de la gravedad adoptada en 1930 por el Congreso Geofísico Internacional:

$$g_\phi = 978,049000\,(1 + 0,0052884\,\text{sen}^2\phi - 0,0000059\,\text{sen}^2 2\phi)$$

g en cm/s^2, ϕ en grados
Donde ϕ es la latitud de la tierra medida en el ecuador
Para ϕ = 0º (ecuador), g_0 = 978,0490
Para ϕ = 90º (polos), g_{90} = 983,2213

La variación de la aceleración gravitacional con la altura sobre el nivel del mar es aproximadamente

$$g = g_\phi - 0,000002860h$$

h en metros y g_ϕ en m/s^2
Donde $h \leq$ 40 000 m

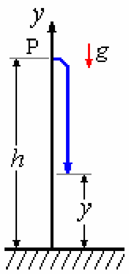
Cerca de la superficie de la tierra la magnitud de la aceleración debido a la gravedad varía muy poco con la altura y en los cálculos técnicos ordinarios se toma g = 9,81 m/s^2 (dirigido verticalmente hacia abajo).

Un cuerpo que se deja caer está sometido a la aceleración de la gravedad y su movimiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente variado en el eje vertical perpendicular a la tierra,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$
$$a = -g$$

a) Caída libre



Si se deja caer un cuerpo desde una altura *h* sobre el nivel del piso y consideramos despreciable la resistencia del aire.

En este caso $y_0 = h$, $v_0 = 0$, luego:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -gt$$

$$a = -g$$

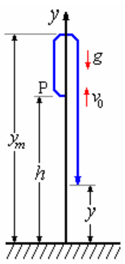
El cuerpo toca tierra cuando $y = 0$

Luego $h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

y la velocidad es $v = \sqrt{2gh}$

b) Lanzamiento hacia arriba

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia arriba con velocidad v_0, se mueve con un movimiento rectilíneo uniformemente retardado (desacelerado).



$$y = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo sube hasta que alcanza la altura máxima y_m. Esta corresponde a cuando la velocidad disminuye a cero.

$$v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

De aquí $y_m = h + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + +\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$

$$= h + \frac{v_0^2}{2}$$

Cuando el cuerpo pasa por el punto de lanzamiento $y = h$

$h = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_P = \frac{2v_0}{g}$ y por supuesto $t_P = 0$, que corresponde al tiempo inicial.

Observamos que $t_P = 2t_m$

La velocidad es

$$v_P = v_0 - g\left(\frac{2v_0}{g}\right) = v_0 - 2v_0 = -v_0$$

Finalmente toca piso cuando $y = 0$

$$h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

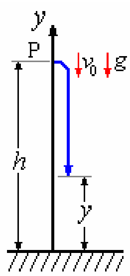
$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

c) Lanzamiento hacia abajo

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia abajo con una velocidad v_0, el cuerpo se mueve en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo alcanza el piso cuando $y = 0$.

$$h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = -\frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

$$t = -\frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

Ejemplo 15. Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de 12,5 m/s. La pelota llega a tierra 4,25 s, después. Determine:
a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.
b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.
Solución.
La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Con g = 10m/s^2, v_0 = 12,5 m/s
$y = h + 12,5t - 5t^2$
a) Al tiempo t = 4,25 s, y = 0, luego:
$h + 12,5(4,25) - 5(4,25)^2 = 0$,
$\Rightarrow h$ = 37,19 m
b) v_y = 12,5 - 10t = 12,5 - 10(4,25)
= -30,0 m/s

Ejemplo 16. Se deja caer un cuerpo desde una altura de y_0 = 33 m, y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de 1 m/s. Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de 18 m.
Solución.
$y_1 = 33 - 5t^2$
$y_2 = 33 - t - 5t^2$
$y_1 - y_2 = t$
Entonces la distancia entre ellos es 18m a los 18 s

Ejemplo 17. Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo 68,3 m. Encontrar La altura desde donde cae.
Solución. Suponiendo que se soltó del reposo
$y = h - 5t^2$
El tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$
La distancia recorrida en el último segundo será

$$y\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right) - y\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right) =$$

$$5\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right)^2 - 5\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right)^2 = 68,2$$

$\Rightarrow h$ = 268,6 m

Ejemplo 18. Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra, desde la misma altura se lanza una segunda piedra 2 s más tarde con una rapidez de 30 m/s. Si ambas golpean el piso simultáneamente. Encuentre: La altura del acantilado.
Solución.
$y_1 = h - 5t^2$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2$
Siendo al mismo tiempo
$y_1 = h - 5t^2 = 0$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2 = 0$
De aquí t = 4 s;
h = 80m

Ejemplo 19. Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 m/s. Calcule:
a) El tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de 2,5 m/s.
b) La distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.
Solución.

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt \quad (2)$$

a) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$v_y = v_0 - gt_2 = -2,5$$

Restando obtenemos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0,5s$$

b) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$40 - gt_1 = 2,5$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{37,5}{9,8} = 3,83 \text{ s.}$$

Con t_1 en (1):

$$h = 40(3,83) - \frac{1}{2} g (3,83)^2 = 81,41 \text{ m.}$$

Con t_2 se obtiene la misma altura, porque es cuando la pelota está de bajada.

Ejemplo 20. Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3(s). Encuentre
a) la altura desde la cual se soltó.
b) El tiempo total de caída.
Solución.

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

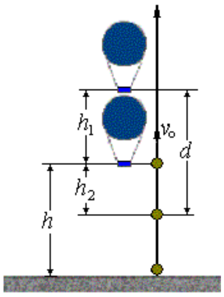
El tiempo en que alcanza h/2 es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que h = 0 es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la segunda parte de recorrido es

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 3 \Rightarrow h = 524,6 \text{ m}$$

b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{524,6}{5}}$ = 10,2 s

Ejemplo 21. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de 3 m/s; si llega al suelo a los 3 s, calcular:
a) Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
b) Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.



Solución. Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen direcci6n hacia arriba.
a)

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 3\text{m/s} \\ g \approx 10\text{m/s}^2 \\ t = 3\text{s} \end{array}\right\} \; y = h + 3t - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando la piedra toca suelo, $y = 0$
Luego

$$h = 3(3) - \frac{1}{2}10(3)^2$$
$$= 36 \text{ m}$$

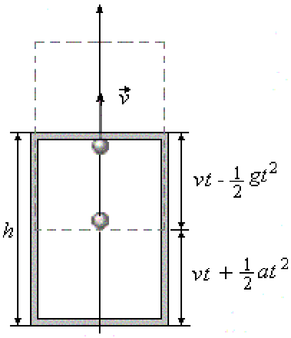
b)
$t' = 2$ s.

h_1: distancia al origen del globo en t'.
h_2: distancia al origen de la piedra en t'.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = v_0 t' = 3\times 2 = 6m \\ h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2}gt'^2 = 3\times 2 - \frac{1}{2}10\times 40 - 14m \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \; d = 6 + 14$$
$$= 20 \text{ m}$$

Ejemplo 22. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



Solución.
Primer método:
En el instante en que empieza a caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical hacia arriba *v*.

El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2}at^2\right)$$

(h = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba *v*. Aplicando la ecuación:

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

Siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{9{,}8+1}} = 0{,}74 \text{ s}$$

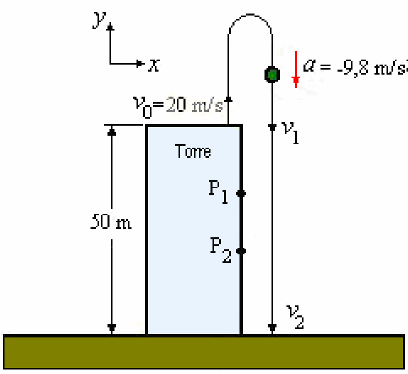
Segundo método:
La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:
$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10,\ 8$ m/s^2

$$h = \frac{1}{2}a_{BA}t^2 \;\Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{10{,}8}} = 0{,}74 \text{ s}$$

Ejemplo 23. Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s de la parte alta de una torre que tiene una altura de 50 m. En su vuelta pasa rozando la torre y finalmente toca la tierra.
a) ¿Qué tiempo t_1 transcurre a partir del instante en que la bola fue lanzada hasta que pasa por el borde de la torre? ¿Qué velocidad v_1 tiene en este tiempo?
b) ¿Qué tiempo total t_2 se requiere para que la bola llegue al piso? ¿Cuál es la velocidad v_2, con la que toca el piso?

c) ¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por la bola?
d) Los puntos P_1 y P_2 están a 15 y 30 m, respectivamente, por debajo del techo de la torre. ¿Qué tiempo se requiere para que la bola viaje de P_1 a P_2?
e) ¿Se desea que después de pasar el borde, la bola alcance la tierra en 3s, ¿con qué velocidad se debe lanzar hacia arriba de la azotea?



Solución.
a) Para el sistema de coordenadas mostrado en la figura, $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
Pero en el borde del techo $y = 0$, luego

$$0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2,$$

De la cual $t_1 = 0$, indica el instante en el cual la bola es lanzada, y también $t_1 = 4,08$ s, la cual es el tiempo en que la bola retorna al borde.
Luego, de $v = v_0 + at$

$v_1 = 20 + (-9,8)(4,08) = -20 \text{m/s}$, que es el negativo de la velocidad inicial.

b) $-50 = 20t_2 + \frac{1}{2}(-9,8)t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5,8\,\text{s}$

$$v_2 = 20 + (-9,8)(5,8) = -37\,\text{m/s}$$

c) Máxima altura sobre tierra: $h = y_{max} + 50$.
De $v_0^2 + 2ay_{max} = 0$, $\Rightarrow$

$$y_{max} = \frac{-(20)^2}{-2(9,8)} = 20,4\,\text{m}$$

Luego, $h = 70,4$ m.
d) Si t_1 y t_2 son los tiempos para alcanzar P_1 y P_2, respectivamente,

$$-15 = 20t_1 - 4,9t_1^2 \text{ y } -30 = 20t_2 - 4,9t_2^2$$

Resolviendo, $t_1 = 4,723$ s, $t_2 = 5,248$ s, y el tiempo de P_1 a P_2 es $(t_2 - t_1) = 0,525$ s.
e) Si v_0 es la velocidad inicial deseada, entonces $-v_0$ es la velocidad cuando pasa el borde. Luego aplicando $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ al viaje hacia abajo de la torre, encontramos:
$-50 = (-v_0)(3) - 4,9(3)^2$, $\Rightarrow$ $v_0 = 1,96$ m/s.

Ejemplo 24. Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0,420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1,90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?
Solución.
Si la velocidad de la maceta en la parte superior de la ventana es v_0, podemos encontrarla en función de la altura h de la ventana y el tiempo que tarda en pasarla::

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_0 = \frac{2h - gt^2}{2t}$$

Luego: $v_0 = \dfrac{2(1,90) - (9,8)(0,42)^2}{2(0,42)} = 2,47\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

La distancia y desde la azotea al borde superior de la ventana es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2,47^2}{2(9,8)} = 0,311\,\text{m}$$

Otra forma de encontrar la distancia es: como $t = 0,420$ s es la diferencia entre los tiempos tomados en caer la las alturas $(y + h)$ e y, tenemos

$$t = \sqrt{\frac{2(y+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{gt^2}{2}} + \sqrt{y} = \sqrt{y+h}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} + y = y + h$$

$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} = h$$

Resolviendo para y:

$$y = \frac{1}{2g}\left(\frac{2h - gt^2}{2t}\right)^2$$

Con los datos

$$y = \frac{1}{2(9,8)}\left[\frac{2(1,9) - (9,8)(0,42)^2}{2(0,42)}\right]^2 = 0,311\,\text{m}$$

Ejemplo 25. Malabarismo. Un malabarista actúa en un recinto cuyo cielorraso está 3,0 m arriba del nivel de las manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo.
a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo?
En el instante en que la primera pelota está en el cielorraso, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras parte de la velocidad inicial de la primera.

c) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan las dos pelotas en el aire? d) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas

Solución.

a) Tomemos el sentido positivo hacia arriba.

Tenemos que $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

En el cielorraso, $v_y = 0$, $y - y_0 = 3{,}0\ \text{m}$.

Luego: $0 = v_{0y}^2 - 2(9{,}8)(3) \Rightarrow v_{0y} = 7{,}7\ \text{m/s}$.

b) También tenemos:

$v_y = v_{0y} - gt = 0 = 7{,}7 - 9{,}8t$

$\Rightarrow t = 0{,}78\ \text{s}$.

c) Tomemos el sentido positivo hacia abajo.

La primera bola viaja hacia abajo una distancia d en el tiempo t. Como comienza desde su máxima altura, $v_{0y} = 0$.

$d = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow d = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$

La segunda bola tiene

$v'_{0y} = \frac{1}{3}(7{,}7\ \text{m/s}) = 5{,}1\ \text{m/s}$.

En el tiempo t habrá viajado hacia arriba $(3{,}0\ \text{m} - d)$ y estará en el mismo lugar que la primera bola. $(3 - d) = v'_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2$

$(3 - d) = 5{,}1t - 4{,}9t^2$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviéndolas obtenemos:

$t = 0{,}59\ \text{s}$ y $d = 1{,}7\ \text{m}$.

d) $3{,}0\ \text{m} - d = 1{,}3\ \text{m}$

Ejemplo 26. Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura *H* sobre un césped crecido cuyas hojas miden *h*. Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo,

a) Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped.

b) Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped.

c) Dibuje las gráficas: *v-t* y *a-t* para el movimiento de la manzana.

Solución.

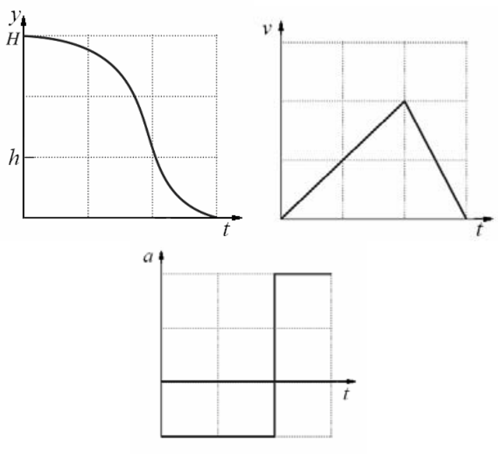
a) La rapidez de un objeto que cae una distancia H en caída libre una distancia $H - h$ es:

$v = \sqrt{2g(H - h)}$.

b) La aceleración para llevar a un objeto desde la rapidez v al reposo sobre una distancia h es:

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{2g(H - h)}{2h} = g\left(\frac{H}{h} - 1\right).$$

c)



Ejemplo 27. En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni los campeones pasan mucho más de 1,00 s en el aire ("tiempo de suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{máx}$ su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre $y_{máx}/2$ al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

Solución.

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}$ es:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_{máx}}{g}} = 1\ \text{s}.$$

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}/2$ es:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y_{máx}/2}{g}} = \sqrt{\frac{y_{máx}}{g}} = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{s}.$$

El tiempo debajo de $y_{máx}/2$ es $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, de tal manera que la razón entre el tiempo que está sobre la mitad de la altura máxima y el tiempo que está por debajo de la altura máxima es.

$$\frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2{,}4.$$

Esto explica porque el atleta parece estar suspendido en el aire.

Ejemplo 28. Un excursionista despierto ve caer un peñasco desde un risco lejano y observa que tarda 1,30 s en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire.

a) ¿Qué altura (en m) tiene el risco?

b) Si en (a) obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra?

Solución.

a) Sea h la altura y toma un tiempo t en caer:

$h = \frac{1}{2}gt^2$

Si tarda 1,30 s en caer el último tercio h:

$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-1{,}3)^2$

Eliminando h de estas dos ecuaciones obtenemos:

$\frac{1}{3}gt^2 = \frac{1}{2}g(t-1{,}3)^2$

$t^2 - 7{,}8t + 5{,}07 = 0$

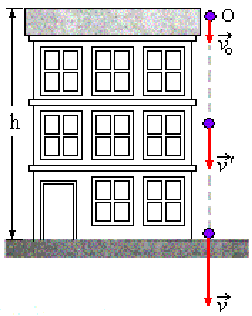
Resolviendo $t = 3{,}9 \pm 3{,}18 \begin{cases} t_1 = 7{,}08s \\ t_2 = 0{,}73s \end{cases}$

La primera es la solución correcta porque es mayor que 1,30 s,

$h = \frac{1}{2}(9{,}8)(7{,}08)^2 = 245{,}6\text{ m}$

b) Con la segunda solución para t encontramos h = 2,6 m. Esto correspondería a un objeto que estaba inicialmente cerca del fondo de este "acantilado" que era lanzado hacia arriba y tomando 1,30 s la subida a la cima y la caída al fondo. Aunque físicamente es posible, las condiciones del problema imposibilitan esta respuesta.

Ejemplo 29. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:
a) Velocidad con que llega al suelo.
b) Tiempo que tarda en llegar al suelo.
c) Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
d) Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado c).



Solución.
Tomamos corno origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical descendente. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$v = v_0 + gt$ $\quad v_0 = 10\text{ m/s}$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ $\quad g \approx 10\text{m/s}^2$

a) y b) $h = 60$ m

$v = 10 + 10t$

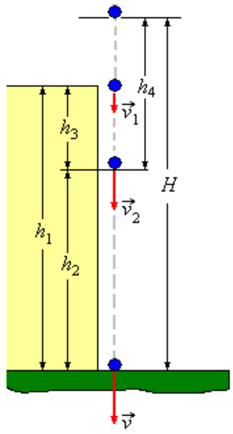
$60 = 10t + \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow \begin{matrix} t = 2{,}6\text{ s} \\ v = 36\text{m/s} \end{matrix}$

c) y d) $h' = 30$ m

$v' = 10 + 10t'$

$30 = 10t' + \frac{1}{2}10t'^2 \Rightarrow \begin{matrix} t' = 1{,}65\text{ s} \\ v' = 26{,}5\text{m/s} \end{matrix}$

Ejemplo 30. Una piedra que cae libremente pasa a las 10 horas frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las 10 horas 2 segundos frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Se pide calcular:
a) La altura desde la que cae.
b) En qué momento llegará al suelo.
c) La velocidad con que llegará al suelo.



Solución.

$h_1 = 300m$

$h_2 = 200m \qquad t_1 = 2\text{ s}$

$h_3 = 100m \qquad g \approx 10\text{m/s}^2$

a)

$v_2 = v_1 + gt_1 \Rightarrow v_2 = v_1 + 10\times 2$

$h_3 = v_1 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 100 = 2v_1 + \frac{1}{2}10\times 4$

$h_4 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h_4 = \frac{v_2^2}{2\times 10}$

$H = h_2 + h_4$

De aquí se obtiene $\begin{cases} v_1 = 40\text{m/s} \\ v_2 = 60\text{m/s}, \\ h_4 = 180\text{m} \end{cases}$

Finalmente $H = 200 + 180 = 380\text{m}$

b) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$

$\Rightarrow 300 = 40t_2 + \frac{1}{2}10t_2^2$

$\Rightarrow t_2 = 5s$

Luego llega al suelo a las 10 horas 5 segundos

c) $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\times 10\times 380}$
= 87 m/s

PROBLEMA INVERSO - CÁLCULO INTEGRAL

Conociendo la ley del movimiento $x = x(t)$ es posible sin mayores dificultades calcular $v(t)$ y $a(t)$ tal como fue mostrado

$$x(t) \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Como hemos visto, el cálculo diferencial proporciona la herramienta para determinar la velocidad y aceleración en cualquier instante del tiempo.

En esta sección veremos cómo el cálculo integral, que es el inverso del cálculo diferencial, puede utilizarse para deducir las fórmulas que ya hemos visto. Por ejemplo, hallar la posición de una partícula en un instante cualquiera, dado su velocidad inicial y su aceleración conocida.

Ya hemos demostramos que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al desplazamiento.

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

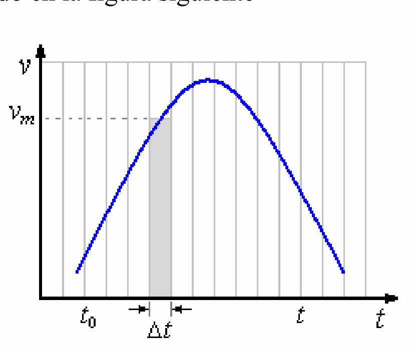
$$x - x_0 = v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

En el caso de un movimiento con velocidad constante el desplazamiento entre los tiempos t y t_0 es

$$x - x_0 = v_0(t-t_0)$$

o $\Delta x = v_0(t-t_0)$

Para un movimiento cualquiera con aceleración variable el diagrama velocidad-tiempo será el mostrado en la figura siguiente



Si descomponemos el tiempo total desde t_0 hasta t en segmentos pequeños Δt, entonces cada tramo vertical que baja desde la curva de velocidades hasta el eje de absisas tiene un área

$$\Delta A = v_m \Delta t$$

Donde v_m es la velocidad media del intervalo. Esta área corresponde al desplazamiento en ese intervalo que como se puede observar el área faltante se complementa con el excedente del otro lado.

El desplazamiento total para el intervalo $(t-t_0)$ es la suma de todas las áreas de todos los rectángulos de tal modo que:

$$\Delta x = \sum_i v_m(t_i)\Delta t$$

La regla para los tiempos es que $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

La distancia que obtenemos con este método no será la correcta porque la velocidad cambia durante el tiempo del intervalo Δt.

Si tomamos los intervalos muy pequeños la suma tiene mayor precisión. Así es que los hacemos tan pequeños a fin de tener una buena aproximación. Obtendremos la distancia real en el límite:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\Delta t$$

Obsérvese que hemos reemplazado la velocidad promedio v_m por la velocidad instantánea v, porque en el límite esta aproximación es válida.

Los matemáticos han inventado un símbolo para este límite, análogo al símbolo para la diferencial. El símbolo Δ se convierte en d, $v(t_i)$ se llama $v(t)$ y el símbolo sumatoria $\sum$ se escribe como una "s" grande $\int$ la cual se conoce el signo integral Luego escribimos

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

El proceso de integración es el inverso del proceso de derivación. Con un diferencial obtenemos una fórmula integral si la invertimos.

Ejemplo 31. Encontrar la velocidad de un móvil a partir de la aceleración.

Solución.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt = a\int_{t_0}^{t} dt$$

Integrando obtenemos

$$v - v_0 = a(t-t_0) \Rightarrow v = v_0 + a(t-t_0)$$

Para encontrar la posición

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t-t_0)]dt$$

Integrando obtenemos

$$x - x_0 = v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

También se puede encontrar la ecuación del movimiento expresando la integral de la siguiente manera:

$v = \int a dt + C_1$, $x = \int v dt + C_2$

Los valores de C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

Pequeña Tabla de Integrales
$\int dx = x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$
$\int \mathrm{sen}(ax) = \frac{\cos(ax)}{a}$
$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$

Ejemplo 32. Encontrar las ecuaciones del movimiento para una partícula que se mueve con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{i}$ y que para el tiempo inicial t_0 se encontraba en $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y tenía una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$.

Solución.

El movimiento es en el eje x.

La aceleración es $a = \frac{dv}{dt}$

La velocidad se puede encontrar en términos de una integral como

$v = \int a dt + C_1 \Rightarrow v = at + C_1$

Como para $t = t_0$ se tiene $v = v_0$, tenemos

$v_0 = at_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0 - at_0$

Reemplazando el valor de C_1 obtendremos la ecuación de la velocidad:

$v = v_0 + a(t - t_0)$

Ahora consideremos la definición de la velocidad

$v = \frac{dx}{dt}$

También se puede escribir en forma integral

$x = \int v dt + C_2$

Reemplazando el valor de v:

$x = \int [v_0 + a(t - t_0)] dt + C_2$

Integrando:

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + C_2$

Como para $t = t_0$ se tiene $x = x_0$, tenemos

$x_0 = v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2 - at_0^2 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2$

Reemplazando el valor de C_2 obtenemos

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + \left(x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2 \right)$

$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

Ejemplo 33. La aceleración de una motocicleta está dada por $a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2$, con t en s m/s^3. La moto está en reposo en el origen en $t = 0$.

a) Obtenga su posición y velocidad en función de t.

b) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

Solución.

a) Para encontrar $v(t)$.

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt = (1{,}5t - 0{,}12t^2) dt$

Integrando con $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$v = \int_0^t (1{,}5t - 0{,}12t^2) dt = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

Para encontrar $x(t)$.

$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

$\Rightarrow dx = (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3) dt$

Integrando con $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$x = \int_0^t (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3) dt = 0{,}25t^3 - 0{,}10t^4$

b) Para que la velocidad sea máxima la aceleración debe ser cero,

$$a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1{,}5}{0{,}12} = 12{,}5 s \end{cases}$$

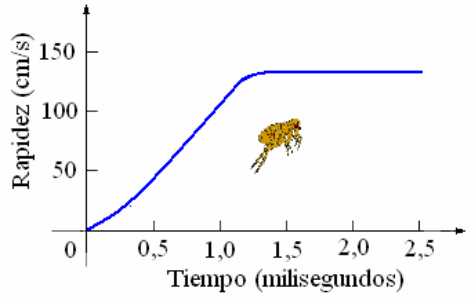
Para $t = 0$ la velocidad es mínima

Para $t = 12{,}5$ la velocidad

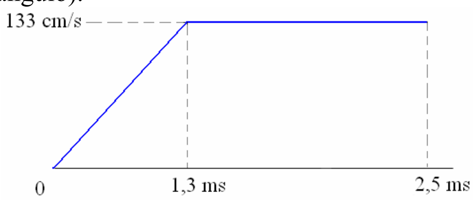
$v = 0{,}75(12{,}5)^2 - 0{,}40(12{,}5)^3 = 39{,}1$ m/s

Ejemplo 34. Salto volador de la pulga. Una película tomada a alta velocidad por M. Rothschild, Y. Schlein. K. Parker, C. Neville y S. Sternberg (3500 cuadros por segundo, “The Flying Leap of the Flea”, en el ScientificAmerican de noviembre de 1973) de una pulga saltarina de 210 μg produjo los

datos que se usaron para dibujar la gráfica de la figura. La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas.
a) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta.
b) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2,5 ms.
c) Determine la aceleración de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.
d) Calcule la altura de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.



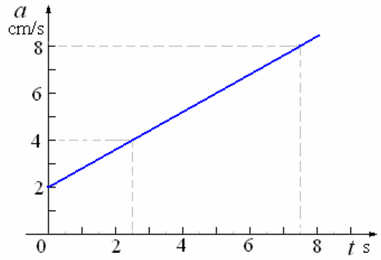
Solución.
a) Pendiente de $a = 0$ para $t \geq 1{,}3$ ms
b) La altura máxima corresponde al recorrido hasta cuando la aceleración se hace cero y llega al tiempo t = 2,5 ms, y es el área bajo la curva v versus t. (Dibujado aproximándolo a Un triángulo y un rectángulo).



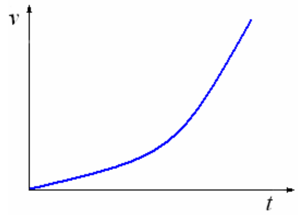
$$h_{\max} = \text{área bajo } (v - t)$$
$$\approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$\approx \frac{1}{2}[(1{,}3)(133) + (2{,}5 - 1{,}3)(133)]10^{-3}$$
$$\approx 0{,}25 \text{ cm}$$

c) a = pendiente del gráfico v– t.
$$a(0{,}5 \text{ ms}) \approx a(1{,}0 \text{ ms})$$
$$\approx \frac{133}{1{,}3 \times 10^{-3}} = 1{,}0 \times 10^{5} \text{ cm/s}^2$$
$a(1{,}5 \text{ ms}) = 0$ porque la pendiente es cero.
d) h = área bajo el gráfico v– t.
$$h(0{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(0{,}5 \times 10^{-3})(33)$$
$$= 8{,}3 \times 10^{-3} \text{ cm}$$
$$h(1{,}0) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(1{,}0 \times 10^{-3})(100)$$
$$= 5{,}0 \times 10^{-2} \text{ cm}$$
$$h(1{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}3 \times 10^{-3})(133) + (0{,}2 \times 10^{-3})(133)$$
$$= 0{,}11 \text{ cm}$$

Ejemplo 35. La gráfica de la figura describe, en función del tiempo, la aceleración de una piedra que baja rodando por una ladera, habiendo partido del reposo.
a) Determine el cambio de velocidad de la piedra entre t = 2,5 s y t = 7,5 s.
b) Dibuje una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.



Solución.
a) $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$
Como $a(t)$ es la ecuación de la recta:
$$\frac{a-2}{t-0} = \frac{8-4}{7{,}5-2{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow a = 0{,}8t + 2$$
$$dv = (0{,}8t + 2)dt$$
Integrando: $\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} (0{,}8t + 2)dt$
$$\Rightarrow v - v_0 = 0{,}4(t^2 - t_0^2) + 2(t - t_0)$$
Con $t_0 = 2{,}5s$, $t = 7{,}5s$, y $\Delta v = v - v_0$:
$$\Delta v = 0{,}4(7{,}5^2 - 2{,}5^2) + 2(7{,}5 - 2{,}5)$$
$$= 30\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Otra manera de encontrar el cambio de velocidad es encontrando el área bajo la curva a versus t, entre las líneas en $t = 2{,}5$s y $t = 7{,}5$s. El área es:
$$\tfrac{1}{2}(4+8)(7{,}5-2{,}5) = 30\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Como la aceleración es positiva, el cambio de velocidad es positivo.
b)



Ejemplo 36. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada, en el SI por la ecuación: $v = 40 - 8t$. Para t = 2 s, el punto dista del origen 80 m. Determinar:

a) La expresión general de la distancia al origen.
b) El espacio inicial.
c) La aceleración.
d) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?
e) ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
f) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s y $t = 15$ s.

Solución.

a) $s = \int v dt = \int (40 - 8t) dt = 40t - 4t^2 + C$

$\Rightarrow \ s = s_0 + 40t - 4t^2$

b) $80 = s_0 + 80 - 16 \ \Rightarrow \ s_0 = 16$

c) $a = \dfrac{dv}{dt} = -8 \dfrac{m}{s^2}$

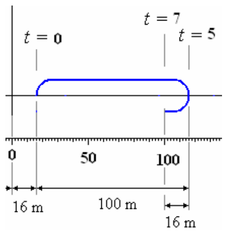
d) $0 = 40 - 8t \ \Rightarrow \ t = 5$ s

e) $s_5 = 16 + 40x5 - 4x5^2 = 116$ m

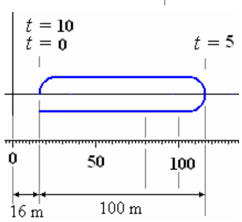
f) $s_7 = 16 + 40x7 - 4x7^2 = 100$ m
$s_{10} = 16 + 40x10 - 4x10^2 = 16$ m
$s_{15} = 16 + 40x15 - 4x15^2 = -284$ m

Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$:
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$s
El recorrido en los 5 primeros segundos es:
$C_5 = s - s_0 = 116 - 16 = 100$ m
A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, en valor absoluto, entre los limites $t = 5$ s y t = instante final.

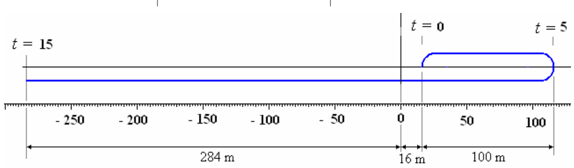
$$C_7 = 100 + \left| \int_5^7 (40 - 8t) dt \right| = 116 \text{m}$$



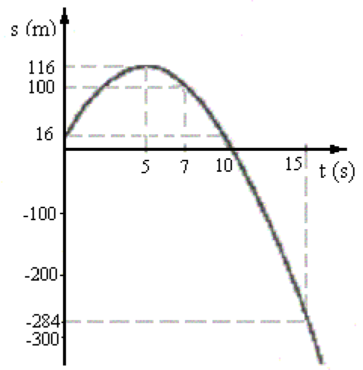
$$C_{10} = 100 + \left| \int_5^{10} (40 - 8t) dt \right| = 200 \text{m}$$



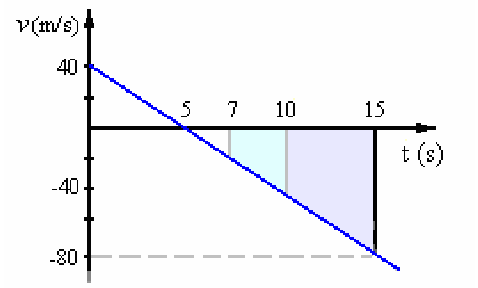
$$C_{15} = 100 + \left| \int_5^{15} (40 - 8t) dt \right| = 500 \text{m}$$



Representación gráfica de la distancia al origen en función del tiempo



Representación gráfica de la velocidad origen en función del tiempo



En la gráfica de la velocidad frente al tiempo, el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica entre dos instantes coincide numéricamente con el camino recorrido por el móvil entre esos dos instantes.

Ejemplo 37. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por

$\vec{v} = (3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Si la posición del móvil en el instante $t = 1$ s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 2$ s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v_x = \dfrac{dx}{dt} \ \Rightarrow \ dx = v_x dt$, integrando

$$\int_3^t dx = \int_1^t (3t-2)dt$$

$$\Rightarrow \; x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $\Rightarrow$ $dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^t dy = \int_1^t (6t^2 - 5)dt \quad \Rightarrow$$

$$y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{\imath} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{\jmath}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 12t\hat{\jmath}$

c) Para $t = 2$ s

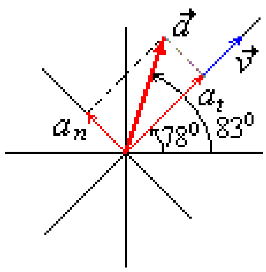
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\text{m/s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \;\Rightarrow\; \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \;\Rightarrow\; \theta = 83^o$$



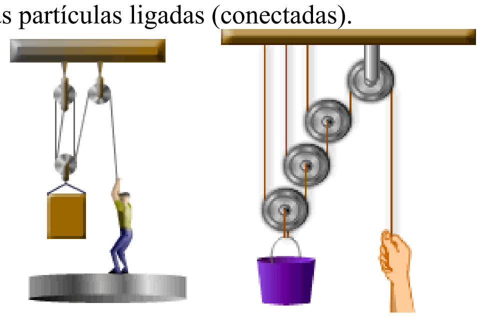
$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\text{m/s}^2$$

$$a_n = a\,\text{sen}(\theta - \varphi) = 2\text{m/s}^2$$

CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS LIGADAS. MOVIMIENTOS DEPENDIENTES.

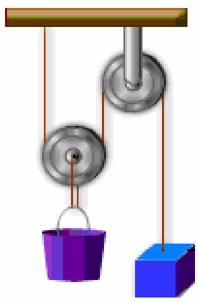
Observemos los sistemas físicos de la figura.

Podríamos decir que estos sistemas se componen de varias partículas ligadas (conectadas).

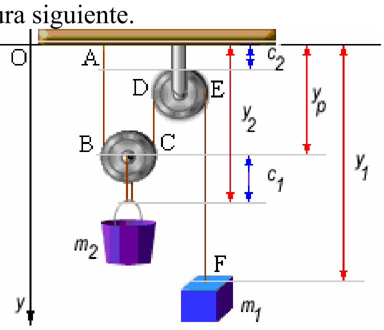


Las partículas podrían ser las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes). La ligadura la tienen a través de las cuerdas. Es decir, cuando el hombre desplaza el extremo de la cuerda con una aceleración *a*, la aceleración de las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes) tendrán una dependencia de *a*. Lo mismo se cumplirá para las otras variables cinemáticas (desplazamiento y velocidad).

Ejemplo 38. Análisis del montaje de la figura siguiente.



Para analizar las relaciones que hay entre las variables cinemáticas del bloque m_1, del balde m_2 y de la polea móvil, debemos primero saber cuáles son sus posiciones. Para ello elegimos un sistema de coordenadas. En nuestro caso elegimos el eje *y* apuntando hacia abajo y con el origen en el techo. Para el sistema de coordenadas escogido las posiciones del bloque, del balde y de la polea son respectivamente: y_1, y_2, y_p. Estas se representan en la figura siguiente.



La longitud de la cuerda debe permanecer constante en todo instante. Por tanto debe ser siempre válida la siguiente relación:
Longitud de la cuerda = constante
AB + arco BC + CD +arco DE +EF = constante
De la figura podemos concluir que las siguientes relaciones son válidas:

$$\mathrm{AB} = y_p$$

$$\mathrm{CD} = y_p - c_2$$

$$\mathrm{EF} = y_1 - c_2$$

Por tanto,

$$y_p + \mathrm{arcoBC} + (y_p - c_2) + \mathrm{arcoDE} + y_1 = \text{constante}$$

Como los arcos BC y DE permanecen constantes podremos escribir la relación anterior así:

$$2y_p + y_1 = k \qquad (1)$$

Siendo k una constante.
Esta ecuación relaciona las variables cinemáticas de la polea móvil y del bloque.
Si el bloque se desplaza una cantidad Δy_1 y la polea en una cantidad Δy_p.
La nueva posición de la polea:

$$y_p + \Delta y_p,$$

La nueva posición del bloque: $y_1 + \Delta y_1$.
Sin embargo, la relación anterior debe seguir cumpliéndose:

$$2(y_p + \Delta y_p) + (y_1 + \Delta y_1) = k \quad (2)$$

Restando (1) de (2), obtenemos:

$$2\Delta y_p + \Delta y_1 = 0$$

$$\Delta y_p = -\frac{\Delta y_1}{2}$$

Por ejemplo, si el bloque baja 1,0 m, la polea solo sube 0,50 m. La polea solo se desplaza la mitad de lo que se desplaza el bloque.

Análogamente podríamos hacer un análisis para las aceleraciones, y concluiríamos que:

$$a_p = -\frac{1}{2} a_1$$

Es decir, si el bloque por ejemplo, baja con una aceleración igual a 2,0 m/s^2 , la polea subirá con una aceleración igual a 1,0 m/s^2 .

De esta figura también se deduce la siguiente relación entre la posición del balde y la posición de la polea móvil:

$$y_2 = y_p + c_1 \qquad (3)$$

Si el balde se desplaza una cantidad Δy_2, y la polea se desplaza una cantidad Δy_p.
El balde pasa a ocupar la posición: $y_2 + \Delta y_2$,
La polea pasa a ocupar la posición $y_p + \Delta y_p$.
Sin embargo, la relación anterior se debe seguir cumpliéndose.

$$(y_2 + \Delta y_2) = (y_p + \Delta y_p) + c_1 \quad (4)$$

Restando (3) y (4) obtenemos,

$$\Delta y_2 = \Delta y_p$$

Los desplazamientos de la polea y el balde son iguales.
Si dividimos la ecuación anterior por el intervalo de tiempo Δt obtenemos como se relacionan las velocidades: $v_2 = v_p$.
Las velocidades de la polea y del balde son iguales.
Lo mismo podremos concluir para las aceleraciones:

$$a_2 = a_p$$

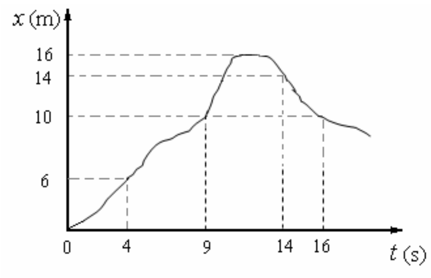
En definitiva si el bloque baja con una aceleración igual a 4 m/s^2, el balde y la polea móvil subirán con una aceleración igual a 2 m/s^2.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un acelerador atómico emite partículas que se desplazan con una rapidez de 2,8x10^8 m/s. ¿cuánto demoran estas partículas en recorrer una distancia de 5,6mm?
Respuesta
2x10^{-11} s.

2. Se desea calcular cuál es la profundidad de un lago, para tal efecto se usa un instrumento conocido como sonar que mide el tiempo que tarda un pulso sonoro en ir y volver desde la superficie del agua. Si se sabe que la rapidez del sonido en el agua es de 1450m/s y el instrumento marcó 0,042s cuando se hizo la medición, calcule la profundidad del lago.
Respuesta. 30,45m

3. Una cucaracha se desplaza en línea recta y su posición con respecto al tiempo se expresa de acuerdo al siguiente gráfico. De acuerdo a la información dada se pide calcular.
a) distancia recorrida entre 4s y 9 s
b) distancia recorrida entre 9 s y 14s
c) distancia recorrida entre 0 y 16s.
d) velocidad media entre 0s y 16s.
e) velocidad media entre 9s y 16s.



Respuesta
a) 4m b) 8m c) 22m d) 5/8 m/s e) 0

4. Un hombre camina con una velocidad $\vec{v}$ constante pasa bajo un farol que cuelga a una altura *H* sobre el suelo. Encontrar la velocidad con la que el borde de la sombra de la cabeza del hombre se mueve sobre la tierra. El alto del hombre es *h*.
Respuesta

$$\frac{H\vec{v}}{H-h}$$

5. Un tren arranca en una estación y acelera uniformemente a razón de 0,6 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 24 m/s. Determinar el tiempo empleado y la distancia recorrida en ese período si la velocidad media fue: a) 16 m/s, b) 22m/s.
Respuesta
a) 60s, 960m, b) 240s, 5280m

6. Un ciclista recorre 100 km en 2 horas. El viaje de vuelta dos días más tarde lo realiza en el tiempo usual de 6 horas.
a) ¿Cuál es su rapidez media a la ida?
b) ¿Cuál es su rapidez media al regreso?
c) ¿Su rapidez media en e¡ viaje completo?
d) ¿Su velocidad media en e} viaje entero?
Respuesta. a) 50 km/h , b) 16,7 km/h
c) 25 km/h d) 0

7. Un automóvil que viaja con una velocidad de 50 km/h hacia el oeste repentinamente empieza a perder velocidad a un ritmo constante y 3 segundos más tarde su velocidad es de 25 km/h hacia el oeste.
a) ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse el auto, contando a partir del momento en que empezó a desacelerar?
b) ¿Cuál es la distancia total que recorrerá antes de detenerse?
c) ¿Cuál sería el tiempo necesario para detenerse y la distancia recorrida el) la frenada con la misma aceleración, pero con una velocidad inicial de 100 km/h?
Respuesta. a) t = 6s ; b) 41,7m ; c) 125; 125m

8. La aceleración de una partícula está dada por:
$a = 4t - 4t^3$, $t \geq 0$.
a) Hallar la velocidad de la partícula en función del tiempo.
b) Hallar su posición en función del tiempo.
Respuesta
a) $v = 2t^2 - t^4$; b) $x = 2 + 2t^3/3 - t^5/5$

9. El movimiento de una partícula se define mediante la relación $x = t^3/3 - 3t^2 + 8t + 2$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos. Determinar
a) el momento en que la velocidad es nula;
b) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es nula.
Respuesta
a) 2s, 4s; b) 8m, 7,33m

10. El movimiento de una partícula está dado por la ecuación horaria $x = t^3 + 4t^2 + 5x$ sobre el eje *x*, *x* en metros *t* en segundos.
a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante *t*.
b) Encontrar la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula para t_0 = 2s y t_1 = 3s.
c) ¿Cuáles son la velocidad media y la aceleración media de la partícula entre t_0 y t_1?
Respuesta.
a) $v = (3t^2 + 8t)$m/s , a = (6t + 8) m/s^2
b) x_0 = 29m, v_0 = 27 m/s, a_0 = 20 m/s^2
x_1 = 68 m v_1 = 51 m/s, a_1 = 26 m/s^2
c) v_m = 39 m/s , a_m = 23 m/s^2

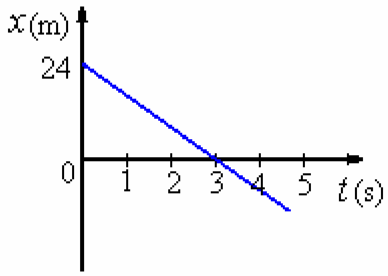
11. La posición de una partícula que se mueve en el eje *x* está dada por 8 *t* + 5, *x* es la distancia a origen en metros y *t* es el tiempo en segundos.
a) Para *t* = 2, encontrar la posición, velocidad y aceleración
b) Grafique *x* versus *t*
c) Encuentre la ley horaria, la ley del movimiento y la trayectoria.
d) Analizar el movimiento.
Respuesta. a) *x* = -3, *v* = 0 , *a* = 4
b) $s = 2t^2 - 8t + 5$, $\vec{r} = (2t^2 - 8t + 5)\hat{i}$
Trayectoria rectilínea en el eje *x*.

12. Un automóvil se encuentra detenido frente a un semáforo, le dan luz verde y arranca de modo que a los 4s su rapidez es de 72 km/hora. Si se movió en trayectoria rectilínea, con aceleración constante,
I.- Determine:
a) La rapidez inicial en metros por segundo.
b) El módulo de la aceleración en ese tramo.
c) La rapidez que lleva a los 3s.
d) La distancia que recorre en los tres primeros segundos
e) La distancia que recorre entre *t* = 2s y *t* = 4s.
II.- Haga un gráfico representativo de posición versus tiempo y de la rapidez versus tiempo.

Respuesta. a) 20m/s b) 5 m/s^2 c) 15m/s
d) 22.45m e) 30m

13. Una partícula **A**, se mueve en el eje X, de acuerdo a la siguiente gráfica.
Determinar a partir del gráfico de la partícula:

a) Velocidad media entre t = 0 y t = 4 s
b) Velocidad instantánea en t = 2 s
c) Aceleración media entre t = 0 y t = 4 s
d) Intervalos de tiempo en que se acerca al origen
e) Intervalos de tiempo en que se aleja del origen
f) Ecuación Itinerario de la partícula A
g) ¿Qué tipo de movimiento tiene esta partícula?



Respuesta. a) (-8;0)m/s b) (-8;0)m/s c) 0
d) (0-3)s e)(3-....) f) $x(t) = 24 - 8t$
g) Movimiento rectilíneo uniforme.

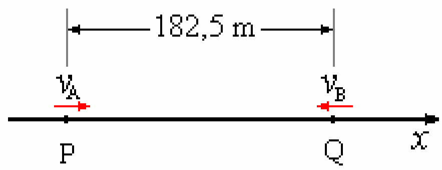
14. Un vehículo se mueve en el eje *x* de acuerdo con la siguiente ecuación de itinerario:
$x(t) = 20 - 36t + 6t^2$. Con *x* medido en metros y *t* en segundos.
a) Identifique a posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración.
b) Determine la ecuación que entregue la velocidad para cualquier instante.
c) Determine el instante en que cambia de sentido
d) La velocidad de la partícula en *t* = 2 s y en *t* = 4 s
e) Posición de la partícula en t = 6 segundos
f) Gráfico *x* versus *t*. Describa la curva
g) Gráfico v_x versus *t*. Describa la curva
h) Gráfico *a* versus *t*. Describa la curva
Respuesta. a) (20,0)m (-36,0)m/s (12,0)m/s^2 b) $v(t) = -36 + 12t$ c)3s
d) (-12,0)m/s (12,0)m/s e) (20,0)m

15. Se lanza un cuerpo hacia arriba con una rapidez de 16m/s,
a) ¿Qué altura alcanza a subir?
b) ¿Qué tiempo demora en volver al punto de partida?
Respuesta. a) 3,2m b) 6,4s

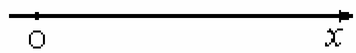
16. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal; parte hacia la derecha desde un punto A con una rapidez de 28 (m/s) y una retardación constante de módulo 12(m/s^2). En el punto B, es donde se anula su rapidez, invierte el sentido de movimiento para retornar hacia A con una aceleración constante de módulo 6(m/s^2). Calcular:
a) La distancia total cubierta hasta que la partícula retorne al punto A.
b) El tiempo total para el recorrido completo hasta volver a dicho punto A.
c) El intervalo de tiempo que transcurre entre los pasos de la partícula por el punto situado a 1/3 de AB, medido desde A.

17. Desde una altura de 45m se deja caer un objeto A. simultáneamente se lanza un objeto B verticalmente desde una altura de 5m. Calcular:
a) la velocidad inicial de B para que los objetos se crucen a una altura de 20m.
b) la distancia que separa a los objetos cuando B alcanza su altura máxima.

18. Sobre un mismo eje *x* se mueven dos partículas A y B. En *t* = 0 la partícula A parte desde P con aceleración constate de $15\hat{i}$ (m/s^2). Un segundo después, B pasa por Q con una velocidad de $-20\hat{i}$ (m/s). Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente antes de chocar.

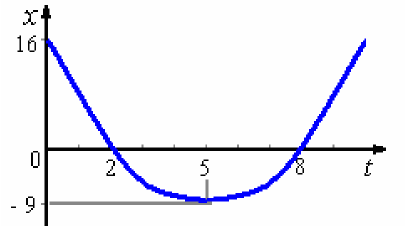


19. Una partícula se mueve a lo largo del eje *x* con aceleración constante. En *t* = 0 pasa por la posición $\vec{x}_0 = -10\hat{i}$ m con una velocidad $\vec{v}_0 = -20\hat{i}$ m/s y en *t* =3s su posición es $\vec{x} = -52\hat{i}$ m. Calcule:
a) La ecuación itineraria de la partícula
b) La distancia recorrida en el intervalo (3-6) s.
c) La velocidad media en el intervalo (4-7) s.
d) Intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen del sistema.

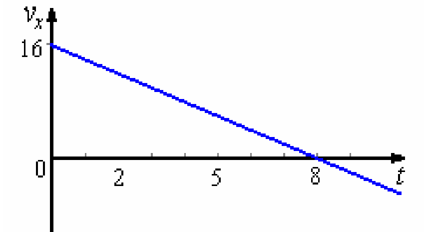


20. Sobre el eje x de un sistema de coordenadas se mueven dos partículas A y B. El gráfico (a) es una parábola cuadrática que muestra la variación de la componente *x* de la posición en función del tiempo de la partícula A. El gráfico (b) muestra la variación de la componente v_x de la velocidad en función del tiempo de la partícula B. Si en *t* = 0, ambas partículas tienen la misma posición, determinar:
a) Ecuación horaria de las partículas A y B.

b) Posición de B cuando A cambia de sentido de movimiento.
c) Instante en que se encuentran.
d) Distancia recorrida por A y B entre 3 y 9 s.

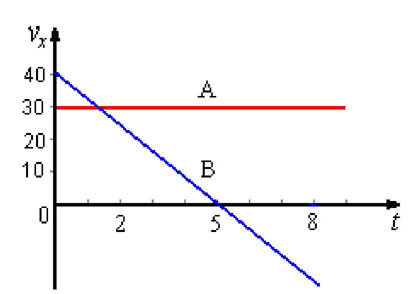


(a)

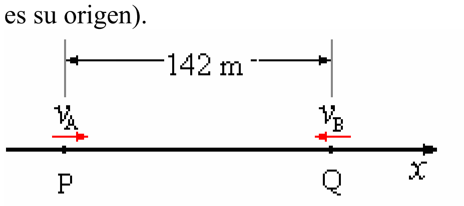


(b)

21. En el gráfico de la figura están representadas la componente v_x del vector velocidad de dos partículas, A y B, que se mueven a lo largo del eje *x* Calcular:
a) La aceleración de B.
b) Camino recorrido por A y B cuando B alcanza la velocidad $\vec{v}_B = 30\hat{i}$ m/s.
c) Desplazamiento de B en el intervalo (0-10)s.
d) Ecuación horaria de A si en $t_0 = 0$ su posición es $\vec{x}_0 = 8\hat{i}$ m.

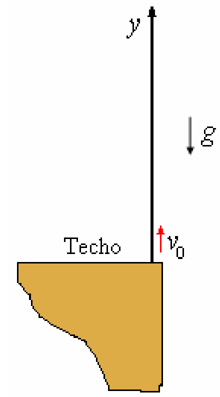


22. Dos partículas A y B se mueven sobre el mismo eje *x*. En *t* = 0, B pasa por Q con m/s $\vec{v}_B(0) = (-5,0)$ m/s y 2s después A pasa por P a $6\hat{i}$ m/s. Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente justo antes de chocar. Determine la ecuación itinerario de A y B (diga cuál es su origen).



23. Un cuerpo que se ha dejado caer desde cierta altura, recorre 72 m en el último segundo de su movimiento.
Calcule la altura desde la cual cayó el cuerpo y el tiempo que empleó en llegar al suelo.

24. Un hombre parado en el techo de un edificio tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14m/s. El cuerpo llega al suelo 4,7s más tarde.
a) Cuál es la máxima altura alcanzada por el cuerpo?
b) Qué altura tiene el edificio?
c) Con qué rapidez llegará el cuerpo al suelo?



25. Un malabarista mantiene cinco bolas continuamente en el aire, lanzando cada una de ellas hasta una altura de 3m.
a) ¿Cuál es el tiempo que debe transcurrir entre lanzamientos sucesivos?
b) ¿Cuáles son las alturas de las otras pelotas en el momento en que una de ellas vuelve a su mano?
Respuesta. a) 0,31s ;
b) 1,91; 2,87; 2,87 y 1,91 m.

26. Dos cuerpos son lanzados uno después de otro con las mismas velocidades v_0 desde una torre alta. El primer cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, y el segundo verticalmente hacia abajo después del tiempo τ . Determinar las velocidades de los cuerpos una con respecto al otro y las distancias entre ellos en el instante $t > \tau$.
Respuesta. La velocidad del primer cuerpo relativa al segundo es: $v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$.

La distancia es $S = 2v_0 t - v_0\tau - gt\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$