Capítulo 3

Programación Matemática

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos diversos casos de optimización de funciones reales de varias variables reales. Ciertamente, la optimización es muy importante en la teoría económica ya que un problema fundamental en ella es *la asignación adecuada de recursos escasos entre fines competitivos* y éste puede interpretarse como un problema de programación matemática.

El problema del consumidor, de maximizar su función de utilidad $u = u(x)$ eligiendo "canastas" x de n bienes comprables por él a los precios p_i dados y sin excederse de su ingreso I, es un típico problema de programación matemática en el que la función a optimizar (función objetivo) usualmente es no lineal y la "canasta" óptima debe elegirse en un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, por ser un $B(p,I)$ como el definido en la Aplicación 2.36. Así, tal problema se plantea como

$$\begin{aligned} &\max \quad u(x) \\ &\text{sujeto a:} \\ &\qquad p.x \leq I \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned}$$

Como éste, hay numerosos problemas en la teoría económica; por ello, conocer definiciones, teoremas fundamentales y diversos casos de la programación matemática nos ayudará a entenderlos, plantearlos y resolverlos mejor.

Es bueno aclarar que la programación matemática tiene aplicaciones no sólo en la teoría económica y que en este capítulo solamente estudiaremos una pequeña parte de lo amplio que es este campo de la matemática; así, no trataremos por ahora problemas con variables aleatorias, programación dinámica, ni optimización de funciones con valores vectoriales.

3.2 DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$, siendo $A \subset \mathbb{R}^n$, un **problema de programación matemática** es de la forma

$$\begin{aligned} &\max\ f(x) \\ &\text{s.a} \\ &\quad x \in X \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

o de la forma

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a} \\ &\quad x \in X \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

La función f se denomina *función objetivo*, el vector n-dimensional x suele llamarse *vector de instrumentos* y al subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ se le conoce como *conjunto de oportunidad* o *conjunto factible*. Coherente con esto último, se dice que *el vector x es factible si y sólo si $x \in X$*.

Evidentemente el problema tiene sentido sólo si $A \cap X \neq \phi$.

Es bueno notar que la expresión *resolver un problema de programación matemática* se refiere esencialmente a determinar el vector o vectores de X para el cual (o para los cuales) la función objetivo tiene el valor máximo o mínimo. En este sentido, el problema (3.2.2) de minimización puede resolverse como el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} &\min\ (-f(x)) \\ &\text{s.a} \\ &\quad x \in X \end{aligned} \tag{3.2.2'}$$

Por ello, en adelante nos referiremos en la mayoría de los casos sólo a problemas de maximización, sin que esto signifique no estar considerando los casos de minimización.

Definición 3.1 Dado el problema (3.2.1), decimos que x^* es un **máximo global** o una solución del problema, si y sólo si

$$x^* \in X \wedge \forall x \in X : f(x^*) \geq f(x).$$

Diremos que x^* es un **máximo global estricto** si y sólo si

$$x^* \in X \wedge \forall x \in X,\ x \neq x^* : f(x^*) > f(x).$$

Observación 3.2

Es fácil advertir –y demostrar– que si un problema como (3.2.1) tiene máximo global estricto, tal es único.

Ejemplo 3.3

Sea $$h(x_1,x_2) = 25 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 4)^2$$

Es claro que el gráfico de h es un paraboloide de sección circular, que se abre hacia abajo y cuyo vértice es el punto $(3,4,25)$; por ello, todo problema de la forma

$$\begin{aligned} &\max\ h(x_1,x_2) \\ &\text{s.a} \\ &\quad (x_1,x_2) \in X \end{aligned}$$

en donde X sea un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ que contenga al punto $(3,4)$, tendrá a $x^* = (3,4)$ como máximo global estricto.

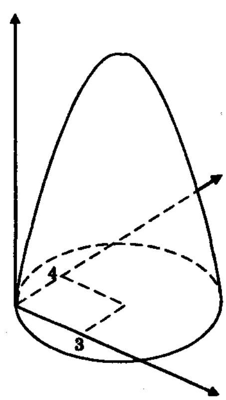


Figura 3.1

En cambio, si definimos la función g mediante:

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} 23 & \text{si } (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 \leq 2 \\ 25 - (x_1-3)^2 - (x_2-4)^2 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

el gráfico de g es el paraboloide de la Fig. 3.1, pero truncado 2 unidades más abajo de su vértice, por un plano paralelo al plano x_1x_2 (Fig. 3.2).

En este caso, todo problema de la forma

$$\begin{aligned} &\max\ g(x_1,x_2) \\ &\text{s.a} \\ &\quad (x_1,x_2) \in X \end{aligned}$$

en donde X interseque al círculo de radio $\sqrt{2}$ y centro en $(3,4)$, tendrá como máximos globales a los puntos de tal intersección. En el caso que la intersección sea un solo punto, tal punto será un máximo global estricto. Por ejemplo si el problema es

$$\begin{array}{l} \max \ g(x_1,x_2) \\ \text{s.a} \\ \quad x_1 + x_2 = 8, \end{array}$$

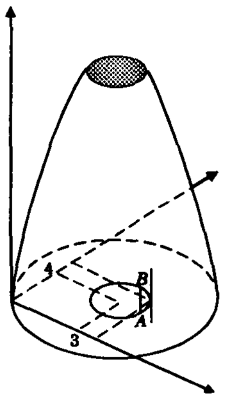


Figura 3.2

todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ de la Fig. 3.2 son máximos globales; en cambio si el problema es

$$\begin{array}{l} \max \ g(x_1,x_2) \\ \text{s.a} \\ \quad x_1 + x_2 = 9, \end{array}$$

la recta es tangente a la circunferencia de ecuación $(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=2$ en el punto $(4,5)$ y en consecuencia este punto es la única solución al problema y es un máximo global estricto. Una pregunta natural, cuando se trabajan problemas de optimización es acerca de la existencia o no de una solución. El siguiente teorema nos da condiciones suficientes que responden a esta inquietud.

Teorema 3.4 (*Weierstrass*) Dado el problema (3.2.1), si f es continua y el conjunto X –contenido en el dominio de f– es cerrado y acotado (o sea compacto, ya que $X \subset \mathbf{R}^n$) y no vacío, entonces existe un máximo global que resuelve el problema.

La demostración de este teorema está basada en dos proposiciones fundamentales:

a) Si X es compacto y f es continua, entonces $f(X)$ es compacto.

b) Siendo $f(X)$ un subconjunto acotado en $\mathbf{R}$, posee un elemento maximal, que llamaremos $f(x^*)$.

Los detalles los puede completar el lector.

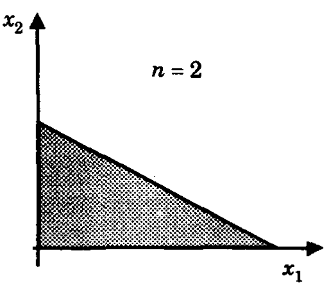


Figura 3.3

Aplicación 3.5

Este teorema garantiza que el problema del consumidor siempre tiene solución, pues en

$$\begin{aligned} &\max\ u(x) \\ &\text{s.a}: \\ &\qquad p.x \le I \\ &\qquad x \geq 0, \end{aligned}$$

la función de utilidad es continua y el conjunto X de (3.2.1), está definido por las dos desigualdades, que caracterizan a los conjuntos $B(p,I)$ de la Aplicación 2.36, que ya sabemos que son conjuntos cerrados y acotados, como se ve fácilmente para $n=2$ y $n=3$.

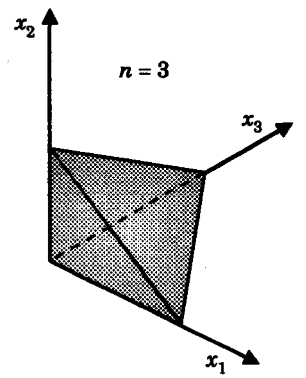


Figura 3.4

Observaciones 3.6

1. Como en todos los teoremas que establecen condiciones suficientes para algo, el no cumplimiento de éstas no es razón para que ese algo ya no tenga lugar. En este caso, mostramos ejemplos gráficos en los cuales se incumple alguna de las condiciones, pero existe el máximo global:

   a) X es acotado pero no cerrado (Fig. 3.5)

   b) X es cerrado pero no acotado (Fig. 3.6)

   c) f no es continua (Fig. 3.7)

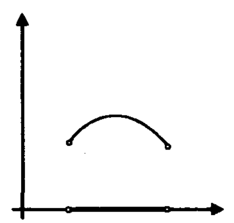


Figura 3.5

2. Es también ilustrativo mostrar casos en los que por no cumplirse alguna de las condiciones del teorema, el máximo global no existe:

   a) $X = [3,8[\quad , \quad f(x) = 2x$

   Es claro que el máximo no es 16, ya que $8 \notin X$.

   b) $X = [0,\infty[\quad , \quad f(x) = 2x$

   Obviamente para todo $x \in X$ siempre podemos encontrar un $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) > f(x)$.

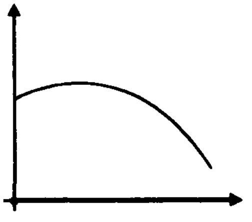


Figura 3.6

c) $X = [3,8]$, $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

Es claro que para todo $x \in X$, mayor que 5 y suficientemente próximo a él, podemos encontrar otro $x_1 \in X$, aún más próximo a 5 de modo que

$$f(x_1) > f(x).$$

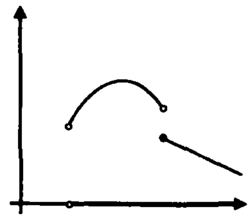


Figura 3.7

Definición 3.7 Dado el problema (3.2.1), decimos que x^* es un **máximo local** si y sólo si $x^* \in X \wedge \exists \varepsilon > 0$ de modo que

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in X \cap B_\varepsilon(x^*),$$

donde $B_\varepsilon(x^*)$ es una bola abierta de radio ε y centro x^* [1].

Diremos que x^* es un **máximo local estricto** si y sólo si $x^* \in X \wedge \exists \varepsilon > 0$ de modo que

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in X \cap B_\varepsilon(x^*),$$

siendo $x \neq x^*$.

Observaciones 3.8

1. Se deduce fácilmente de la definición, que el calificativo de local se refiere a que a una distancia mayor o igual que ε del vector x^*, podría encontrarse un vector $\bar{x} \in X$ de modo que $f(\bar{x}) > f(x^*)$.

2. Si x^* es un máximo global, es claro que también es máximo local, pues la definición 3.7 se cumplirá para todo $\varepsilon > 0$.

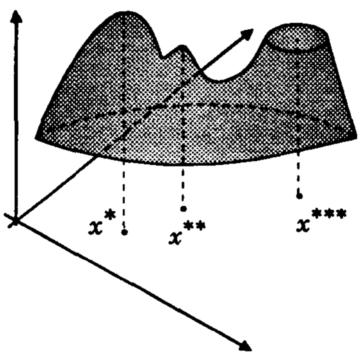


Figura 3.8

---

[1] $B_\varepsilon(x^*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x - x^*\| < \varepsilon\}$

3. Es muy importante notar que lo recíproco de la observación anterior no siempre se cumple.

Ejemplo 3.9

En la Fig. 3.8 se muestra el gráfico de una función con algunos de sus máximos locales

x^* : es máximo local estricto. Además es máximo global estricto

x^{**} : es máximo local estricto

x^{***} : es uno de los infinitos máximos locales vecinos a a él.

Como ya lo hicimos notar en la observación 3 anterior, y como se ve en la Fig. 3.8, es posible la existencia de máximos locales que no son máximos globales; sin embargo es importante conocer bajo qué condiciones un máximo local es también un máximo global, pues al resolver problemas de optimización,generalmente se usan métodos que determinan máximos locales.

El siguiente teorema establece tales condiciones.

Teorema 3.10 (*Local-global*) Dado el problema (3.2.1) con X convexo y no vacío y f cóncava en X, si x^* es un máximo local, entonces x^* también es máximo global.

Como un ejemplo de aplicación de los conceptos vistos en el capítulo anterior, haremos la demostración de este importante teorema:

Demostración:

1. Por ser x^* máximo local, cumple:

$$x^* \in X \wedge \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x^*) \cap X$$

2. Sea x un vector arbritario de X. Como $x^* \in X$ y X es convexo, entonces para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda)x^* \in X.$$

3. Tomemos $\overline{\lambda} \in [0, 1]$ suficientemente próximo a 0 de modo que $\overline{\lambda}x + \left(1-\overline{\lambda}\right)x^*$ esté próximo a x^* en menos de ε unidades y así

$$\overline{\lambda}x + \left(1-\overline{\lambda}\right)x^* \in B_\varepsilon(x^*) \cap X$$

4. Por ser x^* máximo local, se cumple que

$$f(x^*) \geq f\left(\overline{\lambda}x + \left(1-\overline{\lambda}\right)x^*\right);$$

y por ser f cóncava en X:

$$f(x^*) \geq f(\bar{\lambda}x + (1-\bar{\lambda})x^*) \geq \bar{\lambda}f(x) + (1-\bar{\lambda})f(x^*)$$

En consecuencia $\quad \bar{\lambda} f(x^*) \geq \bar{\lambda} f(x)$

y así $\quad f(x^*) \geq f(x)$

lo cual significa que x^* es máximo global, ya que x es un vector cualquiera de X. ■

Se puede demostrar también para el problema (3.2.1), con X convexo y no vacío, que:

i) Si f es cóncava en X, el conjunto de todos los máximos locales es un conjunto convexo.

ii) Si f es estrictamente cóncava, la solución es única.

iii) Si f es estrictamente cuasicóncava, entonces un máximo local es el único máximo global.

Ilustración

Teniendo en cuenta que las funciones h y g definidas en el Ejemplo 3.3 tienen dominio convexo y ambas son funciones cóncavas (h estrictamente cóncava), las figuras 3.1 y 3.2 ilustran bien el teorema y las proposiciones (ii) e (i) respectivamente. Es claro que en la Fig.3.2 el conjunto de todos los máximos locales –que también son globales por la concavidad de h– es el círculo

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ / \ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 2\right\},$$

que es un conjunto convexo.

Observaciones 3.11

1. Como ya hicimos notar en el capítulo anterior, en la teoría económica existen funciones importantes que son cóncavas y ésto hace aún más relevante el teorema local-global.

2. Es fácil advertir que para los problemas de minimización, la condición de concavidad de f debe cambiarse por la de convexidad.

3. Es importante notar que si x^* resuelve el problema (3.2.1) siendo f cóncava y X convexo, también lo resolverá para otra función g, con el

mismo conjunto factible, siempre y cuando $g = \phi \circ f$, siendo ϕ una función real de variable real, positiva y monótona creciente, pues así

$$f(x^*) \geq f(x) \iff g(x^*) \geq g(x)$$

Una función ϕ muy usada en teoría económica es $\phi(x) = \ln(x)$.

3.3 OPTIMIZACION SIN RESTRICCIONES

En esta sección consideraremos los casos de optimización en los cuales el conjunto de oportunidad X es todo $\mathbf{R}^n$ o coincide con el dominio abierto de f. Así, el problema es de la forma

$$\max_x \; f(x) \tag{3.3.1}$$

Condiciones necesarias:

Teorema 3.12 Si f es una función diferenciable en un conjunto A y tiene un máximo local en x^*, que es un punto interior de A, entonces $\nabla f(x^*) = 0$. (x^* es un punto estacionario de f).

Demostración:

Basta recordar que un teorema similar se cumple para funciones reales de variable real. Así, definiendo

$$h_i(x) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x, \ldots, x_n^*),$$

para x en un intervalo abierto adecuado que contenga a x_i^*, es claro que h_i tiene también un máximo en x_i^* y en consecuencia

$$Dh_i(x_i^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0.$$

Como al ser f diferenciable en x^* se garantiza la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ y en consecuencia $\nabla f(x^*) = 0$ ■

Observaciones 3.13

1. Es bueno recordar que el recíproco de este teorema es falso. Para el caso $n = 1$ un ejemplo sencillo es

$$f(x) = (x-2)^3$$

El lector puede verificar que $f'(2) = 0$, sin embargo en $x = 2$ no hay un valor máximo ni mínimo de f (hay un punto de inflexión).

Para el caso $n = 2$, el punto x^* puede ser un *punto silla* como en

$$f(x_1,x_2) = (x_1-3)^2 - (x_2-5)^2.$$

En este caso las funciones h_1 y h_2 de la demostración son

$$h_1(x) = f(x,5) = (x-3)^2, \qquad h_2(x) = f(3,x) = -(x-5)^2$$

y si bien es cierto que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(3,5) = Dh_1(3) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(3,5) = Dh_2(5) = 0$$

en el punto $x^* = (3,5)$ no se tiene un máximo, ni un mínimo de f. Más bien h_1 tiene un mínimo en 3 y h_2 tiene un máximo en 5 y podemos observar que $f(3,x_2) \le f(3,5) \le f(x_1,5)$ para todo x_1 y x_2.

2. Una idea intuitiva que ayuda a entender este teorema es recordar que el vector gradiente en cada punto indica el sentido del crecimiento más rápido de la función. Si x^* es un máximo local, el vector gradiente en este punto indicará "no moverse", lo cual significa $\nabla f(x^*) = 0$. También es aplicable en caso de mínimo local, ya que el opuesto del vector gradiente indica el sentido del decrecimiento más rápido de la función.

Teorema 3.14 Sea f una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y x^* un punto interior de A. Si f tine un máximo local en x^*, entonces

a) $Df(x^*) = 0$

b) $D^2 f(x^*)$ es negativo semidefinida.

Demostración:

a) Las hipótesis de este teorema implican las hipótesis del teorema anterior, en consecuencia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^*\right)=0$ para todo $i=1,2,\ldots,n$, lo cual demuestra (a).

b) 1. Por definición de máximo local, $\exists\varepsilon>0$ tal que para todo $x\in B_\varepsilon\left(x^*\right)$ se cumple $f\left(x^*\right)\geq f(x)$.

2. Todo vector $x\in B_\varepsilon\left(x^*\right)$ puede escribirse como

$$x=x^*+\theta y,$$

siendo θ un número suficientemente pequeño (entre $-\varepsilon$ y ε) y el vector y de norma unitaria. En consecuencia, la desigualdad anterior la podemos escribir

$$f\left(x^*\right)\geq f\left(x^*+\theta y\right),\ \text{para}\ |\theta|<\varepsilon.$$

3. Haciendo $g(\theta)=f\left(x^*+\theta y\right)$ para tal vector y, la desigualdad se expresa:

$$g(0)\geq g(\theta),\ \text{para}\ |\theta|<\varepsilon \tag{3.3.2}$$

4. Por el teorema de Taylor:

$$g(\theta)=g(0)+Dg(0)\theta+\frac{1}{2}D^2g(\lambda\theta)\theta^2 \qquad \text{con}\ \lambda\in]0,\ 1[\ ^{1} \tag{3.3.3}$$

5. Analicemos ahora: si $D^2g(0)>0$, entonces por continuidad existirá un $\delta>0$ de modo que $D^2g(\lambda\theta)>0$ para todo $\lambda\in]0,1[$ y para todo θ que satisfaga $|\theta|<\delta$. Pero siendo $Dg(0)=Df\left(x^*\right)=0$, esto significa, según (3.3.3), que para tal θ :

$$g(\theta)>g(0)$$

lo cual contradice (3.3.2). En consecuencia,

$$D^2g(0)=y^tD^2f\left(x^*\right)y\leq 0$$

y cumpliéndose esta desigualdad para todo vector y unitario, debe cumplirse para todo vector de R^n, lo cual demuestra la negatividad semidefinida de la matriz hessiana de f en el punto x^*. ■

---

[1] En (1.4.17) y (1.4.18) se ha tomado $k=2$, $x=\theta$, $a=0$, $c=\lambda\theta+(1-\lambda)0$.

Observaciones 3.15

1. La necesidad de que $D^2f(x^*)$ sea negativo semidefinida es coherente con la concavidad de la función f en un punto interior en el que hay un máximo local.

2. Es muy importante advertir que x^* es un punto interior. De no ser ésta la situación, puede existir un máximo en un punto x^* y no cumplirse ninguna de las condiciones establecidas en el teorema. En la Figura 3.9 se ilustra el caso para $f:[0,\infty[\to \mathbf{R}$ definida por $f(x)=4e^{-x}$. Es claro que f es infinitamente diferenciable y siendo decreciente, tiene un valor máximo en 0; sin embargo, no siendo 0 un punto interior de $[0,\infty[$, no podemos afirmar que se cumplirán las condiciones (a) y (b) del teorema. Es inmediato verificar que $Df(0)=-4\neq 0$ y $D^2f(0)=4>0$

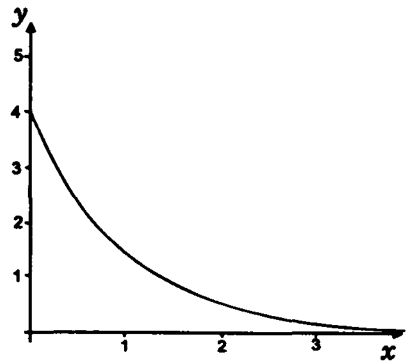


Figura 3.9

Condiciones suficientes

Teorema 3.16 Sea f una función real con segundas derivadas parciales continuas en un subconjunto A de $\mathbf{R}^n$, del cual $\bar{x}$ es un punto interior.

Si se cumple:

i) $Df(\bar{x})=0$

ii) $D^2f(\bar{x})$ es negativo definida

entonces $\bar{x}$ es un máximo local estricto.

Demostración:

Sea h un vector de $\mathbf{R}^n$ suficientemente pequeño, de modo que $\bar{x}+h\in B_\varepsilon(x)$, para algún $\varepsilon>0$. Por el teorema de Taylor [1]:

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+Df(\bar{x})h+\tfrac{1}{2}h^tD^2f(c)h$$

---

[1] Se está aplicando (1.4.19) para $a=\bar{x}$ y $x-a=h$

donde c es un vector entre $\bar{x}$ y $\bar{x}+h$. Así, podemos escribir para algún $\lambda \in]0,1[$,

$$c=(1-\lambda)\bar{x}+\lambda(\bar{x}+h)=\bar{x}+\lambda h.$$

Reemplazando esta expresión en (3.3.4) y teniendo en cuenta que $Df(\bar{x})=0$:

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+\tfrac{1}{2}h^t D^2 f(\bar{x}+\lambda h)h,\ \lambda \in]0,1[$$

O, mejor:

$$f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})=\tfrac{1}{2}h^t D^2 f(\bar{x}+\lambda h)h,\ \lambda \in]0,1[$$

y por (ii) y la continuidad establecida en la hipótesis: $f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})<0$ en un vecindad de $\bar{x}$, lo cual demuestra el teorema. ■

Observaciones 3.17

1. Debe quedar claro que las condiciones suficientes son (i) y (ii); es decir las dos. Es frecuente el error de identificar la condición suficiente con la condición (ii). Para mayor claridad, damos ejemplos de funciones que cumplen sólo una de las condiciones en un punto determinado y tales puntos no son máximos:

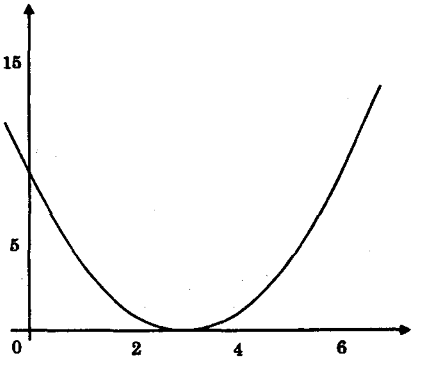
   

   Figura 3.10

   En la Figura 3.10: $f(x)=(x-3)^2$

   Como $f'(x)=2(x-3)$, es claro que $Df(3)=0$ (se cumple (i)) sin embargo, como $f''(x)=2$, también es claro que $D^2f(3)=2>0$ (no se cumple (ii)) y evidentemente $\bar{x}=3$, que es un punto interior del dominio de *f*, **no** es máximo local.

   En la Figura 3.11 : $f(x)=3-e^{-x}$

   Como $f'(x)=e^{-x}$, y $f''(x)=-e^{-x}$ es claro que $D^2f(2)=-e^{-2}<0$ (se cumple (ii)), pero también es claro que $Df(2)=e^{-2}>0$ (no se cumple (i)) y evidentemente $\bar{x}=2$, que es un punto interior del dominio de *f*, **no** es un máximo local.

2. Ya conocidos los puntos en los que se cumple (i), la condición (ii) se verifica fácilmente al obtener la matriz hessiana de f en $\bar{x}$ y aplicar el criterio –dado en (1.4.14)– de los signos de los menores principales de la esquina superior izquierda: deben coincidir con los signos de $(-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

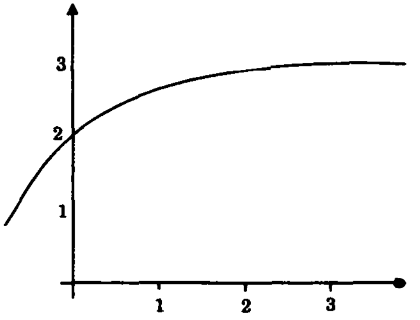


Figura 3.11

Para el caso de mínimo local, $D^2f(\bar{x})$ debe ser positivo definida y entonces deben ser positivos todos los menores principales de la esquina superior izquierda de la matriz hessiana de f, evaluada en $\bar{x}$, como lo vimos en (1.4.12).

Ejemplo 3.18

Hallemos los valores extremos de la función

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^4.$$

Las condiciones necesarias de primer orden dadas en el Teorema 3.12 nos facilitan la búsqueda, ya que si existen máximos o mínimos locales, necesariamente serán puntos en los cuales el vector gradiente de f es nulo, pues todos los puntos del dominio de f –todo $\mathbf{R}^2$– son puntos interiores.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 8x_2^3.$$

Entonces

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x_1 = 0 \wedge 2x_2 - 8x_2^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \wedge \left(x_2 = 0 \vee x_2 = \tfrac{1}{2} \vee x_2 = -\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (x_1 = 1 \wedge x_2 = 0) \vee \left(x_1 = 1 \wedge x_2 = \tfrac{1}{2}\right) \vee \left(x_1 = 1 \wedge x_2 = -\tfrac{1}{2}\right).$$

Así, los extremos relativos que existan, deben ocurrir en alguno o algunos de los siguientes puntos:

$$(1, 0) \ , \ \left(1, \tfrac{1}{2}\right), \ \left(1, -\tfrac{1}{2}\right)$$

Para determinar en cuál o cuáles, nos apoyamos en las condiciones suficientes. Ya que todos estos puntos cumplen la condición (i) del Teorema 3.16, veamos cuál o cuáles cumplen (ii):

$$D^2f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2-24x_2^2\end{bmatrix}$$

$$D^2f(1,0)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

por consiguiente $M_1=-2<0$ y $M_2=-4<0$, lo cual nos dice que $(1,0)$ no cumple (ii) y en consecuencia no podemos afirmar que es un máximo local. Por lo anotado en (2) de Observaciones 3.17, tampoco podemos afirmar que es un mínimo local.

$$D^2f\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

por consiguiente $M_1=-2<0$ y $M_2=8>0$, lo cual nos dice que se cumple (ii) y así $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ es un máximo local.

$$D^2f\left(1,-\tfrac{1}{2}\right)=D^2f\left(1,\tfrac{1}{2}\right)$$

y en consecuencia, también $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ es un máximo local.

Si f fuera función de una sola variable real, ante la continuidad y la existencia de dos máximos locales, pensaríamos en la existencia de un mínimo local; sin embargo al ser función de dos variables, tal mínimo puede no existir. Así, en este caso el punto $(1,0)$ es un *punto silla* [1] : máximo cuando varía x_1 manteniéndose x_2 en el valor 0 y mínimo cuando varía x_2 manteniéndose x_1 en el valor 1. El lector puede dar valores próximos a $(1,0)$ y verificar que

$$f(x_1,0)<f(1,0)<f(1,x_2)$$

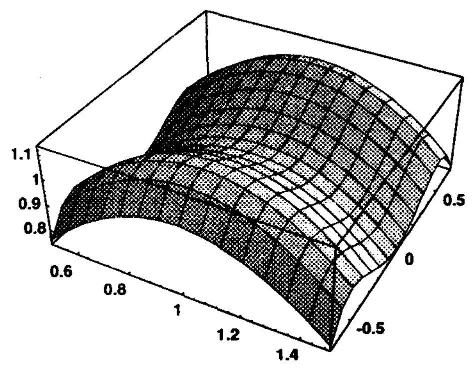


Figura 3.12

[1] Un criterio para reconocerlos es que en tales puntos el determinante de la matriz hessiana (de orden 2×2) es negativo.

La Figura 3.12, que nos muestra una parte del gráfico de f, nos ayuda a entender lo explicado.

Es interesante e importante que el lector verifique que al calcular el vector gradiente de f en puntos (a,b) cercanos a los *puntos críticos* obtendrá vectores cuyo sentido es "hacia" [1] los puntos de máximo. Si $a=1$ y b es próximo a $\frac{1}{2}$ ó a $-\frac{1}{2}$, $\nabla f(a,b)$ apuntará evidentemente "hacia" $\left(1,\frac{1}{2}\right)$o "hacia" $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$. Lo mismo ocurrirá si a es próximo a 1 y $b=\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. Siendo $(1,0)$ un punto silla, $\nabla f(a,b)$, para a y b próximos a $(1,0)$, no siempre apuntará hacia $(1,0)$. Por ejemplo, si $a=1$ y b es próximo a cero, $\nabla f(a,b)$ no apuntará hacia el $(1,0)$ sino en sentido opuesto, ya que $(1,0)$ es mínimo cuando varía x_2.

En la Figura 3.13 ilustramos lo dicho representando el sentido de algunos vectores gradientes en puntos cercanos a $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ o a $(1,0)$, donde:

A : $\nabla f(0.92, 0.45) = (0.16, 0.171)$

B : $\nabla f(1, 0.3) = (0, 0.384)$

C : $\nabla f(1.2, 0.6) = (-0.4, -0.528)$

D : $\nabla f(1.2, 0.5) = (-0.4, 0)$

E : $\nabla f(1, 0.1) = (0, 0.192)$

F : $\nabla f(1.2, 0) = (-0.4, 0)$

G : $\nabla f(0.9, 0) = (0.02, 0)$

H : $\nabla f(1, -0.1) = (0, -0.012)$

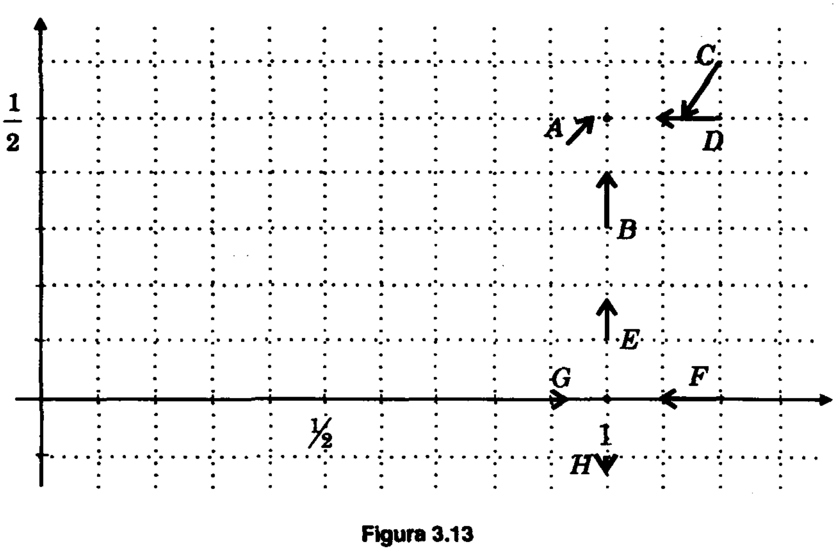


Figura 3.13

[1] No significa que necesariamente apunta con exactitud al punto máximo.

Aplicaciones económicas 3.19

Los casos más frecuentes de aplicación económica de este tipo de problemas se dan en la teoría de la empresa. Problemas de maximización de beneficios de una empresa –monopólica o en condiciones de competencia perfecta– productora de n bienes y con una función de costo conocida, son generalmente resueltos con los criterios dados en esta sección. Cabe anotar, sin embargo, que en estos problemas existe la restricción implícita que las variables que se usan deben ser innegativas.

Ejercicios 3.20

1. Analizar e ilustrar gráficamente:
   a) ¿Es posible que una función cóncava tenga dos máximos locales?
   b) ¿Es posible que una función cóncava tenga solamente dos máximos locales?
   c) ¿Es posible que una función estrictamente cóncava tenga dos máximos locales?
2. Sea $g = g(x_1, x_2)$ una función tal que $g(10,12) = 40$ y para todo (x_1, x_2) de su dominio se cumple $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} > 0$ y $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} < 0$.
   a) Analizar:
      (i) ¿$g(15,10) > 40$? (ii) ¿$g(8,9) < 40$? (iii) ¿$g(7,15) > 40$?
   b) Esbozar algunas curvas de nivel de g.
3. Sea $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineal. Demostrar que si el problema $\max f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, tiene solución, entonces f es nula.
4. Sea la función de producción dada por:
   $$16z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2.$$
   Si los precios unitarios de los factores (competencia perfecta) son 8 y 4 respectivamente y el precio unitario de la cantidad producida z es 32, determinar la máxima ganancia.
5. Un monopolista vende los productos x e y, siendo las siguientes sus funciones de demanda:
   $$0.1p_x - 1.2 + 0.2x = 0$$
   $$10p_x - 320 + 40y = 0$$
   Su función de costo total es: $CT(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
   Determinar el precio y la cantidad de cada bien para que el monopolista maximice su ganancia. Verificar que la ganancia tiene un máximo en tal punto.

3.4 OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DADAS POR IGUALDADES

En esta sección consideraremos los casos en los que el conjunto de oportunidad X está dado por un conjunto de m igualdades, siendo $m < n$. Así, el problema es de la forma

$$\begin{aligned} &\max \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s. a} \\ &\quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &\quad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

donde f y las g_j, para $j = 1,2,\ldots,m$, son funciones reales definidas en un subconjunto de A de $\mathbf{R}^n$ y las b_j, para $j = 1,2,\ldots,m$, son constantes reales dadas. Considerando $g: A \to \mathbf{R}^m$, con $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^m$, podemos expresar (3.4.1) más resumidamente

$$\begin{aligned} &\max \quad f(x) \\ &\text{s. a} \\ &\quad g(X) = b \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

y entonces, obviamente, $X = \{x \in \mathbf{R}^n \ / \ g(x) = b\}$.

Es frecuente encontrar el problema del consumidor como ejemplo típico de este problema de programación matemática; sin embargo, en general, en el problema del consumidor la restricción de presupuesto debería estar dada por una desigualdad y no por una igualdad. Además, debería especificarse que las cantidades de los bienes que elija el consumidor deben ser innegativas. Por ello, su lugar más adecuado de estudio será en la optimización con restricciones dadas por desigualdades (Sección 3.6). Cabe aclarar que con funciones de utilidad "suficientemente buenas", que correspondan a supuestos específicos de las relaciones de preferencia del consumidor, hay numerosos ejemplos de problemas del consumidor que se tratan como el problema (3.4.1), donde f es la función de utilidad y se tiene una sola restricción –que es la de presupuesto– dada por

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I$$

siendo p_i los precios unitarios de los bienes e I el ingreso del consumidor.

La idea fundamental para resolver el problema (3.4.2) es aplicar lo estudiado en la sección anterior, tratando de replantearlo como un problema sin restricciones de igualdad. Bajo ciertas consideraciones que permitan aplicar el teorema de la función implícita, del sistema de m ecuaciones con n ingógnitas dado en $g(x)=b$, podrían despejarse m incógnitas en función de las otras para reemplazarlas en la función objetivo y tener así un problema sin restricciones. Las condiciones necesarias (de primer orden) de este problema, pueden obtenerse de manera práctica empleando el método de los *multiplicadores de Lagrange*. Este método tiene, además, la ventaja de facilitar una representación geométrica de la situación óptima y de interpretar los multiplicadores como indicadores de la sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo, al modificarse ligeramente los valores de las constantes b_j de las restricciones.

Esto tiene gran utilidad –en particular– en los problemas de teoría económica.

A continuación resolveremos un problema sencillo que ayuda a tener una comprensión geométrica de este tipo de problemas y de sus soluciones:

Problema 3.21

$$\begin{array}{ll} \max & (2x_1+x_2+5) \\ \text{s. a} & \\ & x_1^2+x_2^2=9 \end{array}$$

Solución:

1. Visualicemos geométricamente el problema:

   Se trata de hallar el o los puntos (x_1, x_2) que den el máximo valor posible a la función objetivo

   $$f(x_1, x_2)=2x_1+x_2+5;$$

   pero, a diferencia de los problemas de la sección anterior, los puntos (x_1, x_2) no pueden ser cualesquiera, sino aquellos que satisfagan la restricción $g(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2=9$.

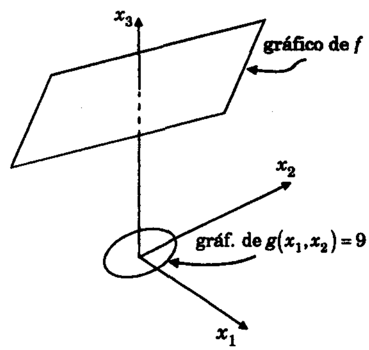


Figura 3.14

Como el gráfico de la función objetivo es un plano en $\mathbf{R}^3$ y el gráfico de la restricción, en el dominio de f, es la circunferencia de centro en el origen y radio 3, de lo que se trata es entonces de encontrar sobre cuál o cuáles de los puntos de la circunferencia "colocamos" el segmento vertical más alto que une la circunferencia con el plano (Fig. 3.14). También podemos interpretar el problema como la búsqueda del punto (o los puntos) en el borde de la base de un cilindro circular recto, sobre el cual se levanta el segmento vertical más alto que lo une al borde de su "tapa" (que obviamente no es paralela a la base, ni es una circunferencia en el espacio) que se encuentra en el plano dado por la función objetivo (Fig. 3.15). Es bueno notar que no todos los problemas de este tipo tienen solución. Por ejemplo, si en lugar de $x_1^2 + x_2^2 = 9$ la restricción fuera $x_2 - x_1 = 1$, no existe el punto más alto de la "pared" vertical cuyos bordes están: uno en la recta $x_2 - x_1 = 1$ (en el plano X_1X_2) y el otro en el plano $f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 = 5$.

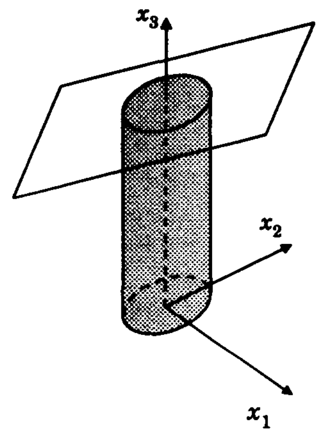


Figura 3.15

2. Como el o los puntos que maximicen la función objetivo deben satisfacer la restricción, una manera natural de resolver el problema es despejando una de las variables de la restricción y reemplazándola en la función objetivo [1]. Así, de $x_1^2 + x_2^2 = 9$ obtenemos

$$x_2 = \sqrt{9 - x_1^2} \;\vee\; x_2 = -\sqrt{9 - x_1^2} \qquad (3.4.3)$$

a) Reemplazando la primera tenemos ahora el problema

$$\max\left(2x_1 + \sqrt{9 - x_1^2} + 5\right),\; x_1 \in [-3,3] \qquad (3.4.4)$$

[1] Observar que, en general, esto puede ser muy difícil. El teorema de la función implícita juega papel importante para garantizar el "despeje", por lo menos localmente.

Llamamos $h = h(x_1)$ a esta función objetivo y según lo visto en la sección anterior, empleamos la condición necesaria:

$$Dh(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{x_1}{\sqrt{9 - x_1^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}} \vee x_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \text{(pues } x_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}} \text{ no satisface } Dh(x_1) = 0\text{)}$$

y entonces $x_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Esto nos dice que el punto $\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ es una *posible solución* del problema propuesto. Para saber si es realmente un máximo local, apliquemos la condición de segundo orden ((ii) del Teorema 3.16) al punto $x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$:

$$D^2h(x_1) = -\frac{9}{\left(9 - x_1^2\right)^{3/2}};$$

así $D^2h(x_1) < 0$ para todo punto interior del dominio de h, y en particular para $x_1 = 6/\sqrt{5}$, lo cual nos dice que este punto es un máximo local de h y en consecuencia una solución del problema planteado.

b) Reemplazando la segunda posibilidad de (3.4.3) tenemos el problema:

$$\max\left(2x_1 - \sqrt{9 - x_1^2} + 5\right), \; x_1 \in [-3,3] \tag{3.4.5}$$

Llamando $k = k(x_1)$ a esta función objetivo y procediendo como en (a), tenemos

$$Dk(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

y

$$D^2k(x_1) = \frac{9}{\left(9 - x_1^2\right)^{3/2}},$$

lo cual nos dice que $D^2k(x_1) > 0$ para todo punto interior del dominio de k. En consecuencia, $x_1 = -6/\sqrt{5}$ es un mínimo local de k y no es una solución del problema planteado. Así, la única solución es la determinada por $x_1 = 6/\sqrt{5}$ y la función h; es decir, el punto $(6/\sqrt{5}\,,\ 3/\sqrt{5})$. El valor máximo de la función f es, entonces,

$$f(6/\sqrt{5}\,,\ 3/\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} + 5\,.$$

3. Otra manera de resolver este problema es haciendo una representación gráfica de él en el plano. Esto es posible porque tanto la función objetivo f como la restricción g son funciones de dos variables. Veamos:

   i) Una representación geométrica, en el plano, de la función objetivo $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 5$ la obtenemos mediante sus *curvas de nivel*, que en este caso son muy sencillas, pues son rectas.

   En efecto, cada curva de nivel a de f que denotamos $\mathcal{C}a$, es –por definición– el conjunto de puntos (x_1, x_2) del dominio de f a los cuales la función f les hace corresponder el número a; es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{C}a &= \{(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}\, f \,/\, f(x_1, x_2) = a\}\\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 \,/\, 2x_1 + x_2 + 5 = a\}.\end{aligned}$$

   En la Figura 3.16 mostramos varios de estos conjuntos, para los valores de a que se indican. Cada recta es el conjunto de puntos del plano R^2 a los cuales corresponden puntos a la misma altura (o nivel) en el plano en R^3, que es el gráfico de f, como ya se indicó en la Figura 3.14.

   ii) Como el problema que nos ocupa es determinar el o los puntos (x_1, x_2) de la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 9$, de modo que $f(x_1, x_2)$ sea máximo, al graficar en el mismo sistema de coordenadas tanto a la circunferencia como a las curvas de nivel de f (Fig. 3.17), es fácil reconocer la altura (o el nivel) que corresponde a determinados puntos de la circunferencia.

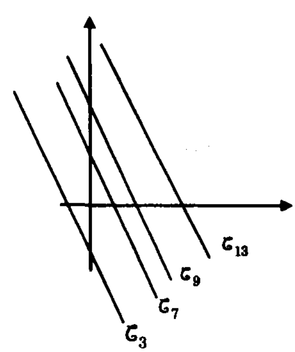


Figura 3.16

Así, por ejemplo, a los puntos P_1 y P_2 que satisfacen la restricción (están en la circunferencia), por estar en la curva de nivel $\mathcal{C}_7$ les corresponde el número 7; es decir, $f(P_1) = f(P_2) = 7$. Observando la Figura 3.17 es claro que ni P_1 ni P_2 resuelven el problema planteado, pues, por ejemplo Q, es otro punto que satisface la restricción, pero

$$f(Q_1) = 9 > 7 = f(P_1) = f(P_2).$$

En consecuencia, en los puntos P_1 y P_2 la función f **no** toma un valor máximo, con la restricción dada.

iii) Siguiendo el razonamiento expuesto, también podemos concluir que la solución del problema no puede estar en Q_1 ni Q_2, pues existen curvas de nivel superior a 9 que intersecan a la circunferencia (por ejemplo $\mathcal{C}_{10}$). En tales puntos de intersección la función f toma valores superiores a $f(Q_1)$ y $f(Q_2)$. Entonces, para resolver el problema planteado, *debemos encontrar el o los puntos de la circunferencia que sean la intersección con la curva de nivel más alto de la función f.* Como cuanto mayor sea el nivel al que corresponda la curva, ésta se ubicará más *hacia la derecha y hacia arriba* (siguiendo la dirección del vector $\nabla f(x_1, x_2) = (2,1)$, que en este caso es constante), ya podemos concluir que la solución del problema está en el punto A del primer cuadrante en el que la circunferencia es tangente a una recta de nivel (Fig. 3.18), que la podemos llamar $\mathcal{C}_v$.

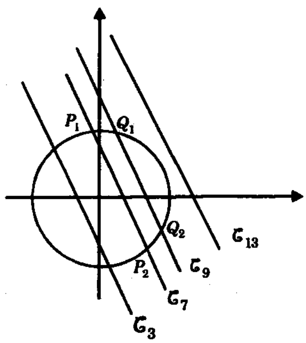


Figura 3.17

Es claro que con este criterio y observando la Figura 3.17, podemos asegurar que v es mayor que 9, pero menor que 13.

iv) Determinemos A y v:

El problema ha quedado reducido a uno sencillo de geometría analítica: *Dada la circunferencia cuya*

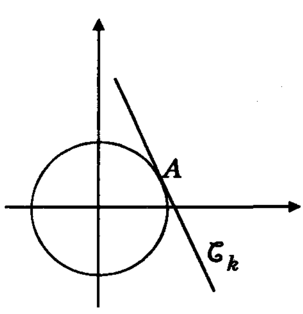


Figura 3.18

ecuación es $x_1^2 + x_2^2 = 9$, *determinar el valor de v para que la recta de ecuación* $2x_1 + x_2 + 5 = v$ *sea tangente con la circunferencia en un punto del primer cuadrante*. Este problema puede resolverse con criterios algebraicos, sin emplear el cálculo diferencial[1], sin embargo acá lo emplearemos, por ser más general: por derivación implícita obtenemos una expresión general de la pendiente de la circunferencia:

$$x_1^2 + x_2^2 = 9 \;\Rightarrow\; 2x_1 + 2x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\Rightarrow \;\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} \quad , \quad x_2 \neq 0 \,.$$

En el punto de tangencia $A = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, la pendiente de la circunferencia será igual a la pendiente de las rectas de nivel:

$$-\frac{x_1^*}{x_2^*} = -2 \;;$$

así $x_1^* = 2x_2^*$; en consecuencia $4\, x_2^{*2} + x_2^{*2} = 9$ y $x_2^* = \frac{3}{\sqrt{5}}$ (no consideramos el valor negativo por saber ya –según lo analizado en (iii)– que el punto de tangencia está en el primer cuadrante[2]). Tenemos, entonces que

$$A = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

y ésta es la solución del problema.

La obtención de v es inmediata:

$$v = f(A) = 2 \times \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} + 5 = 3\sqrt{5} + 5 \,.$$

Es claro que los resultados obtenidos coinciden con los obtenidos en el punto 2.

---

[1] Basta resolver simultáneamente las ecuaciones de la circunferencia y de la recta (conviene hacer $v - 5 = u$) y en la ecuación de segundo grado con una variable que se obtenga, igualar el discriminante a cero. (¿Por qué?)

[2] Es fácil ver gráficamente y verificar analíticamente que existe otro punto de tangencia con otra recta de la misma familia de rectas, en el tercer cuadrante, que corresponde al mínimo.

4. Como ya lo mencionábamos al iniciar esta sección, obtendremos ahora los puntos en los que se debe analizar si se cumple la condición de máximo, empleando el método de los multiplicadores de Lagrange. Luego explicaremos por qué obtenemos las mismas condiciones necesarias que despejando y reemplazando.

   a) Definamos la *función lagrangiana*

   $$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + x_2 + 5 + \lambda\left(9 - x_1^2 - x_2^2\right) \tag{3.4.6}$$

   donde λ es una variable real, conocida como *multiplicador de Lagrange*.

   b) Igualamos a cero las primeras derivadas parciales de L, considerando independientes todas las variables:

   $$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2 - 2\lambda x_1 = 0 \tag{3.4.7}$$

   $$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2 - 2\lambda x_2 = 0 \tag{3.4.8}$$

   $$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 9 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \tag{3.4.9}$$

   c) Observando las dos primeras ecuaciones concluimos que λ, x_1 y x_2 no pueden ser cero, y en consecuencia, manteniendo las constantes en el primer miembro y dividiendo miembro a miembro obtenemos

   $$2 = \frac{x_1}{x_2} \tag{3.4.10}$$

   d) Combinando (3.4.9) –que no es sino la restricción dada en el problema– con (3.4.10), obtenemos

   $$4x_2^2 + x_2^2 = 9 \ ,$$

   de donde

   $$x_2 = \frac{3}{\sqrt{5}} \ \vee \ x_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

   y así

   $$x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}} \ \vee \ x_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

   y

   $$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{6} \ \vee \ \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{6} \ .$$

e) **Tenemos entonces sólo dos soluciones al sistema (3.4.7) – (3.4.9):**

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{6}\right) \text{ y } \left(-\frac{6}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{6}\right) \tag{3.4.11}$$

f) **Para determinar cuál es la solución al problema, debemos analizar si la matriz hessiana de L, respecto a sus variables x_1 y x_2, es negativo definida, sujeta a la restricción lineal en dx_1 y dx_2 que resulta al considerar**

$$g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2=9\ ;$$

es decir

$$dg(x^*,dx)=Dg(x^*)dx=0$$

o, como es más usual:

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*)dx_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}(x^*)dx_2=0\,.$$

Un teorema establece que tal situación se da

> ***si los $n-m$ últimos menores principales de la esquina superior izquierda de la matriz hessiana orlada tienen signos alternados, siendo el primero $(-1)^{m+1}$.***

En este caso la matriz hessiana orlada es

$$\tilde{H}(x,\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & Dg(x) \\ (Dg(x))^t & D_x^2L(x,\lambda)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2\lambda & 0 \\ 2x_2 & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Siendo $n=2$ y $m=1$, la condición establecida por el teorema se reduce a verificar si el signo del determinante de esta matriz en el punto que se evalúa es positivo o no. Haciendo los cálculos, obtenemos que

$$\left|\tilde{H}(x_1,x_2,\lambda)\right|=8\lambda\left(x_1^2+x_2^2\right),$$

lo cual nos dice que este determinante es positivo si y sólo si $\lambda > 0$ (no consideramos la posibilidad $x_1 = x_2 = 0$). En consecuencia, el único punto de máximo local es

$$x^* = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right), \text{ con } \lambda^* = \frac{\sqrt{5}}{6} \tag{3.4.2}$$

Vemos, pues, que la solución obtenida coincide con la obtenida en los puntos 2 y 3. En este caso concreto, es evidente que el camino de los multiplicadores de Lagrange es más laborioso; sin embargo puede ser más sencillo en los casos de más restricciones o cuando el despeje de algunas variables en función de las otras no es tan simple. Tiene además la gran ventaja de la información que proporciona el valor de λ.

Volvamos al ejemplo concreto:

¿Qué significa $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$ *?*

Veamos –en general– qué significa λ en la solución del problema dado: La constante de restricción en este problema es el número 9; es decir $b = 9$. Si en el problema se mantienen la función objetivo y la función restrictiva y se modifica ligeramente el valor de b (por ejemplo que en lugar de ser 9 sea 10) *¿en cuánto se modificaría el valor máximo de la función objetivo?*. Parece natural que para responder a esta pregunta debemos resolver el nuevo problema, hallar el valor máximo correspondiente de f y luego hacer la diferencia con el valor $3\sqrt{5} + 5$ obtenido cuando $b = 9$. Haciendo esto, obtenemos que la nueva solución es $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y el correspondiente valor máximo de f es $5\sqrt{2} + 5$ (¡hacerlo!). Así, al incrementarse el valor de b en una unidad, el valor máximo de f ha cambiado de $3\sqrt{5} + 5$ a $5\sqrt{2} + 5$; es decir, se ha incrementado en $5\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$ unidades (aproximadamente 0.36).

Si en lugar de seguir este camino meramente operativo, nos ponemos a pensar la respuesta a la última pregunta aproximando su valor usando una derivada, nos daremos cuenta que debemos obtener $\dfrac{df}{db}\left(x^*\right)$. Esto tiene sentido sólo si las variables de f pueden expresarse en función de la *variable exógena* b. Ahora podremos ver claramente la importancia del método de los multiplicadores de Lagrange:

En las condiciones necesarias de primer orden, expresadas en las ecuaciones (3.4.7) – (3.4.9), pongamos b en lugar de 9. En este caso es fácil obtener de ellas[1]

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{b}{5}}\ ,\quad x_2 = \sqrt{\frac{b}{5}}\ ,\quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{b}} \tag{3.4.13}$$

Así,

$$f(x_1(b), x_2(b)) = 4\sqrt{\frac{b}{5}} + \sqrt{\frac{b}{5}} + 5 = \sqrt{5b} + 5$$

y en consecuencia

$$\frac{df}{db}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{b}}$$

que, según (3.4.13), es la expresión correspondiente a λ, por lo cual podemos escribir

$$\frac{df}{db}(x) = \lambda$$

y en la solución del problema, tendremos:

$$\frac{df}{db}\left(x^*\right) = \lambda^*\ , \tag{3.4.14}$$

de donde

$$df\left(x^*\right) = \lambda^* db \tag{3.4.15}$$

y así se obtiene un valor aproximado del cambio del valor óptimo de la función objetivo al cambiar, exógenamente, el valor de la constante de restricción. Tal aproximación está dada por el producto del valor del multiplicador de Lagrange correspondiente a la solución, con el cambio (aumento o disminución) de la constante de restricción. En concreto, en este caso tenemos

$$\lambda^* = \frac{\sqrt{5}}{6} \ \text{ y } \ db = \Delta b = 10 - 9 = 1$$

y en consecuencia

$$df = \frac{\sqrt{5}}{6} . 1 = \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0.37\ .$$

---

[1] Observar, nuevamente, que el teorema de la función implícita juega un papel muy importante para el caso general.

Podemos advertir que este es un valor bastante aproximado al valor obtenido anteriormente, por cálculo directo.

Ahora, en virtud de (3.4.15) podemos dar muy fácilmente el valor aproximado del cambio en el valor óptimo de f para cualquier variación pequeña de la constante de restricción. Por ejemplo, si en lugar de ser 9 fuera 8.5, tendríamos

$$\lambda^* = \frac{\sqrt{5}}{6} \ , \quad db = \Delta b = (8.5 - 9) = -0.5$$

y así

$$\Delta f \approx df = \frac{\sqrt{5}}{6} \times (-0.5) \approx -0.19 \, .$$

El lector queda invitado a verificar esta aproximación haciendo el cálculo directo.

Aplicación 3.22 (Problema del productor)

Consideremos el problema "típico" del productor:

- produce el bien B con una función de producción f estrictamente cuasicóncava, que depende de unidades de capital k y de trabajo ℓ .
- los precios unitarios del capital y del trabajo son r y w respectivamente.
- desea *minimizar* el costo de producir $\overline{q}$ unidades del bien B.

Planteado formalmente:

$$\begin{aligned} &\min\,(rk + w\ell) \\ &s.a. \quad f(k,\ell) = \overline{q} \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Cabe mencionar, como lo hicimos para el caso del consumidor, que en rigor las restricciones deberían ser con desigualdades; en este caso $f(k,\ell) \geq \overline{q}$ y la innegatividad de las variables: $k \geq 0$, $\ell \geq 0$. Este enfoque lo veremos más adelante.

Resolveremos el problema (3.4.16) de manera similar a la solución expuesta en el punto 3 del problema anterior, haciendo explícitas, además, la vinculación con el multiplicador de Lagrange, al que ya nos referimos en el punto 4.

a) Una representación gráfica del problema es la que se muestra en la Figura 3.19

La función objetivo –que expresa los costos– está representada por sus curvas de nivel que en este caso son las rectas de isocosto $c: rk + w\ell = c$, y la restricción $f(k,\ell) = \overline{q}$ es la isocuanta $\overline{q}$.

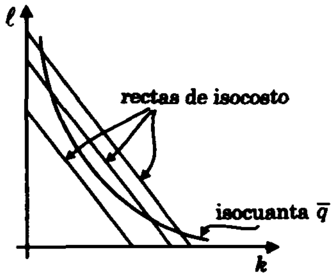


Figura 3.19

b) Como el problema consiste en determinar las cantidades de capital y trabajo que permitan producir $\overline{q}$ unidades del bien B, pero de modo que el costo sea mínimo, geométricamente de lo que se trata ahora es de determinar el punto de la isocuanta $\overline{q}$ que se encuentre en la recta de isocosto correspondiente al costo más bajo posible. Es claro que cuanto mayor sea el costo c, la recta correspondiente de isocosto se ubicará *más hacia la derecha y hacia arriba* (siguiendo la dirección del vector gradiente de la función objetivo, (r,w), obviamente de coordenadas positivas); por esta razón, el punto que resuelva el problema será el que esté en la isocuanta $\overline{q}$ y en la recta de isocosto c^* más próxima al origen. Este análisis nos lleva nuevamente a un punto de tangencia, (k^*,ℓ^*), esta vez entre la isocuanta restricitva y una recta de isocosto. (Fig. 3.20)

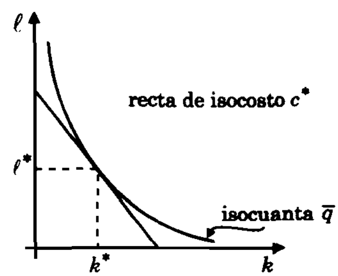


Figura 3.20

c) Determinación de (k^*,ℓ^*) y c^*.

Siendo la isocuanta $\overline{q}$ como la que se ha graficado, es posible tener una expresión general de su pendiente, por derivación implícita:

$$f(k,\ell) = \overline{q} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial k} + \frac{\partial f}{\partial \ell}\frac{d\ell}{dk} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\ell}{dk} = \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial \ell}} = -\frac{f_k}{f_\ell} \qquad \text{(tasa marginal de sustitución técnica)}$$

Siendo $-\dfrac{r}{w}$ la pendiente de las rectas de isocosto, la condición de tangencia nos lleva a igualar estas pendientes y así

$$\frac{f_k}{f_\ell} = \frac{r}{w}, \tag{3.4.17}$$

Esta ecuación y $f(k,\ell) = \overline{q}$ constituyen un sistema (en general no lineal) que al resolverlo da los valores de k^* y ℓ^*. Las condiciones que usualmente se imponen a la función de producción hacen que tal sistema tenga solución única, como en el caso representado en la Figura 3.20. El costo mínimo c^* es entonces $c^* = rk^* + w\ell^*$.

d) Hagamos ahora una interpretación económica escribiendo de otra manera la expresión (3.4.17), calculada en (k^*, ℓ^*):

$$\frac{r}{f_k^*} = \frac{w}{f_\ell^*} \tag{3.4.18}$$

Como f_k^* es el producto marginal del capital, $\dfrac{1}{f_k^*}$ nos dice qué cantidad de capital se requiere para producir una unidad adicional del bien B y en consecuencia el producto $r\left(\dfrac{1}{f_k^*}\right)$ es el costo marginal de producir una unidad adicional de B incrementando capital. Análogamente, $w\left(\dfrac{1}{f_\ell^*}\right)$ es el costo marginal de producir una unidad adicional de B empleando mano de obra. Resulta así que (3.4.18) nos dice que tales costos marginales son iguales en el punto óptimo (k^*, ℓ^*); es decir, que el costo no se reducirá si se disminuye uno de los factores de producción y se incrementa el otro en las cantidades necesarias para mantener constante el nivel de producción (permanecer en la isocuanta).

Si llamamos λ^* a los cocientes igualados en (3.4.18), tendremos

$$\frac{r}{f_k^*} = \frac{w}{f_\ell^*} = \lambda^* \tag{3.4.19}$$

y por la interpretación dada a los cocientes, tiene sentido llamar a λ^* el *costo marginal del producto* (o costo marginal de producción).

De (3.4.19) se obtiene

$$\begin{aligned} r &= \lambda^* f_k^* \\ w &= \lambda^* f_\ell^* \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Estas ecuaciones, con la restricción

$$f(k^*, \ell^*) = \overline{q}$$

se obtienen como condiciones necesarias de primer orden de la función lagrangiana del problema dado. En efecto

$$L(k, \ell, \lambda) = rk + w\ell + \lambda(\overline{q} - f(k, \ell))$$

y si (k^*, ℓ^*) resuelve el problema, debe existir λ^* tal que

$$\frac{\partial L}{\partial k}(k^*, \ell^*, \lambda^*) = r - \lambda^* f_k^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ell}(k^*, \ell^*, \lambda^*) = w - \lambda^* f_\ell^* = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}(k^*, \ell^*, \lambda^*) = \overline{q} - f(k^*, \ell^*) = 0$$

Se ve entonces claramente la ventaja de emplear el método del multiplicador de Lagrange, ya que se obtienen de manera inmediata las ecuaciones que conducen a la solución del problema y λ^* tiene un significado económico según el problema, además de la importancia matemática ya explicada al final del punto 4, cuando resolvimos el problema anterior.

Ejercicios 3.23

1. Sea la función $N(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$.

   a) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,2)$ a la curva de nivel de N correspondiente.

   b) ¿Es cierto que la recta $4x_1 + x_2 = 20$ es tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(4,1)$? ¿Por qué?

c) Hallar, si es posible, el punto de tangencia de la recta $6x_1 + 4x_2 = 80$ a una curva de nivel de N. Ilustrar gráficamente.

2. En el problema del productor, considerar

$$f(k,\ell) = \ell^{1/2} k^{1/2}$$

a) Determinar las funciones de demanda condicional de factores $k^* = k^*(r,w,\overline{q})$ y $\ell^* = \ell^*(r,w,\overline{q})$ y la función costo marginal de producción $\lambda^* = \lambda^*(r,w,\overline{q})$.

b) Obtener los valores específicos de k^*, l^* y λ^* para $r = 9$, $w = 4$, $\overline{q} = 100$.

3. Con los supuestos convenientes, plantear y resolver el problema del consumidor de manera similar a lo efectuado para el problema del productor. Hacer la interpretación económica que conduzca a interpretar el multiplicador de Lagrange como la utilidad marginal del dinero.

4. En el problema del consumidor considerar

$$u(x_1,x_2) = 2\ln x_1 + \ln x_2$$

a) Determinar las funciones de demanda marshalliana

$x_1^* = x_1^*(p_1,p_2,I)$,
$x_2^* = x_2^*(p_1,p_2,I)$

y la función de utilidad marginal del dinero $\lambda^* = \lambda^*(p_1,p_2,I)$.

b) Obtener los valores específicos de x_1^*, x_2^* y λ^* para $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $I = 400$.

5. Dada la función de producción

$$f(K,L) = \min\left\{\frac{K}{4},\frac{L}{3}\right\}$$

¿Cuál es el nivel óptimo de producción si se dispone de 100 unidades monetarias y los precios unitarios de K y L son 8 y 6 unidades monetarias respectivamente?

6. Una firma dispone, para la producción de un bien perfectamente divisible, de los procesos f y g, cuyos factores son K y L, definidos por

$$f(K,L) = \min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{3}\right\}, \qquad f(K,L) = \min\left\{\frac{K}{5}, \frac{L}{2}\right\}$$

¿es cierto que si los precios unitarios de los factores no son iguales, entonces, dado cualquier nivel de producción, es conveniente usar uno, y sólo uno de los procesos? Explicar.

7. Considerar la función de producción:

$$f(I_1, I_2, I_3) = \min\{3I_1, I_2, I_3\},$$

en donde I_1, I_2, I_3 son los insumos y $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$ sus respectivos precios. Hallar el costo mínimo de producir 30 unidades justificando el procedimiento.

8. Se tiene la siguiente función de producción:

$$f(I_1, I_2, I_3, I_4) = \min\left\{2I_1, I_2, \frac{I_3}{3}, I_4\right\}$$

Si el precio en unidades monetarias de cada insumo es $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$ y se disponen de 90 unidades monetarias, hallar la producción óptima.

Retomemos el problema de optimización con restricciones dadas por igualdades como lo planteamos en (3.4.1) al iniciar esta sección y veamos el método de los multiplicadores de Lagrange de manera general:

Teorema 3.24 (*de los multiplicadores de Lagrange*)

Sea el problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \quad g(x) = b \end{aligned}$$

donde:

i) f y g_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ son $m+1$ funciones reales definidas en $A \subset \mathbf{R}^n$, con las derivadas parciales de primer orden continuas.

b es un vector constante de $\mathbf{R}^m$.

ii) $m < n$

iii) Los vectores gradientes $\nabla g_j\left(x^*\right)$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ son linealmente independientes en toda solución local x^*.

Sea también la función lagrangiana real de $n + m$ variables definida por

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda.(b - g(x)). \tag{3.4.21}$$

Si x^* es un máximo local, entonces existe un vector λ^* de $\mathbf{R}^m$ con el cual cumple las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(x^*,\lambda^*\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^*\right) - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\left(x^*\right) = 0 \tag{3.4.22}$$

$$(i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\left(x^*,\lambda^*\right) = b_j - g_j\left(x^*\right) = 0 \tag{3.4.23}$$

$$(j = 1,2,\ldots,m)$$

Además, con ciertas condiciones adicionales,

$$\frac{\partial f}{\partial b_j}\left(x^*\right) = \frac{\partial L}{\partial b_j}\left(x^*,\lambda^*\right) = \lambda_j^* \tag{3.4.24}$$

$$(j = 1,2,\ldots,m)$$

Observaciones 3.25

1. (3.4.22) y (3.4.23) son condiciones necesarias de primer orden de la función lagrangiana L que debe cumplir toda solución local del problema (3.4.1).

2. Las componentes λ_j del vector $\lambda = \left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)$ introducido en la función lagrangiana (3.4.21) se denominan *multiplicadores de Lagrange*. Notar que por cada función reactrictiva g_j se introduce un multiplicador de Lagrange λ_j. Así, tiene sentido el producto escalar $\lambda.(b - g(x))$.

3. Se facilita la obtención de los resultados del teorema escribiendo la función lagrangiana con las componentes de los vectores x, λ y b de manera explícita:

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \big(b_j - g_j(x_1,\dots,x_n)\big) \qquad (3.4.25)$$

4. Como ya lo habíamos adelantado en la nota de pié de página del punto 2, al resolver el Problema 3.21, el teorema de la función implícita juega un papel fundamental, ya que para obtener (3.4.22), partiendo del sistema $g(x) = b$, de m ecuaciones con n incógnitas, se deben "despejar" m de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ en función de las $n - m$ restantes, en una vecindad conveniente, referida al punto x^*. Para garantizar esto se deben cumplir las hipótesis del teorema de la función implícita y por eso la importancia del supuesto (iii), que es equivalente a que el rango de la matriz jacobiana $Dg(x^*)$ sea m; es decir, la condición (1.6.4) dada en el capítulo 1.

5. Para una **interpretación geométrica** importante, escribamos (3.4.22) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x^*) + \dots + \lambda_m^* \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*) + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x^*) + \dots + \lambda_m^* \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x^*)$$

....

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x^*) + \dots + \lambda_m^* \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^*)$$

Estas n igualdades podemos escribirlas vectorialmente, haciendo uso del vector $\nabla f(x^*)$, que es la columna de los primeros miembros, y de los vectores $\nabla g_j(x^*)$ que también los encontramos observando los sumandos de los segundos miembros; así

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(x^*) + \lambda_2^* \nabla g_2(x^*) + \dots + \lambda_m^* \nabla g_m(x^*)\,;$$

o, más brevemente

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, \nabla g_j(x^*) . \qquad (3.4.22)'$$

Ahora se ve claramente que

> *si x^* es una solución del problema (3.4.1), entonces el vector gradiente de la función objetivo, calculado en x^*, es una combinación lineal de los gradientes de las funciones restrictivas g_j, calculados también en x^*, siendo los coeficientes los valores obtenidos λ_j^* de los multiplicadores de Lagrange.*

Estos coeficientes son únicos, ya que los vectores $\nabla g_j(x^*)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, son linealmente independientes.

6. Para el caso $m = 1$ (una sola restricción), que es usualmente tomado para tratar el problema del consumidor y el del productor, (3.4.22)' dice entonces que en la solución x^* los vectores gradientes de la función objetivo y de la función restrictiva deben ser *paralelos*. Esto, con la condición (3.4.23) –que no es sino el cumplimiento de la restricción– nos dice que la solución x^* es un punto de tangencia entre $g(x) = b$ y $f(x) = a$, para algún nivel a.

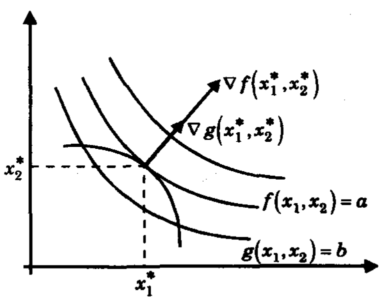


Figura 3.21

En la Figura 3.21 se muestra un caso de $n = 2$ y $m = 1$; y en la Figura 3.22 se muestra un caso de $n = 3$, $m = 1$, que podría corresponder al problema de un consumidor en una economía con 3 bienes; es decir a

$$\begin{aligned} &\max \; u(x_1, x_2, x_3) \\ &\text{s.a.} \\ &\quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{aligned}$$

Notar que en este caso $\nabla g(x_1,x_2,x_3)=(p_1,p_2,p_3)$, es el mismo vector, cualquiera que sea el punto en el que se evalúe. Notar también, que a diferencia de cómo lo representamos en la Figura 3.21, en este caso hemos dibujado el gradiente de la restricción más grande que el gradiente de la función objetivo. Lo hacemos precisamente para ilustrar que puede darse cualquiera de los dos casos, o aun la igualdad. Lo que el teorema establece es el paralelismo, y en el caso del consumidor, esta condición nos lleva inmediatamente a la conocida relación entre utilidades marginales y precios relativos; en efecto, siendo $m = 1$, (3.4.22)' es

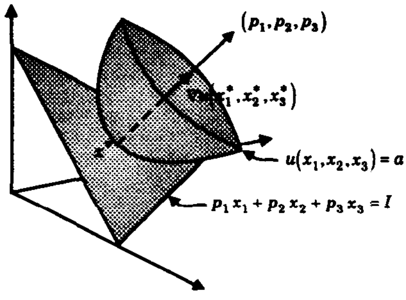


Figura 3.22

$$\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla g(x^*) \ ;$$

y en este caso:

$$\nabla u(x^*) = \lambda^*(p_1,p_2,\ldots,p_n) \ ,$$

o sea

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x^*)\ ,\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*)\right) = \lambda^*(p_1,p_2,\ldots,p_n) \ ,$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) = \lambda^* p_i \quad (i = 1,2,\ldots,n);$$

o también

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x^*)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x^*)} = \frac{p_i}{p_j} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n).$$

7. Haremos ahora una **interpretación de los multiplicadores de Lagrange** comentando las relaciones (3.4.24). Notar que éstas son la formulación general de (3.4.14) en el Problema 3.21. Ya vimos en ese caso particular que el multiplicador de Lagrange permite aproximar el cambio que habrá en el valor óptimo de la función objetivo al modificarse

ligeramente la constante b de la restricción. Como, en general, se tienen m constantes restrictivas $b_1, b_2, \ldots, b_m$ y según el método que estamos viendo se introducen m multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, (3.4.24) nos permite aproximar el efecto en el valor óptimo de la función objetivo al modificarse ligeramente la constante b_j manteniendo fijas las otras; así, λ_j^* es una medida de *sensibilidad*. En muchos problemas económicos los λ_j^* son interpretados como un precio, llamado *precio sombra* para distinguirlo de los precios de mercado. Esta interpretación es consecuencia de (3.4.24), cuando $f(x)$ tiene una dimensión de valor (precio $\times$ cantidad) tal como ganancia o ingreso, y b_j tiene una dimensión de cantidad, tal como producto o factor de producción:
siendo

$$\Delta f(x^*) \approx \lambda_j^* \Delta b_j,$$

para que en ambos miembros se tenga dimensión de valor, conociendo la dimensión de Δb_j (cantidad), resulta natural interpretar λ_j^* como un *precio*.

En verdad, la demostración de (3.4.24) requiere de las condiciones de suficiencia[1] que aún no hemos visto, pero hemos preferido considerar ahora esta importante relación, dando unidad a los comentarios sobre los multiplicadores de Lagrange.

Teorema 3.26 (*condiciones necesarias de segundo orden*)
Dado el problema (3.4.1), donde f y g_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ cumplen las condiciones dadas en el Teorema 3.24 y tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces la matriz hessiana $D_x^2\, L(x,\lambda)$ de la función lagrangiana L, debe ser negativo semidefinida, cuando es evaluada en un punto (x^*, λ^*) de máximo local, sujeta a las m condiciones

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*).dx_i = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,m) \tag{3.4.26}$$

---

[1] El cumplimiento de éstas permite aplicar el teorema de la función implícita y garantizar la existencia de una relación funcional entre x y b y entre λ y b. (Ver Intriligator: [12].

Observaciones 3.27

1. Conviene tener claro que la matriz hessiana $D_x^2 L(x,\lambda)$ es de orden $n \times n$ ya que la derivación es repecto al vector de instrumentos.

$$D_x^2 L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x,\lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(x,\lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x,\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(x,\lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x,\lambda) \end{bmatrix} \qquad (3.4.27)$$

Además, por los supuestos considerados, es una matriz simétrica.

2. La matriz $D_x^2 L(x^*,\lambda^*)$ podría no ser negativo semidefinida. Lo que el teorema establece es que lo sea cuando es aplicada en los vectores $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ que satisfacen (3.4.26). Esta es una restricción natural ya que los incrementos de las variables no pueden ser tan arbitrarios puesto que se trata de una optimización restringida por $g(x) = b$; en consecuencia debe cumplirse $Dg(x^*)(dx) = 0$, que es la expresión vectorial de (3.4.26). Si no se tuviera restricción $(m = 0)$, variaciones infinitesimales *arbitrarias* cerca de x^* mantienen el carácter de óptimo de éste, pero habiendo restricciones, la *arbitrariedad* de las variaciones infinitesimales también se restringe. Ya vimos el caso concreto para $m = 1$ en (*f*) del punto 4, al resolver el Problema 3.21. Es claro que (3.4.26) geométricamente se interpreta como la ortogonalidad del vector dx con cada uno de los vectores gradientes $\nabla g_j(x^*)$.

Teorema 3.28 (*condiciones suficientes*)

Sea el problema (3.4.1), donde f y g_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ cumplen las condiciones dadas en el Teorema 3.24 y tienen derivadas parciales de segundo orden continuas.

Si $\bar{x}$ y $\bar{\lambda}$ son vectores de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$ respectivamente que cumplen

i) $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x},\bar{\lambda}) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$

ii) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

iii) $D_x^2\,L\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)$ es negativo definida, sujeta a las m restricciones lineales

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i}dx = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

entonces $\bar{x}$ es una solución del problema (3.4.1).

Observaciones 3.29

1. De manera análoga a lo comentado respecto al Teorema 3.16 (sin restricciones), debe quedar claro que las condiciones suficientes están dadas por (i), (ii) y (iii). Suele identificarse sólo (iii) como condiciones suficientes, pero es porque usualmente se aplica en puntos que ya satisfacen las condiciones necesarias de primer orden –(3.4.22) y (3.4.23)– que son precisamente (i) y (ii).
2. Considerando la seguna derivada de L, respecto a sus $n+m$ variables, se llama *matriz hessiana orlada de L* a la matriz $\tilde{H}(x,\lambda)$ de orden $(n+m)\times(n+m)$ definida por:

$$\tilde{H}(x,\lambda)=\left[\begin{array}{c:c} 0 & Dg(x) \\ \hdashline (Dg(x))^t & D_x^2\,L(x,\lambda)\end{array}\right]$$

o sea

$$\tilde{H}(x,\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \\
\hdashline
\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x,\lambda) & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1\,\partial x_n}(x,\lambda) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n\,\partial x_1}(x,\lambda) & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x,\lambda)
\end{array}\right] \qquad (3.4.28)$$

que también es una matriz simétrica [1].

[1] Partiendo de $\left|D^2L((x,\lambda))\right|$; es decir del determinante de la matriz hessiana de L respecto a todas sus variables, se obtiene $\left|\tilde{H}(x,\lambda)\right|$ intercambiando filas y columnas adecuadamente.

Se demuestra que la condición (iii) es equivalente a que se cumplan las siguientes $n-m$ condiciones:

que los $n-m$ últimos menores principales de la esquina superior izquierda de $\tilde{H}(\bar{x},\bar{\lambda})$ tengan signos alternados, siendo el primero el de $(-1)^{m+1}$.	(3.4.29)

Ya en el punto 4 de la solución desarrollada para el Problema 3.21 vimos una aplicación concreta en el caso $n=2$ y $m=1$ (en el que con frecuencia se plantea el problema del consumidor y del productor). Notar que –por ejemplo– en el caso del problema del consumidor con los n bienes y su restricción de presupuesto, se deben evaluar, según (3.4.29), $n-1$ determinantes y el primero de ellos –de orden 3×3– debe ser de signo positivo.

3. Para determinar –en general– cuales son los $n-m$ últimos menores principales de la esquina superior izquierda de $\tilde{H}(x,\lambda)$, tener en cuenta que el $(n-m)$-ésimo es $\left|\tilde{H}(x,\lambda)\right|$; o sea el menor principal de orden $(n+m)\times(n+m)$. Así, el penúltimo es de orden $(n+m-1)\times(n+m-1)$ y es fácil deducir que el primero es de orden $2m+1$. Es éste el que debe tener el signo de $(-1)^{m+1}$.
4. Notar que (3.4.29) se cumple como lo establece el Teorema 3.16 para el caso irrestricto, cuando $m=0$.
5. Si el problema de optimización es de *minimización*, con las mismas funciones, sólo se modifica la condición (iii):

   (iii)$_{\min}$: $D_x^2L(\bar{x},\bar{\lambda})$ es positivo definida, sujeta a las m restricciones lineales
   $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i}dx=0 \quad (j=1,2,\ldots,m)$$

   Como consecuencia, la versión correspondiente de (3.4.29) es

que los $n-m$ últimos menores principales de la esquina superior izquierda de $\tilde{H}(\bar{x},\bar{\lambda})$ tengan el mismo signo: el de $(-1)^{m}$	$(3.4.29)_{\min}$

Ejercicios 3.30

1. Resolver los siguientes problemas e intentar su ilustración gráfica:

a) $\max\left(x_1 + x_2\right)$
s.a
$x_1^2 + x_2^2 = 1$

c) $\max e^{-\left(x_1^2+x_2^2\right)}$
s.a
$2x_1 + 3x_2 = 4$

b) $\min x_1^2 + 4x_2^2$
s.a
$x_1 + x_2 = 1$

d) $\max \quad \operatorname{sen} x_1 \cos x_2$
s.a
$x_1 - x_2 = 0$

e) $\max x_1 x_2 x_3$
s.a
$x_1 + x_2 + x_2 = 1$

2. Un consumidor tiene la función de utilidad

$$u(x,y) = xy + x + 2y$$

Los precios de los bienes son $p_x = 2$, $p_v = 5$ y su ingreso es $I = 56$. Considerando que el consumidor agotará su ingreso:

a) Determinar las cantidades de los bienes que maximizan su utilidad.

b) Explicar la relación entre el multiplicador, la utilidad marginal del dinero y el efecto en la utilidad al incrementarse el ingreso en una unidad.

c) ¿Qué otras cantidades x e y le darían la misma utilidad obtenida en (a) si su ingreso fuera mayor? Dar ejemplos e ilustrar gráficamente.

3. La función de utilidad de un consumidor es $u(x,y) = xy^2$, su ingreso es $I = 30$ y los precios unitarios de los bienes son $p_x = 5$ y $p_y = 3$.

Considerar que el consumidor agotará su ingreso y resolver:

a) Determinar la "canasta" que maximiza la utilidad.

b) Si el ingreso del consumidor se incrementa en dos unidades, estimar en cuánto se incrementa la utilidad.

c) Determinar la tasa marginal de sustitución en el punto obtenido en (a).

4. a) Sean

$$u(x_1,x_2)=x_1 x_2^2,$$

función de utilidad de un consumidor, y $P=(6,8)$, el vector precio unitario correspondiente.

Calcular el menor ingreso con el cual el consumidor alcanza el nivel de utilidad 18

b) Plantear un problema de maximización de la utilidad del consumidor, cuya canasta óptima sea la hallada en la parte (a).

5. En un problema de optimización con una restricción de igualdad, tenemos la función lagrangiana

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda)=x_1+x_2^2+x_3^3+\lambda(1-x_1-x_2-x_3)$$

a) Determinar las condiciones necesarias que debe satisfacer una solución del problema.

b) Determinar el conjunto de todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ que satisfacen las condiciones dadas en (a).

c) Determinar las condiciones suficientes para que un vector de $\mathbf{R}^3$ sea solución, en caso de que el problema sea de maximización.

d) Indicar si los elementos del conjunto hallado en (b) corresponden a un problema de maximización o minimización.

6. Sean las funciones

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$$

$$g(x_1,x_2)=(x_1-1)^2-x_2^2$$

a) Determinar todos los puntos que puedan ser extremos locales (máximos o mínimos) de la función f sujeta a la restricción

$$g(x_1,x_2)=0.$$

b) Emplear las condiciones de suficiencia para determinar si los puntos obtenidos en (a) dan máximos o mínimos de f con la restricción establecida.

3.5 OPTIMIZACION CON RESTRICCION DADA POR UNA DESIGUALDAD

Ya hemos venido diciendo que un tratamiento más riguroso de algunos problemas económicos de optimización con restricciones es considerando éstas como desigualdades. Un tratamiento más amplio se hará en la sección 3.6 considerando varias restricciones, pero es importante detenernos en el caso de una sola restricción y estudiar el teorema de Lagrange (3.31) y su extensión (3.31Ext), que son básicos para comprender el teorema más general y las condiciones de Kuhn-Tucker que se dan en la próxima sección.

Nos hemos referido en más de una oportunidad al problema del consumidor cuya restricción de presupuesto en verdad es $p.x \leq I$; y, ciertamente, teniendo en cuenta que una función de producción nos dice la máxima cantidad de producto que puede elaborarse teniendo determinadas cantidades de factores, el problema del productor (3.4.16), estaría mejor planteado con la restricción $f(k,\ell) \geq \overline{q}$.

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \\ &\qquad g(x) \leq b \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

donde f y g son funciones reales definidas en un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ y b es una constante real dada.

De manera similar a lo establecido para las restricciones con igualdades, asociamos al problema anterior una *función lagrangiana*, definida por

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda\big(b - g(x)\big) \tag{3.5.2}$$

Con estas consideraciones, veamos el siguiente teorema:

Teorema 3.31 (*de Lagrange*)

Sea el problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \\ &\qquad g(x) \leq b \end{aligned}$$

donde

i) f y g son funciones reales, cóncava y convexa respectivamente, definidas en subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$, b es un número real dado.

ii) Existe por lo menos un vector $\overline{x}$ de $\mathbf{R}^n$ tal que $g(\overline{x}) < b$.

Sea también la función lagrangiana real, de $n+1$ variables reales, definida por

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda(b-g(x)).$$

Para que un vector x^* sea solución del problema, es necesario y suficiente que exista un número real λ^* tal que

a) x^* maximice $L(x,\lambda^*)$

b) $\lambda^* \geq 0$

c) $g(x^*) \leq b$

d) $\lambda^*(b-g(x^*))=0$.

Observaciones 3.32

1. Cuando la función restrictiva g cumple (ii), se dice que satisface la *calificación de restricciones*. Sin esta exigencia, adimitiríamos problemas como

$$\max\left(19-(x-4)^2\right),\ \text{sujeto a } (x-3)^2 \leq 0,$$

que como es fácil advertir, tiene como única solución posible: $x^*=3$, por ser éste el único número que satisface la restricción; sin embargo, como la función lagrangiana correspondiente es

$$L(x,\lambda)=19-(x-4)^2-\lambda(x-3)^2,$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\lambda)=-2(x-4)-2\lambda(x-3),$$

es claro que $x^*=3$ no maximiza $L(x,\lambda^*)$, pues $L_x(3,\lambda)=2\neq 0$ para todo λ. Así, no se cumple (a). Problemas como éste serán tratados de manera particular y no son frecuentes en teoría económica.

2. Para usar este teorema de manera práctica, tengamos en cuenta que

2.1 La función lagrangiana $L(x,\lambda^*)=f(x)+\lambda^*(b-g(x))$

es cóncava (en x), pues f es cóncava, $(-g)$ también y $\lambda^* \geq 0$ no altera la concavidad de $(-g)$.

2.2 Usualmente las funciones f y g son también diferenciables y en tales casos, por (2.1), la condición (a) se cumple si y sólo si

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0. \text{ (Optimización irrestricta).}$$

2.3 Por la condición (d), se debe tener $\lambda^* = 0$ ó $g(x^*) = b$. Más aún, por (b) y (c):

- Si $\lambda^* > 0$ entonces $g(x^*) = b$
- Si $g(x^*) < b$ entonces $\lambda^* = 0$.

Es claro que si $g(x^*) = b$, no podemos concluir que $\lambda^* > 0$; pero si asumimos esta igualdad, no debemos llegar a una contradicción, cómo podría ser $\lambda^* < 0$.

3. Teniendo en cuenta lo que acabamos de observar en 2.2 y 2.3, a continuación indicamos un camino a seguir para resolver problemas de optimización con funciones diferenciables y con la restricción establecida por una desigualdad:

3.1 Plantear el problema como en (3.5.1)

3.2 Verificar que se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange

3.3 Escribir la función lagrangiana, hallar las derivadas parciales de ésta respecto a las variables x_i del vector x de instrumentos (también llamadas variables de decisión) e igualarlas a cero.

3.4 Asumir que se cumple $g(x) = b$. Con esta ecuación y las n resultantes del paso anterior, obtener valores para λ^* y x^*.

3.5 Si se obtiene un valor negativo de λ^*, descartar la posibilidad de que $g(x) = b$. Por (c) debe cumplirse entonces que $g(x) < b$ y en consecuencia $\lambda^* = 0$. Con este valor de λ^*, obtener los valores de x_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ resolviendo las n ecuaciones del paso 3.3.

Ejemplo 3.33

Resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\max\left(4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 3\right) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 8x_1 + 6x_2 \leq 48 \end{aligned}$$

1. Es claro que las funciones son diferenciables y que g es convexa (es lineal). La concavidad de f es inmediata, aplicando el criterio anotado en la Observación 2.58 del capítulo anterior:

$$f_{11}(x_1,x_2) = -2 \leq 0$$

$$f_{22}(x_1,x_2) = -2 \leq 0$$

$$\operatorname{Det}\left(D^2 f(x_1,x_2)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \geq 0$$

2. Evidentemente se cumple la calificación de restricciones, pues, por ejemplo, $g(1,1) = 14 < 48$.

3. De $L(x_1,x_2,\lambda) = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 3 + \lambda(48 - 8x_1 - 6x_2)$

obtenemos:

$$L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 4 - 2x_1 - 8\lambda$$

$$L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 6 - 2x_2 - 6\lambda$$

4. Igualando estas derivadas a cero y asumiendo $8x_1 + 6x_2 = 48$, obtenemos $\bar{x}_1 = \frac{78}{25}$, $\bar{x}_2 = \frac{96}{25}$, lo cual implica que $\bar{\lambda} = -0.28$. Resultando $\bar{\lambda} < 0$, los valores obtenidos no son la solución al problema. Esta será entonces un punto (x_1^*,x_2^*) que satisfaga la restricción no por la igualdad como habíamos asumido, sino por la desigualdad; así $8x_1^* + 6x_2^* = g(x_1^*,x_2^*) < 48$ y según lo analizado en (2.3) de las observaciones que acabamos de hacer al Teorema de Lagrange, $\lambda^* = 0$.

5. Sabiendo ya que $\lambda^* = 0$, las ecuaciones

$$4 - 2x_1^* - 8\lambda^* = 0 \ \wedge \ 6 - 2x_2^* - 6\lambda^* = 0$$

nos conducen a la solución:

$$(x_1^*,x_2^*) = (2,3).$$

Aplicación 3.34

Consideremos una empresa monopólica, cuya función de producción $y = f(k, \ell)$ es cóncava con productos marginales positivos, que desea determinar los niveles de uso de sus factores según el criterio de maximizar el empleo ℓ sujeto a la restricción de que sus ganancias no sean menores que cierto nivel $\bar{s}$.

El problema de tal empresa es

$$\begin{aligned} &\max \ell \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad p\, f(k,\ell) - w\ell - rk \geq \bar{s} \end{aligned}$$

que podemos expresar

$$\begin{aligned} &\max \ell \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad w\ell + rk - p\, f(k,\ell) \leq -\bar{s} \end{aligned}$$

y aplicar los criterios dados en el Teorema:

$$\begin{aligned} L(k,\ell,\lambda) &= \ell + \lambda\left(-\bar{s} + pf(k,\ell) - w\ell - rk\right) \\ L_k &= \lambda \frac{\partial}{\partial k}\left(pf(k,\ell)\right) - r\lambda \\ &= \lambda \frac{d}{dy}\left(pf(k,\ell)\right)\frac{\partial y}{\partial k} - r\lambda \\ &= \lambda\, p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) f_k - r\lambda \qquad (\eta \text{ es la elasticidad de demanda}) \\ L_\ell &= 1 + \lambda\, p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) f_\ell - w\lambda \end{aligned}$$

De $L_\ell = 0$ deducimos inmediatamente que $\lambda \neq 0$; en consecuencia $\lambda > 0$ y por (d) del teorema, la restricción debe cumplirse por la igualdad

$$pf(k,\ell) - w\ell - rk = \bar{s}.$$

Esta ecuación, con $L_\ell = 0$ y $L_k = 0$ nos permitirían determinar los valores de k^*, de ℓ^* y de λ^*. Es un ejercicio interesante para el economista analizar las condiciones que aseguran la existencia de solución, aplicando el teorema de la función implícita.

De $L_\ell = 0$ y de $L_k = 0$ podemos obtener, asumiendo $\eta \neq -1$, que

$$\frac{f_\ell}{f_k} = \frac{w\lambda - 1}{r\lambda};$$

y siendo $\lambda > 0$, concluimos que

$$\frac{f_\ell}{f_k} < \frac{w}{r}.$$

Esta conclusión nos permite afirmar que en este caso los niveles de uso de los factores no coinciden con los que corresponden al criterio de minimización de costos.

El lector queda invitado a interpretar económicamente la desigualdad $w > pf_\ell\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$, obtenida de $L_\ell = 0$ y $\lambda > 0$.

Observaciones 3.35 (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

1. Hagamos una interpretación de la función lagrangiana del problema (3.5.1), considerándola una función objetivo en sí.

   Así, siendo
   $$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x)),$$
   pensemos que se trata de maximizar la función L sabiendo que la elección del vector x ya nos da un valor $f(x)$ al cual hay que sumar el valor de la diferencia $b - g(x)$, considerando el "precio unitario" λ.

   Si se elige un vector x tal que $b - g(x) \geq 0$, se puede añadir a $f(x)$ la "venta" de $b - g(x)$ unidades de la restricción por un "valor" de $\lambda(b - g(x))$ unidades de la función objetivo, de modo que en total se tienen $f(x) + \lambda(b - g(x))$ unidades de la función objetivo. Análogamente, si se elige un vector x tal que $b - g(x) < 0$, se tendría que sustraer a $f(x)$ la "compra" de $-(b - g(x))$ unidades de la restricción por un "valor" de $-\lambda(b - g(x))$ unidades de la función objetivo, obteniéndose en total $f(x) + \lambda(b - g(x))$ unidades de la función objetivo.

   De esta manera λ puede verse como una *tasa de cambio entre unidades de la función objetivo y unidades de la restricción*. Es usual llamar a los multiplicadores de Lagrange los **precios sombra de las restricciones**.

2. Si asumimos que la restricción es relajada en θ unidades, pudiendo ser θ un número positivo, negativo o nulo, la restricción en el problema es ahora $g(x) \leq b + \theta$. Si $\theta > 0$, la restricción está siendo relajada propiamente, pero si $\theta < 0$ la restricción está siendo más estrecha. Cabe entonces preguntarse

   ¿cuál es el menor precio λ al cual se decidirá **no** *relajar la restricción?*

   En otras palabras:

   ¿para qué precio λ se elegiría $\theta = 0$?

La siguiente definición permite responder de manera formal esta pregunta.

Definición 3.36 Llamamos **función envolvente** asociada al problema (3.5.1), a la función $v = v(\theta)$, real de variable real, definida por

$v(\theta) :=$ valor máximo de $f(x)$ sujeto a la restricción $g(x) \leq b + \theta$.

Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que siendo f cóncava y g convexa, la función envolvente es cóncava[1]. Haciendo uso de este hecho y asumiendo diferenciabilidad de v, tendremos, según el Teorema 2.57, primera parte, que estando 0 y θ en el dominio de v:

$$v(\theta) \leq v(0) + v'(0)\theta. \tag{3.5.3}$$

Si llamamos $v'(0) = \lambda^*$, (3.5.3) podemos escribir:

$$v(0) \geq v(\theta) - \lambda^* \theta \tag{3.5.4}$$

y considerando λ^* como el precio unitario de las unidades en que se relaja la restricción, (3.5.4) nos dice que el valor máximo de $f(x)$, con la relajación $\theta = 0$, no es menor que el resultado neto de considerar otra relajación θ y la

[1] Aplicar la definición de concavidad a v y expresar esa desigualdad solamente en términos de f, teniendo en cuenta que el máximo de $f(x)$ sujeto a $g(x) \leq b + \hat{\theta}$, ocurrirá en algún punto $\hat{x}$; así $v(\hat{\theta}) = f(\hat{x})$.

"compra" o "venta" de θ unidades, al precio $\lambda^* = v'(0)$. En consecuencia, asumiendo que se pueden comprar relajaciones (o vender restricciones), se elegiría $\theta = 0$ con tal que el precio de la relajación sea $\lambda^* = v'(0)$ y así queda respondida la pregunta planteada en el punto 2 de Observaciones 3.35.

Demostración del Teorema de Lagrange

Las condiciones son **necesarias**:

1. (c) es obviamente necesaria, pues x^* debe satisfacer la restricción.
2. Sea $\lambda^* = v'(0)$, donde $v = v(\theta)$ es la función envolvente dada en la Definición 3.36. Así, λ^* es el pago marginal de una relajación de la restricción $g(x) \leq b$. Es claro que al tener una relajación que *agranda* el conjunto de posibilidades de elección de x, tal relajación no puede disminuir el máximo valor que puede alcanzar f. En consecuencia, el pago marginal λ^* de la relajación no puede ser negativo y así vemos que se cumple (b).
3. Supongamos que $b - g(x^*) \neq 0$. Esto significa que $g(x^*) < b$ y entonces es posible definir una bola $B_r(x^*)$, con radio $r > 0$ suficientemente pequeño, de modo que esté incluida en la región factible y que para todo $x \in B_r(x^*)$ se tenga $f(x^*) \geq f(x)$. Así, x^* es un máximo local de f, y por ser ésta una función cóncava, x^* es un máximo global. Queda claro, entonces, que siendo $g(x^*) < b$, pequeñas relajaciones de la restricción dada por b, no van a alterar el carácter de óptimo de x^*. Esto podemos expresarlo con la variable θ, afirmando que el valor máximo de $f(x)$ sujeta a la restricción $g(x) \leq b + \theta$ se mantiene en $f(x^*)$ para valores pequeños de θ. En consecuencia $v(\theta) = f(x^*)$ y $v'(0) = 0$. Vemos, entonces, que $g(x^*) < b$ implica $\lambda^* = 0$, lo cual –sabiendo que $g(x^*) \leq b$– es lógicamente equivalente a afirmar que $g(x^*) = b$ ó $\lambda^* = 0$; es decir $b - g(x^*) = 0$ ó $\lambda^* = 0$. Así queda demostrada la parte (d) del teorema.
4. Nos resta probar (a), lo cual equivale a probar que $L(x^*, \lambda^*) \geq L(x, \lambda^*)$, para todo x del dominio; o mejor aún, que

$$f(x^*) + \lambda^*(b - g(x^*)) \ \geq \ f(x) + \lambda^*(b - g(x)).$$

En virtud de (d), esta desigualdad se simplifica y debemos probar, entonces, que para todo x:

$$f\left(x^*\right) \geq f(x)+\lambda^*(b-g(x)). \tag{3.5.5}$$

Para esto nos apoyamos en la concavidad de la función envolvente:

4.1 Sabemos, por (3.5.4), que

$$v(0) \geq v(\theta)-\lambda^*\theta$$

4.2 Siendo x^* el máximo de f con la restricción $g(x) \leq b$, queda claro – según la definición dada de v – que

$$v(0)=f\left(x^*\right)$$

4.3 Si elegimos arbitrariamente $\tilde{x}$ del dominio de f y g y hacemos $\theta=g(\tilde{x})-b$, tendremos que la restricción $g(x) \leq b+\theta$ es equivalente a $g(x) \leq g(\tilde{x})$.

4.4 Como $g(\tilde{x})=g(\tilde{x})$, es claro que $\tilde{x}$ satisface la restricción del problema de maximizar $f(x)$ con la restricción $g(x) \leq b+\theta$; en consecuencia el valor máximo de $f(x)$ con tal restricción no puede ser menor que $f(\tilde{x})$; es decir

$$v\left(g(\tilde{x})-b\right) \geq f(\tilde{x}).$$

4.5 En la desigualdad (3.5.4), repetida en 4.1, reemplacemos $v(0)$ por $f\left(x^*\right)$ y θ por $g(\tilde{x})-b$; así obtenemos

$$f\left(x^*\right) \geq v\left(g(\tilde{x})-b\right)-\lambda^*\left(g(\tilde{x})-b\right).$$

4.6 Empleando ahora la desigualdad del paso 4.4, tenemos

$$f\left(x^*\right) \geq f(\tilde{x})-\lambda^*\left(g(\tilde{x})-b\right);$$

o sea

$$f\left(x^*\right) \geq f(\tilde{x})+\lambda^*\left(b-g(\tilde{x})\right)$$

y como el vector $\tilde{x}$ fue tomado arbitrariamente, esta última desigualdad es equivalente a (3.5.5), que es la que queríamos demostrar.

Las condiciones son **suficientes**:

1. Es evidente que (c) garantiza que x^* es factible.
   Debemos demostrar que para todo x que satisface $g(x) \le b$ tendremos $f(x) \le f(x^*)$.
2. Como según (a) x^* maximiza $L(x,\lambda^*)$, tendremos que $\forall x$:
$$L(x^*,\lambda^*) \ge L(x,\lambda^*)$$
   o sea $$f(x^*) + \lambda^*(b - g(x^*)) \ge f(x) + \lambda^*(b - g(x)), \quad \forall x.$$
3. La condición (d) implica entonces, que
$$f(x^*) \ge f(x) + \lambda^*(b - g(x)), \quad \forall x$$
4. La desigualdad anterior se cumple, en particular, para x tal que $g(x) \le b$; en consecuencia, siendo $\lambda^* \ge 0$ (según (b)), se tiene que $\lambda^*(b - g(x)) \ge 0$ y es claro que
$$f(x^*) \ge f(x) + \lambda^*(b - g(x)) \ge f(x). \quad \blacksquare$$

Observación 3.37 (Un adelanto del teorema de la envolvente)

Mostraremos, con el problema del consumidor, la vinculación que existe entre la función lagrangiana y la función que asigna a los parámetros del problema el valor óptimo de la función objetivo correspondiente.

Sea x^* el vector de demanda del consumidor con el vector de precios p y el ingreso I. Así, x^* resuelve el problema

$$\begin{array}{l} \max u(x) \\ \text{s.a} \\ \quad p.x \le I. \end{array}$$

Se define la función v de utilidad indirecta, como

$$v(p,I) = u(x^*). \tag{3.5.6}$$

Además, si $L(x,\lambda^*,p,I) = u(x) + \lambda^*(I - p.x)$, tenemos

$$u(x^*) = L(x^*,\lambda^*,p,I), \tag{3.5.7}$$

pues
$$\lambda^*(I - p.x^*) = 0. \tag{3.5.8}$$

Así, en el óptimo: o la restricción se cumple con la igualdad o el precio sombra de la restricción es nulo.

Por (a) del Teorema 3.31 sabemos que x^* es un máximo no restringido de la función lagrangiana; entonces

$$L(x^*, \lambda^*, p, I) \geq L(x, \lambda^*, p, I) \quad \forall x \tag{3.5.9}$$

Combinando (3.5.6), (3.5.7) y (3.5.9), obtenemos la desigualdad

$$v(p, I) \geq L(x, \lambda^*, p, I) \quad \forall x\,; \tag{3.5.10}$$

o, equivalentemente

$$v(p, I) \geq u(x) + \lambda^*(I - p.x) \quad \forall x\,. \tag{3.5.11}$$

Esta desigualdad se cumple para todo p, I, x, siempre que λ^* sea el precio sombra asociado con la restricción de presupuesto determinado por p e I. Notemos que usualmente al variar p e I también varía λ^*; así, asumimos que λ^* es función de p y de I.

Asumamos que para $\hat{p}$ e $\hat{I}$ dados, el vector óptimo de demanda correspondiente es $\hat{x}$. De (3.5.11) tenemos

$$v(\hat{p}, I) \geq u(\hat{x}) + \hat{\lambda}_1(I - \hat{p}.\hat{x}) \tag{3.5.12}$$

$$v(p, \hat{I}) \geq u(\hat{x}) + \hat{\lambda}_2(\hat{I} - p.\hat{x})\,, \tag{3.5.13}$$

donde $\hat{\lambda}_1$, es función de $\hat{p}$ e I, y $\hat{\lambda}_2$ es función de p y de $\hat{I}$.

Ilustramos gráficamente (3.5.12) en la Figura 3.23 considerando v y L funciones sólo de I.

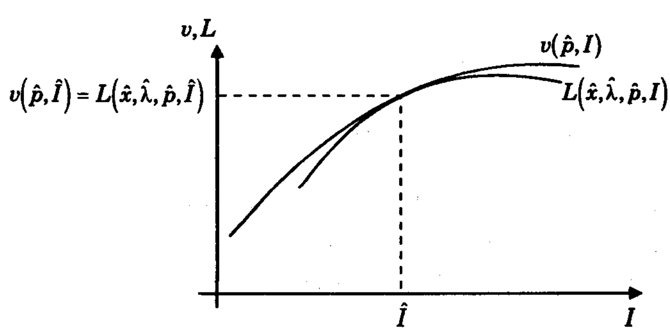


Figura 3.23

(La concavidad que se muestra es consecuencia de la concavidad asumida para la función de utilidad y de la linealidad de la restricción).

El sentido de la desigualdad en (3.5.12) nos dice que los puntos correspondientes a v deben estar más arriba o sobre los puntos correspondientes a L. Entonces, como de (3.5.6) y (3.5.7) deducimos que $v(\hat{p},\hat{I}) = L(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{p},\hat{I})$, concluimos la tangencia de las curvas en el punto correspondiente a $\hat{I}$ y en consecuencia

$$\left.\frac{\partial v}{\partial I}\right|_{I=\hat{I}} = \left.\frac{\partial L}{\partial I}\right|_{I=\hat{I}} \tag{3.5.14}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I}\left[u(\hat{x}) + \hat{\lambda}(I - \hat{p}.\hat{x})\right] \\ &= \hat{\lambda} + \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial I}(I - \hat{p}.\hat{x})\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

y en consecuencia

$$\left.\frac{\partial L}{\partial I}\right|_{I=\hat{I}} = \hat{\lambda} \tag{3.5.16}$$

pues el segundo sumando de (3.5.15) es nulo (es evidente en el caso usual $\hat{p}.\hat{x} = \hat{I}$; pero si esto no se cumple, es claro que el precio sombra es cero y mantendrá este valor para pequeños cambios de I, próximos a $\hat{I}$; esto es $\left.\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial I}\right|_{I=\hat{I}} = 0$).

De (3.5.14) y (3.5.16) tenemos

$$\left.\frac{\partial v}{\partial I}\right|_{I=\hat{I}} = \hat{\lambda} \tag{3.5.17}$$

lo cual nos dice que $\hat{\lambda}$ es la *utilidad marginal del dinero*.

Análogamente, en la Figura 3.24 ilustramos gráficamente (3.5.13), teniendo en cuenta que v es no creciente y cuasiconvexa en p.

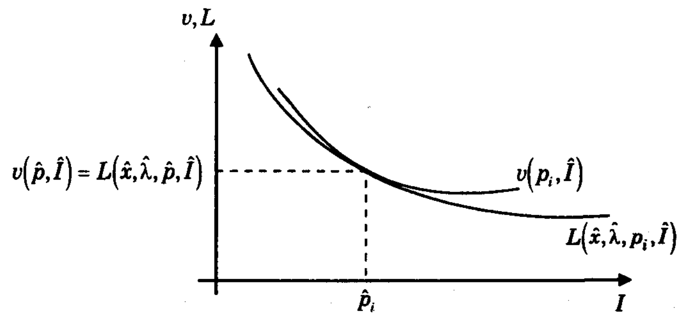


Figura 3.24

Por la tangencia de las curvas en el punto correspondiente a $\hat{p}_i$ tenemos

$$\left.\frac{\partial v}{\partial p_i}\right|_{p_i=\hat{p}_i} = \left.\frac{\partial L}{\partial p_i}\right|_{p_i=\hat{p}_i} . \tag{3.5.18}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left[u(\hat{x}) + \hat{\lambda}\left(\hat{I} - p.\hat{x}\right)\right] \\ &= -\hat{\lambda}\,\hat{x}_i + \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial p_i}(I - p.\hat{x}) \\ &= -\hat{\lambda}\,\hat{x}_i ,\end{aligned}$$

concluimos que

$$\left.\frac{\partial v}{\partial p_i}\right|_{p_i=\hat{p}_i} = -\hat{\lambda}\,\hat{x}_i . \tag{3.5.19}$$

Notemos que si cambiamos el valor de $\hat{I}$, en la Figura 3.23 cambiará sólo el gráfico de L, que será de forma similar a la presentada y siempre tangente con el gráfico de v, pero ahora en el punto correspondiente al nuevo valor de $\hat{I}$. Análogamente, cambios en los valores de $\hat{p}_i$ determinarán también gráficos como el de la Figura 3.24, manteniéndose el gráfico de v, pero *moviéndose* el gráfico de L de modo que su tangencia con el de v sea en el punto correspondiente al nuevo valor de $\hat{p}_i$. En consecuencia, podemos decir que la función v es la *envolvente* de las funciones lagrangianas.

Ejemplo 3.38

Resolviendo el problema de un consumidor con un ingreso $I > 0$ en un mercado de dos bienes con precios unitarios p_1 y p_2 positivos, cuya función de utilidad es

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

obtenemos que su función lagrangiana es

$$L(x_1, x_2, \lambda, p, I) = \sqrt{x_1 x_2} + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

y siguiendo las recomendaciones sugeridas en el punto 3 de Observaciones 3.32, obtenemos

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \quad x_2^* = \frac{I}{2p_2}, \quad \lambda^* = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

Así, la función de utilidad indirecta es

$$v(p_1, p_2, I) = u(x_1^*, x_2^*) = \frac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

- Podemos verificar que se cumple la desigualdad $v(p, I) \geq L(x, \lambda^*, p, I)$ (la (3.5.10)), pues

$$L(x, \lambda^*, p, I) = \sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

y entonces (3.5.10) es equivalente a

$$\frac{x_1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2} + \frac{x_2}{2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

lo cual es consecuencia de $\left(\sqrt{x_1}\, a - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$, siendo $a = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}$.

- También podemos verificar

$$\left.\frac{\partial v}{\partial I}\right|_{I=I^*} = \left.\frac{\partial L}{\partial I}\right|_{I=I^*} \qquad \text{(la igualdad 3.5.14)}$$

pues

$$\left.\frac{\partial v}{\partial I}\right|_{I=I^*} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} \tag{3.5.20}$$

y
$$\left.\frac{\partial L}{\partial I}\right|_{I=I^*} = \lambda^* = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} .$$

– Análogamente

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{I}{4\sqrt{p_2}\left(\sqrt{p_1}\right)^3}$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} \cdot \frac{I}{2p_1}$$
$$= -\lambda^* x_1^* , \tag{3.5.21}$$

como se estableció en (3.5.19).

Es claro que también
$$\frac{\partial v}{\partial p_2} = -\lambda^* x_2^* . \tag{3.5.22}$$

Además, si dividimos (3.5.21) y (3.5.22) entre (3.5.20), obtenemos
$$x_1^* = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v}{\partial I}} \quad \text{y} \quad x_2^* = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial v}{\partial I}} \tag{3.5.23}$$

que son las *identidades de Roy*, válidas no sólo para este ejemplo.

Ahora generalizaremos los resultados de la Observación 3.37. Previamente replantearemos los problemas de optimización de manera más general, llamando α al vector cuyas componentes sean todos los parámetros del problema, tanto de la función objetivo como de la función restrictiva. Así éstas dependerán de las variables de decisión x_i y de los parámetros α_j, y el problema queda planteado como
$$\begin{array}{l} \max f(\alpha, x) \\ \text{s.a} \\ \qquad g(\alpha, x) \le 0 \end{array} \tag{3.5.24}$$

Por ejemplo, en el problema del consumidor el vector α tendrá por componentes a los precios p_i y al ingreso I. En este caso los parámetros están sólo en la función restrictiva:
$$g(p_1, p_2, \ldots, p_n, I, x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n - I .$$

Seguramente el lector está asociando estas consideraciones con las que hicimos al aplicar el teorema de la función implícita a la estática comparativa (Sección 1.6). En verdad estamos ante la misma preocupación: *determinar el efecto en el valor óptimo de la función objetivo, al modificarse ligeramente alguno de los parámetros del* problema *(variables exógenas)*.

Esto se conoce como **análisis de sensibilidad**, y ya lo hemos venido haciendo al interpretar los multiplicadores de Lagrange. Ahora daremos un resultado general en términos de la función de valor óptimo que definimos a continuación.

Definición 3.39 Llamamos función de valor óptimo $V = V(\alpha)$, asociada al problema (3.5.24), a la función definida por

$$V(\alpha) := \text{máximo valor de } f(\alpha, x) \text{ sujeto a } g(\alpha, x) \leq 0.$$

Observaciones 3.40

1. Es claro que –asumiendo que (3.5.24) tiene solución– la función V está bien definida, pues dado un vector de parámetros α, existe sólo un valor máximo para la función objetivo. Se puede demostrar que

   si el rango de f es compacto y si f y g son continuas en (α^*, x^*) –siendo x^* solución de (3.5.24), dado α^*–, entonces V *es continua en α^*.*

   Este es un resultado de un teorema más general, empleando correspondencias, conocido como el **teorema del máximo**. El uso de correspondencias es atendiendo el hecho que dado α, la solución puede no ser única y así no existir una dependencia funcional entre x y α.

2. La función lagrangiana asociada a (3.5.24) es

$$L(x, \lambda; \alpha) = f(\alpha, x) - \lambda g(\alpha, x).$$

Siguiendo un razonamiento similar al desarrollado en la Observación 3.37, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.41 (*Teorema de la envolvente*)

Dadas las condiciones para la existencia de $\dfrac{\partial V}{\partial \alpha_j}$, se cumple que

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\substack{x=x^* \\ \lambda=\lambda^* \text{ (constantes)}}} ;$$

o sea

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}\right|_{x=x^*} - \lambda^* \left.\frac{\partial g}{\partial \alpha_j}\right|_{x=x^*}$$

(λ^* es el multiplicador de Lagrange asociado a α^*)

Aplicaciones 3.42

1. *En la teoría del consumidor:* las expresiones (3.5.20), (3.5.21) y (3.5.22) dadas en el Ejemplo 3.38 son obtenibles aplicando el teorema para

$$f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\alpha_1 = p_1 ,\ \alpha_2 = p_2 ,\ \alpha_3 = I$$
$$g(p_1,p_2,I,x_1,x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - I$$
$$V(\alpha) = v(p_1,p_2,I) = \frac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$
$$L(x_1,x_2,\lambda^*,p_1,p_2,I) = \sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}(I - p_1x_1 - p_2x_2) .$$

El lector queda invitado a encontrar una expresión general de la *identidad de Roy*.

2. *También en la teoría del consumidor:* se define la **función gasto** $e = e(p,\overline{u})$, como

$$e(p,\overline{u}) = \min\ p.x \quad \text{s.a} \quad u(x) \geq \overline{u} ; \tag{3.5.25}$$

es decir, $e(p,\overline{u})$ es el menor costo de obtener por lo menos el nivel de utilidad $\overline{u}$ (dado), cuando el vector de precios unitarios de los bienes es p. El vector x^* que resuelve el problema planteado en (3.5.25) es el vector de *demanda hicksiana* (o demanda compensada) que usualmente depende funcionalmente de p y de $\overline{u}$; o sea $x_i^* = x_i^*(p,\overline{u})$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Es claro que las soluciones del problema de optimización (3.5.25) son las mismas que las soluciones del problema

$$\begin{aligned} &\max\,(-p.x) \\ &\text{s.a} \\ &\quad \overline{u} - u(x) \le 0 \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

y que el valor óptimo de la función objetivo será $-e(p,\overline{u})$.

La función lagrangiana de (3.5.26) es

$$L(x,\lambda;\, p,\overline{u}) = -p.x - \lambda\left(\overline{u} - u(x)\right)$$

y entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{u}} = -\lambda \ , \ \frac{\partial L}{\partial p_i} = -x_i \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Según el teorema de la envolvente

$$-\frac{\partial e}{\partial \overline{u}} = -\lambda^* \ , \ -\frac{\partial e}{\partial p_i} = -x_i^* \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

y en particular tenemos el **Lema de Shepard** para el consumidor:

$$x_i^* = \frac{\partial e}{\partial p_i} \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{3.5.27}$$

3. *En la teoría del productor:* se define la **función costo** $c = c(w,\overline{y})$, como

$$\begin{aligned} c(w,\overline{y}) = \ &\min\, w.x \\ &\text{s.a} \\ &\quad f(x) \ge \overline{y}\,; \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

es decir, $c(w,\overline{y})$ es el menor costo de producir por lo menos $\overline{y}$ unidades ($\overline{y}$ dado), cuando el vector de precios unitarios de los factores es w. El vector x^* que resuelve el problema planteado en (3.5.28) es el vector de *demanda condicionada de factores* que usualmente depende funcionalmente de w y de $\overline{y}$; o sea $x_j^* = x_j^*(w,\overline{y})$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Es claro que las soluciones del problema de optimización (3.5.28) son las mismas que las soluciones del problema

$$\begin{aligned}&\max\,(-w,x)\\&\text{s.a}\\&\qquad \overline{y}-f(x)\le 0\end{aligned}\qquad(3.5.29)$$

y que el valor óptimo de la función objetivo será $-c(w,\overline{y})$.

La función lagrangiana correspondiente es

$$L(x,\lambda;w,\overline{y})=-w.x-\lambda(\overline{y}-f(x))$$

y entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{y}}=-\lambda \ \text{ y } \ \frac{\partial L}{\partial w_j}=-x_j \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Según el teorema de la envolvente

$$-\frac{\partial c}{\partial \overline{y}}=-\lambda^* \ \text{ y } \ -\frac{\partial c}{\partial w_j}=-x_j^* \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

En particular tenemos el Lema de Shepard para el productor

$$x_j^*=\frac{\partial c}{\partial w_j}\qquad (j=1,2,\ldots,m)\qquad(3.5.30)$$

y una medida del costo marginal:

$$\frac{\partial c}{\partial \overline{y}}=\lambda^*.$$

4. ***También en la teoría del productor:*** **de manera similar, se define la función ganancia** $\pi=\pi(p,w)$, **como**

$$\begin{aligned}\pi(p,w)&=\max\,(p.\overline{y}-w.x)\\ &\text{s.a}\quad f(x)\ge\overline{y}.\end{aligned}\qquad(3.5.31)$$

La función lagrangiana correspondiente es

$$L(x,\lambda;p)=p\overline{y}-w.x-\lambda(\overline{y}-f(x))$$

y entonces

$$\frac{\partial L}{\partial p}=\overline{y}\ \text{ y } \ \frac{\partial L}{\partial w_j}=-x_j \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Aplicando el teorema de la envolvente obtenemos el **Lema de Hotelling**:

$$y=\frac{\partial\pi}{\partial p} \quad \text{y} \quad x_j=-\frac{\partial\pi}{\partial w_j} \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{3.5.32}$$

donde $y=y(p,w)$ es la función de oferta del productor y $x_j=x_j(p,w)$ es la función de demanda (del productor) del j-ésimo factor.

Observaciones 3.43 (Extensión del conjunto de funciones)

1. El lector recordará claramente que hasta ahora hemos venido trabajando con funciones cóncavas y con funciones convexas; sin embargo, tanto en teoría económica como en otros campos, en un problema de maximización no siempre la función objetivo es cóncava y la función restrictiva convexa. Es, pues, importante ampliar el conjunto de funciones, de modo que se tengan criterios de optimización similares a los ya vistos.

   Una manera natural de hacer la extensión que nos proponemos es considerando funciones que no necesariamente sean cóncavas (o convexas) sino funciones que sean *transformación monótona*[1] de alguna función cóncava (convexa). A estas funciones las llamaremos **indirectamente cóncavas (indirectamente convexas)**. Así, la función $u(x_1,x_2)=x_1.x_2$ –muy usada como función de utilidad– no es una función cóncava, pero $u(x_1,x_2)=\left(x_1^{1/2}x_2^{1/2}\right)^2$, con $x_1>0$, $x_2>0$; y así expresada, vemos que $u(x_1,x_2)=h(w(x_1,x_2))$, donde $w(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ y $h(s)=s^2$, $s>0$. Como w es cóncava (es de tipo Cobb-Douglas) y h es estrictamente creciente ($h'(s)=2s>0$), es claro que u es una transformación monótona de la función cóncava w y por consiguiente u es indirectamente cóncava.

2. Asumiendo diferenciabilidad y aplicando la regla de la cadena y los conceptos de optimización vistos, se puede demostrar que:

   2.1 Si F es una transformación monótona de f, entonces

   i) $\nabla F(x)=0 \Leftrightarrow \nabla f(x)=0$

   ii) x^* es un máximo de F en un conjunto $S\subset \mathbb{R}^n$, si y sólo si x^* es un máximo de f en S.

---

[1] Una función $F=F(x)$, real de variable vectorial, es una transformación monótona de $f=f(x)$, si existe una función h, real de variable real, estrictamente creciente ($h'>0$), de modo que $F(x)=h(f(x))$.

2.2 Si F es indirectamente cóncava, entonces x^* es un máximo global de F si y sólo si $\nabla F(x^*) = 0$ (x^* es un punto estacionario de F).

3. Una consecuencia clara de 2.1(ii) es que la solución de un problema de maximización, donde la función objetivo es F, es la misma que la solución de un problema de maximización donde la función objetivo es f. Evidentemente los valores máximos de las funciones objetivo serán diferentes (salvo que la transformación monótona sea componiendo f con la función identidad).

4. Resulta entonces natural la siguiente reformulación del Teorema 3.31 (de Lagrange), considerando un conjunto más amplio de funciones.

Teorema 3.31Ext. *(Teorema extendido de Lagrange)*

Sea el problema

$$\begin{array}{ll} \max F(x) & \\ \text{s.a} & G(x) \leq b \end{array}$$

donde

i) F y G son funciones reales diferenciables, indirectamente cóncava e indirectamente convexa respectivamente, definidas en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

b es un número real dado.

ii) existe por lo menos un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(\bar{x}) < b$.

Sea también la función lagrangiana real, de $n+1$ variables reales, definida por

$$L(x,\lambda) = F(x) + \lambda\left(b - G(x)\right).$$

Para que un vector x^* sea solución del problema, es necesario y suficiente que exista un número real λ^* tal que

a') $\nabla_x L(x^*,\lambda^*) = 0$

b') $\lambda^* \geq 0$

c') $G(x^*) \leq b$

d') $\lambda^*\left(b - G(x^*)\right) = 0$.

5. La demostración de este teorema no es difícil, ya que basta replantearlo en términos de funciones cóncavas y de funciones convexas.

   Sean: $F(x)=h_1[f(x)]$ y $G(x)=h_2[g(x)]$, donde h_1 y h_2 son funciones estrictamente crecientes, f es cóncava y g es convexa.

   Así, el problema del teorema es

$$\begin{aligned}&\max h_1[f(x)]\\ &\text{s.a}\quad h_2[g(x)]\leq b\end{aligned}$$

   y su solución es la misma que la del problema

$$\begin{aligned}&\max f(x)\\ &\text{s.a}\quad g(x)\leq c\,,\end{aligned}$$

   donde $c=h_2^{-1}(b)$ y para el cual consideramos su función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,\mu) = f(x)+\mu(c-g(x)).$$

   Según el Teorema 3.31 y 2.2 de Observaciones 3.32, x^* es solución de este problema si y sólo si existe $\mu^*\in\mathbb{R}$ tal que

   a) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\mu^*)=0$

   b) $\mu^*\geq 0$

   c) $g(x^*)\leq c$

   d) $\mu^*(c-g(x^*))=0$

   Ahora, aplicando la regla de la cadena y denotando

$$r_1=f(x^*)\ ,\ r_2=g(x^*)$$

$$\alpha=h_1'(r_1)>0\ ,\ p=h_2'(r_2)>0\ ,\ \lambda^*=\frac{\alpha\mu^*}{\beta}$$

   es fácil probar la equivalencia de (a), (b), (c) y (d) con (a'), (b'), (c') y (d'), respectivamente.

6. Es evidente que toda función cóncava (convexa) es también indirectamente cóncava (convexa), pues basta con tomar la función identidad (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) como la función estrictamente creciente, en la definición de función indirectamente cóncava (convexa).

7. Toda función indirectamente cóncava es cuasicóncava.

   En efecto: sea F una función indirectamente cóncava, tal que $F = h \circ f$, siendo h estrictamente creciente y f cóncava. Si $x, y \in \mathrm{Dom}\, F$ y $z = \gamma x + (1-\gamma)y$, con $\gamma \in [0,1]$, debemos demostrar que

   $$F(z) \geq \min\{F(x), F(y)\}.$$

   Esto resulta como consecuencia inmediata de

   $$f(z) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

   pues, por la monotonía de h:

   $$\begin{aligned} h(f(z)) &\geq h(\min\{f(x), f(y)\}) \\ F(z) &\geq \min\{h(f(x)), h(f(y))\} \\ &= \min\{F(x), F(y)\}. \end{aligned}$$

   Según esta observación, la extensión hecha al Teorema de Lagrange para funciones indirectamente cóncavas, es menos general que una extensión, que pudiera hacerse a funciones cuasicóncavas; sin embargo, en economía es frecuente que las funciones cuasicóncavas que se consideran en las aplicaciones sean también indirectamente cóncavas y diferenciables. Esto da mayor importancia al Teorema 3.31 Ext., ya que su aplicación es totalmente similar a la descrita en el punto 3 de Observaciones 3.32.

Ejercicios 3.44

Resolver gráficamente

$$\begin{aligned} &\max\ f(x_1, x_2) \\ &\text{s.a} \\ &\qquad x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \end{aligned}$$

donde:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

b) $f(x_1, x_2) = \min\left\{x_1, \dfrac{x_2}{4}\right\},\ x_1, x_2 \geq 0$

2. La función de utilidad de un consumidor es

$$u(x_1, x_2) = 8x_1 + 15x_2,$$

los precios unitarios de los bienes son $p_1 = 6$ y $p_2 = 10$ respectivamente y su ingreso es 60. Aplicando el teorema de Lagrange, resolver:

a) Determinar las cantidades de los bienes, que maximizan la utilidad.

b) Determinar la utilidad marginal del ingreso.

c) Estimar en qué porcentaje se incrementará la utilidad si el ingreso se incrementa en un 5%.

d) Obtener las funciones de demanda marshallianas en los casos posibles y explicar en qué casos no existen.

3. Un consumidor tiene la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2},$$

su ingreso es I y los precios unitarios de los bienes son p_1 y p_2.

Aplicando el Teorema de Lagrange, resolver:

a) Determinar las funciones de demanda marshallianas.

b) Determinar la función de utilidad indirecta v.

c) Demostrar que la función v obtenida en (b) es estrictamente creciente según la variable ingreso.

d) Obtener la función gasto como inversa de la función de utilidad indirecta (dado un nivel de utilidad u, asociar el monto mínimo de ingreso necesario para obtener tal utilidad u, a los precios dados).

e) Verificar que la función obtenida en (d) es la misma que se obtiene resolviendo

$$\begin{aligned} e(p,u) = \min \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.a} \quad & \\ & u(x,y) \geq u \end{aligned}$$

f) Determinar las funciones de demanda hicksianas.

3.6 OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DADAS POR VARIAS DESIGUALDADES

Existen problemas muy sencillos en teoría económica, cuya *solución matemática* es sorprendente, por no coincidir con lo que se espera, en base a la intuición o el sentido común en economía. Veamos los siguientes ejemplos:

Problema 1. Determinar la canasta óptima de un consumidor cuya función de utilidad es $u(x_1,x_2)=x_1x_2+9x_1$ y cuyo ingreso es 20, si los precios unitarios de los bienes 1 y 2 son $p_1=1$ y $p_2=4$ respectivamente.

Solución: Si el problema lo planteamos como

$$\begin{aligned}&\max\left(x_1x_2+9x_1\right)\\&\text{s.a}\\&\quad x_1+4x_2\le 20\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

podemos aplicar el Teorema 3.31 Ext., pues escribiendo $u(x_1,x_2)=\left[x_1^{1/2}(x_2+9)^{1/2}\right]^2$, vemos que u es indirectamente cóncava ($f(x_1,x_2)=x_1^{1/2}(x_2+9)^{1/2}$ es cóncava por ser traslación de la función cóncava $\ell(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$) y la función $g(x_1,x_2)=x_1+4x_2$ es indirectamente convexa (por ser convexa). Así, obtenemos $x_1^*=28$, $x_2^*=-2$, $\lambda^*=7$. Evidentemente esta es la solución matemática del problema (3.6.1), pero **no** es la solución del problema del consumidor, pues no tiene sentido que su canasta óptima sea $x^*=(28,-2)$[1]. ¿La matemática está fallando? ¡Claro que no! Lo que ocurre es que el problema (3.6.1) **no** es el problema del consumidor. Ciertamente, faltan hacer explícitas las restricciones de la innegatividad de las variables. Así, el problema del consumidor es:

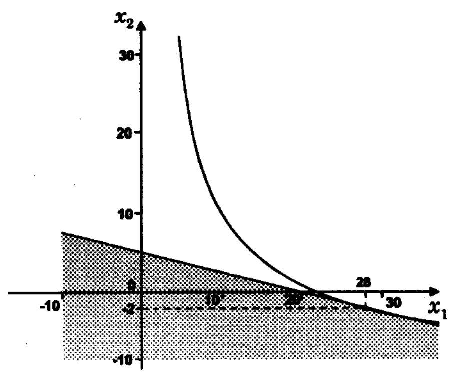


Figura 3.25

[1] También se obtiene esta solución si el problema se plantea con una restricción de igualdad.

$$\max\left(x_1x_2 + 9x_1\right) \qquad (3.6.2)$$
$$\text{s.a:}$$
$$x_1 + 4x_2 \le 20$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

y podemos advertir fácilmente que el vector $(28,-2)$ no es solución de este problema. En la Figura 3.25 se ilustra el problema (3.6.1) y su solución; y en la Figura 3.26 se ilustra el problema (3.6.2), mostrando algunas curvas de indiferencia, que ya nos hace intuir que el punto $(20,0)$ es la solución.

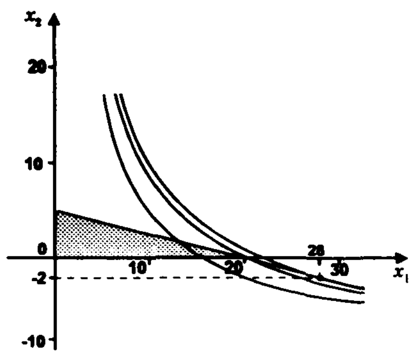


Figura 3.26

Problema 2. Una mueblería produce sillas y mesas. Los requerimientos de horas de mano de obra para la producción de cada silla y de cada mesa son de 2 y 3 respectivamente. La firma dispone sólo de 30 horas de mano de obra y el beneficio por cada mesa producida es de 2.5 veces el beneficio por cada silla. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas le conviene producir?

Solución: Si el problema lo planteamos como

$$\max\left(s + 2.5m\right)$$
$$\text{s.a} \qquad (3.6.3)$$
$$2s + 3m \le 30$$

podemos aplicar el Teorema 3.31 pues las funciones son lineales y cumplen las condiciones de concavidad y convexidad del teorema. (La función objetivo puede ser cualquier múltiplo positivo de la escogida y seguirá cumpliendo lo indicado en el problema acerca de los beneficios).

Como $\qquad L(s,m,\lambda) = s + 2.5m + \lambda(30 - 2s - 3m),$

tenemos $\qquad L_s = 1 - 2\lambda$

y $\qquad L_m = 2.5 - 3\lambda.$

Al seguir el procedimiento usual de igualar a cero estas derivadas parciales, nos encontramos con la inconsistencia de dos valores para λ^* (¿$\lambda^* = 1/2$ y $\lambda^* = 5/6$?). Es claro que ante esto, concluimos que el problema **no** tiene solución; pero aclaremos, **el problema (3.6.3) no tiene solución**. Sin embargo **el problema de la mueblería sí tiene solución**; y es que el problema de la mueblería es

$$\begin{aligned} &\max\,(s+2.5m) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 2s+3m \le 30 \\ &\qquad s \ge 0 \\ &\qquad m \ge 0 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

y otra vez la representación gráfica de ambos problemas nos ilustra la situación. En la Figura 3.27 vemos claramente que el problema (3.6.3) no tiene solución (en este caso es determinante que el conjunto factible sea no acotado), y observando la Figura 3.28 podemos intuir que el punto $(0,10)$ es la solución del problema (3.6.4).

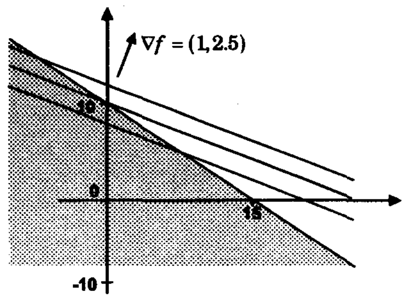


Figura 3.27

¿Cómo convencernos de que la solución que se deduce o se intuye por el análisis gráfico es realmente la solución óptima?

Ciertamente, apoyarnos solamente en la representación gráfica sería muy limitante, tanto por las dificultades que pueden presentarse con funciones más complicadas, como por la imposibilidad de graficar al tener más de 3 variables. Necesitamos un teorema que nos permita tener condiciones necesarias y/o suficientes para que un vector de $\mathbb{R}^n$

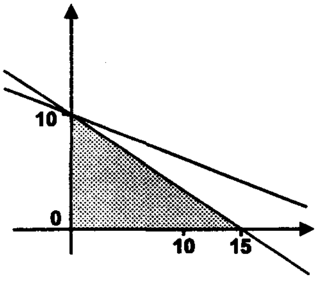


Figura 3.28

sea solución de un problema de optimización con varias restricciones dadas por desigualdades.

Teorema 3.45 Sea el problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad g_j(x) \le b_j \ ; \quad j = 1,\dots,m \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

donde

i) f y las g_j $(j = 1,2,\dots,m)$ son funciones reales, diferenciables, definidas en un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. f es indirectamente cóncava y las g_j indirectamente convexas.

Los b_j $(j = 1,2,\dots,m)$ son números reales, dados.

ii) Existe por lo menos un vector $\bar{x}$ de $\mathbf{R}^n$ tal que $g_j(\bar{x}) < b_j$ $\forall j = 1,2,\dots,m$.

Sea también la función lagrangiana, real, de $n+m$ variables reales, definida por

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(b_j - g_j(x)\right). \tag{3.6.6}$$

Para que un vector x^* sea solución del problema, es necesario y suficiente que exista un vector

$$\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*\right)$$

tal que:

a) $\nabla_x L\left(x^*, \lambda^*\right) = 0$

b) $\lambda_j^* \ge 0$, $j = 1,2,\dots,m$

c) $g_j\left(x^*\right) \le b_j$, $j = 1,2,\dots,m$

d) $\lambda_j^* \left(b_j - g_j\left(x^*\right)\right) = 0$, $j = 1,2,\dots,m$

Observaciones 3.46

1. Considerando la función $g=(g_1,g_2,\ldots,g_m)$ y el vector $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ podemos escribir el problema, la función lagrangiana y las condiciones (b) – (d) en términos vectoriales:

$$\begin{aligned}&\max f(x)\\&\text{s.a:}\\&\qquad g(x)\le b\end{aligned} \tag{3.6.5)'}$$

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda.(b-g(x)) \tag{3.6.6)'}$$

b)': $\lambda^*\ge 0$

c)': $g(x^*)\le b$

d)': $\lambda^*.(b-g(x^*))=0$

2. El número de restricciones (m) puede ser mayor, menor o igual que el número de variables (n).
3. La interpretación de los multiplicadores de Lagrange λ_j^* es la misma que en el caso de una sola restricción: cada λ_j^* es el *precio sombra* de la j-ésima restricción o el "máximo monto" que se pagaría por una relajación marginal de la j-ésima restricción.
4. Los problemas con restricciones de innegatividad de sus variables son casos particulares de (3.6.5), pues, por ejemplo el problema del consumidor (Problema 1) planteado en (3.6.2) es equivalente a

$$\begin{aligned}&\max\,(x_1x_2+9x_1)\\&\text{s.a:}\\&\qquad x_1+4x_2\le 20\\&\qquad\quad -x_1\le 0\\&\qquad\quad -x_2\le 0.\end{aligned} \tag{3.6.2)'}$$

Así

$$g_1(x_1,x_2)=x_1+4x_2 \qquad ;\ b_1=20$$
$$g_2(x_1,x_2)=-x_1 \qquad ;\ b_2=0$$
$$g_3(x_1,x_2)=-x_2 \qquad ;\ b_3=0$$

5. La demostración del teorema es haciendo las adecuaciones correspondientes a la del Teorema 3.31 y luego la extensión a las funciones indirectamente cóncavas (convexas), como en el Teorema 3.31 Ext. Al usarlo en la solución de problemas, también se debe tener en cuenta lo establecido en el punto 3 de Observaciones 3.32, para el Teorema 3.31.

Aplicaciones 3.47

1. Resolvamos el **Problema 1** (del consumidor).

   Planteado como en (3.6.2)', su correspondiente función lagrangiana es

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = x_1x_2 + 9x_1 + \lambda_1(20 - x_1 - 4x_2) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_3$$

   Analicemos si el punto $(20,0)$, intuido observando la Figura 3.26, es solución del problema.

   Ahora:

$$\begin{array}{ll} L_{x_1} = x_2 + 9 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \text{(por (a))} \\ L_{x_2} = x_1 - 4\lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \text{(por (a))} \\ \lambda_1(20 - x_1 - 4x_2) = 0 & \text{(por (d))} \\ \lambda_2 x_1 = 0 & \text{(por (d))} \\ \lambda_3 x_2 = 0 & \text{(por (d))} \end{array}$$

   Entonces, como $x_1 = 20 > 0$, es claro que $\lambda_2 = 0$ y reemplazando este valor y $x_2 = 0$ en $L_{x_1} = 0$, obtenemos

$$0 + 9 - \lambda_1 + 0 = 0\ ;$$

   es decir,

$$\lambda_1 = 9\ .$$

   Reemplazando $x_1 = 20$ y $\lambda_1 = 9$ en $L_{x_2} = 0$, tenemos

$$20 - 36 + \lambda_3 = 0\ ;$$

   es decir

$$\lambda_3 = 16\ .$$

   Vemos, entonces, que se cumplen todas las condiciones dadas en (a) – (d) y en consecuencia

$$x_1^* = 20\ ,\ x_2^* = 0\ ,\ \lambda_1^* = 9\ ,\ \lambda_2^* = 0\ ,\ \lambda_3^* = 16\ .$$

   Notar que aunque la canasta óptima es $x^* = (20,0)$, en ella se tiene que

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x^*)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x^*)} \neq \frac{p_1}{p_2}\ ,$$

   pues $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 + 9$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$ y evidentemente $\dfrac{9}{20} \neq \dfrac{1}{4}$.

2. Resolvamos el Problema 2 (del productor).

   Planteemos (3.6.4) en la forma de (3.6.5):

$$\begin{aligned} &\max\,(s+2.5m)\\ &\text{s.a:}\\ &\qquad 2s+3m\le 30\\ &\qquad -s\le 0\\ &\qquad -m\le 0 \end{aligned}$$

   Su lagrangiana es

$$L(s,m,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = s+2.5m+\lambda_1(30-2s-3m)+\lambda_2 s+\lambda_3 m$$

   Analicemos si el punto $(0,10)$ intuido al observar la Figura 3.28, es solución del problema.

   Ahora:

$$\begin{aligned} &L_s = 1-2\lambda_1+\lambda_2 = 0\\ &L_m = 2.5-3\lambda_1+\lambda_3 = 0\\ &\lambda_1(30-2s-3m) = 0\\ &\lambda_2 s = 0\\ &\lambda_3 m = 0 \end{aligned}$$

   Entonces, como $m = 10 > 0$, es claro que $\lambda_3 = 0$ y reemplazando este valor en $L_m = 0$, obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{5}{6}.$$

   Reemplazando este valor en $L_s = 0$, tenemos

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}.$$

   Podemos verificar que se cumplen todas las condiciones dadas en (a) – (d) y en consecuencia

$$s^* = 0\ ,\ m^* = 10\ ,\ \lambda_1^* = \frac{5}{6}\ ,\ \lambda_2^* = \frac{2}{3}\ ,\ \lambda_3^* = 0\ .$$

   Invitamos al lector –a manera de ejercicio– a analizar si el punto $(15,0)$ es solución. Encontrará que no se cumple alguna de las condiciones establecidas en (a) – (d) y en consecuencia $(15,0)$ no puede ser solución.

Como las condiciones de innegatividad son muy frecuentes en los problemas de optimización en economía, resulta cómodo y útil conocer y emplear las condiciones de Kuhn-Tucker.

Teorema 3.48 (*Las condiciones de Kuhn-Tucker*)

Sea el problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad g_j(x) \le b_j \ ; \ j = 1,2,\dots,m \\ &\qquad x_i \ge 0 \quad ; \ i = 1,2,\dots,m \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

donde f y las g_j $(j = 1,2,\dots,m)$ cumplen (i) y (ii) del Teorema 3.45.

Sea también la función lagrangiana, definida en (3.6.6),

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(b_j - g_j(x)\right).$$

Para que un vector x^* sea solución del problema es necesario y suficiente que exista un vector

$$\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*\right)$$

tal que

i) $\nabla_x L\left(x^*, \lambda^*\right) \le 0$

ii) $x^* . \nabla_x L\left(x^*, \lambda^*\right) = 0$

iii) $x^* \geq 0$

iv) $g_j\left(x^*\right) \le b_j \ ; \ j = 1,2,\dots,m$

v) $\lambda_j^* \left(b_j - g_j\left(x^*\right)\right) = 0 \ ; \ j = 1,2,\dots,m$

vi) $\lambda_j^* \ge 0 \ ; \ j = 1,2,\dots,m.$

Observaciones 3.49

1. Luego de haber analizado y aplicado el Teorema 3.45, es natural comprender este teorema. Sus "novedades" están en (i), (ii) y (iii), que son fáciles de obtener:

   – (iii) es evidente, pues la solución debe estar en el conjunto factible

– (i) y (ii) son consecuencia de (a) y (d) del Teorema 3.45, al considerar, como lo hicimos en las aplicaciones,

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(b_j - g_j(x)\right) + \sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k \, .$$

Así, por (a), para todo $i = 1,2,\ldots,n$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\left(x^*,\lambda^*,\mu^*\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^*\right) - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\left(x^*\right) + \mu_i^* = 0 \tag{3.6.8}$$

y como $\mu_i^* \geq 0$ (por (b)), tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^*\right) - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\left(x^*\right) \leq 0 \, .$$

El primer miembro de esta desigualdad es precisamente $\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(x^*,\lambda^*\right)$ y ya tenemos (i).

Por otra parte, según (d), al considerar las restricciones de innegatividad (con $b_k = 0$ y $g_k(x) = x_k$), tenemos $\mu_k^*\left(-x_k^*\right) = 0$ para todo $k = 1,2,\ldots,n$; o sea

$$x_k^*\left(-\mu_k^*\right) = 0 \ , \ \forall k = 1,2,\ldots,n. \tag{3.6.9}$$

Como según (3.6.8) $-\mu_k^* = \frac{\partial L}{\partial x_k}\left(x^*,\lambda^*\right)$, en verdad (3.6.9) es (ii).

2. Las condiciones (i) – (vi) son conocidas como *las condiciones de Kuhn-Tucker*. Empleando notación vectorial tenemos la función $g = g\left(g_1,g_2,\ldots,g_m\right)$ y el vector $b = b\left(b_1,b_2,\ldots,b_m\right)$. Así las condiciones de Kuhn-Tucker suelen presentarse como:

$KT1:$	$\nabla_x L\left(x^*,\lambda^*\right) \leq 0$	$KT4:$	$\nabla_\lambda L\left(x^*,\lambda^*\right) \geq 0$
$KT2:$	$x^*.\nabla_x L\left(x^*,\lambda^*\right) = 0$	$KT5:$	$\lambda^*.\nabla_\lambda L\left(x^*,\lambda^*\right) = 0$
$KT3:$	$x^* \geq 0$	$KT6:$	$\lambda^* \geq 0$

(Es claro que $KT4$ es $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}L\left(x^*,\lambda^*\right) \geq 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,m$; o sea $b_j - g_j\left(x^*\right) \geq 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,m$, que es equivalente a (iv)).

3. *KT2* y *KT5* son conocidas como *condiciones de holgura complementarias*. Teniendo en cuenta *KT1* y *KT3*, por *KT2* concluimos:

$$\text{Si } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*) < 0, \text{ entonces } x_i^* = 0; \tag{3.6.10}$$

$$\text{y si } x_i^* > 0, \text{ entonces } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*) = 0 \tag{3.6.11}$$

Análogamente, teniendo en cuenta *KT4* y *KT6*, por *KT5* concluimos:

$$\text{Si } b_j - g_j(x^*) > 0, \text{ entonces } \lambda_j^* = 0; \tag{3.6.12}$$

$$\text{y si } \lambda_j^* > 0, \text{ entonces } b_j - g_j(x^*) = 0. \tag{3.6.13}$$

Es útil notar que según (3.6.12) si en el óptimo x^* la j-ésima restricción es estricta, entonces el correspondiente multiplicador de Lagrange λ_j^* es nulo. (Ver ilustración gráfica en la Figura 3.29). Esto es coherente con el análisis de sensibilidad, pues en tal caso una variación pequeña de b_j mantendría a x^* como óptimo y en consecuencia el valor óptimo de la función objetivo no se altera (es $\frac{\partial f}{\partial b_j}(x^*) = \lambda_j^* = 0$).

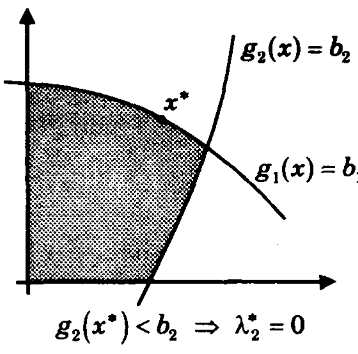


Figura 3.29

Por otra parte, (3.6.13) nos dice que si el j-ésimo multiplicador de Lagrange es positivo, entonces el óptimo x^* está en la frontera de la región factible, satisfaciendo como igualdad la j-ésima restricción.

4. Partiendo de (3.6.8) obtenemos una interpretación geométrica:

Las n igualdades

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*) - \mu_i^*, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

podemos resumirlas vectorialmente

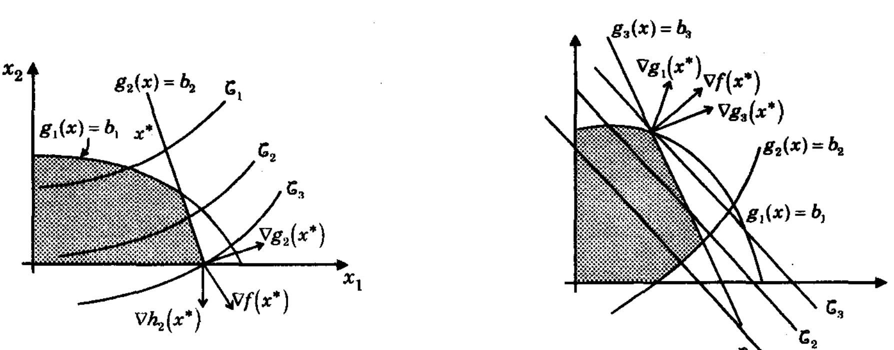
$$\nabla f\left(x^*\right)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\,\nabla g_j\left(x^*\right)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k^*\left(-e_k\right) \tag{3.6.14}$$

donde e_k es el k-ésimo vector básico usual de $\mathbb{R}^n$.

Si llamamos $h_k(x)=-x_k$ a la función restricitva correspondiente a $x_k\geq 0$ (o sea $-x_k\leq 0$), es claro que $\nabla h_k(x)=\nabla h_k\left(x^*\right)=-e_k$ y así podemos interpretar geométricamente (3.6.14):

> *En el óptimo x^*, el vector gradiente de la función objetivo es combinación lineal innegativa de los vectores de las funciones restrictivas, evaluados en x^*.*

Es claro que si alguna restricción se cumple en x^* como desigualdad estricta, por (3.6.9) y (3.6.12) el coeficiente del correspondiente vector gradiente será nulo. En particular, si la solución es un punto interior del ortante positivo de $\mathbb{R}^n$, se tendrá que $\nabla f\left(x^*\right)$ está en el cono generado por los vectores $\nabla g_j\left(x^*\right)$ que corresponden a aquellos g_j con los que $g_j\left(x^*\right)=b_j$. (Ver ilustraciones gráficas en Figura 3.30 (a) y (b). Las curvas $\mathcal{C}_a$ representan curvas de nivel de las funciones objetivo).



(a) (b)

Figura 3.30

5. Si se tiene un problema de minimización con restricciones dadas por desigualdades, puede buscarse la solución considerando el problema de maximizar la opuesta de la función objetivo dada y adecuando las restricciones a la forma presentada en (3.6.7); sin embargo es útil tener explícitas las condiciones de Kuhn-Tucker para problemas como el siguiente:

$$\begin{aligned}&\min \psi(y)\\ &\text{s. a}\\ &\quad H_i(y) \geq c_i \qquad i = 1,2,\dots,n\\ &\quad y_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,m\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

donde ψ y las funciones H_i $(i = 1,2,\dots,n)$ están definidas en subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^m$, son diferenciables y se cumplen (i) y (ii) del Teorema 3.45.

En tales casos, considerando la función lagrangiana

$$\ell(y,\gamma) = \psi(y) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left(c_i - H_i(y)\right),$$

y usando la notación vectorial correspondiente, las condiciones de Kuhn-Tucker son

*kt*1: $\nabla_y \ell(y^*,\gamma^*) \geq 0$

*kt*2: $y^*.\nabla_y \ell(y^*,\gamma^*) = 0$

*kt*3: $y^* \geq 0$

*kt*4: $\nabla_\gamma \ell(y^*,\gamma^*) \leq 0$

*kt*5: $\gamma^*.\nabla_\gamma \ell(y^*,\gamma^*) = 0$

*kt*6: $\gamma^* \geq 0$.

Ejemplo 3.50 Sea el problema

$$\begin{aligned}&\max \left(x_1^2 + 2x_1x_2\right)\\ &\text{s.a:}\\ &\quad 4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36\\ &\quad 16x_1^2 + 4x_2^2 \leq 64\\ &\quad -x_1 + 2x_2 \leq 3\\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

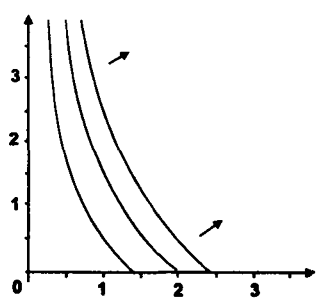


Figura 3.31

La función objetivo es estrictamente cuasicóncava en el primer cuadrante, como puede apreciarse al graficar sus curvas de nivel positivo en este cuadrante (Figura 3.31). Además su vector gradiente, $(2x_1+2x_2, 2x_1)$, nos dice que se alcanzarán niveles más altos, en el primer cuadrante, mientras se avance hacia la derecha y hacia arriba.

Las funciones restrictivas son convexas y la región factible es como se muestra en la Figura 3.32.

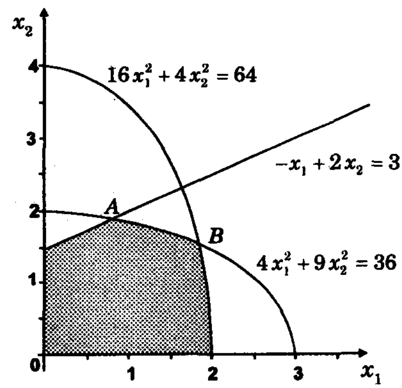


Figura 3.32

Aunque observando las Figuras 3.31 y 3.32 ya podemos intuir que la solución es el punto B, usemos las condiciones de Kuhn-Tucker para descartar al punto A como posible solución y para confirmar que B es la solución, hallando –además– los correspondientes valores de los multiplicadores de Lagrange.

Veamos:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = x_1^2+2x_1x_2+\lambda_1\left(36-4x_1^2-9x_2^2\right)+$$
$$+\lambda_2\left(64-16x_1^2-4x_2^2\right)+\lambda_3\left(3+x_1-2x_2\right)$$

$$L_{x_1}=2x_1+2x_2-8\lambda_1x_1-32\lambda_2x_1+\lambda_3$$
$$L_{x_2}=2x_1-18\lambda_1x_2-8\lambda_2x_2-2\lambda_3$$
$$L_{\lambda_1}=36-4x_1^2-9x_2^2 \qquad L_{\lambda_2}=64-16x_1^2-4x_2^2$$
$$L_{\lambda_3}=3+x_1-2x_2$$

Según las condiciones de Kuhn-Tucker, se debe tener

$$x_1^*\geq 0\ ,\ x_2^*\geq 0\ ,\ \lambda_1^*\geq 0\ ,\ \lambda_2^*\geq 0 \text{ y } \lambda_3^*\geq 0\ ;$$

$$L_{x_1}(x^*,\lambda^*)\leq 0 \text{ y } L_{x_2}(x^*,\lambda^*)\leq 0\ ;$$

$$L_{\lambda_1}(x^*,\lambda^*)\geq 0,\ L_{\lambda_2}(x^*,\lambda^*)\geq 0 \text{ y } L_{\lambda_3}(x^*,\lambda^*)\geq 0$$

Nos preguntamos ahora:

- $¿\left(x_1^*, x_2^*\right) = A = \left(\frac{21}{25}, \frac{48}{25}\right)?$

  Si así fuera, al reemplazar estos valores en L_{λ_j}, obtenemos:

  $$L_{\lambda_1} = 0\ ,\ L_{\lambda_2} \approx 26.035 > 0\ \text{ y }\ L_{\lambda_3} = 0$$

  en consecuencia, por *KT*5 –y más específicamente por (3.6.12) para $j = 2$– afirmamos que $\lambda_2^* = 0$.

  Como $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$, por *KT*2 –y más específicamente por (3.6.10) para $i = 1$ y 2– tenemos $L_{x_1} = 0$ y $L_{x_2} = 0$. Reemplazando en estas ecuaciones los valores de x_1^*, x_2^* y λ_2^* obtenemos el sistema de ecuaciones

  $$\begin{cases} 168\lambda_1^* - 25\lambda_3^* = 138 \\ 864\lambda_1^* + 50\lambda_3^* = 42 \end{cases}$$

  de donde

  $$\lambda_1^* \approx 0.265\ \text{ y }\ \lambda_3^* \approx -3.739 < 0$$

  y esto último no puede ser. Al llegar a esta contradicción, concluimos que **el punto *A* no es solución del problema**.

- $¿\left(x_1^*, x_2^*\right) = B = \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)?$

  Procediendo de manera similar a lo hecho antes, obtenemos:

  $L_{\lambda_1} = 0$, $L_{\lambda_2} = 0$ y $L_{\lambda_3} \approx 1.67 > 0$.

  $\lambda_3^* = 0$

  $L_{x_1} = 0$ y $L_{x_2} = 0$

  $6\sqrt{6}\,\lambda_1^* + 24\sqrt{6}\,\lambda_2^* = 1.5\sqrt{6} + \sqrt{10}$

  $9\sqrt{10}\,\lambda_1^* + 4\sqrt{10}\,\lambda_2^* = 1.5\sqrt{6}$

  $\lambda_1^* \approx 0.087\ ,\ \lambda_2^* \approx 0.095 > 0$.

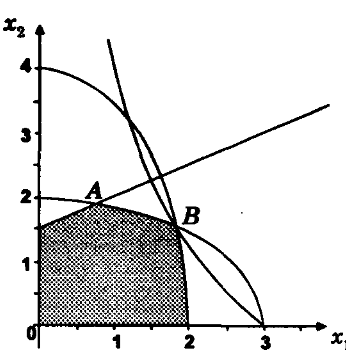


Figura 3.33

En consecuencia, se cumplen todas las condiciones de Kuhn-Tucker y el punto *B* es la solución única del problema, por las características de las funciones objetivo y restrictivas. (Ver Figura 3.33)

Aplicaciones 3.51

1. En el problema del consumidor.

Ya hemos visto anteriormente este problema, pero veámoslo ahora a la luz de las condiciones de Kuhn-Tucker.

Se trata de resolver

$$\begin{aligned}&\max u(x)\\&\text{s.a:}\\&\qquad p.x \le I\\&\qquad x \geqq 0,\end{aligned}$$

donde la función de utilidad u generalmente se supone continuamente diferenciable, con sus n derivadas parciales de primer orden positivas y su matriz hessiana negativo definida (o, de manera más general, u estrictamente cuasicóncava en el ortante positivo de R^n). Por ser u continua y el conjunto factible compacto, ya sabemos que el problema tiene solución; y siendo la función restrictiva lineal y la función objetivo estrictamente cóncava (o estrictamente cuasicóncava), la solución es única.

Por lo visto en el **Problema 1** (Figura 3.26) de esta sección, ya podemos afirmar que tal solución no necesariamente es un punto de tangencia entre el hiperplano de presupuesto y una hipersuperficie de indiferencia.

Para aplicar las condiciones de Kuhn-Tucker, tenemos

$$L(x,\lambda) = u(x) + \lambda(I - p.x)$$

$$L_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,n$$

$$L_\lambda = I - p.x .$$

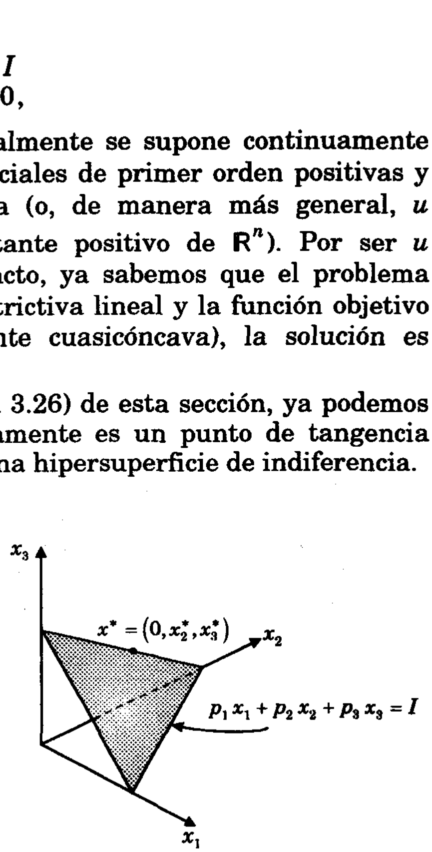


Figura 3.34

Asumamos que x^* es solución del problema y que λ^* es el número con el cual se cumplen $KT1 - KT6$. Lo más acorde con la realidad será asumir que la "canasta óptima" x^* no tiene todas sus componentes positivas, pues normalmente un consumidor, aunque agote su presupuesto, no adquiere algo de cada uno de los n bienes presentes en el mercado; así, x^* estará por lo menos en uno de los hiperplanos coordenados de $\overline{\mathsf{R}}^n_+$. (Ver ilustración para $n = 3$ en la Figura 3.34).

Si los bienes i_1 e i_2 son adquiridos por el consumidor ($x^*_{i_1} > 0$ y $x^*_{i_2} > 0$), entonces –por las condiciones de holgura complementaria (*KT*2)– $L_{x_{i1}}$ y $L_{x_{i2}}$ serán nulas al evaluarlas en (x^*, λ^*); o sea

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}(x^*) &= \lambda^* p_{i_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_{i_2}}(x^*) &= \lambda^* p_{i_2} . \end{aligned} \qquad (3.6.16)$$

Como se asumen derivadas parciales positivas y precios positivos, es claro que $\lambda^* > 0$; en consecuencia

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}(x^*)}{\frac{\partial u}{\partial x_{i_2}}(x^*)} = \frac{p_{i_1}}{p_{i_2}} \qquad (3.6.17)$$

y tenemos la conocida relación entre utilidades marginales y precios de los bienes, pero que quede claro que **es válida para aquellos bienes que son adquiridos por el consumidor** (que tienen componente positiva en la canasta óptima). Otra forma de enunciar lo que se observa en (3.6.16) y (3.6.17) es que la relación entre utilidad marginal y el precio unitario correspondiente debe ser la misma para todos los bienes adquiridos por el consumidor. Tal relación es λ^*.

Asumiendo que por lo menos se adquiere un bien, es claro que $\lambda^* > 0$ y entonces, por *KT*5, L_λ es nulo en (x^*, λ^*); o sea

$$I - p.x^* = 0 .$$

Esto significa que la canasta óptima está en el hiperplano de presupuesto, o –en otras palabras– que el consumidor gasta todo su ingreso. Notar que para esta conclusión es fundamental que $\lambda^* > 0$ y esto se deduce de (3.6.16) y el supuesto de utilidades marginales positivas ("más es mejor").

Finalmente, recordamos que λ^* es la utilidad marginal del dinero y que se mide en "utilidad por unidad monetaria".

2. En programación lineal

Un problema de maximización en programación lineal, planteado en su forma "standard" es

$$
\begin{aligned}
&\max\left(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\right)\\
&\text{s.a:}\\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1\\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2\\
&\qquad \qquad \vdots\\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m\\
&\qquad x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ \ldots\ ,\ x_n \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.6.18}
$$

Son dadas las constantes c_i, a_{ij} y b_j $(i = 1,2,\ldots,n\,;\ j = 1,2,\ldots,n)$.

Es claro que este es un caso particular del problema (3.6.7), considerado en el Teorema 3.48, en el cual tanto la función objetivo como las funciones restrictivas son lineales, y en consecuencia cóncava y convexas, respectivamente.

Reuniendo las constantes c_i en el vector (fila) $c \in \mathbb{R}^n$, las constantes b_j en el vector (columna) $b \in \mathbb{R}^m$, las constantes a_{ij} en la matriz A de orden $m \times n$ y las variables x_i en el vector (columna) $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos una expresión resumida de (3.6.18):

$$
\begin{aligned}
&\max c.x\\
&\text{s.a:}\\
&\quad Ax \leqq b\\
&\quad x \geqq 0
\end{aligned}
\tag{3.6.19}
$$

Adoptando esta forma "standard" resumida, plantearemos ahora un problema de minimización en programación lineal. Consideramos para ello las m variables y_j, reunidas en el vector (fila) $y \in \mathbb{R}^m$; m constantes dadas d_j, en el vector (columna) $d \in \mathbb{R}^m$; n constantes dadas h_i, en el vector (fila) $h \in \mathbb{R}^n$; y $m \times n$ constantes dadas e_{ij}, en la matriz E de orden $m \times n$. Así, el problema de minimización es

$$
\begin{aligned}
&\min y.d\\
&\text{s.a:}\\
&\quad yE \geqq h\\
&\quad y \geqq 0.
\end{aligned}
\tag{3.6.20}
$$

Si dado el problema de maximización (3.6.19) se plantea un problema de minimización como el (3.6.20), en donde $d = b$, $E = A$ y $h = c$; es decir, se plantea el problema

$$\begin{aligned} &\min y.b \\ &\text{s.a:} \\ &\quad yA \geq c \\ &\quad\; y \geq 0, \end{aligned} \tag{3.6.21}$$

se dice que (3.6.19) y (3.6.21) son **problemas duales** de programación lineal. Evidentemente, también dado el problema (3.6.21), es fácilmente planteable su dual (3.6.19). Notar que (3.6.19) tiene n variables innegativas y m funciones lineales restrictivas; en cambio (3.6.21) tiene m variables innegativas y n funciones lineales restrictivas.

Sobre programación lineal hay mucho que estudiar y existen numerosos libros dedicados exclusivamente a este campo. Ahora sólo queremos enfatizar su carácter de caso particular de los problemas de programación matemática con funciones diferenciables, siendo cóncava la función objetivo y convexas las funciones restricitivas. Así, son válidas las diversas afirmaciones hechas en esta sección y veremos la ventaja de considerar las condiciones de Kuhn-Tucker (que son necesarias y suficientes para su solución).

La función lagrangiana de (3.6.19) es

$$L(x,\lambda) = c.x + \lambda(b - Ax)$$

y las condiciones de Kuhn-Tucker, en los vectores x^*, λ^*, son

$KT1$:	$c - \lambda A \leq 0$	$KT4$:	$b - Ax \geq 0$
$KT2$:	$(c - \lambda A).x = 0$	$KT5$:	$\lambda.(b - Ax) = 0$
$KT3$:	$x \geq 0$	$KT6$:	$\lambda \geq 0.$

Por otra parte, la función lagrangiana del correspondiente problema dual (3.6.21) –como caso particular de (3.6.15)– es

$$\ell(y,\gamma) = y.b + (c - yA)\gamma$$

y las condiciones de Kuhn-Tucker, en los vectores y^*, γ^*, son

***kt*1**:	$b - A\gamma \geq 0$	***kt*4**:	$c - yA \leq 0$
***kt*2**:	$y.(b - A\gamma) = 0$	***kt*5**:	$(c - yA).\gamma = 0$
***kt*3**:	$y \geq 0$	***kt*6**:	$\gamma \geq 0$

Podemos observar que si llamamos y al vector de multiplicadores de Lagrange de (3.6.19) y llamamos x al vector de multiplicadores de Lagrange de (3.6.21), las correspondientes condiciones de Kuhn-Tucker son exactamente las mismas; así, con

$$\lambda = y \quad \wedge \quad \alpha = x$$

tenemos que $KT1 - KT3$ son $kt4 - kt6$ y $KT4 - KT6$ son $kt1 - kt3$.

Como consecuencia de gran utilidad práctica, afirmamos que, para casos de solución única,

los valores óptimos de los multiplicadores de Lagrange de un problema de programación lineal son los valores óptimos de las variables de su correspondiente problema dual. (3.6.22)

Además, si x^*, y^* resuelven (3.6.19) y (3.6.21) respectivamente, entonces, por las condiciones de holgura complementaria se tendrá

$$\left(c - y^*A\right).x^* = 0 \quad \text{y} \quad y^*.\left(b - Ax^*\right) = 0 \ ;$$

de donde

$$c.x^* = y^*Ax^* = y^*.b \ ,$$

lo cual nos dice que

las funciones objetivo de los problemas duales tienen los mismos valores óptimos $\left(c.x^* = y^*.b\right)$ (3.6.23)

Ejemplo. Resolver el problema

$$\begin{aligned}
&\min\left(36y_1 + 38y_2 + 70y_3\right)\\
&\text{s.a:}\\
&\quad y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 30\\
&\quad 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 40\\
&\quad y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0 \ , \ y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Si bien es cierto que hay algoritmos computarizados –como el algoritmo del simplex– para resolver éste y problemas más complicados, resolvámoslo ahora empleando las observaciones que acabamos de hacer.

Ante la incomodidad de una solución gráfica, por existir tres variables y tener que representar en $\mathbf{R}^3$ el conjunto factible como intersección de semiespacios y los conjuntos de nivel como planos paralelos, de normal $(36,38,70)$, planteémos el problema dual, que será más fácil de representar gráficamente, ya que será en el plano $\mathbf{R}^2$, por tener sólo dos variables.

Así, el dual del problema propuesto es

$$\begin{aligned}
&\max\,(30x_1+40x_2)\\
&\text{s.a:}\\
&\quad x_1+3x_2\le 36\\
&\quad 3x_1+2x_2\le 38\\
&\quad 7x_1+2x_2\le 70\\
&\quad x_1\ge 0\ ,\ \ x_2\ge 0\,.
\end{aligned}$$

Haciendo la representación gráfica del conjunto factible y de las rectas de nivel de la función objetivo, se obtiene rápidamente la solución de este problema, pues siendo $(30,40)$ el vector gradiente de la función objetivo, su valor óptimo se encuentra en el vértice $(6,10)$ del conjunto factible. (Figura 3.35).

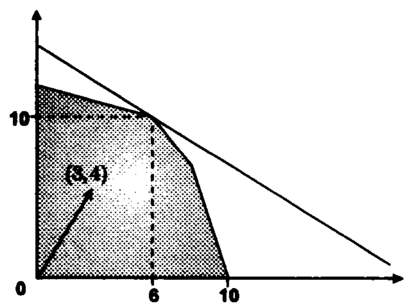


Figura 3.35

Es claro que la solución se encuentra sólo en un vértice, pues el vector gradiente de la función objetivo no es paralelo a ninguno de los vectores gradientes de las funciones restrictivas y en consecuencia la recta de nivel más alto no coincidirá con ninguna de las rectas de la frontera del conjunto factible.

Teniendo en cuenta (3.6.22), para resolver el problema dado, basta ahora determinar los multiplicadores de Lagrange de su dual. Esto es sencillo aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker en la solución $x^*=(6,10)$.

Como

$$\begin{aligned}
L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= 30x_1+40x_2+\lambda_1(36-x_1-3x_2)+\\
&\quad+\lambda_2(38-3x_1-2x_2)+\lambda_3(70-7x_1-2x_2),
\end{aligned}$$

tenemos:

$$L_{x_1} = 30 - \lambda_1 - 3\lambda_2 - 7\lambda_3 \qquad L_{\lambda_1} = 36 - x_1 - 3x_2$$

$$L_{x_2} = 40 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \qquad L_{\lambda_2} = 38 - 3x_1 - 2x_2$$

$$L_{\lambda_3} = 70 - 7x_1 - 2x_2 .$$

Procediendo como en el Ejemplo 3.50, obtenemos:

$$L_{\lambda_3}(6,10) = 8 > 0 \Rightarrow \lambda_3^* = 0 .$$

$$x_1^* = 6 > 0 \text{ y } x_2^* = 10 > 0 \Rightarrow L_{x_1} = L_{x_2} = 0$$

y en consecuencia

$$\lambda_1^* = \frac{60}{7} \text{ y } \lambda_2^* = \frac{50}{7} .$$

Ya tenemos entonces la solución del problema dado:

$$y_1^* = \frac{60}{7} , \; y_2^* = \frac{50}{7} , \; y_3^* = 0$$

y el valor óptimo de la función objetivo es

$$36 \times \frac{60}{7} + 38 \times \frac{50}{7} + 70 \times 0 = 580 .$$

Notar que –coherente con (3.6.23)– este valor óptimo es el mismo que el de la función objetivo del dual:

$$30 \times 6 + 40 \times 10 = 580 .$$

Tenemos, además, los indicadores de sensibilidad del problema planteado, pues éstos son sus multiplicadores de Lagrange, que son los valores óptimos de su dual; es decir

$$\gamma_1^* = x_1^* = 6 , \; \gamma_2^* = x_2^* = 10$$

y según estos valores, por ejemplo el incremento en una unidad de la constante de la primera restricción (cambiar 30 por 31), significaría para el valor óptimo de la función objetivo un incremento en 6 unidades (cambiar de 580 a 586). Esto podría verificarlo el lector mediante cálculo directo. La coincidencia de la aproximación con el cambio total se debe a la linealidad de las funciones. Sin embargo no debe olvidarse que los cambios deben ser "pequeños". En estos casos, tener en cuenta que no sean tales que –por ejemplo– supriman o añadan vértices a la región factible. Notar en este caso particular que "pequeñas" variaciones de las constantes de restricción en el problema dado, modifican "ligeramente" la pendiente de las rectas de nivel del problema dual, manteniendo como óptimo el punto $(6,10)$; sin embargo una variación muy drástica (digamos, cambiar 30 por 12), haría cambiar el punto óptimo y en consecuencia ya no sería válida una aproximación mediante los multiplicadores de Lagrange.

Concluiremos las aplicaciones de las condiciones de Kuhn-Tuchker en la programación lineal, haciendo una **interpretación económica del problema dual de un problema de maximización**.

El problema (3.6.19)

$$\begin{aligned} &\max c.x \\ &\text{s.a:} \\ &\quad Ax \leq b \\ &\quad\; x \geq 0 \end{aligned}$$

podemos entenderlo como un problema de maximizar los beneficios brutos de una empresa, con la siguiente información:

- la empresa puede producir n bienes
- la empresa disponde de m recursos
- x_i representa la cantidad que produce del bien i.
- c_i representa el beneficio bruto unitario –en unidades monetarias– del bien i.
- b_j representa la cantidad disponible del recurso j.
- $a_{k\ell}$ representa la cantidad que se requiere del recurso k para producir una unidad del bien ℓ $(k = 1,2,\ldots,m;\ \ell = 1,2,\ldots,n)$.

Así: $c.x$ representa el beneficio bruto total y está expresado en unidades monetarias.

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell$ representa la cantidad total empleada del recurso k, al producir x_ℓ unidades de cada uno de los n bienes.

Ahora bien, ya sabemos que el problema dual es

$$\begin{aligned} &\min y.b \\ &\text{s.a:} \\ &\quad yA \geq c \\ &\quad\; y \geq 0. \end{aligned}$$

Para su interpretación, mantenemos la información que hemos explicitado para c_i, b_j y $a_{k\ell}$. El primer punto a esclarecer es el significado de y_j. Recordemos que estas *variables duales* son los multiplicadores de Lagrange del problema de maximización y como tales, expresan un precio sombra de las restricciones [tasa de cambio entre unidades de la función objetivo (monetarias) y unidades de la j-ésima restricción (cantidad del recurso j)][1]. En consecuencia

- y_j representa una valoración de cada unidad del recurso j (unidades monetarias por unidad del recurso j). Ciertamente **no** es el precio de mercado.

  Notar que así tiene sentido la suma en la función lagrangiana.
- $y.b$ representa el valor total asignado a los recursos disponibles.
- $y_k a_{k\ell}$ representa el valor –según los precios sombra– de la cantidad que se requiere del recurso k para producir una unidad del bien ℓ.
- $\sum_{k=1}^{m} y_k a_{k\ell}$ representa el valor total de las cantidades de recursos para producir una unidad del bien ℓ; o, el **coste de oportunidad** de producir una unidad del bien ℓ.
- $\sum_{k=1}^{m} y_k a_{k\ell} \geq c_\ell$ nos dice que el coste de oportunidad de producir una unidad del bien ℓ debe ser considerado por lo menos igual al del beneficio bruto unitario de tal bien.

Por las condiciones de holgura complementaria vemos entonces que si este coste de oportunidad es estrictamente mayor que el beneficio bruto unitario del bien ℓ, el multiplicador de Lagrange correspondiente será cero; es decir x_ℓ^*, lo cual significa que en tal caso **no** se producirá el bien ℓ. Por otra parte, si realmente se produce un bien h ($x_h^* > 0$), tenemos que el h-ésimo multiplicador de Lagrange del problema dual es diferente de cero y en consecuencia la h-ésima restricción correspondiente debe cumplirse como igualdad; así el coste de oportunidad de producir una unidad del bien h, debe ser igual al beneficio bruto c_h.

1 Revisar la Observación 3.35.

También las condiciones de holgura complementaria nos permiten afirmar que si en la solución óptima del problema de producción no se emplea totalmente el recurso k, el precio sombra correspondiente será nulo (si la k-ésima restricción se cumple estrictamente, entonces el correspondiente multiplicador de Lagrange es nulo).

Así, una interpretación del problema dual del problema de maximización, es determinar el valor mínimo que se debe asignar a los recursos disponibles, sabiendo que éstos pueden ser transformados en productos que darán determinados beneficios brutos. La igualdad de los valores óptimos de las funciones objetivo nos dice que el beneficio bruto total de la producción coincide con la valoración total de los recursos.

Como es natural, también puede hacerse una interpretación económica del problema de minimización en programación lineal y una correspondiente interpretación económica de su dual. En este propósito suele considerarse el conocido problema de la dieta. El lector queda invitado a hacer la interpretación o a estudiarla en la bibliografía correspondiente.

Ejercicios 3.52

1. Sean $u(x_1,x_2)=x_1 x_2$, la función de utilidad de un consumidor, $p=(1,10)$ el vector precio unitario correspondiente e $I=20$, el ingreso del consumidor. Plantear y resolver el problema del consumidor. ¿Cuál es la solución si el consumo del bien 1 no supera el valor de 8? ¿En cuánto se incrementa la utilidad si el ingreso se incrementa en dos unidades?

2. Ilustrar gráficamente los siguientes problemas:

a) $\max\ f(x_1,x_2)$
s. a
$$x_1^2+x_2-4\le 0$$
$$x_1+x_2^2-4\le 0$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$
siendo $f(x_1,x_2)=\min\left\{\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3}\right\}$

b) $\max\ (2x_1+x_2)$
s. a
$$x_1^2+x_2\le 5$$
$$x_2-x_1\ge -1$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

3. Dados los parámetros α, β, γ, se plantea el problema

$\max\ \alpha x_1^2+\beta x_1 x_2$
s.a
$$x_1^2+\gamma x_2^2\le 1$$
$$x_1\ge 0$$
$$x_2\ge 0$$

a) Resolver geométricamente el problema, en el caso $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$.
b) Hallar las condiciones de Kuhn-Tucker(caso general)
c) Analizar la existencia de soluciones.

4. Una empresa produce dos tipos de artículos, A y B, en cantidades x e y respectivamente. Cada unidad tipo A se vende al precio de 250 unidades monetarias y cada unidad del tipo B al precio de 100 unidades monetarias. Si la función de costo de producción está dada por $C(x,y) = 10xy + 20x^2 + 7$, hallar los valores de x e y para los cuales la utilidad de la empresa sea la máxima, sabiendo que la función de utilidad está sujeta a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 5$.

5. Considerar una función de producción $F = F(L)$, de corto plazo, creciente a tasa constante y el problema de una empresa, con tal tecnología, de optimizar su beneficio al vender cierta cantidad (v) del bien que se produce, a un precio unitario (p) exógeno, y teniendo que pagar un salario (w) exógeno también, por cada unidad de trabajo (L). Tener en cuenta, además de la restricción usual neoclásica, las restricciones cuantitativas de la oferta laboral, limitada por L_0, y de demanda, limitada por $\overline{y}$.
   a) Plantear formalmente el problema de la empresa.
   b) Mostrar cómo cambia el conjunto de oportunidad considerando las posibles relaciones entre la demanda máxima $\overline{y}$ y la producción de pleno empleo.

6. Aplicando el teorema 3.45, resolver:

$$\begin{aligned} &\max\ 3x + 9y \\ &\text{s.a} \\ &\qquad x + 2y \leq 16 \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \\ &\qquad\qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

Obtener los tres multiplicadores de Lagrange e ilustrar gráficamente su interpretación.

7. Resolver:

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 x_2^2 \\ &\text{s.a} \\ &\qquad x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Obtener los correspondientes multiplicadores de Lagrange e ilustrar gráficamente su interpretación.

8. Dado el problema

$$\begin{aligned} &\max\ x_1^2 + 4x_2^2 \\ &\text{s.a} \\ &\qquad x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ &\qquad -x_1^2 + x_2 \le 0 \\ &\qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

a) Plantear todas las condiciones de Kuhn-Tucker

b) Graficar el conjunto de oportunidades y examinar los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

c) ¿Alguno de los puntos examinados en (b) es solución del problema?

9. Analizar los problemas siguientes:

a) $$\begin{aligned} &\max\ 4x_1 + 3x_2 \\ &\text{s. a} \\ &\qquad (x_1 - 3)(x_2 - 3) = 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &\max\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ &\text{s. a} \\ &\qquad -(x_1 - 3)(x_2 - 3)(x_3 - 3) \le 3 \\ &\qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

10. Dado el problema

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + 2.5x_2 \\ &\text{con} \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 5 \\ &\qquad 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \le 8 \\ &\qquad x_1 \le 0 \\ &\qquad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

a) Resolver gráficamente y verificar que la solución del problema cumple todas las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Cuáles son los multiplicadores de Lagrange?

b) Si ponemos $b = (5, 17, 9)$ en lugar de $b = (5, 16, 8)$, como figura en el problema dado, ¿cuál es entonces el valor de la función objetivo en el punto solución?. Dar la respuesta sin resolver el problema de programación lineal correspondiente.

c) ¿Cuál es la solución del dual del problema planteado?

11. Emplear las condiciones de Kuhn-Tucker para resolver:

$$\begin{aligned}&\min\ (5y_1 + 16y_2 + 8y_3)\\ &\text{s. a}\\ &\quad y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1\\ &\quad y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2.5\\ &\quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\end{aligned}$$

12. Dado el problema

$$\begin{aligned}&\max\ x_1^2 x_2\\ &\text{s. a}\\ &\quad (x_1, x_2) \in A,\end{aligned}$$

donde A es el conjunto factible del problema dual del planteado en el ejercicio anterior, estimar en cuánto se modifica el valor óptimo de la función objetivo si la restricción de menor pendiente cambia su constante incrementándola en 0.7 unidades.

13. Una empresa dispone de los siguientes procesos de producción

$$f(K,L) = \min\left\{\frac{K}{3}, \frac{L}{2}\right\} \text{ y } g(K,L) = \min\left\{\frac{K}{2}, \frac{L}{4}\right\}$$

a) Emplear programación lineal para determinar el mayor nivel de producción alcanzable, en los siguientes casos:

i) $K = 32$, $L = 40$ ii) $K = 50$, $L = 20$ iii) $K = 18$, $L = 60$

b) Determinar cuánto más se produciría si se incrementa L en una unidad, en los casos (i), (ii), (iii).

c) Hacer el análisis general de sensibilidad empleando el problema dual de un planteamiento general de (a)

d) Verificar los resultados de (c) analizando directamente en la función de producción que expresa el mayor nivel de producción alcanzable, admitiendo el uso combinado de los procesos f y g.

14. Una firma produce los bienes A y B, con las siguientes funciones de producción:

$$Q_A = \min\{2Q_B, L\}$$

$$Q_B = \min\{\tfrac{3}{2}Q_A, 2L\}$$

La dotación de trabajo es $L = 250$, y los precios unitarios de los bienes A y B son respectivamente 3 y 4.
Plantear y resolver el problema de programación lineal que maximiza las ventas de la firma (suponer que la firma vende toda su producción).

15. Una firma puede producir ciertos bienes, 1,2,3 y 4 con funciones de producción

$$Q_1 = \min\left\{\frac{K}{2}, \frac{2}{3}Q_2, \frac{L}{2}\right\}$$

$$Q_2 = \min\left\{2K, \frac{L}{2}\right\}$$

$$Q_3 = \min\left\{\frac{2K}{3}, \frac{2Q_2}{9}, \frac{L}{4}\right\}$$

$$Q_4 = \min\left\{\frac{K}{5}, \frac{Q_2}{3}, \frac{L}{8}\right\}$$

el bien 2 no es comparable ni vendible en el mercado, pero es insumo para la producción de los otros.

La dotación inicial de insumos es $K = 1000$, $L = 2000$, y 800 del bien 2; la planificación global exige un remanente de 350 unidades del bien 2 al finalizar el periodo de producción.

Las utilidades unitarias de los bienes 1,3,4 son respectivamente, 10, 12 y 20.

Plantear y resolver el problema de programación lineal correspondiente.

16. Una firma produce los bienes 1 y 2, que consideramos perfectamente divisibles, y utiliza para ello los insumos A, B, y C, que consideramos perfectamente divisibles, según la tabla siguiente, que leemos así:

i) hace falta, para la producción de cada unidad del bien 1, 1 unidad del factor A, 1 unidad del factor B y 3 unidades del factor C, etc.

ii) La columna de la derecha indica la disponibilidad de los factores; así: la firma dispone de 8 unidades del factor A, etc.

	Bien		
Fact.	1	2	Disp.
A	1	1	8
B	1	2	14
C	3	2	21
	3	4	
	Util. unit.		

iii) La fila de abajo indica que la utilidad unitaria del bien 1 es 3 unidades monetarias, etc.

a) Plantear y resolver el problema de programación lineal correspondiente a la maximización de utilidades de la firma.

b) Plantear y resolver el problema dual correspondiente.

c) ¿Conviene a la firma comprar una unidad adicional del factor A al precio sombra correspondiente? ¿Por qué?

17. Un financista tiene que invertir S/. 50,000 el próximo mes y busca definir su plan de inversiones. Tiene cuatro alternativas de inversión: comprar bonos del estado (con una rentabilidad del 5%), depositar dinero en el banco (con una tasa de interés del 8%), invertir en la bolsa de valores (donde la rentabilidad esperada es del 12%), ó comprar dólares (con una rentabilidad estimada del 10%). El inversionista no invertirá más de s/. 25,000 entre las dos últimas alternativas, por el alto riesgo inherente a ellas. Existe además, una ley que le exige invertir no menos del 10% de su dinero en bonos del estado.

a) Plantear el problema de programación lineal correspondiente y su dual.

b) Hallar el plan de inversiones óptimo.

18. Una línea aérea busca determinar sus compras de combustible a tres proveedores A, B, C. La línea aérea utiliza actualmente tres aereopuertos; 1, 2 y 3; y sus necesidades de combustible son respectivamente 600000, 500000 y 300000 galones. Los proveedores A, B y C han indicado que pueden proporcionar 300000, 400000 y 700000 galones respectivamente. El costo de galón de combustible varía según el proveedor, como indica la tabla siguiente:

Aereop. / Proveedor	1	2	3
A	0.75	0.85	0.79
B	0.78	0.79	0.82
C	0.85	0.82	0.82

Plantear el problema de programación lineal correspondiente. Plantear también el problema dual correspondiente y dar la interpretación económica.

19 Una firma busca planificar la producción de los bienes 1 y 2, perfectamente divisibles. Se requieren dos procesos, A y B, tales que el

proceso A puede ser llevado a cabo en la máquina 1 o en la máquina2, y el proceso B, en la máquina 3 o en la máquina 4. Los costos de producción varían según el bien y la máquina a usar según la tabla siguiente:

	Máquina			
Bien	1	2	3	4
1	5	5	4	5
2	5	6	8	9

Los tiempos unitarios (horas de procesamiento y otros datos están en la tabla siguiente

	Máquina				Cantidad
Bienes	1	2	3	4	a producir
1	0.20	0.25	0.20	0.30	p
2	0.20	0.20	0.50	0.45	q
	1500	1800	1500	2000	
	disponible(horas-máq)				

Formular el problema de programación lineal correspondiente.

20. Sean:

$L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función lineal

A y B subconjuntos de $\mathbf{R}^n$

(i) Demostrar que si a es solución de:

$$\max_{x} L(x)$$
$$\text{s.a } x \in A$$

y b es solución de:

$$\max_{x} L(x)$$
$$\text{s.a } x \in B$$

entonces $a + b$ es solución de:

$$\max_{x} L(x)$$
$$\text{s.a } x \in A + B$$

(ii) Enunciar la proposición recíproca a la dada en (i) y analizar si es verdadera o falsa.

21. Sean los siguientes procesos de producción

$$f(K,L)=\min\left\{K,\frac{L}{5}\right\}\ ;\quad g(K,L)=\min\left\{\frac{K}{2},\frac{L}{2}\right\}\ ;\quad g(K,L)=\min\left\{\frac{K}{4},L\right\}$$

para un cierto bien (perfectamente divisible, igual que sus factores de producción).

a) Determinar el mayor nivel de producción alcanzable si se dispone de 9000 unidades de K, 3000 unidades de L y los tres procesos de producción.

b) Plantear el problema de (a) como uno de optimización con restricciones y variables innegativas.

c) Usar las condiciones de Kuhn-Tucker para demostrar que en la solución del problema planteado en (b), el aporte de uno de los procesos tiene que ser nulo y determinarlo.

22. Un consumidor tiene la función de utilidad

$$u(x,y)=4+0.5\ln x+0.5\ln y$$

Los precios de mercado son $p_x=3$ y $p_y=4$ y su ingreso es $I=240$.

a) Emplear las condiciones de Kuhn-Tucker para resolver el problema del consumidor, considerando que se ha dispuesto un racionamiento, según el cual no se puede consumir más de 36 unidades de cada uno de los bienes.

b) Empleando los resultados de (a), estimar en cuánto se incrementará el nivel de utilidad del consumidor si su ingreso se incrementa en un 4%.