

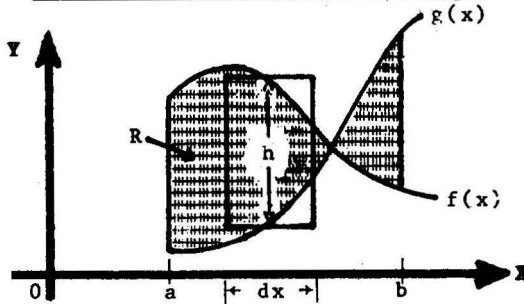
CAP. 6

**APLICACIONES GEOMETRICAS
DE LA INTEGRAL DEFINIDA**

1. AREA DE FIGURAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

1.1 **Definición** El área de la región R del plano XY comprendida entre las dos curvas continuas $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, se define mediante

$$A = A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



En la figura, el **rectángulo genérico** tiene altura $h = |f(x) - g(x)|$; base dx y área $dA = |f(x) - g(x)| dx$. El límite de las sumas de tales áreas es igual a $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ según la definición de integral definida.

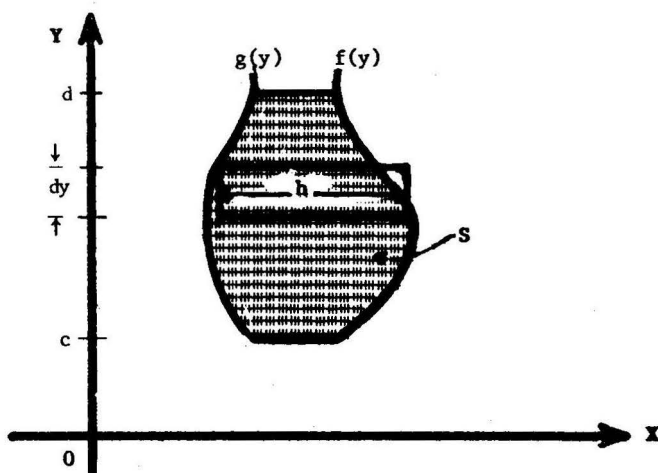
1.2 Caso Particular Si $f(x) > 0$ en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

es el área bajo la curva $f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$.

1.3 Definición El área de la región S del plano XY comprendida entre las dos curvas continuas $f(y)$ y $g(y)$ y las rectas horizontales $y=c$ e $y=d$, se define mediante

$$A = A(S) = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$$



En la figura, $h = |f(y) - g(y)|$, $dA = h dy$.

1.4 Propiedades de la Función Area

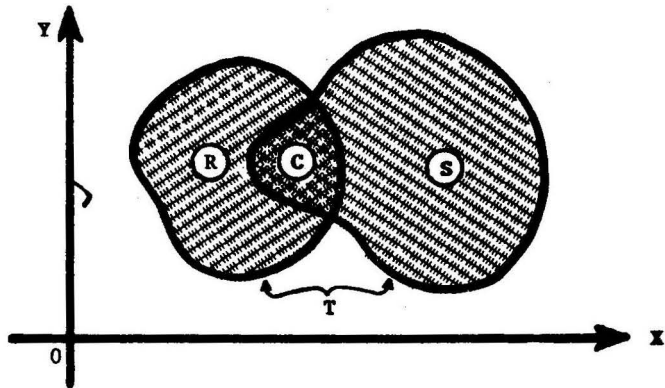
Se cumplen las siguientes propiedades

(1) $A(R) \geq 0$,

(2) Si una región T se compone de dos regiones R y S , entonces

$$A(T) = A(R) + A(S) - A(C)$$

donde C es la región común a R y S .



1.5 Problemas Resueltos

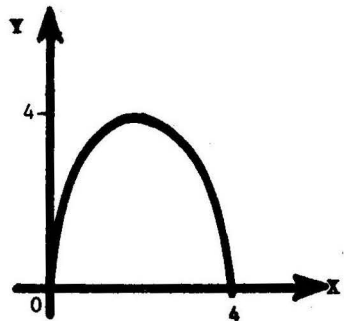
PROBLEMA 1 Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje X .

SOLUCION Calculamos los límites de integración

$$0 = 4x - x^2, \quad x = 0, 4.$$

Tenemos

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$



PROBLEMA 2 Encontrar el área de la región acotada por las curvas

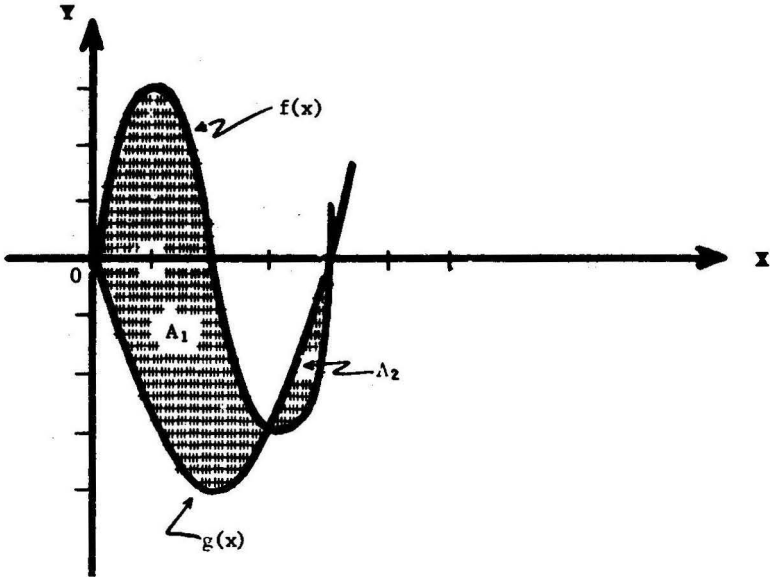
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4x.$$

SOLUCION

Resolviendo la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$ para hallar los límites de integración, tenemos

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \quad \text{o} \quad x(x-3)(x-4) = 0$$

de donde $x = 0, 3, 4$.



Tenemos $f(x) - g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4)$

En $0 \leq x \leq 3$, se tiene $f(x) - g(x) \geq 0$,
 y en $3 \leq x \leq 4$, se tiene $f(x) - g(x) \leq 0$, luego

$$A = A_1 + A_2 \quad (\text{ver figura})$$

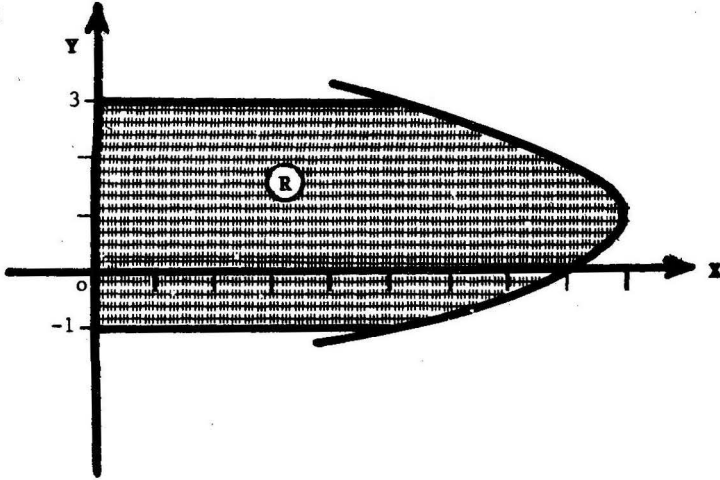
$$= \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx + \int_3^4 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx + \int_3^4 -(f(x) - g(x)) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_0^3 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_3^4 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}.$$

PROBLEMA 3 Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje Y y las rectas $y = -1$ e $y = 3$.

SOLUCION

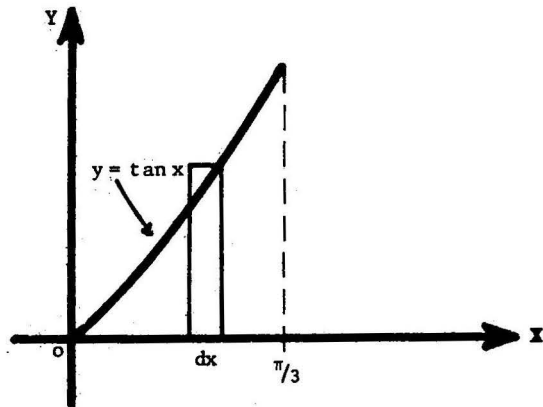


$$A = A(R) = \int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy = \frac{92}{3}.$$

PROBLEMA 4 Hallar el área de la región acotada por la curva $y = \tan x$, el eje X y la recta $x = \frac{\pi}{3}$.

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} \tan x \, dx \\ &= \ln |\sec x| \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$



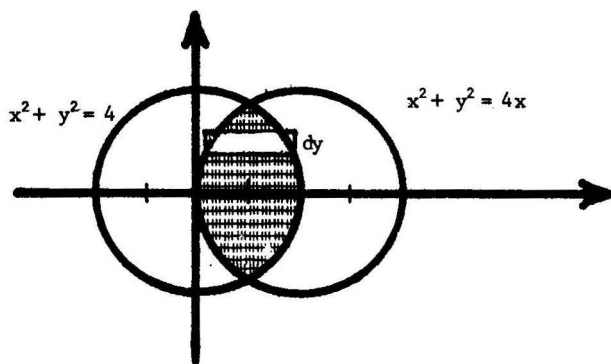
PROBLEMA 5 Hallar el área de la intersección de los círculos

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 4x .$$

SOLUCION Los puntos de intersección de los círculos se obtienen resolviendo la ecuación

$$y^2 = 4 - x^2 = 4x - x^2$$

de donde $x = 1, \quad y = \pm\sqrt{3}$



Despejando x,

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2} \quad , \quad \text{para el círculo de la izquierda}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4y^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}, \quad \text{para el círculo de la derecha.}$$

Luego,

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4 - y^2} - (2 - \sqrt{4 - y^2}) \right] dy \quad (\text{ver figura})$$

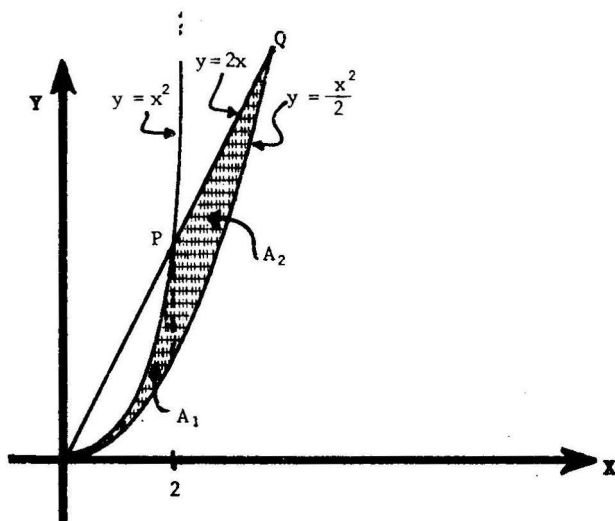
$$= 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1) dy =$$

$$= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{2} - y \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} .$$

PROBLEMA 6 Encontrar el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

SOLUCION



El área buscada es $A = A_1 + A_2$ (ver figura)

Las coordenadas de los puntos P y Q de intersección de la recta $y = 2x$ con las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ son, respectivamente

$$x = 2, \quad y = 4,$$

$$x = 4, \quad y = 8,$$

$$y \quad A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

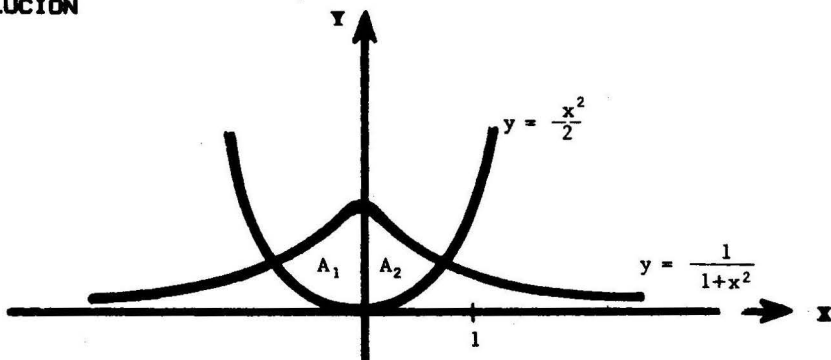
$$A_2 = \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx = x^2 - \frac{x^3}{6} \Big|_2^4 = \frac{8}{3}.$$

Por lo tanto, $A = 4$.

PROBLEMA 7 Hallar el área de la región limitada por la curva

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y la parábola} \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

SOLUCION



Los puntos en los cuales las dos curvas se cortan se obtienen igualando las ordenadas

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2},$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = 1, -2, \quad \text{esto es } x = \pm 1.$$

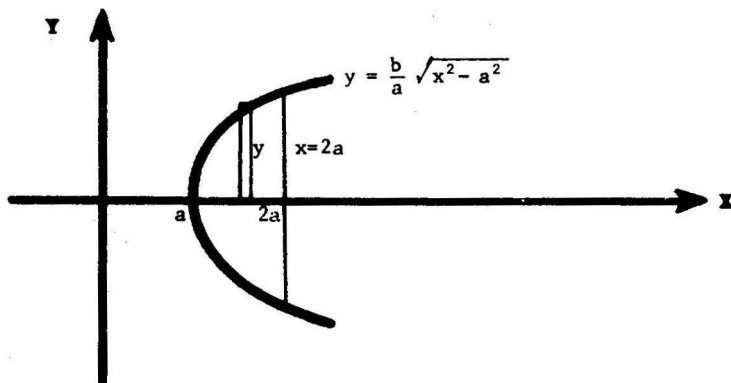
El área buscada es $A = A_1 + A_2 = 2A_2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$
(ver figura)

$$= 2 \left[\arctan x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 8 Encontrar el área de la región acotada por la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y la recta} \quad x = 2a.$$

SOLUCION



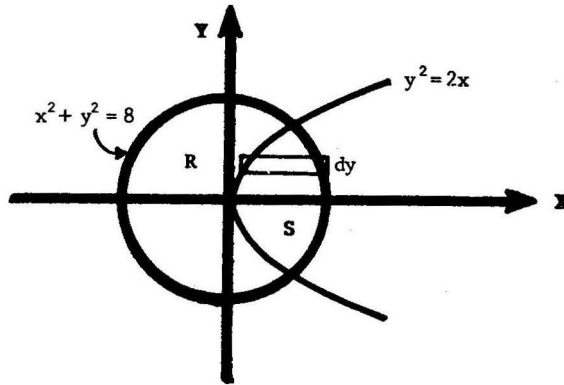
Tenemos $A = \text{área buscada} = 2 \int_a^{2a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right] \Bigg|_a^{2a}$$

$$= 2ab \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \right] = ab \left[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \right]$$

PROBLEMA 9 Hallar el área de las dos regiones en las cuales el círculo $x^2 + y^2 = 8$ es dividido por la parábola $y^2 = 2x$.

SOLUCION



El círculo queda dividido en las regiones R y S (ver figura)

Vamos a calcular el área de la región S. Los puntos de intersección de las dos curvas son:

$$x^2 + 2x = 8,$$

$$x = 2, \quad y = \pm 2,$$

y por lo tanto,

$$A(S) = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{8 - y^2} + 4 \arcsen \frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3} + 2\pi,$$

y $A(R) = \text{Área del círculo} - A(S) = 6\pi - \frac{4}{3}.$

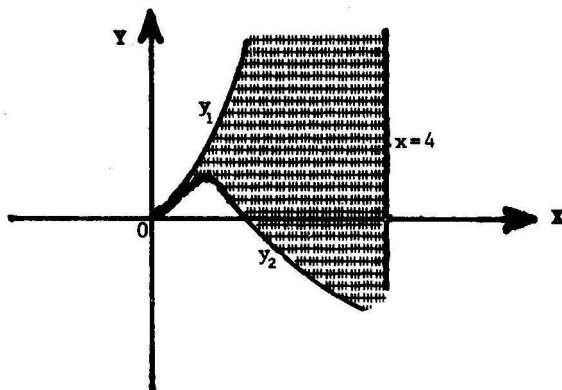
PROBLEMA 10 Hallar el área de la región acotada por la curva

$$x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0 \quad \text{y la recta} \quad x = 4.$$

SOLUCION Despejando y de la ecuación $y^2 - 2xy - (x^3 - x^2) = 0$

$$y = x \pm \sqrt{x^3}.$$

Sean entonces $y_1 = x + \sqrt{x^3}$, $y_2 = x - \sqrt{x^3}$.

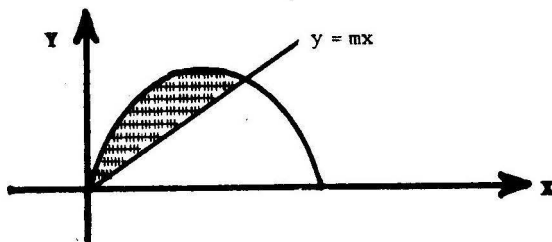


El área buscada es

$$A = \int_0^4 (y_1 - y_2) dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x^3} dx = \frac{4}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{128}{5}.$$

PROBLEMA 11 Hallar m de manera que la región bajo la parábola $y = 2x - x^2$ y sobre la recta $y = mx$ tenga un área igual a 36.

SOLUCION



Calculamos las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con la recta $y = 2x - x^2 = mx$, $x(x+m-2) = 0$, de donde $x = 0$, $x = 2-m$.

$$\text{Luego } A = 36 = \int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx) dx = (2-m) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2-m} = \frac{(2-m)^3}{6}$$

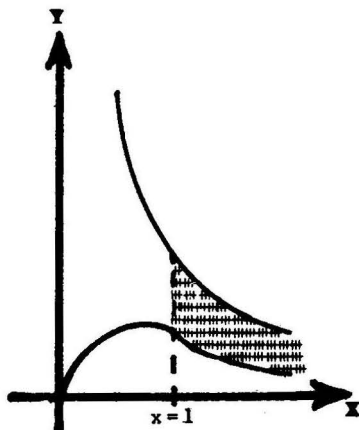
y $2-m = 6$, $m = -4$.

PROBLEMA 12 Hallar el área de la región comprendida entre las curvas

$$xy = 1, \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \text{a la derecha de la recta } x = 1.$$

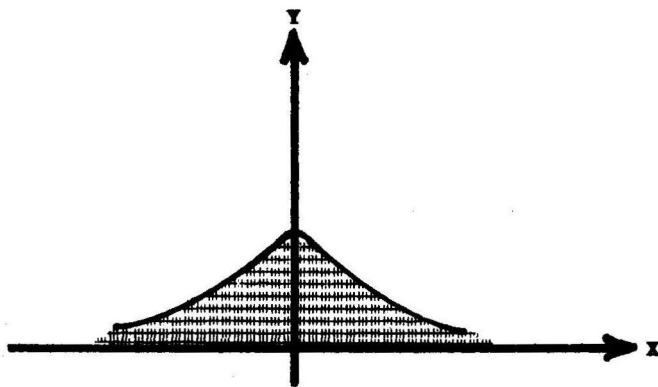
SOLUCION Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right] \\ &= \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$



PROBLEMA 13 Calcular el área acotada por la curva $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ y el eje X.

SOLUCION



$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 14 Encontrar el área de la región acotada por la curva $y^2 = (1 - x^2)^3$.

SOLUCION Tenemos $y = \pm \sqrt{(1-x^2)^3}$, de donde $y_1 = \sqrt{(1-x^2)^3}$, $y_2 = -\sqrt{(1-x^2)^3}$.

Tenemos

$$A = 4 \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx \quad (\text{ver figura})$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} (1 - \text{sen}^2 t)^{3/2} \cos t dt,$$

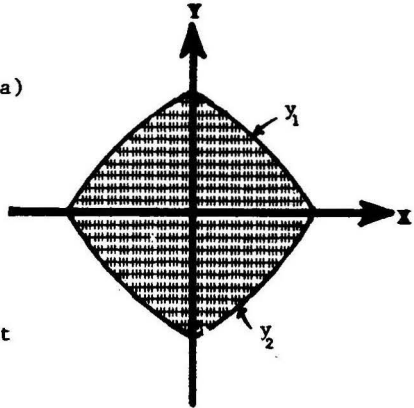
haciendo $x = \text{sent}$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \left(\frac{3}{2} t + 2 \text{sen } 2t + \frac{\text{sen } 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\pi}{4}.$$



PROBLEMA 15 Calcular el área de la región que limita la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

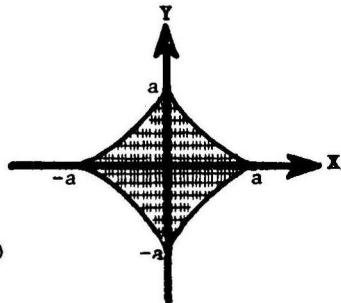
SOLUCION Tenemos $y = \pm (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$,

de donde $y_1 = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $y_2 = -(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.

El área buscada es

$$A = 4 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx \quad (\text{ver figura})$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} (a^{2/3} - a^{2/3} \text{sen}^2 t)^{3/2} a \text{sen}^2 t \cos t dt, \text{ haciendo } x = a \text{sen}^3 t,$$



$$\begin{aligned}
 A &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt + \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t d(\sin 2t) = \frac{3\pi}{8} a^2.
 \end{aligned}$$

2. AREA BAJO UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA

2.1 Teorema Si $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas

de una curva, entonces el área de la región acotada por esta curva, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es dada por

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

donde $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$
 $y(t) \geq 0$ en $[t_1, t_2]$.

Prueba En efecto,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b y(x) dx && \text{(definición de área bajo la curva)} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} y(x(t)) x'(t) dt && \text{(cambio de variable } x = x'(t)) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt.
 \end{aligned}$$

2.2 Problemas Resueltos

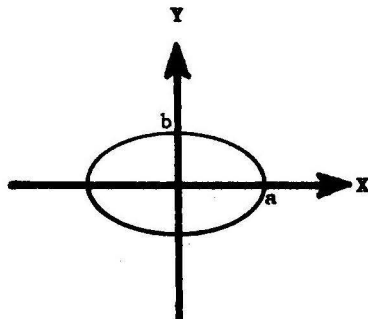
PROBLEMA 1 Hallar el área de la elipse, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

SOLUCION Por simetría se tiene

$$A = \text{área de la elipse} = 4 \int_0^a y(x) dx$$

$$= 4 \int_{\pi/2}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt$$

$$= \frac{4ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \pi ab.$$



PROBLEMA 2 Encontrar el área de la región comprendida por el eje X

y un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

SOLUCION Cuando

$$t = 0: x = 0, \quad y = 0$$

$$t = 2\pi: x = 2\pi a, \quad y = 0.$$

Luego

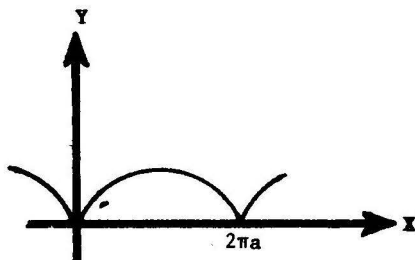
$$A = \int_0^{2\pi a} y(x) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (3 - 4 \cos t + \cos 2t) dt$$

$$\left(\text{usando } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)$$

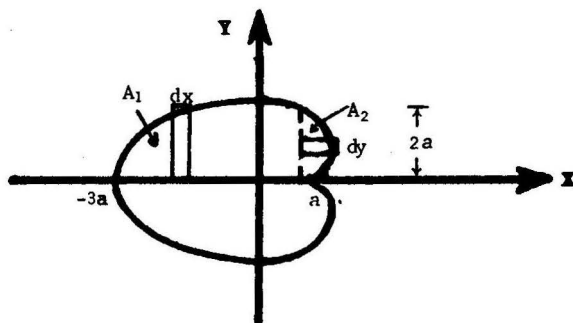
$$= 3\pi a^2.$$



PROBLEMA 3 Hallar el área de la región encerrada por la

cardioides $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

SOLUCION



La curva es simétrica respecto del eje X ya que

$$a [2 \cos (-t) - \cos 2(-t)] = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$a [2 \sin (-t) - \sin 2(-t)] = -a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Luego el área buscada es

$$A = 2(A_1 + A_2) \quad (\text{ver figura})$$

Tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3a}^a y \, dx = \int_{\pi}^{\pi/2} a(2 \sin t - \sin 2t) a(-2 \sin t + 2 \sin 2t) dt \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

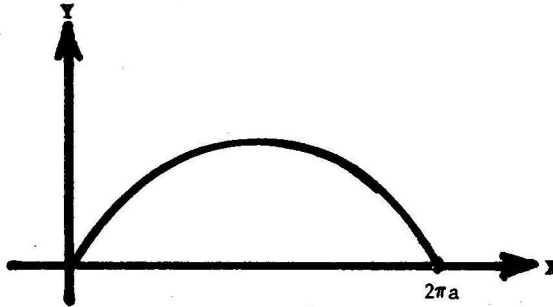
y

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{2a} (x-a) \, dy = \int_0^{\pi/2} a(2 \cos t - \cos 2t - 1) a(2 \cos t - 2 \cos 2t) dt \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 - 4a^2. \end{aligned}$$

Luego $A = 6 \pi a^2$.

PROBLEMA 4 Hallar el área de la región bajo un arco de la curva

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

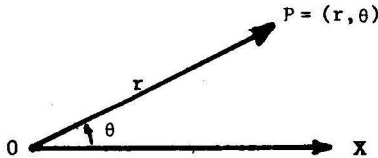


SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a \, dt = a^2(t - \operatorname{sen} t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi a^2 . \end{aligned}$$

3 AREA DE FIGURAS PLANAS EN COORDENADAS POLARES

5.1 Coordenadas Polares Si fijamos una semirrecta X en el plano que se extiende desde un punto 0, entonces todo punto P del plano queda determinado por un par de números (r, θ) como sigue:



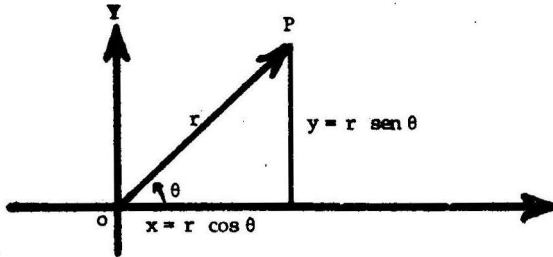
r = longitud del segmento OP ,

θ = ángulo que forma el segmento \overline{OP} con la semirrecta X, medido en el sentido antihorario a partir de X.

La semirrecta X se llama **eje polar**, el punto 0 se llama **polo**, r es el **radio vector**, y θ , es el **ángulo polar**.

Finalmente, los números r y θ asociados a P reciben el nombre de **coordenadas polares** en este punto.

3.2 Cambio de Coordenadas



Las coordenadas rectangulares o cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P del plano, están relacionadas por las ecuaciones

(1)

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

(ver figura)

y (2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

si $x \neq 0$,

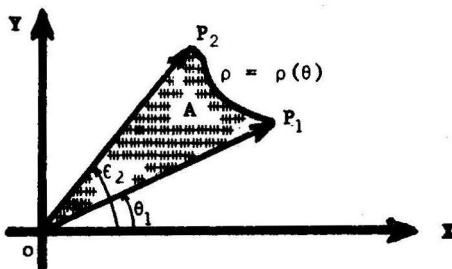
las cuales permiten pasar de un sistema de coordenadas a otro.

3.3 Area en Coordenadas Polares

Definición Si una curva continua es dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área del sector $P_1 O P_2$ acotado por un arco de la curva, y por los radios vectores OP_1 y OP_2 , se define igual a

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho(\theta)]^2 d\theta,$$

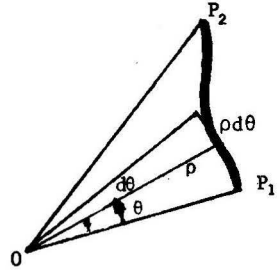
donde θ_1 y θ_2 son los ángulos polares de P_1 y P_2 respectivamente.



Interpretación Geométrica

El área del sector circular genérico de ángulo central $d\theta$ (en radianes) y radio ρ es $dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$. El límite de las sumas de tales áreas es, por definición, la integral definida

$$\frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$$



Nota Si la curva $\rho = \rho(\theta)$ es diferenciable, entonces para el sector $P_1 O P_2$ se cumple

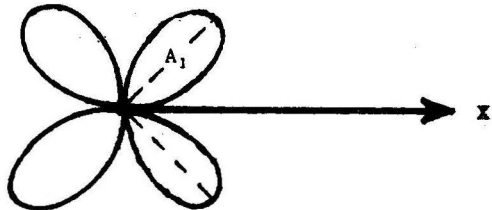
Area en coordenadas rectangulares = Area en coordenadas polares

Omitimos la prueba de este resultado.

3.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el área de la región encerrada por la curva $\rho = a \text{ sen } 2\theta$.

SOLUCION



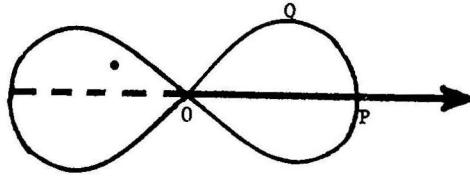
La curva es simétrica respecto de las dos diagonales y por lo tanto el área buscada es

$$\begin{aligned}
 A &= 4A_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\theta && \text{(ver figura)} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (a \text{ sen } 2\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\
 &= a^2 \left(\theta - \frac{\text{sen } 4\theta}{4} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 Hallar el área de la región encerrada por la lemniscata

$$\rho^2 = 9 \cos 2\theta$$

SOLUCION



La curva es simétrica respecto de los ejes X e Y, y cuando θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, el radio vector recorre el arco de curva PQO. Luego el área buscada es igual a

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2} d\theta = 18 \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 9.$$

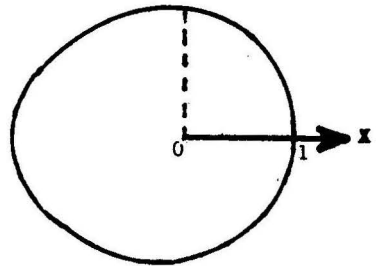
PROBLEMA 3 Encontrar el área de la región acotada por la curva

$$\rho = 2 - \cos \theta.$$

SOLUCION

Puesto que $2 - \cos(-\theta) = 2 - \cos \theta$ la curva es simétrica respecto del eje X. Luego

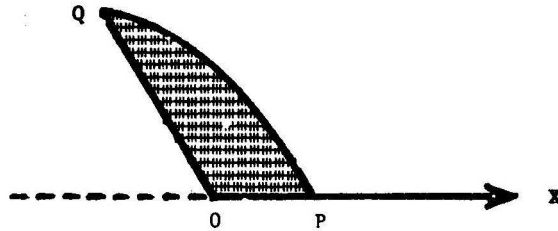
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi} \frac{\rho^2}{2} d\theta = \int_0^{\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{9}{2} - 4 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \pi. \end{aligned}$$



$$\left(\text{usando } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

PROBLEMA 4 Calcular el área acotada por la parábola $\rho = \frac{a}{1 + \cos \theta}$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 120^\circ$.

SOLUCION



Tenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta \quad (\text{usando } 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta)$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) \sec^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

PROBLEMA 5 Probar que el área engendrada por el radio vector de la espiral $\rho = e^\theta$ es igual a la cuarta parte del área de un cuadrado - cuyo lado es el radio vector.

SOLUCION Fijemos un ángulo polar α . Luego el área engendrada por el radio vector cuando crece desde 0 hasta $\rho = e^\alpha$ es

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\alpha} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{2\theta} d\theta = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left. \frac{1}{4} e^{2\theta} \right|_b^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{4} e^{2\alpha} - \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{2b} = \frac{1}{4} e^{2\alpha} = \frac{L^2}{4}$$

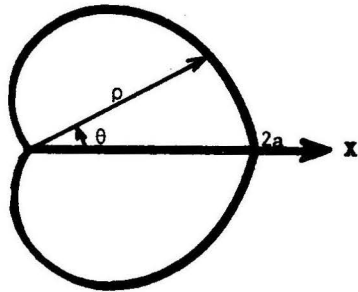
donde $L = e^\alpha$.

PROBLEMA 6 Encontrar el área de la región encerrada por la cardiode $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION

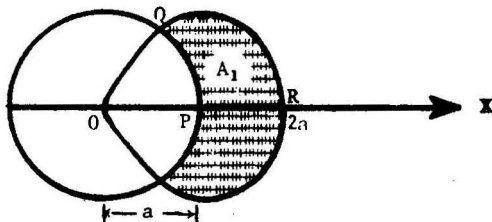
La curva es simétrica respecto del eje polar X. Luego

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\pi \rho^2 d\theta = \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$



PROBLEMA 7 Encontrar el área de la región acotada por la curva $\rho = 2a \cos \theta$ y que se encuentra fuera del círculo $\rho = a$.

SOLUCION



Las dos curvas se intersecan cuando

$$\rho = 2a \cos \theta = a, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

Tenemos

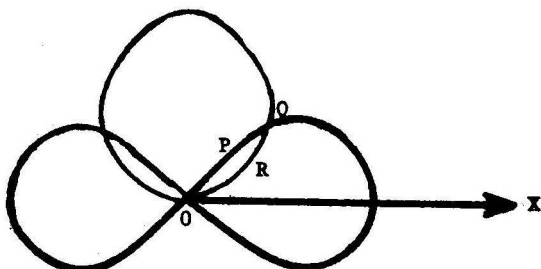
$A_1 =$ Área del sector OQR - Área del sector circular OQP (ver figura)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2a \cos \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \frac{\pi a^2}{6} = \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2. \end{aligned}$$

Luego por simetría el área buscada es $A = 2A_1 = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. 273

PROBLEMA 8 Hallar el área de la región común a las regiones encerradas por las curvas $\rho = \sqrt{2} \text{ sen } \theta$, $\rho^2 = \cos 2\theta$.

SOLUCION



Las dos curvas se intersectan cuando $\rho^2 = (\sqrt{2} \text{ sen } \theta)^2 = \cos 2\theta$
 $(1 - 2 \text{ sen}^2 \theta) - 2 \text{ sen}^2 \theta = 0$, o $\text{sen } \theta = \pm \frac{1}{2}$, esto es, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y el ángulo polar de Q es $\frac{\pi}{6}$.

Luego el área buscada es (ver figura)

$$A = 2 [\text{Area del sector OPQ} + \text{Area del sector ORQ}]$$

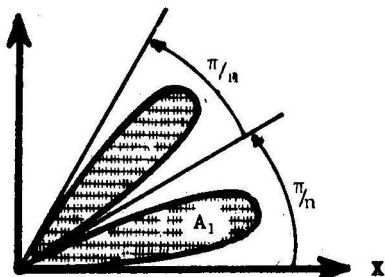
$$= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\sqrt{2} \text{ sen } \theta)^2 d\theta \right],$$

(cuando θ varía entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$, el radio vector de la curva $\rho^2 = \cos 2\theta$ recorre el arco QP)

$$A = \frac{1}{6} (\pi + 3 - 3\sqrt{3}) .$$

PROBLEMA 9 Hallar el área de la región encerrada por la curva $\rho = a \text{ sen } n\theta$.

SOLUCION



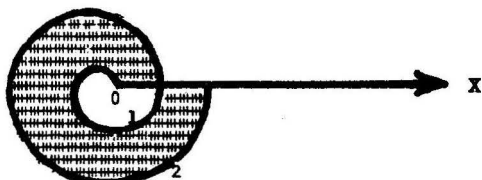
La curva encierra $2n$ regiones ("hojas") de igual área. Luego el área buscada es

$$A = 2n A_1 = 2n \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/n} \rho^2 d\theta$$

$$= n \int_0^{\pi/n} a^2 \text{ sen}^2 n\theta d\theta$$

$$= \frac{na^2}{2} \int_0^{\pi/n} (1 - \cos 2n\theta) d\theta = \frac{\pi a^2}{2} .$$

PROBLEMA 10 Encontrar el área de la región rayada limitada por el eje polar y las dos primeras vueltas de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$.



SOLUCION El área pedida es igual a

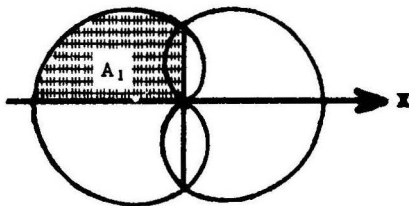
A = Área de la región encerrada por la segunda vuelta
 - Área de la región encerrada por la primera vuelta

$$= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} (a\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = 8\pi^3 a^2.$$

PROBLEMA 11 Hallar el área de la región acotada por la curva

$$\rho = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

(Ver figura)



SOLUCION Se tiene

$$\begin{aligned} A &= 4A_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^2 d\theta = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

(cuando θ varía entre $\frac{\pi}{2}$ y π el radio vector genera la región de área A_1)

PROBLEMA 12 Hallar el área de la región encerrada por la elipse

$$\rho = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\epsilon < 1).$$

SOLUCION Por simetría el área buscada es

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\pi \rho^2 d\theta = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2(1+t^2)dt}{[(1+\epsilon) + (1-\epsilon)t^2]^2},$$

haciendo $\tan \frac{\theta}{2} = t$, $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \int_0^\infty \frac{2(1+t^2)dt}{(m^2+t^2)^2}, \quad \text{donde } m^2 = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} > 0,$$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2(1+m^2 \tan^2 s)}{m^3 \sec^2 s} ds, \quad \text{haciendo } t = m \tan s,$$

$$= \frac{2}{(1-\epsilon)^2 m^3} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 s + m^2 \sen^2 s) ds$$

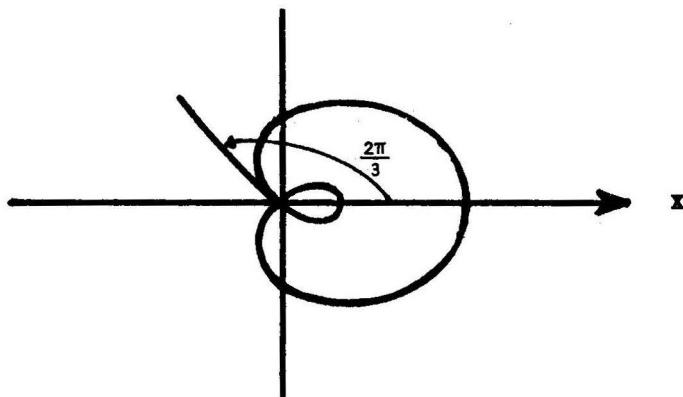
$$= \frac{2}{(1-\epsilon)^2 m^3} \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{1+m^2}{2}\right) + \frac{(1-m^2)}{2} \cos 2s \right] ds$$

$$= \frac{\pi(1+m^2)}{2(1-\epsilon)^2 m^3} = \frac{\pi}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

PROBLEMA 13 Hallar el área de cada uno de los lazos de

$$\rho = \frac{1}{2} + \cos \theta.$$

SOLUCION



Lazo Mayor El área encerrada por el lazo mayor es igual al doble del área de la región que el radio vector barre cuando θ varía desde 0 hasta $\frac{2\pi}{3}$:

$$A_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Lazo Menor El área encerrada por el lazo menor es igual al doble del área de la región que el radio vector barre cuando θ varía desde $\frac{2\pi}{3}$ hasta π .

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} . \end{aligned}$$

4 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PLANA

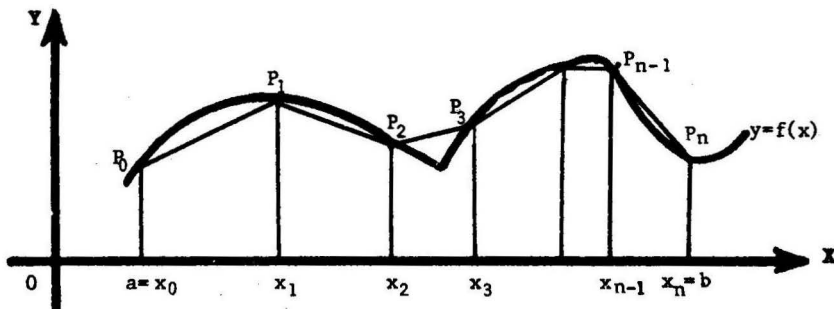
4.1 **Definición** Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si existe un número L tal que

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} P_i = (x_i, y_i) \text{ son puntos de la curva } y = f(x) \\ a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b \\ d(P_{i-1}, P_i) = \text{distancia de } P_{i-1} \text{ a } P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\ \|\Delta\| = \max \Delta x_i, \end{array} \right.$

entonces L se llama **la longitud del arco de la curva** $y = f(x)$ del punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$.

Interpretación Geométrica



La figura muestra la gráfica de una curva $y = f(x)$ definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$.

La suma $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$ representa la longitud de la línea poligonal determinada por los puntos P_0, P_1, \dots, P_n .

Cuando $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$ es muy pequeño, las abscisas x_{i-1} y x_i se encuentran muy cerca, la poligonal asociada a tales puntos se "ajusta" a la curva, y por lo tanto, intuitivamente pensamos que el límite de las longitudes de las poligonales así obtenidas representa la longitud del arco de la curva.

4.2 Cálculo de la Longitud del Arco de una Curva Plana

4.2.1 En Coordenadas Rectangulares

TEOREMA 1 Sea $y = y(x)$ una función tal que $\frac{dy}{dx}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con abscisas $x = a$ y $x = b$, es dada por la fórmula.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

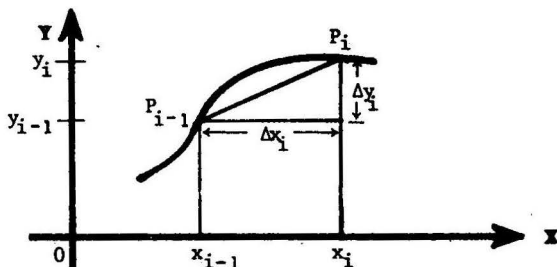
Nota Se define la **diferencial de longitud de arco de la curva** mediante $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Luego $L = \int_a^b ds$.

PRUEBA Consideremos la longitud $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$ de la poligonal determinada por los puntos P_0, \dots, P_n , donde $P_i = (x_i, y_i)$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$; $y_i = y(x_i)$.

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$



Probaremos que se cumple

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{1 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta x_i, \quad (1)$$

para algún ξ_i tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

En efecto,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (\text{por definición})$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i, \quad (2)$$

Pero $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = y(x_i) - y(x_{i-1}) = \frac{dy}{dx}(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

para algún $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, por el teorema del valor medio para derivadas, luego

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{dy}{dx}(\xi_i) \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) resulta (1).

De (1) se sigue que la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i, \tag{4}$$

y, por consiguiente, tomando límites cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

(definición de la integral definida, ya que $\frac{dy}{dx}$ es continua)

$$= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) \tag{por (4)}$$

$$= L, \tag{definición de longitud del arco}.$$

Ejemplo Encontrar la longitud de la circunferencia del círculo

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Solución

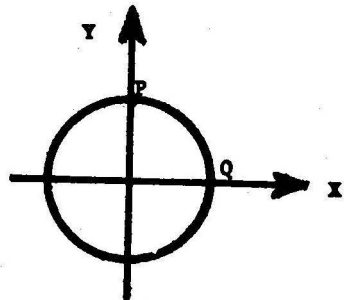
Calculamos la longitud L_1 del arco PQ.

Tenemos $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ y

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx$$

$$= a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} \Big|_0^a$$

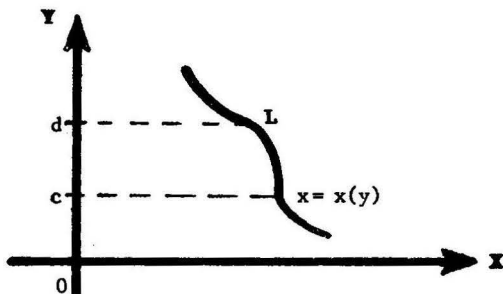
$$= \frac{\pi a}{2}.$$



Luego, la longitud de la circunferencia es $L = 4L_1 = 2\pi a$.

TEOREMA 2 Sea $x = x(y)$ una función tal que $\frac{dx}{dy}$ es continua en el intervalo cerrado $[c, d]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con ordenadas $y=c$ e $y=d$, es dada por la fórmula

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$



La prueba de este teorema es similar a la del teorema 1.

Ejemplo Hallar la longitud de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x=0$ hasta $x=1$.

Solución Tenemos $x = \frac{y^2}{4}$ y cuando $x=0$ y $x=1$ se tiene $y=0$ e $y=2$, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 + y^2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 + y^2} + 2 \ln |y + \sqrt{4 + y^2}| \right]_0^2 \\ &= \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4.2.2 Longitud del Arco cuando la Curva es dada por Ecuaciones Paramétricas

TEOREMA Si una curva es definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ,$$

donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son funciones continuas en un intervalo $[t_1, t_2]$, entonces la longitud del arco de la curva con extremos

$P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ y $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$, es dada por

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

PRUEBA Sabemos que

$$L = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{por el teorema 1}),$$

Puesto que $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ y $dx = \frac{dx}{dt} dt$, la diferencial de longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

Luego

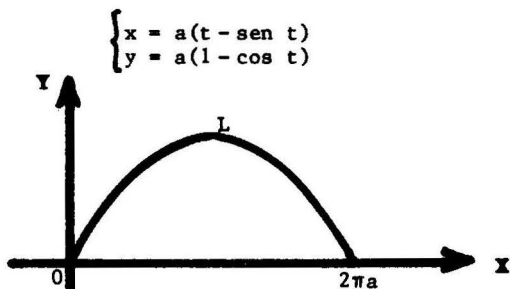
$$L = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt ,$$

por la fórmula del cambio de variable para integrales definidas.

Nota Se acaba de establecer que la diferencial de longitud de

arco en función de un parámetro t es $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$

Ejemplo. Hallar la longitud de un arco completo de la cicloide



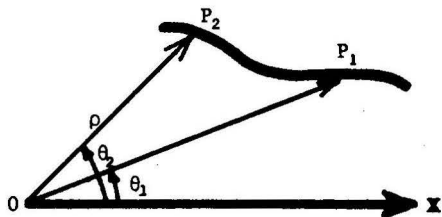
Solución

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \text{cos } t)^2 + a^2 \text{sen}^2 t} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

4.2.3 Longitud del Arco de Curva en Coordenadas Polares

TEOREMA Si una curva es definida mediante la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, donde $\frac{d\rho}{d\theta}$ es una función continua, entonces la longitud del arco de la curva cuyos puntos extremos tienen ángulos polares θ_1 y θ_2 , respectivamente, es dada por

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



PRUEBA La curva dada también es definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

de donde $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta$

y $(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 = \rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2$ (usando $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

Luego por el teorema 4.2.2

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta,$$

lo que establece la fórmula deseada.

Nota Se acaba de probar que la diferencial de la longitud de arco en coordenadas polares es

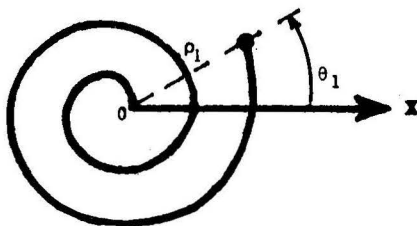
$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta.$$

Ejemplo Calcular la longitud

del arco de la espiral

$$\rho = a e^{m\theta}$$

desde el origen hasta el punto (ρ_1, θ_1) .



Solución Tenemos

$$\rho = a e^{m\theta}, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = a m e^{m\theta} \quad \text{y} \quad \rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2 = a^2 (1+m^2) e^{2m\theta}$$

Cuando θ varía desde $-\infty$ hasta θ_1 , el radio vector recorre el arco de la espiral con extremos el origen y el punto (ρ_1, θ_1) . Luego

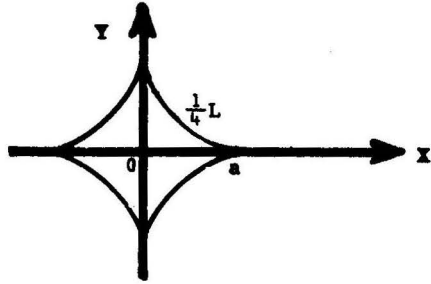
$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta = a \sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{\theta_1} e^{m\theta} d\theta \\ &= \frac{a \sqrt{1+m^2}}{m} \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{m\theta} \Big|_b^{\theta_1} = \frac{a \sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\theta_1} \quad (\text{puesto que } \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{mb} = 0) \\ &= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \rho_1. \end{aligned}$$

4.3 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Hallar la longitud de la asteroide (hipocicloide)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$



SOLUCION Diferenciando la ecuación implícita respecto de x

$$x^{-1/3} + y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}},$$

luego

$$\frac{1}{4}L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2} dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2}a,$$

de donde $L = 6a$.

PROBLEMA 2 Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ desde el origen al punto cuya abscisa es $x = 5a$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$. Luego $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9x}{4a}$ (usando $ay^2 = x^3$)

$$L = \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx = \frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{3/2} \Big|_0^{5a} = \frac{335a}{27}.$$

PROBLEMA 3 Encontrar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 4px$ desde el vértice hasta un extremo del lado recto.

SOLUCION El lado recto es, por definición, la cuerda vertical de la parábola que pasa por $(p,0)$. Luego, uno de los puntos extremos del lado recto es $(p,2p)$.

Tenemos $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2p}$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{4p^2}$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2p} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}} dy = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \sqrt{4p^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2p} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4p^2 + y^2} + 2p^2 \ln \left| y + \sqrt{4p^2 + y^2} \right| \right]_0^{2p} \\ &= p \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln \sec x$ desde el origen hasta el punto $(\frac{\pi}{3}, \ln 2)$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \tan x$. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/3} \sec x dx = \ln \left| \sec x + \tan x \right| \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5 Encontrar la longitud del arco de la catenaria

$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $(0, a)$ hasta (b, c) .

SOLUCION Se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \operatorname{sen} h \frac{x}{a}$.

Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 h \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{cos} h \frac{x}{a} dx, \quad (\text{usando } \operatorname{cos}^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1) \\ &= a \operatorname{sen} h \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sen} h \frac{b}{a} = a \sqrt{\operatorname{cos}^2 h \frac{b}{a} - 1} \\ &= \sqrt{c^2 - a^2}, \quad (\text{pues } c = a \operatorname{cos} h \frac{b}{a}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

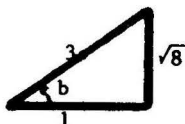
SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Luego

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx,$$

y haciendo $x = \tan t$ (ver problema 6)

$$= \left[\sec t + \ln |\operatorname{cosec} t - \cot t| \right]_a^b$$

donde $b = \arctan \sqrt{8}$ y $a = \arctan \sqrt{3}$, y por consiguiente



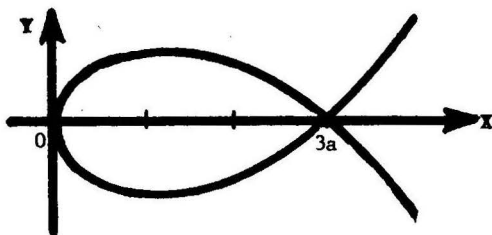
Entonces

$$\begin{aligned} L &= \left[3 + \ln \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \right] - \left[2 + \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9

Encontrar la longitud del lazo de la curva

$$9ay^2 = x(x-3a)^2$$



SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-3a)(x-a)}{6ay}$,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(x-a)^2}{4ax}$ (usando $9ay^2 = x(x-3a)^2$). Luego por simetría

$$L = 2 \int_0^{3a} \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{4ax}} dx = \int_0^{3a} \frac{x+a}{\sqrt{ax}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} + 2ax^{1/2} \right]_0^{3a}$$

$$= 4\sqrt{3}a.$$

PROBLEMA 10 Hallar la longitud del arco de la curva $8y = x^4 + \frac{2}{x^2}$ desde $x=1$ hasta $x=2$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right)$. Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{\left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11 Hallar la longitud del arco de la curva

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

desde $t=0$ hasta $t=T$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dx}{dt} = a t \cos t$ y $\frac{dy}{dt} = a t \operatorname{sen} t$. Luego

$$L = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^T a t dt = \frac{aT^2}{2}.$$

PROBLEMA 12 Encontrar la longitud total de la curva

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

SOLUCION La curva es simétrica respecto del eje X y cuando t varía desde $t=0$ hasta $t=\pi$, el punto (x,y) recorre el arco superior de la curva. Luego

$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = 8 \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt,$$

pues $\frac{dx}{dt} = a(-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t)$, $\frac{dy}{dt} = a(2 \cos t - 2 \cos 2t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= a^2 [8 - 8 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t - 8 \cos t \cos 2t] \\ &= a^2 [8 - 8 \cos(2t - t)] = 8a^2 (1 - \cos t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$L = 8a \int_0^\pi \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = -16a \cos \frac{t}{2} \Bigg|_0^\pi = 16a$$

PROBLEMA 13 Calcular la longitud del arco de la curva $\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \operatorname{cos} t \end{cases}$ desde $t=0$ hasta $t = \pi/2$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sen} t + e^t \operatorname{cos} t$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{cos} t - e^t \operatorname{sen} t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}, \quad \text{y por lo tanto}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1)$$

PROBLEMA 14 Encontrar la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 3 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases} \quad \text{desde } t=0 \text{ hasta } t=1.$$

SOLUCION Tenemos $\frac{dx}{dt} = 2t + 2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 2,$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 8(1 + t^2).$$

Luego

$$L = \int_0^1 \sqrt{8(1+t^2)} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 + \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2})$$

PROBLEMA 15 Calcular la longitud de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$.

SOLUCION Tenemos $\rho = a\theta$ y $\frac{d\rho}{d\theta} = a$. Luego

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta$$

$$= a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{1+\theta^2} \right| \right]_0^{2\pi}$$

$$= a \left[\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln (2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \right].$$

PROBLEMA 16 Encontrar la longitud del arco de la curva $\theta = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ desde $\rho = 1$ hasta $\rho = 3$.

SOLUCION Despejando ρ tenemos $\rho = \theta \pm \sqrt{\theta^2 - 1}$, y por lo tanto, cuando $\rho > 1$,

$$\rho = \theta + \sqrt{\theta^2 - 1}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1 + \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 - 1}} = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}}{\sqrt{\theta^2 - 1}}$$

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})^2 \cdot \theta^2}{\theta^2 - 1}$$

Cuando ρ varía desde $\rho = 1$ hasta $\rho = 3$, el ángulo polar θ varía desde $\theta = 1$ hasta $\theta = \frac{5}{3}$.

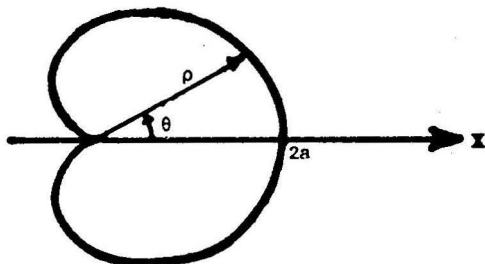
Luego

$$L = \int_1^{5/3} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_1^{5/3} \left(\theta + \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2 - 1}}\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \sqrt{\theta^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 - 1} \right| \right]_1^{5/3} = \frac{4 + \ln 3}{2}$$

PROBLEMA 17 Hallar la longitud de la cardiode $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION



La curva es simétrica respecto del eje X. Cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, el radio vector recorre el arco superior de la curva. Puesto que

$$\rho = a(1 + \cos \theta), \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -a \sin \theta$$

$$y \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 2a^2(1 + \cos \theta) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\text{tenemos } L = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

PROBLEMA 18 Calcular la longitud de la curva $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Se tiene $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \sec^2 \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \sec^6 \frac{\theta}{2} \quad \text{Luego}$$

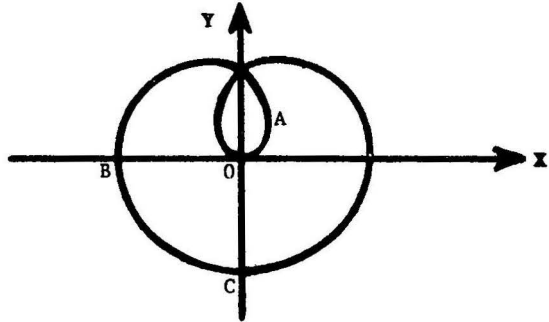
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} a \sec^3 \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} d\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2a \left[\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sec \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} + \sec \frac{\theta}{2} \right| \right]_0^{\pi/2} = a \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Probar que la longitud total de la curva

$$\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$$

es $\frac{3\pi a}{2}$.



SOLUCION

La curva es simétrica respecto del eje X y cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{3\pi}{2}$, el radio vector recorre el arco OABC.

Por otra parte, $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$, $\frac{d\rho}{d\theta} = a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}$, y $\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{3}$.

Por consiguiente,

$$L = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{3} d\theta = a \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos \frac{2\theta}{3}) d\theta = \frac{3\pi a}{2}$$

PROBLEMA 20 Encontrar la longitud de la espiral logarítmica

$$\rho = \frac{a}{\theta} \quad \text{desde} \quad (\rho_1, \theta_1) \quad \text{hasta} \quad (\rho_2, \theta_2) .$$

SOLUCION Tenemos $\rho = \frac{a}{\theta}$, $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$

$$\text{y} \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \left(\frac{1 + \theta^2}{\theta^4}\right) .$$

Por lo tanto

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta = a \left[\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) - \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

(la integral se calcula haciendo $\theta = \tan t$)

$$= a \left[\ln \left(\frac{\theta_2 + \sqrt{\theta_2^2 + 1}}{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{1 + \theta_2^2}}{\theta_2} - \frac{\sqrt{1 + \theta_1^2}}{\theta_1} \right]$$

O substituyendo $\theta_1 = \frac{a}{\rho_1}$ y $\theta_2 = \frac{a}{\rho_2}$

$$L = a \cdot \ln \frac{\rho_1 (a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2 (a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})} + \sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} .$$

5 VOLUMEN DE SOLIDOS

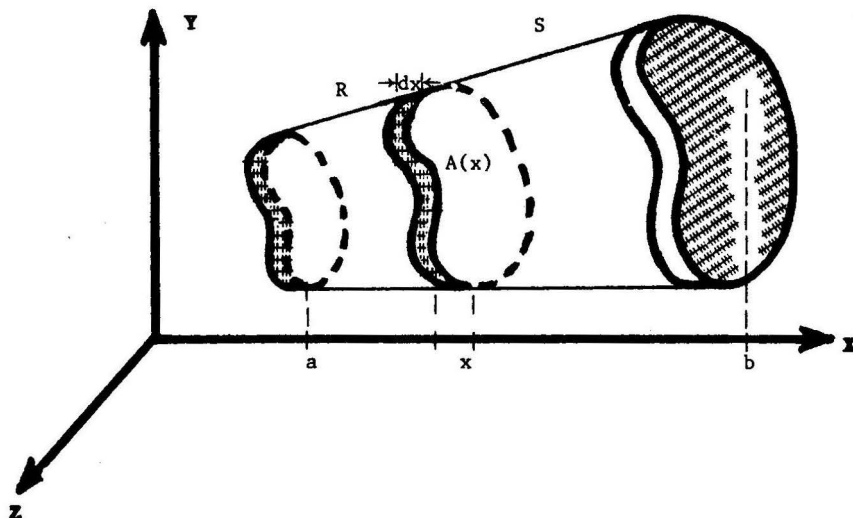
5.1 Definición del Volumen de un Sólido en términos del Área Seccional

Definición Sea S una región del espacio XYZ que se encuentra entre dos planos perpendiculares al eje X: $x = a$ y $x = b$. Entonces el **volumen del sólido S** se define por la fórmula

$$V = \int_a^b A(x) dx ,$$

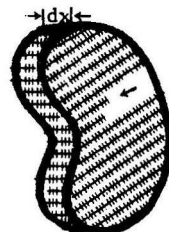
donde $A(x)$ es el área de la sección de S trazada perpendicularmente al eje X en el punto x, y donde se supone que $A(x)$ es una función continua.

Interpretación Geométrica



El cilindro elemental R de la derecha tiene área $A(x)$ en la base y altura dx . Luego, su volumen es $dV = A(x)dx$. Las sumas de los volúmenes de tales cilindros elementales se aproximan al volumen del sólido ya que

$$V = \int_a^b A(x)dx = \lim \sum A(x)dx$$



por definición de integral definida.

Nota Análogamente, el volumen de un sólido S del espacio comprendido entre dos planos perpendiculares al eje Y: $y=c$ e $y=d$, se define mediante

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

donde $A(y)$ es el área de la sección plana de S trazada perpendicularmente al eje Y en el punto y .

5.1 DEFINICION DEL VOLUMEN DE UN SOLIDO EN TERMINOS DEL AREA SECCIONAL

Ejemplo 1 Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro recto circular de radio r , por un plano que pasa a través del diámetro de la base y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Hallar el volumen de la cuña.

Solución

La ecuación del segmento OP es $y = x$.

Las dimensiones del paralelepípedo elemental de la figura son:

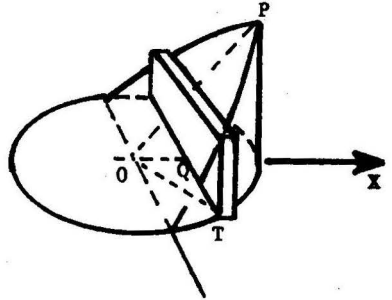
$$\begin{aligned} \text{ancho} &= dx \\ \text{base} &= 2 \overline{QT} = 2 \sqrt{(\overline{OT})^2 - (\overline{OQ})^2} \\ &= 2 \sqrt{r^2 - x^2} \\ \text{altura} &= y = x. \end{aligned}$$

Por tanto su volumen es

$$dV = 2 \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx,$$

y cuando x varía desde $x=0$ hasta $x=r$, se obtiene la cuña. Luego, el volumen de la cuña es

$$V = \int_0^r dV = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx = -\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3.$$



Ejemplo 2 Calcular el volumen de una esfera de radio a .

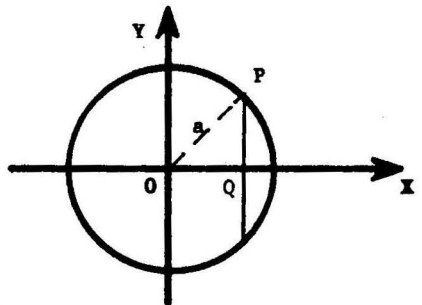
Solución

La sección plana de la esfera trazada perpendicularmente al eje X en el punto x , es un círculo de radio $\overline{PQ} = y$, y por tanto, su área es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2).$$

La esfera se obtiene cuando x varía desde $x=-a$ hasta $x=a$. Luego, el volumen de la esfera es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a A(x) dx = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{4 \pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

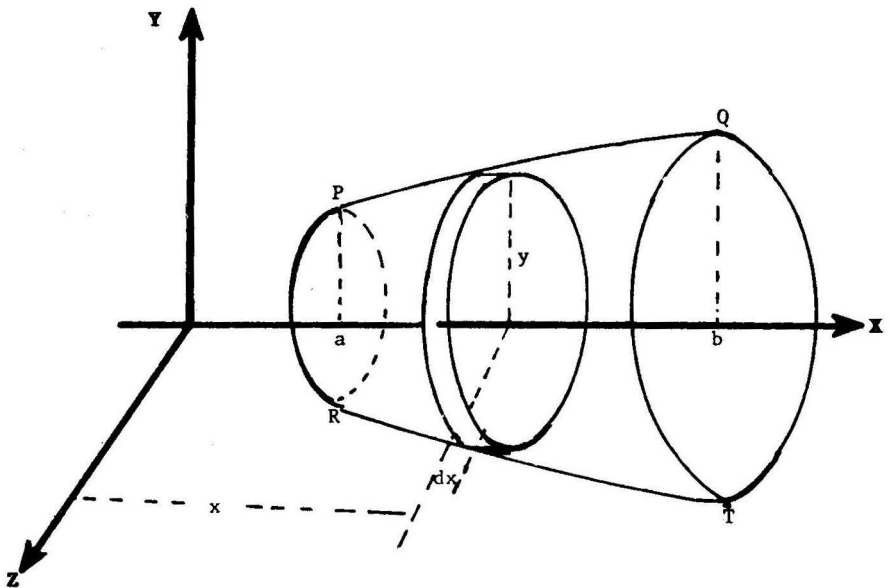


5.2 Volumen de un Sólido de Revolución

5.2.1 Método del Disco Circular

TEOREMA Sea $y = y(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $y(x) \geq 0$. Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje X la región limitada por la curva $y = y(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$. Entonces, el volumen de S es dado por

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx .$$



PRUEBA Al rotar la región $PQab$ del plano XY alrededor del eje X , se genera el sólido de revolución $PQRT$. En la figura se muestra un cilindro o disco circular de radio $=y$, altura $=dx$, área de la base $A(x) = \pi y^2$, y volumen $dV = \pi y^2 dx$.

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx .$$

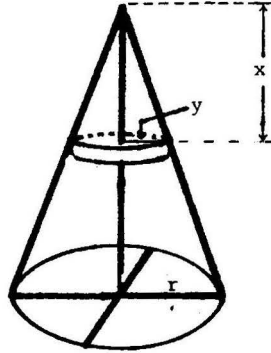
Ejemplo 1 Probar que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Solución

El disco circular elemental de la figura tiene volumen $dV = \pi y^2 dx$, donde $\frac{y}{x} = \frac{r}{h}$ por semejanza de triángulos.

Luego

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h dV = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$



Ejemplo 2 Hallar el volumen del sólido engendrado cuando se rota alrededor del eje X la región acotada por un arco completo de la curva $y = a \sin x$.

Solución Cuando x varía desde $x=0$ hasta $x=\pi$, se obtiene un arco completo de la curva dada.

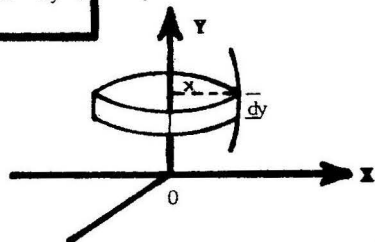
Luego

$$V = \pi \int_0^\pi a^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

5.2.2 Nota En forma análoga, el volumen del sólido de revolución S obtenido al rotar alrededor del eje Y la región limitada por la curva $x = x(y)$, el eje Y y las rectas $y=c$ e $y=d$ es dado por

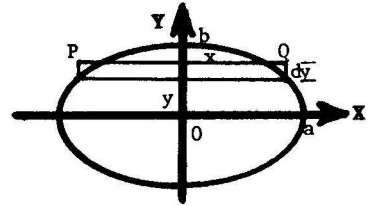
$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy.$$

En este caso, $dV = \pi x^2 dy$ es el volumen de un disco circular elemental (ver figura).



Ejemplo Hallar el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje Y la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución Al rotar el rectángulo PQ alrededor del eje Y se obtiene un disco circular de radio = x, y volumen $V = \pi x^2 dy$. Cuando y varía desde $y = -b$ hasta $y = b$, se obtiene un sólido cuyo volumen es entonces

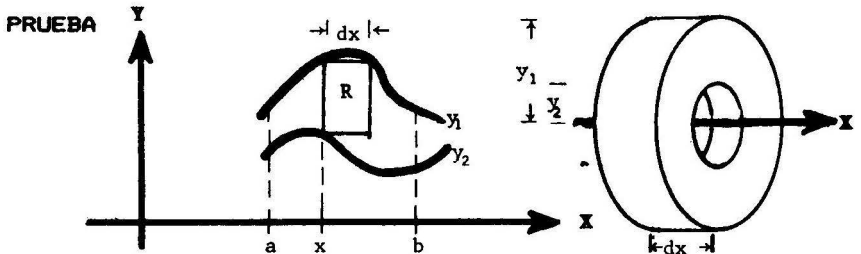


$$V = \int_{-b}^b \pi x^2 dy = \pi \int_{-b}^b \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) dy = \frac{4\pi a^2 b}{3}$$

5.2.3 Método del Anillo Circular

TEOREMA El volumen del sólido de revolución engendrado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por las curvas $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, donde $y_1(x) \geq y_2(x) \geq 0$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dado por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

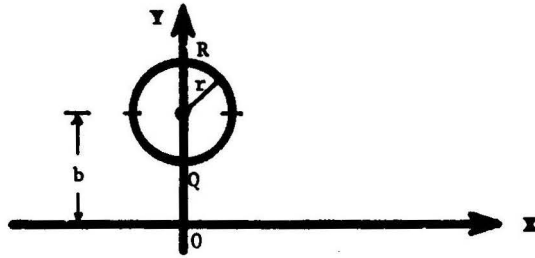


En la figura se muestra un rectángulo elemental R determinado por la abscisa x, las ordenadas y_1, y_2 . Al rotar R alrededor del eje X se obtiene un anillo circular, como el que se ilustra en el lado de recho de la figura, cuya base tiene un área $A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2)$, y cuyo volumen es $dV = A(x)dx = \pi(y_1^2 - y_2^2) dx$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución obtenido cuando x varía desde $x = a$ hasta $x = b$, es

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

Ejemplo Encontrar el volumen del anillo sólido (o **toro**) obtenido cuando se rota un círculo de radio r alrededor de un eje exterior en su plano y a b unidades de su centro.



Solución Consideramos un sistema de coordenadas como el que se indica en la figura. El círculo rota alrededor del eje X. La ecuación del círculo es $(x - 0)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Luego $y = b \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, y por lo tanto,

el arco superior R es descrito por $y_1 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$, y

el arco inferior Q es descrito por $y_2 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$,

cuando x varía desde $-r$ hasta r . El elemento de volumen es

$$dV = \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = 4\pi b \sqrt{r^2 - x^2}.$$

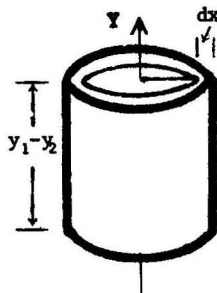
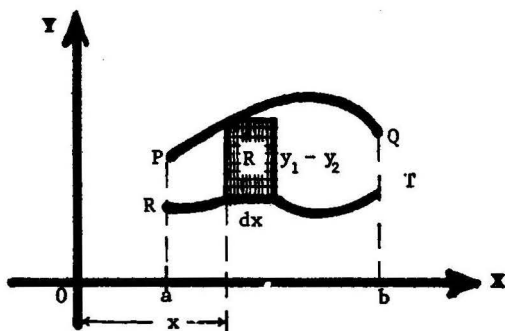
Finalmente $V = 4\pi b \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 r^2 b$.

5.2.4 Método del Tubo Cilíndrico

Definición El volumen del sólido de revolución S engendrado por rotación alrededor del eje Y de la región acotada por las curvas $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, donde $y_1(x) \geq y_2(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dado por la fórmula

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_1 - y_2) dx.$$

Interpretación Geométrica



Al rotar alrededor del eje Y el rectángulo R, se obtiene un tubo cilíndrico, como el que se ilustra en el lado derecho de la figura, cuyo volumen aproximado es

$$dV = (\text{perímetro de la base}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{altura})$$

$$= (2\pi x)(dx)(y_1 - y_2) .$$

El volumen del sólido obtenido al rotar la región PORT alrededor del eje Y es entonces

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x(y_1 - y_2) dx .$$

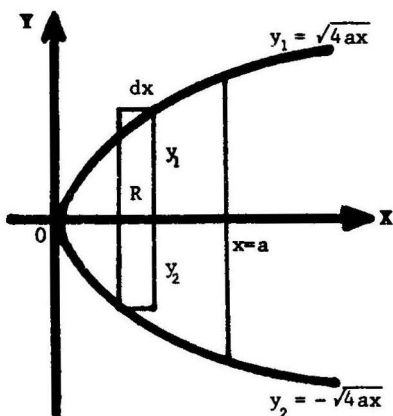
Ejemplo Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor de la recta $x = a$ la región acotada por esta recta y la parábola $y^2 = 4ax$, ($a > 0$).

Solución El tubo cilíndrico elemental obtenido al rotar la región R alrededor de la recta $x = a$, tiene radio $= x - a$, y volumen $dV = 2\pi(x-a)(y_1 - y_2) dx$
 $= 4\pi(x-a) \sqrt{4ax} dx .$

Luego

$$V = \int_0^a 4\pi(a-x) \sqrt{4ax} dx$$

$$= \frac{16}{3} \pi a^3 - \frac{16}{5} \pi a^3 = \frac{32 \pi a^3}{15}$$



5.3 Volumen de un Sólido de Revolución en Coordenadas Polares

Teorema El volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva $\rho = \rho(\theta)$ y los ángulos polares $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, es dado por la fórmula

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Prueba Tenemos

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

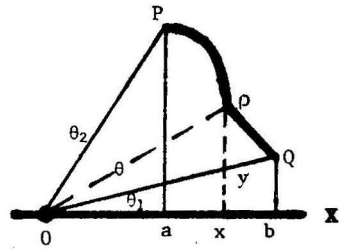
$$a = \rho_2 \cos \theta_2, \quad b = \rho_1 \cos \theta_1.$$

Sean

V_1 = volumen de la región engendrada por el triángulo $00b$

V_2 = volumen de la región engendrada por el triángulo OPa

V_3 = volumen de la región engendrada por $PQab$.



Entonces el volumen V del sólido engendrado por la región OPQ es

$$V = V_3 - V_1 + V_2.$$

Puesto que, por el ejemplo 1 de la sección 5.2.1, un cono circular recto de radio r y altura h , tiene volumen igual a $\frac{\pi r^2 h}{3}$, tenemos

$$V_i = \frac{\pi (\rho_i \operatorname{sen} \theta_i)^2 \rho_i \cos \theta_i}{3} = \frac{\pi \rho_i^3 \operatorname{sen}^2 \theta_i \cos \theta_i}{3} \quad \text{donde } i=1,2. \quad (1)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} V_3 &= \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta (\rho' \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} [\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta] d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

y como

$$\begin{aligned} d(\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta) &= \left\{ 3\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + 2\rho^3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta \right\} d\theta \\ &= \left\{ 3[\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta] + 2\rho^3 \operatorname{sen} \theta \right\} d\theta \\ &\quad (\text{usando } \cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \end{aligned}$$

de donde

$$d\left(\frac{\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta}{3}\right) = [\rho^2 \rho' \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta] d\theta + \frac{2}{3} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta,$$

y por lo tanto en (2)

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} d \frac{\rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta}{3} - \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \frac{\pi \rho_1^3 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \cos \theta_1}{3} - \frac{\pi \rho_2^3 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos \theta_2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + V_1 - V_2 \end{aligned}$$

y así $V = V_3 - V_1 + V_2 = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta,$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Ejemplo Calcular el volumen de un sólido obtenido por rotación de la región acotada por la curva $\rho = a \cos^2 \theta$ alrededor del eje polar.

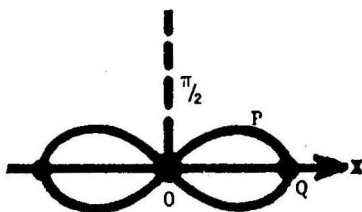
Solución

Cuando varía desde $\theta = 0$ hasta

$\theta = \frac{\pi}{2}$, el radio vector ρ barre

la región QP0. Por simetría

tenemos que



$$V = 2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^3 \pi}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^3 \pi}{3} \left(-\frac{\cos^7 \theta}{7} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4a^3 \pi}{21}$$

5.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el volumen de un sólido formado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por el eje X y la parábola $y = 2x - x^2$.

SOLUCION La parábola dada corta el eje X cuando $y = 2x - x^2 = 0$, esto es cuando $x = 0$ y $x = 2$.

El área seccional $A(x)$ es $A(x) = \pi y^2 = \pi x^2 (2-x)^2$.

$$\text{Luego } V = \int_0^2 A(x) dx = \pi \int_0^2 x^2 (2-x)^2 dx = \frac{16}{15} \pi.$$

PROBLEMA 2 Encontrar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje X la región acotada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje X y la recta $x = 1$.

SOLUCION La región está comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$. El elemento de volumen es

$$dV = \pi y^2 dx = \pi x^3 dx.$$

$$\text{Tenemos entonces } V = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{4}.$$

PROBLEMA 3 Calcular el volumen de un sólido obtenido por rotación, alrededor del eje X, de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

SOLUCION

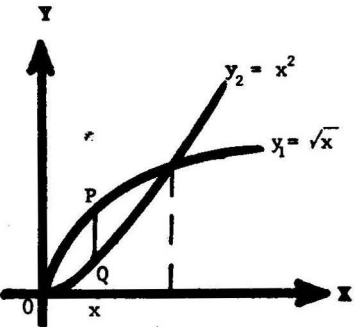
Las parábolas se intersecan cuando $x = 0$ y $x = 1$.

El área seccional del anillo circular engendrado por el segmento PQ es

$$A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2) = \pi(x - x^4)$$

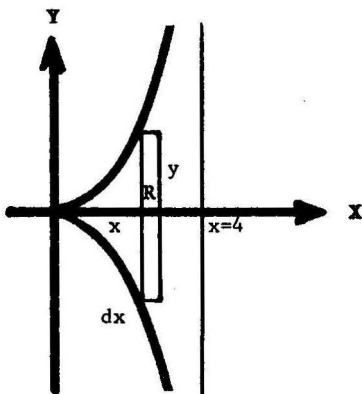
Luego

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}.$$



PROBLEMA 4 Hallar el volumen del sólido generado por rotación de la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$ alrededor de su asíntota $x = 4$.

SOLUCION Cuando el rectángulo R rota alrededor de la recta $x = 4$ engendra un tubo cilíndrico elemental de espesor dx , radio en la base $= 4-x$ y altura $= 2y$.



Luego su volumen es

$$dV = 2\pi(4-x)(2y)dx = 4\pi(4-x)y dx$$

y el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 dV = 4\pi \int_0^4 (4-x) \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{1/2} dx \\ &= 4\pi \int_0^4 x \sqrt{x(4-x)} dx \end{aligned}$$

Completando cuadrados: $x(4-x) = 4 - (2-x)^2$, sugiere el cambio de variables $2-x = 2 \cos \theta$, o $x = 2(1 - \cos \theta)$.

Los nuevos límites de integración son $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por lo tanto

$$V = 4\pi \int_0^\pi 2(1 - \cos \theta) 2 \sin \theta d\theta = 16\pi.$$

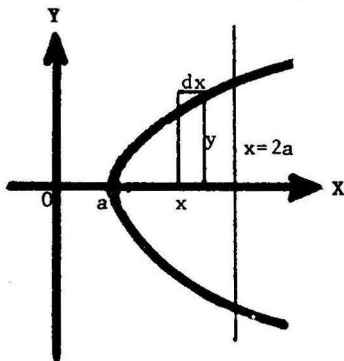
PROBLEMA 5 Probar que el volumen del sólido obtenido por rotación alrededor del eje X de la región limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = 2a$, es igual al volumen de una esfera de radio a .

SOLUCION El volumen del disco circular obtenido al rotar el rectángulo elemental de la figura alrededor del eje X es $dV = \pi y^2 dx$.

Se tiene entonces

$$V = \int_a^{2a} dV = \pi \int_a^{2a} (x^2 - a^2) dx = \frac{4}{3} \pi a^3$$

que es igual al volumen de una esfera de radio a .



PROBLEMA 6 Encontrar el volumen de un cono recto elíptico cuya base es una elipse con semiejes 4 y 3, y altura 5.

SOLUCION A una distancia h del vértice el disco elíptico elemental E de la figura tiene semiejes a y b , los cuales son dados, por semejanza de triángulos, por

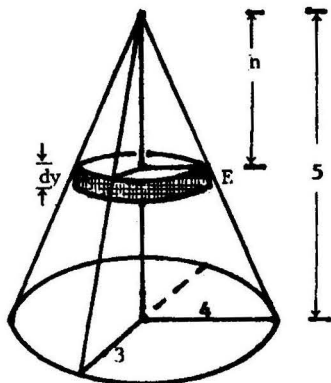
$$\frac{a}{h} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \frac{b}{h} = \frac{3}{5}, \quad \text{o} \quad a = \frac{4}{5}h$$

$$\text{o} \quad a = \frac{4}{5}h \quad \text{y} \quad b = \frac{3}{5}h.$$

Puesto que el área de una elipse es πab , el volumen de E es

$$dV = \pi ab dh = \frac{12}{25} \pi h^2 dh. \quad \text{Luego}$$

$$V = \int_0^5 dV = \frac{12}{25} \pi \int_0^5 h^2 dh = 20\pi.$$



PROBLEMA 7 La base de un sólido es un círculo de radio a . Si todas las secciones planas del sólido perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadradas, hallar el volumen del sólido.

SOLUCION

El paralelepípedo rectangular elemental de la figura tiene volumen

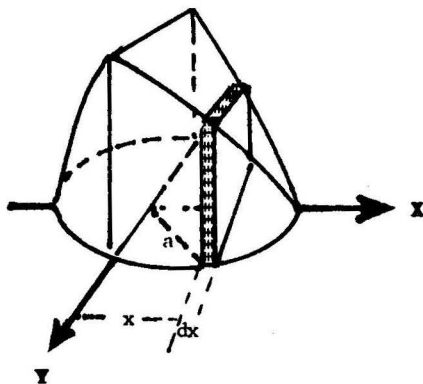
$$dV = (2y)^2 dx,$$

donde $x^2 + y^2 = a^2$. Luego

$$V = \int_{-a}^a dV$$

$$= 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}.$$

$$= \frac{16a^3}{3}$$

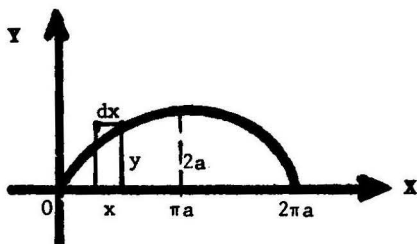


PROBLEMA 8 Calcular el volumen del sólido formado por rotación de la figura acotada por un arco completo de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \text{cos } t)$ y el eje X, alrededor del

- (1) eje Y
- (2) eje de simetría de la figura.

SOLUCION

- (1) El cubo cilíndrico elemental obtenido al rotar el rectángulo de la figura alrededor del eje Y, tiene volumen $dV = 2 \pi x y dx$.



Puesto que $x = 0$ cuando $t = 0$, y $x = 2 \pi a$ cuando $t = 2 \pi$, tenemos

$$V = \int_0^{2\pi a} 2\pi x y dx = 2 \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \text{sen } t)(1 - \text{cos } t)^2 dt = 6\pi^2 a^3.$$

- (2) El eje de simetría de la figura es la recta $x = \pi a$. El volumen del tubo cilíndrico obtenido por rotación, alrededor de esta recta, del rectángulo de la figura es

$$dV = 2\pi(\pi a - x)y dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi a} dV = 2 \pi a^3 \int_0^{\pi} (\pi - t + \text{sen } t)(1 - \text{cos } t)^2 dt \\ &= 2 \pi a^3 \int_0^{\pi} (\pi - t + \text{sen } t) \left(\frac{3}{2} - 2 \text{cos } t + \frac{\text{cos } 2t}{2} \right) dt \\ &\hspace{15em} \left(\text{usando } \text{cos}^2 t = \frac{1 + \text{cos } 2t}{2} \right) \\ &= \frac{\pi a^3 (9 \pi^2 - 16)}{6} . \end{aligned}$$

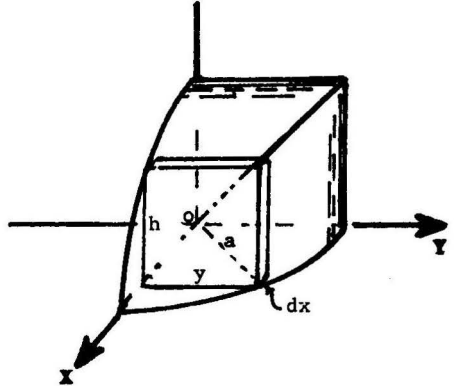
PROBLEMA 9 Encontrar el volumen del sólido común a dos cilindros rectos circulares de radio a , cuyos ejes se intersecan en ángulos rectos.

SOLUCION El paralelepípedo de la figura tiene volumen $dV = h y dx = y^2 dx$ ya que $h = \sqrt{a^2 - x^2} = y$.

Entonces tenemos

$V = 8$ veces el volumen de la región que se muestra en la figura

$$\begin{aligned} &= 8 \int_0^a y^2 dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{16}{3} a^3 . \end{aligned}$$



PROBLEMA 10 Un círculo deformable se mueve de manera que uno de los puntos de su circunferencia se encuentra en el eje X , el centro describe una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y el plano del círculo es perpendicular al eje X . Calcular el volumen del sólido.

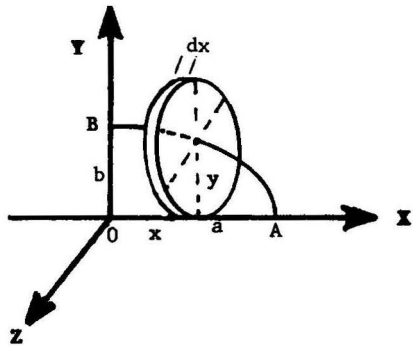
SOLUCION El volumen del disco circular elemental de la figura es $dV = \pi y^2 dx$, donde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Por lo tanto,

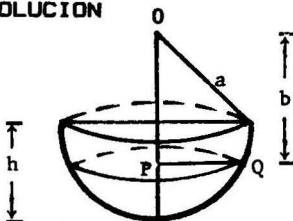
$V = 4$ veces el volumen de la región que corresponde al arco \widehat{AB} .

$$= 4 \int_0^a \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{8\pi}{3} ab^2$$



PROBLEMA 11 Hallar el volumen de un segmento de esfera de radio a y altura h .

SOLUCION



El volumen de un disco circular elemental es $dV = \pi(PQ)^2 dy$, donde $PQ^2 = a^2 - OP^2 = a^2 - y^2$. Luego,

$$\begin{aligned} V &= \int_{a-h}^a \pi(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{\pi}{3} h^2 (3a - h) . \end{aligned}$$

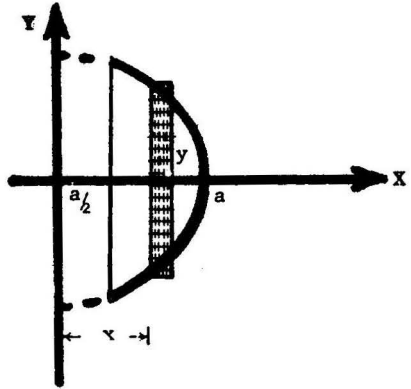
PROBLEMA 12 Una esfera de radio a tiene un hueco cilíndrico recto de base circular de diámetro a . Si el eje del cilindro es un diámetro de la esfera, hallar el volumen de la esfera hueca.

SOLUCION El tubo cilíndrico obtenido al rotar alrededor del eje Y el rectángulo de la figura, tiene volumen

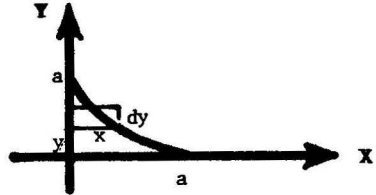
$$dV = (2\pi x)(2y)dx. \text{ Por lo tanto.}$$

$$V = \int_{a/2}^a dV = 4\pi \int_{a/2}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= -\frac{4}{3} \pi (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{a/2}^a = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a.$$



PROBLEMA 13 Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Y .



SOLUCION $dV = \pi x^2 dy = \pi(a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy.$

Luego $V = 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy = \frac{32\pi a^3}{105}.$

PROBLEMA 14 Sobre las cuerdas de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, paralelas al eje X , se construyen cuadrados perpendiculares al plano XY y cuyos lados son iguales a las longitudes de tales cuerdas. Encontrar el volumen del sólido formado.

SOLUCION $dV = (2x)^2 dy$

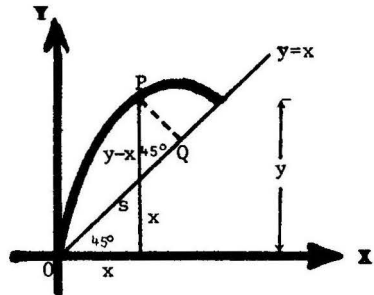
$$V = 2 \int_0^a (2x)^2 dy = 8 \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^3 dy$$

$$= \frac{128}{105} a^3.$$

PROBLEMA 15 Calcular el volumen engendrado al rotar la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = 3x - x^2$, alrededor de la recta.

SOLUCION Las curvas dadas se intersecan usando $x = 0$ y $x = 2$.

Sean $\left\{ \begin{array}{l} P = (x, y) \text{ un punto del arco} \\ \text{de la parábola,} \\ Q = \text{el pie de la perpendicular} \\ \text{trazada desde el punto P a} \\ \text{la recta diagonal,} \\ s = \overline{OQ}, \\ t = \overline{PQ}. \end{array} \right.$



$$\text{Tenemos } t = (y-x)\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2x - x^2),$$

$$s = x \sec 45^\circ + t = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2),$$

$$y \quad dV = \pi t^2 ds = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} x^2 (2-x)^3 dx.$$

$$\text{Luego } V = \int_0^2 dV = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \int_0^2 x^2 (2-x)^3 dx = \frac{8\pi \sqrt{2}}{15}.$$

PROBLEMA 16 Hallar el volumen del sólido obtenido por rotación alrededor del eje polar de la figura acotada por la cardiode $\rho = 4 + 4 \cos \theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Aplicamos la fórmula del teorema 5.3, pág. 285,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \theta d\theta = \frac{128\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{128\pi}{3} \cdot \frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \Bigg|_0^{\pi/2} = 160\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 17 Calcular el volumen del sólido formado por rotación alrededor del eje polar de la curva $\rho = 3 \sin 2\theta$.

SOLUCION

$$V = 2\left(\frac{2}{3}\pi\right) \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \theta d\theta = 288\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{576}{35}\pi.$$

PROBLEMA 18 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloides $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$ y los planos $z = 2$ y $z = 5$.

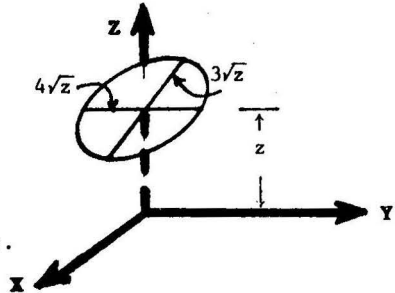
SOLUCION

La sección del sólido determinada por un plano paralelo al plano XY y a una distancia z del origen es una elipse de área

$$A = \pi xy = \pi(3\sqrt{z})(4\sqrt{z}) = 12\pi z.$$

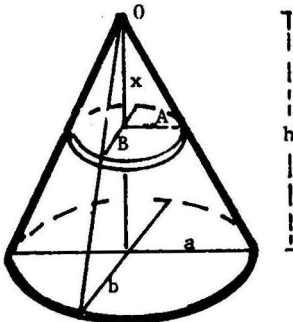
Luego

$$V = \int_2^5 A dz = 12\pi \int_2^5 z dz = 126\pi.$$



PROBLEMA 19 Hallar el volumen de un cono recto de altura h, cuya base es una elipse de semiejes a y b.

SOLUCION



El disco elíptico elemental de la figura tiene volumen $dV = \pi AB dx$, donde los semiejes A y B, por semejanza de triángulos, satisfacen las relaciones

$$\frac{A}{a} = \frac{x}{h} \quad \text{y} \quad \frac{B}{b} = \frac{x}{h}$$

Luego

$$V = \int_0^h dV = \frac{\pi ab}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi abh}{3}.$$

PROBLEMA 20 Hallar el volumen del sólido encerrado por la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

SOLUCION Para cada z tal que $-c \leq z \leq c$, se tiene una sección plana elíptica paralela al plano XY acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{c^2 - z^2}{c^2}.$$

El área de tal sección plana es

$$A = \pi \cdot \text{producto de los semiejes de la elipse} \\ = \pi \left[\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2} \right] \cdot \left[\frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2} \right] = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2).$$

Por lo tanto, el volumen pedido es

$$V = \int_{-c}^c A dz = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c (c^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

5.5 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1 Un triángulo equilátero variable se mueve con su plano perpendicular al eje X, los extremos de su base sobre los puntos de las parábolas $y^2 = 16x$ e $y^2 = 4x$, $y \geq 0$, y el tercer vértice encima del plano XY. Calcular el volumen del sólido engendrado por el triángulo cuando se mueve desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

PROBLEMA 2 Calcular el volumen del sólido acotado por la su perficie

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

PROBLEMA 3 Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A,B y a,b, respectivamente, y la altura es h.

PROBLEMA 4 Un triángulo móvil de altura constante h se mueve con un plano perpendicular a un diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es una cuerda del círculo. En contrar el volumen del sólido engendrado cuando el triángulo se desplaza desde un extremo del diámetro hasta el otro.

PROBLEMA 5 Encontrar el volumen del sólido engendrado por la figura encerrada por la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y la recta $x+y=1$, cuando rota alrededor de dicha recta.

PROBLEMA 6 Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor del eje Y la figura acotada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$$

RESPUESTAS 1 $\frac{\sqrt{3}}{2} .$

2 $\frac{8}{5} \pi abc .$

3 $\frac{h}{3} (AB + \frac{Ab + aB}{2} + ab) .$

4 $\frac{1}{2} \pi a^2 h .$

5 $\frac{\pi \sqrt{2}}{15} .$

6 $\frac{4}{5} \pi a^2 b .$

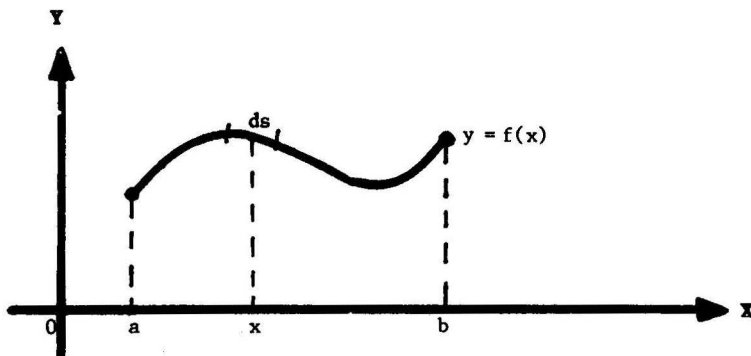
6 AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION

6.1 Area en Coordenadas Rectangulares

Definición El área de la superficie S obtenida por rotación, alrededor del eje X, del arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$, se define mediante la fórmula

$$A = 2\pi \int_a^b y \, ds$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ (= diferencial de longitud de arco)} \\ \text{se asume que } \frac{dy}{dx} \text{ es continua en el intervalo } a \leq x \leq b. \end{array} \right.$



Cuando un elemento de arco, de longitud ds, rota alrededor del eje X, engendra un "cilindro" circular de altura $h = ds$, radio $r = y$, y superficie lateral $dA = 2\pi y ds$.

Nota De manera análoga, el área de la superficie S obtenida por rotación, alrededor del eje Y, de un arco de la curva $x = f(y)$, entre los puntos $y = c$ e $y = d$, se define mediante

$$A = 2\pi \int_c^d x \, ds$$

donde $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$.

6.2 Area de una Superficie de Revolución cuando la Curva es dada en forma Paramétrica

TEOREMA Sea una curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{tal que } \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ son continuas en } \alpha < t < \beta.$$

Entonces

El área de la superficie obtenida por rotación alrededor del eje X, del arco de la curva entre $t = \alpha$ y $t = \beta$, es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Nota

(1) Si se rota alrededor del eje Y, el área de la superficie es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

(2) La prueba del teorema es una consecuencia inmediata de la definición 6.1 y de la fórmula de cambio de variable para la integral definida.

Recordemos que $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ (ver Nota, 4.2.2)

Ejemplo 1 Encontrar el área de la superficie obtenida por rotación de un arco completo de la curva $y = \sin x$.

Solución Cuando x varía desde $x = 0$ hasta $x = \pi$, se obtiene un arco completo de la curva dada. Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du, \quad \text{haciendo } u = \cos x, \\ &= 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du = 2\pi \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Hallar el área de la superficie de la esfera engendrada al rotar un círculo de radio R alrededor de un diámetro.

Solución Sea $x^2 + y^2 = R^2$ la ecuación del círculo respecto de un sistema de coordenadas rectangulares. Hagamos $x = R \cos t$,
 $y = R \operatorname{sen} t$.

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -R \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = R \cos t \quad y$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = R dt.$$

Cuando t varía desde $t=0$ hasta $t=\pi$, se obtiene el semicírculo de diámetro contenido en el eje X. Por tanto, el área buscada es

$$A = 2\pi \int_0^\pi (R \operatorname{sen} t) R dt = -2\pi R^2 \cdot \cos t \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

6.3 Área de una Superficie de Revolución en Coordenadas Polares

TEOREMA Si una curva es definida mediante la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, donde $\frac{d\rho}{d\theta}$ es una función continua, entonces el área de la superficie obtenida por rotación, alrededor del eje polar X, del arco de la curva cuyos puntos extremos tienen ángulos polares θ_1 y θ_2 , respectivamente, es dada por

$$A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \operatorname{sen} \theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

PRUEBA Tenemos $x = x(\theta) = \rho \cos \theta$, $y = y(\theta) = \rho \operatorname{sen} \theta$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (\text{ver nota 4.2.3})$$

Luego, aplicando el teorema 6.2 se obtiene la fórmula requerida. ■

Ejemplo Calcular el área de la superficie formada al rotar la cardiode $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ alrededor del eje polar.

Solución Observemos que la curva dada es simétrica respecto del eje polar, y que cuando θ varía desde 0 hasta π , se tiene el arco superior de la cardiode.

Puesto que $\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 4a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2(-\operatorname{sen} \theta)^2 = 8a^2(1 + \cos \theta)$

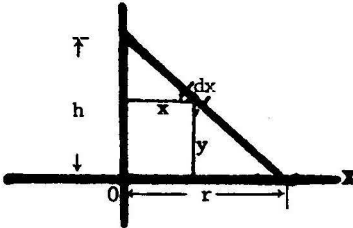
se tiene que el área pedida es

$$A = 8\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} \operatorname{sen} \theta d\theta = 8\sqrt{2} \pi a^2 \left(-\frac{2}{5}\right) (1 + \cos \theta)^{5/2} \Big|_0^\pi = \frac{128\pi a^2}{5}$$

6.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar el área de la superficie lateral de un cono recto de altura h y base circular de radio r .

SOLUCION



Por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{x}{h-y} = \frac{r}{h}, \quad x = r - \frac{r}{h}y = \frac{r}{h}(h-y).$$

$$\text{Luego, } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h} dy$$

y el área de la superficie lateral del cono, que se obtiene rotando AB alrededor del eje Y , es

$$A = 2\pi \int_0^h \frac{x \sqrt{h^2 + r^2}}{h} dy = \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^h = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

PROBLEMA 2 Encontrar el área de la superficie de revolución obtenida al rotar alrededor del eje X la curva $y = e^{-x}$, desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

SOLUCION

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + e^{-2x}} dx,$$

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx = -2\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du,$$

(haciendo $u = e^{-x}$)

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

PROBLEMA 3 Calcular el área de la superficie formada por rotación alrededor del eje X del arco de la curva $4y = x^2 - 2 \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

SOLUCION Tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{x^2 + 1}{2x} dx$.

$$\text{Luego, } A = 2\pi \int_1^4 x ds = \pi \int_1^4 (x^2 + 1) dx = 24\pi.$$

PROBLEMA 4 Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar, alrededor del eje X, el lazo de la curva

$$9ay^2 = x(3a - x)^2 .$$

SOLUCION Cuando x varía desde 0 hasta 3a se obtiene el arco superior de la curva. Diferenciando implícitamente

$$18ay \frac{dy}{dx} = (3a - x)^2 - 2x(3a - x)$$

de donde,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)(a - x)}{6ay}$$

$$\begin{aligned} y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \frac{1}{6a} \sqrt{36 a^2 y^2 + (3a - x)^2 (a - x)^2} dx \\ &= \frac{(3a - x)(a + x)}{6a} dx \quad (\text{empleando } 9ay^2 = x(3a - x)^2) \end{aligned}$$

Luego
$$A = 2\pi \int_0^a \frac{(3a - x)(a + x)}{6a} dx = 3\pi a^2 .$$

PROBLEMA 5 Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al rotar alrededor del eje X la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} .$$

SOLUCION

Tenemos
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} , \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} , \quad dx = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx$$

(usando $a^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$)

Cuando x varía desde 0 hasta a se tiene el arco de la curva que se encuentra en el primer cuadrante. Por simetría se tiene entonces

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^a y ds = 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx \\ &= -\frac{6}{5} \pi a^{1/3} (a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2} \Big|_0^a = \frac{6}{5} \pi a^2 . \end{aligned}$$

Luego
$$A = \frac{12}{5} \pi a^2 .$$

PROBLEMA 6 Encontrar el área del elipsoide de revolución engendrado por rotación, alrededor del eje X, de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

SOLUCION Hagamos $x = a \cos t$. Entonces sustituyendo en la ecuación de la elipse se obtiene $y = b \sin t$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Cuando t varía desde 0 hasta π , se obtiene el arco superior de la elipse. Luego el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= 2\pi b \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du, \quad \text{haciendo } u = \cos t, \\ &= 2\pi b \sqrt{a^2 - b^2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - u^2} du \\ &= 2\pi b \sqrt{a^2 - b^2} \left[\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a^2}{a^2 - b^2} \arcsen \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right] \\ &= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsen e, \quad \text{donde } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

PROBLEMA 7 El arco de la parábola cúbica $9y = x^3$ entre $x=0$ y $x=3$ se rota alrededor del eje X. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada.

SOLUCION

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^3 y ds = 2\pi \int_0^3 \frac{x^3}{9} \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \frac{2\pi}{27} \int_0^3 x^3 \sqrt{9+x^4} dx \\ &= \frac{2\pi}{27} \left. \frac{1}{6} (9+x^4)^{3/2} \right|_0^3 = \frac{\pi}{3} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

PROBLEMA 8 Probar que el área de la superficie de revolución obtenida al rotar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, alrededor del eje Y, es $A = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$, donde $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

SOLUCION Hagamos $x = a \cos t$. De la ecuación de la elipse se obtiene $y = b \sin t$, y por lo tanto

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt.$$

Cuando t varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, se obtiene el arco de la elipse ubicado en el primer cuadrante.

Luego por simetría

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^{\pi/2} x dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} a \cos t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} du, \quad (\text{haciendo } u = \sin t) \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \left[\frac{u}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} + \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)} \ln \left(u + \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + u^2} \right) \right]_0^1 \\ &= \pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right), \end{aligned}$$

de donde $A = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$.

PROBLEMA 9 Encontrar el área de la superficie obtenida por rotación de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ alrededor del eje X desde $x = 0$ hasta $x = a$.

SOLUCION

Tenemos $\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$, $ds = \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{x}{a}\right)^2} dx = \cosh \frac{x}{a} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } A &= 2\pi \int_0^a a \cosh^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_0^a \frac{1}{2} (\cosh \frac{2x}{a} + 1) dx \\ &= \pi a \left[\frac{a}{2} \sinh \frac{2x}{a} + x \right]_0^a = \pi a^2 \left(\frac{\sinh 2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4). \end{aligned}$$

PROBLEMA 10 Calcular el área de la superficie de un **toro** formado al rotar el círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ alrededor del eje X ($b > a$).

SOLUCION Tenemos

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Calculamos el área A_1 de la superficie engendrada por rotación del arco PQ.

El arco PQ es definido por la ecuación

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

y por lo tanto

$$A_1 = 2\pi \int_0^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (1)$$

Calculamos el área A_2 de la superficie engendrada por rotación del arco RQ. El arco RQ es definido por la ecuación

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

Luego

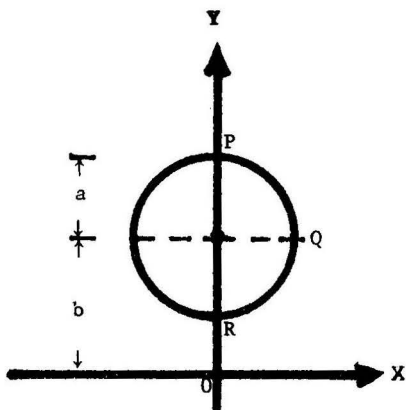
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad y$$

$$A_2 = 2\pi \int_0^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (2)$$

Luego, si A es el área de la superficie del toro, por simetría, tenemos que

$$A = 2(A_1 + A_2) = 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [\text{sumando (1) y (2)}]$$

$$= 8\pi ab \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4\pi^2 ab.$$



PROBLEMA 11 Calcular el área de la superficie obtenida al rotar un arco completo de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{sen} t) \\ y &= a(1 - \operatorname{cos} t), \end{aligned}$$

alrededor de la tangente a la cicloide en su punto más alto.

SOLUCION Cuando t varía desde 0 hasta 2π se obtiene un arco completo de la cicloide. El punto más alto de la cicloide en este intervalo

ocurre cuando $t = \pi$, y, puesto que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1 - \operatorname{cos} t)}$, la pendiente de la tangente es $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = 0$.

Luego, $y = 2a$ es la ecuación de la tangente.

La distancia del punto (x, y) de la cicloide a la recta tangente es $2a - y$, y por consiguiente el área pedida es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2a - y) ds = 2\pi a \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{cos} t) \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 (1 - \operatorname{cos} t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \operatorname{cos}^2 \frac{t}{2}\right) 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = -\frac{16 \pi a^2}{3} \operatorname{cos}^3 \frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{32 \pi a^2}{3} \end{aligned}$$

PROBLEMA 12 Calcular el área de la superficie obtenida al rotar, alrededor del eje polar, la lemniscata $\rho^2 = a^2 \operatorname{cos} 2\theta$.

SOLUCION Cuando θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{4}$ se obtiene el arco de la curva ubicado en el primer cuadrante. Tenemos $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \frac{a^2}{\rho} d\theta \quad (\text{usando } \rho^2 = a^2 \operatorname{cos} 2\theta)$$

Por simetría, si A es el área buscada tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \operatorname{sen} \theta ds = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= -2\pi a^2 \operatorname{cos} \theta \Bigg|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego $A = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$.

PROBLEMA 13 Calcular el área de la superficie generada por rotación, alrededor del eje X, del arco de la curva $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = e^t (\operatorname{sen} t + \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),$$

$$ds = \sqrt{2} e^t dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (e^t \cos t) \sqrt{2} e^t dt = 2\sqrt{2} \pi \int_0^{\pi/2} e^{2t} \cos t dt \\ &= 2\sqrt{2} \pi \left[\frac{e^{2t}}{5} (\operatorname{sen} t + 2 \cos t) \right]_0^{\pi/2} \quad (\text{integrando por partes}) \\ &= \frac{2\sqrt{2} \pi}{5} (e^\pi - 2). \end{aligned}$$