LA FORMULA DE INTERPOLACION DE STIRLING DEDUCIDA DE LA SERIE DE TAYLOR.

(Una lección de Cálculo Infinitesimal dictada en la Universidad Católica del Perú).

Por Cristóbal de Losada y Puga.

Conocidos los valores que toma una función f(x) para un cierto número de valores

$$x_a,\ x_b,\ x_c,\ \ldots, \qquad (1)$$

de la variable independiente, el problema de la interpolación se propone determinar el valor de f(x) para un valor de x comprendido entre dos cualesquiera de los valores (1). Esto se logra suponiendo reemplazada la función f(x) por una función fácil de calcular, que generalmente es un polinomio o una función trigonométrica.

Existen varias fórmulas de interpolación. En algunas de ellas se supone que los valores del argumento x para los cuales se conoce f(x) están en progresión aritmética; en otras se supone que son valores cualesquiera. Nosotros deduciremos la de Stirling (que supone que los valores del argumento están en progresión aritmética) presentándola como una aplicacion de la serie de Taylor.

Suponemos conocida una tabla de la función f(x), tal como la siguiente:

Tabla A

x	f(x)
$x_0 - 3h$	y_{-3}
$x_0 - 2h$	y_{-2}
$x_0 - h$	y_{-1}
x_0	y_0
$x_0 + h$	y_1
$x_0 + 2h$	y_2
$x_0 + 3h$	y_3
....	......

y deseamos conocer $f(x)$ estando x compren_ dida entre x_0 y x_0+h.

Desarrollando $f(x)$ en serie de Tay_ lor en las vecindades de x_0, tendremos:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \\ + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2.f''(x_0) + \\ + \tfrac{1}{6}(x - x_0)^3.f'''(x_0).$$

Despreciamos los términos que siguen a estos que hemos escrito, lo cual equivale a suponer que las derivadas cuarta y si_ guientes son nulas, o sea que $f(x)$ es un polinomio de tercer grado. Esto no quiere decir que así sea efectivamente, sino que, en las vecindades de cada valor de x que nos interese, podemos hacer coincidir sen_ siblemente la curva representativa de la función $f(x)$ con la curva representativa de un polinomio de tercer grado convenien_ temente elegido.

Ahora tratemos de calcular los valo_ res de $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$ a partir de los valores de la tabla A. Para ello forma_ remos una tabla de diferencias, escribiendo a la derecha y entre cada dos valores de y, su diferencia $\Delta^{(1)} = y_n - y_{n-1}$; a la derecha de la columna de estas diferencias primeras escribiremos la columna de las diferencias segundas, y a la derecha de esta la de las diferencias terceras: así formaremos la

TABLA B.

$x_o - 2h$	y_{-2}			
		$\Delta^{(1)}_{-2}$		
$x_o - h$	y_{-1}		$\Delta^{(2)}_{-1}$	
		$\Delta^{(1)}_{-1}$		$\Delta^{(3)}_{-1}$
x_o	y_o		$\Delta^{(2)}_{o}$	
		$\Delta^{(1)}_{1}$		$\Delta^{(3)}_{1}$
$x_o + h$	y_1		$\Delta^{(2)}_{1}$	
		$\Delta^{(1)}_{2}$		
$x_o + 2h$	y_2			

Con los elementos contenidos en esta tabla, podemos calcular $f'(x_o)$, $f''(x_o)$, $f'''(x_o)$.

Efectivamente, tendremos, suponiendo que $f(x)$ es asimilable a un polinomio de tercer grado:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y_{-2} = f(x_o - 2h) = ax_o^3 - 6ax_o^2h + 12ax_oh^2 - 8ah^3 + bx_o^2 - 4bx_oh + 4bh^2 + cx - 2ch + d$$

$$y_{-1} = f(x_o - h) = ax_o^3 - 3ax_o^2h + 3ax_oh^2 - ah^3 + bx_o^2 - 2bx_oh + bh^2 + cx - ch + d$$

$$y_o = f(x_o) = ax_o^3 + bx_o^2 + cx_o + d$$

$$y_1 = f(x_o + h) = ax_o^3 + 3ax_oh^2 + 3ax_o^2h + ah^3 + bx_o^2 + 2bx_oh + bh^2 + cx + ch + d$$

$$y_2 = f(x_o + 2h) = ax_o^3 + 6ax_o^2h + 12ax_oh^2 + 8ah^3 + bx_o^2 + 4bx_oh + 4bh^2 + cx + 2ch + d$$

$$\Delta_{-2}^{(1)} = y_{-1} - y_{-2} = 3ax_o^2h - 9ax_oh^2 + 7ah^3 + 2bx_oh - 3bh^2 + ch$$

$$\Delta_{-1}^{(1)} = y_o - y_{-1} = 3ax_o^2h - 3ax_oh^2 + ah^3 + 2bx_oh - bh^2 + ch$$

$$\Delta_1^{(1)} = y_1 - y_0 = 3ax_0^2h + 3ax_0h^2 + ah^3 + 2bx_0h + bh^2 + ch$$

$$\Delta_2^{(1)} = y_2 - y_1 = 3ax_0^2h + 9ax_0^2h + 7ah^3 + 2bx_0h + 3bh^2 + ch$$

$$\Delta_{-1}^{(2)} = \Delta_{-1}^{(1)} - \Delta_{-2}^{(1)} = 6ax_0h - 6ah + 2bh$$

$$\Delta_0^{(2)} = \Delta_1^{(1)} - \Delta_{-1}^{(1)} = 6ax_0h + 2bh$$

$$\Delta_1^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)} = 6ax_0h + 6ah + 2bh$$

$$\Delta_{-1}^{(3)} = \Delta_0^{(2)} - \Delta_{-1}^{(2)} = 6ah$$

$$\Delta_1^{(3)} = \Delta_1^{(2)} - \Delta_0^{(2)} = 6ah$$

Ahora bien, se comprende que $\frac{\Delta_1^{(1)}}{h}$ que es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dé un valor aproximado de la derivada $f'(x_0)$. Un valor más aproximado se obtendrá tomando la semisuma de los dos valores consecutivos de esta relación, a saber, $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1^{(1)}}{h} + \frac{\Delta_1^{(1)}}{h}\right)$. Pero un valor mucho más aproximado lo tendremos notando que

$$f'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c,$$

y que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{-1}^{(1)}}{h}+\frac{\Delta_{1}^{(1)}}{h}\right)= 3ax_o^2 + ah^2 + 2bx_o + c =$$

$$= f'(x_o) + ah^2 = f'(x_o) + \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^{(3)}}{h}$$

Si f(x) fuera efectivamente un polinomio de tercer grado, las diferencias terceras tendrían un valor constante; pero probablemente en la tabla B diferirán ligeramente una de otra: para mayor exac_ titud escribiremos la fórmula anterior así:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{-1}^{(1)}}{h}+\frac{\Delta_{1}^{(1)}}{h}\right)=f'(x_o)+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta_{-1}^{(3)}}{h}+\frac{\Delta_{1}^{(3)}}{h}\right)$$

de donde

$$f'(x_o)=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{-1}^{(1)}}{h}+\frac{\Delta_{1}^{(1)}}{h}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta_{-1}^{(3)}}{h}+\frac{\Delta_{1}^{(3)}}{h}\right)$$

Para la derivada segunda escribi_ remos

$$f''(x_o)=\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_o=\frac{\Delta_o^{(2)}}{h^2}$$

y en efecto hemos visto que

$$\frac{\Delta_o^{(2)}}{h^2}= 6ax_o + 2b = f''(x_o).$$

Para la derivada tercera podemos excribir:

$$f'''(x_0) = \left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)_0 = \frac{\Delta^{(3)}}{h^3}$$

y para mayor precisión tomaremos

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^{(3)}_{-1}}{h^3} + \frac{\Delta^{(3)}_{1}}{h^3}\right)$$

Poniendo estos valores en la igualdad (2), haciendo

$$\frac{x - x_0}{h} = n$$

y efectuando algunas transformaciones sencillas, tendremos

$$f(x) = f(x_0) + \frac{n}{2}\left[\Delta^{(1)}_{-1} + \Delta^{(1)}_{1} + n\Delta^{(2)}_{0} - \frac{1-n^2}{6}\left(\Delta^{(3)}_{-1} + \Delta^{(3)}_{1}\right)\right] \tag{3}$$

Tal es la fórmula de interpolación de Stirling llevada hasta las diferencias de tercer orden. Esta fórmula suele escribirse de modos más o menos diversos: la notación que hemos adoptado es la empleada en el Connaissance des Temps, y es muy cómoda para las aplicaciones.

Si las diferencias segundas son prácticamente constantes, y nulas las terceras, la fórmula se reduce a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{n}{2}\left[\Delta_{-1}^{(1)} + \Delta_{1}^{(1)} + n\Delta_{0}^{(2)}\right] \qquad (4)$$

Y si las diferencias primeras son sensiblemente constantes, podemos despreciar las segundas y no tomarnos ni siquiera la molestia de hallar la semisuma de las dos diferencias primeras consecutivas, escribiendo simplemente:

$$f(x) = f(x_0) + n\Delta^{(1)} \qquad (5)$$

La fórmula (5) corresponde a la interpolación lineal: es la que se aplica al emplear las tablas de logaritmos. La (4) corresponde a la interpolación cuadrática, y la (3) a la interpolación cúbica o de tercer orden. Por lo general no hay que acudir a las diferencias de cuarto orden; pero puede establecerse la fórmula de Stirling para diferencias hasta de un orden cualquiera m, sea basándose en la serie de Taylor, sea por la teoría de las diferencias.

Es innegable que el establecimiento de la fórmula de Stirling empleando el método de la teoría de las diferencias es el más simple; pero su demostración a partir de la serie de Taylor , aunque algo laboriosa, pone en evidencia la relación estrecha entre dos teorías del Análisis cercanamente emparentadas entre sí.

Cristóbal de Losada y Puga.