Capítulo 4

Integración Múltiple

Este capítulo está dedicado a la Teoría de la Integración. En la primera sección estudiamos la integral de línea: Introducimos el concepto de curvas equivalentes y presentamos dos interpretaciones físicas de ella, presentamos los dos teoremas fundamentales del cálculo para integrales de línea y mostramos una aplicación al principio de conservación de la energía. Finalmente hacemos un estudio de los campos conservativos o gradientes.

La segunda y tercera sección están dedicadas a establecer los principios básicos de la integral doble de campos escalares definidos en regiones de $\mathbb{R}^2$.

La cuarta sección la dedicamos a las aplicaciones de la integral doble a problemas como: volúmenes bajo una superficie, áreas de regiones limitadas por curvas, cálculo de centros de gravedad y cálculo de volúmenes de revolución.

La quinta y sexta sección la dedicamos al estudio del Teorema de Green que constituye uno de los teoremas más importantes del cálculo. Lo hacemos tanto para regiones simplemente conexas como múltiplemente conexas. Como consecuencia del Teorema de Green deducimos las fórmulas de Green, de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, y damos aplicaciones al cálculo de regiones planas y al número de giros que una curva da alrededor de un punto.

En la última sección estudiamos una de las técnicas más importantes de la teoría de la integración, la cual es el cambio de variable. Damos ejemplos al caso de coordenadas polares y cambio de coordenadas por transformaciones lineales.

En la octava sección mostramos cómo las ideas expuestas en la sección séptima se pueden extender al caso de campos escalares de más de dos variables. En particular estudiamos el caso de cambios de variable por coordenadas cilíndricas y esféricas.

Cada sección tiene un grupo de problemas que el estudiante debe resolver. Adicionalmente hemos incluído en cada sección, una corta autoevaluación que el estudiante debe realizar frente a su computador. Es importante que el estudiante haga las autoevaluciones para garantizar la cabal comprensión de cada tema.

4.1 Integrales Dobles

En esta sección estudiaremos la integral doble definida sobre conjuntos acotados de $\mathbf{R}^2$. Denotaremos con $\mathcal{R}$ el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$. Si $A = \{x_0 = a, x_1, x_2, ...x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$ y $B = \{y_0 = c, y_1, y_2, ...y_m = d\}$ es una partición de $[c,d]$ entonces $\mathbf{P} = A \times B$ será una partición del rectangulo $\mathcal{R}$. Los subrectángulos de $\mathcal{R}$ definidos por la partición $\mathbf{P}$ los denotaremos con $\mathcal{R}_{ij}$.

Definición 4.1 *Una función $f : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(X) = c_{ij}$, para todo $X \in \mathcal{R}_{ij}$ se llama una función escalonada.*

Es facil ver que si f y g son funciones escalonadas definidas por las particiones $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ de $\mathcal{R}$ respectivamente entonces $\alpha f + \beta g$, para todo α y β números reales, es una función escalonada definida por la partición $\mathbf{P} \cup \mathbf{P}'$.

Definición 4.2 *Sea $f : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ una función escalonada. Definimos la integral doble de f sobre $\mathcal{R}$ como*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(x,y) = k$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f &= k(b-a)(d-c) \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx \end{aligned}$$

La fórmula permanece válida para funciones escalonadas puesto que éstas son constantes en cada subrectángulo $\mathcal{R}_{ij}$.

Propiedades

Para f y g funciones escalonadas definidas en $\mathcal{R}$ tenemos las siguientes propiedades:

1. $\iint_{\mathcal{R}} \alpha f + \beta g = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f + \beta \iint_{\mathcal{R}} g$.
2. $\iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{\mathcal{R}_1} f + \iint_{\mathcal{R}_2} f$, en donde $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1^{\circ} \cap \mathcal{R}_2^{\circ} = \Phi$.
3. Si h y g son escalonadas en $\mathcal{R}$ y $h \le g$ entonces $\iint_{\mathcal{R}} h \le \iint_{\mathcal{R}} g$.

La integral de una función acotada

Sea f una función acotada sobre $\mathcal{R}$, esto es, $|f(x,y)| \le M$, para alguna constante $M > 0$. Consideremos el conjunto Ψ de todas las funciones escalonadas h y g definidas sobre $\mathcal{R}$ tales que $h \le f \le g$. Puesto que f es acotada, Ψ no es vacío.

Definición 4.3 *Si para toda h, $g \in \Psi$ existe un único número I tal que $\iint_{\mathcal{R}} h \le I \le \iint_{\mathcal{R}} g$, decimos que f es integrable sobre $\mathcal{R}$ y $\iint_{\mathcal{R}} f = I$.*

Integral Superior e Inferior de f

Sea

$$S = \left\{ \iint_{\mathcal{R}} h, \ h \le f, \ h \ \text{escalonada sobre } \mathcal{R} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \iint_{\mathcal{R}} g, \ \ g \ge f, \ g \ \text{escalonada sobre } \mathcal{R} \right\}$$

Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} h \le \sup S \le \inf T \le \iint_{\mathcal{R}} g.$$

Llamamos $\sup S = I_{\text{inf}}(f)$, la integral inferior de f y llamamos $\inf T = I_{\text{sup}}(f)$, la integral superior de f.

De la definición anterior se sigue inmediatamente que si $I_{\text{inf}}(f) = I_{\text{sup}}(f)$ entonces f es integrable y

$\iint_{\mathcal{R}} f = I_{\text{inf}}(f) = I_{\text{sup}}(f)$.

En esta sección estudiaremos la integral de funciones continuas definidas en $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2$. Observemos que si f es integrable en $\mathcal{R}$ y para cada $y \in [c,d]$ la integral

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

existe y además $\int_c^d A(y)dy$ existe, entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy.$$

En efecto: Para cualquier par de funciones escalonadas h y g tales que $h \leq f \leq g$ se cumple que

$$\int_a^b h(x,y)dx \leq \int_a^b f(x,y)dx \leq \int_a^b g(x,y)dx,$$

por lo tanto

$$\iint_{\mathcal{R}} h \leq \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy \leq \iint_{\mathcal{R}} g.$$

Puesto que f es integrable,

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

Queremos demostrar que la fórmula anterior es válida para funciones continuas definidas sobre $\mathcal{R}$.

Teorema 4.1 *Sea f una función continua sobre el rectángulo $\mathcal{R}$. Entonces f es integrable y se satisface la igualdad anterior.*

Demostración: Puesto que f es continua y $\mathcal{R}$ es un conjunto compacto entonces f es acotada. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y consideremos una partición de $\mathcal{R}$ tal que en cada subrectángulo $\mathcal{R}_{ij}$

$$\max_{\mathcal{R}_{ij}} f - \min_{\mathcal{R}_{ij}} f < \varepsilon.$$

Llamemos $\max_{\mathcal{R}_{ij}} f = M_{ij}$ y $\min_{\mathcal{R}_{ij}} f = m_{ij}$. Entonces las funciones escalonadas g y h definidas por M_{ij} y m_{ij} respectivamente satisfacen

$$\iint_{\mathcal{R}} g - \iint_{\mathcal{R}} h \leq \varepsilon (d-c)(b-a).$$

Hacemos que $\varepsilon \to 0$ y obtenemos que f es integrable.

Finalmente, puesto que f es continua, lo es con respecto a cada una de sus variables. Esto nos dice que $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ existe. Además, es fácil ver que $A(y)$ es continua y por lo tanto $\int_c^d A(y)dy$ existe. Concluímos, entonces, que (4.3.1) se satisface.

Otras regiones de integración

Hasta ahora hemos considerado integrales sobre rectángulos. Sea $S \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Sea, entonces $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbf{R}^2$ tal que $S \subset \mathcal{R}$. Si f es una función continua definida en $\overline{S}$. Definimos la integral $\iint_S f$ de la siguiente manera: Sea

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ si } (x,y) \in S \\ 0 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{R} - S \end{cases}$$

Entonces definimos $\iint_S f = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}$. La dificultad de extender la integral a regiones más generales radica en que la nueva función $\tilde{f}$ no es continua en $\mathcal{R}$ y no sabemos si $\tilde{f}$ es integrable. Las discontinuidades se están presentando en ∂S. Para sobrepasar esa dificultad es necesario introducir el concepto de **contenido nulo** de un conjunto para concluír que una función continua en $\mathcal{R}$, salvo un subconjunto de contenido nulo, es integrable en $\mathcal{R}$.

Definición 4.4 *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$. Decimos que A tiene contenido nulo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos $\mathcal{R}_i, i = 1, 2..n$ tales que $A \subset \cup \mathcal{R}_i$ y $\sum |\mathcal{R}_i| < \varepsilon$, en donde $|\mathcal{R}_i|$ representa el área del rectángulo $\mathcal{R}_i$.*

Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ visto como un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ es de contenido nulo, más no es de contenido nulo si lo miramos como subconjunto de $\mathbf{R}$.

También, sea ϕ una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces ϕ es uniformemente continua. Esto nos sirve para probar que el conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y = \phi(x)\right\}$ es de contenido nulo.

Teorema 4.2 *Sea f una función acotada sobre el rectángulo $\mathcal{R}$. Si el conjunto D de discontinuidades de f es de contenido nulo, entonces f es integrable sobre Q.*

Demostración: Sea $M > 0$ tal que $|f| \leq M$. Sean ε, $\delta > 0$ escogidos arbitrariamente. Tomemos, entonces, una partición de $\mathcal{R}$ tal que la suma de las áreas de los subrectángulos $\mathcal{R}_{ij}$ que contienen a D sea menor que δ. Los otros subrectángulos, en los que f es continua, los escogemos tales que en cada uno de ellos $\max f - \min f \leq \varepsilon$. Podemos definir las siguientes funciones escalonadas: $h = \min f$ sobre los subrectángulos donde f es continua y sobre los subrectángulos que contienen a D la definimos como $h = -M$. Así mismo, $g = \max f$ sobre los subrectángulos en donde f es continua y $g = M$ sobre los subrectángulos que contienen a D.

Tenemos, entonces, que

$$0 \leq \iint_{\mathcal{R}} g - h \leq \varepsilon |\mathcal{R}| + 2M\delta.$$

Esto nos indica que $0 \leq I_{\sup}(f) - I_{\inf}(f) \leq \varepsilon |\mathcal{R}| + 2M\delta$. Si hacemos que $\varepsilon, \delta \to 0$, concluímos que f es integrable sobre $\mathcal{R}$.

Por ejemplo, sobre conjuntos de la forma

$$S_1 = \{(x, y\}, \phi(x) \leq y \leq \psi(x), x \in [a, b]\,,\ \phi, \psi \ \text{ continuas}\}$$

tenemos que
$\iint_{S_1} f = \iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ dy \right\} dx$
O sobre conjuntos del tipo

$$S_2 = \{(x, y\}, \phi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\,,\ \phi, \psi \ \text{ continuas}\}$$

tenemos que
$\iint_{S_2} f = \iint_Q \tilde{f} = \int_c^d \left\{ \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\ dx \right\} dy$
Una gran variedad de conjuntos de $\mathbf{R}^2$ los podemos reducir a una reunión de conjuntos del tipo S_1 o S_2.

Ejemplo 4.1 *Sea $f(x, y) = xy^2$. Calculemos $\iint_S f(x, y)$, en donde S es la región que se encuentra entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$.*

Cómo se indica en la figura,

$$\iint_S xy^2\ dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} xy^2\ dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x^4 - x^7}{3}\ dx = \frac{1}{40}$$

Y también,

$$\iint_S xy^2\ dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{y}^{\sqrt{y}} xy^2\ dx \right\} dy = \int_0^1 \frac{y^3 - y^4}{2}\ dy = \frac{1}{40}$$

4.1.1 Cambio de variable

En esta sección estudiaremos el cambio de variable en una integral doble. En el caso de una sola variable sabemos que si $g : [a,b] \to [c,d]$ es una aplicacion biyectiva y diferenciable entonces

$$\int_{g(a)=c}^{g(b)=d} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

En el caso de dos variables deduciremos, con la ayuda del Teorema de *Green.*, una fórmula similar a la anterior.

Sea $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación diferenciable que transforma un conjunto abierto y acotado $\mathcal{R}$ de $\mathbf{R}^2$ en otro conjunto S de $\mathbf{R}^2$. Escribimos $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. La derivada de F en un punto $(u,v) \in R$ la podemos representar por medio de la matriz

$$F'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

El determinante de $F'(u,v)$ que notaremos cómo $J_F(u,v)$ lo llamaremos el **jacobiano** de F en el punto (u,v). La expresión que obtendremos es:

$$\iint_S f(x,y)dx\ dy = \iint_{\mathcal{R}} f(x(u,v), y(u,v))\, |J_F(u,v)|\, du\ dv, \quad \cdots (1)$$

en donde f es un campo escalar integrable en S.

En el caso en que $f = 1$ el miembro izquierdo de $\cdots (1)$ representa el área de la región de integración S y entonces

$$|S| = \iint_S dx\ dy = \iint_{\mathcal{R}} |J_F(u,v)|\, du\ dv. \quad \cdots (2)$$

Tenemos razones de tipo geométrico para aceptar la validéz de lo anterior. Consideremos el rectángulo de lados Δu y Δv que se indica en la figura.

Para v fijo, $\alpha(u) = (x(u,v), y(u,v))$ representa una curva cuya imagen se encuentra en S y cuyo vector tangente es

$$V_1 = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \right)$$

Análogamente, para u fijo $\beta(v) = (x(u,v), y(u,v))$ define otra curva con imagen en S cuyo vector tangente es

$$V_2 = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \right).$$

Podemos pensar que para incrementos Δu y Δv muy pequeños el área del pequeño *rectángulo* transformado por la aplicación F es casi igual al área del paralelogramo que definen los vectores $\Delta u.V_1$ y $\Delta v.V_2$. Es fácil ver que esta área es $|J_F(u,v)|\,(\Delta u.\Delta v)$. Entonces $|J_F(u,v)|$ es un factor de ampliación o contracción de áreas.

Antes de dar una prueba de (1) veamos algunos ejemplos.

Coordenadas polares

La aplicación $F(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, en donde

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r \; sen\; \theta, \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

define una aplicación del rectángulo $R = [0,a] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en el primer cuadrante D de un círculo de centro en el origen y radio a. Es claro que $J_F(r,\theta) = r$. De acuerdo con (2)

$$\begin{aligned} \iint_D \; dx\,dy &= \iint_R \; r dr\; d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r dr \right\} d\theta \\ &= \frac{\pi a^2}{4}, \end{aligned}$$

como era de esperarse.

Es claro de (1) que la fórmula no es válida si $J_F(u,v) = 0$ sobre conjuntos abiertos de la región R. La fórmula permanece válida si $J_F(u,v) = 0$ sobre subconjuntos de contenido nulo. Por ejemplo $J_F(r,\theta) = 0$ sobre puntos de la forma $(0,\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, que constituyen un subconjunto de R de contenido nulo.

Transformaciones lineales

La aplicación $F = (x(u,v), y(u,v))$, en donde

$$\begin{aligned} x(u,v) &= au + bv \\ y(u,v) &= cu + dv, \end{aligned}$$

es una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ en si mismo y $J_F(u,v) = ad - bc$. Vemos entonces que para utilizar transformaciones lineales en lo anterior es necesario que sean inyectivas.

Ilustramos su uso en el siguiente

Ejemplo 4.2 *Calculemos* $\iint_S \; e^{\frac{y-x}{x+y}} dxdy$ *en donde* S *es la región de* $\mathbf{R}^2$ *limitada por los ejes coordenados y por la recta* $x + y = 2$.

Hacemos el cambio de variable $y - x = u$, $x + y = v$, ésto es, $F = (x(u,v), y(u,v))$, en donde

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \frac{v-u}{2} \\ y(u,v) &= \frac{v+u}{2}. \end{aligned}$$

Entonces $J_F(u,v) = -\frac{1}{2}$. Ahora, es fácil ver que la región R limitada por las rectas $v = 2$, $v = u$ y $v = -u$ es transformada en la región S por la transformación lineal F anterior.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iint_S e^{\frac{y-x}{x+y}}dxdy &= \tfrac{1}{2}\iint_R e^{\frac{u}{v}}dudv \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^2\left\{\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du\right\}dv \\ &= e-\tfrac{1}{e}.\end{aligned}$$

Prueba de (1):

$$\iint_S f(x,y)dx\ dy = \iint_R f(x(u,v),y(u,v))\,|J_F(u,v)|\,du\ dv$$

Para probar (1) primero probamos (2)Para probar lo último primero probamos lo anterior. Supongamos que el conjunto S es un rectángulo. Denotemos con r y s las curvas que circundan las regiones R y S respectivamente, teniendo en cuenta que $F\circ r = s$.

Por el Teorema de Green, para $Q(x,y)=x$ y $P(x,y)=0$,tenemos

$$\begin{aligned}\iint_S dxdy &= \iint_S \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}-\tfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \oint_s Pdx+Qdy \quad \cdots(4) \\ &= \oint_s xdy\end{aligned}$$

De otra parte

$$\begin{aligned}J_F(u,v) &= \tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial v}-\tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{\partial y}{\partial u} \\ &+x\tfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-x\tfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial u}\left(x\tfrac{\partial y}{\partial v}\right)-\tfrac{\partial}{\partial v}\left(x\tfrac{\partial y}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

De nuevo usamos el Teorema de *Green* y obtenemos

$$\iint_R J_F(u,v)dudv = \oint_r x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

La prueba quedará terminada si probamos que

$$\oint_s xdy = \oint_r x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv. \quad \cdots(5)$$

En efecto, supongamos que $r(t)=(u(t),v(t))\,,\ t\in[a,b]$. Entonces

$$s(t) = (x\,(u(t),v(t))\,,y\,(u(t),v(t)))\,.$$

Por lo tanto

$$s'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v}v',\frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right). \quad \cdots(6)$$

De (6) se sigue inmediatamente (5).

Ya hemos probado (2). Para ver (4) procedemos así: Primero observamos que de (2) se sigue, claramente, (1) para funciones f escalonadas. Ahora, si f es acotada e integrable, para todo par de funciones escalonadas h y g tales que $h\le f\le g$ tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_S h\ dxdy &= \iint_R h\ |J_F(u,v)|\,dudv \\ &\le \iint_R f\ |J_F(u,v)|\,dudv \qquad (7) \\ &\le \iint_R g\ |J_F(u,v)|\,dudv \\ &= \iint_S g\ dxdy.\end{aligned}$$

Puesto que f es integrable, deducimos de (7) la validez de (1).

4.1.2 Aplicaciones de la integral doble

En esta sección daremos algunas aplicaciones de la integral doble.

1. Volúmenes

El conjunto

$$\Psi = \left\{(x, y, z)\,,\ z = f(x, y),\ \ (x, y) \in S = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2\right\}$$

representa una superficie en $\mathbf{R}^3$. Entonces $\iint_S f$ representará el volumen del sólido que está limitado por arriba con la superficie Ψ y por debajo con la región S. También tenemos

$$\iint_Q f = \int_c^d A(y)dy,$$

en donde $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Ahora, $A(y)$ representa el área bajo la curva $f(x, y)$, en donde estamos dejando a y fijo. Entonces de la

ecuación nos dice que un volumen es igual a la *suma* de las áreas $A(y)$ cuando y varía ente c y d.

En el caso de regiones del tipo S_1 o S_2 que consideramos en la sección 3 de este capítulo, procedemos de manera similar. Consideremos el siguiente

Ejemplo 4.3 *Sea*

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

y

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbf{R^2}\ , x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

Entonces Ψ representa el hemisferio superior de una esfera de centro en el origen y radio r. Por lo tanto $\iint_S f$ representará el volumen de la semiesfera. Si utilizamos la simetría de la esfera para calcular su volumen vemos que el volumen de la semiesfera de radio r es

$$V(r) = 4\iint_N \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

en donde N es el primer cuadrante del círculo de centro en el origen y radio r. Esto es,

$$V(r) = 4\int_0^r \left\{\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dy\right\} dx$$

Sabemos que

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{1}{4}a^2\pi,$$

por lo tanto

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dy = \frac{1}{4}\left(r^2 - x^2\right)\pi.$$

Es así cómo

$$V(r) = 4\int_0^r \frac{1}{4}\left(r^2 - x^2\right)\pi dx = \frac{2}{3}\pi r^3$$

El volumen de la esfera completa será $\frac{4}{3}\pi r^3$

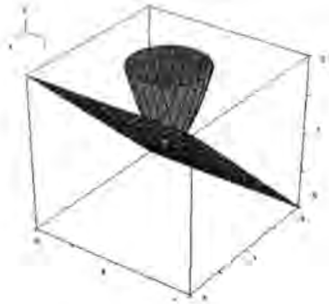

Figure 4-1:

Ejemplo 4.4 *Calcular el volumen del sólido encerrado entre las superficies* $f(x,y) = z = x^2 + y^2$ *y el plano* $g(x,y) = z = 1$.

Solución: Si hacemos $f(x,y) = g(x,y)$ vemos que las dos superficies se cortan para valores de x e y tales que $x^2 + y^2 = 1$.

Por lo tanto el volumen del sólido es

$$\iint_S \{g(x,y) - f(x,y)\}\, dx\ dy$$

Esto es:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dydx = \tfrac{1}{2}\pi$$

2. Areas

Es Claro que $\iint_S dx\ dy$ representa el área de la región S. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.5 *Sea* $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$, *entonces* $\iint_S\ dx\ dy$ *es el área del círculo de centro en el origen y radio* r. *Es así cómo*

$$\iint_S dxdy = \int_{-r}^{r} \left\{ \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right\} dx = \pi r^2$$

Ejemplo 4.6 *Hallemos el área de la región limitada por las curvas* $y = x^2 - 2$ *y* $y = x$. *Las curvas se cortan en los puntos* $x = -1$ *y* $x = 2$ *y cómo se indica en la figura*

la región S está limitada, por arriba, por la curva $y = x$ y, por debajo, por la curva $y = x^2 - 2$. Entonces

$$\iint_S dxdy = \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2-2}^{x} dy \right\} dx = \frac{9}{2}$$

Ejemplo 4.7 *Hallar el volumen del sólido limitado entre las superficies*

$$\mathcal{S} : z = x^2 + y^2 \quad y \quad \mathcal{K} : z = x.$$

Solución.

Sea

$$\Gamma : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \cdots (1) \\ z = x \quad \cdots (2) \end{cases}$$

Considere $- := \text{Proy}_{XY}\ \mathcal{C}$: eliminando z

$x^2 + y^2 = x \Longrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ z = x \end{cases}$$

Proyectando $\mathcal{C}$ sobre el plano XY

$$\Gamma := \text{Proy}_{XY}\ \mathcal{C} : \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Límites variables :$-\sqrt{x - x^2} \leq y \leq \sqrt{x - x^2}$

Límites constantes :$0 \leq x \leq 1$.

Así,

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{x - x^2} \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\right\}$$

Por tanto, el volumen viene dado por:

$$V(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{R}} (z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}})\, dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \left[x - (x^2 + y^2)\right] dy\ dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \left[(x - x^2) - y^2\right] dy\ dx = \int_0^1 \left[(x - x^2)\, y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \left\{\left[(x - x^2)\sqrt{x - x^2} - \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x - x^2}\right)^3\right] - \left[-(x - x^2)\sqrt{x - x^2} + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x - x^2}\right)^3\right]\right\} dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{x - x^2}\right)^3 dx = \int_0^1 \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2}\right)^3 dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{4}{3}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^3 dx$$

Haciendo cambio de variable trigonométrico: $2x - 1 = \sin\theta \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{2}\cos\theta\ d\theta$

$\left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{1 - \sin\theta^2}\right)^3 = \cos^3\theta$

Si $x = 0 \Longrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Si $x = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

Así,

$$V(\mathcal{S}) = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^3 dx = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{8}u^3.$$

Ejemplo 4.8 *Calcular la* ***masa*** *de una lámina que tiene la forma de la región $\mathcal{R}$ limitada por las curvas*

$$y = x^2\ , \quad y = 1,$$

y la ***densidad*** *en cada punto (x, y) de la lámina es*

$$\delta(x,y) = x^2 + y^2.$$

Solución.
La parábola se cortan con la recta $y = 1$, en los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$.
Observemos que la región $\mathcal{R}$, es una región de tipo I.Por lo podemos escribir :

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\right\}$$

$$M = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{1}$$
dx

$$M = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 + \tfrac{1}{3}\right) - \left(x^4 - \tfrac{1}{3}x^6\right)\right] dx = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 + \tfrac{1}{3}\right) - \left(x^4 - \tfrac{1}{3}x^6\right)\right] dx$$

$$M = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{21}x^7\right]_{-1}^{1} = \tfrac{88}{105}$$

Ejemplo 4.9 *Calcular*

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\, dx\ dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por las curvas

$$y = \sqrt{4 - x^2}\ , \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad y = |x|\,.$$

Solución.
Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos
De : $y = \sqrt{4 - x^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow r = 2.$
De : $y = \sqrt{1 - x^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r = 1.$
As´, $1 \le r \le 2.$
De : $y = x \Longrightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$
De : $y = -x \Longrightarrow r\sin\theta = -r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = -1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$
As´, $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}.$
Por lo tanto la región $\mathcal{R} = \left\{(r,\theta) : \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}, 1 \le r \le 2\right\}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{r}\right) r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\cos^2\theta dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2\theta\, [r]_1^2\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{3\pi}{4} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2}\right] - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right]\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{r}\right) r dr d\theta = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.10 *Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cono* $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ *e inferiormente por el disco* $\mathcal{R} : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Solución.

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy$$

Calcularemos la integral pasando a coordenadas polares.

Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos

De : $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, que podemos simplificar para obtener $r = 2\cos\theta$.

Por lo tanto la región $\mathcal{S} = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$.

Luego,

$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \iint_{\mathcal{R}} 2 dx dy - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2\,(\text{área } \mathcal{R}) - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy =$

$= 2\pi - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

Calculamos la segunda integral,

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \iint_{\mathcal{S}} (r)\; r\; dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta} r^2 dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8\cos^3\theta}{3} - \frac{0}{3}\right] d\theta$$

$$I = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$I = \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$

por lo tanto,

$Vol\,(\Omega) = 2\pi - \frac{32}{9}.$

Ejemplo 4.11 *Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cono* $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ *e inferiormente por el planoz* $= 0$ *y lateralmente por el cilindro* $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución.

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

Calcularemos la integral pasando a coordenadas polares.

Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos

De : $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, que podemos simplificar para obtener $r = 2\cos\theta$.

Por lo tanto la región $\mathcal{S} = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$.

Luego,

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \iint_{\mathcal{R}} 2dxdy - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

$$Vol\,(\Omega) = 2\,(\text{área } \mathcal{R}) - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\pi - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Calculamos la segunda integral,

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\mathcal{S}} (r)\ r\ drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8\cos^3\theta}{3} - \frac{0}{3}\right] d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cos\theta d\theta$$

$$I = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

por lo tanto,

$Vol\,(\Omega) = 2\pi - \frac{32}{9}.$

3. Centros de gravedad

Supongamos que tenemos dos puntos p_1 y p_2 sobre una recta y en cada punto está ubicada una masa m_i, $i = 1, 2$, respectivamente. Queremos hallar un punto p en el segmento que une a p_1 con p_2 tal que en ese punto la

varilla $p_1 p_2$ esté en equilibrio. Entonces la suma de los momentos $(p_2 - p)\, m_2 + (p_1 - p)\, m_1 = 0$. Esto es,

$$p = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

El punto p es conocido como el centro de masa o centroide del sistema de puntos p_1, p_2 . Si en lugar de dos puntos tenemos n puntos $(x_i, y_i), i = 1, 2, ...n$ del plano $\mathbf{R}^2$, en donde hemos ubicado n masas, $m_1, ...m_n$, el centro de gravedad del sistema de puntos vendrá expresado cómo

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)$$

Esto es,
$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ y $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$,
en donde $\overline{x}$ y $\overline{y}$ representan las coordenadas del centro de masa p. Lo anterior lo podemos extender al caso de una placa S en donde en cada punto de la placa está definida una función de densidad $f(x, y)$. La densidad mide la cantidad de material por unidad de volumen. Entonces la masa total de la placa es $M = \iint_S f(x, y) dx dy$. Extendemos (1) al caso de la placa S y obtenemos que las coordenadas del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{\iint_S x\, f(x, y) dx\, dy}{\iint_S f(x, y) dx\, dy}, \quad \overline{y} = \frac{\iint_S y\, f(x, y) dx\, dy}{\iint_S f(x, y) dx\, dy} \qquad (2)$$

En el caso en que la placa sea *homogénea* la densidad f es constante y las coordenadas del centro de masa o centroide serán:

$$\overline{x} = \frac{\iint_S x\, dx\, dy}{|S|}, \quad \overline{y} = \frac{\iint_S y\, dx\, dy}{|S|}, \qquad (3)$$

en donde $|S|$ representa el área de la placa S.

En el caso en que la placa presente ejes de simetría, el centroide se encontrará en ellos. Por ejemplo, una placa en forma de circunferencia tendrá su centroide en el centro geométrico de ella. Por ejemplo el centroide de una placa en forma de semicircunferencia de radio r es $(0, \overline{y})$, en donde

$$\overline{y} = \frac{1}{\frac{1}{2} r^2 \pi} \int_{-r}^{r} \left\{ \int_0^{\sqrt{(r^2 - x^2)}} y\, dy \right\} dx = \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{1}{2} r^2 \pi} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}.$$

4. Volúmenes de Revolución

El centroide se puede utilizar para calcular volúmenes de revolución. Sea

$$S = \{(x, y), 0 \leq h(x) \leq y \leq g(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Hacemos girar esta región sobre el eje x y obtenemos un sólido de revolución Ω. Es fácil ver que

$$V(\Omega) = \pi \left\{ \int_a^b g^2(x) - h^2(x)\, dx \right\}.$$

El Teorema de Pappus: nos dice que $V(\Omega) = 2\pi \overline{y}\, |S|$, como puede comprobarlo el lector. Por ejemplo si Ω es la esfera de centro en el origen y radio r, conseguida haciendo girar el semicírculo de radio r, vemos que

$$V(\Omega) = 2\pi\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}r^2\pi\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4.2 Integrales triples

Los conceptos de integración que expusimos en las secciones 2 y 3 de este capítulo los podemos extender al caso de integrales triples, cuádruples...etc. Ilustraremos su uso con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.12 *Hallar el volumen del sólido* **S** *limitado por las superficies*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ z &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Es importante formarnos una representación gráfica del sólido. Observemos que el plano $x+y+z=1$ se intersecta con los planos $z=0$, $x=0$ y $y=0$ en las rectas

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \\ x+z &= 1 \end{aligned}$$

respectivamente.Entonces,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{S}) &= \textstyle\iiint_{\mathbf{S}} dxdydz \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{1-x-y} dz\right\} dy\right\} dx \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-y}\left\{\int_0^{1-y-z} dx\right\} dz\right\} dy \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-z}\left\{\int_0^{1-x-z} dy\right\} dx\right\} dz \\ V(\mathbf{S}) &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.13 *Hallar* $\iiint_{\mathbf{S}} xyz\ dxdydz$ *en donde*

$$\mathbf{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

Solución: es fácil advertir que el sólido **S** es un octante de la esfera de $\mathbf{R}^3$ de centro en el origen y radio 1, cómo se observa en la figura
. Por lo tanto

$$\iiint_{\mathbf{S}} xyz\ dxdydz = \int_0^1 \left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\ dz\right\} dy\right\} dx = \frac{1}{48}$$

Cambio de variable

Los conceptos de cambio de variable que expusimos en la sección anterior los podemos extender al caso de dimensiones superiores. Si $F(u) = (x_1(u), ...x_n(u))$ representa una transformación de una región R a otra región S de $\mathbf{R}^n$ entonces

$$\int \cdots \int_S f(x)dx_1...dx_n = \int \cdots \int_R f(F(u))\left|J_F(u)\right| du_1...du_n,$$

en donde

$$J_F(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(u)}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(u)}{\partial u_1} & & \frac{\partial x_n(u)}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

$x = (x_1, ...x_n)$, $u = (u_1, ...u_n)$ y f un campo escalar definido sobre S. Para que la fórmula de cambio de variable tenga validez en necesario que $J_F(u) \neq 0$. No obstante la podemos extender al caso $J_F(u) = 0$ siempre y cuando el conjunto en donde se anula el jacobiano tenga contenido nulo. Este es el caso en los ejemplos que consideraremos.

Los ejemplos mas clásicos de cambio de variable son:

Coordenadas Cilíndricas

La trasnsformación $F(r, \theta, z)$ tiene como funciones componentes a

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ y &= y(r, \theta, z) = r \ sen \ \theta \\ z &= z(r, \theta, z) = z, \end{aligned}$$

cómo se indica en la figura.

Si queremos que la tranformación sea inyectiva debemos tomar, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Es fácil ver que el jacobiano $J_F(r, \theta, z) = r$. De las dos primeras ecuaciones anteriores se deduce que $x^2 + y^2 = r^2$. Esto nos dice, por ejemplo, que el plano, en coordenadas cilíndricas, $z = k$ se transforma en el cilindro circular recto paralelo al eje z y definido por la ecuación, en coordenadas rectangulares, $x^2 + y^2 = k^2$.

Cómo una aplicación de las coordenadas cilíndricas, consideremos el siguiente ejemplo: Calculemos la integral

$$\iiint_{\mathbf{S}} (x^2 + y^2) \, dxdydz$$

en donde **S** es el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$. En coordenadas cilíndricas el sólido **S** está determinado por las superficies $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, $r^2 = 2z$ y $z = 2$, cómo se indica en la figura.

Puesto que $J_F(r, \theta, z) = r$, vemos que

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{S}} (x^2 + y^2) \, dxdydz &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} (x^2 + y^2) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^3 dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

La transformación $F(r, \theta, \phi)$ tiene como funciones componentes a

$$\begin{aligned} x = x(r, \phi, \theta) &= r \ \ sen \ \phi \ \ \cos \theta \\ y = y(r, \phi, \theta) &= r \ \ sen \ \phi \ \ sen \ \theta \\ z = z(r, \phi, \theta) &= r \ \ \cos \phi. \end{aligned}$$

Si queremos que la transformación sea inyectiva debemos tomar, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, \pi)$

Es fácil ver que el jacobiano $J_F(r, \theta, \phi) = -(\sin \phi) \, r^2$. De las tres ecuaciones anteriores se deduce que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Es así cómo el plano, en coordenadas esféricas, $r = k$, se transforma por medio de F en la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, en coordenadas rectangulares.

De la misma forma: El plano, en coordenadas esféricas, $\theta = k$, se transforma por medio de F en el plano $y = \tan k.x$, en coordenadas rectangulares. También, el plano $\phi = k$, en coordenadas esféricas, se transforma en la curva

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 = (r\ sen\ k)^2\ ,\ z = r \cos k\right\}$$

Veamos ahora un ejemplo del uso de las coordenadas esféricas: Calculemos, usando coordenadas esféricas, el volumen de un octante de la esfera de centro en el origen y radio 1. Esto es, hallemos $V(\mathbf{S})$ en donde

$$\mathbf{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

Procedemos así: Es fácil advertir que el paralelipípedo $[0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en el espacio $r\ \theta\ \phi$ se transforma en el sólido $\mathbf{S}$, puesto que $|J_F(r, \theta, \phi)| = (\sin \phi)\, r^2$ tenemos que

$$V(\mathbf{S}) = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi d\phi \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{6}\pi$$

Volumen de la esfera n-dimensional

Como una última aplicación del cambio de variables en la integración veamos el volumen de una esfera de centro cero y radio a en el espacio $\mathbf{R}^n$. Para ello es necesario introducir la función Gama. Esta se define así:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt\ ,\quad s > 0.$$

Las propiedades más importantes de la función Gama son:

1). $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$.

2). $\Gamma(n + 1) = n!$, en donde $n \in \mathbf{N}$.

La función Gama está definida para $s > 0$. No obstante la propiedad 1) anterior nos dice que podemos extenderla a los reales negativos salvo los enteros negativos. Por ejemplo, para $-1 < s < 0$ tenemos que $0 < s + 1 < 1$, en donde está definida la función gama, entonces definimos $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$. Procedemos recurrentemente y definimos la función Gama en los intervalos $(-2, -1), (-3, -2)$ ... etc.

La propiedad 2) anterior nos permite extender la noción de factorial de un número natural al caso de un número real, así: $p! = \Gamma(p + 1)$, para $p + 1$ diferente de un entero negativo o cero.

Un cálculo directo nos dice que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y por la propiedad 1) obtenemos $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. Así mismo $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$.

El volumen de la esfera n-dimensional de radio a es

$$V_n(a) = a^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},\qquad n \geq 1.$$

Es claro que es cierta para $n = 1, 2$. Demostrémola para $n \geq 3$. Consideremos la transformación

$$F(u_1, ...u_n) = (x_1, ...x_n) = a(u_1, ...u_n)\,,$$

$a > 0$. Entonces $J_F(u_1, ...u_n) = a^n$. Por lo tanto

$$V_n(a) = \int \cdots \int_{B(0,a)} dx_1 ... dx_n = a^n \int \cdots \int_{B(0,1)} du_1 ... du_n$$

Esto es, $V_n(a) = a^n V_n(1)$. Para calcular $V_n(1)$ procedemos así:

$$\overline{B(0,1)} = \left\{ (u_1, ...u_n) \in \mathbf{R}^n, \ \sum_{j=1}^{n} u_i^2 \leq 1. \right\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} \left\{ \int \cdots \int_{u_1^2+...u_{n-2}^2 \leq 1-u_n^2-u_{n-1}^2=p^2} du_1...du_{n-2} \right\} du_{n-1}du_n \\ &= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} V_{n-2}(p) du_{n-1} du_n \\ &= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} V_{n-2}(1) p^{n-2} du_{n-1} du_n \\ &= V_{n-2}(1) \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} \left(1 - u_n^2 - u_{n-1}^2\right)^{\frac{n}{2}-1} du_{n-1} du_n \\ &= V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{\frac{n}{2}-1} r \, dr \, d\theta \\ &= V_{n-2}(1) \tfrac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, vemos que la sucesión

$$f(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Ejerccios Propuestos:Integración múltiples

1. Calcular

$$\int_1^2 \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx.$$

2. Invertir el orden de integración y evaluar

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \left(\frac{y}{\sqrt{16+x^2}} dx \right) dy.$$

3. Invertir el orden de integración y evaluar

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} \left((x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy \right) dx.$$

4. Sea

$$I = \int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\ dx\ dy$$

(a) Dibujar la región de integración y luego expresar la integral I con el orden de integración invertido.

(b) Calcular el valor de la siguiente integral doble

$$\int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} \sqrt{1+x^2} dx\ dy$$

5. Calcular el volumen del sólido limitado lateralmente por los cilindros

$$\begin{cases} x = \sqrt{y}, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases}$$

superiormente por el plano $y - z + 2 = 0$ e inferiormente por el plano XY.

6. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies:

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad x^2 - 2y - 4 = 0, \quad x^2 + 2y - 4 = 0.$$

7. Hallar el volumen del sólido que se encuentra sobre el plano XY y está limitado por

$$z = xy\ , \quad x^2 + y^2 = 4.$$

8. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z = 10, \quad z = x + y^2, \ x = 0.$$

9. Sea

$$a = \int_1^4 \frac{sen x}{x} dx.$$

Calcular, en términos de a, el valor de

$$\int_0^1 \int_{1+y}^2 \frac{sen\ x}{x} dxdy + \int_0^1 \int_2^4 \frac{sen\ x}{x} dxdy + \int_1^3 \int_{1+y}^4 \frac{sen\ x}{x} dxdy$$

10. Demostrar que

$$\iint_{\mathcal{S}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\ dx\ dy$$

siendo

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

(Dicha integral es el volumen de la mitad de un elipsoide)

11. Calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx\ dy$$

siendo

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$$

12. Calcular el volumen del sólido ubicado en el primer octante y limitado por las superficies

$$z = x^2 + y^2, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad 2y = x, \ y = 2x, \ z = 0.$$

13. Hallar el área de la región limitada por la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = xy.$$

14. Calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{\frac{2xy}{x^2+y^2}} dxdy\ ,$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

en el primer cuadrante.

15. Calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} (x + y)^2 \cos(x - y) dxdy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por el triángulo de vértices $(0, 0)$, (π, π), $(-\pi, \pi)$.

16. Expresar en coordenadas polares las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)dxdy$

17. Evaluar

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

18. Calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{12}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por la semicircunferencia

$$x=\sqrt{2ay-y^2} \text{ y la recta } y=x.(a>0)$$

19. Calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por las curvas

$$y=\sqrt{3}\,|x| \;,\; y=\frac{x^2}{3}.$$

20. Evaluar la integral doble

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dA,$$

donde $\mathcal{S}$ es la región encerrada por las gráficas de las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+4=0\;, \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\;,\quad y=\sqrt{3}x. \end{cases}$$

21. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z=2,\; x^2+y^2-z^3+1=0.$$

22. Hallar la masa de una lámina que tiene la forma de la región, en el primer cuadrante,exterior a la parábola $y^2=x$ e interior a la circunferencia $x^2+y^2-4x=0$,con densidad superficial

$$\rho(x,y)=y.$$

23. Una lámina tiene la forma del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(\pi,\pi)$, y $C(2\pi,0)$. Hallar su masa si su densidad es

$$\delta(x,y)=(x+y)^2\left|\,\sin(x^2-y^2)\right|.$$

24. Calcular el centro de gravedad de la lámina que tiene la forma de la región limitada por

$$y = x, \quad y = -x, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 6$$

y que se encuentra situada arriba del eje X. La densidad en cada punto (x, y) de la lámina es

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

25. Hallar la distancia al plano XY del centro de gravedad del sólido limitado por las superficies

$$z = 0, \; x^2 + y^2 = R^2, \; x^2 + y^2 = r^2, \; 0 < r < R, \; Hy + 2Rz = HR, \; H > 0.$$

26. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} xyz\,dx\,dy\,dz$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por el cubo [-1,1]×[-1,1]×[-1,1].

27. a) Graficar el sólido K, en el primer octante, limitado por

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0$$

b) Calcular

$$\iiint_{K} x\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz.$$

28. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por las superficies

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 8 - (x^2 + y^2).$$

29. Sea

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{3}} \int_{x^2+y^2}^{4-8y^2} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

Cambiar el orden de integración de manera que la nueva integral sea de la forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \int_{\cdots}^{\cdots} \int_{\cdots}^{\cdots} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$$

30. La integral triple de una función contínua f sobre el sólido $\mathcal{K}$ limitado por el paraboloide $z = 8 - x^2 - y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 2$ se ha expresado en la forma :

$$I = \int \left\{ \int \left(\int f(x, y, z)\; dz \right)\; dy \right\} dx.$$

Hallar los límites de integración de las integrales.

31. Calcular

$$\iiint_{\otimes} \sqrt{x^2 + y^2} dx\ dy\ dz$$

siendo $\otimes$ es el sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + y^2$ y el plano $y = 4$.

32. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} xy dx dy dz,$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por los planos

$$y = x, \quad y = 4, \quad z = 0, \quad z = 4, \quad x = 0.$$

33. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} y dx dy dz,$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por

$$y = 0, y = \sqrt{2x - x^2},$$

que está debajo de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el plano XY.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M.: Calculus, volumen 2. Editorial Reverté. 1992.

[2] Berman, G.N.: Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir-Moscú. 1983.

[3] Deminovich, B.P.: 5.000 problemas de Análisis Matemático. Editorial Paraninfo Thomson
Learning. 2000.

[4] Stewart, J.: Cálculo, trasecedentes tempranas. Editorial Thompson. 1998.

[5] Lages Lima Elon: Análisis Real, volumen 2. Imca-Uni. 1997

[6] Leithold, L.: El Cálculo. Oxfors University Press. 1994

[7] Thomas, George B. Jr.: Cálculo, de varias variable Editorial Pearson. 12a edición. 2010.

[8] Hasser, Norman: Análisis Matemático 2. Editorial Trillas. México 1980.

[9] Lang, Serge: Cálculo 2. Fondo Educativo Interamenricano S.A. 1986.

[10] Lehmann, Charles: Geometría Analítica. Editorial Limusa. 1986.