

A PROPOSITO DE LOS TEOREMAS DE VILLARREAL

Por CRISTOBAL DE LOSADA Y PUGA

*Profesor de Resistencia de Materiales de la
Universidad Católica del Perú*

En los problemas relativos a la flexión de vigas rectas, existe diferencia fundamental según se trate de vigas estáticamente determinadas, — como las simplemente colocadas sobre dos apoyos o las vigas consolas (que incurriendo en un anglicismo imperdonable se suelen designar, aun por quienes hablan castellano, con el nombre de *cantilever*) — o de vigas estáticamente indeterminadas — como las empotradas en ambos extremos, o las empotradas en un extremo y apoyadas en el otro.

Tratándose de las vigas estáticamente indeterminadas, los tratados de Resistencia de Materiales traen unos farragosos métodos de cálculo, que resuelven la cuestión para algunos tipos de carga: una sola carga aislada, dos cargas simétricas, una carga uniformemente repartida, etc.; pero en todo caso se advierte gran diferencia entre el tratamiento franco y podría decirse alegre aplicación a las vigas isostáticas, y el tratamiento laborioso y un tanto de artificio de las vigas hiperestáticas.

Federico Villarreal, matemático e ingeniero teórico peruano (1850-1923) tuvo la idea genial de aplicar a las vigas empotradas en ambos extremos, o empotradas en uno y apoyadas en otro, un método de cálculo que reposa en dos elementos básicos: 1º el establecimiento de teoremas que permiten calcular en forma muy simple los momentos de empotramiento suscitados por una fuerza única aislada; y 2º la aplicación de los resultados así conseguidos para una sola fuerza, mediante el principio de la superposición de efec-

tos, al caso de varias fuerzas aisladas, o al caso de una carga repartida que se considera como el conjunto de una infinidad de fuerzas aisladas elementales.

Villarreal enuncia sus teoremas en la forma siguiente, para el caso de una viga sobre la cual actuara una sola fuerza aislada, P :

PARA UNA VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS. — TEOREMA A. — *La suma de los dos momentos de empotramiento es igual al momento máximo de flexión que produciría la fuerza P si la viga estuviera simplemente colocada sobre dos apoyos:*

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{Pab}{l} \quad (1)$$

TEOREMA B. — *Los dos momentos de empotramiento están entre sí en razón inversa de las distancias de la fuerza P a los extremos de la viga:*

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{b}{a} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce inmediatamente:

$$\mu_1 = \frac{Pab^2}{l^2} \quad \mu_2 = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

PARA UNA VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO. — TEOREMA C. — *Si una fuerza P actúa sobre una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, el momento de empotramiento existente en el extremo empotrado es igual al momento que existiría en el extremo empotrado si el otro extremo también estuviera empotrado, más la mitad del momento de empotramiento que existiría en tal caso en este otro extremo:*

$$\mu = \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_2 \quad (3)$$

Esta última igualdad puede escribirse, teniendo en cuenta la (1):

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{Pab}{l} + \frac{1}{2} \mu_1 \quad (4)$$

Pero sería erróneo creer que basta con estas expresiones algebraicas de los momentos de empotramiento, prescindiendo de los teoremas mismos de Villarreal: en efecto, el enunciado de estos teoremas, así como las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) que los expresan, son indispensables para aplicar la Estática Gráfica a la resolución de los problemas relativos a las vigas empotradas.

Villarreal publicó estos teoremas en dos memorias notabilísimas que aparecieron, una en 1899 y otra en 1901, en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*; dando de ellos unas demostraciones sumamente prolijas, que más adelante reprodujo en el primer volumen — único publicado — de su *Tratado de Resistencia de Materiales*, impreso en Lima en 1911. En su curso de la Escuela de Ingenieros, el maestro omitía por larga y fatigosa la demostración de sus teoremas, y se limitaba a decir, con una falta de rigor sólo explicable por una extravagancia propia del genio: "como los momentos de empotramiento tienen que equilibrar el momento máximo de flexión en igual forma que las reacciones equilibran a la fuerza aplicada, su suma debe ser igual a aquel momento y sus valores estar en razón inversa de sus distancias al punto donde él ocurre". Esto, para los teoremas A y B. Para el C, no daba justificación ninguna.

Es muy posible que ese razonamiento que acabo de reproducir entre comillas, haya sido el hilo conductor que guió a la intuición de Villarreal y le permitió descubrir los enunciados de sus teoremas A y B; pero como justificación de los mismos, es absolutamente inaceptable. Considerándolo así, en mi curso de la Universidad Católica he venido dando la demostración original de Villarreal (la verdadera demostración, por cierto), por muy larga y fastidiosa que sea. En mi curso de este año he establecido los teoremas por otro camino, casi idéntico al que sigue Theodor Pöschl en su *Festigkeitslehre* para resolver el problema de la viga empotrada en ambos extremos con una fuerza aislada. Pero he aquí que uno de mis discípulos, el Sr. Guillermo Ruiz, ha tenido la fortuna de dar, de los tres teoremas, A, B y C, una demostración sencillísima, rápida y totalmente satisfactoria.

La demostración de Ruiz debe contarse como una contribución realmente valiosa de nuestra Universidad a la cultura nacional, no ciertamente una contribución esencial, como el descubrimiento del enunciado de los propios teoremas, pero sí una muy apreciable contribución adjetiva, y es realmente grato que quien obtenga la que será probablemente en lo futuro la demostración clásica de los teoremas del gran investigador peruano, sea un estudiante también peruano.

Cristóbal DE LOSADA Y PUGA.