

ALGEBRA LINEAL Y MULTILINEAL

CUADRICAS Y TENSORES

josé tola pasquel

SEGUNDA
PARTE



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1989

A. Maddonadi.

ALGEBRA LINEAL Y MULTILINEAL
SEGUNDA PARTE

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

BIBLIOTECA

COMPRA

JOSE TOLA PASQUEL

ALGEBRA LINEAL Y MULTILINEAL
SEGUNDA PARTE
CUADRICAS Y TENSORES



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL 1989

Primera edición, enero de 1989

Cubierta: Víctor Cumpa

Algebra lineal y multilineal. Segunda parte



Copyright © 1988 por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria, cuadra 18. San Miguel. Apartado 1761. Lima, Perú. Tlfs. 626390, 622540, Anexo 220.

Derechos reservados

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN 84-89292-83-3

Impreso en el Perú - Printed in Peru

P R E F A C I O

No obstante que este libro fue escrito en 1976, al mismo tiempo que la primera parte, la cual fue publicada en 1978, y se hizo de él una primera edición manuscrita que tuvo difusión, exclusivamente, dentro de la Pontificia Universidad Católica, diversas circunstancias han dado lugar a que sólo haya sido posible publicarlo en el presente.

Las citas referentes a la primera parte están indicadas con la notación (**Parte I, etc.**)

Los ejercicios señalados con un asterisco (*) complementan el texto y ocasionalmente contienen proposiciones que son utilizadas en él.

Una tercera parte, esencialmente dedicada al Álgebra Exterior está próxima a ser publicada.

Lima, noviembre de 1988

José Tola

ALGEBRA LINEAL Y MULTILINEAL

Segunda parte

INDICE GENERAL

Capítulo I

Funciones bilineales simétricas. Cuádricas de los espacios afines reales y de los espacios euclidianos

§ 1. La topología natural de los espacios vectoriales reales de dimensión finita

- | | | |
|-----|--|---|
| 1.1 | La topología natural o standard de un espacio vectorial real de dimensión finita | 1 |
| 1.2 | Continuidad de las funciones p -lineales | 7 |

§ 2. Funciones bilineales simétricas y funciones cuadráticas

- | | | |
|-----|---------------------------------|----|
| 2.1 | Funciones bilineales | 11 |
| 2.2 | Funciones bilineales simétricas | 12 |
| 2.3 | Funciones cuadráticas | 18 |

2.4	Funciones bilineales simétricas definidas e indefinidas	25
2.5	Descomposición de un espacio vectorial de dimensión finita respecto de una función bilineal simétrica indefinida no degenerada	26
2.6	Descomposición de un espacio vectorial de dimensión finita respecto de una función bilineal simétrica indefinida degenerada	30
2.7	Índice y signatura de una función bilineal simétrica	32
2.8	Diagonalización de la matriz de una función bilineal simétrica	34
2.9	Ley de inercia de Sylvester	36
2.10	Determinación del índice y del rango de una función bilineal simétrica dada por su forma cuadrática	39

§ 3. Cuádricas en los espacios afines reales

3.1	Definición de las cuádricas	42
3.2	Espacios e hiperplanos tangentes a una cuádrica	47
3.3	Conos	59
3.4	Cuádricas con centro	70
3.5	Formas normales de las ecuaciones de las cuádricas de un espacio afín	77
3.6	Equivalencia afín de las cuádricas	86
3.7	Clasificación afín de las cuádricas	95
3.8	Clasificación afín de las cuádricas del plano	96
3.9	Clasificación afín de las cuádricas del espacio afín de tres dimensiones	97

§ 4. Cuádricas de los espacios euclídeos

4.1	Introducción	99
4.2	Vectores normales y normal a una cuádrica	101
4.3	Cuádricas con centro, en un espacio euclídeo	104
4.4	Cuádricas sin centro, en un espacio euclídeo	107
4.5	Equivalencia métrica de cuádricas de un espacio afín euclídeo	118
4.6	Clasificación métrica de las cuádricas de un espacio euclídeo	121
4.7	Formas normales de las ecuaciones de las cuádricas del plano y del espacio de tres dimensiones	130
4.8	Ejemplos	132

Capítulo II

Producto tensorial de espacios vectoriales

5. Producto tensorial. Tensores

5.1	Aplicaciones multilineales de espacios vectoriales	141
5.2	Producto tensorial de dos espacios vectoriales	144
5.3	Existencia del producto tensorial de dos espacios vectoriales	150
5.4	Propiedades elementales del producto tensorial de espacios vectoriales	154
5.5	Otras condiciones necesarias y suficientes para que el par (Z, φ) sea producto tensorial de U y V	158

5.6	Isomorfismos naturales de productos tensoriales de espacios vectoriales. Asociatividad del producto tensorial	173
5.7	Producto tensorial de un número finito cualquiera de espacios vectoriales	177
5.8	Existencia del producto tensorial de un número finito cualquiera de espacios vectoriales	179
5.9	Otras condiciones necesarias y suficientes para que el par (Z, φ) sea producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales	180
5.10	Propiedad asociativa general del producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales	182
5.11	Producto tensorial de aplicaciones lineales	188
5.12	Producto de Kronecker o producto tensorial de matrices	195
5.13	Traza de los endomorfismos de un espacio de dimensión finita	197
5.14	Componentes de un tensor del producto tensorial de espacios de dimensión finita	199
5.15	Producto tensorial de subespacios y de espacios cocientes	201
5.16	Imagen y núcleo del producto tensorial de dos aplicaciones lineales	205
5.17	Producto tensorial de aplicaciones y de funciones bilineales. Dualidad entre productos tensoriales de espacios vectoriales	209

6. Tensores afines sobre espacios de dimensión finita

6.1	Espacio tensorial afín. Tensores afines <u>contra</u> variantes y covariantes. Tensores mixtos	219
6.2	Componentes de los tensores afines	222
6.3	Convenio de sumación de Einstein	226

6.4	Criterios de tensorialidad	232
6.5	Operaciones en el conjunto de los tensores afines	239
6.6	Criterio general de tensorialidad	244
6.7	Tensores afines simétricos y antisimétricos	245

§ 7. Tensores euclidianos

7.1	Componentes contravariantes y covariantes de un vector de un espacio euclidiano. Vectores euclidianos	250
7.2	Tensores euclidianos. Diversas clases de componentes	254
7.3	Tensores euclidianos simétricos y antisimétricos	260
7.4	Tensores euclidianos referidos a bases ortonormales. Tensores cartesianos	261
7.5	El tensor fundamental o tensor métrico	262
7.6	Operaciones en el conjunto de los tensores euclidianos	266
7.7	El espacio $\otimes^p V = V \otimes \dots \otimes V$ (p factores) considerado como espacio euclidiano	269

§ 8. Algebra tensorial

8.1	Suma directa de espacios vectoriales	272
8.2	Suma directa de subespacios de un espacio vectorial	276
8.3	Subespacios complementarios	280
8.4	Dual de la suma directa de dos espacios	282
8.5	Producto de tensores sobre un espacio vectorial	284

8.6	Algebra tensorial de un espacio vectorial	286
8.7	Propiedad universal de $\otimes V$	290
8.8	Algebras tensoriales sobre un par de espacios duales	294
8.9	Tensores mixtos	296
8.10	La operación de contracción	298
8.11	Algebra tensorial mixta	300
8.12	Algebra tensorial sobre un espacio vectorial real, de producto interno y de dimensión finita	302
8.13	Algebra tensorial de las funciones multilineales sobre un espacio de dimensión finita y su dual	
8.13-A.	Introducción	303
8.13-B.	Producto tensorial de funciones multilineales definidas sobre los espacios duales V y V^* de dimensión n	305
8.13-C	Dualidad en los espacios de funciones multilineales	308
8.13-D	Algebras tensoriales de las funciones multilineales	310
	Indice de símbolos	313
	Indice	315

CAPITULO I

Funciones bilineales simétricas. Cuádricas de los espacios afines reales y de los espacios euclidianos

Los espacios vectoriales que vamos a considerar en el presente capítulo son exclusivamente reales y de dimensión finita.

§ 1. La topología natural de los espacios vectoriales reales de dimensión finita.

1.1 La topología natural o standard de un espacio vectorial real de dimensión finita.

Recordemos en primer lugar el concepto de topología inicial. Dado un conjunto M y una familia $\{E_i\}_{i \in I}$ de espacios topológicos, sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones $f_i : M \rightarrow E_i$. Se llama *topología inicial de M para la familia $\{f_i\}_{i \in I}$* a la topología menos fina de M para la cual son continuas todas las aplicaciones f_i , Las imágenes recíprocas por las aplicaciones f_i , de los abiertos de los espacios E_i , constituyen una subbase de la topología inicial, es decir que las intersecciones finitas de dichas imágenes recíprocas constituyen una base B de esa topología.

Sea ahora V un espacio vectorial real de dimensión n . Sean $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\mathcal{E}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ la base dual. Introduciremos las siguientes notaciones: dados un vector cualquiera $a = \sum_{i=1}^n a^i e_i$ y el número positivo δ , escribiremos

$$U_a(\delta) = \{x \in V \mid |x^i - a^i| < \delta, \quad i=1, \dots, n; \quad x = \sum_{i=1}^n x^i e_i\};$$

y dados un número real r y un número positivo ϵ , sea

$$I_r(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - r| < \epsilon\}.$$

Designemos por τ_I a la topología inicial de V para las funciones lineales e^1, \dots, e^n , las cuales, según sabemos, cumplen las condiciones

$$e^i(x) = \sum_{j=1}^n x^j e^i(e_j) = x^i \quad (\text{Ver Pte. I, §5}).$$

Teorema 1.1.1. Los conjuntos $U_a(\delta)$ constituyen una base de la topología τ_I .

Demostración. Basta probar que los conjuntos $U_a(\delta)$ son abiertos de τ_I y que dado un elemento cualquiera $a \in V$ perteneciente a un conjunto arbitrario U de la base B de τ_I , existe un conjunto

$$U_a(\delta) \text{ tal que } a = \sum_{i=1}^n a^i e_i, \quad e_i \in U_a(\delta) \subset U.$$

Se tiene en primer término

$$\begin{aligned} U_a(\delta) &= \bigcap_{i=1}^n \{x \in V \mid |x^i - a^i| < \delta\} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in V \mid e^i(x) \in I_{a^i}(\delta)\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n (e^i)^{-1}(I_{a^i}(\delta)). \end{aligned}$$

Ahora bien, los conjuntos $I_{a^i}(\delta)$ son abiertos de \mathbb{R} ; luego $U_a(\delta)$ será abierto de la topología τ_1 .

Sea ahora U un abierto de la base B de la topología τ_1 . Se tendrá que $U = \bigcap_{j=1}^p U_j$, donde $U_j = (e^{i(j)})^{-1}(W_j)$, en que los W_j son abiertos de \mathbb{R} . Si $a \in U$, se tendrá que $a \in U_j$ para $j=1, \dots, p$ y por tanto $e^{i(j)}(a) \in W_j$ para $j=1, \dots, p$, o sea $a^{i(j)} \in W_j$. Puesto que los W_j son abiertos de \mathbb{R} existirán los números positivos δ_j tales que $I_{a^{i(j)}}(\delta_j) \subset W_j$. Si $\delta = \min_{j=1, 2, \dots, p}(\delta_j)$, entonces $I_{a^{i(j)}}(\delta) \subset W_j$. Se tiene por consiguiente

$$\begin{aligned} x \in U_a(\delta) &\Rightarrow |x^{i(j)} - a^{i(j)}| < \delta, \quad \text{para } j=1, \dots, p \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^{i(j)} \in I_{a^{i(j)}}(\delta) \subset W_j \quad \text{para } j=1, \dots, p \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{i(j)}(x) \in W_j \quad \text{para } j=1, \dots, p \Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^p (e^{i(j)})^{-1}(W_j) = U. \end{aligned}$$

Es decir que $U_a(\delta) \subset U$ ■

Dado $a \in V$, los conjuntos $U_a(\delta)$ constituyen un *sistema fundamental de vecindades* de a en la topología τ_1 .

Teorema 1.1.2. La condición necesaria y suficiente para que una función $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua respecto de la topología τ_1 es que, dados $a \in V$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, exista $\delta > 0$ tal que

$$x \in U_a(\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (1.1.1)$$

Demostración. Esta proposición es consecuencia inmediata de que los conjuntos $U_a(\delta)$, para un vector dado a , constituyen un sistema fundamental de vecindades de a en la topología τ_1 , y que los intervalos abiertos $I_{f(a)}(\epsilon)$ constituyen un sistema fundamental

de vecindades de $f(a)$ en el espacio \mathbb{R} . Por tanto, la relación (1.1.1.), que puede escribirse en la forma

$$x \in U_a(\delta) \Rightarrow f(x) \in I_{f(a)}(\epsilon)$$

implica la continuidad de f en a en virtud de un conocido criterio ■

Designemos ahora por τ a la topología inicial de V para la familia de todas las funciones (reales) lineales definidas en V , es decir la topología menos fina para la cual son continuas todas las funciones que constituyen el espacio dual V^* de V .

Teorema 1.1.3. La topología inicial τ para las funciones lineales definidas en V es idéntica a la topología τ_I para las funciones e^1, \dots, e^n de una base cualquiera del espacio dual. Por tanto todas las funciones lineales definidas en V son continuas para la topología τ_I .

Demostración. Es evidente que $\tau_I \subset \tau$ por cuanto las funciones e^1, \dots, e^n son continuas respecto de la topología τ . Basta probar por tanto que $\tau \subset \tau_I$, es decir que toda función lineal f es continua en la topología τ_I .

Dado $\epsilon > 0$ puede elegirse un número $\delta > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)| \right) \delta < \epsilon.$$

Dado un vector cualquiera $a \in V$, si escribimos $a = \sum_{i=1}^n a^i e_i$ y

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i, \quad \text{se tiene que}$$

$$\begin{aligned}
 x \in U_a(\delta) &\Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x-a)| = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) f(e_i) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |x^i - a^i| |f(e_i)| < \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)| \right) \delta < \epsilon.
 \end{aligned}$$

El teorema 1.1.2 permite concluir que f es continua en la topología τ_I . ■

Una consecuencia de la proposición anterior es que la topología τ_I es independiente de la base (e_i) de V respecto de la cual fue definida. En particular, cada vecindad $U_a(\delta)$ obtenida a partir de una base, contiene a una vecindad de a del mismo tipo, obtenida a partir de otra base cualquiera.

Definición 1.1.1. Se llama *topología natural* o *standard* de un espacio vectorial real V de dimensión finita, a la topología inicial para la familia de todas las funciones lineales definidas sobre V . En virtud de los teoremas 1.1.1. y 1.1.3., dada una base cualquiera de V , los conjuntos $U_a(\delta)$ constituyen una base de la topología natural.

Consideremos ahora p espacios vectoriales V_1, \dots, V_p , de dimensiones finitas, en cada uno de los cuales suponemos introducida la topología natural. El producto cartesiano $V = V_1 \times \dots \times V_p$ puede considerarse entonces como un espacio topológico provisto de la topología producto de las topologías naturales, es decir la topología inicial para las p aplicaciones $\pi_i: V \rightarrow V_i$ definidas por las relaciones

$$\pi_i(x_1, \dots, x_p) = x_i.$$

Dado un elemento $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$, sea ahora

$$U_a(\delta) = \bigcap_{i=1}^p \pi_i^{-1}(U_{a_i}(\delta))$$

donde $U_{a_i}(\delta)$ es una vecindad de $a_i \in V_i$ relativa a la topología natural de V_i y para una base dada en este espacio.

Consideraciones como las empleadas en el teorema 1.1.1., pero en que las aplicaciones π_i deben cumplir el papel de las funciones e^i , permiten comprobar que los conjuntos $U_a(\delta)$ forman una base de la topología de V .

V es un espacio vectorial cuya dimensión es $\sum_{i=1}^p \dim V_i$, por tanto V admite una topología natural. Se prueba sin dificultad que los conjuntos $U_a(\delta)$ constituyen la base de dicha topología natural que, por tanto, coincide con la topología precedentemente definida. Resulta así que una función $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x_1, \dots, x_p) - f(a_1, \dots, a_p)| < \epsilon \quad \text{para } x_i \in U_{a_i}(\delta)$$

En adelante, en los espacios vectoriales de dimensión finita consideraremos la topología natural.

Ejercicio

*1.1.1 Una aplicación $t \rightarrow x(t)$ del intervalo $[t_0, t_1]$ en el espacio vectorial V de dimensión n , provisto de la topología natural es continua si para cada número $\tau \in [t_0, t_1]$ y cada abierto $U_{x(\tau)}(\epsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$[|\tau - t| < \delta \quad \text{y} \quad t_0 \leq t \leq t_1] \Rightarrow x(t) \in U_{x(\tau)}(\epsilon)$$

1.2 Continuidad de las funciones p-lineales.

Definición 1.2.1 Se dice que la aplicación

$$\Phi; V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow \mathbb{R},$$

donde V_1, \dots, V_p son espacios vectoriales de dimensión finita, es una *función p-lineal* si cumple la condición

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &= \alpha \Phi(x_1, \dots, x_p) + \beta \Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p), \end{aligned}$$

cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_j \in V_j$ para $j=1, \dots, p$, e $y_i \in V_i$. En particular, si $p=1$ se dice que Φ es una función *lineal* y si $p=2$ que es *bilineal*.

Teorema 1.2.1 Cada función Φ p-lineal es continua.

Demostración. Supongamos que $\{e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}\}$ es una base de V_i , y que

$$x_i = \sum_{k_i=1}^{n_i} \xi_{(i)}^{k_i} e_{k_i}^{(i)} \quad \text{y} \quad a_i = \sum_{k_i=1}^{n_i} \alpha_{(i)}^{k_i} e_{k_i}^{(i)}$$

Tendremos

$$\begin{aligned}
 & | \Phi(x_1, \dots, x_p) - \Phi(a_1, \dots, a_p) | \\
 & \leq \sum_{k_1, \dots, k_p} | \xi_{(1)}^{k_1} \dots \xi_{(p)}^{k_p} - \alpha_{(1)}^{k_1} \dots \alpha_{(p)}^{k_p} | | \Phi(e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}) |
 \end{aligned}$$

Ahora bien, la expresión que aparece en el segundo miembro de esta desigualdad es función continua de $\xi_{(1)}^{k_1}, \dots, \xi_{(p)}^{k_p}$ y se anula cuando $\xi_{(j)}^{k_j} = \alpha_{(j)}^{k_j}$. Luego puede escogerse $\delta > 0$ de modo que para

$$| \xi_{(i)}^{k_i} - \alpha_{(i)}^{k_i} | < \delta, \quad i = 1, \dots, p,$$

es decir para

$$x_i \in U_{a_i}(\delta)$$

y por tanto para $(x_1, \dots, x_p) \in U_{a_1}(\delta) \times \dots \times U_{a_p}(\delta)$, se cumple que

$$\sum_{k_1, \dots, k_p} | \xi_{(1)}^{k_1} \dots \xi_{(p)}^{k_p} - \alpha_{(1)}^{k_1} \dots \alpha_{(p)}^{k_p} | | \Phi(e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}) | < \epsilon,$$

y por consiguiente

$$| \Phi(x_1, \dots, x_p) - \Phi(a_1, \dots, a_p) | < \epsilon,$$

lo cual, en virtud de lo dicho al final de la sección 1.1, prueba la continuidad de Φ . ■

La proposición siguiente proporciona una nueva caracterización de la topología natural.

Teorema 1.2.2. La topología natural de un espacio vectorial de dimensión n es la única para la que se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. V es un espacio vectorial topológico, es decir que las operaciones $V \times V \rightarrow V$ y $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$ definidas por

$$(x, y) \rightarrow x+y \quad (1.2.1.)$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

son continuas cuando se considera en $V \times V$ y $\mathbf{R} \times V$ las topologías producto de las topologías naturales.

2. Las funciones lineales definidas en V son continuas.

Demostración. La topología natural cumple las condiciones del enunciado en virtud de la definición 1.1.1 y del teorema 1.2.1., por cuanto las aplicaciones $(x, y) \rightarrow x+y$ y $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ son bilineales.

Vamos a probar que la topología natural es la única que cumple las condiciones del enunciado. Supongamos que τ' sea una topología que cumple esas condiciones. Sea (e_1, \dots, e_n) una base de V y definamos las aplicaciones.

$$\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow V$$

$$\varphi^{-1}: V \rightarrow \mathbf{R}^n$$

tales que para

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

se tiene

$$\varphi(\xi^1, \dots, \xi^n) = x$$

y

$$\varphi^{-1}(x) = (\xi^1, \dots, \xi^n).$$

La continuidad de las aplicaciones $\xi^i \rightarrow (\xi^i, e_i)$ y $(\xi^i, x) \rightarrow \xi^i x$ respecto de la topología τ' , implica la continuidad de las aplicaciones, compuestas de ellas,

$$\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow V \quad (i = 1, \dots, n),$$

tales que $\varphi_i(\xi^i) = \xi^i e_i$. Luego la aplicación $\mathbb{R}^n \rightarrow V^n$ definida por

$$\bar{\varphi}(\xi^1, \dots, \xi^n) = (\varphi_1(\xi^1), \dots, \varphi_n(\xi^n))$$

será continua. Además, la continuidad de la aplicación $(x, y) \rightarrow x + y$ permite demostrar por inducción la continuidad de la aplicación $\chi: V^n \rightarrow V$ definida por

$$\begin{aligned} \chi(x^1, \dots, x^n) &= x^1 + \dots + x^n. \text{ Resulta así, puesto que} \\ \varphi(\xi^1, \dots, \xi^n) &= \xi^1 e_1 + \dots + \xi^n e_n = \chi(\varphi_1(\xi^1), \dots, \varphi_n(\xi^n)) \\ &= (\chi \circ \bar{\varphi})(\xi^1, \dots, \xi^n), \end{aligned}$$

que la función φ será continua respecto de la topología τ' .

La continuidad de φ y de φ^{-1} implica que φ es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre V y por consiguiente la topología τ de V coincide con la topología inducida en V por la topología de \mathbb{R}^n , mediante la biyección φ . Ahora bien dicha topología inducida es la topología natural porque las vecindades fundamentales

$$\{(x^1, \dots, x^n) \mid |x^i - a^i| < \delta\}$$

corresponden mediante φ con las vecindades $U_a(\delta)$ de la topología τ , donde $a = \varphi(a^1, \dots, a^n) = \sum_{i=1}^n a^i e_i$. Por consiguiente es $\tau = \tau'$. ■

La topología natural de los espacios euclidianos de dimensión finita puede expresarse mediante la norma como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. La topología natural de un espacio euclidiano de dimensión finita admite como base a las esferas.

$$S_a(\delta) = \{ x \in V \mid \|x - a\| < \delta \}$$

Demostración. Para demostrar que las esferas $S_a(\delta)$ constituyen la base de una topología basta probar que toda intersección finita de esferas es una reunión de esferas¹⁾. La demostración es sencilla y la dejamos al lector. La identidad de la topología cuya base es el conjunto de las esferas, con la topología natural, resulta de las relaciones

$$U_a(\delta/2) \subset S_a(\delta) \subset U_a(\delta). \quad \blacksquare$$

§ 2. Funciones bilineales simétricas y funciones cuadráticas.

2.1 Funciones bilineales.

Las funciones p -lineales fueron definidas mediante la definición 1.2.1. Para $p=2$ resultan, como entonces vimos, las funciones bilineales, que denotaremos de ordinario por una letra tal como Φ , y en ocasiones por $\Phi(x, y)$.

1) Ver por ejemplo Hocking y Young, Topology, Addison Wesley, (1961), pág.6.

Definición 2.1.1. Dada una función bilineal $\Phi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, se llaman *radical izquierdo* y *derecho* de Φ , respectivamente, a los subespacios $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$ dados por

$$K_1 = \{x \in U \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in V\}$$

$$K_2 = \{y \in V \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ para todo } x \in U\}$$

Definición 2.1.2. La función bilineal $\Phi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *no degenerada* cuando $K_1 = K_2 = \{0\}$. En caso contrario se llama *degenerada*.

Por consiguiente Φ es no degenerada si se cumplen las condiciones:

1. Si para un $x \in U$ es $\Phi(x, y) = 0$ para todo $y \in V$, entonces es $x = 0$.
2. Si para un $y \in V$ es $\Phi(x, y) = 0$ para todo $x \in U$, entonces es $y = 0$.

Definición 2.1.3. Una función bilineal $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *función bilineal* sobre V .

2.2 Funciones bilineales simétricas.

Una función bilineal $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sobre V se dice que es *simétrica* si satisface a la condición

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

Los radicales K_1 y K_2 de una función bilineal simétrica son idénticos. Los representaremos en adelante por K , y lo

llamaremos *núcleo* de Φ . Φ es entonces no degenerada cuando $K = \{0\}$. El núcleo de Φ se designa por $\text{Ker } \Phi$

Definición 2.2.1. Se llama *rango* de una función bilineal simétrica $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, donde V es un espacio de dimensión n , al número positivo

$$r = n - \dim K$$

donde K es el núcleo de Φ . Una función bilineal simétrica es no degenerada si su rango es n . Si su rango es cero, será idénticamente nula.

Sea Φ una función bilineal simétrica. Dada una base cualquiera (e_i) de V , sean $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n \eta^i e_i$ dos vectores arbitrarios de V . Se tiene entonces

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi^i \eta^j, \quad (2.2.1)$$

donde

$$\alpha_{ij} = \Phi(e_i, e_j) \quad (2.2.2)$$

El segundo miembro de la ecuación (2.2.1) es la *forma bilineal que representa a Φ respecto de la base (e_i)* . Los números α_{ij} dados por las fórmulas (2.2.2) son los *coeficientes* de la forma. La simetría de Φ implica que

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (2.2.3)$$

Definición 2.2.2. Se llama *matriz* de Φ relativa a una base (e_i) a la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

cuyos términos $\alpha_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$ son los coeficientes de la forma bilineal que representa a Φ respecto de la base (e_i) . Las matrices que representan a una forma bilineal simétrica son simétricas, en virtud de (2.2.3).

Teorema 2.2.1. Sea $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal simétrica sobre V , y designamos por V^* al espacio dual de V , es decir al espacio de las funciones lineales definidas en V . A Φ le corresponde una única transformación lineal $\varphi: V \rightarrow V^*$ tal que

$$\Phi(x, y) = \langle \varphi x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

La matriz de φ relativa a una base (e_i) de V y a la base dual (e^i) es idéntica a la matriz de Φ respecto de la base (e_i) ; por tanto dicha matriz es simétrica. Además el núcleo de φ coincide con el núcleo de K de Φ , es decir que

$$K = \text{Ker } \Phi = \text{Ker } \varphi ;$$

y el rango de Φ es igual al rango de φ o sea al rango de la matriz que le corresponde.

Observación: Se cumple que:

$$\langle \varphi x, y \rangle = \langle \varphi y, x \rangle$$

por cuanto

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$$

Demostración. Dada una base (e_i) de V , a cada transformación lineal

$$y \rightarrow \Phi(e_i, y)$$

le corresponde un vector $x_i^* \in V^*$ (ver Pte.I, corolario del teorema 5.3.1) tal que

$$\Phi(e_i, y) = \langle x_i^*, y \rangle, \quad \forall y \in V.$$

Por tanto, si $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$, se tendrá

$$\Phi(x, y) = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi^i x_i^*, y \right\rangle$$

Si definimos la transformación lineal $\varphi: V \rightarrow V^*$ por la fórmula

$$\varphi x = \sum_{i=1}^n \xi^i x_i^*,$$

se tendrá

$$\Phi(x, y) = \langle \varphi x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

La transformación lineal φ es única por cuanto, si $\varphi_1: V \rightarrow V^*$ es tal que

$$\Phi(x, y) = \langle \varphi_1 x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

entonces será

$$\langle \varphi x - \varphi_1 x, y \rangle = 0, \quad \forall x, y \in V,$$

y por tanto

$$\varphi x = \varphi_1 x, \quad \forall x \in V,$$

o sea

$$\varphi = \varphi_I$$

Si (e^i) es la base de V^* dual de (e_i) y escribimos

$$\varphi e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} e^k,$$

entonces es

$$\langle \varphi e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \langle e^k, e_j \rangle = \beta_{ij}$$

Ahora bien,

$$\langle \varphi e_i, e_j \rangle = \Phi(e_i, e_j) = \alpha_{ij};$$

luego se tiene

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij},$$

lo cual demuestra que la matriz (β_{ij}) de φ respecto de las bases (e_i) y (e^i) , duales, es igual a la matriz simétrica (α_{ij}) de Φ respecto de la base (e_i) .

El núcleo K de Φ coincide con el núcleo de φ , por cuanto, dado x , para que $\Phi(x, y)$ se anule para todo y es necesario y suficiente que sea $\varphi x = 0$, (Pte.I, condición E2 de la sección 4.2). Se tiene por consiguiente:

$$K = \text{Ker } \Phi = \text{Ker } \varphi$$

Entonces (ver Pte.I, (3.5.2), pág. 34).

$$\begin{aligned} \text{rango } \varphi &= \dim V - \dim \text{Ker } \varphi \\ &= \dim V - \dim K = \text{rango } \Phi. \end{aligned}$$

El rango de Φ será por tanto igual al rango de la matriz que representa a φ respecto de bases cualesquiera. Puesto que para bases elegidas como se vio precedentemente las matrices de Φ y de φ

son idénticas, podemos establecer que el rango de Φ es igual al rango de la matriz que le corresponde en una base cualquiera. ■

Corolario. Una función bilineal simétrica es no degenerada si y sólo si el determinante de su matriz (α_{ij}) es diferente de cero.

Demostración. Para que $K = \text{Ker } \Phi = \text{Ker } \varphi$ sea de dimensión 0 es necesario y suficiente que φ sea regular, es decir que el rango de su matriz (α_{ij}) sea igual a n . Para eso es necesario y suficiente que el determinante de dicha matriz sea diferente de cero. ■

Definición 2.2.3. Dada una función bilineal simétrica Φ , se llama *homomorfismo asociado* a ella, a la transformación lineal única $\varphi: V \rightarrow V^*$ tal que

$$\Phi(x, y) = \langle \varphi x, y \rangle ,$$

para la cual se cumplen por consiguiente las propiedades del teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.2. Si Φ es una función bilineal simétrica sobre V , y φ es su homomorfismo asociado, entonces el dual φ^* es idéntico a φ , lo que expresa diciendo que φ es *autodual*. Se tiene entonces que $\langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle$.

Demostración. Puesto que φ es una transformación lineal de V en V^* , su dual φ^* (Pte.I, definición 4.4.1) será una transformación lineal de $(V^*)^*$ en V^* , es decir de V en V^* . Se sabe (Pte.I, sección 6.6) que si (e_i) es una base de V y (e^j) es la base dual, la matriz de φ^* respecto de esas bases es la transpuesta de la matriz de φ ;

pero esta última es simétrica (teorema 2.2.1) , luego la matriz de φ^* es idéntica a la de φ , y por consiguiente es $\varphi^* = \varphi$. Resulta así, en virtud de la definición 4.4.1 de la Pte.I, que

$$\langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle ,$$

para x e y cualesquiera de V . ■

2.3 Funciones cuadráticas .

A cada función bilineal simétrica $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre V le podemos hacer corresponder una función $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la relación

$$\Psi(x) = \Phi(x, x) . \quad (2.3.1)$$

La función Φ es bien determinada por Ψ por cuanto, como es fácil comprobar, se cumple que

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)] \quad (2.3.2)$$

Esta relación implica que a funciones bilineales diferentes Φ_1 y Φ_2 les corresponde funciones Ψ_1 y Ψ_2 que también son diferentes.

También se cumple la relación

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi(x) + \Psi(y) - \Psi(x-y)] \quad (2.3.3)$$

De la comparación de ésta con (2.3.2) resulta la llamada *identidad del paralelogramo*:

$$\Psi(x+y) + \Psi(x-y) = 2(\Psi(x) + \Psi(y)) , \quad (2.3.4)$$

que expresa una propiedad fundamental de las funciones Ψ asociadas mediante (2.3.1) con las funciones bilineales simétricas Φ .

Definición 2.3.1. Una función $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es un espacio de dimensión finita, se dice que es una *función cuadrática*, si

cumple las condiciones siguientes:

1. es una función continua (respecto de la topología standard de V)
2. satisface a la identidad del paralelogramo (2.3.4).

Si en la identidad del paralelogramo se hace primero $x=y=0$, y luego solamente $x=0$, resulta que para toda función cuadrática Ψ se cumplen las relaciones

$$\Psi(0) = 0$$

y

$$\Psi(-y) = \Psi(y).$$

Esta última ecuación expresa que las funciones cuadráticas son pares.

Teorema 2.3.1. Entre las funciones bilineales simétricas $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita, y las funciones cuadráticas $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe una correspondencia biunívoca tal que si Φ es una función bilineal simétrica y Ψ es la función cuadrática que le corresponde, entonces se cumplen las relaciones.

$$\Psi(x) = \Phi(x, x) \quad (2.3.5)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)] \quad (2.3.6)$$

Demostración. Al comienzo de esta sección hemos demostrado que dada una función bilineal simétrica Φ , la función Ψ definida por (2.3.5) satisface a la relación (2.3.6). Probemos ahora que Ψ es una función cuadrática. La identidad del paralelogramo (2.3.4) fue demostrada precedentemente, y la continuidad de la función $\Psi(x) = \Phi(x, x)$ resulta inmediatamente de la continuidad de la función bilineal Φ que fue establecida en el teorema 1.2.1.

Ha quedado probado así que a cada función bilineal simétrica Φ le corresponde una función cuadrática definida por (2.3.5), la cual satisface a (2.3.6). Sólo nos falta probar ahora que para cada función cuadrática Ψ existe una función bilineal simétrica Φ que satisface a las relaciones (2.3.5) y (2.3.6).

Si Ψ es una función cuadrática, podemos definir la función $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)) \quad (2.3.7)$$

Probaremos ahora que Φ es bilineal simétrica. La propiedad de simetría es evidente en la relación (2.3.7). Vamos a demostrar a continuación que Φ es aditiva respecto de la variable x , es decir que

$$\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y). \quad (2.3.8)$$

La relación (2.3.7), que se cumplen por definición, permite escribir las tres relaciones siguientes

$$2\Phi(x_1 + x_2, y) = \Psi(x_1 + x_2 + y) - \Psi(x_1 + x_2) - \Psi(y)$$

$$2\Phi(x_1, y) = \Psi(x_1 + y) - \Psi(x_1) - \Psi(y)$$

$$2\Phi(x_2, y) = \Psi(x_2 + y) - \Psi(x_2) - \Psi(y).$$

Combinando estas tres últimas ecuaciones resulta

$$\begin{aligned} & 2[\Phi(x_1 + x_2, y) - \Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)] \\ & \quad = [\Psi(x_1 + x_2 + y) + \Psi(y)] \\ & - [\Psi(x_1 + y) + \Psi(x_2 + y)] - [\Psi(x_1 + x_2) - \Psi(x_1) - \Psi(x_2)] \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

Para demostrar la relación (2.3.8) bastará demostrar que el segundo miembro de (2.3.9) es igual a cero. A este fin usaremos la identidad del paralelogramo, la cual se cumple por hipótesis. Se tiene en efecto,

$$\Psi(x_1 + x_2 + y) + \Psi(y) = \frac{1}{2} [\Psi(x_1 + x_2 + 2y) + \Psi(x_1 + x_2)], \quad (2.3.10)$$

$$\Psi(x_1 + y) + \Psi(x_2 + y) = \frac{1}{2} [\Psi(x_1 + x_2 + 2y) + \Psi(x_1 - x_2)], \quad (2.3.11)$$

$$\Psi(x_1 + x_2) + \Psi(x_1 - x_2) = 2[\Psi(x_1) + \Psi(x_2)] \quad (2.3.12)$$

De esta última ecuación se sigue que

$$\Psi(x_1 + x_2) - \Psi(x_1) - \Psi(x_2) = -\Psi(x_1 + x_2) + \Psi(x_1) + \Psi(x_2).$$

Combinando esta ecuación con (2.3.10) y (2.3.11) se ve que el segundo miembro de (2.3.9) es igual a

$$\frac{1}{2} [\Psi(x_1 + x_2) + \Psi(x_1 - x_2)] - \Psi(x_1) - \Psi(x_2)$$

que es igual a cero en virtud de la identidad del paralelogramo. Queda así demostrada la relación (2.3.8). En forma análoga se puede demostrar la aditividad de Φ respecto de la variable y . Por consiguiente Φ es bilineal si se cumplen las relaciones

$$\Phi(\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y) \quad (2.3.13)$$

y

$$\Phi(x, \lambda y) = \lambda \Phi(x, y) \quad (2.3.14)$$

donde λ es un escalar cualquiera. Probaremos la primera de estas dos relaciones. La segunda se puede probar de manera semejante. Observemos primero que la relación (2.3.8), que ya hemos demostrado, y en la que podemos hacer $x_1 = x$, $x_2 = -x$, implica que

$$\Phi(0, y) = \Phi(x, y) + \Phi(-x, y).$$

Pero de (2.3.6) se sigue que

$$\Phi(0, y) = \frac{1}{2} [\Psi(y) - \Psi(0) - \Psi(y)] = 0 \quad (2.3.15)$$

Luego

$$\Phi(-x, y) = -\Phi(x, y),$$

y por tanto la relación (2.3.13) se cumple para $\lambda = -1$. La relación (2.3.15) muestra que también se cumple para $\lambda = 0$. Basta ahora probar que se cumple para todo λ positivo, porque si tal cosa se demuestra, entonces, en el caso en que $\lambda < 0$, será $-\lambda > 0$ y por consiguiente será

$$\Phi(\lambda x, y) = \Phi(-(-\lambda x), y) = -\Phi(-\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y).$$

y (2.3.13) se cumplirá en general.

Supongamos primero que k es un entero positivo. La relación (2.3.8) implica inmediatamente que

$$\Phi(kx, y) = k\Phi(x, y),$$

y por tanto (2.3.13) se cumple cuando k es entero positivo. Sea $\lambda = \frac{p}{q}$ donde p y q son enteros positivos. Se tiene entonces

$$\Phi\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\Phi\left(\frac{1}{q}x, y\right).$$

Pero

$$\Phi(x, y) = \Phi\left(\frac{q}{q}x, y\right) = q\Phi\left(\frac{1}{q}x, y\right),$$

de donde

$$\Phi\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{1}{q}\Phi(x, y).$$

Luego

$$\Phi\left(\frac{p}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}\Phi(x, y)$$

y por consiguiente (2.3.13) se cumple cuando λ es racional positivo. Si λ es un número real positivo cualquiera, sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números racionales positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Se tiene

$$\lambda_n \Phi(x, y) = \Phi(\lambda_n x, y) = \frac{1}{2} \{ \Psi(\lambda_n x + y) - \Psi(\lambda_n x) - \Psi(y) \},$$

y en virtud de la continuidad de Ψ se tendrá

$$\lambda \Phi(x, y) = \Phi(\lambda x, y),$$

y así queda probada la relación (2.3.13) en el caso general. Se ve por tanto que, dada la función cuadrática Ψ , la fórmula (2.3.7) define a una función bilineal simétrica. Comprobaremos ahora finalmente que a esta función le corresponde la función cuadrática Ψ dada, es decir que para ellas se cumple (2.3.5), ya que (2.3.6) se cumple por la definición de Φ . De (2.3.7) se deduce que

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2} [\Psi(2x) - 2\Psi(x)]$$

Haciendo $x = y$ en la identidad del paralelogramo (2.3.4) se obtiene.

$$\Psi(2x) = 4\Psi(x).$$

Por consiguiente

$$\Phi(x, x) = \Psi(x)$$

que prueba el cumplimiento de (2.3.5) ■

En adelante, y siempre que no haya lugar a confusión, la función cuadrática que corresponde a una función bilineal simétrica $\Phi(x, y)$ se representará por $\Phi(x) = \Phi(x, x)$ y por tanto nos referiremos tanto a la función bilineal $\Phi(= \Phi(x, y))$ como a la función cuadrática $\Phi(= \Phi(x))$.

Dada una base cualquiera (e_i) de V , si $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ es un vector arbitrario de V , entonces la forma bilineal (2.2.1) que

representa a la función bilineal $\Phi(x,y)$ proporciona la representación de $\Phi(x)$ mediante una *forma cuadrática*.

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j, \quad (2.3.16)$$

cuyos coeficientes son los mismos que los de la forma bilineal de $\Phi(x,y)$. La matriz (α_{ij}) puede considerarse también asociada con la función cuadrática Φ , para una base dada de V . Puede decirse entonces que el rango de la función bilineal es igual al rango de la matriz que corresponde a su función cuadrática, para una base cualquiera de V .

Ejercicios

- 2.3.1** Probar que una función bilineal simétrica definida sobre V define sobre la suma directa $V \oplus V$ a una función cuadrática.
- 2.3.2** Sean $M = (\alpha_{ij})$ y $M' = (\alpha'_{ij})$ las matrices de la forma bilineal $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de las bases (e_i) y (e'_i) respectivamente. Probar que

$$M' = A'^t M A' \quad \text{y} \quad M = A^t M' A,$$

donde A es la matriz del cambio de la base (e_i) en la base (e'_i) y A' es su inversa.

2.4 Funciones bilineales simétricas definidas e indefinidas.

Definición 2.4.1. Una función bilineal simétrica $\Phi(x, y)$ se llama *definida positiva* (*definida negativa*) si la función cuadrática $\Phi(x)$ que le corresponde tiene la propiedad.

$$\Phi(x) > 0 \quad (\Phi(x) < 0)$$

para todos los vectores $x \neq 0$. Las funciones definidas positivas y definidas negativas son evidentemente no degeneradas.

Teorema 2.4.1. Si $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función bilineal simétrica definida positiva (definida negativa), entonces se cumple la *desigualdad de Schwarz*.

$$\Phi(x, y)^2 \leq \Phi(x) \Phi(y), \quad x, y \in V. \quad (2.4.1)$$

La igualdad tiene lugar si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración. Según se sabe (ver **Pte. I, sección 17.1**) en V puede definirse un producto interno mediante una de las fórmulas

$$(x, y) = \Phi(x, y), \quad (x, y) = -\Phi(x, y)$$

El presente teorema resulta ser entonces enteramente equivalente al teorema **Pte. I, 17.2.1.** ■

Definición 2.4.2. Una función bilineal simétrica $\Phi(x, y)$ se llama *semidefinida positiva* (*semidefinida negativa*) si se cumple que

$$\Phi(x) \geq 0 \quad (\Phi(x) \leq 0)$$

para todo vector $x \in V$, y si existen vectores $x \neq 0$ tales que

$\Phi(x) = 0$. La desigualdad de Schwarz es cierta también para las funciones bilineales simétricas semidefinidas (Pte.I, sección 17.2, observación 2), pero la igualdad puede ocurrir aun cuando los vectores x e y no sean linealmente dependientes. Las funciones semidefinidas son además degeneradas, pues si $x_0 \neq 0$ es tal que $\Phi(x_0) = 0$, entonces, por la desigualdad de Schwarz,

$$\Phi(x_0, y)^2 \leq \Phi(x_0) \Phi(y) = 0,$$

y por tanto tiene lugar que

$$\Phi(x_0, y) = 0, \quad \forall y \in V.$$

Cuando la función bilineal simétrica toma valores positivos y negativos, se dice que es *indefinida*, y entonces puede ser degenerada o no degenerada.

2.5 Descomposición de un espacio vectorial de dimensión finita respecto de una función bilineal simétrica indefinida no degenerada.

Sea $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal simétrica indefinida no degenerada, sobre el espacio vectorial V de dimensión n .

Teorema 2.5.1. Dada una función $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal simétrica indefinida no degenerada, sobre el espacio V de dimensión n , existen los subespacios V^+ y V^- de V tales que

$$V = V^+ \oplus V^-, \quad (2.5.1)$$

y que Φ es definida positiva en V^+ y definida negativa en V^- . El espacio V^- es el complemento ortogonal de V^+ con respecto al producto escalar definido por $(x, y) = \Phi(x, y)$.

Demostración. Puesto que Φ es indefinida por hipótesis, existe un vector $a \neq 0$ tal que $\Phi(a) > 0$. El subespacio de dimensión 1 generado por a no es por tanto trivial y la restricción de Φ a ese subespacio es definida positiva porque cualquiera que sea el vector no nulo λa , $\lambda \neq 0$, de dicho subespacio, se tiene

$$\Phi(\lambda a) = \Phi(\lambda a, \lambda a) = \lambda^2 \Phi(a, a) = \lambda^2 \Phi(a) > 0.$$

Existirá entonces un subespacio V^+ de V de dimensión maximal, tal que Φ es definida positiva en V^+ .

La función bilineal no degenerada Φ nos permite introducir un producto escalar, en el espacio vectorial V , mediante la fórmula.

$$(x, y) = \Phi(x, y). \quad (2.5.2)$$

Designemos por V^- al complemento ortogonal $(V^+)^\perp$ de V^+ relativo a ese producto escalar (Pte. I, definición 17.7.2). La intersección $V^+ \cap V^-$ se reduce al vector nulo, porque si existiera el vector $z \neq 0$ tal que $z \in V^+ \cap V^-$, se tendría que $\Phi(z, z) = 0$, para todo $z \in V^+$, porque z pertenece a $V^- = (V^+)^\perp$. En particular se tendría $\Phi(z, z) = \Phi(z) = 0$ donde $z \neq 0$ y $z \in V^+$. Resultaría así una contradicción con la definición de V^+ .

Para demostrar (2.5.1) sólo queda por probar que $V = V^+ + V^-$ (ver Pte. I, definición 13.3.2). El teorema Pte. I, 5.4.1 permite escribir

$$\dim V^+ + \dim V^- = \dim V.$$

Si (e_1, \dots, e_k) es una base de V^+ y (e_{k+1}, \dots, e_n) es una base de V^- , (e_1, \dots, e_n) es una base de V , pues si se tiene

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i e_i = 0,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i e_i = - \sum_{i=k+1}^n \alpha^i e_i.$$

El primer miembro es un vector de V^+ y el segundo es un vector de V^- . Luego, puesto que $V^+ \cap V^- = \{0\}$, se deberá tener

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i e_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=k+1}^n \alpha^i e_i = 0.$$

Ahora bien, (e_1, \dots, e_k) es una base de V^+ y (e_{k+1}, \dots, e_n) es una base de V^- . Por consiguiente $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$, y (e_1, \dots, e_n) es una base de V . Cada vector $x \in V$ puede escribirse entonces en la forma

$$x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i$$

donde $\sum_{i=1}^k \xi^i e_i \in V^+$ y $\sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i \in V^-$. Se tiene por tanto que

$V = V^+ + V^-$, con lo cual queda probada la relación (2.5.1).

Sólo falta probar que Φ es definida negativa en V^- . Si $z \neq 0$ es un vector cualquiera de V^- , y designamos por V_z al subespacio de V generado por V^+ y por z , cada vector no nulo x de V_z puede escribirse en la forma

$$x = y + \alpha z, \quad y \in V^+, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\Phi(x) = \Phi(y + \alpha z, y + \alpha z) = \Phi(y) + \alpha^2 \Phi(z).$$

Si fuera $\Phi(z) > 0$ se tendría $\Phi(x) > 0$ para todos los vectores x no nulos de V_1 . Φ sería entonces definida positiva en el subespacio V_1 de V , de dimensión mayor que la de V^+ , lo cual sería una contradicción. Resulta así que

$$\Phi(z) \leq 0, \quad \forall z \in V^-,$$

y por tanto Φ es semidefinida negativa en V^- . Para probar que es definida negativa vamos a valernos de la desigualdad de Schwarz (**teorema 2.4.1**). Debido a que Φ es semidefinida negativa en V^- y a que, como hemos observado anteriormente, se cumple entonces la desigualdad de Schwarz, tendremos

$$\Phi(z_1, z)^2 \leq \Phi(z_1) \Phi(z), \quad z_1 \in V^-, z \in V^-.$$

Supongamos que sea

$$\Phi(z_1) = 0.$$

De la desigualdad precedente se sigue que

$$\Phi(z_1, z) = 0$$

para todo $y \in V^-$. Sabemos también que por ser $z_1 \in V^-$ es, en virtud del corolario del teorema 2.4.1,

$$\Phi(z_1, y) = 0$$

para todo $y \in V^+$. Luego, puesto que cada vector $x \in V$ puede escribirse en la forma $x = y + z$, donde $y \in V^+$ y $z \in V^-$, se tendrá

$$\Phi(z_1, x) = \Phi(z_1, y + z) = \Phi(z_1, y) + \Phi(z_1, z) = 0$$

para todo $x \in V$. Dado que Φ es no degenerada se tendrá que $z_1 = 0$. Luego Φ es definida negativa en V^- . ■

2.6 Descomposición de un espacio vectorial de dimensión finita respecto de una función bilineal simétrica indefinida degenerada.

Sea Φ una función bilineal simétrica indefinida degenerada. El núcleo K de Φ no se reduce al vector nulo. Tal como vimos en la demostración del teorema 2.5.1, se puede determinar ahora un subespacio V^+ de V de dimensión maximal, tal que Φ es definida positiva en V^+ . Se tiene entonces que $V^+ \cap K = \{0\}$, pues si V^+ contuviera a un vector x_0 no nulo de K , se tendría $\Phi(x_0) = 0$ y Φ no sería definida positiva en V^+ . Valiéndonos de bases de V^+ y de K reunidas en un conjunto, y ampliado este conjunto hasta formar una base de V , puede obtenerse un subespacio V_1 de V tal que $V^+ \subseteq V_1$ y que

$$V = V_1 \oplus K . \quad (2.6.1)$$

Evidentemente V^+ es un subespacio de V_1 de dimensión maximal, en que Φ es definida positiva.

La restricción de Φ a V_1 es no degenerada. En efecto, si fuera $\Phi(x_1, y_1) = 0$ para un $x_1 \in V_1$ dado y para todo $y_1 \in V_1$, entonces, puesto que cada vector $y \in V$ puede escribirse en la forma

$$y = y_0 + y_1, \quad y_0 \in K, \quad y_1 \in V_1,$$

se tendrá

$$\Phi(x_1, y) = \Phi(x_1, y_0) + \Phi(x_1, y_1) = 0 \quad \forall y \in V.$$

Resulta de aquí que $x_1 \in K$. Puesto que $x_1 \in K \cap V_1$, se tendrá, en virtud de (2.6.1), que $x_1 = 0$; por tanto Φ es no degenerada en V_1 .

El teorema 2.5.1 aplicado al subespacio V_1 en que Φ es indefinida no degenerada permite escribir

$$V_I = V^+ \oplus V^-,$$

y por tanto

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K \quad (2.6.2)$$

en donde V^+ es un subespacio de V de dimensión máxima en que Φ es definida positiva y V^- es un subespacio en que Φ es definida negativa, que es complemento ortogonal de V^+ en el espacio V_I , respecto del producto interno $(x, y) = \Phi(x, y)$.

Observaciones:

- Una modificación obvia de la demostración del teorema 2.5.1 consiste en comenzar por elegir un subespacio V^- de V de dimensión máxima, en que Φ es definida negativa. Si se procede de esa manera, con el razonamiento de la presente sección llegaremos a una descomposición (2.6.2), donde V^- es un subespacio de V de dimensión máxima, en que Φ es definida negativa, y V^+ es un subespacio en que Φ es definida positiva que es complemento ortogonal de V^- , en V_I , respecto del producto escalar $(x, y) = \Phi(x, y)$.
- La descomposición (2.6.2) es válida cualquiera que sea la función bilineal simétrica Φ . Si Φ no es indefinida, toma una de las formas

$$V = V^+ \oplus K \quad \text{o} \quad V = V^- \oplus K.$$

En el caso en que Φ es no degenerada, basta tener presente que $K = \{0\}$, y resulta, obviamente, $V = V^+$ o $V = V^-$.

2.7 Índice y signatura de una función bilineal simétrica.

Teorema 2.7.1. Dada una forma bilineal simétrica Φ y una descomposición de V de la forma

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K \quad (2.7.1)$$

donde K es el núcleo de Φ , y Φ es definida positiva en V^+ y definida negativa en V^- , las dimensiones de V^+ y de V^- son independientes de la descomposición (2.7.1) que se considere, y sólo dependen de Φ . Además, las dimensiones s de V^+ y s' de V^- son las dimensiones máximas de los subespacios de V en que Φ es definida positiva y definida negativa, respectivamente. Por último, se cumple la relación

$$s + s' = r \quad (2.7.2)$$

donde r es el rango de Φ .

Demostración. Consideremos dos descomposiciones cualesquiera de la forma V :

$$V = V_1^+ \oplus V_1^- \oplus K \quad (2.7.3)$$

y

$$V = V_2^+ \oplus V_2^- \oplus K. \quad (2.7.4)$$

Φ es definida positiva en V_1^+ y en V_2^+ y es definida negativa en V_1^- y V_2^- . Si $x_1 \in V^-$ y $x_0 \in K$ se tiene

$$\Phi(x_1 + x_0) = \Phi(x_1) + 2\Phi(x_1, x_0) + \Phi(x_0) = \Phi(x_1).$$

Por tanto Φ es definida negativa en $V_1^- \oplus K$. Se tiene por consiguiente que

$$V_2^+ \cap (V_1^- \oplus K) = \{0\},$$

de donde

$$V_2^+ \oplus V_1^- \oplus K \subseteq V,$$

y por tanto

$$\dim V_2^+ + \dim V_1^- + \dim K \leq \dim V = n .$$

Ahora bien, de 2.7.3 se sigue que

$$\dim V_1^+ + \dim V_1^- + \dim K = n .$$

Por consiguiente

$$\dim V_2^+ \leq \dim V_1^+ .$$

Permutando los papeles de V_1^+ y V_2^+ se prueba que

$$\dim V_1^+ \leq \dim V_2^+ .$$

Resulta así que

$$\dim V_1^+ = \dim V_2^+ ,$$

es decir que la dimensión s de V^+ es determinada de manera unívoca por Φ . De (2.7.3) y (2.7.4) se deduce entonces que

$$\dim V_1^- = \dim V_1^-$$

y por tanto la dimensión s' de V^- también es unívocamente determinada.

Por último, puesto que el rango de Φ es

$$r = n - \dim K ,$$

se tiene

$$s + s' = \dim V^+ + \dim V^- = r .$$

Sólo queda por demostrar que s es la dimensión máxima de los subespacios en que Φ es definida positiva, y que s' es la dimensión

máxima de los subespacios en que Φ es definida negativa. Según hemos visto al demostrar la existencia de la descomposición (2.6.2) en la sección 2.6, y en la observación 1 de la misma sección, existen descomposiciones del tipo (2.7.1) en que la dimensión de V^+ es la dimensión máxima de los subespacios en que Φ es definida positiva y otras en que la dimensión de V^- es la dimensión máxima de los subespacios en que Φ es definida negativa. Puesto que s y s' son constantes para todas las descomposiciones, quedará demostrada nuestra aseveración. ■

Definición 2.7.1. Se llama *índice*¹⁾ de Φ a la dimensión máxima s de los subespacios de V en que Φ es definida positiva. Si

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K$$

es una descomposición cualquiera en que K es el núcleo de Φ , y Φ es definida positiva en V^+ y definida negativa en V^- , el índice de Φ es la dimensión de V^+ .

Definición 2.7.2. Se llama *signatura* de Φ al número

$$\dim V^+ - \dim V^- = 2s - r \quad (2.7.5)$$

Es claro que si la signatura de Φ es positiva, la de $-\Phi$ es negativa, e inversamente.

2.8 Diagonalización de la matriz de una función bilineal simétrica.

Sea Φ una forma bilineal simétrica. Consideremos una descomposición.

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K$$

1) 0, en forma más precisa; índice de positividad de Φ .

de V relativa a Φ . Puesto que Φ es definida positiva en V^+ , puede definirse en este subespacio un producto interno.

$$(x, y) = \Phi(x, y).$$

Respecto de este producto interno podemos considerar una base ortonormal (e_1, \dots, e_s) de V^+ . Semejantemente $-\Phi$ define a un producto interno

$$(x, y) = -\Phi(x, y)$$

en V^- , respecto del cual podemos considerar la base ortonormal (e_{s+1}, \dots, e_r) de V^- . Por último, sea (e_{r+1}, \dots, e_n) una base cualquiera de K . Resultará entonces que

$$(e_1, \dots, e_n)$$

es una base de V y que, teniendo presente la ortogonalidad de V^- respecto de V^+ , pueden escribirse las relaciones

$$\begin{aligned} \Phi(e_i, e_j) &= 0 \quad \text{para } i \neq j, \\ \Phi(e_i, e_i) &= \epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{si } i = 1, \dots, s \\ -1 & \text{si } i = s+1, \dots, r \\ 0 & \text{si } i = r+1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

las cuales pueden condensarse en una sola:

$$\Phi(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij},$$

donde ϵ_i es definida como se ve en (2.8.1).

La matriz de Φ , respecto de la base (e_1, \dots, e_n) de V es diagonal, y tiene la forma

y la forma cuadrática Φ puede expresarse en la forma

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\xi^i)^2 \quad (2.9.2)$$

Los polinomios de los segundos miembros de (2.9.1) y (2.9.2) se llaman *formas bilineal diagonal y cuadrática diagonal* de Φ , respectivamente.

Teorema 2.9.1. (Ley de inercia de Sylvester). En todas las formas diagonales (2.9.1) de una función bilineal simétrica o (2.9.2) de la correspondiente función cuadrática, el número de términos positivos es el mismo e igual al índice s de Φ , y el número de términos negativos es el mismo e igual a $r-s$, donde r es el rango de Φ .

Demostración. Podemos prescindir del caso trivial en que Φ es idénticamente nula. Si ordenamos convenientemente los vectores de base puede suponerse que la forma diagonal de la matriz de Φ

$$\text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

es tal que

$$\begin{aligned} \lambda_i &> 0 \text{ para } i = 1, \dots, s \\ \lambda_i &< 0 \text{ para } i = s+1, \dots, r \\ \lambda_i &= 0 \text{ para } i = r+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \xi^i \eta^i - \sum_{i=s+1}^r \lambda_i \xi^i \eta^i \quad (2.9.3)$$

Es evidente que Φ es definida positiva en el subespacio V^+ generado por (e_1, \dots, e_s) , y es definida negativa en el subespacio V^- generado por (e_{s+1}, \dots, e_r) . Además podemos probar que el subespacio generado por (e_{r+1}, \dots, e_n) es el núcleo de Φ . En efecto,

si x es tal que $\xi^1 = \dots = \xi^r = 0$, entonces, cualquiera que sea $y \in V$, resulta de (2.9.3) que $\Phi(x, y) = 0$. Por tanto los vectores e_{r+1}, \dots, e_n generan a un subespacio de K . Además, cualquiera que sea $x \in \text{esp}(e_{r+1}, \dots, e_n)$, lo que implica que $x \neq 0$, es posible suponer, por ejemplo, que $\xi^1 \neq 0$. Para $y = (1, 0, \dots, 0)$ se tiene entonces

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 \xi^1 \neq 0,$$

y por tanto es $x \notin K$. Resulta así que K es el subespacio generado por (e_{r+1}, \dots, e_n) . Por consiguiente puede escribirse

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K.$$

Esta es una descomposición del tipo (2.7.1). Del teorema 2.7.1 y de la definición 2.7.1 resulta entonces inmediatamente que

$$s_1 = \dim V^+ = s$$

$$r_1 - s_1 = \dim V^- = s' = r - s$$

$$r_1 = \dim K = r. \quad \blacksquare$$

Ejercicios

***2.9.1.** Si la función bilineal simétrica Φ tiene índice s y rango r , la función $-\Phi$ tiene el mismo rango r y el índice $r - s$. La signatura de Φ es $2s - r$ y la de $-\Phi$ es $-(2s - r)$. Por tan to o bien Φ o bien $-\Phi$ tiene signatura no negativa.

2.9.2. Sea $\Phi \neq 0$ una función cuadrática. Probar que Φ puede es birse en la forma

$$\Phi(x) = \epsilon f(x)^2, \quad \epsilon = \pm 1,$$

donde f es una función lineal, si y sólo si la función bi lineal correspondiente tiene rango 1.

2.10. Determinación del índice y del rango de una función bilineal simétrica dada por su forma cuadrática.

Sea

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j$$

la forma cuadrática de la función considerada. No es necesario considerar el caso trivial en que Φ es nula, luego un coeficiente $\alpha_{r,s}$ por lo menos será diferente de cero. Podemos suponer que es $r = s$, pues si fuera $\alpha_{ii} = 0$ para todo i , el cambio de base que da lugar a la sustitución

$$\xi^r = \bar{\xi}^r + \bar{\xi}^s$$

$$\xi^s = \bar{\xi}^r - \bar{\xi}^s$$

nos da la representación

$$\Phi(x) = \sum_{\nu, \mu} \bar{\alpha}_{\nu\mu} \bar{\xi}^\nu \bar{\xi}^\mu$$

en que $\bar{\alpha}_{r,r}$ y $\bar{\alpha}_{s,s}$ son diferentes de cero. Podemos suponer que se ha realizado esa transformación y que por tanto

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j$$

es una forma cuadrática en que, por ejemplo, $\alpha_{11} \neq 0$. Podemos escribir entonces

$$\Phi(x) = \alpha_{11} \left\{ (\xi^1)^2 + \frac{2}{\alpha_{11}} \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} \xi^1 \xi^j \right\} + \sum_{i,j=2}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j .$$

Si ahora hacemos un nuevo cambio de base que da lugar a la sustitución

$$\eta^1 = \xi^1 + \frac{1}{\alpha_{11}} \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} \xi^j, \quad \eta^i = \xi^i \quad (i = 2 \dots n), \quad (2.10.1)$$

y por tanto

$$(\xi^1)^2 + \frac{2}{\alpha_{11}} \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} \xi^1 \xi^j = (\eta^1)^2 - \frac{1}{\alpha_{11}^2} \left(\sum_{j=2}^n \alpha_{1j} \xi^j \right)^2,$$

tendremos

$$\Phi(x) = \alpha_{11} (\eta^1)^2 + \sum_{i,j=2}^n \beta_{ij} \eta^i \eta^j, \quad (\beta_{ij} = \beta_{ji}).$$

La sumatoria que aparece en el segundo miembro es una forma cuadrática de $(n-1)$ variables. Podemos aplicarle ahora a ella el método de reducción que hemos aplicado a $\Phi(x)$. Repitiendo sucesivamente este procedimiento obtendremos la forma diagonal

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\xi^i)^2.$$

El número de términos no nulos será el rango y el número de términos con coeficientes positivos será el índice de Φ .

Ejemplo. Hallar el rango y el índice de la forma bilineal dada por su forma cuadrática.

$$\Phi(x) = \sum_{i < j} \xi^i \xi^j = \xi^1 \xi^2 + \xi^1 \xi^3 + \xi^2 \xi^3$$

En forma desarrollada se tiene, limitándonos al caso en que $n=3$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \xi^1 \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^1 \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^2 \xi^1 + \frac{1}{2} \xi^2 \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^3 \xi^1 + \frac{1}{2} \xi^3 \xi^2.$$

La matriz de Φ es entonces.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango, que es el rango de Φ , es 3.

Para calcular el índice vamos a emplear el procedimiento de la sección 2.10.

Si sustituimos ξ^1 por $\xi^1 + \xi^2$ y ξ^2 por $\xi^1 - \xi^2$ se obtiene

$$\Phi(x) = \{ (\xi^1)^2 + 2\xi^1 \xi^3 \} - (\xi^2)^2.$$

Apliquemos ahora la sustitución de la forma (2.10.1)

$$\eta^1 = \xi^1 + \xi^3, \quad \eta^2 = \xi^2, \quad \eta^3 = \xi^3.$$

Se tiene entonces

$$(\xi^1)^2 + 2 \xi^1 \xi^3 = (\eta^1)^2 - (\xi^3)^2 = (\eta^1)^2 - (\eta^3)^2.$$

Por consiguiente

$$\Phi(x) = (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2.$$

El índice es por tanto 1. El mismo método puede aplicarse al caso en que n es cualquiera. El lector puede tratar ese caso.

§ 3. Cuádricas en los espacios afines reales.

En este párrafo vamos a considerar un espacio afín real E (Pte. I, Cap. VI) asociado al espacio vectorial real n -dimensional V con $n \geq 2$. Conviene recordar aquí que seguiremos el uso de llamar punto x de E , donde x es un vector de V , al punto P tal que $\overrightarrow{OP} = x$, entendido que O es un punto u origen bien determinado. Es indispensable distinguir al punto x del vector x que se llama vector de posición del punto, relativo al origen de coordenadas O .

La motivación de la teoría que vamos a estudiar a continuación se halla en el estudio de las cónicas del plano y de las su

perfiles de segundo grado del espacio de tres dimensiones. En la presente exposición consideramos espacios de dimensión finita cualquiera y definimos las cuádricas como generalización de las curvas y de las superficies de segundo grado. Distinguimos además el caso en que el espacio es afín de aquél en que es euclideo. Finalmente obtenemos las clasificaciones afín y métrica de las cuádricas.

3.1 Definición de las cuádricas.

Sea E un espacio afín n -dimensional, y sea V el espacio vectorial real asociado. Se llama *cuádrica* de E a cada conjunto Q no vacío¹⁾ de puntos P de E , que satisfacen a la relación.

$$\Phi(\vec{OP}) + 2f(\vec{OP}) = \alpha \quad (3.1.1)$$

donde O es un origen dado, Φ es una función cuadrática no idénticamente nula, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal y α es un número real constante.

Podemos observar que si el origen O se cambia por otro nuevo origen cualquiera O_1 los puntos P de la cuádrica satisfacen a una relación de la forma (3.1.1) en que Φ es la misma que antes pero en que f y α se modifican en determinada forma. En efecto, si escribimos $\vec{OO_1} = x_0$ y $\vec{O_1P} = x'$, la ecuación (3.1.1) es equivalente a

$$\Phi(x_0 + x') + 2f(x_0 + x') = \alpha,$$

y puesto que

$$\Phi(x_0 + x') = \Phi(x_0 + x', x_0 + x') = \Phi(x_0) + \Phi(x') + 2\Phi(x_0, x'),$$

1) Si Q es vacío, se dice a veces que es una cuádrica "imaginaria".

la ecuación puede escribirse en la forma

$$\Phi(x') + 2(f(x') + \Phi(x_0, x')) = \alpha - (\Phi(x_0) + 2f(x_0)).$$

Si introducimos la función lineal f_1 , tal que

$$f_1(x') = f(x') + \Phi(x_0, x')$$

y el número α_1 tal que

$$\alpha_1 = \alpha - (\Phi(x_0) + 2f(x_0)),$$

la ecuación (3.1.1) se escribirá en la forma

$$\Phi(x') + 2f_1(x') = \alpha_1,$$

y por tanto los puntos P de la cuádrlica cumplen la relación

$$\Phi(\overrightarrow{O_1 P}) + 2f_1(\overrightarrow{O_1 P}) = \alpha_1,$$

que, como se ve, es enteramente análoga a (3.1.1) pero relativa al nuevo centro O_1 .

Si en (3.1.1) sustituimos \overrightarrow{OP} por el vector x que representa a P respecto del origen O , dicha ecuación se escribe

$$\Phi(x) + 2f(x) = \alpha \tag{3.1.2}$$

y se llama *ecuación de la cuádrlica Q referida al origen O* .

Si (e_i) es una base de V y (x^1, \dots, x^n) son las coordenadas de un punto P de la cuádrlica Q en el sistema de coordenadas $(O, (e_i))$, es decir las componentes del vector $x = \overrightarrow{OP}$ respecto de la base (e_i) , podremos expresar la ecuación (5.1.2) en la forma

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x^i x^j + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i x^i = \alpha, \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji}), \tag{3.1.3}$$

que se llama *ecuación de la cuádrlica Q referida al sistema de coordenadas $(O, (e_i))$* .

Ejemplos. Si $n=2$. y $n=3$ las cuádricas correspondientes tienen las ecuaciones

$$\alpha_{11}(x^1)^2 + 2\alpha_{12}x^1x^2 + \alpha_{22}(x^2)^2 + 2\beta_1x^1 + 2\beta_2x^2 - \alpha = 0,$$

que es la ecuación general de las cónicas del plano, y

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(x^1)^2 + \alpha_{22}(x^2)^2 + \alpha_{33}(x^3)^2 + 2\alpha_{12}x^1x^2 + 2\alpha_{13}x^1x^3 \\ + 2\alpha_{23}x^2x^3 + 2\beta_1x^1 + 2\beta_2x^2 + 2\beta_3x^3 - \alpha = 0, \end{aligned}$$

que es la ecuación general de las superficies de segundo grado en el espacio de tres dimensiones.

Las consideraciones de la sección 2.2, y en especial la definición 2.2.3, nos permiten escribir de una nueva manera la ecuación (3.1.2) de una cuádrica referida a un origen O . En efecto, si

$$\varphi: V \rightarrow V^*$$

es el homomorfismo asociado a Φ (teorema 2.2.1), podemos escribir

$$\Phi(x, y) = \langle \varphi x \ y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Además, según el corolario del teorema 5.3.1, Pte. I, existe un vector bien determinado $a^* \in V^*$ tal que

$$f(x) = \langle a^*, x \rangle, \quad \forall x \in V.$$

Por consiguiente la ecuación (3.1.2) puede escribirse en la forma

$$\langle \varphi x, x \rangle + 2 \langle a^*, x \rangle = \alpha, \quad (3.1.4)$$

donde φ es una transformación lineal de V en V^* cuya matriz respecto de una base cualquiera de V y de la dual de V^* , es si-

métrica (Pte. I, teorema 5.3.1)¹⁾.

La ecuación (3.1.4) puede escribirse también la forma

$$\langle \varphi x + 2a^*, x \rangle = \alpha. \quad (3.1.5)$$

Es fácil observar que si $f(x)$ es dada por la fórmula

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i x^i,$$

respecto de la base (e_i) de V , y si (e^i) es la base dual entonces es

$$a^* = \sum_{i=1}^n \beta_i e^i. \quad (3.1.6)$$

Se tiene en efecto

$$\langle a^*, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \beta_i e^i, \sum_{j=1}^n x^j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i x^i = f(x).$$

La siguiente proposición muestra una manera particular de escribir la ecuación de una cuádrica de la cual se sabe que contiene a un punto cuyo vector de posición relativo al origen O es el vector q , o como también se dice, que *pasa por el punto q* .

1) Debe observarse que cualquiera que sea la transformación φ , siempre que tenga la propiedad aquí señalada, la función $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = \langle \varphi x, y \rangle$ es bilineal y simétrica. La bilinealidad es evidente. La simetría tiene lugar porque si (α_{ij}) es la matriz simétrica que representa a φ respecto de las bases duales (e_i) de V y (e^i) de V^* , se tiene

$$\langle \varphi x, y \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j, \quad \langle \varphi y, x \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j.$$

La simetría de (α_{ij}) prueba entonces que $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.

Teorema 3.1.1 La ecuación (3.1.2) de una cuádrlica que pasa por el punto $q(q \in V)$ puede escribirse en la forma

$$\Phi(x-q) + 2 \langle a_I^*, x-q \rangle = 0 \quad (3.1.7)$$

donde a_I^* es un vector de V^* tal que

$$\langle a_I^*, y \rangle = \Phi(y, q) + \langle a^*, y \rangle. \quad \forall y \in V.$$

Demostración. La ecuación (3.1.2) puede ser escrita en la forma

$$\Phi(x) + 2 \langle a^*, x \rangle = \alpha,$$

cuyo primer miembro puede escribirse de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \Phi((x-q) + q) + 2 \langle a^*, (x-q) + q \rangle &= \Phi(x-q) + \\ &+ 2 [\Phi(x-q, q) + \langle a^*, x-q \rangle] + (\Phi(q) + 2 \langle a^*, q \rangle). \end{aligned}$$

Puesto que q pertenece a Q se tiene

$$\Phi(q) + 2 \langle a^*, q \rangle = 0.$$

Por tanto la ecuación de la cuádrlica puede escribirse en la forma

$$\Phi(x-q) + 2 [\Phi(x-q, q) + \langle a^*, x-q \rangle] = 0.$$

La aplicación $y \mapsto (\Phi(y, q) + \langle a^*, y \rangle)$ es lineal, por tanto existe el vector $a_I^* \in V^*$ tal que

$$\Phi(y, q) + \langle a^*, y \rangle = \langle a_I^*, y \rangle \quad (3.1.8)$$

y la ecuación de Q se escribe.

$$\Phi(x-q) + 2 \langle a_I^*, x-q \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

3.2 Espacios e hiperplanos tangentes a una cuádrica

Consideremos una cuádrica cualquiera Q cuya ecuación es

$$\Phi(x) + 2f(x) = \alpha. \quad (3.2.1)$$

Sea A un punto de Q para el cual es $\vec{OA} = x_0$, donde O es el origen de coordenadas; y sea F un plano cualquiera que pasa por A , asociado al subespacio de V generado por dos vectores a y b linealmente independientes, arbitrariamente elegidos. Se tiene

$$F = \{P \in E \mid x = \vec{OP} = x_0 + \xi a + \eta b; \xi, \eta \in \mathbb{R}\}. \quad (3.2.2)$$

ξ y η son las coordenadas de P en el sistema de coordenadas $(A, (a, b))$ del plano F . Los puntos de este plano que pertenecen a Q , es decir los puntos de la intersección $Q \cap F$ deben satisfacer a la ecuación.

$$\Phi(x_0 + \xi a + \eta b) + 2f(x_0 + \xi a + \eta b) = \alpha,$$

o sea

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) + 2\xi\Phi(x_0, a) + 2\eta\Phi(x_0, b) + \xi^2\Phi(a) + 2\xi\eta\Phi(a, b) \\ + \eta^2\Phi(b) + 2f(x_0) + 2\xi f(a) + 2\eta f(b) = \alpha. \end{aligned}$$

Por pertenecer x_0 a Q se cumple que

$$\Phi(x_0) + 2f(x_0) = \alpha.$$

Luego, la ecuación de la intersección $Q \cap F$ es

$$\xi^2\Phi(a) + 2\xi\eta\Phi(a, b) + \eta^2\Phi(b) + 2\xi[\Phi(x_0, a) + f(a)] + 2\eta[\Phi(x_0, b) + f(b)] = 0. \quad (3.2.3)$$

La intersección es por tanto una cónica contenida en el plano F , que pasa por el punto A . Si introducimos la función lineal

$$g(x) = \Phi(x_0, x) + f(x), \quad (3.2.4)$$

la ecuación de la cónica se escribe en la forma

$$K(\xi, \eta) = \xi^2 \Phi(a) + 2\xi\eta\Phi(a, b) + \eta^2 \Phi(b) + 2\xi g(a) + 2\eta g(b) = 0. \quad (3.2.5)$$

La expresión (3.2.4) de $g(x)$ puede escribirse

$$g(x) = \langle \varphi x_0, x \rangle + \langle a^*, x \rangle = \langle \varphi x_0 + a^*, x \rangle,$$

donde φ y a^* fueron introducidas en la sección 3.1.

Supongamos que el punto A considerado es tal que se cumple la condición

$$\varphi x_0 + a^* \neq 0.$$

Entonces g no es idénticamente nula, y su núcleo está formado por los vectores del complemento ortogonal del subespacio generado por $\varphi x_0 + a^*$, es decir que los vectores del subespacio V_{x_0} de V , de dimensión $n-1$:

$$V_{x_0} = \{y \in V \mid \langle \varphi x_0 + a^*, y \rangle = 0\}, \quad (3.2.6)$$

o sea

$$V_{x_0} = \{y \in V \mid \Phi(x_0, y) + f(y) = 0\} \quad (3.2.7)$$

Puesto que el núcleo V_{x_0} de g es de dimensión $n-1 \geq 1$, siempre es posible elegir los vectores a y b de manera que no pertenezcan ambos a V_{x_0} , por cuanto, según dijimos, son arbitrariamente elegidos. De esa manera resulta que el plano F no está contenido en V_{x_0} y $g(a)$ y $g(b)$ no se anulan simultáneamente. Podemos suponer entonces que $g(b) \neq 0$. Derivando (3.2.5) respecto de ξ

se obtiene

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{\partial K}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Para $\xi = \eta = 0$, esta fórmula se reduce a

$$g(a) + g(b) \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_0 = 0,$$

donde $\frac{d\eta}{d\xi}_0 = -\frac{g(a)}{g(b)}$ es la pendiente de la tangente a la cónica en el punto $A = x_0$. El vector

$$t = -g(b)a + g(a)b \quad (3.2.8)$$

será por consiguiente tangente a la cónica en x_0 . Podemos comprobar que, cualesquiera que sean los vectores a y b elegidos en la forma antedicha, los vectores t pertenecen al subespacio V_{x_0} . Se tiene en efecto

$$g(t) = -g(b)g(a) + g(a)g(b) = 0,$$

y por tanto t pertenece al núcleo de g o sea a V_{x_0} . Resulta así que V_{x_0} contiene a los vectores tangentes en x_0 a las cónicas $Q \cap F$, intersecciones de Q con los planos F dados por (3.2.2) en que $g(a)$ y $g(b)$ no se anulan simultáneamente. Si $g(a)$ y $g(b)$ son ambos nulos, es decir si a y b pertenecen ambos a V_{x_0} , y por tanto si F está contenido en V_{x_0} , la ecuación (3.2.5) de la intersección $Q \cap F$ se escribe

$$\xi^2 \Phi(a) + 2\xi \eta \Phi(a, b) + \eta^2 \Phi(b) = 0. \quad (3.2.9)$$

Pueden ocurrir entonces los tres casos siguientes:

$$1. \quad \Phi(a, b)^2 - \Phi(a) \Phi(b) < 0 .$$

Si suponemos que uno de los números ξ o η , por ejemplo ξ , es diferente de cero, la ecuación (3.2.9) puede escribirse.

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 \Phi(b) + 2\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \Phi(a, b) + \Phi(a) = 0. \quad (3.2.10)$$

Pero no puede existir un número real que cumpla esta condición; luego el punto $A = x_0$, cuyas coordenadas son $\xi = \eta = 0$, es el único punto que satisface a (3.2.9). Por tanto $Q \cap F$ se reduce a dicho punto.

$$2. \quad \Phi(a, b)^2 - \Phi(a) \Phi(b) > 0 .$$

En este caso (3.2.10) tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2 . Luego satisfacen a la ecuación (3.2.9) todos los puntos $(\xi, r_1 \xi)$ y $(\xi, r_2 \xi)$ que pertenecen a dos rectas que pasan por x_0 . Los puntos de la primera son

$$x = x_0 + \xi a + r_1 \xi b,$$

y los de la segunda son

$$x = x_0 + \xi a + r_2 \xi b$$

La primera está asociada a los vectores $\xi a + r_1 \xi b$, y la segunda a los vectores $\xi a + r_2 \xi b$. Unos y otros pertenecen a V_{x_0} , como es fácil comprobar recordando que $g(a) = g(b) = 0$. Resulta así que, en este caso, $Q \cap F$ consistente en dos rectas diferentes que pasan por $A = x_0$ y que pertenecen a V_{x_0} .

$$3. \quad \Phi(a, b)^2 - \Phi(a) \Phi(b) = 0.$$

La ecuación (3.2.10) tiene una sola raíz real. Consideraciones semejantes a las del caso anterior prueban que, en este caso, $Q \cap F$ es una sola recta que pasa por $A = x_0$ y que pertenece a V_{x_0} .

Resumiendo, podemos establecer lo siguiente. Si designamos por \bar{V}_{x_0} al conjunto de los vectores tangentes en x_0 a las intersecciones de Q con los planos que pasan por A , cuando dichas intersecciones son curvas cónicas, y de los vectores pertenecientes a los espacios vectoriales asociados con las rectas que constituyen a las intersecciones en los demás casos, lo dicho anteriormente puede expresarse diciendo que

$$\bar{V}_{x_0} \subset V_{x_0}.$$

Podemos probar ahora que $V_{x_0} \subset \bar{V}_{x_0}$. En efecto, si $y \in V_{x_0}$, es decir si $g(y) = 0$, podemos elegir al vector a de manera que sea $g(a) = 1$, por cuanto g no es idénticamente nula según hemos supuesto. El plano F que pasa por x_0 y que contiene a los puntos $x_0 + a$ y $x_0 + y$ da lugar a una cónica $Q \cap F$ que tiene por vector tangente en x_0 a

$$t = -g(y)a + g(a)y = y.$$

Por consiguiente y pertenece a \bar{V}_{x_0} . Podemos establecer por tanto, que

$$V_{x_0} = \bar{V}_{x_0}$$

El resultado obtenido justifica las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1. Dada una cuádrlica Q , a cada punto x_0 de ella que cumple la condición

$$\varphi x_0 + a^* \neq 0$$

le corresponde un subespacio V_{x_0} de V de dimensión $n-1$ que se llama *espacio tangente a Q en x_0* y que es definido por la relación (3.2.6) o por la relación (3.2.7). El hiperplano T_{x_0} que pasa por x_0 , que está asociado al espacio tangente V_{x_0} se llama *hiperplano tangente a Q en x_0* . En virtud de (3.2.7) los puntos de ese hiperplano satisfacen a la ecuación

$$\Phi(x_0, x - x_0) + f(x - x_0) = 0.$$

Ahora bien, por pertenecer x_0 a la cuádrlica, tiene lugar la relación

$$\Phi(x_0) + 2f(x_0) = \alpha.$$

Luego la ecuación del hiperplano tangente puede escribirse en la forma

$$\Phi(x_0, x) + f(x_0 + x) = \alpha, \quad (3.2.12)$$

que es la *ecuación del hiperplano tangente T_{x_0} en x_0 a la cuádrlica* cuya ecuación es (3.2.1).

Definición 3.2.2. Una cuádrlica que contiene a un punto v que cumple la condición

$$\varphi v + a^* = 0 \quad (3.2.13)$$

se llama *cono*. El punto v se llama entonces *vértice* del cono.

Según lo visto anteriormente, una cuádrlica que no es un cono tiene un hiperplano tangente en cada uno de sus puntos, y un cono los tiene en los puntos que no son vértices.

Las consideraciones precedentes permiten reconocer que el hiperplano tangente a una cuádrlica Q en un punto x_0 es bien determinado por las intersecciones de Q con todos los planos que pasan por x_0 . Por tanto los hiperplanos tangentes no dependen de la forma cómo se represente la cónica mediante una ecuación sino del conjunto de puntos que pertenecen a ella. Vamos a deducir de aquí, en particular, que si una cuádrlica posee puntos que no son vértices,¹⁾ su representación en la forma (3.2.1) es esencialmente única, una vez elegido el origen del sistema de coordenadas. La proposición siguiente precisa el significado de esta aseveración.

Teorema 3.2.1. Dada una cuádrlica Q que contiene a un punto x_0 que no es un vértice¹⁾, sean

$$\Phi_1(x) + 2f_1(x) = \alpha_1$$

y

$$\Phi_2(x) + 2f_2(x) = \alpha_2$$

dos ecuaciones de la misma cuádrlica referida a un mismo origen O . Entonces existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que se cumplen las relaciones

$$\Phi_2 = \lambda \Phi_1, \quad f_2 = \lambda f_1 \quad y \quad \alpha_2 = \lambda \alpha_1.$$

1) El caso de una cuádrlica cuyos puntos son todos vértices es materia del ejemplo 3.3.1.

Demostración. Puesto que x_0 no es un vértice, las funciones lineales

$$g_1(x) = \Phi_1(x_0, x) + f_1(x)$$

y

$$g_2(x) = \Phi_2(x_0, x) + f_2(x),$$

según hemos visto antes, no son idénticamente nulas, y tienen ambas el mismo núcleo, que es el espacio tangente V_{x_0} a Q en x_0 .

Sea (e_1, \dots, e_n) una base de V tal que (e_1, \dots, e_{n-1}) sea una base de V_{x_0} . Se tiene entonces que $g_1(e_i) = g_2(e_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$. Por tanto, si $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ es un vector cualquiera, se tiene.

$$g_1(x) = \xi^n g_1(e_n) \quad \text{y} \quad g_2(x) = \xi^n g_2(e_n),$$

donde $g_1(e_n)$ y $g_2(e_n)$ tienen que ser diferentes de cero. Luego

$$g_2(x) = \frac{g_2(e_n)}{g_1(e_n)} g_1(x) = \lambda g_1(x), \quad \lambda \neq 0$$

Consideremos dos vectores cualesquiera: a , tal que $g_2(a) = \lambda g_1(a) \neq 0$, y $b \neq 0$, que es un vector de V_{x_0} tal que $g_1(b) = g_2(b) = 0$. La cónica γ que es intersección del plano F , formado por los puntos $x = x_0 + \xi a + \eta b$, con la cuádrlica, admite entonces las ecuaciones

$$\xi^2 \Phi_1(a) + 2\xi\eta\Phi_1(a, b) + \eta^2 \Phi_1(b) + 2\xi g_1(a) = 0 \quad (3.2.14)$$

y

$$\xi^2 \Phi_2(a) + 2\xi\eta\Phi_2(a, b) + \eta^2 \Phi_2(b) + 2\xi g_2(a) = 0. \quad (3.2.15)$$

Si multiplicamos la primera por λ y el resultado lo restamos de la segunda, se obtiene

$$\xi^2(\Phi_2 - \lambda\Phi_1)(a) + 2\xi\eta(\Phi_2 - \lambda\Phi_1)(a, b) + \eta^2(\Phi_2 - \lambda\Phi_1)(b) = 0, \quad (3.2.16)$$

ecuación que es satisfecha por todos los puntos (ξ, η) de la cónica. A continuación nuestro propósito será demostrar que los coeficientes del primer miembro de (3.2.16) son nulos, y que por tanto se cumplen las relaciones

$$\Phi_2(a) = \lambda\Phi_1(a), \quad \Phi_2(a, b) = \lambda\Phi_1(a, b), \quad \Phi_2(b) = \lambda\Phi_1(b). \quad (3.2.17)$$

Supongamos que uno de esos coeficientes no es nulo. En tal caso el conjunto Ω de los puntos que satisfacen a la relación (3.2.16), conjunto que, como hemos observado, contiene a la cónica γ dada por las ecuaciones (3.2.14) o (3.2.15), está formado por *dos rectas que se cortan en el origen* o por *una recta que pasa por el origen* o bien *se reduce al origen* según que sea positivo, nulo o negativo el discriminante del trinomio del primer miembro de (3.2.16), como vimos en el caso del trinomio (3.2.9). Por consiguiente la cuádrica γ será necesariamente degenerada. Recordemos que para que una cónica de ecuación

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0$$

sea degenerada es necesario y suficiente que se cumpla la relación¹⁾.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.18)$$

Para la cónica γ de ecuación (3.2.14) el determinante Δ tiene el valor

1) Ver J.Tola, Análisis I (1970), pág. 163.

$$\begin{vmatrix} \Phi_I(a) & \Phi_I(a, b) & g_I(a) \\ \Phi_I(a, b) & \Phi_I(b) & 0 \\ g_I(a) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -g_I(a)^2 \Phi_I(b).$$

Para que se cumpla la condición (3.2.18), puesto que $g_I(a) \neq 0$, debería ser $\Phi_I(b) = 0$. La ecuación (3.2.14) podría escribirse entonces en la forma

$$\xi [\Phi_I(a) \xi + 2\Phi_I(a, b) \eta + 2g_I(a)] = 0.$$

Si alguno de los coeficientes $\Phi_I(a)$ o $2\Phi_I(a, b)$ fuera diferente de cero, la cónica γ degeneraría en las rectas reales

$$\xi = 0 \quad \text{y} \quad \Phi_I(a) \xi + 2\Phi_I(a, b) \eta + 2g_I(a) = 0,$$

la segunda de las cuales no pasa por el origen. γ no podría entonces estar contenida en el conjunto Ω definido por (3.2.16). Podemos concluir por tanto que debería ser $\Phi_I(a) = \Phi_I(a, b) = 0$. De los resultados que hemos obtenido se deduciría que $\Phi_I(x, y)$ tendría que ser idénticamente nulo. En efecto, para cualquier vector $x \neq 0$ de V , si fuera $g_I(x) = 0$, podríamos elegir $b=x$, y entonces resultaría $\Phi_I(x) = \Phi_I(b) = 0$. Si en cambio fuera $g_I(x) \neq 0$, podríamos elegir $a=x$ y entonces sería $\Phi_I(x) = \Phi_I(a) = 0$. Se ve pues que en todo caso tendría que ser $\Phi_I(x) = 0$, y por tanto

$$\Phi_I(x, y) = \frac{1}{2} [\Phi_I(x + y) - \Phi_I(x) - \Phi_I(y)] = 0$$

para todos los vectores x e y de V . Tal cosa no es posible por cuanto, por la definición de ecuación de una cuádrica, Φ_I no es idénticamente nula. Podemos concluir por consiguiente que la cónica γ no puede ser degenerada, y por tanto se cumplen las relaciones (3.2.17).

De las relaciones (3.2.17) podemos deducir ahora que se cumple en general que

$$\Phi_2(x) = \lambda \Phi_1(x) . \quad (3.2.19)$$

En efecto, dado x cualquiera de V , diferente de cero, si $g_1(x) \neq 0$, basta suponer $b = x$ y entonces tiene lugar (3.2.19) en virtud de la tercera relación (3.2.17). Si $g_1(x) = 0$, basta suponer $a = x$ y se cumple (3.2.19) debido a la primera relación (3.2.17). Puesto que

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2} [\Phi_1(x+y) - \Phi_1(x) - \Phi_1(x)]$$

y

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{2} [\Phi_2(x+y) - \Phi_2(x) - \Phi_2(x)] ,$$

se deduce de (3.2.19) que

$$\Phi_2(x, y) = \lambda \Phi_1(x, y) , \quad \forall x, y \in V.$$

Las relaciones

$$f_1(x) = g_1(x) - \Phi_1(x_0, x)$$

$$f_2(x) = g_2(x) - \Phi_2(x_0, x)$$

implican que

$$f_2 = \lambda f_1 .$$

Por último, de

$$\Phi_1(x_0) + 2f_1(x_0) = \alpha_1$$

y

$$\Phi_2(x_0) + 2f_2(x_0) = \alpha_2$$

se sigue que

$$\alpha_2 = \lambda \alpha_1 . \blacksquare$$

Teorema 3.2.2. Si x_0 es un punto de la cuádrica Q de ecuación (3.2.1), que no es vértice de ella, el subespacio afín, asociado al núcleo K de Φ , que pasa por el punto x_0 , goza de la propiedad siguiente: Si M es uno cualquiera de sus puntos, la intersección de Q con el subespacio afín T_l , paralelo al hiperplano tangente T_{x_0} , que pasa por M , cuando no es vacía, contiene, con cada punto P , a su simétrico P' respecto del punto M .

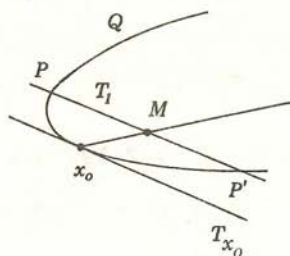
Demostración. Sea $x_0 + v$ donde $v \in K$ el punto M . Si y es un vector arbitrario del espacio tangente V_{x_0} , un punto cualquiera de T_l es $x_0 + v + \lambda y$ donde λ es un número arbitrario. Para que ese punto pertenezca a Q debe satisfacer a la relación

$$\Phi(x_0 + v + \lambda y) + 2f(x_0 + v + \lambda y) = \alpha .$$

Para cada $v \in K$ e $y \in V_{x_0}$, λ debe satisfacer entonces a la siguiente ecuación en que hemos tenido en cuenta que $x_0 \in Q$, que v pertenece al núcleo de Φ , y que $\Phi(x_0, y) + f(y) = 0$ porque $y \in V_{x_0}$ (ver la relación (3.2.7)),

$$\Phi(w)\lambda^2 + 2f(v) = 0 .$$

Por consiguiente si esta ecuación tiene una raíz real λ , también $-\lambda$, es una raíz, y los puntos de intersección de T_l con Q que resultan, son $x_0 + v + \lambda y$ y $x_0 + v - \lambda y$, que son simétricos respecto del punto M . ■



Ejercicio

*3.2.1 Sea

$$\Phi(x-q) + 2 \langle a_1^*, x-q \rangle = 0$$

la ecuación de una cuádrlica que pasa por el punto q (ver el teorema 3.1.1). Si q no es un vértice, demostrar que el espacio tangente a la cuádrlica en el punto q está formado por los vectores y que cumplen la condición

$$\langle a_1^*, y \rangle = 0.$$

3.3. Conos

Sea Q un cono cuya ecuación es

$$\Phi(x) + 2 \langle a^*, x \rangle = \alpha, \quad (3.3.1)$$

y sea v un vértice. Se cumplen por tanto las relaciones

$$\Phi(v) + 2 \langle a^*, v \rangle = \alpha, \quad \varphi v + a^* = 0. \quad (3.3.2)$$

Podemos probar de inmediato que los vértices son independientes del origen que se emplee para expresar la ecuación del cono. En efecto, supongamos que se elige un nuevo origen respecto del cual las nuevas coordenadas son x' cuya relación con las antiguas es dada por la fórmula $x = x_0 + x'$. La nueva ecuación del cono es (sección 3.1)

$$\Phi(x') + 2 \langle a^* + \varphi x_0, x' \rangle = \alpha - \Phi(x_0) - 2f(x_0). \quad (3.3.3)$$

La nueva coordenada del punto cuya coordenada era v es ahora $v - x_0$. Debemos comprobar que cumple las condiciones de vértice pa

ra la ecuación (3.3.3). En primer lugar observaremos que $v - x_0$ satisface a (3.3.3) porque (3.3.2) y (3.3.3) determinan al mismo conjunto de puntos del espacio E . Se tiene además

$$\varphi(v - x_0) + a^* + \varphi x_0 = 0$$

en virtud de la segunda relación (3.3.2). Por consiguiente se cumplen las condiciones de la definición 3.2.2 para que $v - x_0$ sea un vértice de la cuádrlica dada por la ecuación (3.3.3).

Teorema 3.3.1 Para que una cuádrlica sea un cono con vértice v es necesario y suficiente que, cualquiera que sea el origen del sistema de coordenadas, su ecuación pueda escribirse en la forma

$$\Phi(x - v) = 0 \quad (3.3.4)$$

donde Φ es una forma bilineal simétrica.

Demostración. Sea

$$\Phi(x) + 2\langle a^*, x \rangle = \alpha$$

la ecuación de un cono con vértice en v . Puesto que se tiene ahora $a^* = -\varphi v$, la ecuación del cono puede escribirse así

$$\Phi(x) - 2\Phi(v, x) = \alpha.$$

Dado que v pertenece al cono, se deduce de aquí que $\alpha = -\Phi(v)$. Por consiguiente la ecuación se reduce a

$$\Phi(x - v) = 0.$$

Recíprocamente si la ecuación de la cuádrlica es (3.3.4), el punto v pertenece a ella, y como la ecuación puede escribirse en la forma

$$\Phi(x) - 2\Phi(v, x) = -\Phi(v)$$

se tiene $\langle a^*, x \rangle = \langle -\varphi v, x \rangle$ y por consiguiente

se tiene $\langle a^*, x \rangle = \langle -\varphi v, x \rangle$ y por consiguiente $\varphi(v) + \sigma^* = 0$.

Luego v es un vértice. ■

Corolario. Para que una cuádrlica sea un cono es necesario y suficiente que el origen de coordenadas pueda elegirse de manera que su ecuación se reduzca a la forma

$$\Phi(x) = 0. \quad (3.3.5)$$

Demostración. Si Q es un cono y V es uno de sus vértices en cuyo caso cualquiera que sea el origen su ecuación tiene la forma (3.3.4), si se traslada el origen al punto su ecuación toma la forma (3.3.5).

Por otra parte, en virtud, del teorema anterior, la ecuación (3.3.5) representa a un cono de vértice en el origen. ■

Si prescindimos de casos excepcionales en los que no insistiremos, es posible tener idea de la forma de un cono Q de la manera siguiente:

Sea su ecuación

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^i \xi^j = 0$$

cuando se toma a uno de sus vértices como origen. Supongamos que sea $a_{rs} \neq 0$. La intersección del cono Q con el hiperplano H_λ de ecuación $\xi^r = \lambda$, donde $\lambda \neq 0$ es un número cualquiera, es dada por la ecuación

$$\sum_{i,j \neq r} a_{ij} \xi^i \xi^j + a_{rr} \lambda^2 + \sum_{i=1}^n a_{ri} \lambda \xi^i = 0,$$

o sea

$$\sum_{i, j \neq r} \frac{a_{ij}}{\lambda^2} \xi^i \xi^j + \sum_{i=1}^n \frac{a_{ri}}{\lambda} \xi^i + a_{rr} = 0,$$

que, salvo casos excepcionales, es la ecuación de una cuádrica Q_λ del hiperplano H_λ . Las cuádricas Q_λ son semejantes entre sí: a cada punto $P_1(\xi^i)$ de la cuádrica Q_{λ_1} puede hacérsele corresponder el punto $P_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \xi^i\right)$ de Q_{λ_2} , de manera que si O_1 y O_2 son los puntos $\xi^i = 0$, $i \neq r$ de los planos H_{λ_1} y H_{λ_2} respectivamente, se tiene que $\overrightarrow{O_2 P_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{O_1 P_1}$. La forma como varían las cuádricas Q_λ al variar λ da idea de cómo se genera Q .

Teorema 3.3.2. Toda recta que une un vértice del cono con uno de sus puntos está íntegramente contenida en él.

Demostración. Sea $\Phi(x) = 0$ la ecuación del cono si se toma como origen del vértice considerado. Si $x_1 \neq 0$ es otro punto del cono, se tiene

$$\Phi(\lambda x_1) = \lambda^2 \Phi(x_1) = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3.3. Los vértices de un cono constituyen un subespacio afín de E asociado al núcleo K de φ que, según el teorema 2.2.1, es igual al núcleo de Φ . La dimensión de ese subespacio es $n - r$, donde r es el rango de φ . Dicho subespacio queda determinado por cualquiera de los vértices.

Demostración. Si elegimos como origen de coordenadas a un vértice, la ecuación del cono será $\Phi(x) = 0$. Luego será $a^* = 0$. Si v pertenece al núcleo K de φ , satisfará a las relaciones (3.3.2) y será por tanto un vértice del cono.

Recíprocamente, si v es un vértice debe satisfacer a las relaciones (3.3.2) y por tanto debe ser $\varphi v = 0$, o sea $v \in K$.

En consecuencia, los vértices del cono constituyen el conjunto de puntos v tales que $v \in K$, o sea el subespacio afín asociado a K . La dimensión de ese subespacio, que es igual a la dimensión de K de $n-r$, donde r es el rango de φ (Pte. I, 3.5.2)). ■

Definición 3.3.1 El subespacio E_0 de E formado por los vértices del cono se denomina *arista* del cono y tiene dimensión $n-r$. Su espacio vectorial asociado es el núcleo K de φ , que es también el núcleo de Φ . Si Φ es regular la arista se reduce a un único vértice, pues K se reduce al vector nulo.

Teorema 3.3.4 Si S es un subespacio afín de dimensión d de la arista E_0 del cono Q , y si P es un punto cualquiera perteneciente a dicho cono, situado fuera de S , el subespacio E_1 de E , de dimensión $d+1$, generado por S y P , está contenido en Q .

Demostración. Sea O un vértice cualquiera de Q contenido en S . Si (e_1, \dots, e_d) es una base del espacio vectorial asociado a S , y si $e_{d+1} = \vec{OP}$, donde P es un punto de Q situado fuera de S , entonces $(e_i) = (e_1, \dots, e_{d+1})$ es una base del espacio asociado al subespacio afín generado por S y P . Entonces $(O, (e_i))$ es un sistema de coordenadas de E_1 .

Si M es un punto cualquiera de E_i y $\vec{OM} = \sum_{i=1}^{d+1} \xi^i e_i$, considere

mos la recta r cuyos puntos (x^1, \dots, x^{d+1}) satisfacen a las ecuaciones

$$\xi^{d+1} (x^i + \xi^i) - 2\xi^i x^{d+1} = 0, \quad (i = 1, \dots, d),$$

recta que contiene evidentemente al punto M . Esta recta contiene también al punto O' tal que $\vec{OO}' = -\sum_{i=1}^d \xi^i e_i$, el cual pertenece a S y por tanto es un vértice. La misma recta contiene también al punto P' para el cual es $\vec{OP}' = \frac{1}{2} \xi^{d+1} e_{d+1}$. Puesto que P' está en la recta que une al vértice O con el punto P del cono, pertenece a éste, en virtud del teorema 3.3.2. Por la misma razón M pertenece al cono por estar en la recta r que une al vértice O' con el punto P' del cono. ■

Ejemplo 3.3.1 Si todos los puntos del cono $\Phi(x) = 0$ son vértices del mismo, coincide con su arista y es por tanto un subespacio afín asociado al núcleo K de φ . Sea (e_1, \dots, e_n) una base de V tal que (e_1, \dots, e_r) sea una base de K . Mediante esa base

la ecuación del cono es $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j = 0$, y puesto que es satis-

fecha por todos los puntos de E para los cuales es $\xi^{r+1} = \dots = \xi^n = 0$,

su ecuación se reduce a $\sum_{i,j=r+1}^n \alpha_{ij} \xi^i \xi^j = 0$ en que los coeficientes

deben ser tales que la ecuación sea satisfecha únicamente para

$$\xi^{r+1} = \dots = \xi^n = 0.$$

Así, para $n = 3$ y $r = 2$, la ecuación de un cono que coincide con su arista puede reducirse a $(\xi^3)^2 = 0$, y el cono coincide con el plano $\xi^3 = 0$.

Teorema 3.3.5 Si la arista E_0 de un cono es de dimensión $\geq n-2$, es decir si el rango de φ es ≤ 2 , sólo pueden ocurrir tres casos:

1. El cono se reduce a un subespacio de dimensión $n - 2$ que coincide con su arista.
2. El cono se reduce a un hiperplano que es su arista.
3. El cono se reduce a dos hiperplanos diferentes que se cortan según la arista.

Demostración. Elijamos como origen O a un vértice del cono. La ecuación del cono se reduce entonces (corolario del teorema 3.3.1) a $\Phi(x) = 0$.

Si (e_1, \dots, e_n) es una base de V , puede escribirse

$$\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \xi^j \Phi(e_i, e_j) \quad (3.3.6)$$

donde ξ^1, \dots, ξ^n son las coordenadas del punto x respecto del sistema $(0, (e_i))$. Sea S un subespacio de E_0 de dimensión $n-2$. Si no existe punto alguno del cono fuera de S , el cono se reduce a dicho subespacio S , el cual coincide evidentemente con la arista E_0 .

Supongamos ahora que existe un punto P del cono, situado fuera de S . Por el teorema 3.3.4 el hiperplano E_1 que contiene

ne a S y a P está contenido en el cono. Si no existen puntos del cono fuera de E_1 , el cono se reduce a dicho hiperplano. Probaremos que cada punto de E_1 es entonces un vértice. En efecto, sea (e_1, \dots, e_n) una base de V tal que (e_1, \dots, e_{n-1}) sea una base del espacio vectorial V_1 asociado a E_1 . Consideremos en E el sistema de coordenadas $(0, (e_i))$ donde O es un punto cualquiera de S y por tanto un vértice del cono; y sean ξ^1, \dots, ξ^n las coordenadas genéricas de los puntos de E relativas a ese sistema de coordenadas. El hiperplano E_1 es la cuádrlica de ecuación $(\xi^n)^2 = 0$. Por tanto se tiene $\Phi(x) = (\xi^n)^2$ y $a^* = 0$; y la forma bilineal simétrica Φ es dada por

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} [\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)] = \frac{1}{2} [(\xi^n + \eta^n)^2 - (\xi^n)^2 - (\eta^n)^2] = \xi^n \eta^n.$$

Luego

$$\langle \varphi x, y \rangle = \xi^n \eta^n.$$

Cualquiera que sea el punto x de E_1 se tiene entonces $\xi^n = 0$ y por tanto

$$\langle \varphi x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in V.$$

Por consiguiente es $\varphi x = 0$, o sea $\varphi x + a^* = 0$, lo cual demuestra que x es un vértice. Queda demostrado así que el hiperplano E_1 al que se reduce el cono, es al mismo tiempo su arista.

Supongamos ahora, por último, que existe un punto P_1 del cono situado fuera de E_1 . Elijamos una base (e_1, \dots, e_{n-2}) del subespacio vectorial asociado a S . Si definimos a los vectores $e_{n-1} = \vec{OP_1}$ y $e_n = \vec{OP_1}$, entonces (e_1, \dots, e_{n-1}) es una base del subespacio V_1 asociado a E_1 y (e_1, \dots, e_n) es una base de V . Cada punto x de E se expresa respecto del sistema $(0, (e_i))$ por la fórmula

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i .$$

Para $i, j \leq n-1$, e_i , e_j , y $e_i - e_j$ son puntos del cono; luego, de la relación (2.3.3) resulta, puesto que su ecuación es $\Phi(x) = 0$,

$$\Phi(e_i, e_j) = \frac{1}{2} [\Phi(e_i) + \Phi(e_j) - \Phi(e_i - e_j)] = 0.$$

Además, e_n pertenece al cono, luego $\Phi(e_n, e_n) = \Phi(e_n) = 0$. Haciendo uso de la expresión (3.3.6) de $\Phi(x)$, la ecuación del cono será

$$\xi^{n-1} \xi^n \Phi(e_{n-1}, e_n) = 0.$$

Puesto que en virtud de la definición de las cuádricas Φ no es idénticamente nula, los puntos del cono son aquellos que cumplen una de las dos condiciones $\xi^{n-1} = 0$ o bien $\xi^n = 0$. Por consiguiente el cono está formado por los dos hiperplanos de ecuaciones $\xi^{n-1} \equiv 0$ y $\xi^n \equiv 0$, que se cortan según el subespacio S , que es la arista del cono, porque cualquier punto P del cono que no pertenece a S pertenece a uno de dichos hiperplanos. Si P' es un punto del otro hiperplano, y por tanto del cono, que no pertenece a S , es claro que la recta PP' no está contenida en el cono, por tanto P no es un vértice en virtud del teorema 3.3.2. ■

Ejemplo 3.3.2. Para $n=3$, o bien es $r \leq 2$, en cuyo caso se cumple la hipótesis del teorema anterior y por tanto el cono se reduce a una recta, a un plano, o a dos planos que se cortan; o bien es $r = 3$, en cuyo caso E_0 es de dimensión 0 y por tanto se reduce a un punto que es el único vértice del cono, el cual tiene como ecuación, para un sistema adecuado de coordenadas, a

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 0.$$

Ejercicios

*3.3.1 Para que una cuádrlica de \mathbb{R}^3 de ecuación

$$\Phi(x) + 2f(x) = \alpha$$

sea un cono, es necesario y suficiente que si (α_{ij}) es la matriz de Φ y $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ es la matriz de f , para una base de \mathbb{R}^3 , las dos matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha \end{pmatrix}$$

tenham el mismo rango. Si esta condición se cumple las coordenadas de los vértices son las soluciones del sistema

$$\alpha_{11}x^1 + \alpha_{12}x^2 + \alpha_{13}x^3 = -\beta_1$$

$$\alpha_{21}x^1 + \alpha_{22}x^2 + \alpha_{23}x^3 = -\beta_2$$

$$\alpha_{31}x^1 + \alpha_{32}x^2 + \alpha_{33}x^3 = -\beta_3$$

$$\beta_1x^1 + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 = \alpha$$

Sugerencia. Para que la cuádrlica sea un cono es necesario y suficiente que el sistema de ecuaciones

$$\varphi x = -a^*$$

$$f(x) = \alpha$$

tenga solución. Este sistema equivale a un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas que son las componentes de x . La condición del enunciado es la condición

necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible, en virtud del teorema 8.2.1 de la Pte.I.

3.3.2. Mediante el criterio del ejercicio anterior averiguar cuáles de las siguientes cuádricas del espacio de tres dimensiones son conos. En los casos afirmativos hallar los vértices.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
3. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
4. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
5. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
7. $y^2 + z^2 - x = 0$
8. $y^2 - z^2 - x = 0$
9. $x^2 + y^2 = 1$
10. $x^2 + y^2 = -1$
11. $x^2 - y^2 = 1$
12. $x^2 - y^2 = 0$
13. $x^2 + y^2 = 0$
14. $x^2 + y = 0$
15. $x^2 - 1 = 0$
16. $x^2 + 1 = 0$
17. $x^2 = 0$
18. $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$

3.4 Cuádricas con centro

Sea Q una cuádrlica cuya ecuación es

$$\Phi(x) + 2f(x) = \alpha \quad (3.4.1)$$

Cualquiera que sea el vector c del espacio V puede escribirse

$$\Phi(x) = \Phi(c+(x-c)) = \Phi(c) + \Phi(x-c) + 2\Phi(c, x-c),$$

lo que permite escribir la ecuación (3.4.1) en la forma

$$\Phi(x-c) + 2[\Phi(c, x-c) + f(x-c)] = \alpha - \Phi(c) - 2f(c).$$

Esta ecuación atrae la atención sobre aquellos puntos c del espacio E para los cuales se cumple la condición

$$\Phi(c, x) + f(x) = \langle \varphi c, x \rangle + \langle a^*, x \rangle = \langle \varphi c + a^*, x \rangle = 0,$$

$\forall x \in V$, relación que equivale a

$$\varphi c + a^* = 0. \quad (3.4.2)$$

En efecto, si c cumple esta relación se tiene $f(c) = -\Phi(c)$ y la ecuación de la cuádrlica se escribe en la forma particularmente sencilla

$$\Phi(x-c) = \beta, \quad (3.4.3)$$

donde β es la constante $\beta = \alpha + \Phi(c)$. Si c_1 es otro punto de E para el que se cumple la relación $\Phi c_1 + a^* = 0$. Esta relación y la (3.4.2) implica que

$$\Phi(c_1) = -\langle a^*, c_1 \rangle = \Phi(c_1, c) = -\langle a^*, c \rangle = \Phi(c).$$

Luego $\alpha + \Phi(c_1) = \alpha + \Phi(c) = \beta$, y por tanto la ecuación de la cuádrlica puede escribirse también en la forma

$$\Phi(x-c_1) = \beta.$$

Si se cumple (3.4.2) y por tanto la ecuación toma la forma (3.4.3), el punto c goza, respecto de la cuádrlica, de una propiedad importante, a saber que si P es un punto cualquiera de la cuádrlica

tal que $\vec{OP} = c+a$, donde O es el origen de coordenadas, en cuyo caso se cumple que $\Phi(a) = \beta$, entonces el punto P' simétrico de P respecto de c , para el cual se tiene que $\vec{OP}' = c-a$, pertenece también a la cuádrlica. Esta observación motiva a la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Se llama *centro* de una cuádrlica de ecuación (3.4.1) a cada punto A de E tal que $\vec{OA} = c$ donde c cumple la condición (3.4.2).

Teorema 3.4.1. Los centros de una cuádrlica son independientes del origen del sistema de coordenadas que se emplee para expresar su ecuación

Demostración. Sea O el origen respecto del cual (3.4.1) es la ecuación de una cuádrlica. Supongamos que el punto A , tal que $\vec{OA} = c$, es un centro, y que por tanto se cumple (3.4.2).

Si cambiamos el origen a otro punto O_1 cualquiera, de manera que la relación de las antiguas coordenadas x con las nuevas x' sea dada por la fórmula $x = x' + x_0$, la nueva ecuación de la cuádrlica es

$$\Phi(x') + 2f_1(x') = \alpha_1, \quad (3.4.4)$$

donde

$$\alpha_1 = \alpha - \Phi(x_0) - 2f(x_0)$$

y

$$f_1(x') = \Phi(x_0, x') + f(x') = \langle \varphi x_0 + a^*, x' \rangle;$$

de manera que

$$a_1^* = \varphi(x_0) + a^*$$

La nueva coordenada del punto A es $c - x_0$, y se tiene

$$\varphi(c - x_0) + a_1^* = \varphi c - \varphi x_0 + \varphi x_0 + a^* = 0,$$

lo que demuestra que el punto A tal que $\vec{O_1 A} = c - x_0$ es un centro de la cuádrica expresada por la ecuación (3.4.4). ■

Observación. Debe notarse que la condición 3.4.2 que debe cumplir un centro c es idéntica a la condición (3.2.13) que deben cumplir los vértices; pero estos últimos deben pertenecer, además, a la cuádrica. Por consiguiente, todo vértice de un cono es un centro, pero no inversamente. Si la cuádrica no es un cono, sus centros no pertenecen a ella.

Teorema 3.4.2. Si para una cuádrica Q la función Φ es no degenerada, entonces Q posee exactamente un centro.

Demostración. Si Φ es no degenerada, entonces (corolario del teorema 2.2.1) es $\det \varphi \neq 0$. φ es por tanto regular y la ecuación $\varphi c = -a^*$ tiene exactamente una solución c . Este punto será entonces el único centro. ■

Teorema 3.4.3. Para que una cuádrica Q de ecuación (3.4.1) posea un centro, es necesario y suficiente que el vector a^* sea ortogonal al núcleo del homomorfismo φ asociado a Φ .

Demostración. La condición (3.4.2) es equivalente a que a^* pertenezca al subespacio $Im \varphi$. Y puesto que según el teorema 5.5.2 de la Pte. I es $Im \varphi = (Ker \varphi)^\perp$, equivale también a que a^* sea ortogonal al núcleo de φ . ■

Teorema 3.4.4. Los centros de una cuádrica, cuando existen, constituyen un subespacio afín asociado al espacio vectorial $Ker \varphi = Ker \Phi = K$.

Demostración. Si c es un centro, y por tanto $\varphi c + a^* = 0$, para que sea $\varphi c' + a^* = 0$ es necesario y suficiente que sea $\varphi(c - c') = 0$, o sea que $c' = c + x$, donde $x \in \text{Ker } \varphi$; es decir que todos los puntos $c' = c + x$ para $x \in \text{Ker } \varphi$, son centros de la cuádrlica.

Corolario. Si, referida una cuádrlica Q a un origen dado de coordenadas, c y c' son dos de sus centros cualesquiera se cumple la relación

$$\Phi(c - c', x) = \Phi(c, x) - \Phi(c', x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Demostración. Según el teorema anterior, $c - c' \in \text{Ker } \Phi$. ■

Teorema 3.4.5. Para que un punto A de E sea centro de la cuádrlica Q , la cual contiene por lo menos a un punto que no es un vértice, es necesario y suficiente que si P es uno cualquiera de sus puntos, también pertenezca a ella el punto P' tal que $\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP}$, que es simétrico de P respecto del punto A .

Demostración. Ya hemos señalado anteriormente que la condición del enunciado es necesaria para que el punto A sea un centro de Q . Vamos a probar ahora que la condición es suficiente.

Con este fin tomemos al punto A como origen de coordenadas. Sea entonces

$$\Phi(x) + f(x) = \alpha \quad (3.4.5)$$

la ecuación de la cuádrlica Q . Por hipótesis, esta relación implica que

$$\Phi(-x) + f(-x) = \alpha,$$

o bien, por cuanto $\Phi(-x) = \Phi(x)$ y $f(-x) = -f(x)$,

$$\Phi(x) - f(x) = \alpha.$$

De esta relación y de (3.4.5) se deduce que es $f(x) = 0$ para cada punto x perteneciente a la cuádrica. Resulta entonces del teorema 3.2.1 que f es la aplicación lineal idénticamente nula y por tanto $a^* = 0$. Es decir que el origen A cumple la condición (3.4.2) y es por tanto un centro de la cuádrica. ■

Teorema 3.4.6. Dado un origen de coordenadas, para que un punto c sea centro de una cuádrica, es necesario y suficiente que su ecuación relativa a ese origen pueda escribirse en la forma

$$\Phi(x - c) = \beta \quad (3.4.6)$$

Demostración. Ya fue probado anteriormente que la condición es necesaria. Si, recíprocamente, suponemos que (3.4.4) es la ecuación de la cuádrica, ésta puede escribirse así

$$\Phi(x) - 2\Phi(c, x) = \beta - \Phi(c),$$

que es de la forma (3.4.1) si se define la función lineal mediante la fórmula

$$f(x) = -\Phi(c, x), \quad \forall x \in V,$$

relación que prueba justamente que c es un centro. ■

Corolario 1. La condición necesaria y suficiente para que una cuádrica que no es un cono tenga un centro en c es que su ecuación pueda escribirse en la forma

$$\Phi(x - c) = \beta, \quad \beta \neq 0$$

Demostración. Este corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior y del corolario 3.3.1.

Corolario 2. Para que una cuádrica *que no es un cono* posea un centro es necesario y suficiente que pueda elegirse el origen del sistema de coordenadas de manera que su ecuación se reduzca a la forma

$$\Phi(x) = 1 \quad (3.4.7)$$

El origen elegido es entonces un centro.

Demostración. Que la condición es suficiente resulta por aplicación directa del corolario anterior. La condición es necesaria porque mediante el mismo corolario, eligiendo a c como nuevo origen y sustituyendo a Φ por $\frac{1}{\beta} \Phi$, la ecuación de la cuádrica se reduce a la forma (3.4.7). ■

Teorema 3.4.7. Sea Q una cuádrica *que no es un cono* y que posee un centro c . Entonces, cada espacio tangente V_{x_0} (definición 3.2.1) en uno de sus puntos x_0 , contiene al núcleo K de Φ , y ningún centro está contenido en un hiperplano tangente a la cuádrica.

Demostración. Según sabemos, si se toma como origen al punto c la ecuación de la cuádrica puede escribirse en la forma (3.4.7). Puesto que entonces es $a^* = 0$, se deduce de la fórmula (3.2.6),

$$\begin{aligned} V_{x_0} &= \{y \in V \mid \langle \varphi x_0, y \rangle = 0\} \\ &= \{y \in V \mid \langle \varphi y, x_0 \rangle = 0\} \supset \{y \in V \mid \varphi y = 0\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$Ker \Phi = Ker \varphi \subset V_{x_0}$$

La ecuación del hiperplano tangente a la cuádrica en x_0 es (ecuación (3.2.12))

$$\Phi(x_0, x) = 1,$$

o bien (teorema 2.2.2)

$$\langle \varphi x_0, x \rangle = \langle x_0, \varphi x \rangle = 1.$$

Si c es un centro se tendrá, por cuanto es $a^* = 0$,

$$\varphi c = 0,$$

y por tanto, puesto que

$$\langle x_0, \varphi c \rangle = 0 \neq 1,$$

c no pertenece al hiperplano tangente en x_0 . Es decir que ningún centro puede estar contenido en un plano tangente. ■

Ejercicios

- 3.4.1.** Sea Q la cuádrica de ecuación (3.4.1), y x_0 sea uno cualquiera de sus puntos que no es vértice. Si V_{x_0} contiene al núcleo K de Φ , entonces, si y_0 es otro punto cualquiera de Q que no es un vértice, V_{y_0} contiene también a K .
- 3.4.2.** Con las mismas notaciones del ejercicio anterior, si K pertenece a V_{x_0} , entonces Q contiene a cada subespacio afín, asociado al espacio vectorial K , que pasa por cualquiera de sus puntos.
- 3.4.3.** Para que Q sea una cuádrica con centro es necesario y suficiente que cada uno de sus espacios tangentes contenga al núcleo K de Φ .

A partir de ahora y en el resto del capítulo vamos a considerar exclusivamente cuádricas que no son conos, es decir para las cuales se cumple que

$$\varphi x + a^* \neq 0$$

para todo punto x perteneciente a cualquiera de ellas.

3.5 Formas normales de las ecuaciones de las cuádricas de un espacio afín.

Teorema 3.5.1. Consideremos una cuádrica cualquiera con centro.

Si la cuádrica es referida a un sistema de coordenadas $(0, (e_i))$, en que 0 es un centro y (e_i) es una base de V convenientemente elegida, la ecuación toma la forma normal.

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i \xi^i \xi^i = 1, \quad (3.5.1)$$

donde r es el rango de Φ y

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{para } i = 1, \dots, s \\ -1 & \text{para } i = s+1, \dots, r \\ 0 & \text{para } i = r+1, \dots, n \end{cases} \quad (3.5.2)$$

en que s ($1 \leq s \leq r$) es el índice de Φ .

Demostración. Si se toma como origen un centro 0 , la ecuación de la cuádrica puede escribirse en la forma

$$\Phi(x) = 1.$$

Si elegimos ahora la base (e_i) de la manera descrita en la sección 2.8 de manera que se cumplen las relaciones (2.8.1), la ecuación de la cuádrica será dada en la siguiente forma normal:

$$\sum_{i=1}^r \epsilon_i \xi^i \xi^i = 1.$$

s es el índice de Φ , y por tanto $0 \leq s \leq r$. Si fuera $s = 0$, la ecuación anterior tomaría la forma

$$-\sum_{i=1}^r (\xi^i)^2 = 1,$$

y el conjunto definido resultaría vacío. La ecuación no representaría a una cuádrlica. Debe ser por tanto $1 \leq s \leq r$. ■

Teorema 3.5.2. Consideremos una cuádrlica Q *sin centro*. Referida a un sistema de coordenadas $(O, (e_i))$, en que O es un punto cualquiera perteneciente a Q , (e_n, \dots, e_{n-1}) es una base convenientemente elegida del espacio V_0 tangente a la cuádrlica en el punto O , y e_n es un vector del núcleo $\text{Ker } \Phi = \text{Ker } \varphi = K$, que no está contenido en V_0 , su ecuación se escribe en la *forma normal*

$$\sum_{i=1}^r \epsilon_i \xi^i \xi^i + 2\xi^n = 0 \quad (3.5.3)$$

donde ϵ_i es dado por (3.5.2), y $2s \geq r$.

Además, la restricción Φ_1 de Φ al espacio tangente V_0 tiene el mismo rango r y el mismo índice s que Φ , y por tanto es

$$r \leq n-1.$$

Demostración. 1.- La ecuación de la cuádrlica Q cuando se toma como origen a un punto arbitrario O perteneciente a ella, tiene la forma

$$\Phi(x) + 2f(x) = 0$$

o bien

$$\Phi(x) + 2 \langle a^*, x \rangle = 0, \quad (3.5.4)$$

donde, supuesto que Q no tiene centro, a^* no pertenece a $(\text{Ker } \varphi)^\perp$ (teorema 3.4.1). Podemos suponer desde ahora que la signatura $2s - r$ de Φ no es negativa, es decir que se cumple la relación

$$2s \geq r.$$

Si así no fuera bastaría con multiplicar la ecuación por -1 .

Consideramos el espacio V_0 tangente a la cuádrica en O . La fórmula (3.2.6) muestra que, por cuanto en este caso es $\varphi x_0 = \varphi O = O$, V_0 es el complemento ortogonal del subespacio generado por a^* , o sea que

$$y \in V_0 \iff \langle a^*, y \rangle = 0,$$

y por tanto

$$a^* \in V_0^\perp.$$

Según hemos señalado precedentemente

$$a^* \in (\text{Ker } \varphi)^\perp.$$

Luego

$$V_0^\perp \subset (\text{Ker } \varphi)^\perp.$$

Pasando a los complementos ortogonales resulta

$$V_0 \supset \text{Ker } \varphi.$$

Existe por consiguiente un vector $e_n \in \text{Ker } \varphi$, que no está contenido en V_0 y que por tanto es $\neq 0$. Se tiene entonces que $\langle a^*, e_n \rangle \neq 0$, y multiplicando, si fuera necesario, a e_n por un escalar adecuado, podemos suponer que $\langle a^*, e_n \rangle = 1$.

El espacio V_0 es de dimensión $n-1$. Luego, V_0 y e_n generan al espacio V , y por tanto cada vector $x \in V$ puede expresarse de una

sola manera en la forma

$$x = y + \xi e_n, \quad (3.5.5)$$

donde $y \in V_0$ y ξe_n , para los cuales los puntos dados en la forma (3.5.5) pertenecen a la cuádrlica de ecuación (3.5.4), cumplen la relación

$$\Phi(y + \xi e_n) + 2 \langle a^*, y + \xi e_n \rangle = 0,$$

o sea

$$\Phi(y) + 2\xi\Phi(y, e_n) + (\xi)^2\Phi(e_n) + 2 \langle a^*, y + \xi e_n \rangle = 0. \quad (3.5.6)$$

Ahora bien, puesto que $e_n \in \text{Ker } \Phi = \text{Ker } \Phi$, se tiene que

$$\Phi(y, e_n) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(e_n) = 0;$$

y en virtud de que $y \in V_0$, es

$$\langle a^*, y \rangle = 0.$$

La ecuación (3.5.6) se reduce entonces a la *forma normal*

$$\Phi(y) + 2\xi = 0, \quad (3.5.7)$$

que expresa la relación que deben satisfacer $y \in V_0$ y ξ para que los vectores x dados por (3.5.5) pertenezcan a Q . Si designamos por Φ_1 a la restricción de Φ al espacio tangente V_0 , la forma normal (3.5.7) puede escribirse también en la forma

$$\Phi_1(y) + 2\xi = 0. \quad (3.5.8)$$

2.- Probaremos primero que Φ_1 tiene el mismo rango r que Φ . Dados dos vectores cualesquiera de V :

$$x_1 = y_1 + \xi_1 e_n, \quad x_2 = y_2 + \xi_2 e_n \quad (y_1, y_2 \in V_0),$$

se tiene

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi(y_1, y_2) = \Phi_1(y_1, y_2).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 + \xi_1 e_n \in \text{Ker } \Phi &\Rightarrow \Phi(x_1, x) = 0, \quad \forall x \in V \\ &\Rightarrow \Phi(y_1, x) = 0, \quad \forall x \in V \\ &\Rightarrow \Phi_1(y_1, y), \quad \forall y \in V_0 \\ &\Rightarrow y_1 \in \text{Ker } \Phi_1. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} y_1 \in \text{Ker } \Phi_1 &\Rightarrow \Phi_1(y_1, y) = 0, \quad \forall y \in V_0 \\ &\Rightarrow \Phi(y_1 + \xi_1 e_n, y + \xi e_n) = 0, \quad \forall y \in V_0, \quad \forall \xi_1, \xi \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \Phi(y_1 + \xi_1 e_n, x) = 0, \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V \\ &\Rightarrow x_1 = y_1 + \xi_1 e_n \in \text{Ker } \Phi, \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que

$$\text{Ker } \Phi = \{ x = y + \xi e_n \mid y \in \text{Ker } \Phi_1, \xi \in \mathbb{R} \}.$$

Por tanto,

$$\dim \text{Ker } \Phi = \dim \text{Ker } \Phi_1 + 1,$$

y

$$\text{rango } \Phi_1 = (n-1) - \dim \text{Ker } \Phi_1 = n - \dim \text{Ker } \Phi = \text{rango } \Phi.$$

Resulta de aquí, además, que $r \leq n-1$, por cuanto debe ser $\text{rango } \Phi_1 < \dim V_0 = n-1$. Es decir que el rango de Φ es menor que la dimensión n , de donde resulta que el determinante de la matriz de Φ es nulo, o sea que Φ es degenerada.

3.- Probaremos ahora que el índice de Φ_1 es igual al índice de Φ . Según sabemos (definición 2.7.1), el índice de Φ es la dimensión de cualquier subespacio V^+ de V , de dimensión máxima, en el cual Φ es una función bilineal, simétrica, definida positiva. Semejantemente, el índice de Φ_1 será la dimensión de cualquier subes

pacio V_0^+ de V_0 , de dimensión maximal, en que Φ_l es definida positiva. Nuestro problema consiste entonces en probar que $\dim V^+ = \dim V_0^+$. La relación $\dim V_0^+ \leq \dim V^+$ es evidente porque V_0^+ es un subespacio de V en que Φ es definida positiva. Para probar que $\dim V^+ \leq \dim V_0^+$ bastará demostrar que V^+ es isomorfo a un subespacio \bar{V}_0 de V_0 , en que Φ_l es definida positiva.

Consideremos un subespacio cualquiera V^+ de V , de dimensión máxima, en que Φ sea definida positiva. Designemos por \bar{V}_0 al conjunto de los elementos y de V_0 para los cuales existe un número ξ tal que $x = y + \xi e_n \in V^+$. \bar{V}_0 es un subespacio de V_0 , pues si y_1, y_2 pertenecen a \bar{V}_0 e $y_1 + \xi_1 e_n$ e $y_2 + \xi_2 e_n$ pertenecen a V^+ entonces, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera, se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha \xi_1 + \beta \xi_2) e_n &= \\ \alpha(y_1 + \xi_1 e_n) + \beta(y_2 + \xi_2 e_n) &\in V^+, \end{aligned}$$

y por consiguiente es $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \bar{V}_0$, lo cual demuestra que \bar{V}_0 es un subespacio vectorial de V_0 .

Para cada $y \in \bar{V}_0$, el número ξ tal que $y + \xi e_n \in V^+$ es bien determinado, pues si $x_1 = y_1 + \xi_1 e_n$ y $x_2 = y_1 + \xi_2 e_n$ fueran dos elementos de V^+ para los cuales fuera $\xi_1 \neq \xi_2$, entonces el vector $x_2 - x_1 = (\xi_2 - \xi_1) e_n \neq 0$ pertenecería a V^+ , lo que no es posible porque, si así fuera, se tendría $\Phi(x_2 - x_1) = (\xi_2 - \xi_1)^2 \Phi(e_n) = 0$ para $x_2 - x_1 \neq 0$, y resultaría una contradicción con el hecho de que Φ es definida positiva sobre V^+ .

De esa manera resulta que a cada $y \in \bar{V}_0$ le corresponde un número único bien determinado $g(y)$ tal que $y + g(y) e_n$ pertenece a V^+ . Observaremos que la función $g: \bar{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal. En efecto, dados los vectores $y_1, y_2 \in \bar{V}_0$ y los números reales α y β se tiene

$$\begin{aligned} & (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha g(y_1) + \beta g(y_2))e_n = \\ & = \alpha(y_1 + g(y_1)e_n) + \beta(y_2 + g(y_2)e_n) \in V^+. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \bar{V}_0$ se tiene entonces que

$$g(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha g(y_1) + \beta g(y_2)$$

y por tanto g es lineal.

La restricción $\bar{\Phi}_1$ de Φ_1 a \bar{V}_0 es positiva definida pues para $y \neq 0$, $y \in \bar{V}_0$, se tiene

$$\Phi(y) = \Phi(y + g(y)e_n) > 0,$$

por cuanto $y + g(y)e_n \in V^+$.

La aplicación $\omega: \bar{V}_0 \rightarrow V^+$ definida por

$$\omega(y) = y + g(y)e_n$$

es un isomorfismo. En efecto, a cada $y \in \bar{V}_0$ le corresponde, según hemos visto, el elemento $\omega(y) = y + g(y)e_n$ de V^+ . Inversamente, dado $x \in V^+$, puede escribirse, en virtud de (3.5.5), $x = y + \xi e_n$, donde $y_0 \in V_0$. Luego se tiene que $y \in \bar{V}_0$ y $\xi = g(y)$. Por tanto es $\omega(y) = x$, y ω es una aplicación biyectiva de \bar{V}_0 sobre V^+ . Solo falta probar que es un homomorfismo de espacios vectoriales. En virtud de la linealidad de g se tiene para $y_1, y_2 \in \bar{V}_0$,

$$\begin{aligned} \omega(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2) + g(\alpha y_1 + \beta y_2)e_n \\ &= \alpha(y_1 + g(y_1)e_n) + \beta(y_2 + g(y_2)e_n) = \alpha\omega(y_1) + \beta\omega(y_2), \end{aligned}$$

lo cual prueba que ω es un isomorfismo de \bar{V}_0 sobre V^+ con lo cual queda demostrado que el índice de Φ_1 es igual al índice de Φ .

4.- A la función bilineal simétrica Φ_I definida sobre V_0 , de rango r e índice s , le podemos aplicar entonces las consideraciones de la sección 2.8. Podemos elegir por tanto en V_0 una base (e_1, \dots, e_{n-1}) para la cual se cumplan las relaciones (2.8.1).

Si, con referencia a esta base, $y = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i e_i$ es un vector cualquiera de V_0 , entonces se tiene

$$\Phi_I(y) = \sum_{i=1}^r \epsilon_i \xi^i \xi^i.$$

Los vectores (e_1, \dots, e_n) constituyen una base de V . Si, respecto de esta base, $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = y + \xi^n e_n$ es un vector cualquiera de V , la forma normal (3.5.8) puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^r \epsilon_i \xi^i \xi^i + 2\xi^n = 0,$$

en donde, de acuerdo con una observación hecha al comienzo de la demostración, puede suponerse que $2s \geq r$. ■

Ejercicios

*3.5.1. Consideremos la cuádrlica Q de ecuación

$$\Phi(x) = 1,$$

donde Φ es no degenerada. Cada punto $x_1 \neq 0$ define a un hiperplano $P(x_1)$ mediante la ecuación.

$$\Phi(x, x_1) = 1.$$

Este hiperplano se llama *polar* de x_1 respecto de Q . De la ecuación anterior se sigue que el polar $P(x_1)$ no contiene al centro 0 de la cuádrlica.

- a) Probar que $x_2 \in P(x_1)$ si y sólo si $x_1 \in P(x_2)$
- b) Dado un hiperplano E_1 que no contiene a 0 , mostrar que existe exactamente un punto x_1 tal que $E_1 = P(x_1)$.
- c) Mostrar que $P(x_1)$ es un plano tangente a Q si y sólo si $x_1 \in Q$. Si $P(x_1)$ es tangente a Q , entonces x_1 es el punto de tangencia.

3.5.2. Sea x_1 un punto de la cuádrlica de ecuación $\Phi(x) = 1$, donde Φ es una forma bilineal simétrica de rango r y de índice $s > 0$. Probar que la restricción de Φ al espacio tangente V_{x_1} tiene rango $r - 1$ e índice $s - 1$.

3.5.3. Sea x_0 un punto de la cuádrlica (no un cono) de ecuación

$$\Phi(x) + 2f(x) + \alpha = 0,$$

y consideremos la aplicación bilineal antisimétrica

$$\omega: V \times V \rightarrow V$$

definida por

$$\omega(x, y) = g(x)y - g(y)x, \quad x, y \in V,$$

donde g es la función lineal

$$g(x) = \Phi(x_0, x) + f(x).$$

Probar que el espacio vectorial generado por los vectores $\omega(x, y), x, y \in V$ es el espacio tangente V_{x_0} .

3.6 Equivalencia afín de las cuádricas.

Supongamos que $T:V \rightarrow V$ es un isomorfismo, y que

$$L : x \mapsto Tx + b \quad (3.6.1)$$

es un isomorfismo afín del espacio E sobre sí mismo, referido a un cierto origen O . Referida al mismo origen, sea

$$\Phi(x) + 2f(x) = \alpha \quad (3.6.2)$$

la ecuación de una cuádrlica Q . Los puntos x que le pertenecen se transforman por L en los puntos x que satisfacen a la ecuación

$$\Phi(T^{-1}(x-b)) + 2f(T^{-1}(x-b)) = \alpha \quad (3.6.3)$$

Recíprocamente cada punto x que satisface a esta relación es imagen por L de un punto x de Q . Diremos entonces que (3.6.3) es la ecuación de la imagen de Q por el isomorfismo afín L . Ahora bien, si definimos la función cuadrática (definición 2.3.1)

$$\Psi(x) = \Phi(T^{-1}x),$$

la función lineal d

$$g(x) = -\Phi(T^{-1}x, T^{-1}b) + f(T^{-1}x)$$

y el escalar

$$\beta = \alpha - \Phi(T^{-1}b) + 2f(T^{-1}b),$$

entonces la ecuación (3.6.3) puede escribirse en la forma

$$\Psi(x) + 2g(x) = \beta, \quad (3.6.4)$$

que muestra que por un isomorfismo afín, una cuádrlica se transforma en otra cuádrlica. Es claro que por la transformación afín

$$L^{-1} : x \mapsto T^{-1}x - T^{-1}b,$$

que es inversa de L , la cuádrlica Q' definida por (3.6.4) se transforma en la cuádrlica Q .

Definición 3.6.1. Se dice que dos cuádricas Q y Q' son *afínmente equivalentes* o *afínequivalentes* si existe un isomorfismo afín de E sobre sí mismo que transforma a Q en Q' . Evidentemente la relación así definida es una relación de equivalencia.

A continuación nos proponemos obtener un sistema completo de representantes de las clases de equivalencia relativas a la relación que acabamos de definir. De esa manera obtendremos una clasificación de las cuádricas que llamaremos *clasificación afín*.

Teorema 3.6.1. Sean U y V dos espacios vectoriales reales de dimensión n , y Φ y Ψ dos funciones bilineales simétricas de finidas en U y en V respectivamente. Entonces existe un isomorfismo T de U sobre V con la propiedad de que

$$\Phi(x, y) = \Psi(Tx, Ty), \quad x, y \in U, \quad (3.6.7)$$

si y sólo si Φ y Ψ tienen el mismo rango y el mismo índice. La condición que acabamos de enunciar es equivalente a la siguiente:

$$\Phi(x) = \Psi(Tx), \quad x \in U. \quad (3.6.8)$$

Demostración.1.- Supongamos primero que se cumple la relación (3.6.7). Puede elegirse la base (e_1, \dots, e_n) de U , como se probó en la sección 2.8, de manera que se cumplan las condiciones

$$\Phi(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}. \quad (3.6.9)$$

De (3.6.7) se deduce entonces que

$$\Psi(Te_i, Te_j) = \epsilon_i \delta_{ij}. \quad (3.6.10)$$

Ahora bien, puesto que T es un isomorfismo, (Te_1, \dots, Te_n) es una base de V , y las relaciones (3.6.10) prueban que la matriz de Ψ referida a esa base diagonal. La correspondiente forma cuadrática de Ψ será también diagonal (sección 2.9) con r térmi-

nos no nulos, s de los cuales son positivos, siendo r y s el rango y el índice de Φ respectivamente. El teorema 2.9.1, es decir la ley de inercia de Sylvester, implica que el rango de Ψ es r y su índice es s .

2.- Supongamos ahora inversamente que Φ y Ψ tienen el mismo rango r y el mismo índice s . Podemos elegir entonces (ver la sección 2.8) las bases (e_i) y (f_i) de U y de V respectivamente, de manera que

$$\Phi(e_i, e_j) = \Psi(f_i, f_j) = \epsilon_i \delta_{ij}.$$

Definamos el isomorfismo $T: U \rightarrow V$ mediante las relaciones

$$Te_i = f_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Se tiene entonces

$$\Phi(e_i, e_j) = \Psi(f_i, f_j) = \Psi(Te_i, Te_j) \quad (i = 1, \dots, n)$$

y por consiguiente

$$\Phi(x, y) = \Psi(Tx, Ty), \quad x, y \in U,$$

que es la relación (3.6.7) que prueba la primera parte del teorema.

3.- La relación (3.6.7) implica evidentemente a la relación (3.6.8). Si suponemos que esta última se cumple, entonces también se cumple la primera porque

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{2} [\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)] \\ &= \frac{1}{2} [\Psi(Tx + Ty) - \Psi(Tx) - \Psi(Ty)] = \Psi(Tx, Ty) \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Teorema 3.6.2 Si Q es una cuádrlica con centro que un isomorfismo afín $x \mapsto Tx+b$ la transforma en una cuádrlica Q' , entonces cada centro de Q se transforma en un centro de Q' . Por consiguiente una cuádrlica con centro sólo puede ser equivalente a otra que tiene centro.

Demostración. Según el teorema 3.4.1, la ecuación de la cuádrlica puede escribirse en la forma

$$\Phi(x) = 1$$

La ecuación de la cuádrlica Q' será

$$\Phi(T^{-1}(x-b)) = 1.$$

Si definimos la función cuadrática Ψ por

$$\Psi(x) = \Phi(T^{-1}x),$$

la ecuación de Q' se escribe

$$\Psi(x-b) = 1.$$

Y por tanto Q' tiene el centro b . ■

Teorema 3.6.3 Dadas las cuádrlicas Q_1 y Q_2 con los centros c_1 y c_2 respectivamente, cuyas ecuaciones son

$$Q_1 : \Phi_1(x - c_1) = 1 \quad (3.6.11)$$

$$Q_2 : \Phi_2(x - c_2) = 1, \quad (3.6.12)$$

dichas cuádrlicas son afinequivalentes si y sólo si las formas bilineales Φ_1 y Φ_2 tienen el mismo rango y el mismo índice.

Demostración. Supongamos que Q_1 y Q_2 son afinequivalentes y que $L: x \mapsto Tx+b$ es la transformación afín de E que transforma a Q_1 en Q_2 . L transforma al centro c_1 de Q_1 en el centro $c'_2 = Tc_1 + b$ de Q_2 . Se puede escribir entonces

$$L: x \mapsto T(x - c_1) + c_2'.$$

Según hemos observado al comienzo de la sección 3.4, la ecuación de la cuádrlica Q_2 puede escribirse

$$Q_2: \Phi_2(x - c_2') = 1 + (\Phi_2(c_2') - \Phi_2(c_2)) = \beta_1 \neq 0.$$

Si se introduce la nueva función bilineal

$$\bar{\Phi}_2 = \frac{1}{\beta_1} \Phi_2,$$

donde $\bar{\Phi}_2$ tiene evidentemente el mismo rango y el mismo índice que Φ_2 , la ecuación de Q_2 se escribirá

$$Q_2: \bar{\Phi}_2(x - c_2') = 1.$$

Puesto que Q_2 es transformada por L de Q_1 , la ecuación de Q_2 puede también escribirse en la forma

$$Q_2: \Phi_1(T^{-1}(x - c_2')) = 1.$$

El teorema de unicidad 3.2.1 implica que

$$\Phi_1(T^{-1}x) = \bar{\Phi}_2(x).$$

Según el teorema 3.6.1, Φ_1 deberá tener el mismo rango y el mismo índice que $\bar{\Phi}_2$ y por tanto que Φ_2 .

Supongamos ahora, inversamente, que Φ_1 y Φ_2 tienen el mismo rango y el mismo índice. Según el teorema 3.6.1 existirá el isomorfismo T de V tal que

$$\Phi_1(x) = \Phi_2(Tx), \quad (3.6.13)$$

o sea que

$$\Phi_1(T^{-1}x) = \Phi_2(x).$$

La transformación afín $L: x \mapsto T(x - c_1) + c_2$ transforma a Q_1 , según se vió al comienzo de la sección 3.6, en la cuádrlica de

ecuación.

$$\Phi_1(T^{-1}(x - (c_2 - Tc_1)) - c_1) = 1,$$

o sea

$$\Phi_1(T^{-1}(x - c_2)) = 1.$$

Teniendo en cuenta (3.6.13) esta ecuación se escribe

$$\Phi_2(x - c_2) = 1.$$

Por consiguiente L transforma a Q_1 en Q_2 , y estas dos cuádricas son afinequivalentes. ■

Teorema 3.6.4 Dos cuádricas sin centro Q_1 y Q_2 son afinequivalentes si y sólo si las funciones bilineales simétricas Φ_1 y Φ_2 de signatura no negativa, que por definición les corresponde, tienen el mismo rango y el mismo índice.

Demostración. Supongamos que Q_1 y Q_2 son afinequivalentes y que sus ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$Q_1 : \Phi_1(x) + 2f_1(x) = \alpha_1$$

$$Q_2 : \Phi_2(x) + 2f_2(x) = \alpha_2,$$

donde, según se sabe, puede suponerse que las signaturas $2s_1 - r_1$ y $2s_2 - r_2$ de Φ_1 y Φ_2 son no negativas.

Si $L: x \mapsto Tx + b$ es la transformación afín que transforma a Q_1 en Q_2 , la transformación inversa $L^{-1}: x \mapsto T^{-1}(x - b)$ transforma a Q_2 en Q_1 . Luego la ecuación de Q_1 puede escribirse en la forma

$$Q_1 : \Phi_2(Tx + b) + 2f_2(Tx + b) = \alpha_2.$$

El teorema de unicidad 3.2.1 implica entonces que

$$\Phi_1(x) = \lambda \Phi_2(Tx) \tag{3.6.14}$$

donde λ es una constante no nula. De (3.6.14) se sigue inmedia

tamente que Φ_1 y $\lambda\Phi_2$ tienen el mismo rango y el mismo índice, en virtud del teorema 3.6.1. Φ_1 y Φ_2 tienen entonces el mismo rango r . Entre los índices de Φ_1 y Φ_2 se cumplirá una de las dos relaciones $s_2 = s_1$ o $s_2 = r - s_1$ según que sea $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$. Ahora bien, dado que hemos supuesto que $2s_2 \geq r_2$ o sea que $2s_2 \geq r$, la relación $s_2 = r - s_1$ implica que $2r - 2s_1 \geq r$ o sea $r \geq 2s_1$. También hemos supuesto que $2s_1 \geq r_1 = r$. Luego debe ser $r = 2s_1$ y por tanto $s_2 = r - s_1 = r/2$. Es decir que en todo caso es $s_1 = s_2$.

Supongamos ahora, inversamente, que sea $r_1 = r_2 = r$ y $s_1 = s_2 = s$. Debemos demostrar la existencia de una transformación afín que transforma a Q_1 en Q_2 .

Sean q_1 y q_2 puntos cualesquiera de Q_1 y Q_2 respectivamente. Según el teorema 3.1.1 las ecuaciones de Q_1 y Q_2 pueden escribirse

$$Q_1: \Phi_1(x - q_1) + 2 \langle a_1^*, x - q_1 \rangle = 0 \quad (3.6.15)$$

$$Q_2: \Phi_2(x - q_2) + 2 \langle a_2^*, x - q_2 \rangle = 0, \quad (3.6.16)$$

donde las signaturas de Φ_1 y Φ_2 son iguales y no negativas. Consideremos los espacios tangentes $V_{q_1}(Q_1)$ y $V_{q_2}(Q_2)$ a Q_1 y Q_2 en q_1 y q_2 respectivamente. En el teorema 3.5.2 hemos demostrado que las restricciones de Φ_i a $V_{q_i}(Q_i)$ ($i=1,2$) tienen el mismo rango y el mismo índice que Φ_i , por cuanto Q_i no tiene centro. Podemos definir entonces un isomorfismo

$$\bar{T}: V_{q_1}(Q_1) \rightarrow V_{q_2}(Q_2)$$

de manera que aplique a los vectores de una base de $V_{q_1}(Q_1)$ respecto de la cual la matriz de la restricción de Φ_1 sea diagonal de la forma (2.8.2), en los vectores de una base de $V_{q_2}(Q_2)$ respecto de la cual la matriz de la restricción de Φ_2 sea diagonal de la misma forma. Se tiene entonces (ver la parte 2 de la demostración del teorema 3.6.1),

$$\Phi_1(y) = \Phi_2(\bar{T}y), \quad y \in V_{q_1}(Q_1).$$

Elijamos un vector $e_n^{(i)}$ del núcleo de Φ_i ($i=1,2$), que puede suponerse que no está contenido en el espacio tangente $V_{q_i}(Q_i)$, de manera que sea

$$\langle a_i^*, e_n^{(i)} \rangle = 1, \quad (i=1,2). \quad (3.6.17)$$

La posibilidad de elegir los vectores $e_1^{(i)}$ y $e_2^{(i)}$ de la manera descrita fue probada en la demostración del teorema 3.5.2 (parte 1).

Definamos ahora el isomorfismo T de V mediante las ecuaciones

$$Ty = \bar{T}y \quad \text{para } y \in V_{q_1}(Q_1) \quad (3.6.18)$$

$$T e_n^{(1)} = e_n^{(2)} \quad (3.6.19)$$

Mostraremos a continuación que la transformación afín

$$x \mapsto T(x - q_1) + q_2$$

transforma a Q_1 en Q_2 , de modo que q_1 se transforma en q_2 . Para ello basta que probemos la relación

$$\Phi_2(Tx) + \langle a_2^*, Tx \rangle = \Phi_1(x) + \langle a_1^*, x \rangle \quad (3.6.20)$$

para todo $x \in V$.

Puesto que $V_{q_1}(Q_1)$ es de dimensión $n-1$ y que el vector $e_n^{(1)}$ no está situado en $V_{q_1}(Q_1)$, ambos generan al espacio V . Luego cada vector $x \in V$ puede expresarse en la forma

$$x = y + \xi e_n^{(1)}, \quad y \in V_{q_1}(Q_1), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.6.21)$$

Los $e_n^{(1)}$ y $e_n^{(2)}$ pertenecen a los núcleos de Φ_1 y de Φ_2 , respectivamente, y por tanto

$$\Phi_1(x, e_n^{(1)}) = \Phi_2(x, e_n^{(2)}) = \Phi_1(e_n^{(1)}) = \Phi_2(e_n^{(2)}) = 0,$$

para todo $x \in V$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \Phi_2(Tx) &= \Phi_2(Ty + \xi e_n^{(2)}) = \Phi_2(\bar{T}y) = \Phi_1(y) \\ &= \Phi_1(y + \xi e_n^{(1)}) = \Phi_1(x). \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

Además, los vectores y que pertenecen a $V_{Q_1}(Q_1)$ cumplen la relación (ejercicio 3.2.1).

$$\langle a_1^*, y \rangle = 0,$$

y por tanto, cualquiera que sea $x \in V$, se tiene [(3.6.21) y (3.6.17)]

$$\langle a_1^*, x \rangle = \xi. \quad (3.6.23)$$

Puesto que los vectores $\bar{T}y$, para $y \in V_{Q_1}(Q_1)$, pertenecen a $V_{Q_2}(Q_2)$, se tiene también (ejercicio 3.2.1),

$$\langle a_2^*, \bar{T}y \rangle = 0.$$

Por consiguiente, si se tiene en cuenta (3.6.17) y (3.6.23) se puede escribir

$$\begin{aligned} \langle a_2^*, Tx \rangle &= \langle a_2^*, \bar{T}y + \xi e_n^{(2)} \rangle = \xi \langle a_2^*, e_n^{(2)} \rangle = \xi \\ &= \langle a_1^*, x \rangle. \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (3.6.22) y (3.6.24) resulta la igualdad (3.6.20). ■

3.7 Clasificación afin de las cuádricas.

La relación de equivalencia que fue introducida en la definición 3.6.1 permite clasificar las cuádricas de manera que las pertenecientes a una misma clase son transformables entre sí mediante transformaciones afines. Del teorema 3.6.2 resulta que todas las cuádricas de una misma clase tienen centro o bien ninguna tiene centro.

Cada cuádrlica con centro puede representarse por una ecuación de la forma

$$\Phi(x) = 1$$

si se toma a uno de sus centros por origen. Por consiguiente, si r y s son el rango y el índice de Φ , en virtud del teorema 3.5.1 puede elegirse la base (e_i) de V de manera que, referida la cuádrlica al sistema de coordenadas $(0, (e_i))$, su ecuación sea

$$\xi^1 \xi^1 + \dots + \xi^s \xi^s - \xi^{s+1} \xi^{s+1} - \dots - \xi^r \xi^r = 1 \quad (1 \leq s \leq r \leq n).$$

Por consiguiente cada ecuación de este tipo representa, para un sistema de coordenadas adecuado, a cualquiera de las cuádrlicas de una clase de equivalencia de cuádrlicas con centro. El número $N_I(r)$ de estas clases, correspondientes a un rango r , es evidentemente igual a r , por cuanto s puede tomar los valores $1, \dots, r$. Se puede escribir por tanto

$$N_I(r) = r.$$

Cada cuádrlica sin centro puede representarse en virtud del teorema 3.5.2, si se toma como origen a un punto cualquiera de ella y se elige una base adecuada de V , mediante una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} & \xi^1 \xi^1 + \dots + \xi^s \xi^s - \xi^{s+1} \xi^{s+1} - \dots - \xi^r \xi^r + 2\xi^n = \\ & = 0 \quad (s \leq r \leq n-1, \quad r \leq 2s), \end{aligned}$$

donde r y s son el rango y el índice de la función bilineal Φ que corresponde a la cuádrlica. Cada ecuación del tipo precedente representa, para un sistema de coordenadas adecuado, a cualquiera de las cuádrlicas de una clase de equivalencia de cuádrlicas sin centro. El número $N_2(r)$ de clases de cuádrlicas sin centro, correspondiente a un rango r , varía según que r sea par o impar. En todo caso debe cumplirse la condición $s \leq r \leq 2s$. Así, si r es impar, s puede tomar únicamente los valores $\frac{r+1}{2}, \frac{r+1}{3}, \dots, \frac{r+r}{2} = r$, y por tanto

$$N_2(r) = \frac{r+1}{2} \quad \text{para } r \text{ impar.}$$

Si r es par, s puede tomar únicamente los valores

$$\frac{r}{2}, \frac{r+2}{2}, \frac{r+4}{2}, \dots, \frac{r+r}{2} = r, \quad \text{y por tanto}$$

$$N_2(r) = \frac{r+2}{2} \quad \text{para } r \text{ par.}$$

3.8 Clasificación afín de las cuádrlicas del plano.

Las cuádrlicas del plano se llaman *curvas cónicas*. En el cuadro siguiente se enumeran las únicas cuatro clases de equivalencia afín. Las cónicas con centro pueden tener los rangos 1 y 2. Al rango 1 corresponde, por cuanto $N_2(1) = 1$, una clase, y al rango 2 corresponden $N_2(2) = 2$ clases. Las cónicas sin centro sólo pueden tener el rango 1, al que corresponde una sola clase. Usamos aquí x e y en vez de ξ^1 y ξ^2 .

	rango	índice	ecuación representativa	géneros de las curvas
<i>Cónicas con centro</i>	2	2	$x^2 + y^2 = 1$	elipse
	2	1	$x^2 - y^2 = 1$	hipérbola
	1	1	$x^2 = 1$	dos rectas paralelas
<i>Cónicas sin centro</i>	1	1	$x^2 - 2y = 0$	parábola

3.9 Clasificación afín de las cuádricas del espacio afín de tres dimensiones.

Las cuádricas del espacio de tres dimensiones se llaman *superficies de segundo grado*. Como se ve en el cuadro siguiente hay seis clases de superficies con centros y tres clases de superficies sin centros. Empleamos aquí las letras x, y, z en vez de ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

	rango	índice	ecuación representativa	género de las superficies
<i>Superficies con centro</i>	3	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	elipsoide
	3	2	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	hiperboloide de una hoja
	3	1	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	hiperboloide de dos hojas
	2	2	$x^2 + y^2 = 1$	cilindro elíptico
	2	1	$x^2 - y^2 = 1$	cilindro hiperbólico
	1	1	$x^2 = 1$	dos planos paralelos
<i>Superficies sin centro</i>	2	2	$x^2 + y^2 - 2z = 0$	paraboloide elíptico
	2	1	$x^2 - y^2 - 2z = 0$	paraboloide hiperbólico
	1	1	$x^2 - 2z = 0$	cilindro parabólico

Ejercicios

- 3.9.1 Si Q es una cuádrlica y C es un punto de E , probar que C es un centro de Q si y sólo si la transformación afín $P \mapsto P'$ definida por la condición $\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$ transforma a Q en si misma.
- 3.9.2 Si Φ es una función bilineal simétrica, indefinida, probar que las cuádrlicas $\Phi(x) = 1$ y $\Phi(x) = -1$ son equivalentes si y sólo si la signatura de Φ es nula.
- 3.9.3 Sean N_1 y N_2 los números totales de clases afines de cuádrlicas con centro y sin centro respectivamente, correspondientes a la dimensión n . Probar que

$$N_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

y

$$N_2 = \begin{cases} k^2 + k - 1 & \text{si } n = 2k, \\ k^2 + 2k & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

§ 4. Cuádricas en los espacios euclidianos.

4.1 En el presente parágrafo supondremos que E es un espacio euclideo de dimensión n asociado al espacio vectorial euclideo V en el que es dado un producto interno que representamos por $(\ , \)$. Según sabemos (Pte. I, Secc. 17.6 y 17.7) V es dual de si mismo si el producto escalar se define por

$$\langle x, y \rangle = (x, y),$$

en cuyo caso la relación de ortogonalidad derivada del producto escalar coincide con la que resulta del producto interno por cuanto V es un espacio vectorial real.

Las consideraciones de los parágrafos §2 y §3 son válidos ahora si se reemplaza V^* por V y $\langle \ , \ \rangle$ por $(\ , \)$. En particular, conviene recordar ahora que a cada función bilineal simétrica Φ le corresponde un endomorfismo φ de V tal que

$$\Phi(x, y) = (\varphi x, y).$$

La simetría de Φ y del producto interno implica que

$$(\varphi x, y) = (\varphi y, x) = (x, \varphi y)$$

Luego φ es un endomorfismo autoadjunto de V (Pte. I, teorema 18.3.1), es decir un endomorfismo simétrico. Su matriz es simétrica para cada base ortonormal de V , y coincide con la matriz de Φ relativa a la misma base.

Definición 4.1.1 Se llaman *valores propios y vectores propios* de Φ a los valores propios y vectores propios del endomorfismo simétrico φ que le está asociado. Según el teorema 20.2.1, Pte.I, to-

das las raíces características de Φ son números reales y por tanto son valores propios de Φ .

Observación. La matriz de Φ es simétrica y es coincidente con la matriz de $\varphi: V \rightarrow V$ cuando en el espacio V de definición de φ se considera la misma base a la cual se supone referida la matriz de Φ y en el espacio V de los valores de φ se considera la base dual de la primera, o sea la base recíproca de ésta. Si en ambos espacios V se considera la misma base entonces la matriz de φ coincide con la de Φ , y es por tanto simétrica solamente si esa base es idéntica a su propia recíproca, es decir si es una base ortonormal.

Lema 4.1.1 Dada la función bilineal simétrica Φ de rango r y de índice s , definida sobre el espacio euclideo V de dimensión n , existe una base ortonormal de V formada por vectores (e_1, \dots, e_n) de Φ , de manera que, referida a esa base, Φ tiene la forma diagonal

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \eta^i$$

y la forma cuadrática

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i, \quad (4.1.1)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de Φ ordenados en la forma

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s, \quad (4.1.2)$$

$$0 > \lambda_{s+1} \geq \lambda_{s+2} \dots \geq \lambda_r.$$

Demostración. Si φ es el endomorfismo simétrico de V asociado a Φ , existe, según el teorema 20.2.4, Pte. I, una base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de V , formada por n vectores propios de φ , y por tanto de Φ , respecto de la cual la matriz de φ es diagonal e idéntica a la de Φ . Se tiene por tanto

$$\varphi e_i = \lambda_i e_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

y

$$\Phi(e_i, e_j) = (\Phi e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Los vectores de la base pueden suponerse ordenados de manera que sea

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s \\ 0 > \lambda_{s+1} \geq \lambda_{s+2} \dots \geq \lambda_r \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

La función bilineal Φ puede expresarse entonces en la forma

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \eta^i,$$

en donde los coeficientes son los valores propios de Φ ordenados en la forma (4.1.2) ■

Definición 4.1.2 La ordenación (4.1.2) de los valores propios de Φ no nulos constituye el *orden canónico* de dichos valores.

4.2 Vectores normales y normal a una cuádrlica.

Sea Q una cuádrlica del espacio euclideo E cuya ecuación es

$$Q : \Phi(x) + 2f(x) = \alpha. \quad (4.2.1)$$

A la función lineal f le corresponde un vector $a \in V$ tal que

$$f(x) = (a, x).$$

Por tanto la ecuación de la cuádrica puede escribirse

$$\Phi(x) + 2(a, x) = \alpha$$

o bien, introduciendo el endomorfismo φ asociado a Φ ,

$$(\varphi x, x) + 2(a, x) = \alpha.$$

Recordemos que no consideraremos en adelante a los conos; supondremos por tanto que

$$\Phi x \neq -a$$

para todo x perteneciente a Q .

A cada punto x_0 que pertenece a la cuádrica Q le corresponde un espacio tangente V_{x_0} que es definido por cualquiera de las siguientes relaciones (ver las relaciones (3.2.6) y (3.2.7))

$$V_{x_0} = \{ y \in V \mid \Phi(x_0, y) + f(y) = 0 \} \quad (4.2.2)$$

o

$$V_{x_0} = \{ y \in V \mid (a + \varphi x_0, y) = 0 \}. \quad (4.2.3)$$

En virtud de la segunda relación puede decirse que el espacio tangente a Q en $x_0 \in Q$ es el complemento ortogonal del subespacio de dimensión 1 generado por el vector

$$v(x_0) = a + \varphi x_0,$$

que se llama *vector normal* a Q en el punto x_0 . Puede decirse también que un vector normal a Q en el punto x_0 es ortogonal al espacio tangente V_{x_0} . La dimensión de V_{x_0} es $n-1$ en virtud del teorema 17.7.1, Pte. I.

La recta que pasa por x_0 y que está asociada al espacio generado por $\nu(x_0)$ se llama *recta normal* o simplemente *normal* a Q en el punto x_0 .

Observación. Cualquier vector

$$\lambda \nu(x_0) = \lambda(\varphi x_0 + a) \quad \lambda \neq 0,$$

perteneciente al espacio generado por $\nu(x_0)$ es un vector normal a Q en x_0 . En efecto, multiplicando por λ a la ecuación (4.2.1), la ecuación de Q puede escribirse en la forma

$$\lambda \Phi(x) + 2f(\lambda x) = \lambda \alpha.$$

Si definimos

$$\Phi_I(x) = \lambda \Phi(x)$$

y

$$f_I(x) = f(\lambda x),$$

la ecuación de Q puede escribirse

$$\Phi_I(x) + 2f_I(x) = \lambda \alpha.$$

Se tiene además

$$\Phi_I(x, y) = \lambda \Phi(x, y) = (\lambda \varphi x, y).$$

Si definimos

$$\varphi_I(x) = \lambda \varphi x$$

y

$$\lambda a = a_I,$$

la ecuación de Q tiene la forma

$$(\varphi_I x, x) + 2(a_I, x) = \lambda \alpha.$$

Por tanto un vector normal a Q en x_0 es

$$\nu_I(x_0) = a_I + \varphi_I x_0 = \lambda a + \lambda \varphi x_0 = \lambda(a + \varphi x_0).$$

En consecuencia, los vectores normales a Q en x_0 son los vectores de un subespacio de dimensión 1, complemento ortogonal de V_{x_0} .

4.3 Cuádricas con centro, en un espacio euclideo.

La ecuación de una cuádrlica cuando se toma el origen en uno de sus centros es

$$Q : \quad \Phi(x) = 1. \quad (4.3.1)$$

Un vector normal a Q en un punto x_0 , en este caso en que es $a = 0$, es

$$\bar{v}(x_0) = \varphi x_0.$$

Por consiguiente el endomorfismo φ hace corresponder a cada vector de posición x_0 de un punto de Q , un vector normal a Q en dicho punto.

Teorema 4.3.1 Si el vector de posición x_0 de un punto de Q es un vector propio de φ que corresponde a un valor propio λ , entonces la normal a Q en x_0 pasa por el origen, es decir por un centro de la cuádrlica y

$$\lambda = \frac{1}{\|x_0\|^2} \neq 0.$$

Demostración. Si x_0 es un vector propio que corresponde al valor propio ν , se tiene

$$\nu(x_0) = \varphi x_0 = \lambda x_0.$$

Se sigue de aquí que x_0 es un vector normal a Q en x_0 y por consiguiente la normal a Q en x_0 pasa por el origen. Además, puesto que x_0

pertenece a Q , se tiene $\Phi(x_0) = 1$, o sea $(\varphi x_0, x_0) = 1$, es decir $(\lambda x_0, x_0) = 1$. Se sigue de aquí que

$$\lambda = \frac{1}{\|x_0\|^2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3.2 Si Q es una cuádrlica con centro, puede elegirse una base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de V , formada por vectores propios de Φ , de manera que la ecuación de Q referida al sistema de coordenadas $(0, (e_i))$ en que 0 es un centro de Q , puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i = 1 \quad (4.3.2)$$

en donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios no nulos de Φ , que podemos suponer ordenados en el orden canónico.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s \\ 0 > \lambda_{s+1} \geq \lambda_{s+2} \geq \dots \geq \lambda_r \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

en que r es el rango y s es el índice de Φ .

Demostración. Empleando el lema 4.1.1 se puede obtener una base que tiene las propiedades del enunciado, mediante la cual $\Phi(x)$ se expresa en la forma (4.1.1). Llevada esta expresión a la ecuación (4.3.1) de la cuádrlica, referida a uno de sus centros como origen, resulta

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i = 1,$$

donde los coeficientes son los valores propios de Φ ordenados en el orden canónico (4.3.3). \blacksquare

Definición 4.3.1 Dada la base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de V formado por vectores propios de Φ a los que corresponden los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente, ordenados en el orden canónico, los vectores

$$a_i = \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, \dots, s) \quad \text{y} \quad a_i = \frac{e_i}{\sqrt{-\lambda_i}} \quad (i = s+1, \dots, r) \quad (4.3.4)$$

se llaman *ejes principales* y *ejes principales conjugados*, respectivamente, de la cuádrlica Q .

De las fórmulas (4.3.4) se deduce

$$\lambda_i = \frac{1}{\|a_i\|^2} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (4.3.5)$$

y

$$\lambda_i = -\frac{1}{\|a_i\|^2} \quad (i = s+1, \dots, r).$$

Llevando estas expresiones a (4.3.2) se obtiene la *forma normal métrica de la ecuación de una cuádrlica con centro*:

$$\sum_{i=1}^s \frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} = 1. \quad (4.3.6)$$

Cada eje principal o principal conjugado a_i genera al mismo subespacio vectorial de dimensión 1 que el vector e_i , espacio que está asociado a una recta que pasa por el origen, que no es otra que el eje de coordenadas correspondientes a e_i . Un punto de esa recta se caracteriza porque sus coordenadas ξ_j son nulas para $j \neq i$. Resulta de (4.3.6) que la intersección de dicha recta

con la cuádrlica debe cumplir la condición

$$\frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} = 1 \quad \text{si } i = 1, \dots, s \quad (4.3.7)$$

y la condición

$$-\frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} = 1 \quad \text{si } i = s+1, \dots, r. \quad (4.3.8)$$

(4.3.6) implica que ξ^i debe ser igual a $\|a_i\|$ o a $-\|a_i\|$. Por consiguiente, la recta generada por un eje principal a_i intersecta a Q en los puntos $\|a_i\| e_i = a_i$ y $-\|a_i\| e_i = -a_i$.

En cambio, la relación (4.3.7) no puede cumplirse para ningún ξ^i real. Por tanto la recta generada por un eje principal conjugado a_i no tiene puntos comunes con Q . Si denominamos *cuádrlica conjugada* de Q a la cuádrlica Q' cuya ecuación es

$$Q': \Phi(x) = -1,$$

cuyos ejes principales son por tanto a_{s+1}, \dots, a_r y cuyos ejes principales conjugados son a_1, \dots, a_s , entonces puede decirse que la recta correspondiente a un eje principal conjugado y que pasa por un centro, intersecta a la cuádrlica conjugada Q' en los puntos a_i y $-a_i$ ($i = s+1, \dots, r$).

4.4 Cuádrlicas sin centro, en un espacio euclideoano.

Sea Q una cuádrlica sin centro. Si tomamos a un punto cualquiera de Q como origen, la ecuación de la cuádrlica puede escribirse (ver teorema 3.4.3)

$$\Phi(x) + 2(a, x) = 0, \quad a \notin (\text{Ker } \Phi)^\perp. \quad (4.4.1)$$

Un vector normal a Q en el origen será entonces

$$v(0) = \varphi(0) + a = a \neq 0$$

Para otro punto cualquiera x de Q

$$v(x) = \varphi x + a \quad (4.4.2)$$

es un vector normal a Q en x .

Definición 4.4.1 Se dice que un punto A de la cuádrlica Q es un *vértice* si cada vector normal a Q en A está contenido en el núcleo $\text{Ker } \Phi = K = \text{Ker } \varphi$.

Si elegimos al vértice A como origen, en cuyo caso la ecuación de Q se puede escribir en la forma (4.4.1) el vector a , según hemos visto, es normal a Q en A . Por tanto se cumple, por definición, que $a \in \text{Ker } \Phi = K$.

Si, inversamente, la ecuación de la cuádrlica se escribe en la forma (4.4.1) y $a \in K$, entonces el origen pertenece a la cuádrlica y se cumple la condición para que sea un vértice. Por consiguiente *la condición necesaria y suficiente para que un punto de una cuádrlica sea un vértice es que si se toma como origen entonces el vector a de la ecuación (4.4.1) de la cuádrlica pertenezca al núcleo de Φ .*

Teorema 4.4.1 Si Q es una cuádrlica sin centro y una isometría

$$x \mapsto Tx + b$$

la transforma en otra cuádrlica Q' , entonces Q' es una cuádrlica sin centro y cada vértice de Q se transforma en un vértice de Q' .

Demostración. Q' no tiene centro en virtud del teorema 3.6.2, pues la isometría inversa transforma a Q' en Q y aplicaría a un centro de Q' en un centro de Q .

Si Q tiene un vértice y lo tomamos como origen, su ecuación se escribirá

$$Q : \quad \Phi(x) + 2(a, x) = 0, \quad a \in K.$$

La ecuación de Q' será entonces

$$Q' : \quad \Phi(T^{-1}(x-b)) + 2(a, T^{-1}(x-b)) = 0.$$

Si tomamos como nuevo origen al punto b que es imagen del vértice 0 por la isometría dada, la ecuación de Q' será

$$Q' : \quad \Phi(T^{-1}x) + 2(a, T^{-1}x) = 0.$$

Definamos la forma bilineal simétrica

$$\Phi_1(x, y) = \Phi(T^{-1}x, T^{-1}y),$$

y el vector

$$a_1 = Ta.$$

Puesto que T es una isometría, tendremos

$$(a, T^{-1}x) = (Ta, x) = (a_1, x).$$

Por tanto la ecuación de Q' es

$$Q' : \quad \Phi_1(x) + 2(a_1, x) = 0. \quad (4.4.3)$$

Ahora bien, puesto que $a \in K$ se tiene

$$\Phi_1(a_1, x) = \Phi_1(Ta, x) = \Phi(a, T^{-1}x) = 0, \quad \forall x \in V,$$

y por consiguiente es $a_1 \in K_1 = \text{Ker } \Phi_1$. La observación que precede al enunciado del teorema 4.4.1 demuestra que el nuevo origen, al cual está referida la ecuación (4.4.3) de Q' , es un vértice

de esta cuádrlica. Puesto que ese nuevo origen es la imágen del vértice dado de Q por la isometría, el teorema queda demostrado. ■

En el lema siguiente vamos a complementar los resultados ya conocidos acerca de los endomorfismos normales de los espacios de producto interno (ver Pte.I, secc. 18.2) con nuevos resultados que emplearemos en el teorema que sigue a continuación del lema.

Lema 4.4.1 Si T es un endomorfismo normal de un espacio vectorial V de producto interno, entonces

$$Im T^k = Im T$$

y

$$Ker T^k = Ker T,$$

para cualquier número entero positivo k .

Demostración. 1) El corolario del teorema 18.2.2, Pte.I, establece que para un endomorfismo normal T tiene lugar la relación.

$$V = Ker T \oplus Im T. \quad (4.4.4)$$

$Im T$ es evidentemente estable respecto de T . La restricción T_1 de T a $Im T$ es un isomorfismo de $Im T$. En efecto, si $T_1(Tx) = 0$ entonces $Tx \in Ker T \cap Im T$, y en virtud de (4.4.4) será $Tx = 0$. T_1 es por tanto un endomorfismo inyectivo de $Im T$, es decir un isomorfismo (Pte.I, ejercicio 3.4.2). Se tiene por tanto

$$Im T = Im T_1.$$

Por consiguiente,

$$Im T^2 = T(T(V)) = T(Im T) = T_1(Im T) = Im T_1 = Im T.$$

Por inducción se prueba que $Im T^k = Im T$.

2) Probemos primero que

$$Ker T \subset Ker T^k. \quad (4.4.5)$$

En efecto, si $Tx = 0$, entonces es $T^kx = T^{k-1}(Tx) = 0$, y por tanto se cumple (4.4.5).

La inclusión inversa

$$Ker T^k \subset Ker T \quad (4.4.6)$$

se cumple evidentemente para $k = 1$. Supongamos que se cumple para todo entero positivo menor que k , donde $k > 1$. Si $x \in Ker T^k$ entonces es $T^kx = T^{k-1}(Tx) = 0$, por tanto $Tx \in Ker T^{k-1} \subset Ker T$. Puesto que $Tx \in Ker T \cap Im T$, se deduce de (4.4.4) que $Tx = 0$, es decir $x \in Ker T$, lo que demuestra (4.4.6) en general. De (4.4.5) y (4.4.6) se deduce que

$$Ker T^k = Ker T. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.4.2 Cada cuádrica sin centro tiene por lo menos un vértice. Si A es un vértice de la cuádrica, entonces el conjunto de los vértices constituye un subespacio afín de dimensión $n-r-1$ cuyo espacio vectorial asociado es $K \cap V_A$, donde K es el núcleo de la forma bilineal simétrica Φ que corresponde a la cuádrica y V_A es el espacio tangente en el punto A .

Demostración. La ecuación de la cuádrica sin centro Q cuando se toma como origen uno de sus puntos se puede escribir (teorema 3.1.1),

$$\Phi(x) + 2(a, x) = 0.$$

Si φ es el endomorfismo asociado a Φ , un vector normal a Q en un punto cualquiera $x \in Q$ es

$$\nu(x) = \varphi x + a.$$

Si aplicamos φ a ambos miembros de esta ecuación se obtiene

$$\varphi(\nu(x)) = \varphi^2 x + \varphi a.$$

Para que x sea un vértice es necesario y suficiente que $\nu(x)$ pertenezca al núcleo de φ , es decir que x satisfaga a la ecuación

$$\varphi^2 x + \varphi a = 0. \quad (4.4.7)$$

Podemos decir por tanto que para x sea un vértice de Q es necesario y suficiente que pertenezca a Q y que sea solución de la ecuación (4.4.7).

Para que (4.4.7) tenga solución debe ser

$$\varphi a \in \text{Im } \varphi^2 \quad (4.4.8)$$

Ahora bien, puesto que φ es un endomorfismo simétrico y por tanto normal, según el lema 4.4.1 se tiene $\text{Im } \varphi^2 = \text{Im } \varphi$ y $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi$. Dado que $\varphi a \in \text{Im } \varphi$, se cumplirá (4.4.8) y por consiguiente existirá por lo menos una solución de (4.4.7). Sea pues x_0 una solución de dicha ecuación. La solución general de la misma será

$$x = x_0 + z \quad (4.4.9)$$

donde z es una solución cualquiera de la ecuación homogénea

$$\varphi^2 x = 0,$$

es decir un vector cualquiera de $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \Phi = K$. Los vértices de Q son las soluciones (4.4.9) de (4.4.7) que pertenecen a Q , es decir que satisfacen a la relación

$$\Phi(x_0 + z) + 2(a, x_0 + z) = 0,$$

que puede escribirse, si se tiene presente que $z \in \text{Ker } \Phi$ y que por tanto es $\Phi(z) = \Phi(x_0, z) = 0$,

$$\Phi(x_0) + 2(a, x_0) + 2(a, z) = 0. \quad (4.4.10)$$

Esta relación debe ser satisfecha por el vector $z \in K$ para que $x_0 + z$ sea vértice de Q . Ahora bien, (a, z) no puede ser nulo para todo $z \in K$ pues si así fuera sería $a \in K^\perp$, y en virtud del teorema 3.4.3, Q tendría centro contra lo supuesto. Por consiguiente puede elegirse $z_1 \in K$ de manera que sea $(a, z_1) \neq 0$. Entonces el vector

$$z_0 = - \frac{\Phi(x_0) + 2(a, x_0)}{2(a, z_1)} z_1 \in K$$

satisface a la relación (4.4.10), y por tanto existe un vértice $v_0 = x_0 + z_0$ de Q .

Supongamos ahora que $v = x_0 + z$, donde $z \in K$, es otro vértice cualquiera de Q . Puesto que z_0 y z satisfacen a (4.4.10), se tendrá que

$$(a, z - z_0) = 0,$$

y dado que a es normal a Q en el origen, como vimos al comienzo de la presente sección, se tendrá que

$$w = z - z_0 \in V_0,$$

donde V_0 es el espacio tangente a Q en el origen. Además es $w = z - z_0 \in K$. Luego

$$w = z - z_0 \in K.$$

Es decir que cualquier vértice puede expresarse en la forma

$$v = v_0 + w, \quad w \in K \cap V_0. \quad (4.4.11)$$

Inversamente, consideremos un punto cualquiera v de la forma (4.4.11). Si escribimos

$$z = w + z_0,$$

se tendrá que

$$v = x_0 + z$$

donde z pertenece a K y cumple la condición (4.4.10) porque

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) + 2(a, x_0) + 2(a, z) &= \Phi(x_0) + 2(a, x_0) + 2(a, w + z_0) \\ &= \Phi(x_0) + 2(a, x_0) + 2(a, z_0) = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente cualquier punto v de la forma (4.4.11) es un vértice de Q .

Resulta de lo expuesto que el conjunto de los vértices de Q es el conjunto de todos los puntos

$$v = v_0 + w$$

en que v_0 es un vértice fijo y w es un vector cualquiera de $K \cap V_0$. Dicho conjunto es por tanto un subespacio afín asociado al espacio vectorial $K \cap V_0$. La dimensión de $K \cap V_0$ puede calcularse mediante la fórmula

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2),$$

que fué establecida en el ejercicio 2.5.16, Pte.I. Apliquemos esa fórmula a los subespacios K y V_0 de V . Puesto que $\dim V_0 = n-1$ y que, según vimos en el teorema 3.5.2, existe un vector $e_n \in K$ no nulo tal que $e_n \notin V_0$, se tiene que $K + V_0 = V$ y por tanto $\dim(K + V_0) = n$. Además es $\dim K = n-r$, y por tanto

$$\dim(K \cap V_0) = (n-r) + (n-1) - n = n-r-1.$$

El espacio afín formado por los vértices tiene por tanto la dimensión $n-r-1$. ■

Corolario. Si el rango de la función bilineal simétrica Φ asociada a una cuádrlica sin centro Q es igual a $n-1$, entonces la cuádrlica tiene un solo vértice.

Demostración. En efecto, en tal caso la dimensión del espacio afín formado por los vértices es igual a 0 . ■

Teorema 4.4.3. Si Q es una cuádrlica sin centro y el punto 0 es uno de sus vértices, puede elegirse una base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de V formada por vectores propios de Φ , de manera que la ecuación de Q referida al sistema de coordenadas $(0, (e_i))$ puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i + 2\xi^s = 0, \quad (4.4.12)$$

en donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios no nulos de Φ ,

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s \\ 0 > \lambda_{s+1} \geq \lambda_{s+2} \geq \dots \geq \lambda_r, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

donde r es el rango y s es el índice de Φ , y se cumple la relación $2s \geq r$.

Demostración. La ecuación de la cuádrlica sin centro Q referida a un origen coincidente con uno de sus vértices 0 , eventualmente multiplicada dicha ecuación por una constante adecuada, puede escribirse en la forma

$$\Phi(x) + 2(e_n, x) = 0 \quad (\|e_n\| = 1, e_n \notin K^\perp), \quad (4.4.14)$$

donde e_n es un vector normal a Q en el punto 0 , y el rango y el índice de Φ cumplen la condición $2s \geq r$. Puesto que el origen es un vértice, la ecuación (4.4.7) debe cumplirse para $a = e_n$ y

$x = 0$. Se debe tener por tanto

$$\varphi e_n = 0, \quad (4.4.15)$$

y por tanto e_n pertenece a K y es un vector propio de φ correspondiente al valor propio de $\lambda_n = 0$

V_0 , espacio tangente a Q en 0 , es invariante respecto del endomorfismo simétrico φ asociado con Φ , pues si $y \in V_0$, entonces la relación 4.2.3 implica que

$$(e_n, y) = 0,$$

por tanto

$$(e_n, \varphi y) = (\varphi e_n, y) = (0, y) = 0,$$

y por consiguiente, debido a la misma relación (4.2.3), es $\varphi y \in V_0$.

Consideremos la restricción φ_I de φ al subespacio invariante V_0 . φ_I es simétrica y por tanto existe una base ortonormal (e_1, \dots, e_{n-1}) de V_0 formada por vectores propios de φ_I correspondientes a los valores propios $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Tanto los vectores propios como los valores propios de φ_I lo son de φ . Puesto que e_n es normal a Q en el origen, es ortogonal al espacio V_0 tangente a Q en el mismo punto. Por tanto (e_1, \dots, e_n) constituyen una base ortonormal de V formada por vectores propios de Φ . Se tiene

$$\Phi(e_i, e_j) = (\varphi e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n-1)$$

$$\Phi(e_i, e_n) = (\varphi e_n, e_i) = 0. \quad (i = 1, \dots, n)$$

Si referimos la forma bilineal a la base (e_i) tendremos

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \xi^i \xi^i. \quad (4.4.16)$$

Supongamos que los vectores de base son ordenados de manera que los r_1 primeros coeficientes de la forma (4.4.16) son diferentes

de cero y los demás son nulos, y que los s_1 primeros son positivos. Resulta inmediatamente de la expresión (4.4.16) que el espacio generado por e_{r_1+1}, \dots, e_n es igual a K , o sea

$$\text{esp} (e_{r_1+1} , \dots , e_n) = K$$

y que Φ es definida positiva en

$$\text{esp} (e_1 , \dots , e_{s_1}) = V^+$$

y definida negativa en

$$\text{esp} (e_{s_1+1} , \dots , e_{r_1}) = V^- ,$$

y que se tiene

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus K .$$

Esta es una descomposición de la clase (2.7.1). Por consiguiente (ver el teorema 2.7.1, y la definición 2.7.1) , es

$$s_1 = \dim V^+ = s \quad \text{y} \quad r_1 = r .$$

Los vectores de base pueden suponerse ordenados en el orden canónico:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 &\leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s \\ 0 > \lambda_{s+1} &\geq \lambda_{s+2} \geq \dots \geq \lambda_r \\ \lambda_{r+1} &= \dots = \lambda_n = 0 . \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta (6.4.16) y que

$$(e_n, x) = \sum_{i=1}^n \xi^i (e_n, e_i) = \xi^n ,$$

la ecuación (4.4.14) de la cuádrlica Q , referida al sistema de

coordenadas $(0, (e_i))$ se escribirá

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i + 2\xi^n = 0,$$

y se cumplirán las otras condiciones del enunciado. ■

Si introducimos como en la sección anterior los *ejes principales* y los *ejes principales conjugados* mediante las fórmulas

$$a_i = \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, \dots, s) \quad \text{y} \quad a_i = \frac{e_i}{\sqrt{-\lambda_i}} \quad (i = s+1, \dots, r),$$

resulta la forma normal métrica de las cuádricas sin centro

$$\sum_{i=1}^s \frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\xi^i \xi^i}{\|a_i\|^2} + 2\xi^n = 0, \quad (4.4.17)$$

en donde se cumple la condición $2s \geq r$ que fué fijada en el teorema anterior.

4.5 Equivalencia métrica de cuádricas de un espacio afín euclideo.

Definición 4.5.1. Se dice que dos cuádricas Q y Q' del espacio euclideo E son *métricamente equivalentes* si existe una isometría de E que transforma a Q en Q' . Esta es una relación de equivalencia.

Es evidente que dos cuádricas que son métricamente equivalentes son también afinequivalentes, luego las clases de equivalencia métrica son subclases de las clases de afinequivalencia.

Lema 4.5.1. Sean U y V dos espacios euclideos de dimensión n y Φ y Φ' sean dos funciones bilineales simétricas definidas sobre $U \times U$ y $V \times V$ respectivamente. Entonces, para que exista una

isometría $T : U \rightarrow V$ que tenga la propiedad de que

$$\Phi(x, y) = \Phi'(Tx, Ty), \quad x, y \in U, \quad (4.5.1)$$

es necesario y suficiente que Φ y Φ' tengan los mismos valores propios con las mismas multiplicidades

Además, la relación (4.5.1) es equivalente a

$$\Phi(x) = \Phi'(Tx), \quad x \in U. \quad (4.5.2)$$

Demostración. Designemos por $\varphi: U \rightarrow U$ y $\varphi': V \rightarrow V$ a los endomorfismos simétricos tales que

$$\Phi(x, y) = (\varphi x, y), \quad x, y \in U$$

y

$$\Phi'(x, y) = (\varphi' x, y), \quad x, y \in V.$$

Los valores propios de Φ y Φ' son por definición los valores propios de φ y φ' respectivamente (definición 4.1.1).

Supongamos primero que T sea una isometría de U sobre V que satisfaga a la relación (4.5.1). Se tiene entonces

$$(\varphi x, y) = (\varphi' Tx, Ty). \quad (4.5.8)$$

Puesto que T^{-1} es también una isometría, se tiene

$$(\varphi' Tx, Ty) = (T^{-1} \varphi' Tx, T^{-1} Ty) = (T^{-1} \varphi' Tx, y).$$

Por tanto

$$(\varphi x, y) = (T^{-1} \varphi' Tx, y), \quad x, y \in U.$$

de donde

$$\varphi = T^{-1} \varphi' T.$$

De aquí se deduce que φ y φ' tienen los mismos valores propios por cuanto, respecto de una base cualquiera de V , la matriz de φ es

$$M(\varphi) = M(T^{-1}) M(\varphi') M(T);$$

y por consiguiente, dado que $M(T^{-1})$ es regular e igual a $M(T)^{-1}$, y en virtud del teorema 13.2.3, Pte.I, las matrices semejantes $M(\varphi)$ y $M(\varphi')$ tienen los mismos polinomios característicos. Resulta de aquí que los polinomios característicos f_φ y $f_{\varphi'}$ son idénticos y por tanto los dos endomorfismos simétricos φ y φ' tienen los mismos valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con las mismas multiplicidades.

Supongamos ahora, inversamente, que φ y φ' tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. Según el teorema 20.2.2, Pte.I, de descomposición espectral para los endomorfismos simétricos, pueden elegirse las bases ortonormales (e_i) de U y (f_i) de V , tales que

$$\varphi e_i = \lambda_i e_i \quad \text{y} \quad \varphi' f_i = \lambda_i f_i. \quad (4.5.4)$$

La aplicación $T: U \rightarrow V$ tal que

$$T e_i = f_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

es una isometría porque

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = (f_i, f_j) = (T e_i, T e_j),$$

y por tanto

$$(x, y) = (T x, T y) \quad \text{para} \quad x, y \in U.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} (\varphi e_i, e_j) &= (\lambda e_i, e_j) = \lambda \delta_{ij} = \lambda (f_i, f_j) = (\lambda f_i, f_j) \\ &= (\varphi' f_i, f_j) = (\varphi' T e_i, T e_j), \end{aligned}$$

de donde se deduce inmediatamente (4.5.3) y por tanto (4.5.1).

Finalmente es evidente que (4.5.1) implica a (4.5.2). La implicación inversa se deduce de la fórmula conocida

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} (\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)). \quad \blacksquare$$

4.6 Clasificación métrica de las cuádricas de un espacio euclídeano.

Lema 4.6.1. Si la cuádrlica Q se transforma en la cuádrlica Q' por la traslación $x \mapsto x+t$, entonces Q y Q' tienen los mismos ejes principales.

Demostración. Sea la ecuación de Q

$$Q : \Phi(x) + 2f(x) = \alpha.$$

La ecuación de Q' será

$$Q' : \Phi(x-t) + 2f(x-t) = \alpha,$$

o sea

$$Q' : \Phi(x) + 2(f(x) - \Phi(x, t)) = \alpha + 2f(t) - \Phi(t),$$

que puede escribirse en la forma

$$Q' : \Phi(x) + 2f'(x) = \alpha'.$$

Puesto que a Q y a Q' les corresponde la misma forma bilineal Φ , ambas cuádrlicas tendrán los mismos ejes principales. \blacksquare

Lema 4.6.2. Sean Q y Q' dos cuádrlicas con centro (sin centro). Dados los centros (vértices) c y c' de Q y Q' respectivamente, la traslación $x \mapsto x+(c'-c)$ transforma a Q en la cuádrlica Q'' que tiene los mismos ejes principales que Q y que tiene un centro (vértice) coincidente con el centro (vértice) c' de Q' .

Demostración. Este lema resulta inmediatamente del anterior y de los teoremas 3.6.2 y 4.4.1. ■

Lema 4.6.3. Dadas dos cuádricas con centro (sin centro) Q y Q' , y si θ es una traslación que transforma a Q en una cuádrica Q'' que tiene un centro (un vértice) coincidente con un centro (un vértice) de Q' , entonces la condición necesaria y suficiente para que Q y Q' sean métricamente equivalentes es que exista una rotación que deje fijo al centro (vértice) común de Q'' y Q' , y que transforme a Q'' en Q' .

Demostración. Si Q y Q' son métricamente equivalentes y L es una isometría que transforma a Q en Q' , un centro (un vértice) c de Q se transforma por L en un centro (un vértice) c' de Q' . Sea θ una traslación que transforma a Q en Q'' de manera que el centro (vértice) c de Q se traslada al centro (vértice) c' de Q'' .

La isometría

$$\rho = L \circ \theta^{-1}$$

transforma a Q'' en Q' y deja fijo a c' , luego es una rotación de centro c' que transforma a Q'' en Q' .

Inversamente, si ρ es una rotación que transforma a Q'' en Q' y que deja fijo al centro (vértice) común c' de esas cuádricas, que es imagen, por la traslación θ , del centro (vértice) c de la cuádrica Q , entonces

$$L = \rho \circ \theta$$

es una isometría que transforma a Q en Q' , y por tanto Q y Q' son métricamente equivalentes. ■

Definición 4.6.1. Se dice que dos cuádricas Q y Q' del espacio euclideo E son *congruentes*, lo que se expresa escribiendo

$$Q \equiv Q',$$

si son afinequivalentes y si las longitudes de los ejes principales y de los ejes principales conjugados de una de ellas son iguales a los de la otra.

Lema 4.6.4. La condición necesaria y suficiente para que dos cuádricas *con centro*, Q y Q' , que tienen un centro común, puedan transformarse una en otra mediante una rotación que deje fijo a dicho centro, es que sean congruentes.

Demostración. Si se toma como origen al centro común de Q y Q' , las ecuaciones de esas cuádricas son:

$$Q: \quad \Phi(x) = 1$$

y

$$Q': \quad \Phi'(x) = 1.$$

Supongamos primero que existe una rotación $\rho: x \mapsto \rho x$ que transforma a Q en Q' , y deja fijo al origen. Se tiene entonces

$$\Phi'(x) = \Phi(\rho^{-1} x), \quad (4.6.1)$$

y por tanto Φ y Φ' tienen el mismo rango r y el mismo índice s (teorema 3.6.1), y Q y Q' son afinequivalentes (teorema 3.6.3).

El teorema 4.3.2 asegura la existencia de dos bases ortonormales (e_i) y (f_i) de V tales que respecto de los sistemas de coordenadas $(0, (e_i))$ y $(0, (f_i))$ las ecuaciones de Q y Q' son respectivamente

$$Q: \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i = 1 \quad (4.6.2)$$

y

$$Q' : \sum_{i=1}^r \lambda'_i \eta^i \eta^i = 1, \quad (4.6.3)$$

donde tanto los λ_i , valores propios de Φ , como los λ'_i , valores propios de Φ' , están ordenados en el orden canónico (definición 4.1.2).

Ahora bien, de (4.6.1) se sigue, en virtud del lema 4.5.1, que Φ y Φ' tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. Dada la ordenación canónica de los valores propios se tendrá por tanto que

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, r$$

de donde se deduce que

$$\|a'_i\| = \|a_i\|, \quad (i = 1, \dots, r).$$

Inversamente, supongamos ahora que Q y Q' son afinequivalentes y que por tanto Φ y Φ' tienen el mismo rango r y el mismo índice s . Como vimos anteriormente, existirán dos sistemas de coordenadas respecto de los cuales las ecuaciones de Q y Q' son (4.6.2) y (4.6.3). Supongamos entonces que las longitudes de los ejes principales $\|a_i\|$ ($i = 1, \dots, s$) de Q son iguales a las longitudes de los ejes principales $\|a'_i\|$ ($i = 1, \dots, s$) de Q' . Dado que los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ y $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s$ son todos positivos, resulta de las fórmulas

$$a_i = \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad y \quad a'_i = \frac{f_i}{\sqrt{\lambda'_i}}$$

y del orden canónico de los valores propios, que

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

En forma análoga, de la igualdad de las longitudes de los ejes principales conjugados de Q y Q' resulta que

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad i = s+1, \dots, r.$$

Por ser iguales los valores propios de Φ y Φ' , el lema 4.5.1 implica la existencia de una isometría $\rho: V \rightarrow V$ tal que

$$\Phi'(x) = \Phi(\rho^{-1}x).$$

La rotación $x \rightarrow \rho x$ de centro en el origen transforma evidentemente a Q en Q' . ■

Lema 4.6.5. La condición necesaria y suficiente para que dos cuádricas *sin centro*, Q y Q' , que tienen un vértice común, puedan transformarse una en otra mediante una rotación que deje fijo a dicho vértice, es que sean congruentes.

Demostración. Como se ha observado al comienzo de la demostración del teorema 4.4.3, si se toma como origen al vértice común de Q y Q' , las ecuaciones de estas cuádricas pueden escribirse

$$Q: \Phi(x) + 2(e_n, x) = 0 \quad (\|e_n\| = 1, e_n \in K = \text{Ker } \Phi) \quad (4.6.4)$$

$$Q': \Phi'(x) + 2(e_{n'}, x) = 0 \quad (\|e_{n'}\| = 1, e_{n'} \in K' = \text{Ker } \Phi'), \quad (4.6.5)$$

donde e_n y $e_{n'}$ son normales a Q y a Q' respectivamente, en el punto 0 , y los rangos r, r' y los índices s, s' de Φ y de Φ' cumplen las condiciones $2s \geq r$ y $2s' \geq r'$.

Supongamos primero que existe la isometría $\rho: V \rightarrow V$ tal que la rotación $x \mapsto \rho x$ deja fijo al origen y transforma a Q

en Q' . Se tiene entonces, en virtud del teorema de unicidad de la representación de las cuádricas,

$$\Phi'(x) = \mu \Phi(\rho^{-1} x) \quad y \quad (e_{n'} , x) = \mu \rho (e_n , \rho^{-1} x) ,$$

donde es $\mu \neq 0$ y puede suponerse evidentemente que $\mu > 0$. La segunda relación precedente implica, por cuanto ρ es una isometría, que

$$(e_{n'} , x) = (\mu \rho e_n , x) , \quad \forall x \in V .$$

Por tanto es

$$e_{n'} = \mu \rho e_n ,$$

de donde

$$\| e_{n'} \| = \mu \| \rho e_n \| = \mu \| e_n \| ;$$

y puesto que $\| e_{n'} \| = \| e_n \| = 1$, resulta $\mu = 1$. Se tiene por consiguiente

$$\Phi'(x) = \Phi(\rho^{-1} x) , \quad x \in V . \quad (4.6.6)$$

Φ' y Φ tienen por consiguiente el mismo rango r y el mismo índice s (teorema 3.6.1) y Q y Q' son afinequivalentes (teorema 3.6.4).

El teorema 4.4.3 asegura la existencia de las bases ortonormales (e_1, \dots, e_{n-1}) y $(e_1', \dots, e_{(n-1)'})$ del espacio $V_0(Q)$ tangente a Q en 0 y del espacio $V_0(Q')$ tangente a Q' en 0 , respectivamente, tales que si agregamos a esas bases los vectores e_n y $e_{n'}$ que aparecen en las ecuaciones (4.6.4) y (4.6.5), resultan las bases ortonormales (e_1, \dots, e_n) y $(e_1', \dots, e_{n'})$ de V respecto de las cuales Φ y Φ' tienen las formas cuadráticas

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \xi^i \quad (4.6.7)$$

y

$$\Phi'(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \xi^i ; \quad (4.6.8)$$

y respecto de los sistemas de coordenadas $(0, (e_i))$ y $(0, (e_{i'}))$ las cuádricas Q y Q' tienen las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi^i \xi^i + 2\xi^n = 0 \quad (4.6.9)$$

y

$$\sum_{i=1}^r \lambda_{i'} \xi^{i'} \xi^{i'} + 2\xi^{n'} = 0 \quad (4.6.10)$$

donde tanto los λ_i , valores propios de Φ , como los $\lambda_{i'}$, valores propios de Φ' , están ordenados en el orden canónico (4.4.13). De (4.6.6) se sigue, en virtud del lema 4.5.1, que Φ y Φ' tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. Dada la ordenación canónica de los valores propios, se tendrá que

$$\lambda_{i'} = \lambda_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

de donde se deduce la igualdad de las longitudes de los ejes de Q y Q' :

$$\|a_i\| = \|a_{i'}\|, \quad (i = 1, \dots, r),$$

es decir que $Q \equiv Q'$.

Inversamente, supongamos que Q y Q' son afinequivalentes y que $Q \equiv Q'$. Vamos a demostrar que Q y Q' pueden transformarse una en otra por una rotación que deja fijo al origen. Puesto que Q y Q' son afinequivalentes, Φ y Φ' tienen el mismo rango r y el mismo índice s . Como acabamos de ver precedentemente, existirán los sistemas de coordenadas ortogonales $(0, (e_i))$ y $(0, (e_{i'}))$ con las características que fueron detalladas, respecto de las cuales Q y Q' tienen las ecuaciones (4.6.9) y (4.6.10). La hipótesis de que $Q \equiv Q'$ implica que las longitudes de los ejes principales $\|a_i\|$ ($i = 1, \dots, s$) de Q son iguales (salvo quizás el or

den) a las longitudes $\|a_i\|$ ($i = 1, \dots, s$) de los ejes principales de Q' . Pero, puesto que los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ y $\lambda_{1'}, \dots, \lambda_{s'}$ son todos positivos, resulta de las relaciones

$$a_i = \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad \text{y} \quad a_{i'} = \frac{e_{i'}}{\sqrt{\lambda_{i'}}}, \quad (i = 1, \dots, s)$$

y del orden canónico de los valores propios, que

$$\lambda_{i'} = \lambda_i \quad (i = 1, \dots, s),$$

En forma análoga, de la igualdad de las longitudes de los ejes principales conjugados de Q y Q' , que es consecuencia de la hipótesis $Q \equiv Q'$, y del hecho de que $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ y $\lambda_{(s+1)'}, \dots, \lambda_{r'}$ son negativos, resulta que

$$\lambda_{i'} = \lambda_i \quad (i = s+1, \dots, r).$$

Consideremos la restricción $\bar{\Phi}$ de Φ al subespacio $V_0(Q)$. Los vectores de la base ortonormal (e_1, \dots, e_{n-1}) de $V_0(Q)$ son vectores propios de Φ , y por consiguiente lo son también de $\bar{\Phi}$, de manera que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ son valores propios de $\bar{\Phi}$. De la misma manera se puede ver que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ son también valores propios de la restricción $\bar{\Phi}'$ de Φ' al subespacio $V_0(Q')$, que corresponden a los vectores propios $(e_{1'}, \dots, e_{(n-1)'})$ que constituyen una base ortonormal de $V_0(Q')$. En virtud del lema 4.5.1 existirá una isometría

$$\bar{\rho} : V_0(Q) \rightarrow V_0(Q')$$

tal que

$$\bar{\Phi}'(\bar{\rho} y) = \bar{\Phi}(y), \quad y \in V_0(Q),$$

y por tanto

$$\Phi'(\bar{\rho} y) = \Phi(y), \quad y \in V_0(Q).$$

Podemos definir entonces el endomorfismo $\rho : V \rightarrow V$ tal que

$$\rho e_i = \bar{\rho} e_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1$$

y

$$\rho e_n = e_{n'}.$$

El endomorfismo ρ así definido es una isometría. En efecto:

$(\rho e_i, \rho e_j) = (\bar{\rho} e_i, \bar{\rho} e_j) = (e_i, e_j)$ para $i, j = 1, \dots, n-1$, porque $\bar{\rho}$ es una isometría;

$(\rho e_i, \rho e_n) = (\bar{\rho} e_i, e_{n'}) = 0 = (e_i, e_n)$ para $i = 1, \dots, n-1$, porque $e_{n'}$ es ortogonal a $V_0(Q')$;

y $(\rho e_n, \rho e_n) = (e_{n'}, e_{n'}) = 1 = (e_n, e_n)$.

Mediante la isometría ρ puede escribirse

$$(e_{n'}, \rho x) = (\rho e_n, \rho x) = (e_n, x), \quad x \in V. \quad (4.6.11)$$

Además, teniendo presente que $e_n \in K$ y $e_{n'} \in K'$ y que cada vector $x \in V$ se escribe en la forma $x = \xi^n e_n + y$, donde $y \in V_0(Q)$, se tiene

$$\begin{aligned} \Phi'(\rho x) &= \Phi'(\rho(\xi^n e_n + y)) = \Phi'(\xi^n e_{n'} + \rho y) = \Phi'(\rho y) \\ &= \Phi'(\bar{\rho} y) = \Phi(y) = \Phi(\xi^n e_n + y) = \Phi(x). \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

De (4.6.11) y (4.6.12) se deduce que

$$\Phi'(\rho x) + 2(e_{n'}, \rho x) = \Phi(x) + 2(e_n, x), \quad x \in V;$$

y por tanto la rotación $x \mapsto \rho^{-1} x$, que deja fijo al origen, transforma a Q' en Q . La rotación $x \mapsto \rho x$ transforma a Q en Q' . ■

Teorema 4.6.1. (*Teorema de equivalencia métrica de las cuádricas de un espacio euclideo*). Dadas dos cuádricas con centro (sin centro), Q y Q' , la condición necesaria y suficiente para que sean métricamente equivalentes es que sean congruentes, es decir que $Q \equiv Q'$.

Demostración. Sea c un centro (un vértice) de Q . Supongamos primero que Q y Q' son métricamente equivalentes, y que $x \mapsto Tx + b$ es una isometría que transforma a Q en Q' . Por el teorema 3.6.2 (resp. 4.4.1) el punto $c' = Tc + b$ es un centro (un vértice) de Q' . La traslación $x \mapsto x + (c' - c)$, en virtud del lema 4.6.2, transforma a Q en la cuádrica Q'' que tiene un centro (resp. un vértice) coincidente con el centro (vértice) c' de Q' , y que es tal que $Q \equiv Q''$.

Puesto que Q y Q' son métricamente equivalentes, existe por el lema 4.6.3 una rotación que deja fijo a c' y que transforma a Q'' en Q' . Según el lema 4.6.4 (resp. 4.6.5) se deberá tener que $Q'' \equiv Q'$. Por consiguiente se debe cumplir que $Q \equiv Q'$.

Supongamos inversamente que tiene lugar la relación $Q \equiv Q'$. Si c y c' son centros (vértices) de Q y Q' respectivamente, la traslación que aplica a c en c' transforma a Q en una cuádrica Q'' tal que $Q'' \equiv Q$, y por tanto que $Q'' \equiv Q'$. El lema 4.6.4 (4.6.5) asegura entonces que existe una rotación que transforma a Q'' en Q' y que deja fijo a c' . En virtud del lema 4.6.3 las cuádricas Q y Q' serán métricamente equivalentes. ■

4.7. Formas normales de las ecuaciones de las cuádricas del plano y del espacio de tres dimensiones.

De conformidad con el teorema 4.6.1 cada clase de cuádricas afi-nequivalentes se subdivide en clases de cuádricas métricamente

equivalentes, en cada una de las cuales se encuentran las cuádricas que son afinequivalentes de la clase considerada pero que son congruentes. Cada una de las cuádricas de una clase de equivalencia métrica puede ser representada por la ecuación normal (4.3.6) o (4.4.17), según que se trate de una cuádrlica con centro o sin centro. En el cuadro siguiente se dan las formas de las diferentes clases de equivalencia métrica.

Cuádrlicas del plano euclideoano

	<i>Ecuación</i>	<i>Cuádrlicas de las clases</i>
<i>Con Centro</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b$	elipse de ejes a y b
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hipérbola de ejes a y b
	$x^2 = a^2$	dos rectas paralelas a distancia $2a$
<i>Sin Centro</i>	$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	parábola con parámetro igual a $2a^2$.

Cuádrlicas del espacio euclideoano de tres dimensiones

<i>Con Centro</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a \geq b \geq c$	elipsoide con ejes a, b y c
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a \geq b$	hiperboloide de una hoja con ejes a, b y c
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad b \geq c$	hiperboloide de dos hojas con ejes a, b y c
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b$	cilindro elíptico con ejes a y b
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	cilindro hiperbólico con ejes a y b
	$x^2 = a^2$	dos planos paralelos a distancia $2a$.

Sin Centro	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad a \geq b$	paraboloides elíptico con ejes a y b
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	paraboloides hiperbólico con ejes a y b
	$\frac{x^2}{a^2} = 2z$	cilindro parabólico con <i>latus rectum</i> de longitud a

4.8 Ejemplos. Clasificar las siguientes cuádricas del espacio euclídeo tridimensional cuyas ecuaciones respecto de un sistema de coordenadas rectangulares son dadas a continuación:

A. $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$

Comprobaremos primero que no se trata de un cono. Debemos comprobar para ello (ver la sección 4.2) que ninguna solución de la ecuación

$$\varphi x = -a, \quad (4.8.1)$$

donde a es el vector de componentes $(-5, 4, 7)$, pertenece a la cuádrica. La matriz de φ

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

es regular. Por tanto el sistema equivalente a (4.8.1) tiene solución. Esa solución es $(1, 0, -1)$. Este punto no pertenece a la cuádrica, y por tanto ésta no es un cono.

La solución $(1, 0, -1)$ de (4.8.1) es, según el teorema 3.4.2, el centro de la cuádrica.

Si desplazamos el origen del sistema de coordenadas al centro, mediante el cambio de coordenadas dado por las ecuaciones

$$x_1 = x - 1$$

$$y_1 = y$$

$$z_1 = z + 1$$

la ecuación de la cuádrlica toma la forma

$$\frac{5}{18} x_1^2 + \frac{6}{18} y_1^2 + \frac{7}{18} z_1^2 - \frac{4}{18} x_1 y_1 + \frac{4}{18} y_1 z_1 - 1 = 0, \quad (4.8.2)$$

que es de la forma (4.3.1). Vamos a reducirla a la forma (4.3.2). A ese fin debemos calcular los valores propios resolviendo la ecuación

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{18} & \frac{2}{18} & 0 \\ \frac{2}{18} & \lambda - \frac{6}{18} & \frac{2}{18} \\ 0 & \frac{2}{18} & \lambda - \frac{7}{18} \end{vmatrix} = 0.$$

Si hacemos $\lambda' = 18\lambda$, la ecuación anterior puede escribirse

$$\begin{vmatrix} \lambda' - 5 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda' - 6 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda' - 7 \end{vmatrix} = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda'_1 = 9$, $\lambda'_2 = 6$, $\lambda'_3 = 3$. Por tanto los valores propios son $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 1/6$, y la ecuación de la cuádrlica referida a un nuevo sistema de coordenadas (x_2, y_2, z_2) que resulta sustituyendo la base ortonormal dada por otra formada por vectores propios es

$$\frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{3} y_2^2 + \frac{1}{6} z_2^2 = 1, \quad (4.8.3)$$

o sea, escribiéndola en la forma normal,

$$\frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{6})^2} = 1. \quad (4.8.4)$$

Se trata por consiguiente de un *elipsoide* cuyos ejes principales tienen las longitudes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$.

Podemos complementar los resultados anteriores determinando las ecuaciones del cambio de coordenadas (x, y, z) en (x_2, y_2, z_2) que permite transformar la ecuación dada en la ecuación (4.8.4). A ese fin debemos hallar vectores propios unitarios correspondientes a los valores propios ya obtenidos. Los vectores propios (x, y, z) correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 1/2$ son los que satisfacen a la ecuación $\varphi v = \lambda_1 v$, que es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{5}{18} x - \frac{2}{18} y &= \frac{1}{2} x \\ -\frac{2}{18} x + \frac{6}{18} y + \frac{2}{18} z &= \frac{1}{2} y \\ \frac{2}{18} y + \frac{7}{18} z &= \frac{1}{2} z. \end{aligned}$$

La solución general es $(-\frac{1}{2}z, z, z)$, donde z es arbitrario. Una solución que sea vector unitario debe cumplir la condición

$$\frac{1}{4} z^2 + z^2 + z^2 = 1.$$

Se obtiene así un vector propio unitario $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

De la misma manera a los valores propios $\lambda_2 = 1/3$ y $\lambda_3 = 1/6$ se puede hacer corresponder los vectores propios unitarios $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. La matriz de cambio de base ortonormal dada originalmente en la nueva base ortonormal constituida por los

vectores propios es la matriz ortogonal (ver sección I, 6.10)

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto entre las coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) tiene lugar la relación

$$3x_1 = -x_2 + 2y_2 + 2z_2$$

$$3y_1 = 2x_2 - y_2 + 2z_2$$

$$3z_1 = 2x_2 + 2y_2 - z_2.$$

La relación entre las coordenadas iniciales (x, y, z) y las (x_2, y_2, z_2) será

$$3(x-1) = -x_2 + 2y_2 + 2z_2$$

$$3y = 2x_2 - y_2 + 2z_2$$

$$3(z+1) = 2x_2 + 2y_2 - z_2.$$

Mediante este cambio, la ecuación dada originalmente puede transformarse en la forma canónica (4.8.4).

$$B. \quad 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0.$$

La matriz de φ es en este caso

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1. Veamos si la cuádrlica es un cono. Las soluciones de la ecuación $\varphi v = -a$ tienen componentes (x, y, z) que satisfacen a las ecuaciones

$$\begin{aligned}4x - 2y + 4z &= 6 \\-2x + y - 2z &= 6 \\4x - 2y + 4z &= -3.\end{aligned}$$

Pero este sistema es incompatible porque el rango de la matriz aumentada es 2 (ver sección 8.2, Pte.I.). Resulta de aquí que la cuádrlica no es un cono ni tiene centro.

Vamos ahora a determinar los vértices con el objeto de tomar a uno de ellos como origen y poner a la ecuación en la forma (4.4.14). Según sabemos, los vértices son las soluciones de la ecuación (4.4.7) que al mismo tiempo pertenecen a la cuádrlica. La matriz de φ^2 es

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ -18 & 9 & -18 \\ 36 & -18 & 36 \end{pmatrix}.$$

Por tanto los vértices (x_0, y_0, z_0) deben cumplir la relación

$$\begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ -18 & 9 & -18 \\ 36 & -18 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de este sistema tiene rango 1 y por tanto el sistema equivale a una sola ecuación.

$$2x_0 - y_0 + 2z_0 = 0,$$

o sea

$$y_0 = 2(x_0 + z_0),$$

donde x_0 y z_0 son arbitrarios. Cada vértice debe satisfacer a la ecuación de la cuádrlica por consiguiente debe cumplirse la ecuación

$$z_0 = -2x_0;$$

y por tanto los vértices son los puntos $(x_0, -2x_0, -2x_0)$, es decir los puntos de una recta que pasa por el origen, cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned} y + 2x &= 0 \\ z + 2x &= 0. \end{aligned} \tag{4.8.5}$$

En particular, el origen es un vértice y por tanto la ecuación dada de la cuádrlica está referida a un sistema cuyo origen es un vértice de la cuádrlica, lo cual se confirma porque el vector $a = (-6, -6, 3)$ pertenece al núcleo de φ , ya que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para normalizar el vector a y escribir la ecuación de la cuádrlica en la forma (4.4.14), debemos dividir la ecuación por

$$\sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9.$$

La ecuación toma entonces la forma

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{4}{9}z^2 - \frac{4}{9}xy + \frac{8}{9}xz - \frac{4}{9}yz - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z = 0.$$

Se tiene entonces

$$e_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

que es un vector unitario. La ecuación está así escrita en la forma (4.4.14). La ecuación característica de la forma bilineal es ahora

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4/9 & 2/9 & -4/9 \\ 2/9 & \lambda - 1/9 & 2/9 \\ -4/9 & 2/9 & \lambda - 4/9 \end{vmatrix} = 0.$$

Si hacemos $\lambda' = 9\lambda$, la ecuación característica se escribe

$$\begin{vmatrix} \lambda' - 4 & 2 & -4 \\ 2 & \lambda' - 1 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda' - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son $\lambda'_1 = 9$, $\lambda'_2 = 0$, $\lambda'_3 = 0$. Luego los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. La ecuación en su forma normal, referida a un sistema que tiene el mismo origen que antes pero con una base ortonormal formada por vectores propios, es por tanto

$$x_1^2 + 2z_1 = 0. \quad (4.8.6)$$

Se trata por tanto de un *cilindro parabólico*.

Veamos ahora cuál es el cambio de coordenadas que permite pasar de la ecuación dada de la cuádrica a la ecuación (4.8.6). Para eso vamos a calcular vectores propios unitarios correspondientes a los valores propios dados. Para $\lambda_1 = 1$ las ecuaciones que dan las componentes de los vectores propios son

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z &= x \\ -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z &= y \\ \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z &= z, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 4z &= 0 \\ -2x - 8y - 2z &= 0 \\ 4x - 2y - 5z &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de este sistema tiene rango 2. Las dos últimas ecuaciones son linealmente independientes pues

$$\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si se resuelven esas dos ecuaciones resulta

$$\begin{aligned} z &= -2y \\ x &= -2y, \end{aligned}$$

donde y es arbitrario. Luego los vectores propios son $(-2y, y, -2y)$. Un vector unitario de esta base es $e_1 = (2/3, -1/3, 2/3)$.

De la misma manera a $\lambda = 0$ corresponden los vectores propios $(x, 2x + 2z, y)$; uno de ellos es $e_3 = (-2/3, -2/3, 1/3)$. El vector e_2 debe ser del mismo tipo y ortogonal a e_3 . Puede elegirse $e_2 = (-1/3, 2/3, 2/3)$. Constituida la nueva base por los vectores e_1, e_2, e_3 , las ecuaciones que expresan el cambio de coordenadas son

$$\begin{aligned} 3x &= 2x_1 - y_1 - 2z_1 \\ 3y &= -x_1 + 2y_1 - 2z_1 \\ 3z &= 2x_1 + 2y_1 + z_1. \end{aligned}$$

Mediante este cambio de coordenadas la ecuación de la cuádrlica se cambia de la forma dada en la forma (4.8.6).

Finalmente puede observarse que las ecuaciones (4.8.5) del lugar de los vértices se reducen a

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ z_1 &= 0, \end{aligned}$$

y por tanto coincide con el eje y_1 .

Ejercicio 4.8.1. Determinar el centro o el vértice, según sea el caso, el tipo y los ejes de las siguientes cuádrlicas del espacio euclideo de tres dimensiones.

- a) $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 2 = 0$
- b) $4x^2 + 3y^2 - z^2 - 12xy + 4xz - 8yz - 1 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz - 9 = 0$
- d) $3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 6x - 2y - 2z + 3 = 0$
- e) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$
- f) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$
- g) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0$
- h) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

CAPITULO II

Producto tensorial de espacios vectoriales

Los espacios vectoriales que vamos a considerar en este capítulo pueden ser de dimensión finita o infinita. Cuando se trate del caso finito se señalará expresamente. Todos ellos se supondrá que son definidos sobre un campo \mathbb{F} dado de característica 0, que, salvo indicación expresa, puede suponerse que es \mathbb{R} o \mathbb{C} .

§ 5. Producto tensorial. Tensores.

5.1 Aplicaciones multilineales de espacios vectoriales.

Definición 5.1.1. Dados los espacios vectoriales U_1, \dots, U_r , se llama aplicación multilineal de $U_1 \times \dots \times U_r$ en el espacio vectorial W a una aplicación $\Phi: U_1 \times \dots \times U_r \rightarrow W$ tal que para cada valor $k = 1, \dots, r$, y para cada conjunto dado $\{u_i \in U_i\}_{i \neq k}$, la aplicación $\Phi_k: U_k \rightarrow W$, definida por la ecuación

$$\Phi_k(u) = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u, u_{k+1}, \dots, u_r),$$

es una aplicación lineal.

Si definimos las operaciones de adición de dos aplicaciones multilineales y de producto de un escalar por una aplicación multilineal mediante las fórmulas

$$(\Phi + \Psi)(u_1, \dots, u_r) = \Phi(u_1, \dots, u_r) + \Psi(u_1, \dots, u_r)$$

y

$$(\alpha \Phi)(u_1, \dots, u_r) = \alpha \Phi(u_1, \dots, u_r),$$

se ve inmediatamente que el conjunto de las aplicaciones multilineales de $U_1 \times \dots \times U_r$ en W constituye un espacio vectorial. Designaremos a dicho espacio vectorial con el símbolo $\mathcal{L}(U_1, \dots, U_r; W)$.

Ya hemos tenido ocasión de considerar diversos casos particulares. Así, en la sección 3.1, Pte.I, hemos visto los siguientes:

$\mathcal{L}(U; V)$: espacio vectorial de las aplicaciones lineales de U en V ,

$\mathcal{L}(U; U) = \mathcal{E}(U)$: espacio vectorial de los endomorfismos de U ,

$\mathcal{L}(U; \mathbb{F}) = \mathcal{L}(U)$: espacio de las funciones lineales definidas en U .

En el ejercicio 5.5.3 Pte.I hemos considerado el espacio vectorial $\mathcal{L}(V, W; \mathbb{F}) = \mathcal{B}(V, W)$ de las funciones bilineales.

***Ejercicio 5.1.1.** Si $\Phi \in \mathcal{L}(U_1, \dots, U_r; W)$, basta con que alguno de los vectores $u_i \in U_i$ sea nulo para que sea

$$\Phi(u_1, \dots, u_r) = 0.$$

***Ejercicio 5.1.2.** Sean U, V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Dadas las bases $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ de U , $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V y un conjunto cualquiera $\{w_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$)

de vectores de W , existe una única aplicación bilineal $\Phi: U \times V \rightarrow W$ tal que

$$\Phi(e_i, f_j) = w_{ij}, \quad e_i \in \mathcal{E}, \quad f_j \in \mathcal{F}.$$

Este enunciado se extiende al caso en que se dan las bases de los espacios U_1, \dots, U_r de dimensiones n_1, \dots, n_r respectivamente, y $n_1 \times \dots \times n_r$ vectores $\{w_{i_1, \dots, i_r}\}$, ($i_k = 1, \dots, n_k$), de W . También se extiende al caso en que los espacios involucrados son de dimensión infinita.

***Ejercicio 5.1.3** Sean $U, V, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ como en el ejercicio anterior. Sea además $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_p\}$ una base de W .

Entonces:

a) Para i, j, k tales que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$, existe una única aplicación lineal $E_k^{ij}: U \times V \rightarrow W$ tal que

$$E_k^{ij}(e_i, f_j) = g_k, \quad \text{y} \quad E_k^{ij}(e_r, e_s) = 0 \quad \text{si} \quad r \neq i \quad \text{o} \quad s \neq j.$$

b) Las aplicaciones E_k^{ij} constituyen una base del espacio vectorial $\mathcal{L}(U, V; W)$. Por consiguiente

$$\dim \mathcal{L}(U, V; W) = m n p.$$

c) Las componentes de una aplicación bilineal $\Phi: \mathcal{L}(U, V; W)$ respecto de la base $\{E_k^{ij}\}$ son los números ξ_{ij}^k tales que

$$\Phi(e_i, f_j) = \sum_k \xi_{ij}^k g_k,$$

y por tanto

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \xi_{ij}^k E_k^{ij}.$$

El precedente enunciado se generaliza al espacio $\mathcal{L}(U_1, \dots, U_r; W)$.

***Ejercicio 5.1.4.** Sean U, V, W tres espacios vectoriales. Designemos por

$$K : \mathcal{L}(U, V; W) \rightarrow \mathcal{L}(U; \mathcal{L}(V, W))$$

a la aplicación que hace corresponder a cada aplicación bilineal $\Phi \in \mathcal{L}(U, V; W)$ la aplicación lineal $T = K(\Phi) \in \mathcal{L}(U; \mathcal{L}(V, W))$ definida de la manera siguiente: para $u \in U$, $T(u) = K(\Phi)(u)$ es una aplicación lineal perteneciente a $\mathcal{L}(V, W)$ tal que

$$T(u)(v) = K(\Phi)(u)(v) = \Phi(u, v), \quad v \in V.$$

Se debe demostrar que entonces K es un isomorfismo que llamaremos *canónico*, que es independiente de la elección de bases, de $\mathcal{L}(U, V; W)$ sobre $\mathcal{L}(U; \mathcal{L}(V, W))$. Semejantemente hay un isomorfismo canónico de $\mathcal{L}(U, V; W)$ sobre $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(U, W))$.

El precedente enunciado admite una generalización evidente.

5.2. Producto tensorial de dos espacios vectoriales.

Se llama *producto tensorial de dos espacios vectoriales* U y V a un par (Z, φ) formado por un espacio vectorial Z y una aplicación bilineal $\varphi : U \times V \rightarrow Z$, que cumplen las condiciones siguientes:

T1. El espacio Z es generado por los vectores del conjunto $\varphi(U \times V)$. Es decir que Z es idéntico con el conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi(u_i, v_i)$$

en que los α_i son escalares cualesquiera, p es un entero positivo arbitrario y $u_i \in U$ y $v_i \in V$ son vectores cualesquiera.

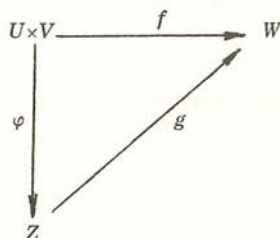
Si, dada una aplicación bilineal cualquiera $f : U \times V \rightarrow W$ designamos

por $\text{Im } f$ (imagen de f) al subespacio generado por los vectores del subconjunto $f(U \times V)$, la condición T1 puede expresarse mediante la igualdad $\text{Im } \varphi = Z$. ($f(U \times V)$ no es, en general un subespacio de W (ver el ejercicio 5.2.1)).

T2. Cada aplicación bilineal f de $U \times V$ en un espacio vectorial cualquiera W puede expresarse en la forma

$$f = g \circ \varphi \quad (5.2.1)$$

donde g es una aplicación lineal de Z en W . Se dice que (5.2.1) es la factorización de f mediante la aplicación universal φ .



La propiedad T2, que se traduce en la conmutatividad del diagrama adjunto, se llama propiedad de aplicación universal del par (Z, φ) ¹⁾.

Los elementos del espacio Z se llaman *tensores*. Los tensores de la forma $\varphi(u, v)$, $u \in U$, $v \in V$, se llaman *tensores descomponibles*. Todo tensor puede expresarse como suma de un número finito de tensores descomponibles, pero tal expresión no es única. Puede escribirse, por ejemplo,

$$\varphi(u, v) = \varphi\left(\frac{1}{2}u, 2v\right),$$

$$\varphi(u, v) + \varphi(u', v') = \varphi(u + u', v) + \varphi(u', v' - v).$$

Las condiciones T1 y T2 equivalen a la sola condición:

1) Sobre la significación de la propiedad de aplicación universal en su forma general puede consultarse Bourbaki, Livre I, Ch.4, (1957), pág. 43.

T. (Propiedad de factorización única). Para cada aplicación bilineal f de $U \times V$ en un espacio vectorial cualquiera W , existe una única aplicación lineal g de Z en W tal que

$$f = g \circ \varphi.$$

Probemos primero que **T1** y **T2** implican a **T**. Dada la aplicación bilineal f de $U \times V$ en W supongamos que hubieran dos aplicaciones lineales $g_1 : Z \rightarrow W$ y $g_2 : Z \rightarrow W$ tales que

$$f = g_1 \circ \varphi \quad \text{y} \quad f = g_2 \circ \varphi.$$

Se seguiría que

$$g_1 \circ \varphi = g_2 \circ \varphi.$$

Dado un vector cualquiera $z \in Z$, en virtud de **T1** puede escribirse

$$z = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi(u_i, v_i).$$

Por tanto

$$g_1(z) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (g_1 \circ \varphi)(u_i, v_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (g_2 \circ \varphi)(u_i, v_i) = g_2(z),$$

y por tanto es $g_1 = g_2$.

Supongamos ahora, inversamente, que el par (Z, φ) satisfaca a la condición **T**. **T2** es consecuencia inmediata de **T** y sólo queda por probar **T1**. Sea $j : \text{Im } \varphi \rightarrow Z$ la aplicación de inclusión que a cada elemento de $\text{Im } \varphi$ le hace corresponder el mismo elemento en Z . Para probar **T1** bastará demostrar que j es sobreyectiva.

Consideremos la aplicación bilineal $\bar{\varphi} : U \times V \rightarrow \text{Im } \varphi$ que se define por

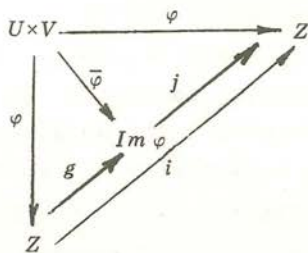
$$\bar{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y),$$

de modo que

$$\varphi = j \circ \bar{\varphi}.$$

En virtud de la condición T existe una aplicación lineal $g : Z \rightarrow \text{Im } \varphi$ tal que $\bar{\varphi} = g \circ \varphi$. Se tiene entonces

$$\varphi = (j \circ g) \circ \varphi,$$



lo cual constituye una factorización de la aplicación bilineal $\varphi : U \times V \rightarrow Z$ mediante la aplicación universal φ . Según la condición T, $j \circ g : Z \rightarrow Z$ será la única aplicación lineal que da lugar a esa factorización. Ahora bien, si $i : Z \rightarrow Z$ es la aplicación idéntica de Z , se tiene evidentemente que

$$\varphi = i \circ \varphi,$$

y ésta es también una factorización de φ mediante la aplicación universal φ . Se deduce que

$$j \circ g = i,$$

y puesto que i es una sobreyección, también lo será j y por tanto es $\text{Im } \varphi = Z$. Lo cual prueba que T1 y T2 equivalen a T.

Teorema 5.2.1. (Unicidad del producto tensorial). Si (Z, φ) y (Z', φ') son dos productos tensoriales de U y V , entonces existe un único isomorfismo $\lambda : Z \rightarrow Z'$ tal que $\varphi' = \lambda \circ \varphi$, es decir tal que $\lambda(\varphi(x, y)) = \varphi'(x, y)$.

Demostración. Puesto que (Z, φ) es un producto tensorial de U y V , y que φ' es una aplicación bilineal de $U \times V$ en Z' , existirá en virtud de T2 la aplicación lineal $\lambda : Z \rightarrow Z'$ tal que $\varphi' = \lambda \circ \varphi$. En forma análoga se probará que existe la aplicación lineal $\lambda' : Z' \rightarrow Z$ tal que $\varphi = \lambda' \circ \varphi'$. Por consiguiente $\varphi' = \lambda \circ \lambda' \circ \varphi'$ y

también $\varphi = \lambda' \circ \lambda \circ \varphi$. Pero $\varphi'(U \times V)$ genera a Z' y $\varphi(U \times V)$ genera a Z , luego $\lambda \circ \lambda' = I_{Z'}$ y $\lambda' \circ \lambda = I_Z$, donde I_Z e $I_{Z'}$ son las aplicaciones idénticas de Z y Z' respectivamente. De las dos últimas ecuaciones se deduce, respectivamente, que λ es sobreyectiva e inyectiva, luego es un isomorfismo de Z sobre Z' y λ' es su inversa. Si λ_1 fuera otro isomorfismo de Z sobre Z' tal que $\lambda \circ \varphi = \lambda_1 \circ \varphi$, se deduciría de inmediato, aplicando T , que $\lambda = \lambda_1$, lo cual prueba la unicidad. ■

Así pues, el producto tensorial de dos espacios U y V es bien determinado, salvo un isomorfismo único. Esta observación permite que, en adelante, podamos hablar *del* producto tensorial de dos espacios y no necesariamente de *un* producto tensorial de ellos. Sin embargo, la unicidad del producto tensorial debe entenderse estrictamente en el sentido del teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.2. La correspondencia $f \mapsto g$ que se establece en virtud de la propiedad de factorización T2 constituye un isomorfismo del espacio $\mathcal{L}(U, V; W)$ sobre el espacio $\mathcal{L}(Z; W)$. Si (Z', φ') es también un producto tensorial de U y V y $f \mapsto g'$ es el correspondiente isomorfismo de $\mathcal{L}(U, V; W)$ sobre $\mathcal{L}(Z'; W)$, entonces es $g = g' \circ \lambda$ donde $\lambda: Z \rightarrow Z'$ es el isomorfismo definido en el teorema 5.2.1.

Se dice entonces que la aplicación bilineal $f: U \times V \rightarrow W$ y la aplicación lineal $g: Z \rightarrow W$ *se corresponden* en virtud de la aplicación universal $\varphi: U \times V \rightarrow Z$; o bien que g es la *aplicación lineal inducida por la aplicación bilineal f* .

Demostración. Según la propiedad T de factorización única que ya hemos demostrado, dado el producto tensorial (Z, φ) es bien

definida la aplicación $\chi : f \mapsto g$ tal que $f = g \circ \varphi$. χ es inyectiva pues si fuera $\chi(f) = g$ y $\chi(f_1) = g$ se tendría que $f = g \circ \varphi = f_1$; y es sobreyectiva porque dado $g : Z \rightarrow W$ lineal cualquiera, es claro que $f = g \circ \varphi$ es bilineal, y que $\chi(f) = g$.

La aplicación χ es lineal porque dados f_1 y f_2 bilineales de $U \times V$ en W , si $\chi(f_1) = g_1$ y $\chi(f_2) = g_2$, entonces se tiene $f_1 = g_1 \circ \varphi$ y $f_2 = g_2 \circ \varphi$, y por tanto $f_1 + f_2 = g_1 \circ \varphi + g_2 \circ \varphi = (g_1 + g_2) \circ \varphi$. Luego $\chi(f_1 + f_2) = g_1 + g_2 = \chi(f_1) + \chi(f_2)$. Además, cualquiera que sea el escalar α se tiene $\alpha f = \alpha(g \circ \varphi) = (\alpha g) \circ \varphi$ y por tanto $\chi(\alpha f) = \alpha g = \alpha \chi(f)$. Resulta así que χ es un isomorfismo de $\mathcal{L}(U, V; W)$ sobre $\mathcal{L}(Z; W)$.

Sea ahora (Z', φ') otro producto tensorial de U y V . Se tiene entonces

$$g \circ \varphi = f = g' \circ \varphi' = (g' \circ \lambda) \circ \varphi,$$

donde $\lambda : Z \rightarrow Z'$ es la aplicación definida en el teorema 5.2.1. Puesto que $g' \circ u$ es una aplicación lineal de Z en W , la condición T implica que

$$g = g' \circ \lambda. \quad \blacksquare$$

***Ejercicio 5.2.1.** Dadas las bases a_1, a_2 de \mathbb{R}^2 y b_1, b_2, b_3, b_4 de \mathbb{R}^4 , probar que la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\varphi(x, y) = x^1 y^1 b_1 + x^1 y^2 b_2 + x^2 y^1 b_3 + x^2 y^2 b_4,$$

donde $x = x^1 a_1 + x^2 a_2$, $y = y^1 a_1 + y^2 a_2$, es bilineal, y que el conjunto de los puntos $\varphi(x, y)$ no es un subespacio de \mathbb{R}^4 .

Sugerencia. La condición necesaria y suficiente para que $z = z^1 b_1 + z^2 b_2 + z^3 b_3 + z^4 b_4$ pertenezca a $Im \varphi$ es que $z^1 z^4 - z^2 z^3 = 0$. Se comprueba que, en tanto $z_1 = 2b_1 + 2b_2 + b_3 + b_4$ y $z_2 = b_1 + b_3$ pertenecen a S , $z_1 - z_2 \notin S$.

***Ejercicio 5.2.2.** Si $B : U \times V \rightarrow W$ es una aplicación bilineal y $L : W \rightarrow Z$ es una aplicación lineal entonces $L \circ B$ es bilineal y se cumple que $\text{Im}(L \circ B) = L(\text{Im} B)$. Si, en particular es $\text{Im} B = W$, entonces es $\text{Im}(L \circ B) = \text{Im} L$.

***Ejercicio 5.2.3.** Si (Z, φ) es producto tensorial de U y V , y si $h : Z \rightarrow Z'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces el par $(Z', h \circ \varphi)$ es también producto tensorial de U y V .

5.3 Existencia del producto tensorial de dos espacios vectoriales.

En esta sección se demuestra la existencia del producto tensorial de dos espacios mediante un procedimiento que puede generalizarse, por ejemplo, al caso en que \mathbb{F} es sólomente un anillo conmutativo y U y V son \mathbb{F} -módulos. Una demostración más sencilla aparece en el ejercicio 5.5.9.

Dados los espacios vectoriales U y V , designemos por \mathcal{W} al espacio vectorial formado por todas las funciones de $U \times V$ en \mathbb{F} que se anulan salvo en los elementos de subconjuntos finitos de $U \times V$. Es decir que para cada función μ de \mathcal{W} existe un subconjunto finito $\{(x_i, y_i)\}$ de puntos de $U \times V$ para los cuales es $\mu(x_i, y_i) \neq 0$, y para todos los demás puntos de $U \times V$, μ se anula. La suma de dos elementos de \mathcal{W} y el producto de un escalar por uno de ellos se definen como es usual en los espacios vectoriales de funciones.

Representemos por $[x, y]$ a la función perteneciente a \mathcal{W} que toma el valor 1 en el par (x, y) y que se anula en todos los demás puntos de $U \times V$. Definamos luego la aplicación $h : U \times V \rightarrow \mathcal{W}$ tal que

$$k(x, y) = [x, y].$$

Cada función $\mu \in \mathcal{W}$ puede expresarse de una sola manera en la forma

$$\mu = \sum_{(x,y) \in U \times V} \mu_{xy}[x,y] = \sum \mu_{xy}[x,y],$$

donde $\mu_{xy} = \mu(x,y)$. La suma tiene un número finito de términos no nulos y por tanto es bien definida.

Sea S el subespacio lineal de \mathcal{W} generado por todas las funciones de la forma

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] - \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j [x_i, y_j],$$

$$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}, \quad x_1, x_2 \in U, \quad y_1, y_2 \in V.$$

Designemos ahora por Z al espacio vectorial cociente \mathcal{W}/S (sección 2.4, Pte. I), y sea

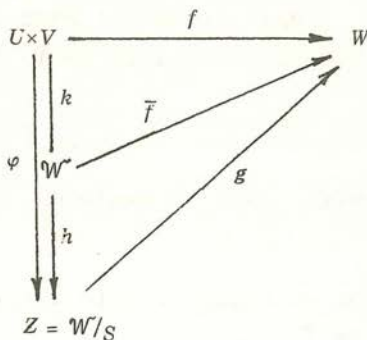
$$h : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}/S$$

el homomorfismo canónico. Definamos entonces la aplicación φ de $U \times V$ en Z por la relación

$$\varphi = h \circ k, \quad (5.3.1)$$

donde $k : U \times V \rightarrow \mathcal{W}$ es definida por $k(x,y) = [x,y]$, de manera que φ hace corresponder a $(x,y) \in U \times V$ la clase de Z que contiene a la función $[x,y]$. Probaremos que (Z, φ) constituye el producto tensorial de U y V .

En primer lugar comprobaremos que φ es una aplicación bilineal. En efecto, la función



$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] - \alpha_1 [x_1, y] - \alpha_2 [x_2, y]$$

pertenece a S , es decir al núcleo del homomorfismo natural h . Luego, puede escribirse

$$h([\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y]) - \alpha_1 h([x_1, y]) - \alpha_2 h([x_2, y]) = 0,$$

ecuación que si se tiene presente que, debido a (5.3.1), es $\varphi(x, y) = h([x, y])$, puede escribirse en la forma

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) - \alpha_1 \varphi(x_1, y) - \alpha_2 \varphi(x_2, y) = 0$$

que prueba la binealidad de φ respecto de la primera variable. En forma análoga se prueba la linealidad de φ respecto de la segunda variable y por tanto su bilinealidad.

Para probar la condición T1 recordemos que cada elemento de \mathcal{W} puede expresarse en la forma

$$\sum_{(x,y) \in U \times V} \mu_{xy} [x, y] = \sum \mu_{xy} [x, y].$$

Luego, cada elemento de $Z = \mathcal{W}/S$ puede expresarse en la forma

$$\sum \mu_{xy} h([x, y]) = \sum \mu_{xy} \varphi(x, y),$$

con un número finito de coeficientes no nulos, y por tanto se cumple T1.

Por último vamos a probar la condición T2. Dada la función bilineal $f: U \times V \rightarrow W$ definamos la aplicación lineal $\bar{f}: \mathcal{W} \rightarrow W$ tal que

$$\bar{f}(\sum \mu_{xy} [x, y]) = \sum \mu_{xy} f(x, y).$$

Se tendrá entonces en particular

$$\bar{f}([x, y]) = f(x, y),$$

y por tanto

$$\bar{f} \circ k = f. \quad (5.3.2)$$

En virtud de la linealidad de \bar{f} y de la bilinealidad de f , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{f}([\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2]) &= \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j [x_i, y_j] \\ &= \bar{f}(k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)) - \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j k(x_i, x_j) \\ &= (\bar{f} \circ k)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) - \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j (\bar{f} \circ k)(x_i, x_j) \\ &= f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) - \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j f(x_i, x_j) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto es $\bar{f}(S) = \{0\}$, y $\bar{f} : \mathcal{W} \rightarrow W$ da lugar a la aplicación lineal inducida $g : \mathcal{W}/S = Z \rightarrow W$ que para cada clase \bar{z} de \mathcal{W}/S , es igual al valor $\bar{f}(z)$, donde z es cualquier elemento de \mathcal{W} perteneciente a esa clase \bar{z} . Esta definición de g es consistente porque \bar{f} forma el mismo valor en dos elementos cualesquiera de una misma clase por cuanto la diferencia de tales elementos pertenece a S , conjunto sobre el cual \bar{f} es nula. Se tiene entonces, para todo $z \in \mathcal{W}$,

$$\bar{f}(z) = g(\bar{z}) = (g \circ h)(z),$$

y por consiguiente

$$\bar{f} = g \circ h. \quad (5.3.3)$$

De (5.3.1), (5.3.2) y (5.3.3) se deduce

$$g \circ \varphi = g \circ h \circ k = \bar{f} \circ k = f,$$

con lo cual queda probada la condición T2, y por tanto (Z, φ) es el producto tensorial de U y V . ■

En virtud del teorema 5.2.1, el producto tensorial de U y V que hemos construido en la demostración del teorema anterior es

isomorfo de una única manera con cualquier otro producto tensorial de los mismos espacios, en el sentido que fué precisado en el enunciado de dicho teorema.

Convenio de notación. En vista de la existencia y de la unicidad (en el sentido del teorema 5.2.1) del producto tensorial de dos espacios vectoriales cualesquiera U y V , designaremos por $U \otimes V$ a un espacio vectorial y por $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$ a una aplicación bilineal, tales que el par $(U \otimes V, \otimes)$ es el producto tensorial de U y V , único en el sentido señalado. A falta de otra representación particular podemos suponer que $(U \otimes V, \otimes)$ es el producto tensorial que hemos construido. Convendremos en escribir $u \otimes v$ para representar a $\otimes(u, v)$, y se lee "u tensor v". Los tensores *descomponibles* son los de la forma $u \otimes v$.

5.4 Propiedades elementales del producto tensorial de espacios vectoriales.

I. Se cumplen las relaciones

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v, \quad (\alpha u) \otimes v = \alpha(u \otimes v),$$

$$u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2, \quad u \otimes (\alpha v) = \alpha(u \otimes v),$$

para cualesquiera $u_1, u_2, u \in U$, $v_1, v_2, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Dichas relaciones resultan inmediatamente de la bilinealidad de la aplicación \otimes .

II. $(u \otimes v = 0) \iff (u = 0 \text{ o bien } v = 0)$.

Demostración. Observemos que existen funciones bilineales $f: U \times V \rightarrow \mathbb{F}$, tales que, dados u y v diferentes de cero, se tiene que $f(u, v) \neq 0$. En efecto, sean $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ bases de U y V

respectivamente, tales que $e_i = u$ y $f_i = v$. La función bilineal f tal que $f(e_i, f_j) = 1$, para i, j arbitrarios, (ej.5.1.2), cumple evidentemente la condición prescrita.

Supongamos ahora que u y v son diferentes de cero y que $u \otimes v = 0$. Entonces, si f es una función bilineal como la que acabamos de construir, y si g es la aplicación bilineal de $U \otimes V$ en F tal que $f = g \circ \otimes$, se tendrá

$$f(u, v) = g(u \otimes v) = 0,$$

lo que contradice a la precedente construcción de f .

Si, inversamente suponemos, por ejemplo, que $u = 0$, entonces se tiene $u \otimes v = \otimes(u, v) = 0$, porque \otimes es bilineal. ■

III. Cada vector $z \neq 0$ de $U \otimes V$ puede escribirse en la forma

$$z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$$

donde tanto los vectores x_i de U como los vectores y_i de V son linealmente independientes.

Demostración. Observemos en primer lugar que cada $z \in U \otimes V$ puede representarse en la forma

$$z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i, \quad x_i \in U, \quad y_i \in V. \quad (5.4.1)$$

En efecto, en virtud de la condición T1 puede escribirse

$$z = \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^r (\alpha x_i) \otimes y_i,$$

que es de la forma (5.4.1).

Podemos suponer entonces que la representación (5.4.1) de $z \neq 0$ es elegida de manera que r tiene el menor valor posible. Si $r = 1$, entonces en virtud de la propiedad II es $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, es decir que tanto $\{x_i\}$ como $\{y_i\}$ son linealmente independientes, y la proposición se cumple. Sea luego $r \geq 2$. Si los x_i no fueran linealmente independientes se podría escribir una relación tal

como, por ejemplo, $x^r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i x_i$, y entonces sería

$$z = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i x_i \otimes y_r = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes (y_i + \lambda^i y_r) = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes y'_i,$$

lo cual contradice a la propiedad de mínimo que tiene r por hipótesis.

En forma idéntica se prueba que los vectores y_i son linealmente independientes. ■

IV. Sean y_1, \dots, y_r r vectores *l.i.* (es decir *linealmente independientes*) de V . Si x_1, \dots, x_r son vectores de V para los cuales se cumple que

$$\sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j = 0, \quad (5.4.2)$$

entonces se cumple que $x_j = 0$ para $j = 1, \dots, r$.

Demostración. Puesto que los vectores y_j son *l.i.* podemos construir las r funciones lineales g^i sobre V tales que

$$g^i(y_j) = \delta_j^i.$$

Consideremos la función bilineal

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^r f^i(x) g^i(y),$$

donde las f^i son funciones lineales *arbitrarias* definidas sobre U . En virtud de T2 existe la función lineal $h: U \otimes V \rightarrow F$ tal que

$$h(x \otimes y) = F(x, y) = \sum_{i=1}^r f^i(x) g^i(y). \quad (5.4.3)$$

Por tanto

$$h\left(\sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j\right) = \sum_{i,j=1}^r f^i(x_j) g^i(y_j) = \sum_{i=1}^r f^i(x_i),$$

o sea, en virtud de (5.4.2),

$$\sum_{i=1}^r f^i(x_i) = 0. \quad (5.4.4)$$

Para cada valor de k ($1 \leq k \leq r$) podemos elegir $f^i = 0$ para $i \neq k$. Entonces de (5.4.4) resulta

$$f^k(x_k) = 0.$$

Pero f^k y k son arbitrarios, luego, necesariamente $x_k = 0$ para $k = 1, \dots, r$. ■

Ejercicio 5.4.1. Probar que si V es un espacio vectorial cualquiera y $\otimes: F \times V \rightarrow V$ es definida por $\otimes(\alpha, x) = \alpha \otimes x = \alpha x$, entonces el par (V, \otimes) es producto tensorial de F y V

Ejercicio 5.4.2. Si U y V son espacios vectoriales de dimensión 1, entonces es $\dim U \otimes V = 1$.

***Ejercicio 5.4.3.** Si el campo F' es una extensión del campo F (definición 11.1.1, Pte. I) y si V es un espacio vectorial sobre F , el producto tensorial $F' \otimes V$ puede considerarse como un espacio vectorial sobre F' en el que la adición es la dada

en el espacio vectorial $\mathbb{F}' \otimes V$ cuando \mathbb{F}' se considera como un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , y el producto de un escalar $\alpha' \in \mathbb{F}'$ por un vector es dado por

$$\alpha' \sum_{i=1}^p \alpha'_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^p (\alpha' \alpha'_i) \otimes v_i .$$

Demostrar que el par $(\mathbb{F}' \otimes V, \theta)$ donde $\mathbb{F}' \otimes V$ es el espacio vectorial que hemos definido sobre \mathbb{F}' , y $\theta: V \rightarrow \mathbb{F}' \otimes V$ es dada por la fórmula $\theta(v) = 1 \otimes v$, es extensión de V correspondiente a la extensión \mathbb{F}' de \mathbb{F} (definición 12.3.1, Pte.I). Probar además, haciendo uso del teorema 12.3.1, Pte.I, que la aplicación bilineal $\otimes: \mathbb{F}' \times V \rightarrow \mathbb{F}' \otimes V$ es dada por

$$\otimes(\alpha', v) = \alpha' \cdot \theta v = \alpha'(1 \otimes v) = \alpha' \otimes v .$$

5.5 Otras condiciones necesarias y suficientes para que el par (Z, φ) sea producto tensorial de U y V .

Vamos a demostrar en primer lugar que en la definición del producto tensorial la propiedad T2 de factorización puede sustituirse por una nueva propiedad T3 que se expresa en términos de la independencia lineal de vectores, en la forma siguiente:

T3. Dadas dos familias cualesquiera $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ de vectores l.i. de U y V , respectivamente, los vectores $\varphi(a_i, b_j)$, $i \in I$, $j \in J$, son también l.i.

Para demostrar el primer teorema de la presente sección de bemos probar primero el siguiente lema:

Lema 5.5.1. Dada la aplicación bilineal $\varphi: U \times V \rightarrow Z$ que cumple la condición T3, cualquiera que sea el entero r la relación

$$\sum_{k=1}^r \varphi(x_k, y_k) = 0, \quad x_k \in U, y_k \in V, \quad (5.5.1)$$

implica que cualquiera que sea la aplicación bilineal f de $U \times V$ en un espacio vectorial W , se tiene

$$\sum_{k=1}^r f(x_k, y_k) = 0.$$

Demostración. Sean U_1 y V_1 los subespacios de U y V generados por los vectores x_1, \dots, x_r de U e y_1, \dots, y_r de V , respectivamente. Supongamos que (x_1, \dots, x_p) es una base de U_1 e (y_1, \dots, y_q) es una base de V_1 . Podemos escribir

$$x_k = \sum_{\mu=1}^p \xi_k^\mu x_\mu, \quad y_k = \sum_{\nu=1}^q \eta_k^\nu y_\nu, \quad (k = 1, \dots, r).$$

Luego

$$\sum_{k=1}^r f(x_k, y_k) = \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q \zeta^{\mu\nu} f(x_\mu, y_\nu) \quad (5.5.2)$$

donde

$$\zeta^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^r \xi_k^\mu \eta_k^\nu.$$

De la misma manera puede escribirse

$$\sum_{k=1}^r \varphi(x_k, y_k) = \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q \zeta^{\mu\nu} \varphi(x_\mu, y_\nu).$$

La relación (5.5.1) implica que

$$\sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q \zeta^{\mu\nu} \varphi(x_\mu, y_\nu) = 0,$$

de donde, en virtud de la condición T3,

$$\zeta^{\mu\nu} = 0, \quad (\mu = 1, \dots, p; \nu = 1, \dots, q).$$

De (5.5.2) se deduce que $\sum_{k=1}^r f(x_k, y_k) = 0$. ■

Teorema 5.5.1. Para que el par (Z, φ) sea el producto tensorial $U \otimes V$ es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones **T1** y **T3**.

Demostración. Para probar que las condiciones son necesarias bastará probar que si (Z, φ) es el producto tensorial de U y V , entonces se cumple **T3**. Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ sistemas l.i. de U y V . Designemos por U_I y V_J a los subespacios de U y V generados por esos sistemas de vectores. Escogamos luego un sistema arbitrario de escalares $\{\gamma_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$, y definamos la función bilineal $f: U_I \times V_J \rightarrow \mathbb{F}$ tal que

$$f(a_i, b_j) = \gamma_{ij}.$$

(ver el ejercicio 5.1.2, y el teorema 2.5.2 de la Pte.I)

En virtud de **T2** existe una función lineal $g: Z \rightarrow \mathbb{F}$ tal que

$$f(x, y) = g(\varphi(x, y)).$$

Podemos probar ahora que los $\varphi(a_i, b_j)$ para $i \in I$ y $j \in J$ son l.i. Supongamos que sea

$$\sum_{k=1}^p \zeta^k \varphi(a_{i_k}, b_{j_k}) = 0.$$

Se tendrá entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \zeta^k \gamma_{i_k j_k} &= \sum_{k=1}^p \zeta^k f(a_{i_k}, b_{j_k}) \\ &= \sum_{k=1}^p \zeta^k g(\varphi(a_{i_k}, b_{j_k})) = g\left(\sum_{k=1}^p \zeta^k \varphi(a_{i_k}, b_{j_k})\right) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que los escalares $\gamma_{i_k j_k}$ son arbitrarios, esta ecuación im

plica que $\xi^k = 0$, y por tanto los $\varphi(a_i, b_j)$ son l.i.

Vamos a probar ahora que las condiciones **T1** y **T3** son suficientes para que (Z, φ) sea el producto tensorial de U y V . Bastará para esto probar que si se cumplen **T1** y **T3** entonces se cumple **T2**. Sea $f: U \times V \rightarrow W$ una aplicación bilineal cualquiera. Debemos probar que existe la aplicación lineal $g: Z \rightarrow W$ tal que $f = g \circ \varphi$. Sea z un vector arbitrario de Z . En virtud de **T1**, z puede escribirse en la forma

$$z = \sum_i \varphi(x_i, y_i), \quad x_i \in U, y_i \in V,$$

en que hay un número finito de términos no nulos.

Definimos entonces la aplicación $g: Z \rightarrow W$, mediante la fórmula

$$g(z) = \sum_i f(x_i, y_i).$$

Mostraremos que esta aplicación es bien definida, es decir que no depende de la representación particular de z que se considere. Sea

$$z = \sum_j \varphi(x'_j, y'_j), \quad x'_j \in U, y'_j \in V,$$

otra representación de z . Puede escribirse entonces

$$\sum_i \varphi(x_i, y_i) - \sum_j \varphi(x'_j, y'_j) = 0,$$

y en virtud del lema 5.5.1 será

$$\sum_i f(x_i, y_i) = \sum_j f(x'_j, y'_j),$$

lo cual prueba que la aplicación g es bien definida.

La linealidad de g se comprueba por un cálculo directo, a partir de su definición.

Finalmente, puesto que para $z = \sum_i \varphi(x_i, y_i)$ es

$$g(z) = \sum_i f(x_i, y_i),$$

para $z = \varphi(x, y)$ se tendrá

$$g(\varphi(x, y)) = f(x, y),$$

y por consiguiente

$$f = g \circ \varphi,$$

lo cual demuestra el cumplimiento de T2. ■

Corolario 1. Dados los espacios vectoriales U y V , para que el par (Z, φ) , donde $\varphi: U \times V \rightarrow Z$ es una aplicación bilineal, sea el producto tensorial de U y V es necesario y suficiente que se cumpla la condición

T4. Si $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ son bases de U y V respectivamente, entonces los vectores $\varphi(a_i, b_j)$, $i \in I$, $j \in J$ constituyen una base de Z .

Demostración. 1º (T1 y T3) \Rightarrow T4.

De T3 resulta que si $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ son bases de U y V respectivamente, entonces, puesto que los vectores $\varphi(a_i, b_j)$, $i \in I$, $j \in J$, linealmente independientes, generan a $\text{Im } \varphi$, constituyen una base de este espacio. Pero la condición T1 implica que $\text{Im } \varphi = Z$; luego se cumple T4.

2º T4 \Rightarrow (T1 y T3)

Puesto que los vectores $\varphi(a_i, b_j)$ constituyen una base de Z , generan a ese espacio y por consiguiente se cumple T1.

Probemos ahora T3. Si $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ son familias de vectores l.i. de U y V respectivamente, podemos completarlas hasta formar las bases $\{a_{i'}\}_{i' \in I'}$ y $\{b_{j'}\}_{j' \in J'}$ tales que $I' \supset I$ y $J' \supset J$, de dichos espacios. En virtud de T4 los vectores $\varphi(a_{i'}, b_{j'})$ constituyen una base de Z , y son por tanto l.i.; en particular los vectores $\varphi(a_i, b_j)$ serán l.i. Se cumple por tanto la condición T3. ■

Los dos corolarios siguientes se refieren al caso en que los espacios U y V son de dimensiones finitas m y n respectivamente.

Corolario 2. Si U y V son de dimensión finita se cumple que

$$\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V.$$

Demostración. Esta proposición es consecuencia inmediata del corolario anterior. ■

Corolario 3. Si Z es un espacio de dimensión $m \cdot n$, el par (Z, φ) , donde $\varphi : U \times V \rightarrow Z$ es bilineal, es producto tensorial de U y V si cumple una de las condiciones T1 o T2.

Demostración. El corolario anterior implica que $\dim U \otimes V = \dim Z$.

Si $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$ es la aplicación universal, existirá la aplicación lineal $g : U \otimes V \rightarrow Z$ tal que $\varphi = g \circ \otimes$.

Si se cumple T1 entonces es $\text{Im } \varphi = Z$. Puesto que $\text{Im } \otimes = U \otimes V$, resulta (ejercicio 5.5.2) que

$$Z = \text{Im } \varphi = \text{Im } (g \circ \otimes) = \text{Im } g .$$

Luego g es un isomorfismo de $U \otimes V$ sobre Z , y por consiguiente (ejercicio 5.2.3) el par $(Z, \varphi) = (Z, g \circ \otimes)$ es producto tensorial de U y V .

Si suponemos ahora que se cumple T2, entonces existe la aplicación lineal $h: Z \rightarrow U \otimes V$ tal que $\otimes = h \circ \varphi = h \circ g \circ \otimes$. Por consiguiente es $h \circ g = Id_{U \otimes V}$, lo cual prueba que g es inyectiva; y puesto que $\dim U \otimes V = \dim Z$, g será un isomorfismo de $U \otimes V$ sobre Z .

Luego (ejercicio 5.2.3), el par $(Z, \varphi) = (Z, g \circ \otimes)$ es producto tensorial de U y V . ■

Corolario 4. Sea $\varphi: U \times V \rightarrow Z$ una aplicación bilineal, donde U, V y Z son espacios vectoriales dados. Sea además $g: U \otimes V \rightarrow Z$ la aplicación lineal tal que $\varphi = g \circ \otimes$, donde $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$ es la aplicación universal. Se cumple entonces:

- 1º φ satisface a la condición T1 si y sólo si g es sobreyectiva;
- 2º φ satisface a la condición T2 si y sólo si g es inyectiva;
- 3º (Z, φ) es el producto tensorial de U y V si y sólo si g es biyectiva.

Demostración. 1º Puesto que $Im \otimes = U \otimes V$ la relación $\varphi = g \circ \otimes$ implica que $Im \varphi = Im g$. Luego la condición necesaria y suficiente para que φ cumpla la condición T1 es que $Im g = Z$.

2º Supongamos que g es inyectiva. Sea $\chi: U \times V \rightarrow W$ una aplicación bilineal cualquiera, y sea $g_1: U \otimes V \rightarrow W$ la aplicación lineal tal que $\chi = g_1 \circ \otimes$. Definamos la aplicación lineal $h: Im \varphi \rightarrow W$ para la que se tiene, si $z = \sum_{i=1}^p \mu_i \varphi(x_i, y_i)$ es un elemento cualquier

ra de $Im \varphi$,

$$h(z) = g_1 \left(\sum_{i=1}^p \mu_i (x_i \otimes y_i) \right). \quad (5.5.3)$$

h es bien definida porque si $z = \sum_{j=1}^q \nu_j \varphi(x'_j, y'_j)$, entonces

$$g \left(\sum_{j=1}^q \nu_j (x'_j \otimes y'_j) \right) = \sum_{j=1}^q \nu_j \varphi(x'_j, y'_j) = \sum_{i=1}^p \mu_i \varphi(x_i, y_i) = g \left(\sum_{i=1}^p \mu_i (x_i \otimes y_i) \right);$$

y puesto que g es inyectiva resulta que

$$\sum_{j=1}^q \nu_j (x'_j \otimes y'_j) = \sum_{i=1}^p \mu_i (x_i \otimes y_i);$$

y por consiguiente h está bien definida por (5.5.3) y es lineal porque g_1 lo es. Además, es claro que

$$h(\varphi(x, y)) = g_1(x \otimes y) = \chi(x, y)$$

para cada par (x, y) . Luego es $\chi = h \circ \varphi$, y por tanto φ cumple la condición **T2**.

Supongamos, recíprocamente, que φ cumple **T2**. Debemos probar que g es inyectiva.

La aplicación bilineal $\otimes U \times V \rightarrow U \otimes V$ induce a la aplicación bilineal $h: Z \rightarrow U \otimes V$ tal que $\otimes = h \circ \varphi$; y por tanto se tiene que

$$x \otimes y = h[\varphi(x, y)], \quad \forall x \in U, y \in V.$$

Por otra parte se cumple que $\varphi(x, y) = g(x \otimes y)$; luego

$$x \otimes y = (h \circ g)(x \otimes y),$$

de donde se deduce que $h \circ g$ es la aplicación idéntica $I_{U \otimes V}$ de $U \otimes V$, y por consiguiente g es inyectiva.

3º De las dos primeras partes de esta demostración se deduce inmediatamente que para que el par (Z, φ) sea producto tensorial de U y V es necesario y suficiente que g sea biyectiva. ■

Notación. Si \mathcal{E} designa a una base $\{e_i\}_{i \in I}$ de U y \mathcal{F} designa a una base $\{f_j\}_{j \in J}$ de V , la base $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ de $U \otimes V$ se designa por $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

Aplicaciones. En lo que sigue, dado un espacio vectorial cualquiera V , sea V^* uno de sus espacios duales (Pte. I, § 4).

A. Sea $\mathcal{B}(U, V)^*$ el *espacio conjugado* (Pte. I, pág. 38) del espacio $\mathcal{B}(U, V)$ de las funciones bilineales con valores escalares, definidas sobre $U \times V$. Definamos la aplicación bilineal $\varphi_1: U \times V \rightarrow \mathcal{B}(U, V)^*$, tal que

$$[\varphi_1(u, v)](w) = w(u, v), \quad w \in \mathcal{B}(U, V). \quad (5.5.4)$$

El par $(\text{Im } \varphi_1, \varphi_1)$ es entonces el producto tensorial de U y V .

Demostración. La condición T1 se cumple obviamente.

Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ conjuntos l.i. de U y V . Según el teorema 5.5.1 bastará probar que las funciones $\varphi_1(a_i, b_j)$ son l.i. Supongamos que sea

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \varphi_1(a_{i_k}, b_{j_k}) = 0.$$

Cualquiera que sea $w \in \mathcal{B}(U, V)$ se tiene entonces

$$\sum_{k=1}^p \mu^k w(a_{i_k}, b_{j_k}) = 0.$$

Sea, en particular, $w \in \mathcal{B}(U, V)$ tal que $w(u, v) = f_1(u) f_2(v)$, donde $f_1 \in \mathcal{L}(U)$ y $f_2 \in \mathcal{L}(V)$. Se tiene entonces

$$\sum_{k=1}^p \mu^k f_1(a_{i_k}) f_2(b_{j_k}) = 0. \quad (5.5.5)$$

Puesto que los $\{a_{i_k}\}$ y los $\{b_{j_k}\}$ son l.i., las funciones f_1 y f_2 pueden elegirse de manera que los valores $f_1(a_{i_k})$ y $f_2(b_{j_k})$ sean escalares arbitrarios. Se deduce entonces de (5.5.5) que $\mu^k = 0$ para $k = 1, \dots, p$. ■

B. Si se define la aplicación bilineal $\varphi_2: U \times V \rightarrow \mathcal{B}(U^*, V^*)$ por

$$[\varphi_2(u, v)](u^*, v^*) = \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle, \quad (5.5.6)$$

para cada par $(u^*, v^*) \in U^* \times V^*$, entonces el par $(\text{Im } \varphi_2, \varphi_2)$ es producto tensorial de U y V .

Demostración. Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ conjuntos de vectores l. i. de U y V . Debemos probar nuevamente que los vectores $\varphi_2(a_i, b_j)$ son l.i. Supongamos que sea

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \varphi_2(a_{i_k}, b_{j_k}) = 0.$$

Se tiene entonces para $u^* \in U^*$ y $v^* \in V^*$ cualesquiera

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \langle u^*, a_{i_k} \rangle \langle v^*, b_{j_k} \rangle = 0,$$

relación que puede escribirse en la forma

$$\langle u^*, \sum_{k=1}^p \mu^k a_{i_k} \langle v^*, b_{j_k} \rangle \rangle = 0,$$

y puesto que u^* es arbitrario, se deduce (Pte. I, sección 4.2, condición E_2)

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \langle v^*, b_{j_k} \rangle a_{i_k} = 0.$$

Dado que los a_{i_k} son l.i. se deberá tener

$$\mu^k \langle v^*, b_{j_k} \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

o sea

$$\langle v^*, \mu^k b_{j_k} \rangle = 0;$$

y por cuanto v^* es arbitrario resulta que

$$\mu^k b_{j_k} = 0.$$

Ahora bien, $b_{j_k} \neq 0$ porque los b_j son l.i.; luego $\mu^k = 0$ para $k = 1, \dots, p$, y por consiguiente los $\varphi_2(a_i, b_j)$ son l.i. ■

C. Si se define la aplicación bilineal $\varphi_3: U \times V \rightarrow \mathcal{L}(U^*; V)$ mediante la relación

$$\varphi_3(u, v)(u^*) = \langle u^*, u \rangle \cdot v, \quad u^* \in U^*, \quad (5.5.7)$$

entonces el par $(\text{Im } \varphi_3, \varphi_3)$ es producto tensorial de U y V .

Demostración. Procederemos como en los dos casos anteriores.

Supongamos que sea

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \varphi_3(a_{i_k}, b_{j_k}) = 0.$$

Se tendrá entonces

$$\sum_{k=1}^p \mu^k \cdot \langle u^*, a_{i_k} \rangle b_{j_k} = 0;$$

y puesto que los b_{j_k} son l.i. se deduce que

$$\langle u^*, \mu^k b_{j_k} \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Como u^* es arbitrario en U^* resulta de aquí que

$$\mu^k b_{j_k} = 0$$

y por cuanto $b_{j_k} \neq 0$ se sigue que $\mu^k = 0$ para $k = 1, \dots, p$, es decir que los $\varphi_3(a_i, b_j)$ son l.i. ■

D. Si U y V tienen las dimensiones finitas m y n , y φ_1, φ_2 y φ_3 son las aplicaciones bilineales definidas mediante las fórmulas (5.5.4), (5.5.6) y (5.5.7), entonces se cumple $(\mathcal{B}(U, V)^*, \varphi_1)$, $(\mathcal{B}(U^*, V^*), \varphi_2)$ y $(\mathcal{L}(U^*; V), \varphi_3)$ son productos tensoriales de U y V . En consecuencia los elementos de los espacios $\mathcal{B}(U, V)^*$, $\mathcal{B}(U^*, V^*)$ y $\mathcal{L}(U^*; V)$ pueden ser considerados como tensores del espacio $U \otimes V$.

Demostración. En vista de los resultados obtenidos en las partes A, B y C bastará comprobar que por ser U y V de dimensión finita tienen lugar las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi_1 &= \mathcal{B}(U, V)^* \\ \text{Im } \varphi_2 &= \mathcal{B}(U^*, V^*) \\ \text{Im } \varphi_3 &= \mathcal{L}(U^*; V) \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Para comprobar estas relaciones recordemos en primer lugar que los tres espacios $\mathcal{B}(U^*, V^*)$, $\mathcal{L}(U^*; V)$ y $\mathcal{B}(U, V)^* = \mathcal{L}(\mathcal{B}(U, V); \mathbb{F})$ son de dimensión mn (Pte. I, ejercicios 3.1.4 y 5.5.3). Si $\{a_i\}$ y $\{b_j\}$ son bases de U y V , los conjuntos $\{\varphi_1(a_i, b_j)\}$, $\{\varphi_2(a_i, b_j)\}$ y $\{\varphi_3(a_i, b_j)\}$, cada uno de los cuales consta de mn elementos, son bases de los subespacios $\text{Im } \varphi_1$, $\text{Im } \varphi_2$ e $\text{Im } \varphi_3$, por consiguiente se cumplen las igualdades (5.5.8).

Observación. El enunciado D justifica que, en el caso en que U y V son de dimensión finita, consideremos como tensores de segundo orden pertenecientes a $U \otimes V$ a las funciones pertenecientes a los espacios $\mathcal{B}(U, V)^*$, $\mathcal{B}(U^*, V^*)$ y $\mathcal{L}(U^*; V)$.

Observaciones semejantes pueden hacerse acerca de las funciones pertenecientes a los espacios que resultan de los anteriores si se reemplazan $U \circ V$ por $U^* \circ V^*$, o inversamente (ver el ejercicio 5.5.2).

***Ejercicio 5.5.1.** Sea $\varphi: U \times V \rightarrow Z$ una aplicación bilineal tal que el par $(\text{Im } \varphi, \varphi)$ sea el producto tensorial $U \otimes V$. Si $\dim Z = \dim U \cdot \dim V$ entonces es $\text{Im } \varphi = Z$, y por tanto (Z, φ) es el producto $U \otimes V$.

***Ejercicio 5.5.2.** Dar representaciones de los espacios $U^* \otimes V$, $U \otimes V^*$ y $U^* \otimes V^*$ mediante espacios de funciones.

***Ejercicio 5.5.3.** Si $x \otimes y \neq 0$ es un elemento de $U \otimes V$ entonces la relación $x \otimes y = x_i \otimes y_i$ se cumple si y sólo si existe el escalar $\lambda \neq 0$ tal que $x_i = \lambda x$, $y_i = \lambda^{-1} y$.

(Sugerencia: Emplear la representación de $U \otimes V$ mediante un subespacio de $\mathcal{B}(U^*, V^*)$ dada en la aplicación **B** precedente).

Ejercicio 5.5.4. Sean $\{a_1, \dots, a_m\}$ y $\{b_1, \dots, b_n\}$ bases de U y de V respectivamente. Sea Z un espacio cualquiera de dimensión $m \cdot n$. Dada una base cualquiera $\{h_{11}, h_{12}, \dots, h_{i,m}\}$ de Z , probar que (Z, φ) es el producto tensorial de U y V , supuesto que φ es la aplicación bilineal de $U \times V$ en Z definida por

$$\varphi(a_i, b_j) = h_{ij}.$$

Ejercicio 5.5.5. Consideremos las bases $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ de U y $\mathcal{E}^* = \{e^1, \dots, e^m\}$ dual de la anterior. El conjunto

$$\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} = \{e^i \otimes e_j; \quad i, j = 1, \dots, m\}$$

es una base de $U^* \otimes U$. Sea A un endomorfismo de U , es decir un elemento de $\mathcal{L}(U;U)$, y sea (α_j^i) su matriz en la base \mathcal{E} . Entonces las componentes en la base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ del tensor $t \in U^* \otimes U$ que corresponde a A en el isomorfismo $\mathcal{L}(U;U) \rightarrow U^* \otimes U$ que existe en virtud del enunciado **D** de la sección 5.5, coinciden con los elementos de la matriz (α_j^i) .

***Ejercicio 5.5.6.** Sea V un espacio de dimensión n . Las transformaciones lineales $A_j^i \in \mathcal{L}(V;V)$, definidas por $A_j^i(e_k) = \delta_k^i(e_j)$, donde $\{e_i\}$ es una base de V , constituyen una base de $\mathcal{L}(V;V)$; y si (α_j^i) es la matriz de una transformación lineal cualquiera

$A \in \mathcal{L}(V;V)$ respecto de la base $\{e_i\}$, se tiene $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i A_j^i$, es decir que la matriz de A en la base $\{e_i\}$ es dada por los componentes de A respecto de la base $\{A_j^i\}$. Esta base se llama *canónica*.

Ejercicio 5.5.7. Probar con ejemplos la existencia de elementos de $U \otimes V$ que no son descomponibles (sección 5.2).

Sugerencia: Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ bases de U y de V respectivamente. Si se supone que un elemento de $U \otimes V$ de la forma

$$a_{i_1} \otimes b_{j_1} + a_{i_2} \otimes b_{j_2}$$

es descomponible, entonces se prueba mediante la propiedad **T3** que se llega a una contradicción.

Ejercicio 5.5.8. Si (Z, φ) es el producto tensorial de U y V , y si φ_i es la restricción de φ a $U_i \times V_i$, donde U_i es un subespacio

de U y V es un subespacio de V , probar que el par $(\text{Im } \varphi_1, \varphi_1)$ es el producto tensorial de U_1 y V_1 . Justificar en consecuencia la relación

$$U_1 \otimes V_1 \subset U \otimes V.$$

***Ejercicio 5.5.9.** El corolario 5.5.1 sugiere la siguiente demostración de la existencia del producto tensorial de los espacios vectoriales de U y V .

Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ bases de U y V . Designemos por Z al espacio vectorial formado por todas las funciones $z: I \times J \rightarrow \mathbb{F}$ tales que $z(i, j) = 0$ salvo para un número finito de pares (i, j) , con las operaciones vectoriales $z + z'$ y αz definidas por

$$(z + z')(i, j) = z(i, j) + z'(i, j)$$

$$(\alpha z)(i, j) = \alpha z(i, j), \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Los elementos $c_{i,j} \in Z$ tales que $c_{i,j}(i', j') = 0$ para $(i, j) \neq (i', j')$ y $c_{i,j}(i, j) = 1$ constituyen una base de Z .

Probar que si φ es la aplicación bilineal de $U \times V$ en Z que cumple la condición

$$\varphi(a_i, b_j) = c_{i,j}, \quad (i \in I, j \in J),$$

el par (Z, φ) es el producto tensorial $U \otimes V$.

Esta demostración de la existencia del producto tensorial es más sencilla que la que se ha dado en la sección 5.3; pero ésta última tiene la ventaja de ser más general y admitir importante generalización.

5.6 Isomorfismos naturales de productos tensoriales de espacios vectoriales. Asociatividad del producto tensorial.

Si entre dos espacios vectoriales puede establecerse un isomorfismo bien determinado, independiente de las bases que se elijan en dichos espacios, diremos que ese isomorfismo es *natural* o *canónico* y emplearemos el signo \approx para expresar la relación que por ese motivo tiene lugar entre los espacios. Si E es un espacio vectorial y $\Psi: U \otimes V \rightarrow E$ es un isomorfismo natural, entonces el par $(E, \Psi \circ \otimes)$, donde \otimes es la aplicación universal $U \times V \rightarrow U \otimes V$, es producto tensorial de U y V (ver el ejercicio 5.2.3). Se dice entonces que E es una *representación* de $U \otimes V$, se escribe $E \approx U \otimes V$ y aún, algunas veces, $E = U \otimes V$.

Anteriormente ya hemos dado algunas representaciones de productos tensoriales mediante espacios de funciones (ver las aplicaciones al final de la sección 5.5 y el ejercicio 5.5.4).

Teorema 5.6.1. El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:

1. $U \otimes V \approx V \otimes U$
2. $(U \otimes V) \otimes W \approx U \otimes (V \otimes W)$

Estos isomorfismos naturales son *únicos* si se exige que cumplan respectivamente las condiciones siguientes: $u \otimes v \mapsto v \otimes u$, y $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$.

Demostración. 1. La aplicación $\bar{\lambda}: U \times V \rightarrow V \otimes U$ definida por $\bar{\lambda}(u, v) = v \otimes u$ es bilineal, luego, por la propiedad de factorización única (propiedad T, sección 5.2), existe la aplicación lineal única $\lambda: U \otimes V \rightarrow V \otimes U$ tal que $\bar{\lambda} = \lambda \circ \otimes$, y por tanto $\lambda(u \otimes v) = \bar{\lambda}(u, v) = v \otimes u$. En forma análoga puede establecerse la existencia de la aplicación lineal única $\lambda': V \otimes U \rightarrow U \otimes V$

tal que $\lambda'(v \otimes u) = u \otimes v$. Las siguientes relaciones se cumplen sobre los generadores $v \otimes u$ de $V \otimes U$ y $u \otimes v$ de $U \otimes V$, respectivamente, y por consiguiente se cumplen en general:

$$\lambda \circ \lambda' = I_{V \otimes U}, \quad \lambda' \circ \lambda = I_{U \otimes V}.$$

En virtud de la primera relación, λ es sobreyectiva y en virtud de la segunda es inyectiva. Por tanto es un isomorfismo y λ' es su inversa.

2. Para cada $x \in U$ definamos la aplicación bilineal $\bar{\mu}_x: V \times W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$ tal que

$$\bar{\mu}_x(v, w) = (x \otimes v) \otimes w.$$

Existirá entonces la aplicación lineal única $\mu_x: V \otimes W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$ tal que $\bar{\mu}_x = \mu_x \circ \otimes$, y por tanto que

$$\mu_x(v \otimes w) = (x \otimes v) \otimes w.$$

Podemos definir ahora la aplicación bilineal

$$\bar{\lambda}: U \times (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$$

tal que

$$\bar{\lambda}(u, t) = \mu_u(t) \quad \text{para } u \in U \text{ y } t \in V \otimes W.$$

En consecuencia existirá la aplicación lineal

$$\lambda: U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W,$$

para la cual es $\bar{\lambda} = \lambda \circ \otimes$, y por tanto

$$\lambda(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w.$$

En forma análoga, si comenzamos por definir, para cada $w \in W$, la aplicación bilineal $\bar{v}_w: U \times V \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ tal que

$$\bar{v}_w(u, v) = u \otimes (v \otimes w),$$

podremos establecer la existencia de la aplicación lineal

$$\lambda' : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

tal que

$$\lambda' ((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w).$$

Las aplicaciones λ y λ' son inversas entre sí y λ es el isomorfismo buscado de $(U \otimes V) \otimes W$ y $U \otimes (V \otimes W)$.

3. Los isomorfismos precedentemente establecidos y la proposición del ejercicio 5.2.3 permiten considerar a $V \otimes U$ como producto tensorial de U y V , y a $U \otimes (V \otimes W)$ como producto tensorial de $(U \otimes V)$ y W . Luego, el teorema 5.2.1 permite establecer la unicidad de los isomorfismos bajo las condiciones expresadas en el enunciado. ■

Observaciones. A. El isomorfismo natural $U \otimes V \approx V \otimes U$ no justifica, en general, identificar a esos espacios, y escribir sin más que $u \otimes v = v \otimes u$. Tal identificación puede resultar inconveniente como puede verse en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Sean U y V espacios de *dimensión finita*. Según vimos en la aplicación D de la sección 5.5 el espacio $\mathcal{L}(U; V)$ puede considerarse como el producto tensorial $U^* \otimes V$ cuando la aplicación \otimes es definida de modo que la aplicación lineal $\varphi = u^* \otimes v : U \rightarrow V$ es tal que

$$\varphi x = x(u^*) \cdot v, \quad \forall x \in U,$$

donde x es un elemento del espacio U dual de U^* que se identifica con $\mathcal{L}(U^*)$, de manera que $x(u^*) = u^*(x)$.

Semejantemente $\mathcal{L}(V^*; U^*)$ puede considerarse como el producto $V \otimes U^*$ cuando $\varphi^* = v \otimes u^* : V^* \rightarrow U^*$ es tal que

$$\varphi^* y^* = y^*(v) \cdot u^*, \quad \forall y^* \in V^*.$$

La identificación de $U^* \otimes V$ con $V \otimes U^*$ llevaría a identificar a φ con φ^* , lo cual puede ser muy inconveniente porque φ y φ^* son duales entre sí (ver Pte. I, sección 4.4) por cuanto se tiene que

$$\begin{aligned} \langle y^*, \varphi x \rangle &= \langle y^*, x(u^*) \cdot v \rangle = u^*(x) \langle y^*, v \rangle \\ &= \langle u^*, x \rangle y^*(v) = \langle y^*(v) \cdot u^*, x \rangle = \langle \varphi^* y^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Si $U = V$, y se identificara a $U \otimes V$ con $V \otimes U$ mediante el isomorfismo del teorema 5.6.1, resultaría una identificación de $U \otimes U$ consigo mismo tal que si u_1 y u_2 son vectores de U , linealmente independientes, serían identificados $u_1 \otimes u_2$ y $u_2 \otimes u_1$, y por tanto estos tensores ya no serían l.i. No se cumpliría por tanto la condición T3, y por consiguiente el espacio resultante ya no sería el producto tensorial de U y U . Se trataría pues de una identificación indeseable en general.

Por lo dicho, supondremos, salvo excepción expresa, que $u \otimes v \neq v \otimes u$. Una excepción habitual es la siguiente: En la teoría de los productos tensoriales de espacios iguales a un espacio vectorial V o a su dual se acostumbra conmutar V con V^* .

B. Asociatividad del producto tensorial. Ordinariamente identificaremos, sin nueva advertencia, a los espacios $(U \otimes V) \otimes W$ y $U \otimes (V \otimes W)$ con arreglo al isomorfismo establecido en el teorema 5.6.1. En tal sentido podemos decir que se cumple la propiedad asociativa.

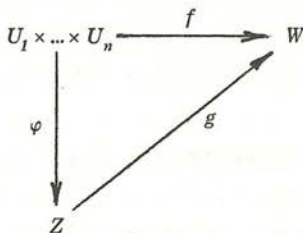
5.7 Producto tensorial de un número finito cualquiera de espacios vectoriales. La introducción del producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales sigue muy de cerca a la del producto tensorial de dos espacios. Las proposiciones que acerca de ellos vamos a probar son enteramente análogas a las que fueron establecidas en las secciones 5.2, 5.3 y 5.5. Las demostraciones serán suprimidas por ser análogas a las de los teoremas correspondientes demostrados en esas secciones, o bien serán descritas en forma breve para señalar las modificaciones que son necesarias.

Definición 5.7.1. El *producto tensorial* de un número finito de espacios vectoriales U_1, U_2, \dots, U_n es un par (Z, φ) formado por un espacio vectorial Z y una aplicación n -lineal $\varphi: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow Z$, que cumplen las condiciones siguientes:

T1*. El espacio Z es *generado* por los vectores del conjunto $\varphi(U_1 \times \dots \times U_n)$. Esta condición puede expresarse entonces en la forma $Im \varphi = Z$, donde $Im \varphi$ es el espacio generado por los elementos $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ donde $u_i \in U_i$.

T2*. Cada aplicación n -lineal f de $U_1 \times \dots \times U_n$ en un espacio vectorial cualquiera W , puede expresarse en la forma $f = g \circ \varphi$, donde g es una aplicación lineal de Z en W . (Propiedad de factorización o de *aplicación universal*).

La propiedad T2* que se traduce en la conmutatividad del diagrama adjunto, se llama propiedad de *aplicación universal*.



Las condiciones T1* y T2* equivalen a la sola condición

T*. (Propiedad de *factorización única*). Para cada aplicación n -lineal $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$, existe una única aplicación lineal $g : Z \rightarrow W$ tal que

$$f = g \circ \varphi.$$

El espacio Z se representa en la forma

$$\bigotimes_{i=1}^n U_i = U_1 \otimes \dots \otimes U_n.$$

Aquellos de sus elementos que pueden representarse en la forma $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ se designan por $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ y se llama *tensores descomponibles*. Todo tensor es igual a una suma de tensores descomponibles, y esta representación es única.

Teorema 5.7.1. (Unicidad del producto tensorial) Si (Z, φ) y (Z', φ') son dos productos tensoriales de U_1, \dots, U_n , entonces existe un único isomorfismo $\lambda : Z \rightarrow Z'$ tal que $\varphi' = \lambda \circ \varphi$.

Teorema 5.7.2. La correspondencia $f \mapsto g$ establecida por la propiedad de factorización **T2*** constituye un isomorfismo del espacio $\mathcal{L}(U_1, \dots, U_n; W)$ sobre el espacio $\mathcal{L}(Z; W)$. Si (Z', φ') es otro producto tensorial de U_1, \dots, U_n y $f \mapsto g'$ es el correspondiente isomorfismo, entonces $g = g' \circ \lambda$, donde $\lambda : Z \rightarrow Z'$ es la aplicación a que se refiere el teorema 5.7.1.

***Ejercicio 5.7.1.** Si (Z, φ) es producto tensorial de los espacios U_1, \dots, U_n , y si $h : Z \rightarrow Z'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces el par $(Z', h \circ \varphi)$ es también producto tensorial de U_1, \dots, U_n .

5.8 Existencia del producto tensorial de un número finito cualquiera de espacios vectoriales. La construcción del producto tensorial de los espacios vectoriales U_1, \dots, U_n puede hacerse siguiendo al pie de la letra el procedimiento seguido en el caso producto de dos espacios. Expondremos aquí en forma condensada esa construcción. (Señalemos aquí, como en el caso del producto tensorial de dos espacios vectoriales, que puede darse una demostración de la existencia que es la generalización del enunciado del ejercicio 5.5.9).

Sean $\mathbb{P} U_i = U_1 \times \dots \times U_n$ el producto cartesiano de los espacios U_1, \dots, U_n , y W el espacio vectorial formado por todas las funciones definidas en $\mathbb{P} U_i$ y con valores en \mathbb{F} , que se anulan excepto en un número finito de puntos de $\mathbb{P} U_i$.

Representemos por $[x] = [x_1, \dots, x_n]$ a la función perteneciente a W que toma el valor 1 en el punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{P} U_i$ y que se anula en todos los demás puntos. Cada función $\mu \in W$ puede expresarse de una sola manera en la forma

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{P} U_i} \mu [x],$$

donde $\mu = \mu(x_1, \dots, x_n)$, y por tanto el número de sumandos no nulos es finito.

Sea ahora S el subespacio de W generado por los elementos de la forma

$$[\alpha_{11} x_{11} + \alpha_{12} x_{12}, \alpha_{21} x_{21} + \alpha_{22} x_{22}, \dots, \alpha_{n1} x_{n1} + \alpha_{n2} x_{n2}] - \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^2 \alpha_{i_1 i_1} \dots \alpha_{i_n i_n} [x_{1 i_1}, \dots, x_{n i_n}],$$

donde $x_{ki} \in U_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2$).

Designemos por Z al espacio vectorial cociente W/S , y sea φ la aplicación $\mathbb{P}U_i \rightarrow Z$ que hace corresponder a x la clase de Z que contiene a $[x]$. Se prueba entonces que el par (Z, φ) es el producto tensorial de U_1, \dots, U_n ; a cuyo fin se demuestra que φ es multilineal y que se cumplen las propiedades $\tilde{T}1$ y $\tilde{T}2$. A menos que queramos referirnos a una representación particular del producto tensorial $\bigotimes_{i=1}^n U_i = U_1 \otimes \dots \otimes U_n$, podemos suponer que es el que hemos obtenido la precedente construcción.

Los elementos de $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ se llaman *tensores* sobre los espacios U_1, \dots, U_n .

5.9 Otras condiciones necesarias y suficientes para que el par (Z, φ) sea producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales.

T3*. Dadas las familias cualesquiera $\{a_{1i_1}, \dots, a_{1p_1}\}, \dots, \{a_{ni_1}, \dots, a_{np_n}\}$ de vectores linealmente independientes de los espacios U_1, \dots, U_n , respectivamente, los vectores $\varphi(a_{1v_1}, \dots, a_{nv_n})$, $v_i = 1, \dots, p_i$, son también linealmente independientes.

El siguiente lema es el análogo del lema 5.5.1.

Lema 5.9.1. Dada la aplicación multilinear $\varphi: \mathbb{P}U_i \rightarrow Z$ que cumple la condición **T3***, cualquiera que sea el entero r , la relación

$$\sum_{\alpha=1}^r \varphi(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) = 0, \quad x_{i\alpha} \in U_i,$$

implica que, cualquiera que sea la aplicación multilineal f de $\mathbb{P}U_i$ en un espacio vectorial W , se cumple que

$$\sum_{\alpha=1}^r f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) = 0.$$

Este lema se demuestra como el lema 5.5.1. El teorema siguiente es análogo al teorema 5.5.1 y se demuestra como él.

Teorema 5.9.1. Para que el par (Z, φ) sea el producto tensorial $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones **T1*** y **T3***.

Corolario 1. Dados los espacios vectoriales U_1, \dots, U_n , para que el par (Z, φ) , donde $\varphi: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow Z$ es una aplicación n -lineal, sea el producto tensorial de U_1, \dots, U_n es necesario y suficiente que se cumpla la condición:

T4*. Si $\{a_{1i}\}_{i \in I_1}, \{a_{2i}\}_{i \in I_2}, \dots, \{a_{ni}\}_{i \in I_n}$ son bases de U_1, U_2, \dots, U_n , entonces los vectores

$$\varphi(a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n})_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, \dots, i_n \in I_n}$$

constituyen una base de Z .

Corolario 2. Si U_1, \dots, U_n son de dimensión finita se cumple la fórmula

$$\dim(U_1 \otimes \dots \otimes U_n) = \dim U_1 \dots \dim U_n.$$

Corolario 3. Dados los espacios vectoriales U_1, \dots, U_n de dimensión finita, y la aplicación n -lineal $\varphi: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow Z$, donde Z es un espacio vectorial tal que $\dim Z = \dim U_1 \dim U_2 \dots \dim U_n$, entonces el par (Z, φ) es producto tensorial de U_1, \dots, U_n si cumple una de las dos condiciones **T1*** o **T2***.

Corolario 4. Sea $\varphi: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow Z$ una aplicación n -lineal, y $g: U_1 \otimes \dots \otimes U_n \rightarrow Z$ sea la aplicación lineal tal que $\varphi = g \circ \otimes$, donde $\otimes: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ es la aplicación universal. Entonces

- 1° φ satisface a la condición $\tilde{T}1$ si y sólo si g es sobreyectiva.
 2° φ satisface a la condición $\tilde{T}2$ si y sólo si g es inyectiva.
 3° (Z, φ) es producto tensorial de U_1, \dots, U_n si y sólo si g es biyectiva.

Notación. Si $\mathcal{E}_k = \{e_{ki}\}_{i \in I_k}$, $k = 1, \dots, n$, designa a una base de U_k , la base de $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ formada por los tensores de la familia

$$\{e_{1i_1} \otimes \dots \otimes e_{ni_{i_n}}\}_{i_1 \in I_1, \dots, i_n \in I_n}$$

será designada por $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$.

***Ejercicio 5.9.1.** El enunciado del ejercicio 5.5.9 se extiende al caso del producto tensorial de un número finito cualquiera de espacios vectoriales.

5.10. Propiedad asociativa general del producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales.

Con el fin de abreviar la escritura vamos a adoptar la siguiente notación. Dados los espacios U_1, \dots, U_n designaremos por $\bar{U}(p, p+q)$ al producto tensorial

$$\bar{U}(p, p+q) = U_p \otimes U_{p+1} \otimes \dots \otimes U_{p+q},$$

y designaremos por $U(p, p+q)$ al producto escalar.

$$U(p, p+q) = U_p \times U_{p+1} \times \dots \times U_{p+q}.$$

Teorema 5.10.1. Dados los espacios vectoriales U_1, \dots, U_n , el espacio $\bar{U}(1, n-1) \otimes U_n$ es una representación del producto tensorial de los espacios U_1, \dots, U_n , y por tanto puede escribirse

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n, \quad (5.10.1)$$

isomorfismo que es único si es que debe cumplir la condición

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto (u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-1}) \otimes u_n, \quad u_i \in U_i.$$

Demostración. Para demostrar este teorema basta probar que existe un isomorfismo natural

$$g: \bar{U}(1, n) \rightarrow \bar{U}(1, n-1) \otimes U_n,$$

pues entonces el par $(\bar{U}(1, n-1) \otimes U_n, g \circ \otimes)$, donde \otimes designa a la aplicación universal $\otimes: U(1, n) \rightarrow \bar{U}(1, n)$ asociada al producto tensorial $\bar{U}(1, n)$, es el producto tensorial de U_1, \dots, U_n (ver ejercicio 5.7.1).

Consideremos la aplicación n -lineal

$$\bar{g}: U(1, n) \rightarrow \bar{U}(1, n-1) \otimes U_n$$

que es definida por

$$\bar{g}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n.$$

La propiedad $\tilde{T}2$ asegura la existencia de la aplicación lineal

$$g: \bar{U}(1, n) \rightarrow \bar{U}(1, n-1) \otimes U_n$$

tal que

$$g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n. \quad (5.10.2)$$

Por otra parte, para cada $x_n \in U_n$ se puede definir la aplicación $(n-1)$ -lineal $\beta_{x_n}: U(1, n-1) \rightarrow \bar{U}(1, n)$ tal que

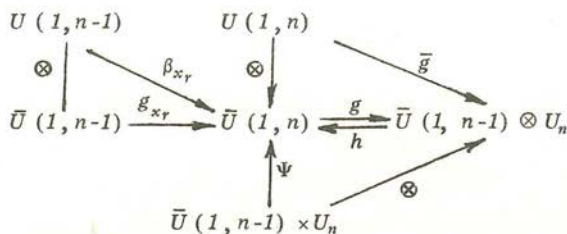
$$\beta_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes x_n.$$

Esta aplicación induce a la aplicación lineal

$$g_{x_n}: \bar{U}(1, n-1) \rightarrow \bar{U}(1, n)$$

tal que

$$g_{x_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes x_n. \quad (5.10.3)$$



Definamos ahora la aplicación bilineal

$$\Psi: \bar{U}(1, n-1) \times U_n \rightarrow \bar{U}(1, n),$$

mediante la relación

$$\Psi(u, x_n) = g_{x_n}(u), \quad (u \in \bar{U}(1, n-1), x_n \in U_n). \quad (5.10.4)$$

Entonces Ψ induce a la aplicación lineal

$$h: \bar{U}(1, n-1) \otimes U_n \rightarrow \bar{U}(1, n)$$

tal que

$$\Psi(u, x_r) = h(u \otimes x_n) \quad (u \in \bar{U}(1, n-1), x_n \in U_n) \quad (5.10.5)$$

Combinando (5.10.5), (5.10.4) y (5.10.3) se obtiene

$$h((x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n) = \Psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}, x_n)$$

$$g_{x_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n. \quad (5.10.6)$$

Las ecuaciones (5.10.2) y (5.10.6) permiten escribir

$$(g \circ h)((x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n,$$

$$(h \circ g)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = h((x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n.$$

Por consiguiente

$$g \circ h = I_{\bar{U}(1, n-1) \otimes U_n}, \quad h \circ g = I_{\bar{U}(1, n)}.$$

Se deduce de aquí que g es un isomorfismo de $\bar{U}(1, n)$ sobre $\bar{U}(1, n-1) \otimes U$, y que h es su inversa. El isomorfismo natural así establecido permite escribir la relación

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n.$$

Que g es el único isomorfismo

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \rightarrow (U_1 \otimes \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n$$

que cumple la condición prescrita en la parte final del enunciado, se deduce mediante el teorema 5.7.1. ■

Observación. La fórmula (5.10.1) podría haber sido empleada para definir por iteración el producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales. Podrá escribirse

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx (\dots (((U_1 \otimes U_2) \otimes U_3) \otimes U_4) \dots \otimes U_{n-1}) \otimes U_n. \quad (5.10.7)$$

Teorema 5.10.2. (Propiedad asociativa general)

Se cumple la relación

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_p) \otimes (U_{p+1} \otimes \dots \otimes U_n),$$

para $p = 1, \dots, n-1$.

Este isomorfismo es único, y por tanto *natural*, si debe cumplir la condición

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto (u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \otimes (u_{p+1} \otimes \dots \otimes u_n)$$

donde $u_i \in U_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Mediante sucesivas aplicaciones del teorema anterior puede establecerse de inmediato la existencia del isomorfismo único (isomorfismo natural)

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_m) \otimes (U_{m+1} \otimes \dots \otimes U_p) \otimes \dots \otimes (U_{q+1} \otimes \dots \otimes U_n)$$

donde $1 \leq m < p < \dots < q \leq n$, que cumple la condición

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \dots \otimes x_p) \otimes \dots \otimes (x_{q+1} \otimes \dots \otimes x_n),$$

en que $u_i \in U_i$ para $i = 1, \dots, n$, y mediante el cual ambos productos tensoriales pueden ser identificados.

Corolario. Dados los espacios vectoriales U_1, \dots, U_n y la permutación cualquiera σ de los números $1, \dots, n$, existe un único isomorfismo (isomorfismo natural)

$$U_1 \otimes \dots \otimes U_n \approx U_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes U_{\sigma(n)},$$

que cumple la condición

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

Demostración. Es evidente que basta probar la proposición en el caso en que σ se reduce a la transposición cualquiera $(i \ i+1)$. El isomorfismo se compone entonces de los isomorfismos naturales siguientes, que existen en virtud del teorema anterior y del teorema 5.6.1:

$$\begin{aligned} U_1 \otimes \dots \otimes U_n &\approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_{i-1}) \otimes (U_i \otimes U_{i+1}) \otimes (U_{i+2} \otimes \dots \otimes U_n) \approx \\ &\approx (U_1 \otimes \dots \otimes U_{i-1}) \otimes (U_{i+1} \otimes U_i) \otimes (U_{i+2} \otimes \dots \otimes U_n) \approx \\ &\approx U_1 \otimes \dots \otimes U_{i-1} \otimes U_{i+1} \otimes U_i \otimes U_{i+2} \otimes \dots \otimes U_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 5.10.1. Probar que $x_1 \otimes \dots \otimes x_n = 0$ si y sólo si para algún valor de i es $x_i = 0$ (Sugerencia: emplear la fórmula (5.10.7) y la propiedad II de la sección 5.4).

***Ejercicio 5.10.2.** Si se define la aplicación n -lineal

$$\tilde{\varphi}_1 : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow \mathcal{L}(U_1, \dots, U_n; \mathbb{F})^* \quad 1)$$

mediante la fórmula

$$[\tilde{\varphi}_1(u_1, \dots, u_n)](w) = w(u_1, \dots, u_n), \quad (5.10.8)$$

entonces el par $(\text{Im } \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1)$ es el producto $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$.

***Ejercicio 5.10.3.** Definida la aplicación n -lineal

$$\tilde{\varphi}_2 : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow \mathcal{L}(U_1^*, \dots, U_n^*; \mathbb{F})$$

por

$$[\tilde{\varphi}_2(u_1, \dots, u_n)](u_1^*, \dots, u_n^*) = u_1^*(u_1) \dots u_n^*(u_n), \quad (5.10.9)$$

entonces el par $(\text{Im } \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2)$ es el producto $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$.

***Ejercicio 5.10.4.** Dada la aplicación n -lineal

$$\tilde{\varphi}_3 : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow \mathcal{L}(U_1^*, \dots, U_{n-1}^*; U_n)$$

por

$$[\tilde{\varphi}_3(u_1, \dots, u_n)](u_1^*, \dots, u_{n-1}^*) = u_1^*(u_1) \dots u_{n-1}^*(u_{n-1}) \cdot u_n \quad (5.10.10)$$

entonces el par $(\text{Im } \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_3)$ es igual a $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$.

***Ejercicio 5.10.5.** Mediante las proposiciones de los tres ejercicios anteriores demostrar que los pares $(\mathcal{L}(U_1, \dots, U_n; \mathbb{F})^*, \tilde{\varphi}_1)$, $(\mathcal{L}(\mathcal{L}(U_1^*, \dots, U_n^*; \mathbb{F}), \tilde{\varphi}_2)$ y $(\mathcal{L}(U_1^*, \dots, U_{n-1}^*; U_n), \tilde{\varphi}_3)$ son represen

1) Recordemos que v^* designa aquí al espacio $\mathcal{L}(v)$ conjugado de v .



taciones del producto tensorial de U_1, \dots, U_n si estos espacios son de dimensión finita.

Ejercicio 5.10.6. Dados los espacios U_1, \dots, U_n de dimensión finita, demostrar que la aplicación $\psi: U_1^* \otimes \dots \otimes U_n^* \rightarrow (U_1 \otimes \dots \otimes U_n)^*$ definida por

$$[\psi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)](u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = f_1(u_1) \dots f_n(u_n)$$

es un isomorfismo natural.

***Ejercicio 5.10.7.** Sea $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \neq 0$ un elemento del espacio $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$. Probar que la ecuación

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n = y_1 \otimes \dots \otimes y_n$$

se cumple si y sólo si $y_i = \lambda_i x_i$ ($i=1, \dots, n$) donde los λ_i son escalares tales que $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = 1$.

(Sugerencia: emplear el ejercicio 5.5.3 y la fórmula (5.10.7)).

5.11. Producto tensorial de aplicaciones lineales.

Probaremos aquí que puede definirse una aplicación bilineal

$$\varphi: \mathcal{L}(U; W) \times \mathcal{L}(V; Z) \rightarrow \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$$

de manera que $(\text{Im } \varphi, \varphi)$ sea el producto tensorial $\mathcal{L}(U; W) \otimes \mathcal{L}(V; Z)$.

En consecuencia, dado $A \in \mathcal{L}(U; W)$ y $B \in \mathcal{L}(V; Z)$, llamaremos, por definición, *producto tensorial de A por B* a la aplicación lineal

$$A \otimes B = \varphi(A, B): U \otimes V \rightarrow W \otimes Z,$$

y comprobaremos que

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v).$$



Puesto que $\text{Im } \varphi$ es un subespacio de $\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$, diremos que el producto tensorial $\mathcal{L}(U; W) \otimes \mathcal{L}(V; Z)$ está incluido en el espacio lineal $\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$ mediante la aplicación lineal i tal que $i(A \otimes B) = \varphi(A, B)$.

Sean $A: U \rightarrow W$ y $B: V \rightarrow Z$ dos aplicaciones lineales de espacios vectoriales. Podemos definir la aplicación bilineal

$$\Psi: U \times V \rightarrow W \otimes Z$$

tal que

$$\Psi(u, v) = A(u) \otimes B(v), \quad u \in U, v \in V.$$

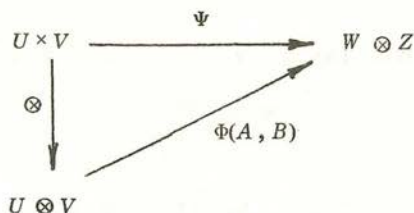
Por la propiedad de factorización del producto tensorial existirá la aplicación lineal

$$\Phi(A, B): U \otimes V \rightarrow W \otimes Z$$

tal que $\Psi = \Phi(A, B) \circ \otimes$, y por tanto

$$[\Phi(A, B)](u \otimes v) = A(u) \otimes B(v).$$

(5.11.1)



La aplicación

$$\Phi: \mathcal{L}(U; W) \times \mathcal{L}(V; Z) \rightarrow \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$$

tal que

$$\Phi: (A, B) \mapsto \Phi(A, B)$$

es una aplicación bilineal, como lo demuestra un cálculo sencillo. Demostraremos ahora que *el par*

$$(\text{Im } \Phi, \Phi)$$

es el producto tensorial de $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$.

Para ello podemos hacer uso del corolario 4 del teorema 5.5.1. Basta comprobar por consiguiente que la aplicación lineal

$g: \mathcal{L}(U; W) \otimes \mathcal{L}(V; Z) \rightarrow \text{Im } \Phi$ inducida por Φ , tal que $\Phi = g \circ \otimes$, es inyectiva.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}(U; V) \times \mathcal{L}(V; Z) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Im } \Phi \\
 \otimes \downarrow & \nearrow g & \\
 \mathcal{L}(U; V) \otimes \mathcal{L}(V; Z) & &
 \end{array}$$

Para ello debemos demostrar que si $g(w) = 0$, entonces es necesariamente $w = 0$. Supongamos por el contrario que fuera $w \neq 0$. En virtud de la propiedad III de la sección 5.4 puede escribirse

$$w = \sum_{i=1}^r \varphi_i \otimes \psi_i, \quad \varphi_i \in \mathcal{L}(U; W), \quad \psi_i \in \mathcal{L}(V; Z),$$

donde las φ_i y las ψ_i son l.i. Se tiene entonces

$$g(w) = \sum_{i=1}^r g(\varphi_i \otimes \psi_i) = \sum_{i=1}^r \Phi(\varphi_i, \psi_i),$$

y por tanto, puesto que $g(w) = 0$,

$$\sum_{i=1}^r \Phi(\varphi_i, \psi_i) = 0.$$

Se tiene por tanto cualesquiera que sean $u \in U$ y $v \in V$,

$$\sum_{i=1}^r [\Phi(\varphi_i, \psi_i)](u \otimes v) = 0,$$

o sea,

$$\sum_{i=1}^r \varphi_i(u) \otimes \psi_i(v) = 0. \quad (5.11.2)$$

La aplicación φ_i no es idénticamente nula porque si lo fuera, las φ_i no serían l.i. Podemos escoger por eso el vector $a \in U$ tal que

$\varphi_1(a) \neq 0$. Entre los vectores $\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)$, de W , sea $p \geq 1$ el número máximo de ellos que son l.i. Si reordenamos adecuadamente esos vectores podemos admitir que $\varphi_1(a), \dots, \varphi_p(a)$ son l.i. Para los restantes vectores podremos escribir

$$\varphi_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ji} \varphi_i(a), \quad j = p+1, \dots, r.$$

De (5.11.2) se deduce, si se sustituye u por a ,

$$\sum_{i=1}^p \varphi_i(a) \otimes \psi_i(v) + \sum_{j=p+1}^r \left(\sum_{i=1}^p \lambda_{ji} \varphi_i(a) \right) \otimes \psi_j(v) = 0, \quad v \in V,$$

de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^p \varphi_i(a) \otimes \left[\psi_i(v) + \sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \psi_j(v) \right] = 0, \quad v \in V.$$

Puesto que los vectores $\varphi_i(a)$ ($i = 1, \dots, p$) son l.i., la propiedad **IV** de la sección 5.4 implica que

$$\psi_i(v) + \sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \psi_j(v) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

para cada $v \in V$. Por tanto

$$\psi_i + \sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \psi_j = 0.$$

Esta relación contradice a nuestra hipótesis de que las ψ_i son l.i. Luego g es inyectiva y queda probada nuestra afirmación. ■

En el caso en que los espacios U, V, W, Z son de dimensiones m, n, p y q respectivamente, entonces resulta que el par

$$(L(U \otimes V; W \otimes Z), \Phi),$$

donde Φ se define como se ha visto en esta misma sección, es el

producto tensorial de $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$.

En efecto, $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$ son de dimensiones mp y nq respectivamente. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_{mp}$ y ψ_1, \dots, ψ_{nq} bases de esos mismos espacios. Los $mnpq$ elementos $\Phi(\varphi_i, \psi_j)$ constituyen una base de $\text{Im } \Phi$ en virtud del corolario 1 del teorema 5.5.1. Puesto que $\dim \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z) = mnpq$, resultará que $\text{Im } \Phi = \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$; lo cual, tenida cuenta del resultado precedentemente obtenido, prueba que el par $(\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z), \Phi)$ es el producto tensorial de $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$.

Observación 1. Para demostrar nuestra última afirmación puede emplearse simplemente el ejercicio 5.5.1 y observar que

$$\dim \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z) = \dim \mathcal{L}(U; W) \cdot \dim \mathcal{L}(V; Z).$$

Observación 2. Si en la fórmula (5.11.1) sustituimos $\Phi(A, B)$ por $A \otimes B$, lo que está justificado porque el par $(\text{Im } \Phi, \Phi)$ es el producto tensorial de $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$, se podrá escribir esa fórmula en la forma

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v). \quad (5.11.3)$$

Observación 3. Vamos a probar ahora, mediante un ejemplo, que si Φ se define como se vió en la sección 5.11, puede ocurrir efectivamente que sea $\text{Im } \Phi \neq \mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$, y por consiguiente el par $(\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z), \Phi)$ no es el producto tensorial de $\mathcal{L}(U; W)$ y $\mathcal{L}(V; Z)$.

En efecto, sea $U = V$ un espacio de base enumerable, y sea $W = Z = \mathbb{F}$. El producto $W \otimes Z$ se reduce entonces a $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Si se tiene presente que cada aplicación bilineal f de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ en un espacio vectorial cualquiera es tal que $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta f(1, 1)$ recono-

ceremos que el par (\mathbb{F}, Ψ) , donde $\Psi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$, es el producto $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$, y por consiguiente se tiene $\alpha \otimes \beta = \alpha\beta$. Se tiene por tanto que $\mathcal{L}(U; W) = \mathcal{L}(V; Z) = \mathcal{L}(V; \mathbb{F}) = \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z) = \mathcal{L}(V \otimes V; \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}) = \mathcal{L}(V \otimes V; \mathbb{F}) = \mathcal{L}(V \otimes V)$. Además, la aplicación Φ definida en la sección 5.11 es tal que para A y B pertenecientes a $\mathcal{L}(V)$ se tiene

$$\Phi(A, B)(v_1 \otimes v_2) = A(v_1) \otimes B(v_2) = A(v_1) B(v_2),$$

y por tanto

$$\Phi(A, B) = A \cdot B.$$

Nuestra demostración deberá reducirse a probar que existe por lo menos un elemento w de $\mathcal{L}(V \otimes V)$ que no está contenido en $Im \Phi$.

Con cada función lineal $h \in \mathcal{L}(V \otimes V)$ asociemos un subespacio $V_h \subset V$ tal que

$$V_h = \{ x \in V \mid h(x \otimes y) = 0, \quad \forall y \in V \}.$$

Si suponemos, además, que $h \in Im \Phi$, entonces podemos probar que el espacio cociente V/V_h tiene dimensión finita. En efecto, h puede expresarse como una suma finita de la forma

$$h = \sum_{i=1}^r \Phi(A_i, B_i),$$

y por tanto

$$h(x \otimes y) = \sum_{i=1}^r A_i(x) B_i(y).$$

Cualquiera que sea el elemento $x \in \bigcap_{i=1}^r Ker A_i$ se tiene

$$h(x \otimes y) = 0, \quad y \in V,$$

y por tanto

$$V_b \supset \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i ,$$

de donde se deduce que

$$\dim V/V_b \leq \dim \left[V / \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i \right] .$$

Ahora bien, si definimos la aplicación lineal $A: V \rightarrow \mathbb{F}^r$ tal que $A(x) = (A_1(x), \dots, A_r(x))$, es claro que $\text{Ker } A = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i$, y por tanto existe el isomorfismo inducido (ver sección 3.5, Pte.I)

$$V / \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i \rightarrow \text{Im } A \subseteq \mathbb{F}^r$$

que aplica a cada clase de $V / \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i$ en el elemento de \mathbb{F}^r que es imagen por A de cada uno de los elementos de dicha clase. Se deduce de aquí, que

$$\dim V / \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } A_i \leq \dim \mathbb{F}^r = r ,$$

y por consiguiente

$$\dim V/V_b \leq r . \tag{5.11.4}$$

Es decir que cada función $h \in \text{Im } \Phi$ tiene la propiedad de que V_b cumple la condición (5.11.4).

Consideremos ahora la función w de $\mathcal{L}(V \otimes V)$ tal que

$$w(x \otimes y) = \sum_v \xi^v \eta^v$$

donde ξ^v y η^v ($v = 1, 2, \dots$) son las componentes de x e y respecto de una base dada cualquiera de V . Es evidente que $V_w = \{0\}$ y por

tanto $\dim V/V_w = \dim V = \infty$. Por consiguiente w no pertenece a $\text{Im } \Phi$ pues V_w no cumple la condición (5.11.4).

5.12. Producto de Kronecker o producto tensorial de matrices.

Según sabemos, cada endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita puede ser representado por una determinada matriz cuadrada cuando el espacio es referido a una determinada base. En esta sección consideramos dos endomorfismos $A:U \rightarrow U$ y $B:V \rightarrow V$ de los espacios U y V de dimensiones m y n . Dadas las bases $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ de U y $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V y las matrices $\alpha = (\alpha_j^i)$ y $\beta = (\beta_s^k)$ que representan a A y a B en esas bases, respectivamente, nos proponemos calcular la matriz que corresponde a la transformación lineal $A \otimes B$ de $U \otimes V$ en $U \otimes V$ respecto de la base

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n\}.$$

Se tiene

$$A(e_r) = \sum_{i=1}^m \alpha_r^i e_i \quad \text{y} \quad B(f_s) = \sum_{k=1}^n \beta_s^k f_k.$$

Por consiguiente, haciendo uso de la fórmula (5.11.3) puede escribirse

$$(A \otimes B)(e_r \otimes f_s) = A(e_r) \otimes B(f_s) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_r^i \beta_s^k e_i \otimes f_k. \quad (5.12.1)$$

Los términos de la matriz de $A \otimes B$ respecto de la base $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ son por tanto de la forma $\alpha_r^i \beta_s^k$.

Definición 5.12.1. Dadas las matrices $\alpha = (\alpha_j^i)$ de orden m y $\beta = (\beta_l^k)$ de orden n se llama *producto de Kronecker* o *producto tensorial* de α y β , y se designa por $\alpha \otimes \beta$, a la matriz de orden $m n$

$$\alpha \otimes \beta = (\alpha_j^i \beta_s^k) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \beta_1^1 & \dots & \alpha_1^1 \beta_n^1 & \dots & \alpha_m^1 \beta_1^1 & \dots & \alpha_m^1 \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^1 \beta_1^n & \alpha_1^1 \beta_n^n & \alpha_m^1 \beta_1^n & \alpha_m^1 \beta_n^n & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^m \beta_1^1 & \alpha_m^m \beta_n^1 & \alpha_m^m \beta_1^1 & \alpha_m^m \beta_n^1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^m \beta_1^n & \alpha_m^m \beta_n^n & \alpha_m^m \beta_1^n & \alpha_m^m \beta_n^n & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (5.12.2)$$

que en forma abreviada puede escribirse

$$\alpha \otimes \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \beta & \alpha_m^1 \beta \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_1^m \beta & \alpha_m^m \beta \end{pmatrix}$$

La fórmula (5.12.1), si se tiene en cuenta la ordenación de los elementos de la base $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ permite enunciar inmediatamente la siguiente proposición:

Teorema 5.12.1. Si $\alpha = (\alpha_j^i)$ es la matriz del endomorfismo $A : U \rightarrow U$ respecto de la base \mathcal{E} de U y $\beta = (\beta_l^k)$ es la matriz del endomorfismo $B : V \rightarrow V$ respecto de la base \mathcal{F} de V , la matriz del endomorfismo $A \otimes B : U \otimes V \rightarrow U \otimes V$ respecto de la base $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ es

el producto de Kronecker $\alpha \otimes \beta$ de las matrices de A y B .

La noción de producto tensorial de matrices puede extenderse a un número finito de factores mediante la fórmula de recurrencia.

$$\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p = (\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{p-1}) \otimes \alpha_p.$$

Los términos de esta matriz son de la forma

$$\alpha_{1 k_1}^{i_1} \alpha_{2 k_2}^{i_2} \dots \alpha_{p k_p}^{i_p} = \beta_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}.$$

Ejercicio 5.12.1. Determinar la fila y la columna de la matriz $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ a la cual pertenece el término $\beta_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}$.

Ejercicio 5.12.2. Demostrar la propiedad asociativa del producto de matrices

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3 = \alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \alpha_3).$$

5.13 Traza de los endomorfismos de un espacio de dimensión finita.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Se deduce de la aplicación D de la sección 5.5 y del ejercicio 5.5.2 que el espacio $\mathcal{L}(V; V) = \mathfrak{L}(V)$ de los endomorfismos de V es el producto tensorial $V \otimes V^*$ cuando la aplicación universal $\varphi: V \times V^* \rightarrow \mathfrak{L}(V)$ se define por

$$[\varphi(v, f)](x) = f(x) \cdot v.$$

Dada la aplicación bilineal $\theta: V \times V^* \rightarrow \mathbb{F}$ definida por $\theta(x, f) = f(x)$ existirá la función lineal única $\tau: \mathfrak{L}(V) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que

$$\theta = \tau \circ \varphi.$$

Se ve de esta manera que τ hace corresponder a cada endomorfismo $T \in \mathcal{L}(V)$ un escalar determinado $\tau(T)$ que es función lineal de T y que es invariante respecto de los cambios de base de V . Vamos a obtener ahora una expresión de $\tau(T)$ para una base dada $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V . Designemos por $\{e^1, \dots, e^n\}$ la base dual de V^* . Puesto que T es un elemento del espacio $\mathcal{L}(V)$ que es una representación de $V \otimes V^*$, podrá escribirse

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \varphi(e_i, e^j).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \tau(T) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i (\tau \circ \varphi)(e_i, e^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \theta(e_i, e^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i e^j(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^i. \end{aligned} \quad (5.13.1)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(e_k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i [\varphi(e_i, e^j)](e_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j^i e^j(e_k) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_k^i e_i. \end{aligned}$$

Luego la matriz de T en la base $\{e_i\}$ es justamente (α_j^i) . Por consiguiente la fórmula (5.13.1) expresa que el escalar $\tau(T)$, que corresponde a T por la aplicación τ es igual a la suma de los términos de la diagonal principal de la matriz que representa a T en una base cualquiera. Dicha suma, según ya hemos visto en la sección 13.2 Pte. I, se llama *traza* de T .

El teorema 5.12.1 y la fórmula 5.12.2 permiten reconocer que la traza del producto tensorial de los endomorfismos $A \in \mathcal{L}(U)$

y $B \in \mathcal{E}(V)$, cuyas matrices respecto de las bases \mathcal{E} de U y \mathcal{F} de V son α y β , es dada por

$$\tau(A \otimes B) = (\alpha_1^1 + \dots + \alpha_n^n) (\beta_1^1 + \dots + \beta_n^n) = \tau(A) \tau(B).$$

Es decir que la traza del producto tensorial de dos endomorfismos es igual al producto de las trazas de dichos endomorfismos.

5.14 Componentes de un tensor del producto tensorial de espacios de dimensión finita.

Las siguientes consideraciones se refieren a tres espacios vectoriales U, V, W de dimensiones m, n , y p respectivamente, pero se extienden sin ninguna dificultad a un número cualquiera de espacios de dimensión finita. Supongamos que $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ y $\{g_k\}$ son bases de U, V y W respectivamente, y consideremos tres vectores cualesquiera

$$u = \sum_i u^i e_i, \quad v = \sum_j v^j f_j, \quad w = \sum_k w^k g_k.$$

Se tiene entonces

$$t = u \otimes v \otimes w = \sum_i \sum_j \sum_k u^i v^j w^k e_i \otimes f_j \otimes g_k.$$

Por tanto, si t^{ijk} designa a la componente de t relativa al vector de base $e_i \otimes f_j \otimes g_k$, se tendrá

$$t^{ijk} = u^i v^j w^k,$$

es decir que esa componente es igual al producto de las componentes de u, v y w respecto de e_i, f_j y g_k respectivamente.

Ya vimos en la observación A de la sección 5.6 que no es conveniente, en general, identificar a los espacios $U \otimes V \otimes W$

y $V \otimes U \otimes W$. Así $z = v \otimes u \otimes w$ y $t = u \otimes v \otimes w$ deben considerarse como tensores distintos en general.

La componente de z relativa a $f_j \otimes e_i \otimes g_k$ es

$$z^{ijk} = u^i v^j w^k = t^{ijk}$$

Consideremos, en particular, el caso del producto de varios espacios que son iguales a V o a su dual V^* ; sea por ejemplo $V \otimes V^* \otimes V$. En este caso, si $\mathfrak{E} = \{e_i\}$ es una base de V y $\mathfrak{E}^* = \{e^{*i}\}$ es la base dual de V^* , referiremos el producto tensorial a la base $\{e_i \otimes e^{*j} \otimes e_k\}$, y la componente de $t = x \otimes y^* \otimes z$ relativa a $e_i \otimes e^{*j} \otimes e_k$ será

$$t^{i \cdot k}_j = x^i y_j z^k, \quad (5.14.1)$$

donde la ordenación de los índices superiores e inferiores es tal que basta para mostrar de inmediato de qué producto tensorial de espacios V y V^* se trata. Así por ejemplo,

$$t^{ijk}, t_{ijk}, t^{*jk}, t^{ij \cdot k}, t^{i \cdot \cdot k}, t_{i \cdot k}, t_{\cdot jk},$$

son elementos de los espacios

$$V \otimes V \otimes V, \quad V^* \otimes V^* \otimes V^*, \quad V^* \otimes V \otimes V, \quad V \otimes V \otimes V^*,$$

$$V^* \otimes V^* \otimes V, \quad V^* \otimes V \otimes V^*, \quad V \otimes V^* \otimes V^*,$$

respectivamente.

Los elementos de cada producto de espacios vectoriales iguales a V o a V^* se llaman *tensores sobre V* , denominación que se emplea también en el caso en que V no es de dimensión finita.

5.15 Producto tensorial de subespacios y de espacios cocientes.

Teorema 5.15.1. Dados los espacios U y V y sus subespacios $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$, sean: (Z, φ) el producto tensorial de U y V , φ_1 la restricción de φ al subconjunto $U_1 \times V_1$, y $Z_1 = \text{Im } \varphi_1$ la imagen de φ_1 entendida como el subespacio de Z generado por los elementos de $\varphi_1(U_1 \times V_1)$. Entonces (Z_1, φ_1) es el producto tensorial $U_1 \otimes V_1$, y podemos decir que *está contenido* en $U \otimes V$. En particular, $U_1 \otimes V$ y $U \otimes V_1$ están contenidos en $U \otimes V$ y son por tanto subespacios de dicho espacio.

Demostración. El par (Z_1, φ_1) cumple evidentemente la condición T1. Para probar que es el producto tensorial $U_1 \otimes V_1$ podemos aplicar el teorema 5.5.1. Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_j\}_{j \in J}$ dos familias l.i. de elementos de U_1 y V_1 respectivamente, y por tanto l.i. en U y V . En virtud del teorema 5.5.1 los elementos del conjunto $\{\varphi(a_i, b_j)\}_{i \in I, j \in J}$ son l.i. en Z . Puesto que $\varphi(a_i, b_j) = \varphi_1(a_i, b_j)$, resultará que $\{\varphi_1(a_i, b_j)\}_{i \in I, j \in J}$ será un conjunto de vectores l.i. de Z_1 ; y por consiguiente (Z_1, φ_1) es producto tensorial de U_1 y V_1 . ■

Teorema 5.15.2. Con las mismas notaciones del teorema anterior, el producto tensorial de los espacios vectoriales cocientes (**Pte. I**, sección 2.4) U/U_1 y V/V_1 es el par $((U \otimes V)/T(U_1, V_1), \Psi)$ en donde

$$T(U_1, V_1) = U_1 \otimes V + U \otimes V_1,$$

y

$$\Psi: U/U_1 \times V/V_1 \rightarrow (U \otimes V)/T(U_1, V_1)$$

es la aplicación bilineal $\Psi = \pi \circ \otimes$ compuesta de la aplicación tensorial $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$ y del homomorfismo canónico (**Pte. I**,

sección 2.4) $\pi: U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)/T(U_1, V_1)$, de manera que se tiene

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}) = \pi(u \otimes v),$$

donde $\bar{u} \in U/U_1$, $\bar{v} \in V/V_1$, y u y v son elementos cualesquiera contenidos en \bar{u} y \bar{v} respectivamente.

Demostración. Según el teorema anterior $U_1 \otimes V$ y $U \otimes V_1$ son subespacios de $U \otimes V = W$, luego podemos considerar el subespacio de W

$$W_1 = T(U_1, V_1) = U_1 \otimes V + U \otimes V_1,$$

y el homomorfismo canónico $\pi: W \rightarrow W/W_1$ que es desde luego una aplicación lineal.

Si u es un elemento arbitrariamente elegido de $\bar{u} \in U/U_1$, cualquier otro elemento de \bar{u} puede expresarse en la forma $u + u_1$ donde $u_1 \in U_1$. Semejantemente, si $v \in \bar{v} \in V/V_1$, los elementos de \bar{v} se expresan en la forma $v + v_1$ donde $v_1 \in V_1$. Se tiene entonces, cualesquiera que sean $u + u_1 \in \bar{u}$ y $v + v_1 \in \bar{v}$,

$$\pi((u + u_1) \otimes (v + v_1)) = \pi(u \otimes v) + \pi(u \otimes v_1) + \pi(u_1 \otimes (v + v_1));$$

y puesto que $u \otimes v_1 + u_1 \otimes (v + v_1) \in W_1$, se tiene que

$$\pi((u + u_1) \otimes (v + v_1)) = \pi(u \otimes v),$$

es decir que el valor $\pi(u \otimes v)$ es el mismo cualesquiera que sean los elementos $u \in \bar{u}$ y $v \in \bar{v}$ que se consideren. Resulta por tanto bien definida la aplicación bilineal

$$\Psi: U/U_1 \times V/V_1 \rightarrow W/W_1,$$

para la cual es

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}) = \pi(u \otimes v), \quad (u \in \bar{u}, v \in \bar{v}).$$

Vamos a probar ahora que el par $(W/W_1, \Psi)$ es el producto tensorial $U/U_1 \otimes V/V_1$

Sabemos que los elementos $u \otimes v$ generan a W ; luego, los elementos $\pi(u \otimes v)$ generan a W/W_1 , es decir que los elementos $\Psi(\bar{u}, \bar{v})$ generan a este último espacio, y por tanto se cumple la condición T1 del producto tensorial. Vamos a demostrar la condición T2.

Sea H un espacio vectorial cualquiera, y

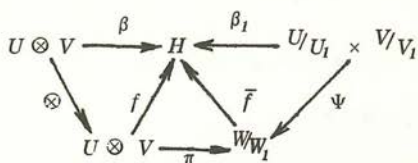
$$\beta_1: U/U_1 \times V/V_1 \rightarrow H$$

una aplicación bilinear. La aplicación $\beta: U \times V \rightarrow H$ definida por

$$\beta(u, v) = \beta_1(\bar{u}, \bar{v}), \quad (u \in \bar{u}, v \in \bar{v}),$$

es también bilinear; y, en virtud de la propiedad de factorización del producto tensorial, existe la función lineal bien determinada $f: U \otimes V \rightarrow H$ tal que

$$f(u \otimes v) = \beta(u, v) = \beta_1(\bar{u}, \bar{v}).$$



Se tiene por tanto que

$$f(u_1 \otimes v) = \beta_1(0, \bar{v}) = 0 \quad \text{para } u_1 \in U_1, v \in V$$

$$y \quad f(u \otimes v_1) = \beta_1(\bar{u}, 0) = 0 \quad \text{para } u \in U, v_1 \in V_1.$$

Puesto que $T(U_1, V_1) = W_1$, núcleo de la aplicación lineal π , es el subespacio generado por los tensores $u_1 \otimes v$ y $u \otimes v_1$ tales que $u \in U, u_1 \in U_1, v \in V, v_1 \in V_1$, resulta que $\text{Ker } \pi \subset \text{Ker } f$, y por tanto la aplicación lineal $f_1: W/W_1 \rightarrow H$ que es bien definida

por la relación (ver el ejercicio 5.15.2) $f_1(\bar{w}) = f(w)$ donde $\bar{w} \in W/W_1$ y $w \in \bar{w}$, tiene la propiedad

$$f_1 \circ \pi = f .$$

Por consiguiente,

$$\beta_1(\bar{u}, \bar{v}) = f(u \otimes v) = f_1(\pi(u \otimes v)) = f_1(\Psi(\bar{u}, \bar{v})),$$

de donde resulta que $\beta = f_1 \circ \Psi$, y por tanto Ψ cumple la condición T2.

Corolario. Si $(U/U_1 \otimes V/V_1, \otimes)$ es el producto tensorial de U/U_1 y V/V_1 , existe un isomorfismo natural

$$g : U/U_1 \otimes V/V_1 \rightarrow (U \otimes V)/T(U_1, V_1),$$

tal que, si π es la proyección canónica.

$$\pi : U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)/T(U_1, V_1),$$

se cumple que

$$g(\bar{u} \otimes \bar{v}) = \pi(u \otimes v)$$

para $\bar{u} \in U/U_1$, $\bar{v} \in V/V_1$, $u \in \bar{u}$ y $v \in \bar{v}$.

Demostración. En virtud del teorema anterior el par $((U \otimes V)/T(U_1, V_1), \Psi)$ es producto tensorial de U/U_1 y V/V_1 . Puesto que $(U/U_1 \otimes V/V_1, \otimes)$ es también producto tensorial de los mismos espacios, el teorema de unicidad del producto tensorial (teorema 5.2.1) implica que existe un único isomorfismo $g : U/U_1 \otimes V/V_1 \rightarrow (U \otimes V)/T(U_1, V_1)$ tal que

$$\Psi = g \circ \otimes ,$$

y por tanto

$$g(\bar{u} \otimes \bar{v}) = \Psi(\bar{u}, \bar{v}) = \pi(u \otimes v). \quad \blacksquare$$

***Ejercicio 5.15.1.** Dada la aplicación bilineal

$$\varphi : U \times V \rightarrow W,$$

y los subespacios $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ y $W_1 \subset W$, supongamos que se cumplan las condiciones

$$\varphi(u_1, v) \in W_1, \quad \text{para todo } (u_1, v) \in U_1 \times V$$

$$\text{y } \varphi(u, v_1) \in W_1, \quad \text{para todo } (u, v_1) \in U \times V_1;$$

y sean $\rho : U \rightarrow U/U_1$, $\sigma : V \rightarrow V/V_1$, $\pi : W \rightarrow W/W_1$, los isomorfismos canónicos. Existe entonces la aplicación bilineal

$$\bar{\varphi} : U/U_1 \times V/V_1 \rightarrow W/W_1 \quad \text{tal que } \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \pi(\varphi(u, v)) \quad \text{para todo } \bar{u} \in U/U_1 \text{ y } \bar{v} \in V/V_1, \text{ y para } u \text{ y } v \text{ tales que } \rho u = \bar{u} \text{ y } \sigma v = \bar{v}.$$

***Ejercicio 5.15.2.** Si $f : U \rightarrow V$ y $g : U \rightarrow W$ son dos aplicaciones lineales tales que

$$\text{Ker } g \subset \text{Ker } f,$$

existe una aplicación lineal $f_1 : \text{Im } g \rightarrow V$ tal que

$$f = f_1 \circ g.$$

5.16. Imagen y núcleo del producto tensorial de dos aplicaciones lineales.

En la sección 5.11 hemos tratado acerca del producto tensorial de dos aplicaciones lineales. En esta sección vamos a valer nos de resultados de la sección anterior para obtener expresiones de la imagen y del núcleo de dicho producto tensorial.

Teorema 5.16.1. Dadas las aplicaciones lineales $A: U \rightarrow W$ y $B: V \rightarrow Z$, se cumplen las relaciones

$$\text{Im}(A \otimes B) = \text{Im } A \otimes \text{Im } B \quad (5.16.1)$$

y

$$\text{Ker}(A \otimes B) = \text{Ker } A \otimes \text{Im } B. \quad (5.16.2)$$

Demostración. Según hemos establecido en la sección 5.11 es

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v) \in \text{Im } A \otimes \text{Im } B.$$

Como esta relación se cumple para cada elemento $u \otimes v$ descomponible de $U \otimes V$, se extiende en general para cada elemento de $U \otimes V$. Además, cada elemento de $\text{Im } A \otimes \text{Im } B$ es de la forma

$$\begin{aligned} \Sigma A(u_i) \otimes B(v_i) &= \Sigma (A \otimes B)(u_i \otimes v_i) \\ &= (A \otimes B) \Sigma (u_i \otimes v_i) \in \text{Im}(A \otimes B). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\text{Im}(A \otimes B) = \text{Im } A \otimes \text{Im } B.$$

Vamos a demostrar ahora la relación (5.16.2). Las aplicaciones lineales A y B dan lugar a las aplicaciones lineales inyectivas

$$\bar{A}: U/\text{Ker } A \rightarrow W \quad \text{y} \quad \bar{B}: V/\text{Ker } B \rightarrow Z$$

tales que

$$\bar{A}\bar{u} = Au \quad \text{y} \quad \bar{B}\bar{v} = Bv,$$

donde u es un elemento cualquiera de la clase \bar{u} de $U/\text{Ker } A$ y v es un elemento cualquiera de la clase \bar{v} de $V/\text{Ker } B$. La aplicación lineal (sección 5.11, observación 2)

$$\bar{A} \otimes \bar{B}: U/\text{Ker } A \otimes V/\text{Ker } B \rightarrow W \otimes Z,$$

dada por

$$(\bar{A} \otimes \bar{B})(\bar{u} \otimes \bar{v}) = \bar{A}(\bar{u}) \otimes \bar{B}(\bar{v}),$$

es también inyectiva. En efecto, consideremos las aplicaciones lineales

$$\bar{A}' : \text{Im } \bar{A} \rightarrow U_{/Ker A} \quad \text{y} \quad \bar{B}' : \text{Im } \bar{B} \rightarrow V_{/Ker B} ,$$

tales que

$$\bar{A}' (\bar{A} \bar{u}) = \bar{u} \quad \text{y} \quad \bar{B}' (\bar{B} \bar{v}) = \bar{v} .$$

Se tiene evidentemente

$$\bar{A}' \circ \bar{A} = I_{\bar{U}} \quad \text{y} \quad \bar{B}' \circ \bar{B} = I_{\bar{V}}$$

donde $I_{\bar{U}}$ e $I_{\bar{V}}$ son las aplicaciones idénticas de $\bar{U} = U_{/Ker A}$ y $\bar{V} = V_{/Ker B}$, respectivamente. Puede escribirse entonces

$$\begin{aligned} [(\bar{A}' \otimes \bar{B}') \circ (\bar{A} \otimes \bar{B})] (\bar{u} \otimes \bar{v}) &= (\bar{A}' \otimes \bar{B}') (\bar{A} \bar{u} \otimes \bar{B} \bar{v}) \\ &= (\bar{A}' \circ \bar{A}) \bar{u} \otimes (\bar{B}' \circ \bar{B}) \bar{v} \\ &= [(\bar{A}' \circ \bar{A}) \otimes (\bar{B}' \circ \bar{B})] (\bar{u} \otimes \bar{v}) . \end{aligned}$$

Se deduce de aquí, puesto que $(I_{\bar{U}} \otimes I_{\bar{V}})(\bar{u} \otimes \bar{v}) = I_{\bar{U}}(\bar{u}) \otimes I_{\bar{V}}(\bar{v}) = \bar{u} \otimes \bar{v}$, y por consiguiente $I_{\bar{U}} \otimes I_{\bar{V}} = I_{\bar{U} \otimes \bar{V}}$, que

$$(\bar{A}' \otimes \bar{B}') \circ (\bar{A} \otimes \bar{B}) = (\bar{A}' \circ \bar{A}) \otimes (\bar{B}' \circ \bar{B}) = I_{\bar{U}} \otimes I_{\bar{V}} = I_{\bar{U} \otimes \bar{V}} ,$$

y por consiguiente $\bar{A} \otimes \bar{B}$ es inyectiva.

Consideremos las proyecciones canónicas

$$\pi_1 : U \rightarrow U_{/Ker A} , \quad \pi_2 : V \rightarrow V_{/Ker B}$$

y

$$\pi : U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)_{/T(Ker A, Ker B)} ,$$

donde

$$T(Ker A, Ker B) = Ker A \otimes V + U \otimes Ker B .$$

Se tiene entonces por la definición de \bar{A} y \bar{B} .

$$\bar{A} \circ \pi_1 = A \quad \text{y} \quad \bar{B} \circ \pi_2 = B .$$

Según el corolario del teorema 5.15.2 existe un isomorfismo

$$g: U/Ker A \otimes V/Ker B \rightarrow (U \otimes V) / T(Ker A, Ker B)$$

tal que

$$g(\pi_1 u \otimes \pi_2 v) = \pi(u \otimes v).$$

Definamos ahora la aplicación lineal

$$\chi: (U \otimes V) / T(Ker A, Ker B) \rightarrow W \otimes Z$$

tal que

$$\chi = (\bar{A} \otimes \bar{B}) \circ g^{-1}$$

Puesto que g^{-1} es un isomorfismo y $\bar{A} \otimes \bar{B}$ es inyectiva χ también será inyectiva. Además, si $u \in U$ y $v \in V$ son arbitrarios, tendremos

$$\begin{aligned} (\chi \circ \pi)(u \otimes v) &= ((\bar{A} \otimes \bar{B}) \circ g^{-1}) \pi(u \otimes v) \\ &= ((\bar{A} \otimes \bar{B}) \circ g^{-1}) g(\pi_1 u \otimes \pi_2 v) \\ &= (\bar{A} \otimes \bar{B})(\pi_1 u \otimes \pi_2 v) \\ &= \bar{A}(\pi_1 u) \otimes \bar{B}(\pi_2 v) = \bar{A} \bar{u} \otimes \bar{B} \bar{v} \\ &= Au \otimes Bv = (A \otimes B)(u \otimes v), \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\chi \circ \pi = A \otimes B.$$

Puesto que χ es inyectiva, $\chi \circ \pi$ se anula donde se anula π . Por consiguiente

$$\begin{aligned} Ker(A \otimes B) &= Ker \pi = T(Ker A, Ker B) \\ &= Ker A \otimes V + U \otimes Ker B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 1. Si A y B son inyectivas, $A \otimes B$ es inyectiva y si A y B son sobreyectivas, $A \otimes B$ es sobreyectiva.

Demostración. La primera parte se demuestra en forma semejante a la que hemos empleado en la demostración del teorema anterior para poder probar que $\bar{A} \otimes \bar{B}$ es inyectiva.

La segunda parte es una consecuencia inmediata de la fórmula (5.16.1). ■

De los teoremas 5.15.2 y 5.16.1 resulta inmediatamente el corolario siguiente.

Corolario 2. Si π designa al homomorfismo canónico de $U \otimes V$ sobre $(U \otimes V) / \text{Ker}(A \otimes B)$, y si

$$\Psi : U / \text{Ker} A \times V / \text{Ker} B \rightarrow (U \otimes V) / \text{Ker}(A \otimes B)$$

es la aplicación bilineal definida por la relación

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}) = \pi(u, v)$$

donde $u \in \bar{u} \in U / \text{Ker} A$ y $v \in \bar{v} \in V / \text{Ker} B$, entonces el par

$$((U \otimes V) / \text{Ker}(A \otimes B), \Psi)$$

es el producto tensorial de $U / \text{Ker} A$ y $V / \text{Ker} B$.

5.17. Producto tensorial de aplicaciones y de funciones bilineales. Dualidad entre productos tensoriales de espacios vectoriales.

El siguiente teorema proporciona el producto tensorial de los espacios de aplicaciones bilineales $\mathcal{B}(U, U'; U'')$ y $\mathcal{B}(V, V'; V'')$, donde U, U', U'', V, V' y V'' son espacios vectoriales dados, como un subespacio del espacio de aplicaciones bilineales $\mathcal{B}(U \otimes V, U' \otimes V'; U'' \otimes V'')$, con lo cual queda definido el producto tensorial de dos aplicaciones bilineales.

Teorema 5.17.1. La aplicación bilineal

$$\chi : \mathcal{B}(U, U'; U'') \times \mathcal{B}(V, V'; V'') \rightarrow \mathcal{B}(U \otimes V, U' \otimes V'; U'' \otimes V''),$$

tal que para $\Phi \in \mathcal{B}(U, U'; U'')$, $\Psi \in \mathcal{B}(V, V'; V'')$, $x \in U$, $x' \in U'$, $y \in V$, $y' \in V'$ cualesquiera, es

$$\chi(\Phi, \Psi)(x \otimes y, x' \otimes y') = \Phi(x, x') \otimes \Psi(y, y'), \quad (5.17.1)$$

es bien determinada, y el par $(\text{Im } \chi, \chi)$ es el producto tensorial de los espacios $\mathcal{B}(U, U'; U'')$ y $\mathcal{B}(V, V'; V'')$, y se tiene por consiguiente

$$\Phi \otimes \Psi = \chi(\Phi, \Psi). \quad (5.17.2)$$

Demostración. Para demostrar la existencia de la aplicación bilineal $\chi(\Phi, \Psi)$ que cumple la condición (5.17.1) consideremos las aplicaciones lineales

$$f : U \otimes U' \rightarrow U'' \quad \text{y} \quad g : V \otimes V' \rightarrow V''$$

que corresponden a las aplicaciones bilineales , por las respectivas aplicaciones universales $\otimes : U \times U' \rightarrow U \otimes U'$ y $\otimes : V \times V' \rightarrow V \otimes V'$. Se tiene por consiguiente

$$\Phi = f \circ \otimes \quad \text{y} \quad \Psi = g \circ \otimes .$$

$f \otimes g$ es entonces (ver la sección 5.11, y en particular la observación 2) una aplicación lineal de $(U \otimes U') \otimes (V \otimes V')$ en $U'' \otimes V''$, tal que

$$\begin{aligned} (f \otimes g)((x \otimes x') \otimes (y \otimes y')) &= f(x \otimes x') \otimes g(y \otimes y') \\ &= \Phi(x, x') \otimes \Psi(y, y'). \end{aligned}$$

Sea ahora

$$S : (U \otimes V) \otimes (U' \otimes V') \rightarrow (U \otimes U') \otimes (V \otimes V')$$

el único isomorfismo que cumple la condición

$$S((x \otimes y) \otimes (x' \otimes y')) = (x \otimes x') \otimes (y \otimes y'),$$

que existe por la aplicación de las relaciones 1. y 2. del teorema 5.6.1, y la observación B de la sección 5.6.

Podemos definir ahora la aplicación lineal

$$(f \otimes g) \circ S : (U \otimes V) \otimes (U' \otimes V') \rightarrow U'' \otimes V'',$$

y por consiguiente la aplicación bilineal

$$\chi(\Phi, \Psi) : (U \otimes V) \times (U' \otimes V') \rightarrow U'' \otimes V''$$

tal que

$$\chi(\Phi, \Psi)(w, z) = (f \otimes g)(S(w \otimes z)), \quad w \in U \otimes V, \quad z \in U' \otimes V'.$$

Se sigue de aquí que

$$\begin{aligned} \chi(\Phi, \Psi)(x \otimes y, x' \otimes y') &= (f \otimes g)((x \otimes x') \otimes (y \otimes y')) \\ &= \Phi(x, x') \otimes \Psi(y, y') \end{aligned}$$

y por tanto $\chi(\Phi, \Psi)$ cumple la condición (5.17.1)

Probemos ahora que el par $(\text{Im } \chi, \chi)$ es un producto tensorial de $\mathcal{B}(U, U'; U'')$ y $\mathcal{B}(V, V'; V'')$. Debemos probar, simplemente, en virtud del corolario 4 del teorema 5.5.1, que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} g : \mathcal{B}(U, U'; U'') \otimes \mathcal{B}(V, V'; V'') \\ \rightarrow \mathcal{B}(U \otimes V, U' \otimes V'; U'' \otimes V'') \end{aligned}$$

tal que es $\chi = g \circ \otimes$ donde \otimes designa a la aplicación universal

$$\mathcal{B}(U, U'; U'') \times \mathcal{B}(V, V'; V'') \rightarrow \mathcal{B}(U, U'; U'') \otimes \mathcal{B}(V, V'; V''),$$

es inyectiva.

Sea ω un elemento de $\mathcal{B}(U, U'; U'') \otimes \mathcal{B}(V, V'; V'')$ tal que $g(\omega) = 0$. Bastará probar que la suposición de que $\omega \neq 0$ implica

contradicción. Supongamos pues que $\omega \neq 0$. Según la propiedad III de la sección 5.4 puede escribirse

$$\omega = \sum_{i=1}^r \Phi_i \otimes \Psi_i, \quad \Phi_i \in \mathcal{B}(U, U'; U''), \quad \Psi_i \in \mathcal{B}(V, V'; V''),$$

donde los Φ_i y los Ψ_i son l.i.

Se tiene entonces

$$g(\omega) = \sum_{i=1}^r g(\Phi_i \otimes \Psi_i) = \sum_{i=1}^r \chi(\Phi_i, \Psi_i),$$

y por tanto la suposición $g(\omega) = 0$ implica que

$$\sum_{i=1}^r (\Phi_i(x, x') \otimes \Psi(y, y')) = 0, \quad (5.17.3)$$

para cada $(x, x') \in U \times U'$ y $(y, y') \in V \times V'$.

Puesto que Φ_j no es nula, puede escogerse el elemento $(a, b) \in U \times U'$ tal que $\Phi_1(a, b) \neq 0$. Sea $p \geq 1$ el número maximal de vectores $\Phi_1(a, b), \dots, \Phi_r(a, b)$ que son l.i. Podemos suponer por consiguiente que $\Phi_1(a, b), \dots, \Phi_p(a, b)$ son l.i. Se tiene entonces que

$$\Phi_j(a, b) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ji} \Phi_i(a, b), \quad j = p+1, \dots, r;$$

y de (5.17.3) se sigue

$$\sum_{i=1}^p (\Phi_i(a, b) \otimes \Psi_i(y, y')) + \sum_{j=p+1}^r \left(\sum_{i=1}^p \lambda_{ji} \Phi_i(a, b) \otimes \Psi_j(y, y') \right) = 0$$

para $(y, y') \in V \times V'$ cualquiera. Es decir que

$$\sum_{i=1}^p [\Phi_i(a, b) \otimes \left(\sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \Psi_j(y, y') + \Psi_i(y, y') \right)] = 0$$

para cualquier $(y, y') \in V \times V'$.

Puesto que los $\Phi_i(a, b)$, $i = 1, \dots, p$, son l.i., la propiedad IV de la sección 5.4 implica que

$$\Psi_i(y, y') + \sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \Psi_j(y, y') = 0 \quad i = 1, \dots, p,$$

para cada par $(y, y') \in V \times V'$. Por consiguiente

$$\Psi_i + \sum_{j=p+1}^r \lambda_{ji} \Psi_j = 0,$$

lo cual contradice la suposición de que las Ψ_j son l.i., y por consiguiente debe ser $\omega = 0$. Es decir que $g(\omega) = 0$, implica que $\omega = 0$, y por tanto g es inyectiva. ■

Teorema 5.17.2. Dados los dos pares de espacios vectoriales (U, U') y (V, V') , y dos funciones bilineales $\Phi: U \times U' \rightarrow \mathbb{F}$ y $\Psi: V \times V' \rightarrow \mathbb{F}$, $\Phi \otimes \Psi$ es una función bilineal definida sobre $(U \otimes V) \times (U' \otimes V')$, tal que

$$(\Phi \otimes \Psi)(x \otimes y, x' \otimes y') = \Phi(x, x') \Psi(y, y').$$

Además, para que $\Phi \otimes \Psi$ sea no degenerada (definición 2.1.2), es condición suficiente que Ψ y Φ sean no degeneradas. Esta condición es también necesaria si ninguno de los espacios U , U' , V , V' se reduce al vector nulo.

Demostración. El teorema 5.17.1 permite establecer que $\Phi \otimes \Psi$ es una función bilineal definida sobre $(U \otimes V) \times (U' \otimes V')$ y con valores en $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F} = \mathbb{F}$ (ver el ejercicio 5.4.1), y se tiene $(\Phi \otimes \Psi)(x \otimes y, x' \otimes y') = \Phi(x, x') \otimes \Psi(y, y') = \Phi(x, x') \Psi(y, y')$.

Probaremos ahora que $\Phi \otimes \Psi$ es no degenerada si Φ y Ψ son ambas no degeneradas.

Consideremos las aplicaciones lineales

$$\varphi : U \rightarrow \mathcal{L}(U'), \quad \psi : V \rightarrow \mathcal{L}(V'), \quad \theta : U \otimes V \rightarrow \mathcal{L}(U' \otimes V'),$$

cuyos valores, φ_a , ψ_b , θ_c , para $a \in U$, $b \in V$ y $c \in U \otimes V$ son de finidos por las relaciones

$$\varphi_a(x') = \Phi(a, x'), \quad \psi_b(y') = \Psi(b, y'), \quad \theta_c(z') = (\Phi \otimes \Psi)(c, z'),$$

(5.17.4)

donde $x' \in U'$, $y' \in V'$, $z' \in U' \otimes V'$.

Existe entonces (sección 5.11, (5.11.3)) la aplicación lineal

$$\varphi \otimes \psi : U \otimes V \rightarrow \mathcal{L}(U') \otimes \mathcal{L}(V')$$

tal que su valor para $a \otimes b \in U \otimes V$ es

$$(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b) = \varphi_a \otimes \psi_b,$$

para $a \in U$, $b \in V$.

Según se ha visto en la sección 5.11, $\mathcal{L}(U') \otimes \mathcal{L}(V')$ es un subespacio de $\mathcal{L}(U' \otimes V')$. Vamos a probar que

$$\theta = i \circ (\varphi \otimes \psi), \tag{5.17.5}$$

donde i es la aplicación de inclusión de $\mathcal{L}(U') \otimes \mathcal{L}(V')$ en $\mathcal{L}(U' \otimes V')$. Se tiene en efecto (ver la sección 5.11)

$$\begin{aligned} [i(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b)](x' \otimes y') &= [i(\varphi_a \otimes \psi_b)](x' \otimes y') \\ &= \varphi_a(x') \otimes \psi_b(y') \end{aligned}$$

$$= \Phi(a, x') \Psi(b, y')^{1)}$$

De (5.17.4) se sigue

$$\theta_{a \otimes b}(x' \otimes y') = (\Phi \otimes \Psi)(a \otimes b, x' \otimes y') = \Phi(a, x')(b, y').$$

Por consiguiente, se tiene

$$i((\varphi \otimes \psi)(a \otimes b)) = \theta_{a \otimes b} \quad a \in U, b \in V,$$

de donde se deduce la relación (5.17.5), y puesto que i es inyectiva resulta

$$\text{Ker } \theta = \text{Ker } (\varphi \otimes \psi).$$

La ecuación (5.16.2) nos permite escribir entonces

$$\text{Ker } \theta = \text{Ker } \varphi \otimes V + U \otimes \text{Ker } \psi. \quad (5.17.6)$$

En la sección 4.1 hemos introducido las nociones de radical izquierdo y derecho de una función bilineal. Vamos a representar ahora los radicales izquierdo y derecho de las funciones bilineales

$$\Phi: U \times U' \rightarrow \mathbb{F}, \quad \Psi: V \times V' \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{y} \quad \Phi \otimes \Psi: (U \otimes V) \times (U' \otimes V') \rightarrow \mathbb{F}$$

por

$N_U \Phi$ y $N_{U'} \Phi$, $N_V(\Psi)$ y $N_{V'}(\Psi)$, $N_{U \otimes V}(\Phi \otimes \Psi)$ y $N_{U' \otimes V'}(\Phi \otimes \Psi)$, respectivamente.

Los núcleos de las aplicaciones lineales θ , φ y ψ son

$$\text{Ker } \theta = \{ c \in U \otimes V \mid (\Phi \otimes \Psi)(c, z') = 0, \quad \forall z' \in U' \otimes V' \} =$$

1) Debe tenerse presente aquí que $\varphi_a(x')$ y $\psi_b(y')$ son escalares y por tanto $\varphi_a(x') \otimes \psi_b(y') = \varphi_a(x) \psi_b(y')$.

$$= N_{U \otimes V} (\Phi \otimes \Psi),$$

$$\text{Ker } \varphi = \{ a \in U \mid \Phi(a, x') = 0, \quad \forall x' \in U' \} = N_U(\Phi),$$

$$\text{Ker } \psi = \{ b \in V \mid \Psi(b, y') = 0, \quad \forall y' \in V' \} = N_V(\Psi).$$

Por consiguiente, la relación (5.17.6) puede escribirse

$$N_{U \otimes V} (\Phi \otimes \Psi) = N_U(\Phi) \otimes V + U \otimes N_V(\Psi).$$

En forma análoga, permutando los papeles de (U, V) y (U', V') , puede probarse la relación

$$N_{U' \otimes V'}(\Phi \otimes \Psi) = N_{U'}(\Phi) \otimes V' + U' \otimes N_{V'}(\Psi).$$

$\Phi \otimes \Psi$ es no degenerada si se cumple que

$$N_{U \otimes V} (\Phi \otimes \Psi) = N_{U' \otimes V'}(\Phi \otimes \Psi) = \{0\}.$$

Para esto es suficiente que se cumplan las condiciones

$N_U(\Phi) = N_{U'}(\Phi) = \{0\}$ y $N_V(\Psi) = N_{V'}(\Psi) = \{0\}$, o sea que Φ y Ψ sean no degeneradas. Es claro que si ninguno de los espacios U, U', V, V' se reduce al vector nulo, estas últimas condiciones son necesarias para que $\Phi \otimes \Psi$ sea no degenerada. ■

Corolario 1. Sean (U^*, U) y (V^*, V) dos pares de espacios duales. Los espacios $U^* \otimes V^*$ y $U \otimes V$ son entonces duales, y el producto escalar sobre esos espacios, que cumple la condición

$$\langle x^* \otimes y^*, x \otimes y \rangle = \langle x^*, x \rangle \langle y^*, y \rangle, \quad (5.17.7)$$

donde $x \in U, x^* \in U^*, y \in V, y^* \in V^*$, es único.

Demostración. Consideremos las funciones bilineales

$\Phi: U^* \times U \rightarrow \mathbb{F}$ y $\Psi: V^* \times V \rightarrow \mathbb{F}$ constituidas por los productos escalares correspondientes a los pares $(U^* U)$ y $(V^* V)$ de modo que

$$\Phi(x^*, x) = \langle x^*, x \rangle, \quad \Psi(y^*, y) = \langle y^*, y \rangle.$$

Las funciones Φ y Ψ son no degeneradas en virtud de la definición del producto escalar (Pte.I., 4.1). Luego, según el teorema anterior $\Phi \otimes \Psi: (U^* \otimes V^*) \times (U \otimes V) \rightarrow \mathbb{F}$ es una función bilineal no degenerada, es decir un producto escalar de los espacios $U^* \otimes V^*$ y $U \otimes V$, los cuales, por tanto, son duales entre sí.

Podemos escribir entonces

$$\langle t^*, t \rangle = (\Phi \otimes \Psi)(t^*, t) \text{ para } t^* \in U^* \otimes V^*, \quad t \in U \otimes V,$$

y se cumple por tanto la condición (5.17.7).

El producto escalar que hemos definido sobre el par de espacios $(U^* \otimes V^*, U \otimes V)$ es el único que cumple la condición (5.17.7). En efecto, si

$$\Theta : (U^* \otimes V^*) \times (U \otimes V) \rightarrow \mathbb{F}$$

es una función bilineal tal que

$\Theta(x^* \otimes y^*, x \otimes y) = \langle x^*, x \rangle \langle y^*, y \rangle = (\Phi \otimes \Psi)(x^* \otimes y^*, x \otimes y)$, entonces, puesto que cada elemento de $U^* \otimes V^*$ y de $U \otimes V$ puede expresarse como combinación lineal de tensores descomponibles, la relación anterior implica que

$$\Theta(t^*, t) = (\Phi \otimes \Psi)(t^*, t), \quad \forall t^* \in U^* \otimes V^*, \quad t \in U \otimes V.$$

Resulta de aquí que

$$\Theta = \Phi \otimes \Psi. \quad \blacksquare$$

Corolario 2. Dado el par de espacios duales (U^*, U) , el par $(U^* \otimes U, U \otimes U^*)$ es dual, con un producto escalar tal que $\langle x^* \otimes x, y \otimes y^* \rangle = \langle x^*, y \rangle \langle x, y^* \rangle$, $(x, y \in U; x^*, y^* \in U^*)$, y el par $(U \times U^*, U \otimes U^*)$ es dual, con un producto escalar tal que

$$\langle x \otimes x^*, y \otimes y^* \rangle = \langle x^*, y \rangle \langle x, y^* \rangle .$$

Demostración. La primera parte se prueba aplicando el teorema anterior a los pares duales (U^*, U) y (U, U^*) .

La segunda parte resulta de la primera cuando se tiene en cuenta que la aplicación $x^* \otimes x \mapsto x \otimes x^*$ determina un isomorfismo de $U^* \otimes U$ sobre $U \otimes U^*$ (teorema 5.6.1) .

Corolario 3. Sean (U_i^*, U_i) , $i = 1, \dots, p$, pares de espacios duales. El par $(U_1^* \otimes \dots \otimes U_p^*, U_1 \otimes \dots \otimes U_p)$ es entonces dual, con un producto escalar que cumple la condición

$$\langle x^1 \otimes \dots \otimes x^p, x_1 \otimes \dots \otimes x_p \rangle = \langle x^1, x_1 \rangle \dots \langle x^p, x_p \rangle ,$$

en donde $x^i \in U_i^*$, $x_i \in U_i$.

Demostración. En el corolario 1 hemos probado este corolario en el caso en que $p = 2$. El caso general puede probarse por indicación respecto de p . Supongamos que la proposición se cumple para $p - 1$. El par

$$((U_1^* \otimes \dots \otimes U_{p-1}^*) \otimes U_p, (U_1 \otimes \dots \otimes U_{p-1}) \otimes U_p)$$

es dual del producto escalar tal que

$$\begin{aligned} & \langle (x^1 \otimes \dots \otimes x^{p-1}) \otimes x^p, (x_1 \otimes \dots \otimes x_{p-1}) \otimes x_p \rangle \\ &= \langle x^1 \otimes \dots \otimes x^{p-1}, x_1 \otimes \dots \otimes x_{p-1} \rangle \langle x^p, x_p \rangle \\ &= \langle x^1, x_1 \rangle \dots \langle x^{p-1}, x_{p-1} \rangle \langle x^p, x_p \rangle. \end{aligned}$$

Los isomorfismos $(U_1 \otimes \dots \otimes U_{p-1}) \otimes U_p \rightarrow U_1 \otimes \dots \otimes U_p$ y $(U_1^* \otimes \dots \otimes U_{p-1}^*) \otimes U_p^* \rightarrow U_1^* \otimes \dots \otimes U_p^*$ permiten establecer entonces que $(U_1^* \otimes \dots \otimes U_p^*, U_1 \otimes \dots \otimes U_p)$ es un par de espacios duales con un producto escalar tal que

$$\begin{aligned} & \langle x^1 \otimes \dots \otimes x^{p-1}, x_1 \otimes \dots \otimes x_p \rangle \\ &= \langle (x^1 \otimes \dots \otimes x^{p-1}) \otimes x^p, (x_1 \otimes \dots \otimes x_{p-1}) \otimes x_p \rangle \\ &= \langle x^1, x_1 \rangle \dots \langle x^p, x_p \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§ 6. Tensores afines sobre espacios de dimensión finita.

En este párrafo y en el siguiente, en que nuestra exposición se orienta hacia las aplicaciones del cálculo tensorial, vamos a considerar exclusivamente espacios vectoriales de dimensión finita. Supondremos, en particular, que V es un espacio de dimensión n .

6.1 Espacio tensorial afín. Tensores afines contravariantes y covariantes. Tensores mixtos.

Definición 6.1.1. Dado un espacio vectorial V de dimensión n , se llama *espacio tensorial afín sobre V de orden $r = r' + r''$* , r' veces *contravariante* y r'' veces *covariante*, al producto tensorial de r espacios, de los cuales r' son iguales a V y r'' son iguales a su dual V^* .

Los elementos de tal espacio se llaman *tensores afines de orden r* , r' veces contravariantes y r'' veces covariantes. Así, por ejemplo, $V \otimes V^* \otimes V$ es un espacio vectorial afín de orden 3, dos veces contravariante y una vez covariante. También lo son los espacios $V \otimes V \otimes V^*$ y $V^* \otimes V \otimes V$. Cuando r' y r'' son distintos de cero se dice que los tensores afines son *mixtos*. Dos tensores que tienen el mismo orden de contravariancia y el mismo orden de covariancia se dice que son del *mismo tipo*.

Si $r''=0$ los tensores se llaman *contravariantes*, y si $r'=0$, *covariantes*. Es claro que estas denominaciones son relativas, por cuanto el dual de V^* es V y por tanto sus papeles pueden intercambiarse.

Los vectores de V y V^* se consideran como *tensores de primer orden*, y se llaman *vectores contravariantes* y *covariantes* respectivamente. A todos ellos se les considera como tensores descomponibles (Ver la definición al final de la definición 5.7.1).

Los escalares se consideran como *tensores de orden cero*.

En vez de las expresiones r' veces contravariantes y r'' veces covariantes puede decirse r' -contravariante y r'' -covariante.

Para cada par de números enteros (r', r'') , $r' \geq 0$, $r'' \geq 0$, designaremos por $\otimes_{r''}^{r'} V$ al espacio tensorial afín

$$\otimes_{r''}^{r'} V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r' \text{ factores}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r'' \text{ factores}} .$$

Así, por ejemplo, se tiene

$$\otimes_2^1 V = V \otimes V^* \otimes V^*,$$

$$\otimes_0^{r'} V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r' \text{ factores}},$$

$$\otimes_r^0 V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r'' \text{ factores}}.$$

Convendremos en escribir

$$\otimes_0^p V = \otimes^p V, \quad \otimes_p^0 V = \otimes_p V, \quad \otimes_0^0 V = \mathbb{F}, \quad \otimes_0^1 V = V, \quad \otimes_1^0 V = V^*.$$

Observación 1. Aun cuando los tensores, y en particular los vectores, pueden designarse con una sola letra, emplearemos en ocasiones las notaciones x_1, x_2, \dots , con índices *inferiores* para designar a los elementos de un conjunto de vectores *contravariantes*, y las notaciones x^1, x^2, \dots , con índices *superiores*, para designar a los elementos de un conjunto de *vectores covariantes*. Estas notaciones no deben ser confundidas con las que vamos a introducir después para designar a los escalares que son componentes de vectores contravariantes o covariantes. Si v es un vector *contravariante* sus componentes respecto de una base $\{e_i\}$ de V se designan por v^1, v^2, \dots , con índices *superiores*; y si u es un vector *covariante* sus componentes respecto de una base $\{e^j\}$ de V^* se designan por u_1, u_2, \dots , con índices *inferiores*; de modo que puede escribirse

$$v = \sum_i v^i e_i \quad \text{y} \quad u = \sum_j u_j e^j.$$

Observación 2. En virtud de la definición 6.11, si se tiene en cuenta lo expresado en la sección 5.5, aplicación **D**, los elementos de los espacios $\mathcal{B}(V, V)^*$, $\mathcal{B}(V^*, V^*)$ y $\mathcal{L}(V^*; V)$ pueden considerarse como tensores dos veces contravariantes; los elementos de los espacios $\mathcal{B}(V^*, V^*)^*$, $\mathcal{B}(V, V)$ y $\mathcal{L}(V; V^*)$, como tensores dos veces covariantes; y los elementos de $\mathcal{B}(V, V^*)^*$, $\mathcal{B}(V^*, V)^*$, $\mathcal{B}(V, V^*)^*$, $\mathcal{B}(V^*, V)$, $\mathcal{L}(V; V)$ y $\mathcal{L}(V^*; V^*)$, como tensores mixtos de segundo orden una vez contravariantes y una vez covariantes. Si se tiene en cuenta la segunda parte del enunciado del ejercicio 5.10.5 se obtienen espacios tensoriales afines de orden mayor que 2.

6.2. Componentes de los tensores afines. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base del espacio V . Dado que no estamos suponiendo que V es euclideo no hay inconveniente en representar a la base dual en la forma $\mathcal{E}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ porque no puede confundirse con una base recíproca (Pte. I, definición 17.8.1).

La notación que vamos a emplear para designar a las componentes de un tensor afín, dada la base \mathcal{E} del espacio V , puede ser descrita con ayuda de un caso particular que se extiende sin dificultad al caso general.

Consideremos por ejemplo al espacio vectorial afín $V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ de orden 5, 3 veces contravariante y 2 veces covariante. A la base \mathcal{E} le corresponde *canónicamente* la base formada por los n^5 tensores

$$e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l,$$

donde cada índice puede tomar por los valores $1, 2, \dots, n$. Si t es un tensor del espacio que consideramos escribiremos

$$t = \sum_{b, i, j, k, l} t^{b i j k l} e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l,$$

donde está sobreentendido que la suma es múltiple y se extiende a todos los valores de l a n que pueden tomar los cinco índices.

Los índices superiores (h, i y k en el ejemplo anterior) se llaman también índices contravariantes, y los inferiores (j y l en el ejemplo) se llaman índices covariantes. La disposición de los índices permite reconocer de inmediato el espacio tensorial afín a que pertenece el tensor.

De conformidad con el convenio precedente los tensores afines de componentes

$$t^{ijk}, t_i^{jk}, t_{ij}^k, t_{ijk}, t^i_j, t^i_{jk}, t^j_{ik}, t^{ij}_k$$

pertenecen, respectivamente a los espacios

$$V \otimes V \otimes V, V^* \otimes V \otimes V, V^* \otimes V^* \otimes V, V^* \otimes V^* \otimes V^*,$$

$$V \otimes V^* \otimes V, V \otimes V^* \otimes V^*, V^* \otimes V \otimes V^*, V \otimes V \otimes V^*.$$

Observación 1. Dada una base $\{e_i\}$ de V y la correspondiente base de un espacio tensorial afín cualquiera, las componentes de un tensor de ese espacio pueden expresarse de manera sencilla mediante las componentes de los vectores factores.

La precedente afirmación puede comprobarse con un ejemplo. Sea $t = u \otimes v^* \otimes w$ un tensor del espacio $V \otimes V^* \otimes V$. Dada la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V puede escribirse

$$u = \sum_i u^i e_i, \quad v = \sum_j v_j e^j, \quad w = \sum_k w^k e_k,$$

y se tiene por tanto

$$t = \sum_{i,j,k} u^i v_j w^k e_i \otimes e^j \otimes e^k,$$

de donde se deduce que

$$t_j^{i k} = u^i v_j w^k.$$

De la simple observación de esta relación puede deducirse la regla general, válida para todos los tensores descomponibles. Puede observarse, en particular, que es indiferente el orden de los vectores de la base $\{e_i\}$.

Ahora bien, cada tensor puede expresarse como suma de un número finito de tensores descomponibles, luego sus componentes se obtienen sumando las componentes de dichos tensores descomponibles, correspondientes a cada tensor de base, las cuales se obtienen mediante la regla antes establecida.

Observación 2. Dados dos espacios tensoriales afines A y B ambos r' -contravariantes y r'' -covariantes, y una base $\{e_i\}$ de V , entre las bases que les corresponde puede establecerse una biyección en que a cada tensor de la base de uno de ellos le corresponde el tensor de la base del otro que es el producto tensorial de *los mismos vectores de la base de V* que el primero, pero en el orden que corresponde. Así, por ejemplo, al tensor $e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l$ de la base de $V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ le corresponderá el tensor $e^j \otimes e_b \otimes e_i \otimes e^l \otimes e_k$ de la base de $V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V$.

Si consideramos ahora en el espacio A un tensor descomponible cualquiera, y le hacemos corresponder el tensor descompo-

nible de B que es producto tensorial de los mismos vectores que el primero pero en el orden que corresponda, resulta de la observación 1 que ambos tensores tienen las mismas componentes respecto de los tensores de las bases de A y B que se corresponden de la manera antedicha; y esa correspondencia entre los tensores descomponibles es canónica, es decir independiente de las bases. Así, por ejemplo, al tensor t de $V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ le corresponde τ de $V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V$ tal que entre sus componentes se cumplen las relaciones

$$t^{b_i k}_{\cdot j l} = \tau_j^{b_i k}_{l \cdot},$$

para todos los valores de los índices.

La correspondencia anterior se extiende canónicamente, de manera obvia a todos los tensores de A y B .

De lo dicho resulta, en particular, que los tensores de cualquier espacio tensorial afín r' -contravariante y r'' -covariante está en correspondencia canónica, de la manera dicha con los tensores del espacio $V_{r''}^{r'}$.

Observación 3. Dado un conjunto n^r de funciones con valores escalares, definidas sobre el conjunto de todas las bases del espacio vectorial V de dimensión n , se dice que definen a un tensor t del espacio tensorial afín $\otimes_{r''}^{r'} V$, o bien que son las componentes de un tensor de $\otimes_{r''}^{r'} V$, donde $r' + r'' = r$, si pueden ser designadas por

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}}, \quad (i_k = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r),$$

de manera que el valor que toma la función $t_{i_1 \dots i_{r'}}^{i_1 \dots i_{r'}}$ para una base dada cualquiera $\{e_i\}$ de V es la componente de t relativa al tensor

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e_{i_{r'+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad (6.2.1)$$

de la base correspondiente de $\otimes_{r''}^{r'} V$.

La correspondencia canónica que existe entre $\otimes_{r''}^{r'} V$ y cualquier otro espacio tensorial afín r' -contravariante y r'' -covariante, según se estableció en la observación 2, permite asegurar que si las n' funciones dadas son las componentes de un tensor de $\otimes_{r''}^{r'} V$, también lo son de un tensor t' de cualquier otro espacio tensorial afín r' -contravariante y r'' -covariante. El valor que toma la función $t_{i_1 \dots i_{r'}}^{i_1 \dots i_{r'}}$ para una base dada cualquiera $\{e_i\}$ de V es la componente de t' (relativa al tensor de la base del espacio tensorial afín a que pertenece t') que corresponde al tensor (6.2.1) de la manera que se vió en la observación 2.

6.3. Convenio de sumación de Einstein. En el cálculo práctico con componentes de tensores es conveniente adoptar un convenio que tiene por objeto suprimir los signos de sumación y simplificar de esa manera la escritura. Según ese convenio, que se llama *convenio de Einstein*:

Cada monomio cuyos factores están provistos de índices literales superiores e inferiores susceptibles de tomar determinados valores numéricos, si algunos de esos índices aparecen como índice superior de un factor y como índice inferior de otro factor, entonces, salvo aviso en contrario, dicho monomio debe considerarse como la representación abreviada de la suma de los monomios

que resultan del monomio dado cuando se atribuye a los mencionados índices todos los valores posibles. Así, si $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$; y $k = 1, \dots, p$, se tiene

$$a^i x_i = \sum_{i=1}^n a^i x_i = a^1 x_1 + a^2 x_2 + \dots + a^n x_n;$$

$$\begin{aligned} a^{ij} x_i x_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^{ij} x_i x_j \\ &= a^{11} x_1 x_1 + a^{12} x_1 x_2 + \dots + a^{1m} x_1 x_m + a^{21} x_2 x_1 + \dots + a^{nm} x_n x_m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{il} \beta_{jr} \gamma_{ks} x^i y^j z^k &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \alpha_{il} \beta_{jr} \gamma_{ks} x^i y^j z^k \\ &= \alpha_{1l} \beta_{1r} \gamma_{1s} x^1 y^1 z^1 + \alpha_{1l} \beta_{1r} \gamma_{2s} x^1 y^1 z^2 + \dots \\ &+ \alpha_{1l} \beta_{1r} \gamma_{ps} x^1 y^1 z^p + \alpha_{1l} \beta_{2r} \gamma_{1s} x^1 y^2 z^1 + \dots \\ &+ \alpha_{nl} \beta_{mr} \gamma_{ps} x^n y^m z^p. \end{aligned}$$

En algunos casos puede ocurrir que, dado un producto en que ocurra un índice duplicado, no se quiera representar una suma respecto de ese índice. En tales casos, en que se desee dejar sin efecto el convenio de Einstein, deberá hacerse una advertencia expresa en ese sentido.

En adelante, en lo que sigue del presente capítulo, emplearemos el convenio en todos los casos en que sea posible hacerlo, salvo pocas excepciones.

Aplicación A. Fórmulas de transformación de las componentes de un tensor afín cuando cambia la base del espacio V .

Según sabemos (Pte. I, sección 6.10), dadas las bases $\{e_i\}$ y $\{e'_i\}$ del espacio V de dimensión n , existen los escalares A_i^j y A_j^i ,

tales que se cumplen las relaciones

$$e_i = A_i^{j'} e_{j'} \quad , \quad e_{j'} = A_{j'}^i e_i \quad . \quad (6.3.1)$$

Entonces, dado un vector cualquiera de V , se tiene

$$x = x^i e_i = x^{j'} e_{j'} \quad , \quad (6.3.2)$$

se cumplen las fórmulas

$$x^i = A_{j'}^i x^{j'} \quad \quad \quad x^{j'} = A_{i'}^j x^i \quad . \quad (6.3.3)$$

Sean ahora $\{e^i\}$ y $\{e^{j'}\}$ las bases duales de $\{e_i\}$ y $\{e_{j'}\}$. Dado un vector cualquiera y del espacio dual V^* de V , puede escribirse

$$y = y_i e^i = y_{j'} e^{j'} \quad , \quad (6.3.4)$$

de donde se deduce (recordar que V^* se identifica con el espacio de las funciones lineales sobre V)

$$y(e_j) = y e^i(e_j) = y \delta_j^i = y_j \quad ,$$

$$y(e_{j'}) = y_{j'} e^{j'}(e_{j'}) = y_{j'} \delta_{j'}^{j'} = y_{j'} \quad .$$

Por consiguiente se tiene que

$$y = y(e_i) e^i \quad , \quad y = y(e_{j'}) e^{j'} \quad . \quad (6.3.5)$$

Por otra parte se tiene

$$e^{j'}(e_i) = e^{j'}(A_i^{k'} e_{k'}) = A_i^{k'} \delta_{k'}^{j'} = A_i^{j'} \quad ,$$

$$e^i(e_{j'}) = e^i(A_{j'}^k e_k) = A_{j'}^k \delta_k^i = A_{j'}^i \quad .$$

Reemplazando y por $e^{j'}$ en la primera de las ecuaciones (6.3.5) y por e^i en la segunda, y teniendo presente las relaciones precedentes, resultan las fórmulas

$$e^{j'} = A_i^{j'} e^i, \quad e^i = A_j^i e^{j'}, \quad (6.3.6)$$

que son las fórmulas de cambio de bases de V^* . Llevando las expresiones (6.3.6) a las ecuaciones (6.3.4) se deducen las fórmulas de transformación de las componentes de un vector de V^* ,

$$y_i = A_i^{j'} y_{j'}, \quad y_{j'} = A_j^i y_i, \quad (6.3.7)$$

donde las y_i son las componentes del vector $y \in V^*$ relativas a la base $\{e^i\}$ y las $y_{j'}$ son sus componentes relativas a la base $\{e^{j'}\}$.

Las fórmulas precedentes nos permiten obtener las fórmulas de transformación de las componentes de un tensor afín cuando cambia la base del espacio V . Basta que consideremos un caso particular para obtener un resultado de inmediata generalización.

Consideremos por ejemplo un tensor cualquiera del espacio $V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ dado por

$$t = t^{b i k}_{j l} e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l.$$

Aplicando las fórmulas (6.3.1) se obtiene

$$t = A_b^{b'} A_i^{i'} A_{j'}^j A_k^{k'} A_{l'}^l t^{b i k}_{j l} e_{b'} \otimes e_{i'} \otimes e^{j'} \otimes e_{k'} \otimes e^{l'},$$

de donde resulta que las componentes de t respecto de la nueva base del espacio tensorial que consideramos es

$$t^{b' i' k'}_{j' l'} = A_b^{b'} A_i^{i'} A_{j'}^j A_k^{k'} A_{l'}^l t^{b i k}_{j l}. \quad (6.3.8)$$

Semejantemente se puede ver que

$$t^{b i k}_{j l} = A_b^{b'} A_i^{i'} A_{j'}^j A_k^{k'} A_{l'}^l t^{b' i' k'}_{j' l'} \quad (6.3.9)$$

La observación de las fórmulas obtenidas permiten reconocer de inmediato cuál es la regla general.

La generalización de las fórmulas (6.3.8) y (6.3.9) nos permite demostrar que *dados dos tensores pertenecientes a dos espacios tensoriales afines r' -contravariantes y r'' -covariantes, tales que para las bases de estos espacios que corresponden a una base dada de V tienen las mismas componentes respecto de los tensores de base que se corresponden según la observación 2 de la sección 6.2, poseen la misma propiedad para las bases que se corresponden a cualquier otra base de V .*

Para hacer ver este hecho nos valdremos nuevamente de un ejemplo que basta para apreciar la validez general del enunciado. Sean los tensores

$$t = t^{bi \ k}_{j \ l} e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l$$

de $V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ y

$$\tau = \tau_j^{bi \ k} e^j \otimes e_b \otimes e_i \otimes e^l \otimes e_k$$

de $V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V$.

Supongamos, que para una base dada $\{e_i\}$ de V , $t^{bi \ k}_{j \ l}$ designa a la componente de t relativa al tensor de base $e_b \otimes e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e^l$, y $\tau_j^{bi \ k}$ designa a la componente de τ relativa al correspondiente tensor de base $e^j \otimes e_b \otimes e_i \otimes e^l \otimes e_k$, y que se cumplen las igualdades

$$t^{bi \ k}_{j \ l} = \tau_j^{bi \ k} \quad , \quad (6.3.10)$$

cualesquiera que sean los valores que se dé a los índices.

Si $\{e_{i,1}\}$ es una nueva base de V que se relaciona con $\{e_i\}$ mediante las fórmulas (6.3.6), las nuevas componentes de t y τ serán

$$t^{b' i' j' l' k'} = A_b^{b'} A_i^{i'} A_j^j A_l^l A_k^{k'} t^{b i j l k}$$

y

$$\tau_j^{b' i' j' l' k'} = A_j^j A_b^{b'} A_i^{i'} A_l^l A_k^{k'} \tau_j^{b i j l k},$$

de donde resulta, si se tiene presente (6.3.10), que

$$t^{b' i' j' l' k'} = \tau_j^{b' i' j' l' k'},$$

cualesquiera que sean los índices. ■

El enunciado que acabamos de comprobar confirma lo expresado en la observación 3 de la sección 6.2. Así, por ejemplo, si $t_{j l}^{b i k}$ son las componentes de un tensor t del espacio $\otimes_2^3 V$, entonces los escalares

$$\tau_j^{b i j l k} = t_{j l}^{b i k}$$

son las componentes de un tensor τ del espacio $V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V$.

Aplicación B. El tensor de Kronecker.

Consideremos en el espacio $\otimes_j^j V$ un tensor δ cuyas componentes para una base cualquiera dada $\{e_i\}$ de V son expresadas por los símbolos de Kronecker δ_j^i . Si se cambia la base $\{e_i\}$ por la base $\{e_{i'}\}$, se obtiene

$$\delta = \delta_j^i e_i \otimes e^j = \delta_j^{i'} A_i^{i'} A_j^j e_{i'} \otimes e^{j'} = A_i^{i'} A_j^j e_{i'} \otimes e^{j'}.$$

Pero según se sabe es $A_i^{i'} A_j^j = \delta_j^{i'}$ (Pte. I, sección 6.10).

Luego resulta

$$\delta = \delta_{j'}^{i'} e_{i'} \otimes e^{j'}.$$

Es decir que las componentes del tensor δ son expresadas por el signo de Kronecker cualquiera que sea la base de V que se considere, razón por la cual δ se llama *tensor de Kronecker* asociado al espacio V .

6.4 Criterios de tensorialidad.

En esta sección supondremos que son dadas n^r funciones cada una de las cuales es definida sobre el conjunto de todas las bases del espacio vectorial V de dimensión n , las cuales toman determinados valores escalares en cada una de dichas bases. Nos proponemos determinar condiciones para que exista un tensor afín sobre el espacio V , de orden r , cuyas componentes respecto de la base del espacio tensorial afín a que pertenece, correspondiente a una base dada de V , sean los valores que las n^r funciones toman para dicha base de V .

La cuestión propuesta la expresaremos en forma abreviada diciendo que: *dado un sistema de n^r funciones escalares que tienen valores determinados para cada base de V , se trata de hallar condiciones para que sean las componentes de un tensor afín de orden r .*

Lo dicho en la observación 3 de la sección 6.2 y al final de la Aplicación A de la sección 6.3 nos permite establecer las condiciones para que las n^r funciones escalares sean componentes de un tensor de un espacio $\otimes_{r''}^{r'} V$ donde $r' + r'' = r$: Si lo son para un espacio tensorial afín r' -contravariante y r'' -covariante, lo serán también para cualquier otro de la misma naturaleza.

Las n^r funciones escalares que consideramos serán designadas por

$$t_{i_1 + 1 \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (i_k = 1, \dots, n \text{ para } k = 1, \dots, r).$$

Teorema 6.4.1. Para que un sistema de n^r funciones escalares que tien valores determinados para cada base que se elija del espacio V de dimensión n sean las componentes de un tensor afín r' -contra variante y r'' -contravariante, donde $r'' = r - r'$, es necesario y suficiente que si designamos por

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 i_2 \dots i_{r'}} \quad (i_k = 1, \dots, n \text{ para } k = 1, \dots, r)$$

a los valores del sistema que corresponden a la base $\{e_i\}$ de V , y por

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_{r'}}$$

a los que corresponden a otra base $\{e_{j'}\}$, relacionada con la anterior por las ecuaciones

$$e_i = A_i^{j'} e_{j'} \quad , \quad e_{j'} = A_{j'}^i e_i \quad , \quad (6.4.1)$$

la relación entre unos y otros números sea dada por

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} = A_{i_1}^{j_1'} A_{i_2}^{j_2'} \dots A_{i_{r'}}^{j_{r'}'} A_{i_{r'+1}}^{j_{r'+1}'} A_{i_{r'+2}}^{j_{r'+2}'} \dots A_{i_r}^{j_r'} t_{j_{r'+1} \dots j_r}^{j_1 \dots j_{r'}} \quad (6.4.2)$$

o bien, equivalentemente,

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} = A_{i_1}^{j_1'} A_{i_2}^{j_2'} \dots A_{i_{r'}}^{j_{r'}'} A_{i_{r'+1}}^{j_{r'+1}'} A_{i_{r'+2}}^{j_{r'+2}'} \dots A_{i_r}^{j_r'} t_{j_{r'+1} \dots j_r}^{j_1 \dots j_{r'}} \quad (6.4.3)$$

Demostración. Nos limitaremos a probar la fórmula (6.4.2). Según sabemos, las fórmulas (6.4.1) de cambio de las bases (e_i) y $(e_{j'})$ implican a las siguientes fórmulas de cambio de las bases duales $\{e^i\}$ y $\{e^{j'}\}$.

$$e^{j'} = A_i^{j'} e^i \quad , \quad e^i = A_{j'}^i e^{j'}$$

Supongamos primero que t es un tensor cuyas componentes respec-

to de la base $\{e_i\}$ son los números del mismo sistema dados. Podemos escribir entonces

$$t = t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e^{i_{r'+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$$

$$= t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} A_{i_1}^{i_1'} \dots A_{i_{r'}}^{i_{r'}} A_{i_{r'+1}}^{i_{r'+1}'} \dots A_{i_r}^{i_r'} e_{i_1'} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e^{i_{r'+1}'} \otimes \dots \otimes e^{i_r'}$$

y puesto que

$$t = t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1' \dots i_{r'}} e_{i_1'} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e^{i_{r'+1}'} \otimes \dots \otimes e^{i_r'}$$

se deduce inmediatamente, dado que los tensores de la forma $e_{i_1'} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e^{i_{r'+1}'} \otimes \dots \otimes e^{i_r'}$ constituyen una base del espacio de los tensores r' veces contravariantes y $r - r'$ veces covariantes, que se cumple la relación (6.4.2). En forma semejante se demuestra (6.4.3).

Inversamente, supongamos que se cumple la relación (6.4.2),

donde $t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}}$ y $t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1' \dots i_{r}'}$ son los valores de las n^r funciones escalares correspondientes a las bases $\{e_i\}$ y $\{e_{i'}\}$, respectivamente. Consideremos el tensor s que, referido a la base $\{e_i\}$ se expresa por

$$s = s_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{r'}} \otimes e^{i_{r'+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$$

donde

$$s_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} = t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r}'}$$

Si designamos por $s_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1' \dots i_{r}'}$ a las componentes del tensor s respecto de otra base cualquiera $\{e_{i'}\}$, el cálculo que hemos llevado a cabo en la demostración de la primera parte del presente teorema

prueba que

$$\begin{aligned} s_{i'_1+1 \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_r} &= A_{i'_1}^{i'_1} \dots A_{i'_r}^{i'_r} A_{i'_r+1}^{i'_r+1} \dots A_{i'_r}^{i'_r} s_{i'_1+1 \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_r} \\ &= A_{i'_1}^{i'_1} \dots A_{i'_r}^{i'_r} A_{i'_r+1}^{i'_r+1} \dots A_{i'_r}^{i'_r} t_{i'_1+1 \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_r} = t_{i'_1+1 \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_r} \end{aligned}$$

Por tanto los escalares que constituyen los valores del sistema que consideramos coinciden, para cada base que se elija en V , con las componentes del tensor s relativas a esa base. ■

Los teoremas siguientes son de importancia práctica para reconocer el carácter tensorial de sistemas de escalares que cambian con las bases.

Teorema 6.4.2. Para que un sistema de n^r funciones escalares

$$t_{i'_1+1 \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_r} \quad (i_k = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, r),$$

que tienen valores determinados para cada base que se elija en el espacio V de dimensión n , sean las componentes respecto de la respectiva base, de un tensor afín r' veces contravariante y $r-r'$ veces covariante, es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los r' vectores covariantes (tensores covariantes de primer orden).

$$x^{(1)}, \dots, x^{(r')},$$

de componentes $x_i^{(k)}$ respecto de la base $\{e^i\}$, y los $r-r'$ vectores contravariantes (tensores contravariantes de primer orden)

$$x_{(r'+1)}, \dots, x_{(r)},$$

emp
J Leb

de componentes $x_{(l)}^i$ respecto de la base $\{e_i\}$ dual de la base $\{e^i\}$, el escalar

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(r)}^{i_r}$$

sea invariante para cualquier cambio de base, es decir que si $t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}}$ son los valores de los escalares del sistema, para una nueva base $\{e^{i'}\}$ y su dual $\{e_{i'}\}$, entonces se debe tener

$$\begin{aligned} t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(r)}^{i_r} & \quad (6.4.4) \\ = t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(r)}^{i_r} . \end{aligned}$$

Demostración. La relación (6.4.4), es la que podemos sustituir las componentes de los vectores respecto de las bases $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ por sus expresiones en función de las componentes respecto de las bases $\{e_{i'}\}$ y $\{e^{i'}\}$, es equivalente a la relación

$$\begin{aligned} t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(r)}^{i_r} \\ = t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_{r'}}^{i'_{r'}} A_{i_{r'+1}}^{i'_{r'+1}} \dots A_{i_r}^{i'_r} x_{i'_1}^{(1)} \dots x_{i'_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i'_{r'+1}} \dots x_{(r)}^{i'_r} . \end{aligned}$$

Ahora bien, por hipótesis, los vectores $x^{(k)}$ y $x_{(l)}$ son arbitrarios, por tanto se deduce de aquí que (6.4.4) es equivalente a

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_{r'}}^{i'_{r'}} A_{i_{r'+1}}^{i'_{r'+1}} \dots A_{i_r}^{i'_r} t_{i'_{r'+1} \dots i'_r}^{i'_1 \dots i'_{r'}} ,$$

que es justamente la condición (6.4.2) necesaria y suficiente, del teorema anterior. ■

Teorema 6.4.3. Para que un sistema de n^r funciones escalares

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} \quad (i_k = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, r)$$

que tienen valores determinados para cada base que se elija en el espacio V de dimensión n , sean las componentes, respecto de la respectiva base, de un tensor afín r' veces contravariante y $r-r'$, veces covariante, es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los enteros p y q tales que $1 \leq p \leq r'$ $r'+1 \leq q \leq r$, los p vectores covariantes

$$x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$$

y los $q - r'$ vectores contravariantes

$$x_{(r'+1)}, \dots, x_{(q)},$$

los $n^{(r-q) + (r'-p)}$ escalares

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_p}^{(p)} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(q)}^{i_q} \quad (6.4.5)$$

sean las componentes de un tensor $r'-p$ veces contravariante y $r-q$ veces covariante.

Demostración. Este teorema se reduce al anterior porque la condición necesaria y suficiente para que los escalares (6.4.5) sean las componentes de un tensor $r'-p$ veces contravariante y $r-q$ veces covariante es que cualquiera que sean los $r'-p$ vectores covariantes

$$x^{(p+1)} \dots x^{(r')}$$

y los $r-q$ vectores contravariantes

$$x_{(q+1)}, \dots, x_{(r)},$$

el escalar

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_p}^{(p)} x_{i_{p+1}}^{(p+1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(r'+1)}^{i_{r'+1}} \dots x_{(q)}^{i_q} x_{(q+1)}^{i_{q+1}} \dots x_{(r)}^{i_r}$$

sea invariante para cualquier cambio de base. Esta última condición que se cumple para los vectores arbitrarios

$$x^{(1)}, \dots, x^{(r')}$$

y

$$x_{(r'+1)}, \dots, x_{(r)},$$

es necesaria y suficiente, según el teorema 6.4.2, para que los escalares

$$t_{i_{r'+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_{r'}}$$

sean las componentes de un tensor r' veces contravariantes y $r - r'$ veces covariante. ■

Aplicación. Dada una función bilineal cualquiera

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

las n^2 funciones escalares α_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) que para cada base (e_i) de V toman los valores

$$\alpha_{ij} = f(e_i, e_j)$$

son las componentes, respecto de dicha base, de un tensor dos covariante. En efecto, dados dos vectores contravariantes cualesquiera $x, y \in V$ cuyas componentes respecto de la base $\{e_i\}$ son (x^i) e (y^i) , se tiene

$$\alpha_{ij} x^i y^j = f(e_i, e_j) x^i y^j = f(x^i e_i, y^j e_j) = f(x, y).$$

Se ve así que $\alpha_{ij} x^i y^j$ es un escalar invariante por cuanto, cualquiera que sea la base $\{e_i\}$ que se considere, es igual al valor que toma la función f en el par (x, y) . Basta aplicar entonces el teorema 6.4.2.

En forma análoga se comprueba que si $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow \mathbb{K}$

es una función p -lineal, las n^p funciones escalares que para cada base $\{e_i\}$ de V toman los valores

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}),$$

son las componentes de un tensor n veces covariante.

Los resultados precedentes confirman el hecho ya conocido de que el espacio de las funciones p -lineales es el producto tensorial de p espacios idénticos a V^* (ejercicio 5.10.5).

6.5 Operaciones en el conjunto de los tensores afines.

En esta sección vamos a introducir operaciones mediante las cuales, dados dos tensores afines se determina un tercer tensor afín. Las definiciones que daremos permiten, dadas las compo- nentes de los tensores respecto de una base, determinar las com- ponentes del tensor resultante. También introduciremos aquí una operación mediante la cual dado un tensor r' -contravariante y r'' -covariante se obtiene un nuevo tensor $(r'-1)$ -contravariante y $(r''-1)$ -covariante.

Para simplificar la escritura, consideraremos en lo que si gue tensores pertenecientes a espacios tensoriales afines del tipo $\otimes_{r''}^{r'} V$. Sin embargo, las definiciones y consideraciones que

daremos en esta sección y en las dos siguientes se extienden de manera evidente a tensores pertenecientes a espacios tensoriales afines cualesquiera.

a) **Adición de tensores.** La *suma* de dos tensores t y u del mismo tipo, cuyas componentes para una base dada son

$$\begin{matrix} t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} \\ \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} u_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} \\ \end{matrix}$$

es el tensor del mismo tipo cuyas componentes respecto de la misma base son

$$w_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} + u_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}}.$$

Para probar que estas son las componentes de un tensor r' veces contravariante y r'' veces covariantes, basta aplicar el teorema 6.4.2. Se escribe entonces $w = t + u$.

b) **Multiplicación de tensores.** Dados los tensores afines t , r' veces contravariante y r'' veces covariante, y u , ρ' veces contravariante y ρ'' veces covariante, se llama *producto tensorial* de t y u al tensor w , $r' + \rho'$ veces contravariante y $r'' + \rho''$ veces covariante cuyas componentes respecto de la base (e_i) de V son

$$\begin{matrix} w_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} \\ \end{matrix} \begin{matrix} k_1 \dots k_{\rho'} \\ l_1 \dots l_{\rho''} \end{matrix} = \begin{matrix} t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{r'}} \\ \end{matrix} \begin{matrix} u_{l_1 \dots l_{\rho''}}^{k_1 \dots k_{\rho'}} \end{matrix}$$

donde las componentes de t y u que figuran en el segundo miembro son relativas a la misma base. Para reconocer el caracter tensorial del mismo sistema de escalares que resulta, basta aplicar también el teorema 6.4.2. Puede escribirse $w = t \otimes u$.

c) Contracción de los índices. Se llama *contracción* de índices a la siguiente operación: dado un tensor r' veces contravariante y r'' veces covariante de componentes

$$t^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{r''}}$$

respecto de una base $\{e_i\}$ de V , se eligen un índice superior i_k y un índice inferior j_l y luego se construye un nuevo tensor \bar{t} , $(r' - 1)$ veces contravariante y $(r'' - 1)$ veces covariante, cuyas componentes respecto de la misma base (e_i) son dadas por las fórmulas

$$\bar{t}^{i_1 \dots i_{k-1} \quad i_{k+1} \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{l-1} \quad j_{l+1} \dots j_{r''}} = t^{i_1 \dots i_{k-1} \quad \alpha \quad i_{k+1} \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{l-1} \quad \alpha \quad j_{l+1} \dots j_{r''}}, \quad (6.5.1)$$

en donde debe recordarse que el segundo miembro es una suma respecto del índice α . Se dice que el tensor \bar{t} resulta por contracción de los índices i_k y j_l . Debemos comprobar que la fórmula (6.5.1) proporciona efectivamente las componentes de un tensor $(r' - 1)$ veces contravariante y $(r'' - 1)$ veces covariante. Con ese fin vamos a establecer en primer lugar el siguiente lema.

Lema 6.5.1. Si s es un tensor de segundo orden, una vez contravariante y una vez covariante, de componentes s_i^j respecto de una base $\{e_i\}$ de V , entonces la contracción de los índices da lugar al escalar

$$s_i^i = s_1^1 + s_2^2 + \dots + s_n^n$$

que es invariante para todo cambio de la base de V .

Demostración. Si la base $\{e_i\}$ se cambia por la base $\{e_i'\}$ se obtiene

$$s_i'^i = A_j^i A_i^j s_i^j = \delta_j^i s_i^j = s_i^i. \quad \blacksquare$$

Podemos probar ahora que las fórmulas (6.5.1) definen a las componentes de un tensor $(r'-1)$ veces contravariante y $(r''-1)$ veces covariante.

En virtud del teorema 6.4.3, si $x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(r')}$ son $r'-1$ vectores covariantes y $x_{(1)}, \dots, x_{(l-1)}, x_{(l+1)}, \dots, x_{(r'')}$ son $r''-1$ vectores contravariantes cualesquiera, los escalares

$$s_{j_l}^{i_k} = t_{j_1}^{i_1} \dots t_{j_{k-1}}^{i_{k-1}} t_{j_k}^{i_k} t_{j_{k+1}}^{i_{k+1}} \dots t_{j_{r'}}^{i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{k-1}}^{(k-1)} x_{i_{k+1}}^{(k+1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(1)}^{j_1} \dots$$

$$\dots x_{(l-1)}^{j_{l-1}} x_{(l+1)}^{j_{l+1}} \dots x_{(r'')}^{j_{r''}}$$

son las componentes de un tensor de segundo orden una vez contravariante y una vez covariante. Por contracción de los índices del tensor s resulta, aplicando el lema anterior, que el es calar

$$t_{j_1}^{i_1} \dots t_{j_{k-1}}^{i_{k-1}} \alpha_{j_k}^{i_k} \dots \alpha_{j_{r'}}^{i_{r'}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{k-1}}^{(k-1)} x_{i_{k+1}}^{(k+1)} \dots x_{i_{r'}}^{(r')} x_{(1)}^{j_1} \dots x_{(l-1)}^{j_{l-1}} x_{(l+1)}^{j_{l+1}} \dots x_{(r'')}^{j_{r''}}$$

es invariante respecto de los cambios de base de V . El teorema 6.4.2 implica entonces que los escalares (6.5.1) son las comp o n e n t e s de un tensor $(r'-1)$ veces contravariante y $(r''-1)$ veces covariante.

Observación 1. La contracción simultánea de m pares de índices equivale a la contracción sucesivas de dichos pares. Conduce por tanto de un tensor r' veces contravariante y r'' veces covariante a un tensor $(r'-m)$ veces contravariante y $(r''-m)$ veces covarian te. En particular, la contracción simultánea de todos los pares

posibles de índices de un tensor r veces contravariante y r veces covariante proporciona un escalar invariante. Cambiando los pares que se contraen pueden obtenerse de esa manera $r!$ escalares invariantes.

Observación 2. El par $(\mathcal{E}(V), \varphi)$ donde $\varphi: V \times V^* \rightarrow \mathcal{E}(V)$ es definida por

$$[\varphi(v, v^*)](u) = v^*(u) \cdot v$$

es el producto tensorial $V \otimes V^*$

Si (e_i) es una base de V y (e^i) es la base dual, entonces los escalares α_i^j tales que

$$T(e_i) = \alpha_i^j e_j, \quad T \in \mathcal{E}(V),$$

es decir las componentes de $T(e_i)$, son tales que

$$T = \alpha_i^j \varphi(e_j, e^i)$$

y por tanto los α_i^j son las componentes de T respecto de la base formada por los elementos $\varphi(e_j, e^i) = e_j \otimes e^i$ de $\mathcal{E}(V)$. (α_i^j) es, además, la *matriz* de T respecto de la base (e_i) . La *contracción* del tensor T que es una vez contravariante y una vez covariante da lugar al escalar invariante

$$\alpha_i^i = \alpha_1^1 + \dots + \alpha_n^n$$

que no es otro que la *traza* de T .

6.6 Criterio general de tensorialidad

Teorema 6.6.1. Para que un sistema de $n^{r' + r''}$ funciones escalares

$$t_{\substack{i_1 \dots i_{r'} \\ j_1 \dots j_{r''}}} \quad , \quad (6.5.2)$$

donde cada uno de los índices puede tomar los valores $1, \dots, n$, que tienen valores determinados para cada base que se elija en el espacio V de dimensión n , sean las componentes de un tensor afín r' veces contravariante y r'' veces covariante, es necesario y suficiente que si se fijan arbitrariamente los enteros $k_1, \dots, k_{\rho'}$ y $l_1, \dots, l_{\rho''}$, de manera que sea $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{\rho'} \leq r'$ y $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{\rho''} \leq r''$, entonces los eslares

$$t_{\substack{i_1 \dots i_{k_1-1} \alpha_1 \ i_{k_1+1} \dots i_{k_2-1} \ \alpha_2 \ i_{k_2+1} \dots i_{k_{\rho'}-1} \ \alpha_{\rho'} \ i_{k_{\rho'}+1} \dots i_{r'} \\ j_1 \dots j_{l_1-1} \ \beta_1 \ i_{l_1+1} \dots j_{l_2-1} \ \beta_2 \ j_{l_2+1} \dots j_{l_{\rho''}-1} \ \beta_{\rho''} \ j_{l_{\rho''}+1} \dots j_{r''}}} \cdot s_{\substack{\beta_1 \dots \beta_{\rho''} \\ \alpha_1 \dots \alpha_{\rho'}}}$$

donde los $s_{\substack{\beta_1 \dots \beta_{\rho''} \\ \alpha_1 \dots \alpha_{\rho'}}$ son las componentes de un tensor cualquiera ρ'' veces contravariante y ρ' veces covariante, respecto de una base cualquiera, constituyan el sistema de componentes de un tensor $(r' - \rho')$ veces contravariante y $(r'' - \rho'')$ veces covariante, respecto de la misma base.

Demostración. La condición es necesaria porque si los escalares (6.5.1) son las componentes de un tensor t , el conjunto de escalares que resultan por la construcción del enunciado se obtienen multiplicando los tensores t y s y luego llevando a cabo la contracción de $(\rho' + \rho'')$ pares de índices. Dichos escalares son por tanto las componentes de un tensor $r' - \rho'$ veces contravariantes y $r'' - \rho''$ veces covariantes.

Demostremos ahora que la condición es suficiente. Supongase

mos pues que la condición se cumple. Dados los vectores contravariantes arbitrarios $x_{(1)}, \dots, x_{(\rho'')}$ y los vectores covariantes arbitrarios $x^{(1)}, \dots, x^{(\rho')}$, el tensor

$$s = x_{(1)} \otimes \dots \otimes x_{(\rho'')} \otimes x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(\rho')}$$

ρ'' veces contravariante y ρ' veces covariante tiene componentes de la forma

$$x_{(1)}^{\beta_1} \dots x_{(\rho'')}^{\beta_{\rho''}} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_{\rho'}}^{(\rho')}$$

Por tanto, en virtud de la hipótesis, los escalares

$$t_{j_1 \dots j_{\rho''}}^{i_1 \dots i_{\rho'}} x_{(1)}^{j_1} \dots x_{(\rho'')}^{j_{\rho''}} x_{i_{k_1}}^{(1)} \dots x_{i_{k_{\rho'}}}^{(\rho')}$$

son las componentes de un tensor $(\rho' - \rho'')$ veces contravariante y $(\rho'' - \rho')$ veces covariante. Luego, por el teorema 6.4.3, los escalares (6.5.2) son las componentes de un tensor ρ' veces contravariante y ρ'' veces covariante. ■

6.7 Tensores afines simétricos y antisimétricos.

Definición 6.7.1. Se dice que las *componentes* $t_{j_1 \dots j_{\rho''}}^{i_1 \dots i_{\rho'}}$ de un tensor, respecto de una determinada base (e_i) de V , son *simétricas* con respecto a dos índices cualesquiera, ambos superiores o ambos inferiores, si cuando se atribuye a todos los índices valores determinados, se obtiene el valor de una componente que es idéntico al valor de la componente, que resulta cuando se permutan los valores de los índices en cuestión.

Así, por ejemplo, si t es un tensor cuyas componentes respecto de una base dada son $t_{j_1}^{i_1} \ j_2^{i_2} \ i_3^{i_3}$ cumplen la condición

$$t_{j_1}^{i_1} \ j_2^{i_2} \ i_3^{i_3} = t_{j_1}^{i_3} \ j_2^{i_2} \ i_1^{i_1} ,$$

cualesquiera que sean los valores que se dé a los índices, entonces podemos decir que dichas componentes son simétricas respecto de los índices superiores i_1 e i_3 .

Definición 6.7.2. Se dice que las componentes $t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$ de un tensor, respecto de una determinada base $\{e_i\}$ de V , son *antisimétricas* con respecto de dos índices cualesquiera ambos superiores o ambos inferiores, si cuando se atribuye a todos los índices valores determinados, se obtiene el valor de una componente que es igual *pero de signo contrario* al valor de la componente que resulta cuando se permutan los valores de los índices en cuestión.

Así, las componentes $t_{j_1}^{i_1} \ j_2^{i_2} \ i_3^{i_3}$ son antisimétricas respecto de los índices superiores i_1 e i_3 si se cumple que

$$t_{j_1}^{i_1} \ j_2^{i_2} \ i_3^{i_3} = - t_{j_1}^{i_3} \ j_2^{i_2} \ i_1^{i_1} ,$$

cualesquiera que sean los valores que se dé a los índices.

Teorema 6.7.1. Si las componentes de un tensor, para una base dada $\{e_i\}$ de V , son simétricas (antisimétricas) respecto de dos índices ambos superiores o ambos inferiores, lo mismo ocurre para cualquier

otra base $\{e_i\}$ de V , y puede decirse por tanto que el tensor es *simétrico* (*antisimétrico*) respecto de esos dos índices.

Demostración. Supongamos que las componentes de un tensor t para la base $\{e_i\}$ sean simétricas respecto de dos índices superiores i_α e i_β , es decir que sea

$$t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_\alpha \dots i_\beta \dots i_r} = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_\beta \dots i_\alpha \dots i_r}, \quad (1 \leq \alpha < \beta \leq r).$$

Si $(e_{i'})$ es una nueva base que está relacionada con la base (e_i) mediante las fórmulas (6.4.1), las componentes del tensor t respecto de la base $\{e_{i'}\}$ son dadas por la fórmula (6.4.2). Permutando en ella los índices i'_α e i'_β resulta

$$\begin{aligned} t_{j'_1 \dots j'_r}^{i'_1 \dots i'_\beta \dots i'_\alpha \dots i'_r} &= A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_\beta}^{i_\beta} \dots A_{i'_\alpha}^{i_\alpha} \dots A_{i'_r}^{i_r} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_r}^{j_r} t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_\alpha \dots i_\beta \dots i_r} \\ &= A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_\alpha}^{i_\alpha} \dots A_{i'_\beta}^{i_\beta} \dots A_{i'_r}^{i_r} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_r}^{j_r} t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_\beta \dots i_\alpha \dots i_r} \\ &= t_{j'_1 \dots j'_r}^{i'_1 \dots i'_\alpha \dots i'_\beta \dots i'_r}, \end{aligned}$$

y por tanto las componentes de t respecto de la base $(e_{i'})$ son simétricas respecto de los índices i'_α e i'_β . ■

En forma semejante se trata el caso de la antisimetría.

Definición 6.7.3. Se dice que un tensor contravariante o covariante es *simétrico* (*antisimétrico*) si son simétricas (*antisimétricas*) sus componentes respecto de cada par de índices, cualquiera que sea la base que se considere, para lo cual basta que lo sean para una base particular.

Se observará que un tensor contravariante o covariante es *simétrico* si una permutación cualquiera de los índices de sus componentes las deja invariantes; y es *antisimétrico* si una tal permutación deja invariante a los valores de dichas componentes o cambia sus signos, según la permutación sea par o impar respectivamente.

Aplicación. Sabemos que el par $(\mathcal{B}(V, V), \varphi)$, donde la aplicación bilineal $\varphi: V^* \times V^* \rightarrow \mathcal{B}(V, V)$ es definida por

$$[\varphi(u^*, v^*)](u, v) = u^*(u) v^*(v), \quad u, v \in V, \quad u^*, v^* \in V^*,$$

es el producto tensorial de V^* y V^* . Por tanto las funciones bilineales sobre V pueden considerarse como tensores dos veces covariantes. Si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{e^i\}$ es la base dual las funciones bilineales $\varphi(e^i, e^j)$ constituyen una base de $\mathcal{B}(V, V)$. Si $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ es una función bilineal sobre V y $u = u^i e_i$, $v = v^j e_j$ son dos vectores cualesquiera de V , se tiene

$$\Phi(u, v) = \Phi(u^i e_i, v^j e_j) = \Phi(e_i, e_j) u^i v^j.$$

Si introducimos las notaciones

$$\alpha_{ij} = \Phi(e_i, e_j),$$

tendremos

$$\Phi(u, v) = \alpha_{ij} u^i v^j, \tag{6.7.1}$$

que es la expresión de Φ mediante una forma bilineal en las variables u^i, v^j , componentes de u y v . De (6.7.1) se deduce que

$$\Phi(u, v) = \alpha_{ij} e^i(u) e^j(v) = \alpha_{ij} [\varphi(e^i, e^j)](u, v)$$

cualesquiera que sean u y v . Luego

$$\Phi = \alpha_{ij} \varphi(e^i, e^j)$$

que es la expresión de Φ mediante la base $\{\varphi(e^i, e^j)\}$. Las componentes de Φ en esa base son los coeficientes α_{ij} de la forma bilineal (6.7.1). Resulta de esta manera que la condición para que el tensor Φ sea simétrico es que sea

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Estas son también las condiciones para que la función bilineal Φ sea simétrica, es decir para que sea

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

Análogamente, el tensor Φ es antisimétrico si

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Esta condición es necesaria y suficiente para que sea

$$\Phi(x, y) = -\Phi(y, x),$$

en cuyo caso se dice que la función Φ es antisimétrica.

Así, por ejemplo, una función definida sobre \mathbb{F}^2 por la fórmula

$$\Phi(x, y) = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}$$

es antisimétrica. Semejantemente, es antisimétrica la función

$$\Phi(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

§ 7. Tensores euclidianos

En este párrafo V designa a un espacio euclideo de dimensión n , es decir a un espacio real, de producto interno y de dimensión finita.

El producto interno de dos vectores x e y , que hasta ahora hemos designado por (x, y) , será designado en adelante, de conformidad con una práctica corriente, por $x \cdot y$.

7.1 Componentes contravariantes y covariantes de un vector de un espacio euclideo. Vectores euclidianos.

Puesto que V es un espacio euclideo de dimensión finita existe, según el corolario del teorema 17.8.1, Pte.I, un isomorfismo natural

$$\varphi : \mathcal{L}(V) \rightarrow V$$

que a cada vector covariante $x^* \in \mathcal{L}(V)$ le hace corresponder el vector $w = \varphi(x^*) \in V$, contravariante, tal que

$$x^*(y) = w \cdot y, \quad \forall y \in V.$$

El isomorfismo así definido puede deducirse también del hecho conocido de que V es dual de sí mismo respecto del producto escalar definido por

$$\langle w, y \rangle = w \cdot y,$$

en cuyo caso puede aplicarse el teorema 5.3.1, Pte.I, y se obtiene un isomorfismo natural de V , considerado como dual de sí mismo, sobre $\mathcal{L}(V)$, isomorfismo que coincide con φ .

Si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{e^{*i}\}$ es la base dual de $\mathcal{L}(V)$ $\{\varphi(e^{*i})\}$ es una base de V tal que

$$\varphi(e^{*i}) \cdot e_j = e^{*i}(e_j) = \delta_j^i.$$

Resulta entonces (ver definición 17.8.1, Pte.I) que

$$\varphi(e^{*i}) = e^i, \quad (7.1.1)$$

es decir que $\{\varphi(e^{*i})\}$ es la base $\{e^i\}$ recíproca de la base $\{e_i\}$. Por consiguiente, en el isomorfismo a que antes hemos hecho referencia, los vectores covariantes e^{*i} de la base dual de $\{e_i\}$ se aplican sobre los vectores contravariantes e^i de la base recíproca de $\{e_i\}$.

Si se cambia la base $\{e_i\}$ por la base $\{e_{j'}\}$ mediante las fórmulas

$$e_i = A_i^{j'} e_{j'}, \quad e_{j'} = A_{j'}^i e_i, \quad (7.1.2)$$

la base dual $\{e^{*i}\}$ de la base $\{e_i\}$ cambia en la base dual $\{e^{*j'}\}$ de la base $\{e_{j'}\}$, mediante las fórmulas (6.3.6) en las cuales, según convinimos al comienzo de la sección 6.2, $\{e^i\}$ y $\{e^{j'}\}$ designan a las bases duales de $\{e_i\}$ y $\{e_{j'}\}$, que ahora estamos representando por $\{e^{*i}\}$ y $\{e^{*j'}\}$, por cuanto, según hemos señalado, puesto que el espacio V es de producto interno $\{e^i\}$ y $\{e^{j'}\}$ son las bases recíprocas de $\{e_i\}$ y $\{e_{j'}\}$.

Si a los dos miembros de cada una de dichas fórmulas les aplicamos el isomorfismo φ resultan las fórmulas de cambio de las bases recíprocas.

$$e^i = A_{j'}^i e^{j'}, \quad e^{j'} = A_i^{j'} e^i. \quad (7.1.3)$$

En virtud del isomorfismo φ cada vector contravariante x de V puede identificarse con el vector covariante $x^* = \varphi^{-1}(x)$ de $\mathcal{L}(V)$. Esta identificación hace innecesaria, en el caso de un espacio euclideo, la distinción entre vectores contravariantes y covariantes, porque unos y otros pueden considerarse como pertenecientes al mismo espacio V . Podemos, en cambio, introducir las nociones de componentes contravariantes y covariantes de un vector de V .

Definición 7.1.1. Dada una base $\{e_i\}$ del espacio euclideo V , las componentes de un vector cualquiera $x \in V$ respecto de esa base las designaremos por x^1, \dots, x^n (con índices superiores o contravariantes) y las denominaremos *componentes contravariantes* de x .

Llamaremos *componentes covariantes* de x , y las designaremos por x_1, \dots, x_n (con índices inferiores o covariantes) a las componentes de $\varphi^{-1}(x)$ respecto de la base dual $\{e^{*i}\}$. Puesto que

$$\varphi^{-1}(x) = x_i e^{*i},$$

si aplicamos a ambos miembros el isomorfismo φ y tenemos en cuenta la fórmula (9.1.1) resulta

$$x = x_i e^i,$$

Por tanto: *Las componentes covariantes de un vector x son sus componentes respecto de la base recíproca de (e_i) .*

Definición 7.1.2. Se llama *vector euclideo* del espacio vectorial euclideo V al conjunto $\{x, x^*\}$ formado por un vector cualquiera $x \in V$ y por el vector $x^* = \varphi^{-1}(x) \in V^*$, con el cual se identifica x por el isomorfismo φ . El vector euclideo $\{x, x^*\}$ se representa por x . Sus componentes contravariantes y covariantes son las componentes de x que fueron introducidas con esos mismos nombres en la definición 7.1.1.

Vamos a obtener ahora las relaciones entre las componentes contravariantes x^i y las componentes covariantes x_j de un vector euclideo, relativas a una base $\{e_i\}$ de V .

Entre los vectores de las bases $\{e_i\}$ y $\{e^j\}$ existen relaciones de la forma

$$e^j = g^{ij} e_i, \quad e_i = g_{ij} e^j, \quad (7.1.4)$$

donde (g^{ij}) y (g_{ij}) , o sea las matrices de transformación de una base en su recíproca, son regulares e inversa una de la otra, de modo que se cumple la relación

$$g_{ij} g^{ik} = \delta_i^k. \quad (7.1.5)$$

De (7.1.4) y de las conocidas propiedades de las bases recíprocas (ver sección 17.8, Pte. I), en particular de la relación

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j,$$

se deduce que

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j \quad \text{y} \quad g_{ij} = e_i \cdot e_j \quad (7.1.6)$$

de donde resulta que $g^{ij} = g^{ji}$ y $g_{ij} = g_{ji}$.

Además, puesto que

$$x = x^i e_i \quad y \quad x = x_j e^j, \quad (7.1.7)$$

se tiene que $x^i = x \cdot e^i$ y $x_j = x \cdot e_j$. Luego,

$$x^i = x_j e^j \cdot e^i = g^{ij} x_j \quad y \quad x_j = x^i e_i \cdot e_j = g_{ij} x^i. \quad (7.1.8)$$

que son las relaciones buscadas.

7.2 Tensores euclidianos. Diversas clases de componentes.

Las consideraciones de la sección precedente pueden ser generalizadas de la manera siguiente:

Consideremos en primer término un tensor afín t contravariante de orden q , que sea *descomponible*, es decir que sea el pro-tensorial de q vectores contravariantes:

$$t_{(1)} = x_{(1)} \otimes \dots \otimes x_{(q)}. \quad (7.2.1)$$

A cada uno de los vectores $x_{(i)}$ le corresponde, por lo dicho en la sección anterior, un vector covariante $x^{*(i)} = \varphi^{-1}(x_{(i)})$. Identificaremos entonces entre sí a todos los tensores afines que se obtienen cuando se sustituye en la expresión (7.2.1) de t uno o varios de los vectores $x_{(1)}, \dots, x_{(q)}$ por el correspondiente vector covariante. Los tensores afines que así resultan, junto con t , constituyen un conjunto que se denomina *tensor euclideo* que es representado por cualquiera de los elementos que lo forman. Las componentes de los diversos tensores identificados entre sí son entonces las componentes de diversas clases (contravariantes, covariantes y mixtas) del respectivo tensor euclideo. Es fácil observar que *las componentes de diversas clases serán las del tensor t de $V \otimes \dots \otimes V$ (q factores), referido a la base*

que resulta de la base $\{ e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \}$ cuando se substituyen los vectores e_{i_k} , para valores de k convenientemente elegidos, por los respectivos vectores e^{i_k} de la base recíproca. (Recordar el corolario 1 del teorema 5.9.2).

Ejemplos. Designemos por $x_{(k)}^i$ a las componentes contravariantes del vector $x_{(k)}^i$. Las componentes contravariantes del tensor t dado por (7.2.1) son

$$t^{i_1 \dots i_q} = x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(q)}^{i_q}. \quad (7.2.2)$$

Si representamos por $x_i^{(k)}$ a las componentes covariantes del tensor $x_{(k)}^i$, las componentes covariantes del tensor t son

$$t_{i_1 \dots i_q} = x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_q}^{(q)}. \quad (7.2.3)$$

Los siguientes con ejemplos de componentes mixtas

$$t_{i_1}^{i_2 \dots i_q} = x_{i_1}^{(1)} x_{(2)}^{i_2} \dots x_{(q)}^{i_q} \quad (7.2.4)$$

$$t_{i_1 i_2}^{i_3 \dots i_q} = x_{(1)}^{i_1} x_{i_2}^{(2)} x_{(3)}^{i_3} \dots x_{(q)}^{i_q} \quad (7.2.5)$$

$$t_{i_1 i_2 i_3}^{i_4 \dots i_q} = x_{(1)}^{i_1} x_{i_2}^{(2)} x_{i_3}^{(3)} x_{(4)}^{i_4} \dots x_{(q)}^{i_q}. \quad (7.2.6)$$

Las fórmulas (7.1.8) permiten expresar las componentes de cualquier clase en términos de las componentes de otra clase cualquiera. Así, por ejemplo, si se quiere expresar las componentes del tipo (7.2.3) en función de las componentes (7.2.6), basta con substituir en (7.2.3) las componentes $x_{i_1}^{(1)}$, $x_{i_4}^{(4)}$, ...

$x_{i_q}^{(q)}$ por sus expresiones en términos de las componentes contravariantes y resulta

$$t_{i_1 \dots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_4 j_4} \dots g_{i_q j_q} x_{(1)}^{j_1} x_{i_2}^2 x_{i_3}^3 x_{(4)}^{j_4} \dots x_{(q)}^{j_q}$$

$$g_{i_1 j_1} g_{i_4 j_4} \dots g_{i_q j_q} t_{i_2 i_3}^{j_1 i_4 \dots j_q}. \quad (7.2.7)$$

Inversamente, para expresar las componentes del tipo (7.2.6) mediante las componentes del tipo (7.2.3), basta con sustituir en (7.2.6), las componentes $x_{(1)}^{i_1}, x_{(4)}^{i_4}, x_{(5)}^{i_5}, \dots, x_{(q)}^{i_q}$ por sus expresiones en términos de las componentes covariantes. Se obtiene entonces

$$t_{i_2 i_3}^{i_1 i_4 i_q} = g^{i_1 j_1} g^{i_4 j_4} \dots g^{i_q j_q} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} x_{j_3}^{(3)} x_{j_4}^{(4)} \dots x_{j_q}^{(q)}$$

$$= g^{i_1 j_1} g^{i_4 j_4} \dots g^{i_q j_q} t_{j_1 i_2 i_3 j_4 \dots j_q} \quad (7.2.8)$$

Las fórmulas siguientes constituyen nuevos ejemplos de expresión de componentes de un tipo mediante componentes de otro tipo.

$$\left. \begin{aligned} t_{i_2 i_3}^{i_1 i_4 \dots i_q} &= g^{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} t_{j_1}^{i_2 j_3 i_4 \dots i_q} \\ t_{i_1}^{i_2 i_3 i_4 \dots i_q} &= g_{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 j_3} t_{j_1}^{i_2 j_3 i_4 \dots i_q} \end{aligned} \right\} (7.2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{i_1 \dots i_q} &= g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_q j_q} t^{j_1 \dots j_q} \\ t^{i_1 \dots i_q} &= g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_q j_q} t_{j_1 \dots j_q} \end{aligned} \right\} (7.2.10)$$

El examen de las fórmulas (7.2.7) a (7.2.10) muestra que si se multiplica la componente genérica de un cierto tipo por $g_{i_k j_k}$ (o bien $g_{i_k}^{j_k}$) donde i_k es un índice superior (resp. inferior) de dicha componente, y luego se sustituye ese índice superior (inferior) i_k por j_k , de donde resulta una sumación respecto del último índice de conformidad con el convenio de Einstein, se obtiene una componente genérica del tensor, en la que el índice i_k figura en la posición inferior (resp. superior). En forma abreviada podemos decir que la multiplicación por $g_{i_k j_k}$ ($g^{i_k j_k}$) seguida de una sumación respecto de j_k permite bajar (resp. subir) el índice i_k .

Consideremos ahora un tensor contravariante cualquiera t (no necesariamente descomponible). Tal tensor puede expresarse como una suma de p productos tensoriales de q vectores cada uno. Cada uno de esos productos define a un tensor euclideano en la forma que fué precedentemente descrita. Consideremos los tensores afines de un mismo tipo asociados o pertenecientes a esos tensores euclideanos. La suma de ellos será un tensor del mismo tipo asociado al tensor t . De esa manera quedarán asociados a t los elementos de un conjunto de tensores afines, las componentes de cada uno de los cuales se deducirán de las componentes de t , $t^{i_1 \dots i_q}$, mediante fórmulas semejantes a la primera de las fórmulas (7.2.9) o la primera de las fórmulas (7.2.10), lo cual es una consecuencia del carácter lineal de esas fórmulas respecto de las componentes $t^{i_1 \dots i_q}$. Para aclarar esta última aseveración consideremos un ejemplo. Sea

$$t = \sum_{i=1}^p x_{(1i)} \otimes x_{(2i)} \otimes \dots \otimes x_{(qi)} .$$

Sus componentes respecto de una base (e_i) de V serán

$$t^{i_1 \dots i_q} = \sum_{i=1}^p x_{(1i)}^{i_1} x_{(2i)}^{i_2} \dots x_{(qi)}^{i_q}.$$

Supongamos que consideramos el tensor afín asociado con t , dos veces covariante y $(n-2)$ veces contravariante, perteneciente al espacio $V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V$. Empleando para cada sumando de la expresión

$$t^{i_1 \dots i_q} g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \dots g_{i_q j_q} = \sum_{i=1}^p x_{(1i)}^{i_1} x_{i_2}^{(2i)} x_{i_3}^{(3i)} x_{(4i)}^{i_4} \dots x_{(qi)}^{i_q},$$

que da las componentes de ese tensor, la fórmula

$$\begin{aligned} x_{(1i)}^{i_1} x_{i_2}^{(2i)} x_{i_3}^{(3i)} x_{(4i)}^{i_4} \dots x_{(qi)}^{i_q} &= t^{i_1 \dots i_q} g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \dots g_{i_q j_q} \\ &= g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \dots g_{i_q j_q} t^{i_1 j_2 j_3 \dots j_q} = g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} x_{(1i)}^{i_1} x_{(2j_2)}^{j_2} x_{(3j_3)}^{j_3} x_{(4j_4)}^{i_4} \dots x_{(qj_q)}^{i_q}, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} t^{i_1 \dots i_q} g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \dots g_{i_q j_q} &= g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \sum_{i=1}^p x_{(1i)}^{i_1} x_{(2i)}^{j_2} x_{(3i)}^{j_3} x_{(4i)}^{i_4} \dots x_{(qi)}^{i_q} \\ &= g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} t^{i_1 j_2 j_3 \dots j_q}. \end{aligned}$$

En forma semejante pueden obtenerse las componentes de los tensores asociados a otros tipos. De estas fórmulas resulta que los tensores asociados a t no dependen de la manera en que se supone que t es expresado como suma de productos tensoriales de vectores, y por tanto puede decirse que están asociados de una manera esencial o intrínseca. Diremos entonces que t y los tensores afines asociados a él en la forma antes descrita definen a un tensor euclídeano cuyas componentes de cada tipo son las componentes del tensor afín de ese tipo asociado a t .

Como resultado de las consideraciones anteriores podemos establecer, además, la siguiente proposición:

Teorema 7.2.1. Las componentes contravariantes, covariantes y mixtas de un tensor euclideo se deducen unas de otras multiplicando por g_{ij} o por g^{ij} según se desea bajar o subir un índice, y llevando a cabo luego una sumación respecto de uno de los índices i, j y del índice del tensor cuya posición se debe modificar. Esta operación puede repetirse cuantas veces sea necesario para obtener los diferentes tipos de componentes.

Observación 1. Las componentes de un tipo dado de un tensor euclideo, respecto de una base dada \mathcal{E} de V , son idénticas a las componentes del tensor de $\otimes^q V$ que le pertenece, respecto de una base $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_q$, donde las bases \mathcal{E}_i son iguales a la base \mathcal{E} salvo un número de ellas, que son iguales a la base recíproca de \mathcal{E} . Así por ejemplo las componentes del tipo

$t^{i_1 \dots i_q}_{i_2 \dots i_q}$ de un tensor euclideo de orden q son las componentes del tensor de $\otimes^q V$ que le pertenece, respecto de la base constituida por los tensores de la forma $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes e_{i_4} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$.

Observación 2. Los criterios de tensorialidad dados anteriormente para los tensores afines pueden aplicarse sin variación para reconocer si un sistema dado de funciones escalares definidas sobre el conjunto de las bases de V , son las componentes, de un determinado tipo, de un tensor euclideo.

Ejercicio 7.2.1. Obtener las 12 relaciones que vinculan entre sí a las componentes de los tipos $t_{i_1 i_2}$, $t^{i_1 i_2}$, $t_{i_1}^{i_2}$ y $t^{i_1}_{i_2}$ de un tensor euclideo t de segundo orden.

7.3 Tensores euclideos simétricos y antisimétricos.

En la sección 6.7 hemos tratado acerca de los tensores afines simétricos y antisimétricos. En especial, ese concepto fué introducido en la definición 6.7.3. En el caso de los tensores euclideos tenemos la siguiente definición.

Definición 7.3.1. Se dice que un tensor euclideo es *simétrico* (*antisimétrico*) si es simétrico (antisimétrico) el tensor afín *contravariante* que le está asociado.

Teorema 7.3.1. Para que un tensor euclideo sea simétrico (antisimétrico) es necesario y suficiente que sea simétrico (antisimétrico) el tensor afín *covariante* que le está asociado.

Demostración. Es evidente que basta que demos demos la proposición para un tensor de orden 2.

Las relaciones

$$t_{bk} = g_{bi} g_{kj} t^{ij} \quad \text{y} \quad t^{ij} = g^{ib} g^{jk} t_{bk}$$

prueban que si se cumplen las relaciones $t^{ij} = t^{ji}$ para i y j cualesquiera entonces es $t_{bk} = t_{kb}$ para b y k cualesquiera; y que si $t^{ij} = -t^{ji}$, entonces es $t_{bk} = -t_{kb}$. ■

Deberá observarse que los tensores afines covariante y contravariante asociados a un tensor euclideo pueden ser simétricos o antisimétricos respecto de dos índices cualesquiera sin que ésto ocurra con los tensores mixtos asociados.

7.4 Tensores euclideos referidos a bases ortonormales. Tensores cartesianos.

Si en el espacio vectorial V se considera exclusivamente bases ortonormales entonces desaparece toda diferencia entre las componentes de diferentes tipos de un tensor euclideo. Es esto lo que establece la proposición siguiente.

Teorema 7.4.1. Dado un tensor euclideo, sus componentes de un tipo dado, respecto de una base ortonormal del espacio euclideo V , son idénticas a sus componentes de cualquier otro tipo, respecto de la misma base.

Demostración. En efecto, si $\{e_i\}$ es una base ortonormal cualquiera de V , se tiene

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} ,$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker.

Por tanto, cada base ortonormal es recíproca de sí misma. Resulta de allí, en virtud de la observación que precedió a los ejemplos de la sección 7.2, que las componentes de cualquier tipo son idénticas a las componentes de cualquier otro tipo. El mismo hecho se deduce si se observa que

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad \text{y} \quad g^{ij} = e^i \cdot e^j = \delta^{ij} ,$$

y que por consiguiente se tiene

$$t_{\dots i \dots}^{\dots} = g_{i b} \quad t_{\dots \dots}^{\dots b \dots} = \delta_{i b} \quad t_{\dots \dots}^{\dots b \dots} = t_{\dots \dots}^{\dots i \dots} ,$$

y

$$t_{\dots \dots}^{\dots i \dots} = g^{i b} \quad t_{\dots b \dots}^{\dots \dots} = \delta^{i b} \quad t_{\dots b \dots}^{\dots \dots} = t_{\dots i \dots}^{\dots \dots} .$$

Es decir que una componente cualquiera no cambia de valor si uno de sus índices pasa de una posición contravariante a una covariante o viceversa. ■

Como consecuencia, y en tanto se trate exclusivamente de bases ortonormales, puede considerarse únicamente las componentes de un tipo, por ejemplo las componentes covariantes, las que toman el nombre de *componentes cartesianas*. En esas circunstancias los tensores euclidianos se denominan *tensores cartesianos*.

7.5. El tensor fundamental o tensor métrico.

Recordemos que, como resulta de la aplicación **D** de la sección 5.2, el espacio vectorial $\mathcal{B}(V, V)$ de las funciones bilineales definidas sobre V puede considerarse como el producto tensorial $V^* \otimes V^*$, cuando la aplicación universal se define por

$$[\varphi(u^*, v^*)](u, v) = \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle .$$

Ahora bien, según se sabe (**Pte. I**, sección 5.3), por cuanto V es de dimensión finita, su dual V^* puede identificarse con $\mathcal{L}(V)$ de manera que cada vector $u^* \in V^*$ se identifica con el elemento de V , que también designaremos por u^* , tal que $u^*(u) = \langle u^*, u \rangle$. Por consiguiente, la relación anterior puede escribirse en la forma

$$[\varphi(u^*, v^*)](u, v) = u^*(u) \cdot v^*(v).$$

Teorema 7.5.1. La aplicación bilineal

$$\gamma : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

que a cada par de vectores x, y de V le hace corresponder el número real $x \cdot y$, es decir que *la función producto interno* (también llamada *producto escalar*) de dos vectores euclidianos x e y , es un tensor dos veces covariante que pertenece a un tensor euclidiano de segundo orden cuyas componentes respecto de la base $(\varphi(e^{*i}, e^{*j}))$ de $\mathcal{B}(V)$ asociada con la base $\{e_i\}$ de V son los números

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j.$$

Sus componentes contravariantes son los números

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j,$$

y sus componentes mixtas son

$$g_j^i = \delta_j^i.$$

Demostración. La función bilineal $\gamma \in \mathcal{B}(V)$ puede considerarse como un tensor dos veces covariante que pertenece a un tensor euclidiano que designaremos con la misma letra. Dada la base $\{e_i\}$ de V y la correspondiente base dual $\{e^{*i}\}$ de V^* , si designamos por γ_{ij} a las componentes covariantes de γ , podremos escribir

$$\gamma = \gamma_{bk} e^{*b} \otimes e^{*k} = \gamma_{bk} \varphi(e^{*b}, e^{*k}).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \gamma(e_i, e_j) &= [\gamma_{bk} \varphi(e^{*b}, e^{*k})] (e_i, e_j) \\ &= \gamma_{bk} [\varphi(e^{*b}, e^{*k})] (e_i, e_j) = \gamma_{bk} e^{*b}(e_i) e^{*k}(e_j) \\ &= \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Ahora bien, por definición de γ es

$$\gamma(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j = g_{ij}.$$

Por tanto se tiene

$$g_{ij} = \gamma_{ij}.$$

Se deducen de aquí, según las reglas ya conocidas, las otras componentes del tensor euclideo γ :

$$\gamma^{ij} = g^{ib} g^{jk} \gamma_{bk} = g^{ib} g^{jk} g_{bk} = g^{ij} \delta_b^j = g^{ij},$$

donde, como ya sabemos, es $g^{ij} = e^i \cdot e^j$, en que $\{e^i\}$ es la base recíproca de $\{e_i\}$; y

$$\gamma_j^i = g^{ib} \gamma_{bj} = g^{ib} g_{bj} = \delta_j^i. \quad \blacksquare$$

Definición 7.5.1. El tensor euclideo de segundo orden γ que respecto de una base $\{e_i\}$ de V tiene las componentes g_{ij} , g^{ij} y g_j^i se llama *tensor fundamental del espacio vectorial euclideo V* o también *tensor métrico de V* . Dicho tensor se identifica con la función bilineal $\gamma: (x, y) \mapsto x \cdot y$ que se expresa mediante la forma cuadrática fundamental $\gamma(x, y) = x \cdot y = (x^i e_i) \cdot (y^j e_j) = x^i y^j (e_i \cdot e_j) = g_{ij} x^i y^j$, cuyos coeficientes son justamente las componentes covariantes de γ . Otras expresiones de γ pueden obtenerse en términos de las componentes covariantes de los vectores x e y :

$$\gamma(x, y) = (x_i e^i) \cdot (y^j e_j) = \delta_j^i x_i y^j = x_i y^i$$

$$\gamma(x, y) = (x_i e^i) \cdot (y_j e^j) = g^{ij} x_i y_j.$$

Observaremos por último que las componentes cartesianas del tensor fundamental son los símbolos de Kronecker δ_{ij} que también pueden escribirse en las formas contravariante y mixta δ^{ij} y δ_j^i .

***Ejercicio 7.5.1.** Probar mediante la aplicación del teorema 6.4.1, que el conjunto de números $\{g_{ij}\}$ que para cada base $\{e_i\}$ de V , cuya base recíproca es $\{e^i\}$, tienen los valores

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j,$$

constituye el conjunto de las componentes covariantes de un tensor euclideo de segundo orden cuyas componentes contravariantes son los números

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j,$$

y cuyas componentes mixtas son

$$g_j^i = \delta_j^i.$$

***Ejercicio 7.5.2.** Demostrar que si g designa al determinante de la matriz (g^{ij}) , entonces el determinante de la matriz (g_{ij}) es igual a $1/g$, y que se cumplen las fórmulas

$$g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{g} \quad \text{y} \quad g_{ij} = \beta_{ij} g,$$

donde α^{ij} es el cofactor de g_{ij} en el determinante de la matriz (g_{ij}) y β_{ij} es el cofactor de g^{ij} en el determinante de la matriz (g^{ij}) . (Para tratar esta cuestión debe recordarse la definición 7.1.1, Pte.I, y el teorema de Cramer 7.3.1, Pte.I).

7.6 Operaciones en el conjunto de los tensores euclidianos.

La circunstancia conocida de que las componentes de un tipo cualquiera de un tensor euclideo pueden expresarse linealmente en términos de las componentes de cualquier otro tipo, por ejemplo de las componentes contravariantes, haciendo uso para ello de las componentes del tensor fundamental, permite extender a los tensores euclidianos las operaciones del álgebra tensorial que hemos definido en la sección 6.5 para los tensores afines.

Adición. Dados dos tensores euclidianos cualesquiera, su suma es, por definición, el tensor euclideo al cual pertenece el tensor afín contravariante que es suma de los tensores afines contravariantes que pertenecen a los tensores euclidianos dados. El tensor afín de un tipo cualquiera que pertenece a la suma de dos tensores euclidianos es la suma de los tensores afines del mismo tipo pertenecientes a dichos tensores euclidianos. En efecto, si los tensores euclidianos dados tienen por componentes contravariantes a $t^{i_1 \dots i_q}$ y $u^{i_1 \dots i_q}$, el tensor suma tiene por componentes contravariantes a

$$s^{i_1 \dots i_q} = t^{i_1 \dots i_q} + u^{i_1 \dots i_q}.$$

Mediante sucesivas multiplicaciones por componentes adecuadas del tensor fundamental y contracciones de índices se obtienen

relaciones análogas para las componentes, de todos los tipos, del tensor suma. Así por ejemplo

$$s_{i_1 \dots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_q j_q} s^{j_1 \dots j_q} = t_{i_1 \dots i_q} + u_{i_1 \dots i_q}.$$

Multiplicación. El producto de dos tensores euclideanos de órdenes q y q' es el tensor euclideano de orden $q + q'$ al cual pertenece el tensor afín contravariante que es el producto de los tensores afines contravariantes pertenecientes a los tensores euclideanos dados. Como en el caso de la adición, si

$$p^{i_1 \dots i_{q+q'}} = t^{i_1 \dots i_q} u^{i_{q+1} \dots i_{q+q'}},$$

entonces se tiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned} p^{i_1 \dots i_q}_{i_{q+1} \dots i_{q+q'}} &= g_{i_{q+1} j_{q+1}} \dots g_{i_{q+q'} j_{q+q'}} t^{i_1 \dots i_q} u^{j_{q+1} \dots j_{q+q'}} \\ &= t^{i_1 \dots i_q} u_{i_{q+1} \dots i_{q+q'}}, \end{aligned}$$

y pueden obtenerse relaciones semejantes para las componentes de otros tipos.

Contracción. Dado un tensor euclideano t cuyas componentes contravariantes son $t^{i_1 \dots i_q}$, si elegimos dos índices cualesquiera, por ejemplo los dos primeros i_1 e i_2 , podemos obtener un nuevo tensor euclideano c , el cual diremos que resulta del primero por contracción de esos dos índices, haciendo uso del siguiente procedimiento. Consideramos primero uno cualquiera de los tensores afines que pertenecen a t en cuyas componentes uno de los índices i_1 o i_2 está en posición covariante y el otro en posición contravariante, por ejemplo el de componentes

$$t_{i_1}^{i_2 i_3 \dots i_q}, \quad (7.6.1)$$

es decir el perteneciente a $V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V$. Llevamos a cabo luego la contracción de este tensor respecto de i_1 e i_2 . Se obtiene entonces un tensor de orden $q-2$ cuyas componentes son

$$c^{j_1 \dots j_{q-2}} = t_i^{i_1 j_1 \dots j_{q-2}}. \quad (7.6.2)$$

El tensor euclideano al cual pertenece el tensor que acabamos de obtener será por definición el tensor c que resulta del tensor t por contracción de los índices i_1 e i_2 .

Debemos probar en primer lugar, para justificar la presente definición, que si en vez de haber partido del tensor de componentes (7.6.1) se hubiera partido del de componentes

$$t_{i_2}^{i_1 i_3 \dots i_q}$$

se habría llegado a las mismas componentes (7.6.2). En efecto, puesto que

$$t_{i_1}^{i_2 j_1 \dots j_{q-2}} = g_{i_1 j_1} t^{j_1 i_2 j_1 \dots j_{q-2}},$$

se puede escribir

$$t_i^{i_1 j_1 \dots j_{q-2}} = g_{i j_1} t^{j_1 i_1 j_1 \dots j_{q-2}} = t_j^{j_1 i_1 \dots j_{q-2}},$$

y por consiguiente se deduce que

$$c^{j_1 \dots j_{q-2}} = t_j^{j_1 i_1 \dots j_{q-2}}, \quad (7.6.3)$$

lo cual demuestra nuestra aseveración.

En segundo lugar, se deduce inmediatamente de las relaciones (7.6.2) o (7.6.3) que las componentes de otros tipos del tensor c se obtienen por contracción de los índices i_1 e i_2 en los demás tensores afines pertenecientes a t cuyas componentes presentan a uno de esos índices en posición contravariante y al otro

en posición covariante. Así por ejemplo, resulta de (7.6.2) que

$$c_{j_2}^{j_1} \quad j_3 \dots j_{q-2} = t_i^{i_1} \quad j_3 \dots j_{q-2} ,$$

y por tanto el tensor afín que pertenece a c que tiene estas componentes resulta por la contracción de los índices i_1, i_2 del tensor de componentes $t_{i_1}^{i_2} \quad i_3 \quad i_4 \dots i_q$, en vez del de componentes (7.6.1)

7.7 El espacio $\otimes^p V = V \otimes \dots \otimes V$ (p factores) considerado como espacio euclideo.

El espacio $\otimes^p V$, p -ésima potencia tensorial del espacio euclideo V , puede recibir una estructura de espacio euclideo. Refiramos el espacio euclideo V a una base cualquiera $\{e_i\}$, y el espacio $\otimes^p V$ a la base correspondiente $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}\}$. A cada par de tensores $t = (t^{i_1 \dots i_p})$ y $u = (u_{i_1 \dots i_p})$ le podemos hacer corresponder el escalar invariante, que designaremos por $t \cdot u$,

$$t \cdot u = t^{i_1 \dots i_p} u_{i_1 \dots i_p} , \quad (7.7.1)$$

donde u_{i_1}, \dots, u_{i_p} son las componentes covariantes de u . Dicho escalar es invariante, como puede comprobarse cambiando la base $\{e_i\}$ de V por otra base cualquiera $\{e_{i'}\}$ y calculando la expresión del segundo miembro de (7.7.1) para las componentes de t y u relativas a la nueva base.

Se tiene, además, empleando las fórmulas 7.2.10

$$t \cdot u = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_p j_p} t_{i_1 \dots i_p} u_{j_1 \dots j_p} = t_{j_1 \dots j_p} u^{j_1 \dots j_p} \quad (7.7.2)$$

donde $t_{j_1 \dots j_p}$ son las componentes covariantes de t .

Es fácil comprobar que la aplicación $(t, u) \mapsto t \cdot u$, definida por (7.7.1) o por (7.7.2), tiene las propiedades del producto interno, razón por la cual podemos darle el nombre de *producto interno*. De esta manera $\otimes^p V$ posee una estructura de espacio euclideo. En particular, las componentes covariantes del tensor fundamental de ese espacio, para una base dada $\{e_i\}$ de V , será (teorema 7.5.1)

$$\begin{aligned} g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} &= (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}) \\ &= g_{k_1 l_1 k_2 l_2 \dots k_p l_p} (\delta_{i_1}^{k_1} \delta_{i_2}^{k_2} \dots \delta_{i_p}^{k_p}) (\delta_{j_1}^{l_1} \delta_{j_2}^{l_2} \dots \delta_{j_p}^{l_p}) \\ &= g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_p j_p}, \end{aligned}$$

pues las componentes contravariantes de los p -tensores de base son $\delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_p}^{k_p}$ y $\delta_{j_1}^{l_1} \dots \delta_{j_p}^{l_p}$.

La forma cuadrática fundamental del espacio euclideo $\otimes^p V$ tiene por coeficientes a los números

$$g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p},$$

y se tiene

$$t \cdot u = g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} t^{i_1 \dots i_p} u^{j_1 \dots j_p}.$$

Los números $g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$ son las componentes de un tensor covariante de orden $2p$, por cuanto se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} g_{i'_1 \dots i'_p j'_1 \dots j'_p} &= g_{i_1 j_1 \dots i_p j_p} = A_{i'_1}^{i_1} A_{j'_1}^{j_1} g_{i_1 j_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j'_p}^{j_p} g_{i_p j_p} \\ &= A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_p}^{j_p} g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

Diremos que el tensor euclideo de orden $2p$ al que pertenece dicho tensor covariante es el tensor fundamental de $\otimes^p V$.

Observaremos por último que si la base $\{e_i\}$ es ortonormal se tendrá que

$$g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \dots \delta_{i_p j_p},$$

y por tanto, en tal caso, $g_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$ toma el valor 1 cuando (i_1, \dots, i_p) es un conjunto ordenado idéntico a (j_1, \dots, j_p) , y toma el valor cero en caso contrario.

Ejercicio 7.7.1. Dada la base $\{e_i\}$ del espacio euclideo V , cada uno de los tensores $t \in \otimes^p V$ posee, por lo dicho en la sección 7.2, componentes de varios tipos. Según se ha establecido en la presente sección, $\otimes^p V$ es a su vez un espacio vectorial euclideo, ¿cómo pueden interpretarse en este espacio vectorial, referido a la base $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}\} = e_{i_1 \dots i_p}$, las componentes del vector $t \in \otimes^p V$ a que nos hemos referido anteriormente?

§ 8. Algebra tensorial

En los párrafos § 6 y 7 en que, como señalamos entonces, la exposición se orienta a las aplicaciones del cálculo tensorial, hemos introducido la noción de multiplicación entre tensores pertenecientes a espacios que son producto de espacios vectoriales dados. Hemos llegado así a obtener el álgebra de los tensores afines y la de los tensores euclídeos. En el presente párrafo trataremos de manera más general acerca de la noción de álgebra tensorial de la cual son casos particulares las mencionadas.

Salvo indicación en contrario, los espacios vectoriales que consideraremos en este párrafo son de dimensión cualquiera finita o infinita.

8.1. Suma directa de espacios vectoriales.

Definición 8.1.1. Dados dos espacios vectoriales cualesquiera U y V , el producto cartesiano $U \times V$ formado por todos los pares (u, v) , $u \in U$, $v \in V$, provisto de las operaciones

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

y

$$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v), \quad \alpha \in \mathbb{F},$$

es un espacio vectorial que se llama *suma directa* de U y V se designa por $U \oplus V$. Su vector nulo es $(0, 0)$ y el opuesto de (u, v) es $(-u, -v)$.

Si $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_j\}_{j \in J}$ son bases de U y V respectivamente, entonces $\{(x_i, 0)\}_{i \in I} \cup \{(0, y_j)\}_{j \in J}$ es una base de $U \oplus V$. Si, en par

particular, U y V son de dimensión finita, se cumple que

$$\dim (U \oplus V) = \dim U + \dim V.$$

Las aplicaciones lineales

$$\iota_1 : U \rightarrow U \oplus V \text{ tal que } \iota_1 (u) = (u, 0)$$

y

$$\iota_2 : V \rightarrow U \oplus V \text{ tal que } \iota_2 (v) = (0, v),$$

son *inyectivas* y se llaman *inyecciones canónicas* de U y V en $U \oplus V$.

Las aplicaciones lineales

$$\pi_1 : U \oplus V \rightarrow U \text{ tal que } \pi_1 (u, v) = u$$

y

$$\pi_2 : U \oplus V \rightarrow V \text{ tal que } \pi_2 (u, v) = v,$$

son *sobreyectivas* y se llaman *proyecciones canónicas* de $U \oplus V$.

Se cumplen evidentemente las relaciones

$$\pi_1 \circ \iota_1 = I_U \quad , \quad \pi_2 \circ \iota_2 = I_V \quad (8.1.1)$$

$$\pi_1 \circ \iota_2 = 0 \quad , \quad \pi_2 \circ \iota_1 = 0 \quad (8.1.2)$$

$$\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = I_{U \oplus V} \quad (8.1.3)$$

Puesto que las aplicaciones ι_1 y ι_2 son inyectivas, podemos identificar a U con $\text{Im } \iota_1$ y a V con $\text{Im } \iota_2$, de manera que *podemos considerar que U y V pertenecen a $U \oplus V$* , espacio del cual U y V son entonces subespacios disjuntos, es decir que $U \cap V = \{0\}$.

La definición anterior puede extenderse a una familia cualquiera de espacios vectoriales.

Definición 8.1.2. Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ una familia cualquiera de espacios vectoriales. Consideremos todas las aplicaciones

$$x: J \rightarrow \bigcup_j U_j$$

tales que

- 1) $x(j) \in U_j$ para todo $j \in J$,
- 2) $x(j)$ es igual a cero salvo para un número finito de valores de j .

En adelante vamos a denotar a $x(j)$ por x_j .

El conjunto de las aplicaciones x provisto de las operaciones

$$(x+y)_j = x_j + y_j, \quad (\alpha x)_j = \alpha x_j \text{ para } \alpha \in \mathbb{F},$$

es un espacio vectorial que se llama *suma directa* de los espacios U_j y se designa por $\bigoplus_j U_j$. Su vector nulo es la aplicación 0 tal que $0(j) = 0_j$; donde 0_j es el vector nulo de U_j .

En el caso en que J es el conjunto \mathbb{N} de los números naturales, la familia $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es numerable y puede expresarse en la forma $\{U_1, U_2, \dots\}$, y el espacio $\bigoplus_j U_j$ puede representarse por $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots$.

Para cada elemento $k \in J$ se define la *inyección canónica*
 $\iota_k : U_k \rightarrow \bigoplus_j U_j$ que aplica a cada vector $u \in U_k$ en el elemento $\iota_k(u) \in$
 $\bigoplus_j U_j$ tal que

$$\iota_k(u)(j) = \begin{cases} 0_j & \text{para } j = k \\ u & \text{para } j \neq k. \end{cases}$$

Mediante la identificación de U_k con $i_k(U_k)$ podemos considerar, en adelante, que U_k es un subespacio de $\bigoplus_j U_j$.

Se define también la *proyección canónica*

$$\pi_k : \bigoplus_j U_j \rightarrow U_k$$

que a cada $x \in \bigoplus_j U_j$ le hace corresponder el vector $x_k \in U_k$.

Se cumplen entonces las relaciones

$$\pi_k \circ \iota_l = \delta_{kl} I_{U_l}$$

y

$$\sum_k \iota_k \pi_k x = x, \quad \text{para } x \in \bigoplus_j U_j.$$

Ejercicio 8.1.1. Dados tres espacios vectoriales U, V y W , y las aplicaciones

$$\begin{aligned} \bar{\iota}_1 : U &\rightarrow W, & \bar{\iota}_2 : V &\rightarrow W \\ \bar{\pi}_1 : W &\rightarrow U, & \bar{\pi}_2 : W &\rightarrow V \end{aligned}$$

que cumplen las relaciones

$$\bar{\pi}_1 \circ \bar{\iota}_1 = I_U, \quad \bar{\pi}_2 \circ \bar{\iota}_2 = I_V,$$

$$\bar{\pi}_1 \circ \bar{\iota}_2 = 0 \quad , \quad \bar{\pi}_2 \circ \bar{\iota}_1 = 0$$

y

$$\bar{\iota}_1 \circ \bar{\pi}_1 + \bar{\iota}_2 \circ \bar{\pi}_2 = I_W ,$$

entonces existe un isomorfismo $\varphi: U \oplus V \rightarrow W$ tal que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \bar{\iota}_1 &= \varphi \circ \iota_1 & , & & \bar{\pi}_1 &= \pi_1 \circ \varphi^{-1} & , \\ \bar{\iota}_2 &= \varphi \circ \iota_2 & , & & \bar{\pi}_2 &= \pi_2 \circ \varphi^{-1} . \end{aligned}$$

Puede decirse entonces que, salvo un isomorfismo, W es la suma directa de U y V .

8.2 Suma directa de subespacios de un espacio vectorial.

Definición 8.2.1. Se llama *suma* de dos subespacios U_1 y U_2 de un espacio vectorial U al conjunto de todos los vectores de U que pueden expresarse en la forma $u_1 + u_2$ en que $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$. Es evidente que es un subespacio de U que representaremos por $U_1 + U_2$, del cual U_1 y U_2 son subespacios.

La definición anterior se extiende de la siguiente manera a una familia $\{U_j\}_{j \in J}$ de subespacios de U . Se llama *suma* de los subespacios U_j y se designa por $\sum_j U_j$ al conjunto de los elementos de U que pueden expresarse como sumas de vectores de los espacios U_j en número finito, que representaremos en la forma $\sum_j x_j$ donde está sobreentendido que los x_j son nulos salvo un número finito de ellos. $\sum_j U_j$ es un subespacio de U y contiene como subespacio a los espacios U_j .

Definición 8.2.2. Dada la familia $\{U_j\}_{j \in J}$ de subespacios de U , la aplicación

$$\varphi : \bigoplus_j U_j \rightarrow \sum_j U_j$$

tal que

$$\varphi(x) = \sum_j x_j$$

es evidentemente un homomorfismo de $\bigoplus_j U_j$ sobre $\sum_j U_j$ que llamaremos *homomorfismo canónico*.

Teorema 8.2.1. La condición necesaria y suficiente para que el homomorfismo canónico φ se reduzca a un isomorfismo de $\bigoplus_j U_j$ sobre $\sum_j U_j$ es que para $k \in J$ se cumpla que

$$U_k \cap \sum_{j \neq k} U_j = \{0\}, \quad (8.2.1)$$

lo cual se expresa diciendo que los subespacios U_j son *independientes*.

En el caso en que la familia se reduce a los subespacios U_1 y U_2 , la condición precedente se reduce a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ y se dice entonces que U_1 y U_2 son *disjuntos*.

Demostración. Supongamos primero que φ se reduce a un isomorfismo, es decir que $\varphi(x) = 0$ implica que $x = 0$.

Si la condición del enunciado no se cumpliera existiría un elemento $k \in J$ y un vector $x_k \in U_k$, diferente de cero, tal que podría escribirse

$$x_k = \sum_{j \neq k} x_j, \quad x_j \in U_j.$$

En tal caso el elemento $y \in \bigoplus_j U_j$ para el cual es $y_k = x_k$, $y_j = -x_j$ para $j \neq k$, cumpliría la condición.

$$\varphi(y) = x_k - \sum_{j \neq k} x_j = 0$$

y resultaría una contradicción pues y no es el elemento nulo de $\bigoplus_j U_j$ porque $y_k \neq 0$. Debe pues cumplirse la condición del enunciado.

Si, inversamente, suponemos que la condición se cumple y que $x \in \bigoplus_j U_j$ es tal que $\varphi(x) = 0$, entonces se tiene $\sum_j x(j) = \sum_j x_j = 0$; por consiguiente, para cada $k \in J$ puede escribirse $x_k = - \sum_{j \neq k} x_j$,

y por tanto es $x_k \in U_k \cap \sum_{j \neq k} U_j$. De la condición del enunciado se deduce entonces que $x_k = 0$ para todo k , o sea que $x = 0$; lo cual prueba que $\varphi(x) = 0$ implica que $x = 0$, es decir que φ es un isomorfismo. ■

Definición 8.2.3. Dada la familia $\{U_j\}_{j \in J}$ de subespacios del espacio U , que cumple las condiciones (8.2.1), en cuyo caso la suma directa $\bigoplus_j U_j$ se aplica *isomórficamente* sobre $\sum_j U_j$ por el homomorfismo canónico φ , identificaremos a $\sum_j U_j$ con $\bigoplus_j U_j$ mediante ese isomorfismo. De esa manera podremos decir que la suma directa $\bigoplus_j U_j$ es un subespacio de U al que llamaremos *suma directa de los subespacios U_j* .

Teorema 8.2.2. Las condiciones (8.2.1) son equivalentes a la condición siguiente:

Cada vector del espacio $\sum_j U_j$ se expresa de una sola manera como la suma de un número finito de vectores pertenecientes a los subespacios U_j .

En particular cada vector $x \in \sum_j U_j$ sólo admite la expresión de esa naturaleza constituida por él mismo.

Demostración. La demostración constituye un ejercicio para el lector. ■

En virtud de la proposición anterior, dada una familia $\{U_j\}_{j \in J}$ de subespacios del espacio U , si dichos subespacios son independientes o bien si cada uno de los vectores del espacio $\sum_j U_j$ no admite sino una expresión como suma de vectores de los espacios U_j , el subespacio $\sum_j U_j$ de U se identifica con $\bigoplus_j U_j$.

Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ una familia de subespacios independientes del espacio U , tales que $U = \bigoplus_j U_j$. Las inyecciones canónicas

$$i_k : U_k \rightarrow \bigoplus_j U_j$$

se reducen a las aplicaciones idénticas, y las proyecciones canónicas

$$\pi_k : \bigoplus_j U_j \rightarrow U_k$$

son tales que

$$\pi_k(u) = u_k, \quad \text{si } u = \sum_j u_j, \quad u_j \in U_j.$$

8.3 Subespacios complementarios.

Teorema 8.3.1. Dado un subespacio U_1 de un espacio U existe un subespacio (no único) tal que

$$U = U_1 \oplus U_2.$$

Demostración. El conjunto P de todos los subespacios de U que son disjuntos con U_1 no es vacío porque contiene el subespacio $\{0\}$. P es parcialmente ordenado por la relación de inclusión. Una cadena cualquiera S de elementos de P tiene una cota superior que es la suma de los subespacios que la componen. Por tanto, en virtud del lema de Zorn (Pte.I, pág. 19), existe en P un elemento maximal (puede haber más de uno) U_2 tal que cualquier elemento de P que lo contiene es necesariamente igual a él.

Puesto que U_2 es independiente de U_1 , basta probar que $U = U_1 + U_2$, pues según sabemos es $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

Supongamos que sea $U_1 + U_2 \neq U$. Existirá $u \in U$ tal que $u \notin U_1 + U_2$. Designemos por U_3 al subespacio de U generado por u y los elementos de U_2 . U_3 pertenecería a P , porque si no fuera disjunto con U_1 existiría el vector $u' \neq 0$ tal que $u' \in U_1 \cap U_3$, y por cuanto $u' \in U_3$ podría escribirse

$$u' = u_2 + ku, \quad u_2 \in U_2, \quad k \in \mathbb{F},$$

de donde resultaría que

$$u = \frac{1}{k} (u' - u_2) \in U_1 + U_2,$$

y resultaría una contradicción. Es decir que U_3 es disjunto con U_1 y pertenece por tanto a P . Llegamos así a una contradicción con el lema de Zorn pues U_3 sería un elemento de P que contiene a U_2 y no es igual a éste pues contiene a u , vector que no pertenece a U_2 . ■

Definición 8.3.1. Dado un subespacio U_1 del espacio U cada subespacio U_2 de U tal que $U = U_1 \oplus U_2$ se llama *complementario* de U_1 en U .

Ejercicio 8.3.1. Si U_1 y U_2 son subespacios del espacio vectorial U tales que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, y si B_1 y B_2 son bases de U_1 y U_2 respectivamente, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base de $U_1 \oplus U_2$.

Ejercicio 8.3.2. Si U_1 y U_2 son subespacios de U tales que $U = U_1 \oplus U_2$, y si U_3 es un subespacio cualquiera de U , no se cumple en general la relación

$$U_3 = (U_3 \cap U_1) \oplus (U_3 \cap U_2).$$

Esta relación sí se cumple si $U_3 \subset U_1$.

Sugerencia: Considerar un espacio U que tiene la base $\{e_1, e_2\}$, y sus subespacios U_1, U_2, U_3 , generados por e_1, e_2 y $e_1 + e_2$, respectivamente.

Ejercicio 8.3.3. Si G_j es un sistema de generadores del subespacio U_j de U , entonces $\bigcup_j G_j$ es un sistema de generadores de $\sum_j U_j$; y si B_j es una base de U_j , $\bigcup_j B_j$ es una base de $\bigoplus_j U_j$.

Ejercicio 8.3.4. Si $\{x_j\}_{j \in J}$ es una base de U y U_j es el subespacio generado por x_j , entonces es $U = \bigoplus_j U_j$.

Ejercicio 8.3.5. Sea U_1 un subespacio de U y $\varphi_1: U_1 \rightarrow V$, donde V es otro espacio vectorial, sea una aplicación lineal. Probar que φ_1 puede extenderse a una aplicación lineal $\varphi: U \rightarrow V$, es decir tal que la restricción de φ a U_1 es igual a φ_1 .

Sugerencia: Hacer uso de un complemento de U_1 .

Ejercicio 8.3.6. Si U_1 es un subespacio del espacio vectorial U , existe una aplicación lineal sobreyectiva $\varphi: U \rightarrow U_1$ tal que $\varphi x = x$ para cada $x \in U_1$.

8.4 Dual de la suma directa de dos subespacios.

En el teorema que sigue a continuación consideraremos el dual de un espacio cualquiera W al espacio $\mathcal{L}(W)$ de las funciones lineales definidas sobre él, y lo designaremos por W^* . Designaremos además por U^0 y llamaremos *aniquilador del subespacio U* de W al subconjunto de W^* formado por las funciones lineales w^* tales que $w^*(u) = 0$ para todo $u \in U$. Es evidente que U^0 es un subespacio de W^* .

El teorema siguiente establece que si W es suma directa de dos de sus subespacios, su dual W^* es suma directa de los aniquiladores de dichos subespacios.

Teorema 8.4.1. Si U y V son subespacios de W tales que $W = U \oplus V$, entonces U^* es isomórfico con V^0 , V^* es isomórfico con U^0 y se tiene que $W^* = U^0 \oplus V^0$.

Demostración. Representaremos aquí por u, u^* y u^0 a elementos genéricos de U, U^* y U^0 , sin que signifique esto que haya que suponer que exista relación alguna entre dichos elementos por el hecho de que aparezca la letra u en la representación de los tres. En forma semejante emplearemos los símbolos v, v^*, v^0 y w, w^*, w^0 .

Probemos primero que U^0 y V^0 son disjuntos. Supongamos que $w^* \in U^0 \cap V^0$. Se tiene entonces que $w^*(u) = w^*(v) = 0$ para todo $u \in U$ y todo $v \in V$, y por tanto, puesto que cada $w \in W$ se expresa en la forma $w = u + v$, se tiene que $w^*(w) = w^*(u + v) = 0$ para todo $w \in W$. Es decir que $w^* = 0$ y por tanto $U^0 \cap V^0 = \{0\}$.

Para probar que $W^* = U^0 \oplus V^0$ basta probar ahora que cada $w^* \in W^*$ puede expresarse en la forma $w^* = u^0 + v^0$. Dado $w^* \in W^*$, si w es un elemento cualquiera de W , existen $u \in U$ y $v \in V$, bien determinados, tales que $w = u + v$. Podemos entonces definir los elementos u^* y v^* de W^* mediante las condiciones $u^*(w) = w^*(v)$ y $v^*(w) = w^*(u)$. La linealidad de esas funciones se comprueba sin dificultad. Ahora bien, puesto que $u^*(u) = w^*(0) = 0$ para todo $u \in U$ y $v^*(v) = w^*(0) = 0$ para todo $v \in V$, se tiene que $u^* \in U^0$ y $v^* \in V^0$.

Además, para cualquier elemento $w = u + v \in W$ es $w^*(w) = w^*(u + v) = w^*(u) + w^*(v) = v^*(w) + u^*(w) = (u^* + v^*)(w)$. Resulta de aquí que $w^* = u^* + v^*$, y por consiguiente $W^* = U^0 \oplus V^0$.

Para terminar la demostración sólo falta probar que U^0 es isomorfo con V^* . De la misma manera se probará que V^0 es isomorfo con U^* .

A cada $u^0 \in U^0$ podemos hacerle corresponder la función $v^* \in V^*$ tal que $v^*(v) = u^0(v)$. La aplicación $\varphi: u^0 \mapsto v^*$ así establecida es lineal pues

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u_1^0 + \beta u_2^0)(v) &= (\alpha u_1^0 + \beta u_2^0)(v) = \alpha u_1^0(v) + \beta u_2^0(v) \\ &= (\alpha \varphi(u_1^0) + \beta \varphi(u_2^0))(v) \end{aligned}$$

para todo v ; y por tanto

$$\varphi(\alpha u_1^0 + \beta u_2^0) = \alpha \varphi(u_1^0) + \beta \varphi(u_2^0).$$

Finalmente, φ es biyectiva: Es inyectiva porque si $\varphi(u_1^0) = \varphi(u_2^0)$, entonces se tiene $\varphi(u_1^0 - u_2^0) = 0$, y por tanto $\varphi(u_1^0 - u_2^0)(v) = (u_1^0 - u_2^0)(v) = 0$ para todo v ; es decir que cualquiera que sea $w \in W$ es $(u_1^0 - u_2^0)(w) = (u_1^0 - u_2^0)(u+v) = (u_1^0 - u_2^0)(u) + (u_1^0 - u_2^0)(v) = 0$ por cuanto $(u_1^0 - u_2^0) \in U$. Resulta así que $u_1^0 = u_2^0$ y φ es inyectiva.

φ es sobreyectiva porque si v^* es un elemento cualquiera de V^* , la aplicación lineal $u^0 \in U^0$ definida por la fórmula $u^0(w) = v^*(v)$, donde $w = u+v$, $u \in U$, $v \in V$, es tal que $\varphi(u^0)(v) = u^0(v) = v^*(v)$ para todo $v \in V$, y por tanto es $\varphi(u^0) = v^*$. ■

8.5. Producto de tensores sobre un espacio vectorial V .

Dado el espacio vectorial V , consideremos los productos tensoriales $(\otimes^p V, \otimes^p)$, para $p = 2, 3, \dots$, donde $\otimes^p V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p$ p factores es la potencia tensorial de V de grado p , o p -ésima potencia tensorial de V , cuyos elementos se llaman *tensores de grado p sobre V* . Convendremos en escribir $\otimes^0 V = \mathbb{F}$ y $\otimes^1 V = V$ de modo que los escalares y los vectores de V pueden considerarse como *tensores de grado 0 y 1* respectivamente. Los tensores de la forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_p$, $p \geq 1$ y los tensores de grado cero se llaman *tensores descomponibles*.

Según el teorema 5.10.2 existe un único isomorfismo

$$g_{p,q} : (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V) \rightarrow \otimes^{p+q} V$$

tal que

$$g_{p,q}((x_1 \otimes \dots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+q})) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q}.$$

La primera parte del teorema 5.7.2 permite establecer la existencia de una *única aplicación bilineal*

$$\bar{\varphi}_{p,q} : (\otimes^p V) \times (\otimes^q V) \rightarrow \otimes^{p+q} V$$

tal que

$$\bar{\varphi}_{p,q}((x_1 \otimes \dots \otimes x_p), (x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+q})) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q}.$$

Si $\varphi_{p,q}$ designa a la aplicación universal

$$\varphi_{p,q} : (\otimes^p V) \times (\otimes^q V) \rightarrow (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V),$$

resulta que

$$\bar{\varphi}_{p,q} = g_{p,q} \circ \varphi_{p,q}.$$

Puesto que g es un isomorfismo, resulta del corolario 4 del teorema 5.5.1, 3^{er} caso, que el par $(\otimes^{p+q} V, \bar{\varphi}_{p,q})$ es producto tensorial de $\otimes^p V$ y $\otimes^q V$. Se tiene por tanto que $\bar{\varphi}_{p,q}(x_p, x_q) = x_p \otimes x_q$.

Definición 8.5.1. Se llama *producto de los tensores* $u_p \in \otimes^p V$ y $u_q \in \otimes^q V$ al tensor $\bar{\varphi}_{p,q}(u_p, u_q) \in \otimes^{p+q} V$, el cual, en vista de las consideraciones precedentes puede escribirse en la forma $u_p \otimes u_q$. Se tiene por tanto que

$$u_p \otimes u_q = \bar{\varphi}_{p,q}(u_p, u_q);$$

y en particular, el producto de tensores descomponibles es dado por

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q}.$$

La propiedad asociativa general del producto tensorial permite reconocer que el producto que acabamos de introducir es una operación asociativa; pero no es conmutativa salvo el caso en que $\dim V = 1$. En efecto, si $\dim V > 1$, sean x e y vectores de V linealmente independientes. El par (x, y) puede ampliarse hasta formar una base de V . Según el corolario 1 del teorema 5.5.1, $x \otimes y$ e $y \otimes x$ forman parte de una base de $V \otimes V$. Son por tanto *l.i.* y por consiguiente diferentes.

Dada una base $\{e_i\}_{i \in I}$ de V , los tensores $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$, $i_k \in I$, $k = 1, \dots, p$, constituyen una base de $\otimes^p V$. Si, en particular, V es de dimensión n y su base es $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces la base de $\otimes^p V$ está formada por los n^p vectores $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$ ($i_k = 1, 2, \dots, n$). Se tiene por tanto $\dim \otimes^p V = n^p$, y cada elemento $z \in \otimes^p V$ puede expresarse en la forma

$$z = \sum z^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}, \quad (z^{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{F}).$$

donde $z^{i_1 \dots i_p}$ son las *componentes* del tensor z .

8.6 Algebra tensorial de un espacio vectorial

Consideremos el espacio vectorial

$$(\otimes^0 V) \oplus (\otimes^1 V) \oplus (\otimes^2 V) \oplus \dots$$

que es suma directa de todas las potencias tensoriales del espacio vectorial V , y que designaremos en adelante por $\otimes V$. Según

hemos señalado en la sección 8.1, para cada valor de p el conjunto de los elementos de $\otimes^p V$, (u_0, u_1, u_2, \dots) , tales que $u_i = 0$ para $i \neq p$ constituye un subespacio que es isomorfo con $\otimes^p V$ por la correspondencia $(u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto u_p$. Este isomorfismo permite identificar a dicho subespacio con $\otimes^p V$, identificando a los elementos que se corresponden en dicho isomorfismo. Resulta así que $\otimes V$ contiene a los subespacios $\otimes^p V$ y cada elemento $u \in \otimes V$ puede expresarse de manera única como una suma

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p = \sum u_p, \quad u_p \in \otimes^p V,$$

en que los tensores u_p son nulos salvo un número finito de ellos. Puede escribirse entonces, según lo dicho en la sección 8.2,

$$\otimes V = \sum_{p=0} \otimes^p V = \sum \otimes^p V.$$

Dados los elementos cualesquiera $u = \sum u_p$, $v = \sum v_q$ de $\otimes V$, definamos la aplicación $(u, v) \mapsto uv$ de $\otimes V$ en sí mismo dada por

$$uv = \sum_{p,q} \bar{\varphi}_{p,q}(u_p, v_q) = \sum_{p,q} u_p \otimes v_q,$$

donde $\varphi_{p,q}$ es la aplicación bilineal definida en la sección 8.5. La aplicación $(u, v) \mapsto uv$ es bilineal pues

$$\begin{aligned} (\alpha u_1 + \beta u_2)v &= \sum_{p,q} \bar{\varphi}_{p,q}(\alpha u_{1p} + \beta u_{2p}, v_q) = \\ &= \sum_{p,q} [\alpha \bar{\varphi}_{p,q}(u_{1p}, v_q) + \beta \bar{\varphi}_{p,q}(u_{2p}, v_q)] = \\ &= \alpha \sum_{p,q} \bar{\varphi}_{p,q}(u_{1p}, v_q) + \beta \sum_{p,q} \bar{\varphi}_{p,q}(u_{2p}, v_q) = \alpha(u_1, v) + \beta(u_2, v). \end{aligned}$$

En forma semejante se comprueba la linealidad respecto de v .



La operación que se introduce en $\otimes V$ por la aplicación $(u, v) \mapsto uv$ que acabamos de introducir es asociativa como se prueba a continuación. Se tiene en efecto

$$(u v) w = \sum_{p, q} (u v)_p \otimes w_q ;$$

pero es claro que

$$(u v)_p = \sum_{r+s=p} (u_r \otimes v_s) ;$$

luego

$$(u v) w = \sum_{p, q} \sum_{r+s=p} u_r \otimes v_s \otimes w_q .$$

Puede observarse que

$$\sum_{p, q} \sum_{r+s=p} u_r \otimes v_s \otimes w_q = \sum_{p', q', r'} u_{p'} \otimes v_{q'} \otimes w_{r'}$$

porque es evidente que cada sumando del primer miembro figura en el segundo, y porque cada término $u_p \otimes v_q \otimes w_r$ del segundo figura en el primero si se da a p, q, r y s los valores $p = p' + q'$, $q = r'$, $r = p'$ y $s = q'$. Se cumple por consiguiente que

$$(u v) w = \sum_{p', q', r'} u_{p'} \otimes v_{q'} \otimes w_{r'} .$$

De manera semejante se prueba que $u(vw)$ tiene por valor la suma del segundo miembro de la ecuación anterior. Luego podemos escribir la fórmula

$$(u v) w = u(v w) = u v w = \sum_{p, q, r} u_p \otimes v_q \otimes w_r \quad (8.6.1)$$

y por tanto la operación $(u v) \mapsto uv$ es asociativa.



Definición 8.6.1. El espacio $\otimes V$, asociado con la operación $(u, v) \mapsto uv = \sum_{p, q} u_p \otimes v_q$, es una álgebra asociativa pero no conmutativa que se llama *álgebra tensorial del espacio V*. Su elemento unidad es el escalar $1 \in \otimes^0 V = \mathbb{F}$.

Teorema 8.6.1. El álgebra tensorial $\otimes V$ tiene como *generadores* a su elemento $1 \in \otimes^0 V = \mathbb{F}$ y a los vectores pertenecientes a $\otimes^1 V = V$, en el sentido de que cada uno de sus elementos puede expresarse mediante una suma de la forma

$$\sum \alpha^{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \dots v_{i_p} \tag{8.6.2}$$

donde p, i_1, \dots, i_p son números naturales cualesquiera, $v_{i_k} \in V$, y los α son escalares nulos salvo un número finito de ellos.

Demostración. La fórmula (8.6.1) se generaliza sin dificultad de manera que dados los elementos u_1, \dots, u_p cualesquiera de $\otimes V$ se tiene

$$u_1 u_2 \dots u_p = \sum_{q_1 \dots q_r} u_{1q_1} \otimes \dots \otimes u_{pq_r} \tag{8.6.3}$$

donde $u_j = \sum_k u_{jk}$ y $u_{jk} \in \otimes^k V$. En particular dados los vectores v_1, \dots, v_p de V se tiene

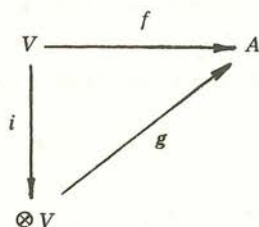
$$v_1 v_2 \dots v_p = v_1 \otimes \dots \otimes v_p.$$

Ahora bien, cada elemento de $\otimes V$ es combinación lineal de elementos de la forma $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ donde los $\{v_1, \dots, v_p\}$ son conjuntos cualesquiera de vectores de V , es decir una expresión de la forma (8.6.2). ■

8.7. Propiedad universal de $\otimes V$.

El teorema siguiente expresa una importante propiedad universal del álgebra $\otimes V$.

Teorema 8.7.1 Dada una aplicación lineal $f: V \rightarrow A$ donde A es una álgebra asociativa sobre el campo \mathbb{F} , provista del elemento unidad e , existe un único homomorfismo de álgebras $g: \otimes V \rightarrow A$,¹⁾ tal que $g(1) = e$ y que $f = g \circ i$, donde i es la aplicación de inclusión de V en $\otimes V$, de manera que $g(v_i) = f(v_i)$ para todo $v_i \in \otimes^1 V = V$, y que el diagrama adjunto es conmutativo.



Demostración. A las aplicaciones multilineales

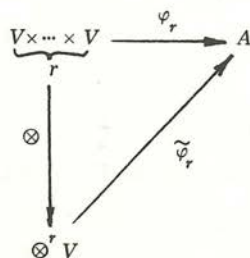
$$\varphi_0: \mathbb{F} \rightarrow A, \quad \varphi_r: \underbrace{V \times \dots \times V}_r \text{ factores} \rightarrow A \quad (r = 1, 2, \dots)$$

definidas por las relaciones

$$\varphi_0(\lambda) = \lambda e, \quad \varphi_r(v_1, \dots, v_r) = f(v_1) \dots f(v_r),$$

les corresponde, en virtud de la propiedad universal del producto tensorial, las aplicaciones lineales

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_r: \otimes^r V \rightarrow A \quad (r = 1, 2, \dots)$$



1) Es decir una aplicación lineal tal que $g(u \otimes v) = g(u)g(v)$ para $u, v \in \otimes V$

para las cuales es $\tilde{\varphi}_i \circ \otimes = \varphi_i$ ($i = 0, 1, \dots$), y por tanto

$$\tilde{\varphi}_0(\lambda) = \lambda e \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_r(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = f(v_1) \dots f(v_r).$$

Podemos definir ahora la aplicación lineal

$$g : \otimes V \rightarrow A$$

de modo que para cada elemento

$$z = z_0 + z_1 + \dots + z_k \quad (z_0 \in \mathbb{F}, \quad z_r \in \otimes^r V, \quad z_k \neq 0)$$

de $\otimes V$ es

$$g(z) = \tilde{\varphi}_0(z_0) + \tilde{\varphi}_1(z_1) + \dots + \tilde{\varphi}_k(z_k).$$

Puede señalarse, en particular, que si $z = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in \otimes^r V$, entonces es

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = \tilde{\varphi}_r(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = f(v_1) \dots f(v_r),$$

y por tanto $g(v_i) = f(v_i)$ para todo $v_i \in V$. Además $g(1) = \tilde{\varphi}_0(1) = e$.

Para demostrar que g cumple las condiciones del enunciado falta probar que es un homomorfismo de álgebras, y que es único. Para lo primero sólo queda por establecer que se cumple la relación $(z w) = g(z) g(w)$ cualesquiera que sean z y w de $\otimes V$. Estableceremos primero esa igualdad en el caso en que z y w son descomponibles, es decir para $z_r = u_1 \otimes \dots \otimes u_r \in \otimes^r V$ y $w_s = v_1 \otimes \dots \otimes v_s \in \otimes^s V$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 g(z_r w_s) &= g(u_1 \otimes \dots \otimes u_r \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \\
 &= \tilde{\varphi}_{r+s}(u_1 \otimes \dots \otimes u_r \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \\
 &= f(u_1) \dots f(u_r) f(v_1) \dots f(v_s) \\
 &= \tilde{\varphi}_r(u_1 \otimes \dots \otimes u_r) \tilde{\varphi}_s(v_1 \otimes \dots \otimes v_s) = g(z_r) g(w_s).
 \end{aligned}$$

Para establecer la relación en el caso general basta observar que cada elemento de $\otimes V$ puede expresarse como suma de tensores descomponibles, para lo cual basta expresarlo primero como suma de tensores de los espacios $\otimes^i V$, cada uno de los cuales puede escribirse luego como suma de tensores descomponibles. Su pongamos pues que

$$z = z_0 + \dots + z_k = \sum_i z_i, \quad w = w_0 + \dots + w_m = \sum_j w_j$$

son las expresiones de z y w como sumas de tensores descomponibles. Tendremos

$$\begin{aligned}
 g(zw) &= g\left(\sum_{i,j} z_i w_j\right) = \sum_{i,j} g(z_i w_j) = \sum_{i,j} g(z_i) g(w_j) \\
 &= \left(\sum_i g(z_i)\right) \left(\sum_j g(w_j)\right) = g\left(\sum_i z_i\right) g\left(\sum_j w_j\right) = g(z) g(w).
 \end{aligned}$$

Probemos por último que g es única. Las condiciones $g(1) = e$ y $f = g \circ i$ del enunciado proporcionan los valores que g toma en $\otimes^0 V = \mathbb{F}$ y en $\otimes^1 V = V$. Ahora bien, según el teorema 8.6.1 cada elemento de $\otimes V$ puede expresarse como una suma de la forma (8.6.2), luego el valor que tiene g en dicho elemento, puesto que g es un homomorfismo de álgebras, es igual a

$$\sum \alpha^{i_1 \dots i_p} g(v_{i_1}) \dots g(v_{i_p}) = \sum \alpha^{i_1 \dots i_p} f(v_{i_1}) \dots f(v_{i_p}),$$

y por tanto es unívocamente determinado por f . ■

Ejercicio 8.7.1 Dados el espacio vectorial V , el álgebra asociativa W sobre el campo \mathbb{F} provisto de elemento unidad que podemos designar por 1 ¹⁾, y una aplicación lineal $\varphi: V \rightarrow W$, que cumplen las condiciones siguientes:

AT1. El álgebra W es generada por el conjunto $\{Im \varphi\} \cup \{1\}$ de sus elementos, es decir que cada elemento $w \in W$ puede expresarse en la forma

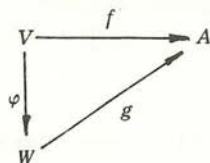
$$x = \lambda^0 + \sum_{i=1}^r \lambda^i \varphi(v_1^{(i)}) \varphi(v_2^{(i)}) \dots \varphi(v_p^{(i)}),$$

donde los λ son escalares y los v son vectores de V .

AT2. Para cada álgebra asociativa A sobre \mathbb{F} con elemento unidad e , y para cada aplicación lineal $f: V \rightarrow A$, existe un homomorfismo de álgebras $g: W \rightarrow A$ tal que $g(1) = e$ y que

$$f = g \circ \varphi.$$

Es decir que el diagrama adjunto es conmutativo,



entonces existe un único isomorfismo de álgebras $\gamma: \otimes V \rightarrow W$ tal que $\gamma = \varphi \circ i$, donde i es la aplicación de inclusión de V en $\otimes V$.

El resultado precedente permite considerar al par (W, φ) como una representación del álgebra tensorial $\otimes V$.

1) Designar con 1 al elemento unidad e de una álgebra sobre el campo \mathbb{F} proviene de la identificación que es posible hacer de los elementos $\alpha \in \mathbb{F}$ con los elementos αe del álgebra.

8.8. Álgebras tensoriales sobre un par de espacios duales.

Sean V y V^* dos espacios duales; la aplicación $(x^* x) \mapsto \langle x^*, x \rangle$ es el correspondiente producto escalar.

Las álgebras tensoriales $\otimes V$ y $\otimes V^*$ se llaman *álgebras tensoriales contravariante y covariante* de V respectivamente. La p -ésima potencia tensorial $\otimes^p V^*$ podrá ser designada también por $\otimes_p V^*$, de modo que $\otimes V^* = \oplus (\otimes_p V^*)$. Los elementos de V y de $\otimes V$ se distinguirán con *índices inferiores* y los de V^* y $\otimes V^*$ con *índices superiores*.

Recordemos que, como fue establecido en el corolario 3 del teorema 5.17.2, los espacios $\otimes_p V$ y $\otimes^p V^*$, $p \geq 1$, son duales, con un producto escalar que cumple la condición

$$\langle x^1 \otimes \dots \otimes x^p, x_1 \otimes \dots \otimes x_p \rangle = \langle x^1, x_1 \rangle \dots \langle x^p, x_p \rangle. (x^i \in V^*, x_j \in V)$$

Para $p=1$, esta fórmula se reduce al producto escalar de los espacios duales V y V^* . Podemos, además, extender la definición de \langle, \rangle al caso $p=0$.

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \lambda \mu, \quad (\lambda \in \otimes^0 V = \mathbb{F}, \mu \in \otimes_0 V = \mathbb{F});$$

y definiremos entonces el producto escalar entre los espacios $\otimes V$ y $\otimes V^*$ escribiendo

$$\langle u^*, v \rangle = \sum_p \langle u^p, v_p \rangle, \text{ donde } u^* = \sum_p u^p \in \otimes V^*, u^p \in \otimes_p V^*, \text{ y}$$

$$v = \sum_p v_p \in \otimes V, v_p \in \otimes_p V.$$

La función $(\otimes V^*) \times (\otimes V) \rightarrow \mathbb{F}$ así definida es evidentemente bilineal. Probaremos ahora que es *no degenerada*. Si fuera, por ejemplo, $\langle u^*, v \rangle = 0$ para un dado elemento $u^* \in \otimes V^*$ y para todo $v \in \otimes V$, entonces, en particular para cada q , y para todo $v_q \in \otimes^q V \subset \otimes V$ sería $\langle u^*, v_q \rangle = 0$. Puesto que $v_q = \sum_p v_p$ donde $v_p = 0$ para todo $p \neq q$, si $u^* = \sum_p u^p$, resulta de la defini

ción de la función que consideramos que $\langle u^*, v_q \rangle = \langle u^q, v_q \rangle$, y por tanto es $\langle u^q, v_q \rangle = 0$ para todo $v_q \in \otimes^q V$. El producto escalar que, según hemos visto, existe para los espacios duales $\otimes_q V$ y $\otimes^q V$, que desde luego es no degenerado por definición de producto escalar, implica que $u^q = 0$ para todo q . Luego es $u^* = 0$. En forma semejante se prueba que dado $v \in \otimes V$, si $\langle u^*, v \rangle = 0$ para todo $u^* \in \otimes V^*$, entonces es $v = 0$. Por tanto la función bilineal que hemos definido es no degenerada y constituye un producto escalar de $\otimes V$ y $\otimes V^*$, los cuales son por tanto duales.

Consideremos en especial el caso en que V es de dimensión finita n . Designemos por $\{e_i\}$ y $\{e^j\}$ a bases duales V y V^* . Los productos escalares de los elementos de las correspondientes bases de $V_p = \otimes_p V$ y $V^p = \otimes^p V$ son dados por las fórmulas

$$\langle e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \rangle = \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \dots \delta_{i_p}^{j_p}, \quad (8.8.1)$$

y por tanto, las bases $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}\}$ y $\{e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}\}$ son duales.

De (8.8.1) resulta que dados dos tensores cualesquiera

$$u^* = \sum_{J_p} \eta_{j_1 \dots j_p} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \in \otimes V^* \\ (J_p = \{j_1, \dots, j_p\}, j_i \in \{1, \dots, n\}, p \geq 0)$$

y

$$v = \sum_{K_p} \xi^{k_1 \dots k_p} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_p} \in \otimes V, \quad (K_p = \{k_1, \dots, k_p\}, k_i \in \{1, \dots, n\},$$

su producto escalar es

$$\langle u^* v \rangle = \sum_{K_p} \xi^{k_1 \dots k_p} \eta_{k_1 \dots k_p}.$$

8.9 Tensores mixtos.

Definición 8.9.1. Para cada par (p, q) de números naturales, designemos por $\otimes_q^p V$, al producto tensorial

$$\otimes_q^p V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q,$$

cuyos elementos se llaman *tensores mixtos sobre V , contravariantes de orden p y covariantes de orden q* . $p+q$ es su *orden total* o simplemente su *orden* (o *grado*).

Convendremos, además, en escribir

$$\otimes_0^p V = \otimes^p V, \quad \otimes_q^0 = \otimes^q V^* = \otimes_q V, \quad \otimes_0^0 = \mathbb{F}.$$

Los tensores de $\otimes_q^p V$ que pueden expresarse en la forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q$, donde $x_i \in V$ y $x^j \in V^*$ se llaman *tensores descomponibles*. También llamaremos descomponibles a los elementos de \mathbb{F} , V y V^* .

La dualidad del par (V^*, V) da lugar a la dualidad del par $(\otimes_q^p V, \otimes_p^q V)$. En efecto, según el corolario del teorema 5.10.2 existe el isomorfismo natural

$$\chi : \otimes_p^q V \rightarrow \otimes_q^p V^*$$

que cumple la condición

$$\chi(y_1 \otimes \dots \otimes y_q \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^p) = y^1 \otimes \dots \otimes y^p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q.$$

Según el corolario 3 del teorema 5.17.2, el par $(\otimes_q^p V, \otimes_q^p V^*)^1$ es dual con un producto escalar \langle , \rangle_I para el cual se cumple que

$$\begin{aligned} & \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q, y^1 \otimes \dots \otimes y^p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q \rangle_I \\ &= \langle y^1, x_1 \rangle \dots \langle y^p, x_p \rangle \langle x^1, y_1 \rangle \dots \langle x^q, y_q \rangle. \end{aligned}$$

La dualidad del par $(\otimes_q^p V, \otimes_p^q V)$ se define entonces mediante la aplicación de $\otimes_q^p V \times \otimes_p^q V$ en \mathbb{F} , dada por

$$(u, v) \mapsto \langle u, \chi(v) \rangle_I, \quad (u \in \otimes_q^p V, v \in \otimes_p^q V),$$

la cual es bilineal por cuanto χ es lineal y \langle , \rangle_I es bilineal; y es no degenerada como es fácil comprobar dado que \langle , \rangle_I lo es y χ es una aplicación biyectiva; y por tanto reúne las condiciones de un producto escalar que también designaremos por \langle , \rangle , de manera que

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \chi(v) \rangle_I.$$

Se cumple en particular que

$$\begin{aligned} & \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q, y_1 \otimes \dots \otimes y_q \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^p \rangle \\ &= \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q, y^1 \otimes \dots \otimes y^p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q \rangle_I \\ &= \langle y^1, x_1 \rangle \dots \langle y^p, x_p \rangle \langle x^1, y_1 \rangle \dots \langle x^q, y_q \rangle. \end{aligned} \tag{8.9.1}$$

1) Recordemos que el par (V, V^*) es también dual, y el producto escalar correspondiente es dado por $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$, donde \langle , \rangle designa aquí al producto escalar del par (V^*, V) (Pte.I, secc. 4.2).

Resulta de esta manera la dualidad de los espacios $\otimes_q^p V$ y $\otimes_p^q V$. En particular $\otimes_p^p V$ es dual de sí mismo.

Observación. Si consideramos los tensores descomponibles

$$v_p = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \in \otimes_p^p V, \quad u^q = x^1 \otimes \dots \otimes x^q \in \otimes_q^q V,$$

$$x_q = y_1 \otimes \dots \otimes y_q \in \otimes_q^q V, \quad u^p = y^1 \otimes \dots \otimes y^p \in \otimes_p^p V,$$

y tenemos en cuenta la fórmula (8.9.1) y la dualidad de los pares $(\otimes_p^p V, \otimes_p^p V)$ que fue definida en la sección 8.8, resulta

$$\begin{aligned} \langle v_p \otimes u^q, v_q \otimes u^p \rangle &= \langle u^p, v_p \rangle \langle u^q, v_q \rangle \\ &= \langle v_q \otimes u^p, v_p \otimes u^q \rangle, \end{aligned}$$

de donde se deduce, en general, para $u \in \otimes_q^p V$ y $v \in \otimes_p^q V$,

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

***Ejercicio 8.9.1.** Comprobar que la multiplicación de tensores afines definida en la sección 6.5, b), es un caso particular de la que se ha definido en la presente sección.

8.10. La operación de contracción. La operación de contracción, que fue introducida en la sección 6.5 para el caso de los tensores afines sobre un espacio de dimensión finita, puede extenderse a los tensores sobre un espacio de dimensión cualquiera.

Definición 8.10.1. Dado un espacio cualquiera V y los números naturales p y q , definamos, para un par dado (i, j) de números naturales tales que $i \leq p$, $j \leq q$, la aplicación $(p+q)$ -lineal

$$\gamma_i^j : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \otimes_{q-1}^{p-1} V$$

dada por la fórmula

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(x_1, \dots, x_p, x^1, \dots, x^q) = \\ = \langle x^j, x_i \rangle x_1 \otimes \dots \otimes \hat{x}_i \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes \hat{x}^j \otimes \dots \otimes x^q, \end{aligned}$$

donde la expresión que sigue a $\langle x^j, x_i \rangle$ en el segundo miembro representa al producto tensorial que resulta del producto $x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q$ cuando se suprimen los factores x_i y x^j que llevan encima el signo $\hat{}$.

En virtud de la propiedad de factorización de la aplicación universal

$$\otimes : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \otimes_q^p V,$$

existe la aplicación lineal $C_i^j : \otimes_q^p V \rightarrow \otimes_{q-1}^{p-1} V$ tal que $\gamma_i^j = C_i^j \circ \otimes$, para la cual se cumple por consiguiente que

$$\begin{aligned} C_i^j(x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q) = \\ = \langle x^j, x_i \rangle x_1 \otimes \dots \otimes \hat{x}_i \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes \hat{x}^j \otimes \dots \otimes x^q. \end{aligned}$$

C_i^j se llama *operador de contracción* relativo al par (i, j) , y $C_i^j(t)$ se llama *contracción del tensor* $t \in \otimes_q^p V$, relativa al par (i, j) .

***Ejercicio 8.10.1** Comprobar que la operación de contracción que fue definida en la sección 6.5 para los tensores afines coincide con la introducida en esta sección.

8.11. Algebra tensorial mixta. En la presente sección vamos a ampliar la noción de algebra tensorial, que fue definida en la sección 8.6, al conjunto de los espacios $\otimes_q^p V$.

Definición 8.11.1. Dados los espacios duales V y V^* se llama *algebra tensorial mixta* al espacio $\otimes(V, V^*)$ que es la suma directa (sección 8.1) de los espacios $\otimes_q^p V$ ($p, q \geq 0$). Puede escribirse por tanto

$$\otimes(V, V^*) = \bigoplus_{p, q} (\otimes_q^p V).$$

A fin de introducir en este espacio vectorial una estructura de álgebra asociativa con elemento unidad, comenzaremos por definir una multiplicación $\otimes_q^p V \times \otimes_s^r V \rightarrow \otimes_{q+s}^{p+r} V$.

En forma semejante a como hemos procedido en la sección 8.5 se prueba que existe una aplicación bilineal única

$$\bar{\varphi} : (\otimes_q^p V) \times (\otimes_s^r V) \rightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s$$

que cumple la condición

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} (x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q, x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^{q+1} \otimes \dots \otimes x^{q+s}) \\ = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q \otimes x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^{q+1} \otimes \dots \otimes x^{q+s}. \end{aligned}$$

(8.11.1)

Por otra parte, el corolario del teorema 5.10.2 asegura la existencia de un único isomorfismo natural

$$\beta : \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s \rightarrow \otimes_{q+s}^{p+r} V,$$

para el cual se cumple que

$$\beta(x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q \otimes x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^{q+1} \otimes \dots \otimes x^{q+s}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^{q+s}.$$

Por consiguiente la aplicación bilineal

$$\gamma = \beta \circ \bar{\varphi} : (\otimes_q^p V) \times (\otimes_s^r V) \rightarrow \otimes_{q+s}^{p+r} V$$

cumple la condición

$$\gamma(x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q, x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^{q+1} \otimes \dots \otimes x^{q+s}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^{q+s}, \quad (8.11.2)$$

y es la única aplicación bilineal de $(\otimes_q^p V) \times (\otimes_s^r V)$ en $\otimes_{q+s}^{p+r} V$ que cumple dicha condición, pues si γ_1 también la cumpliera, $\beta^{-1} \circ \gamma_1$ cumpliría la misma condición (8.11.1) que $\bar{\varphi}$, y se tendría que $\beta^{-1} \circ \gamma_1 = \bar{\varphi}$, por cuanto $\bar{\varphi}$ es única. Se tendría entonces que $\gamma_1 = \beta \circ \bar{\varphi} = \gamma$, y por tanto γ es única.

Definición 8.11.2. Dados los tensores $u \in \otimes_q^p V$ y $v \in \otimes_s^r V$, su producto es el tensor

$$uv = \gamma(u, v) \in \otimes_{q+s}^{p+r} V,$$

de modo que, en particular,

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^q) (x_{p+1} \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^{q+1} \otimes \dots \otimes x^{q+s}) \\ = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^{q+s}. \end{aligned}$$

Dados dos tensores cualesquiera w_1 y w_2 de $\otimes(V, V^*)$, se expresan de manera única en la forma $w_1 = \sum_{p,q} u_q^p$ y $w_2 = \sum_{r,s} v_s^r$, donde $u_q^p \in \otimes_q^p V$ y $v_s^r \in \otimes_s^r V$. Se llama *producto* de w_1 y w_2 al tensor

$$w_1 w_2 = \sum_{p,q,r,s} u_q^p v_s^r \in \otimes(V, V^*).$$

El espacio $\otimes(V, V^*)$, con esta operación de multiplicación, es por tanto una álgebra asociativa, pero no conmutativa, en que el escalar 1 es el elemento unidad, y se denomina *álgebra tensorial mixta sobre el par V, V^** .

8.12 Álgebra tensorial sobre un espacio vectorial real, de producto interno y de dimensión finita.

Sea V un espacio sobre \mathbb{R} , de producto interno $(\ , \)$ y de dimensión finita n , es decir un espacio euclideo de dimensión n . Según se sabe (**Pte. I, sección 17.6**), V es dual de sí mismo con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = (x, y).$$

El corolario 3 del teorema 5.17.2 asegura entonces la dualidad de $\otimes^p V$ consigo mismo, con el producto escalar que cumple la condición

$$\begin{aligned} \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_p, y_1 \otimes \dots \otimes y_p \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle \dots \langle x_p, y_p \rangle \\ &= (x_1, y_1) \dots (x_p, y_p). \end{aligned}$$

La aplicación $(\ , \) : \otimes^p V \times \otimes^p V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad (u, v \in \otimes^p V),$$

es un producto interno en $\otimes^p V$. La bilinealidad y la simetría de esa aplicación resultan de la bilinealidad y la simetría del producto escalar $\langle \ , \ \rangle$. Para comprobar la positividad definida consideremos en V una base ortonormal $\{e_i\}$. Un elemento cualquiera $u \in \otimes^p V$ puede expresarse en la forma $u = \lambda^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$,

luego

luego

$$(u, u) = \lambda^{i_1 \dots i_p} \lambda^{j_1 \dots j_p} (e_{i_1}, e_{j_1}) \dots (e_{i_p}, e_{j_p}) = \sum_{i_1 \dots i_p} (\lambda^{i_1 \dots i_p})^2,$$

de donde resulta que $(u, u) \geq 0$ y $(u, u) = 0$ si y sólo si $u = 0$; y por tanto la aplicación es definida positiva. Se ve inmediatamente que, respecto del producto interno que hemos definido en $\otimes^p V$, los tensores $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$ constituyen una base ortonormal.

Ahora podemos definir un producto interno en el álgebra tensorial $\otimes V$ que fue definida en la sección 8.2:

Dados los elementos $u = (u_0, u_1, \dots)$ y $v = (v_0, v_1, \dots)$ de $\otimes V$, donde $u_p, v_p \in \otimes^p V$ para $p = 0, 1, \dots$, su producto interno es dado por

$$(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} (u_p, v_p).$$

Es claro que este producto es simétrico y definido positivo.

***Ejercicio 8.12.1.** Comprobar que el producto interno definido en esta sección coincide con el que fue introducido en la sección 7.7.

8.13 Álgebra tensorial de las funciones multilineales sobre un espacio de dimensión finita y su dual.

8.13-A. Introducción. El producto tensorial de dos aplicaciones lineales $A: U \rightarrow W$ y $B: V \rightarrow Z$ fue considerado en la sección

5.11 como un elemento de $\mathcal{L}(U \otimes V; W \otimes Z)$, espacio que es canónicamente isomorfo con $\mathcal{L}(U; W) \otimes \mathcal{L}(V; Z)$. Por tanto $A \otimes B$ se consideró como una aplicación lineal de $U \otimes V$ en $W \otimes Z$.

Posteriormente, en la sección **5.17**, hemos considerado el producto tensorial $\Phi \otimes \Psi$ de dos aplicaciones bilineales $\Phi: U \times U' \rightarrow U''$ y $\Psi: V \times V' \rightarrow W$ como una aplicación bilineal perteneciente a $\mathcal{B}(U \otimes V, U' \otimes V'; U'' \otimes W)$, espacio que es isomorfo canónicamente con $\mathcal{B}(U, U'; U'') \otimes \mathcal{B}(V, V'; W)$.

En las dos ocasiones mencionadas hemos dado al producto tensorial de dos aplicaciones una significación adecuada al fin inmediato que se trataba de alcanzar. En el primer caso pudimos definir el producto tensorial de matrices (sección **5.12**), y en el segundo caso fue posible establecer la dualidad entre productos tensoriales de espacios vectoriales.

En la presente sección vamos a tratar acerca del conjunto de las funciones $(p+q)$ -lineales definidas sobre $\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q$, con valores en el campo \mathbb{F} , en que V y V^* son espacios duales entre sí de dimensión finita, y en que p y q son cualesquiera. Dicho espacio de funciones será designado por $\mathcal{L}_q^p(V)$. En él definiremos primero el producto de dos funciones cualesquiera, y construiremos luego una álgebra tensorial. Convendremos en escribir

$$\mathcal{L}_0^p(V) = \mathcal{L}^p(V), \quad \mathcal{L}_q^0(V) = \mathcal{L}_q(V) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_0^0(V) = \mathbb{F}.$$

8.13-B. Producto tensorial de funciones multilineales definidas sobre los espacios duales V y V^* de dimensión n .

Según sabemos (**Pte. I, teorema 5.3.1**), entre $\mathcal{L}_1(V) = \mathcal{L}(V)$ y V^* existe el isomorfismo natural que a $f \in \mathcal{L}(V)$ hace corresponder el elemento $x^* \in V^*$ tal que $\langle x^*, x \rangle = f(x)$ para cada $x \in V$. Semejantemente, existe el isomorfismo natural de $\mathcal{L}^1(V) = \mathcal{L}(V^*)$ con V , que a $f^* \in \mathcal{L}(V^*)$ hace corresponder $x \in V$ tal que $\langle x^*, x \rangle = f^*(x^*)$ para cada $x^* \in V^*$. Estos isomorfismos son casos particulares del que consideramos a continuación.

Mediante una sencilla extensión del enunciado del ejercicio **5.13.5** (ver el ejercicio **8.13.1**) se obtiene el isomorfismo

$$\psi_q^p : \otimes_q^p V \rightarrow \mathcal{L}_q^p(V),$$

que cumple la condición

$$[\psi_q^p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^q)](x^1, \dots, x^p, x_1, \dots, x_q) = \langle x^1, y_1 \rangle \dots \langle x^p, y_p \rangle \langle y^1, x_1 \rangle \dots \langle y^q, x_q \rangle. \quad (8.13.1)$$

Resulta entonces que el par $(\mathcal{L}_q^p(V), \varphi_q^p)$, donde

$$\varphi_q^p : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathcal{L}_q^p(V)$$

es dada por $\varphi_q^p = \psi_q^p \circ \otimes$, en que \otimes designa a la aplicación universal $\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \otimes_q^p V$, es una representación del producto tensorial $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q$.

Por otra parte, sea $g : (\otimes_q^p V) \otimes (\otimes_s^r V) \rightarrow \otimes_{q+s}^{p+r} V$ el isomorfismo único, que existe según el teorema **5.10.2** y su corolario, tal que

$$g((y_1 \otimes \dots \otimes y_p \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^q) \otimes (y_{p+1} \otimes \dots \otimes y_{p+r} \otimes y^{q+1} \otimes \dots \otimes y^{q+s})) \\ = y_1 \otimes \dots \otimes y_{p+r} \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^{q+s}.$$

Según sabemos (**ejercicio 5.1.3**) la dimensión del espacio $L_q^p(V)$ es n^{p+q} , que es también la dimensión de $\otimes_q^p V$. Además, se comprueba fácilmente que si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{e^i\}$ es la base dual, y si J_p designa al conjunto de los números j_1, \dots, j_p del conjunto $\{1, \dots, n\}$ e I_q al conjunto de los números i_1, \dots, i_q del mismo conjunto $\{1, \dots, n\}$, al tensor

$$e_{I_q}^{J_p} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}$$

de la base correspondiente de $\otimes_q^p V$, la aplicación ψ_q^p le hace corresponder la función $E_{I_q}^{J_p}$ de la base correspondiente de $L_q^p(V)$, tal que

$$E_{I_q}^{J_p}(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{k_1}, \dots, e_{k_q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_p = J_p \text{ y } K_q = I_q \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Se cumple por tanto que

$$\psi_q^p(e_{I_q}^{J_p})(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{k_1}, \dots, e_{k_q}) = \\ \langle e^{i_1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle e^{i_p}, e_{i_p} \rangle \langle e^{j_1}, e_{k_1} \rangle \dots \langle e^{j_q}, e_{k_q} \rangle,$$

y por consiguiente resulta que

$$\psi_q^p(e_{I_q}^{J_p}) = E_{I_q}^{J_p}.$$

Los isomorfismos $\psi_q^p, \psi_s^r, \psi_{q+s}^{p+r}$ y g permiten definir el isomorfismo

$$\chi : \mathcal{L}_q^p(V) \otimes \mathcal{L}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{L}_{q+s}^{p+r}(V) ,$$

que se define mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \chi(E_{I_q}^{J_p} \otimes E_{K_s}^{L_r}) &= \psi_{q+s}^{p+r} \{ g[(\psi_q^p)^{-1}(E_{I_q}^{J_p}) \otimes (\psi_s^r)^{-1}(E_{K_s}^{L_r})] \} \\ &= \psi_{q+s}^{p+r} \{ g[e_{I_q}^{J_p} \otimes e_{K_s}^{L_r}] \} = \psi_{q+s}^{p+r}(e_{I_q}^{J_p} \otimes e_{K_s}^{L_r}) = E_{I_q}^{J_p} \otimes E_{K_s}^{L_r} . \end{aligned} \quad (8.13.2)$$

Resulta entonces [ejercicio 5.7.1] que el par $(\mathcal{L}_{q+s}^{p+r} V, \otimes_I)$ donde $\otimes_I = \chi \circ \otimes$, en que \otimes es la aplicación universal

$\mathcal{L}_q^p(V) \times \mathcal{L}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{L}_q^p(V) \otimes \mathcal{L}_s^r(V)$, es producto tensorial de $\mathcal{L}_q^p(V)$ y $\mathcal{L}_s^r(V)$.

Si Θ y X son funciones cualesquiera de $\mathcal{L}_q^p(V)$ y $\mathcal{L}_s^r(V)$ respectivamente, la linealidad permite deducir de (8.13.2) que se cumple la fórmula

$$\chi(\Theta \otimes X) = \psi_{q+s}^{p+r} \{ g[(\psi_q^p)^{-1}(\Theta) \otimes (\psi_s^r)^{-1}(X)] \} .$$

En particular, si suponemos que $\Theta = \psi_q^p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^q)$ y $X = \psi_s^r(y_{p+1} \otimes \dots \otimes y_{p+s} \otimes y^{q+1} \otimes \dots \otimes y^{q+s})$, resulta

$$\chi(\Theta \otimes X)(x^1, \dots, x^{p+r}, x_1, \dots, x_{q+s}) =$$

$$\begin{aligned} &[\psi_{q+s}^{p+r}(y_1 \otimes \dots \otimes y_{p+r} \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^{q+s})](x^1, \dots, x^{p+r}, x_1, \dots, x_{q+s}) = \\ &= \langle x^1, y_1 \rangle \dots \langle x^{p+r}, y_{p+r} \rangle \langle y^1, x_1 \rangle \dots \langle y^{q+s}, x_{q+s} \rangle = \\ &= \{ [\psi_q^p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p \otimes y^1 \otimes \dots \otimes y^q)](x^1, \dots, x^p, x_1, \dots, x_q) \} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ [\psi_s^r (y_{p+l} \otimes \dots \otimes y_{p+r} \otimes y^{q+l} \otimes \dots \otimes y^{q+s})] (x^{p+l}, \dots, x^{p+r}, x_{q+l}, \dots, x_{q+s}) \} \\ & = \Theta (x^l, \dots, x^p, x_l, \dots, x_q) X (x^{p+l}, \dots, x^{p+r}, x_{q+l}, \dots, x_{q+s}) . \end{aligned} \quad (8.13.3)$$

Este resultado se extiende de inmediato al caso en que Θ y X son funciones cualesquiera de $\mathcal{L}_q^p(V)$ y $\mathcal{L}_s^r(V)$.

De lo dicho podemos derivar la siguiente definición.

Definición 8.13.1. Dadas las funciones $\Theta \in \mathcal{L}_q^p(V)$ y $X \in \mathcal{L}_s^r(V)$ su producto es la función

$$\Theta X = \chi(\Theta \otimes X) \in \mathcal{L}_{q+s}^{p+r}(V),$$

y cumple por tanto la relación (8.13.3). Se puede escribir, puesto que $\chi(\Theta \otimes X) = (\chi \circ \otimes)(\Theta, X) = \Theta \otimes X$,

$$\Theta X = \Theta \otimes X .$$

8.13-C. Dualidad en los espacios de funciones multilineales.

Según vimos en la sección 8.9, los espacios $\mathcal{L}_q^p V$ y $\mathcal{L}_p^q V$, donde V es de dimensión finita, son duales entre sí. Por tanto sus isomorfos por el isomorfismo ψ_q^p también lo son: basta para comprobarlo, dadas las funciones $\Theta \in \mathcal{L}_q^p(V)$ y $X \in \mathcal{L}_p^q(V)$, introducir su producto escalar mediante la fórmula

$$\langle \Theta, X \rangle = \langle (\psi^p)^{-1}(\Theta), (\psi^q)^{-1}(X) \rangle .$$

En particular, en virtud de (8.9.1), los productos escalares de los elementos de las bases $\{E_{I_q}^{J_p}\}$ de $L_q^p(V)$ y $\{E_{L_p}^{K_q}\}$ de $L_p^q(V)$ son

$$\langle E_{I_q}^{J_p}, E_{L_p}^{K_q} \rangle = \langle e_{I_q}^{J_p}, e_{L_p}^{K_q} \rangle = \langle e^{k_1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle e^{k_q}, e_{i_q} \rangle \langle e^{j_1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle e^{j_p}, e_{i_p} \rangle,$$

y por tanto

$$\langle E_{I_q}^{J_p}, E_{L_p}^{K_q} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } J_p = L_p \text{ e } I_q = K_q \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Luego, dichas bases son duales.

Además, si

$$\Theta = \sum_{I_q, J_p} \xi_{J_p}^{I_q} E_{I_q}^{J_p} \quad \text{y} \quad X = \sum_{L_p, K_q} \eta_{K_q}^{L_p} E_{L_p}^{K_q},$$

se obtiene

$$\langle \Theta, X \rangle = \sum_{I_q, J_p} \sum_{L_p, K_q} \xi_{J_p}^{I_q} \eta_{K_q}^{L_p} \langle E_{I_q}^{J_p}, E_{L_p}^{K_q} \rangle = \sum_{I_q, J_p} \xi_{J_p}^{I_q} \eta_{I_q}^{J_p}.$$

Ahora bien, se tiene

$$\Theta(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \xi_{J_p}^{I_q}$$

y

$$X(e^{k_1}, \dots, e^{k_q}, e_{l_1}, \dots, e_{l_p}) = \eta_{L_p}^{K_q};$$

luego puede escribirse

$$\langle \Theta, X \rangle = \sum_{I_q, J_p} \Theta(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) X(e^{k_1}, \dots, e^{k_q}, e_{l_1}, \dots, e_{l_p}),$$

fórmula que proporciona el valor de $\langle \Theta, X \rangle$ en términos de los valores que toman Θ y X en conjuntos de los vectores de las bases duales de V y V^*

8.13-D. Algebras tensoriales de las funciones multilineales.

Las sumas directas

$$\mathcal{L}^{\otimes}(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{L}^p(V),$$

$$\mathcal{L}_{\otimes}(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{L}_q(V),$$

$$\mathcal{A}(V) = \bigoplus_{p,q}^{\infty} \mathcal{L}_q^p(V),$$

son álgebras, en cada una de las cuales la multiplicación resulta de la fórmula

$$\left(\sum_{p,q}^{\infty} \Theta_q^p \right) \left(\sum_{r,s}^{\infty} X_s^r \right) = \sum_{p,q,r,s}^{\infty} \left(\Theta_q^p X_s^r \right),$$

donde $\Theta_q^p \in \mathcal{L}_q^p(V)$ y $X_s^r \in \mathcal{L}_s^r(V)$.

$\mathcal{L}^{\otimes}(V)$, $\mathcal{L}_{\otimes}(V)$ y $\mathcal{A}(V)$ se llaman *álgebras tensoriales contravariante, covariante y mixta*, respectivamente.

***Ejercicio 8.13.1.** Si V es de dimensión finita, y si

$$\varphi_q^p : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathcal{L}_q^p(V)$$

es la aplicación $(p+q)$ -lineal tal que

$$\begin{aligned} [\varphi_q^p(y_1, \dots, y_p, y^1, \dots, y^q)](x^1, \dots, x^p, x_1, \dots, x_q) \\ = \langle x^1, y_1 \rangle \dots \langle x^p, y_p \rangle \langle y^1, x_1 \rangle \dots \langle y^q, x_q \rangle, \end{aligned}$$

entonces el par $(\mathcal{L}_q^p(V), \varphi_q^p)$ es una representación del producto tensorial $\otimes_q^p V$; y se tiene, si ψ_q^p cumple la condición (8.13.1),

$$\varphi_q^p = \psi_q^p \circ \otimes$$

donde \otimes designa a la aplicación universal

$$\otimes : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \otimes_q^p V.$$

Si se identifica a V^* con $\mathcal{L}(V)$ en la forma conocida, puede escribirse

$$\begin{aligned} [\varphi_q^p(y_1, \dots, y_p, y^1, \dots, y^q)](x^1, \dots, x^p, x_1, \dots, x_q) = \\ x^1(y_1) \dots x^p(y_p) y^1(x_1) \dots y^q(x_q). \end{aligned}$$

INDICE DE SIMBOLOS

$U_a(\delta)$, 2
$\Phi(x,y)$, 11
K_1, K_2, K , 12
$\text{Ker } \Phi$, 13
$\Phi(x)$, 23
V^+ , 27
V^- , 27
r , 32
s , 32
$N_1(r)$, 95
$N_2(r)$, 96
$(\ , \)$, 99
$\langle \ , \ \rangle$, 99
$\text{Im } f$, 45
\otimes , 154
\approx , 173

INDICE

- adición de tensores, 240
 - de tensores euclidianos, 266
- álgebra tensorial contravariante, 294
 - tensorial covariante, 294
 - tensorial mixta, 300
- álgebras tensoriales de las funciones multilíneas, 310
- aniquilador, 282
- aplicación lineal inducida por una aplicación bilineal, 148
 - universal, 145, 177
- asociatividad del producto tensorial, 176, 185
- autodual, 17

- bajar índices, 257

- centro de una cuádriga, 71
- clasificación afín, 87, 95, 96, 97
- componentes antisimétricas, 246
 - cartesianas, 262
 - contravariantes, 252
 - contravariantes de un vector euclidiano, 253
 - covariantes, 252
 - covariantes de un vector euclidiano, 253
 - de un tensor, 286
 - simétricas, 245
- cono, 52, 59
- contracción de los índices, 241
 - de tensores euclidianos, 267
 - de un tensor, 299
- convenio de Einstein, 226
- criterio general de tensorialidad, 244
- criterios de tensorialidad, 232
- cuádriga, 42
 - conjugada, 107
 - imaginaria, 42
- cuádrigas afinequivalentes, 87
 - métricamente equivalentes, 118
 - semejantes, 62
- curvas cónicas, 96

- desigualdad de Schwarz, 25
- dual de la suma directa de dos subespacios, 282
- dualidad en los espacios de funciones multilíneas, 308

- ejes principales, 106
 - principales conjugados, 106, 118
- equivalencia métrica, 118
- espacio tangente, 52
 - tensorial afín, 219

- factorización de una aplicación bilineal mediante aplicación universal, 145
- forma bilineal diagonal, 37
 - cuadrática, 24
 - cuadrática diagonal, 37
 - cuadrática fundamental, 264
 - normal de la ecuación de una cuádriga de un espacio afín, 77
 - normal métrica de la ecuación de una cuádriga con centro, 106

- fórmulas de transformación de las com
 ponentes de un tensor afín, 227
- función bilineal, 7
- bilineal antisimétrica, 249
 - bilineal definida positiva
 (negativa), 25
 - bilineal degenerada, 12
 - bilineal indefinida, 26
 - bilineal no degenerada, 12
 - bilineal semidefinida posi-
 va (negativa), 25
 - bilineal simétrica, 249
 - cuadrática, 18
 - lineal, 7
 - p -lineal, 7
 - producto escalar, 263
 - producto interno, 263
- hiperplano tangente, 52
- homomorfismo asociado a una forma
 bilineal simétrica, 17
 canónico, 277
- identidad del paralelogramo, 18
- imagen de una aplicación bilineal, 145
- del producto tensorial de apli-
 caciones lineales, 205
- índice, 34
- inyecciones canónicas, 273, 275
- isomorfismo canónico de espacios de
 aplicaciones bilineales, 144
- ley de inercia de Sylvester, 37
- matriz de una forma bilineal, 14
- multiplicación de tensores, 240
- de tensores euclidianos,
 267
- normal a una cuádriga, 103
- núcleo, 13
- del producto tensorial de apli-
 caciones lineales, 205
- operador de contracción, 299
- orden de un tensor, 296
- ordenación canónica de los valores
 propios, 101
- origen, 41
- p -ésima potencia tensorial de un es-
 pacio euclideo, 269
- polar respecto de una cuádriga, 84
- potencia tensorial, 284
- producto de Kronecker de matrices, 196
- de tensores, 285, 301
 - interno de tensores
 euclidianos, 270
 - tensorial de aplicaciones li-
 neales, 188
 - tensorial de funciones multi-
 lineales, 305
- propiedad de factorización única, 146,
 178
- proyecciones canónicas, 273, 275
- punto, 41
- radical izquierdo (derecho), 12
- recta normal a una cuádriga, 103
- representación del producto tensorial,
 173
- signatura, 34
- subespacios complementarios, 280
- disjuntos, 277
- subir índices, 257
- suma de subespacios de un espacio vec-
 torial, 278
- directa de espacios vectoriales,
 272, 274
 - directa de subespacios de un es-
 pacio vectorial, 276
- superficies de segundo grado, 97
- tensor, 145, 180
- antisimétrico, 248
 - de Kronecker, 231
 - descomponible, 145, 284, 296

- euclideo, 254
- euclideo antisimétrico, 260
- euclideo simétrico, 260
- fundamental, 264
- métrico, 264
- simétrico, 247
- tensores cartesianos, 262
 - contravariantes, 220
 - covariantes, 220
 - de orden cero, 220
 - mixtos, 220, 296
- teorema de equivalencia métrica de las cuádras de un espacio euclideo, 130
- topología inicial, 1
 - natural, 5
 - standard, 5
- traza de un endomorfismo, 198

- unicidad del producto tensorial, 147, 178

- valores propios de una función bilineal simétrica, 99
- vector de posición, 41
 - euclideo, 253
- vértice de un cono, 52
 - de una cuádras de un espacio euclideo, 108

Algebra lineal y multilineal. Segunda parte de José Tola Pasquel se terminó de imprimir el mes de enero de 1989, en el Taller Gráfico de Tarea, Asociación de Publicaciones Educativas, 6 de Agosto 425, Tlf. 238948, Lima 11, Perú. Se hicieron mil ejemplares.

PUBLICACIONES RECIENTES

TEOFILO ALTAMIRANO

Cultura andina y pobreza urbana: aymaras en Lima metropolitana. 1988.
109 p.

ANNE MARIE HOCQUENGHEM

Iconografía mochica. 2a. ed. 1988. 280 p. + 214 láminas

JEFFREY KLAIBER S.J.

La Iglesia en el Perú: su historia social desde la Independencia. 2a. ed. 1988.
530 p.

MAYNARD KONG

Cálculo diferencial. 1988. XIV + 540 p.

Lenguaje de Programación Pascal. 3a. ed. 1988. XII + 354 p.

Lenguaje de Programación C. 1988. XIV + 140 p.

MANUEL M. MARZAL S.J.

La transformación religiosa peruana. 2a. ed. 1988. 458 p.

El sincretismo iberoamericano; un estudio comparativo sobre los quechuas (Cusco), los mayas (Chiapas) y los africanos (Bahía). 2a. ed. 1988. 235 p.

Los caminos religiosos de los inmigrantes de la Gran Lima. El caso de El Agustino. 1988. 454 p.

FELIPE OSTERLING PARODI

Las obligaciones. 2a. ed. 1988. 213 p. (*Biblioteca Para leer el Código Civil, Vol. VI*).

MARCIAL RUBIO CORREA

El sistema jurídico (Introducción al Derecho). 4a. ed. 1988. XVI + 365 p.

FERNANDO DE TRAZEGNIES GRANDA

La responsabilidad extracontractual. 1988. 2 t. (*Biblioteca Para leer el Código Civil, Vol. IV*).

FERNANDO DE TRAZEGNIES GRANDA (EDITOR)

Para leer el Código Civil. Vol. I. 8a. ed. 1988. 241 p.

Para leer el Código Civil. Vol. II. 5a. ed. 1988. 171 p.

