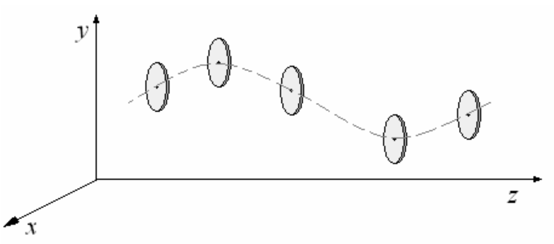
CAPÍTULO 7. Cuerpo rígido

INTRODUCCION
En el capitulo anterior estudiamos el movimiento de un sistema de partículas. Un caso especial importante de estos sistemas es aquel en que la distancia entre dos partículas cualesquiera permanece constante en el tiempo, esto es un CUERPO RIGIDO.
A pesar que no existen cuerpos que sean estrictamente rígidos, todos los cuerpos pueden ser deformados, sin embargo el modelo del cuerpo rígido es útil en muchos casos en que la deformación es despreciable.
La descripción cinemática y dinámica de un cuerpo extenso aunque este sea rígido en un movimiento en tres dimensiones matemáticamente es muy complejo y es tratado en libros avanzados de dinámica. Es complejo porque un cuerpo tiene seis grados de libertad; su movimiento involucra traslación a lo largo de tres ejes perpendiculares y rotación alrededor de cada uno de estos ejes. No llegaremos a hacer un tratamiento general directo, pero si desarrollaremos el movimiento del cuerpo rígido en dos dimensiones.

MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO
En esta parte expondremos algunos tipos de movimiento de los cuerpos rígidos.

TRASLACION.
Por traslación entendemos al movimiento en el que lodos los puntos del cuerpo se mueven en la misma dirección, con la misma velocidad y la misma aceleración en cada instante.



Por la definición de centro de masa, tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Donde M es la masa total del cuerpo rígido y

$$M \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i$$

Diferenciando dos veces

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} = \sum m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

La suma de las fuerzas que actúan sobre las n partículas determinan la aceleración del centro de masa.

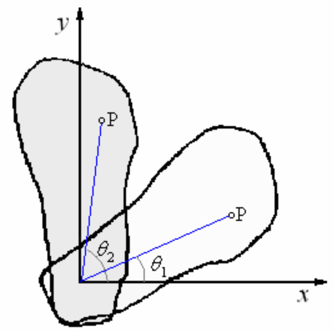
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

Tal como se mostró para un sistema de partículas, las fuerzas internas se anulan de pares, de forma que solamente importarán las fuerzas externas tal que

$$M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}$$

"El movimiento de traslación del cuerpo rígido es como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masa y las fuerzas externas actuaran sobre él".
Todo el estudio que hemos lecho anteriormente para la partícula corresponde a la traslación de un cuerpo rígido. No importa ni la forma, ni el tamaño.

ROTACIÓN.
Es el movimiento en que uno de los puntos se considera fijo.
Sí se considera fijo un punto, el único movimiento posible es aquel en el que cada uno de los otros puntos se mueve en la superficie de una esfera cuyo radio es la distancia del punto móvil al punto fijo.
Si se consideran dos puntos fijos, el único movimiento posible es aquel en que todos los puntos con excepción de aquellos que se encuentran sobre la línea que une los dos puntos fijos, conocida como EJE, se mueven en circunferencias alrededor de éste.



Cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser considerado como una combinación de traslación y rotación.

En los capítulos anteriores ya hemos profundizado bastante sobre movimiento de traslación estudiaremos aquí el movimiento de rotación alrededor de un eje y el movimiento de rotación traslación.

CANT1DAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

La cantidad de movimiento angular de una partícula respecto a un punto es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

En coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\hat{r}\ ,\ \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}$$

$$\vec{L} = r\hat{r} \times m\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}\right)$$

$$\vec{L} = mr^2\hat{r}\omega \times \hat{t}$$

$\hat{r} \times \hat{t}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Si consideramos al cuerpo rígido como *n* partículas que giran alrededor de un eje, la cantidad de movimiento angular de éste será la suma de la cantidad de movimiento angular de cada una de las partículas.

$$\vec{L}_{total} = m_1 r_1^2\vec{\omega} + m_2 r_2^2\vec{\omega} + \ldots\ldots + m_n r_n^2\vec{\omega}$$

$$= \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots + m_n r_n^2\right)\vec{\omega}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\vec{\omega}$$

La cantidad entre paréntesis es el MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO RÍGIDO alrededor de un eje.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Es importante darse cuenta que el momento de inercia depende de la distribución de la masa del cuerpo.

En el caso de un cuerpo rígido continuo, los m_i tienden a dm y

$\sum$ se transforma en $\int_M$, de aquí:

$$I = \int_M r^2 dm$$

Como $m = \rho V$, donde ρ es la densidad y *V* el volumen del cuerpo:

$$dm = \rho dV$$

Tenemos: $I = \int_V \rho r^2 dV$

Para muchos cuerpos de forma geométrica simple ésta integral puede evaluarse fácilmente.

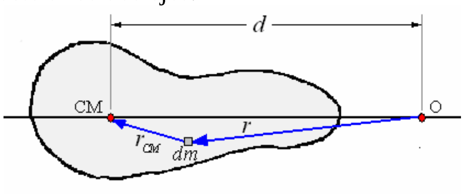
Dos teoremas que simplifican los cálculos del momento de inercia son:

I) El teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

“El momento de inercia del cuerpo respecto a un eje es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masa es el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los ejes”.

$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

Demostración. La figura siguiente representa la sección de un cuerpo en el plano del papel, CM es el eje normal al plano del papel a través del centro de masa y O es un eje paralelo. Escogiendo un elemento diferencial de masa dm , escribamos la expresión para los momentos de inercia con respecto a los dos ejes.



$$I_{CM} = \int_M r_{CM}^2 dm \quad I_0 = \int_M r^2 dm$$

usando la ley de los cosenos, obtenemos:

$$r^2 = r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta$$

reemplazando

$$I_0 = \int_M \left(r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta\right)dm$$

$$I_0 = \int_M r_{CM}^2 dm + d^2\int_M dm - 2d\int_M r_{CM}\cos\theta dm$$

El primer término

$$\int_M r_{CM}^2 dm = I_{CM}$$

El segundo término

$$d^2\int_M dm = Md^2$$

El tercer término es cero porque es la suma en todo el cuerpo d los productos del elemento de masa y sus distancias al eje a través del centro de masa, de aquí:

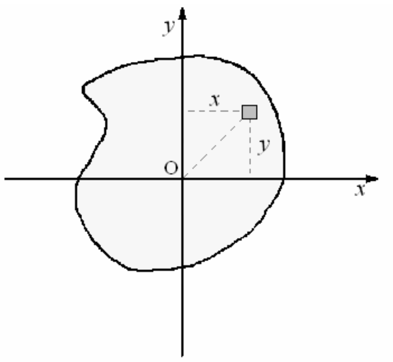
$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

II. El teorema de la figura plana.

El momento de inercia de una figura plana con respecto a un eje perpendicular a la misma es igual a la suma de los momentos de inercia de la figura plana con respecto a dos ejes rectangulares en el plano de la figura los cuales se intersecan con el eje dado

Demostración:

En la figura siguiente el eje *z* pasa por O perpendicular al piano *y*. Elegimos un elemento diferencial de masa *dm* y escribimos los momentos de inercia de la figura para cada uno de los tres ejes.



$$I_x = \int_M y^2 dm\ ,\ I_y = \int_M x^2 dm\ ,\ I_z = \int_M r^2 dm$$

con $r^2 = x^2 + y^2$

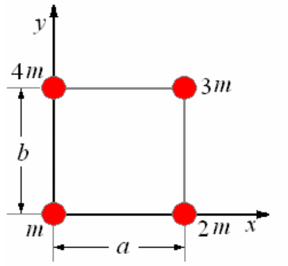
$$\int_M r^2 dm = \int_M \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$= \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Ejemplo 1. A continuación evaluaremos los momentos de inercia algunos cuerpos simples.

a) Hallar el momento de inercia del sistema mostrado en la figura, las masas son puntuales unidas por varillas rígidas de masa despreciable.



Solución.

Momento de inercia respecto al eje *x*.

$$I_x = \sum y_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(0)^2 + 3m(b)^2 + 4m(b)^2$$

$$= 7mb^2$$

Momento de inercia respecto al eje *y*.

$$I_y = \sum x_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m(a)^2 + 4m(0)^2$$

$$= 5ma^2$$

Momento de inercia respecto al eje *z*.

$$I_z = \sum r_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m\left(a^2 + b^2\right) + 4m(b)^2$$

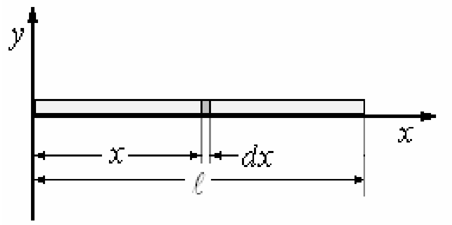
$$= 7mb^2 + 5ma^2$$

Aquí comprobamos

$$I_z = I_x + I_y$$

b) Momento de inercia de una varilla delgada rígida de longitud ℓ y masa *m*, con respecto a un extremo y con respecto al centro de masa.

Solución.



Tomemos un elemento diferencial *dx*, cuya masa es:

$$dm = \frac{M}{\ell} dx$$

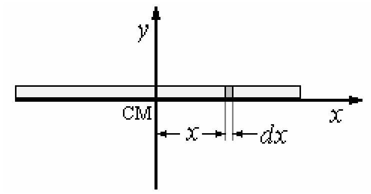
El momento de Inercia de la varilla es:

$$I_O = \int_M x^2 dm = \int_0^\ell x^2 \frac{M}{\ell} dx$$

$$= \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_0^\ell$$

$$= \frac{1}{3} M\ell^3$$

El momento de inercia de la varilla con respecto al centro de masa



$$I_{CM} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

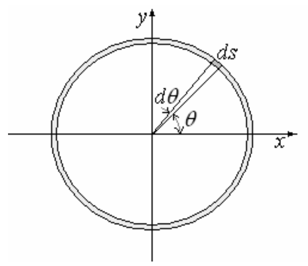
$$= \frac{1}{12} M\ell^3$$

Aquí comprobamos:

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

c) Momento de inercia un anillo de masa *M* y radio *R*, en el plano *xy*, Con respecto a los ejes *x, y, z.*

Solución.



La masa del elemento diferencial $ds = Rd\theta$ es:

$$dm = \frac{M}{2\pi R} ds = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

El momento de inercia del anillo con respecto al eje z es:

$$I_z = \int_M R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = mR^2$$

Por el teorema de la figura plana

$$I_z = I_x + I_y$$

Por simetría

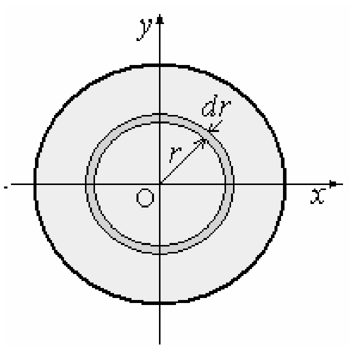
$$I_x = I_y$$

Luego

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

d) El momento de inercia de un disco de radio R y masa M con respecto al eje perpendicular que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos como elemento diferencial al anillo de radio r y ancho dr, su masa es:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

El momento de inercia de este anillo con respecto al eje perpendicular que pasa por O es

$$dI_O = r^2 dm = r^2 \frac{2M}{R^2} r dr$$

$$= \frac{2M}{R^2} r^3 dr$$

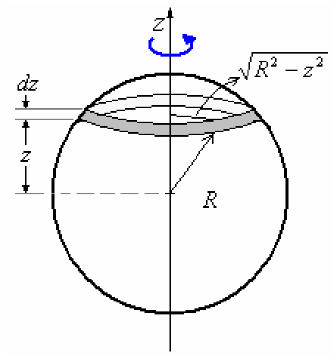
El momento de inercia del disco es:

$$I_O = \int dI_O = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2} MR^2$$

e) El momento de inercia de una esfera con respecto a un eje que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos la esfera como una serie de discos. Tomemos un disco diferencial como se muestra en la figura, su radio es $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, su espesor dz.

La masa del disco es:

$$dm = \frac{M}{V} \pi r^2 dz = \frac{M}{V} \pi \left(R^2 - z^2\right) dz$$

M es la masa de la esfera y $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

El momento de inercia del disco con respecto al eje z es:

$$dI_z = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{V} \pi \left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

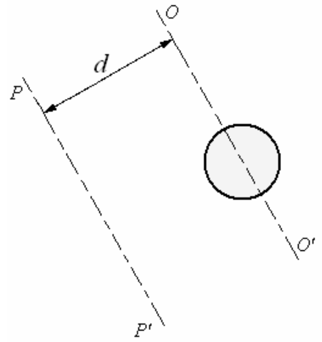
El momento de inercia de la esfera lo encontramos integrando esta expresión desde z = - R a z = R.

$$I_z = \int dI_z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\frac{M}{V} \pi \left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$$= \frac{M}{V} \pi \int_0^R \left(R^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{8}{15}\frac{\pi M R^5}{V}$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

Para encontrar el momento de inercia con respecto a un eje arbitrario como se muestra en la figura siguiente aplicamos el teorema de Steiner.



$$I_P = I_O + Md^2 = \frac{2}{5} MR^2 + Md^2$$

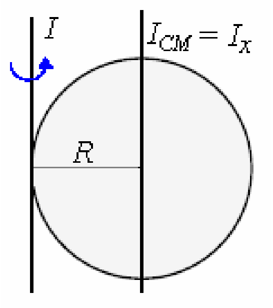
$$I_P = Md^2\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{d}\right)^2\right]$$

En el caso en que $R << d$ podemos considera como si fuera una masa puntual y el momento de inercia se reduce a:

$$I_O = Md^2$$

Ejemplo 2. Hallar el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R* que gira alrededor de un eje paralelo a un diámetro y que pasa por el borde del disco.

Solución.



Por el teorema de las figuras planas
$I_z = I_x + I_y$;

Además por simetría
$I_x = I_y$,

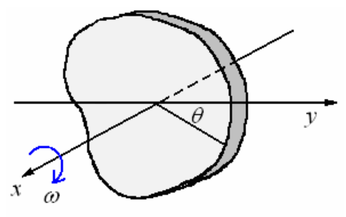
Por tanto
$I_x = I_z/2 = ¼ MR^2$

Aplicando el teorema de Steiner

$I = ¼ MR^2 + MR^2$
$= 5/4 MR^2$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA ROTACION

En esta sección vamos a analizar el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo en el espacio.



El cuerpo gira en torno al eje *x*. Si $\theta = \theta(t)$ es el desplazamiento angular del punto del cuerpo desde la línea referencial, la velocidad angular del cuerpo es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Como cada punto del cuerpo gira a la misma velocidad angular ω, el desplazamiento $\theta(t)$ de cualquier punto describe el desplazamiento del cuerpo como un todo.

Para el sistema de partículas vimos que la suma de los torques producidos por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Esto es válido también para el cuerpo rígido, donde L es la cantidad de movimiento angular can respecto al eje *x* de la figura anterior.

Como $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)$

Siendo *I* el momento de inercia del cuerpo en torno al eje dado, es constante en el tiempo y

$$\vec{\tau} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

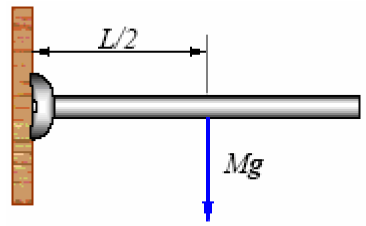
Como $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$, aceleración angular del cuerpo

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Esta expresión tiene similitud a la ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ejemplo 3. Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M*, que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.



Solución.

Como el torque de la fuerza en la bisagra es cero, se puede calcular el torque en torno a la bisagra producido por la otra fuerza externa que actúa sobre la barra, que es su peso, suponiendo que la barra es homogénea y que el peso actúa en su centro geométrico. Entonces:

$$\tau = rMg = \frac{1}{2}LMg$$

Como $\tau = I\alpha$, y el momento de inercia de la barra es $I = \frac{1}{3}ML^2$.

Se tiene: $I\alpha = \frac{1}{2}LMg$

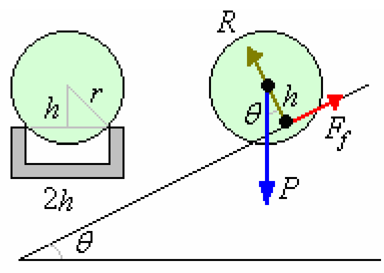
$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}LMg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación $a_t = \alpha L$.

Reemplazando α :

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Ejemplo 4. Una esfera rueda sobre una barra, con sección en forma de U, inclinada. Determinar la aceleración.



Solución.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso, *P*, la reacción normal del plano, *R*, y la fuerza de rozamiento F_f.

Como la reacción *R* y el rozamiento F_f están aplicados en el eje instantáneo de rotación no realizan ningún torque, sólo el peso:

$\tau = hmg\,\text{sen}\,\theta$, siendo $h = \left(r^2 - b^2\right)^{1/2}$

El momento de inercia de la esfera con relación al eje instantáneo de rotación es

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mh^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

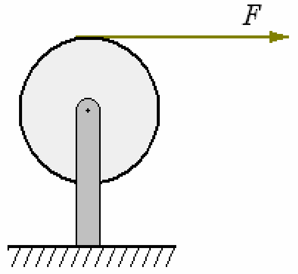
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{hmg\text{sen}\theta}{\left(2mr^2/5 + mh^2\right)} = \frac{hg\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)}$$

la aceleración lineal será: $a = \alpha\, h$

$$a = \frac{h^2 g\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)} = \frac{g\text{sen}\theta}{\left(2r^2/5h^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{5\left(r^2 - b^2\right)gh^2\text{sen}\theta}{\left(7r^2 - 5b^2\right)}$$

Ejemplo 5. Se tiene un disco de masa *M* y radio *R*, que pueda girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda alrededor del disco, se tira la cuerda con una fuerza *F.* Si el disco está inicialmente en reposos ¿Cuál es su velocidad al tiempo *t*?



Solución.

El momento de inercia del disco con respecto al eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

La dirección de la cuerda siempre es tangente al disco por lo que el torque aplicado es:

$\tau = FR$

Como $\tau = I\alpha$

Tenemos $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

Reemplazando

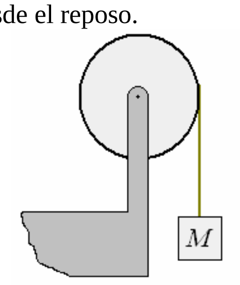
$$\alpha = \frac{FR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

Siendo α constante $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Como $\omega_0 = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \alpha t = \dfrac{2F}{MR}t$

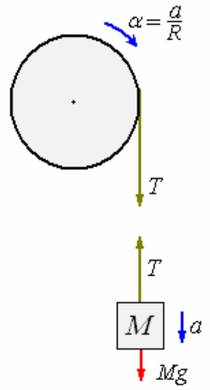
Ejemplo 6. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*.

Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo.



Solución.

La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre.



Aplicando la segunda ley de Newton a la masa M

$Mg - T = Ma$ (1)

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación al disco

$TR = I\alpha$,

como $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{a}{R}$

$TR = I\dfrac{a}{R}$ o $TR^2 = Ia$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$a = \frac{M}{M + I/R^2} g,$$

$$T = \frac{I/R^2}{M + I/R^2} Mg$$

Siendo un movimiento con aceleración constante

$v^2 = v_0^2 + 2as$

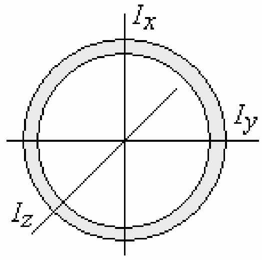
Conocemos: a, $v_0 = 0$, $s = h$:

$$v^2 = \frac{2Mg}{M + I/R^2} h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg}{M + I/R^2} h}$$

Ejemplo 7. Un anillo de 5 cm de radio, grosor despreciable y densidad 1,6 g/cm, se pone en rotación alrededor de un diámetro cuando se le comunica un momento angular de 7900 g cm^2/s.
a) Hallar la expresión analítica y el valor numérico del momento de inercia respecto del eje de giro.
b) ¿Con qué velocidad angular empieza a girar?
c) Si el rozamiento con el aire y los pivotes origina un par de fuerzas cuyo torque es de 50 dina cm, ¿cuál será la ecuación del movimiento que efectúa el anillo?, ¿cuánto tiempo tarda en pararse?
(Nota 1 N = 10^5 dinas)

Solución.



a) Por el teorema de las figuras planas, tenemos que:
$I_z = I_x + I_y$;
Además por simetría
$I_x = I_y$,
Por tanto

$$I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2}\rho LR^2 = \frac{1}{2}\rho(2\pi R)R^2 = \pi\rho R^3$$

$$= \pi\left(1{,}6.10^{-1}\right)\left(0{,}05\right)^3 = 6{,}28\text{x}10^{-5} \text{ kg m}^2$$

b) Al comunicarle un momento angular
L = 7,9 x10^{-4} kg m^2/s,

$$\omega_0 = \frac{L}{I} = \frac{7{,}9\times10^{-4}}{6{,}28\times10^{-5}}$$

= 12,58 rad/s

c) τ = 50 dina cm = 50x10^{-5} Nx10^{-2} m
= 5x10^{-6} N m

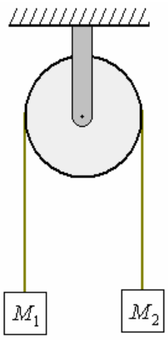
Por lo tanto la ecuación del movimiento en términos angulares será:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 12{,}6t - 0{,}0398t^2, \text{ y}$$

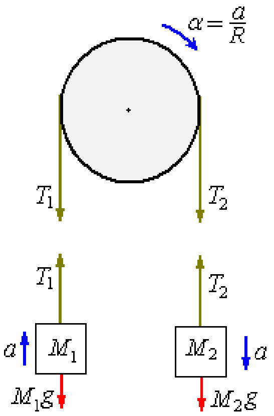
$$\omega = 12{,}6 - 0{,}079t$$

Siendo ω = 0 para t = 158 s.

Ejemplo 8. Maquina de atwood tomando en cuenta la polea.



La polea es un disco de masa M y radio R. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes de la máquina de atwood.



Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partes.
Masa M_1:

$$T_1 - M_1 g = M_1 a \qquad (1)$$

Masa M_2:

$$M_2 g - T_2 = M_2 a \qquad (2)$$

Polea:

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa \qquad (3)$$

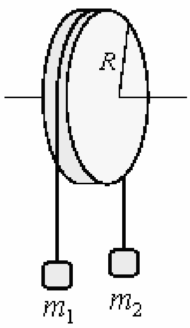
Resolviendo (1), (2) y (3), obtenemos:

$$T_1 = M_1(g + a),$$

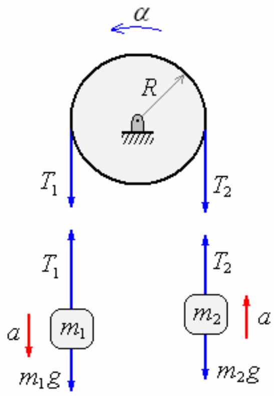
$$T_2 = M_2(g - a) \text{ y}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1 + M/2)}g$$

Ejemplo 9. Una polea homogénea de radio R, masa M y momento de inercia I, gira alrededor de su eje, debido a la acción de dos masas m_1 y m_2.
R = 0,3 m, m_1 =15 kg, m_2 = 10 kg, M = 20 kg, I =18 kg m^2.
Calcular:
a) La aceleración angular de la polea.
b) Las tensiones de las cuerdas.
c) La tensión del soporte que fija el sistema al techo



Solución.
a) Vamos a suponer que el sistema acelera hacia el lado de la masa mayor M.



Planteando la segunda ley de Newton para cada masa:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a\ ,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Para la polea:

$$\sum\tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

Como el hilo no desliza,

$$a = \alpha R$$

Por lo tanto tenemos tres ecuaciones:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a\ ,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a\ ,$$

$$T_1 - T_2 = I\frac{a}{R^2}$$

Que sumadas dan lugar a:
$(m_1 - m_2)\, g = a(m_1 + m_2 + I/R^2)$.
Por lo tanto a vale:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}g = \frac{5}{25 + \dfrac{18}{0{,}3^2}}9{,}8$$

$$= 0{,}22 \text{ m/s}^2$$

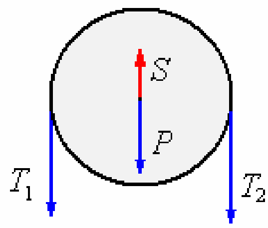
$$\text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}22}{0{,}3} = 0{,}73 \text{ rad/s}^2$$

b) De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = 15(g - a) = 143{,}7 \text{ N.}$$

$$T_2 = m_2(g + a) = 100{,}2 \text{ N.}$$

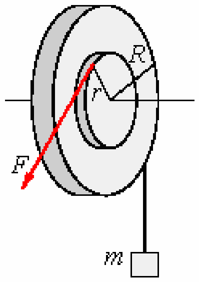
c) Considerando todas las fuerzas que actúan sobre la polea, que debe estar en equilibrio:



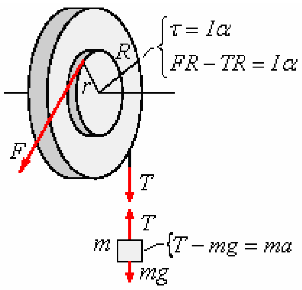
$$\sum \vec{F} = 0$$

$S = P + T_1 + T_2$ = 20 x 9,8 + 146,67 + 102,22
= 445 N

Ejemplo 10. La figura representa un cilindro macizo y homogéneo de radio R = 20 cm y masa M = 20 kg. A su periferia va arrollado un hilo ideal de cuyo extremo libre cuelga una masa m = 8 kg. Por una hendidura muy fina se le arrolla otro hilo ideal a una distancia del eje horizontal r = 10 cm, a cuyo extremo libre se le aplica una fuerza constante F = 200 N. Calcular:
a) Momento de inercia del cilindro respecto a un eje que coincida con una generatriz.
b) Aceleración con que sube la masa m.
c) Aceleración angular del cilindro.
d) Tensión del hilo que sostiene la masa.



Solución.
a) Aplicando el teorema de Steiner,
$I = ½\, MR^2 + MR^2 = 3/2\, MR^2$



b) Podemos plantear dos ecuaciones:
$T - mg = ma$ y

$$Fr - TR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

Que conducen a:

$$Fr - mgR = a\left(mR + \frac{1}{2}MR\right).$$

Por lo tanto la aceleración a vale:

$$a = \frac{Fr - mgR}{mR + \frac{1}{2}mR} = \frac{20 - 15{,}68}{1{,}6 + 2}$$

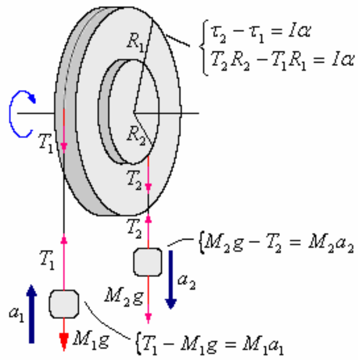
$= 1{,}2 \text{ m / s}^2$

c) $\alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{1{,}2}{0{,}2}$

$= 6 \text{ rad/s}^2$.

d) $T = mg + ma = 8\,(9{,}8 + 1{,}2)$
$= 88$ N.

Ejemplo 11. Dos poleas cuyos radios son 1 m y 0,3 m, están acopladas pegada una a la otra en un plano vertical, formando un bloque que gira alrededor de su eje de rotación común. De la garganta de la polea grande pende una masa de 20 kg y de la garganta de la polea pequeña pende otra masa de 100 kg que tiende a hacer girar a las poleas en sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas es de 10 kg m^2. Al dejar el sistema en libertad, se pone en movimiento espontáneamente. Se pide:
a) ¿En qué sentido se mueven las poleas?
b) Valor de la aceleración con que se mueve cada una.
c) Aceleración angular de las poleas.
d) Tensión de la cuerda que sostiene la masa de 100 kg cuando el sistema está en movimiento.
Solución.



a) Cuando las poleas están inicialmente en reposo, los pesos coinciden con las tensiones.
Por tanto T_1 = 200 N, y T_2 = 1000 N.
El momento que ejerce T_1 valdrá
$\tau_1 = T_1R_1 = 200$ Nm
El que ejerce T_2 valdrá
$\tau_2 = T_2R_2 = 300$ N m.
Por tanto, al ser el momento de la fuerza T_2 mayor, la polea girará de modo que la masa M_1suba.
b) y c) Planteando la ecuación fundamental de la dinámica a cada masa y a la polea, tendremos:

$$T_1 - M_1g = M_1a_1$$
$$\Rightarrow T_1 - M_1g = M_1\alpha R_1 \qquad (1)$$
$$M_2g - T_2 = M_2a_2$$
$$\Rightarrow M_2g - T_2 = M_2\alpha R_2 \qquad (2)$$
$$\tau_2 - \tau_1 = I\alpha$$
$$\Rightarrow T_2R_2 - T_1R_1 = I\alpha \qquad (3)$$

De las tres ecuaciones obtenemos α :

$$\alpha = \frac{M_2gR_2 - M_1gR_1}{M_2R_2^2 + M_1R_1^2 + I}$$

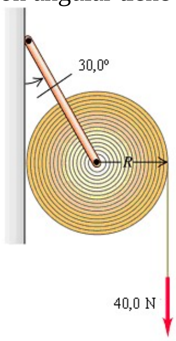
$$= \frac{30 - 20}{20 + 9 + 10}g = 2{,}51 \text{ rad / s}^2.$$

La aceleración de cada masa será:
$a_1 = \alpha R_1 = 2{,}51 \text{ m/s}^2$,
$a_2 = \alpha R_2 = 0{,}75 \text{ m/s}^2$
d) $T_2 = M_2g - M_2\alpha R_2 = 904{,}7$ N

Ejemplo 12. Un rollo de 16,0 kg de papel con radio R = 18,0 cm descansa contra la pared sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo. La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de 0,260 kg. m^2. El otro extremo del soporte está unido mediante una bisagra sin fricción a la pared de modo que el soporte forma un ángulo de 30,0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es $\mu_k = 0{,}25$. Se aplica una fuerza vertical constante F = 40,0 N al papel, que se desenrolla.

a) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse?

b) ¿Que aceleración angular tiene el rollo?



Solución.

En el punto de contacto, la pared ejerce una fuerza F_f de la fricción dirigida hacia abajo y una fuerza normal N dirigida a la derecha. Esto es una situación donde es cero la fuerza neta en el rodillo, pero el torque neto no es cero.

La suma de fuerzas verticales

$$F_{\text{var}} \cos\theta = F_f + W + F, \quad F_f = \mu_k N,$$

Las fuerzas horizontales

$$F_{\text{var}} \text{sen}\theta = N \ .$$

De aquí tenemos:

$$F_{\text{var}} \cos\theta = \mu_k N + F + W$$

$$F_{\text{var}} \text{sen}\theta = N.$$

a) Eliminando N y resolviendo para F_{var} da

$$F_{\text{var}} = \frac{W+F}{\cos\theta - \mu_k \sin\theta}$$

$$= \frac{40{,}0 + (16{,}0)\,(9{,}80)}{\cos 30° - (0{,}25)\text{sen}30°} = 266 \text{ N}$$

b) Con respecto al centro del rodillo, la barra y la fuerza normal ejercen el torque cero.

La magnitud del torque neto es

$(F - F_f)R$, y $F_f = \mu_k N$

Puede calcularse reemplazando el valor encontrado para F_{var} en cualquiera de las relaciones anteriores;

$$F_f = \mu_k F_{\text{var}} \text{sen}\theta = 33{,}2 \text{ N} .$$

Luego,

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{(40{,}0 - 31{,}54)(18{,}0 \times 10^{-2})}{(0{,}260)}.$$

$$= 4{,}71 \,\text{rad/s}^2$$

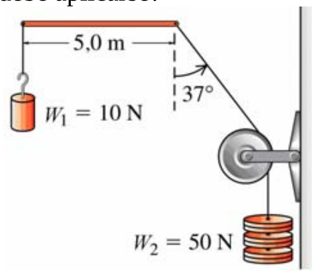
Ejemplo 13 Se debe aplicar una sola fuerza adicional a la barra de la figura para mantenerla en equilibrio en la posición mostrada. Puede despreciarse el peso de la barra.

a) Calcule las componentes vertical y horizontal de la fuerza requerida.

b) ¿Qué ángulo debe formar ésta fuerza con la barra?

c) ¿Qué magnitud debe tener?

d) ¿Dónde debe aplicarse?



Solución.

a) La tensión en el resorte es $W_2 = 50 \text{ N},$ y la fuerza horizontal sobre la barra debe equilibrar la componente horizontal de la fuerza que el resorte ejerce sobre la barra, y es igual a $(50 \text{ N})\,\text{sen}\,37° = 30 \text{ N},$ a la izquierda en la figura.

La fuerza vertical debe ser

$$50 \cos 37° + 10 = 50 \text{ N}, \text{ arriba}$$

b)

$$\arctan\left(\frac{50 \text{ N}}{30 \text{ N}}\right) = 59°$$

c)

$$\sqrt{(30 \text{ N})^2 + (50 \text{ N})^2} = 58 \text{ N}.$$

d) Tomando torques alrededor (y midiendo la distancia de) del extremo izquierdo

$$50\,x = (40)(5{,}0)$$

$$\Rightarrow \ x = 4{,}0 \text{ m}$$

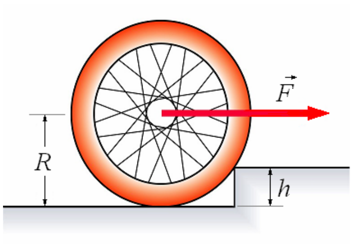
Donde solamente las componentes verticales de las fuerzas ejercen torques.

Ejemplo 14. Imagine que está tratando de subir una rueda de bicicleta de masa m y radio R a una acera de altura h; para ello, aplica una fuerza horizontal F. ¿Qué magnitud mínima de F logra subir la rueda si la fuerza se aplica

a) al centro de la rueda?

b) ¿En la parte superior de la rueda?

c) ¿En cuál caso se requiere menos fuerza?



Solución.
a) Tome los torques respecto a la esquina superior de la acera.

La fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $R-h$ y
el peso actúa en una distancia perpendicular $\sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.

Igualando los torques para encontrar la fuerza necesaria mínima,

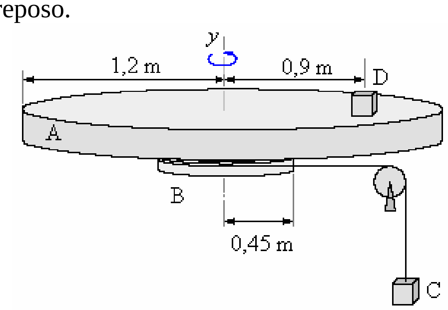
$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}.$$

b) El torque debido a la gravedad es el mismo, pero la fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $2R-h$, tal que la fuerza mínima es

$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{2R-h}.$$

c) Se requiere menos fuerza que cuando la fuerza se aplica en parte alta de la rueda.

Ejemplo 15. Un disco homogéneo A gira alrededor del eje *y* bajo la acción de la masa C unida a una cuerda que pasa por una polea sin peso ni rozamiento enrollada alrededor del tambor cilíndrico macizo B, solidaria del disco A. A éste está unida una masa puntual D, como indica la figura. Las masas A, B, C y D son respectivamente 65, 15, 8 y 4 kg. Se supone que la cuerda permanece siempre horizontal. Calcular:
a) Aceleración angular del disco.
b) Aceleración tangencial de D.
c) Aceleración normal de D, 4 s después de partir del reposo.



Solución.
a) Calculemos en primer lugar el momento de inercia del sistema A-B-D.

$$I = \frac{1}{2}m_A R_A^2 + \frac{1}{2}m_B R_B^2 + \frac{1}{2}m_D R_D^2$$
= 51,56 kg m^2

Aplicando la segunda ley de Newton en la masa C:

$$m_C g - T = m_C a$$
$$8g - T = 8\,\alpha R_A$$

Aplicando la segunda ley de Newton de la rotación en el conjunto giratorio:

$$TR_B = I\alpha$$

Resolviendo el sistema formado:

$$\left.\begin{aligned} 8gR_B - TR_B &= 8\alpha R_B^2 \\ TR_B &= I\alpha \end{aligned}\right\} \quad 8gR_B = 8aR_B^2 + I\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8gR_B}{8R_B^2 + I} = \frac{35,28}{53,18} = 0,66 \text{ rad/s}^2$$

b) $a_0 = \alpha R_0$ = 0,6 m/s^2

c) $\omega_{(4s)} = \alpha\, t$ = 2,65 rad/s

$a_N = \omega^2 R_D$ = 6,34 m/s^2

EQUILIBRIO ESTÁTICO
En el capítulo 5 vimos que para que una partícula estuviera en equilibrio estático era suficiente que La fuerza resultante fuese cero.

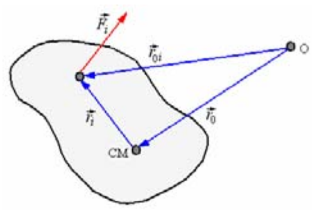
$$\sum \vec{F} = 0$$

Esta condición también, es necesaria para que un cuerpo rígido este en equilibrio, pero no es suficiente que solamente el centro de masa este en reposo, el cuerpo puede girar Es necesario que el momento de: fuerzas o torque con respecto al centro de masa sea nulo.

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación. En muchos de ellos la fuerza de la gravedad ejercida sobre las diversas partes de un cuerpo puede sustituirse por una sola fuerza, el peso total actuando en el centro de gravedad.
Si la aceleración de la gravedad no varía a lo largo del cuerpo, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Ejemplo 16. Demostrar que cuando un cuerpo está en equilibrio y el torque con respecto al centro de masa es cero, el torque con respecto a cualquier punto también es cero.
Solución.



En la figura
$\vec{r}_O$ es el vector del centro de masa a O

$\vec{r}_i$ es el vector del centro de masa al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

$\vec{r}_{Oi}$ es el vector del punto O al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

De la figura vemos:

$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{Oi}$

El torque total alrededor de O es

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_{Oix} \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_O\right) \times \vec{F}_i =$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Como $\vec{r}_O$ es constante

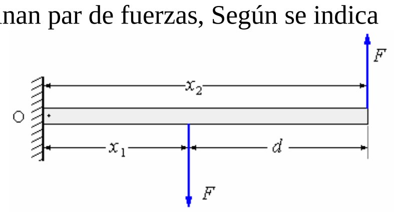
$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Para un cuerpo en equilibrio $\sum \vec{F}_i = 0$

tal que $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM}$

Si $\vec{\tau}_{CM} = 0$, el torque alrededor de cualquier punto debe ser cero y viceversa.

Ejemplo 17. Par de fuerzas. Dos fuerzas iguales y opuestas que actúan en la figura siguiente se denominan par de fuerzas, Según se indica



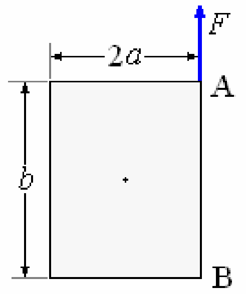
F es el valor de cualquiera de las fuerzas y $d = (x_2 - x_1)$ es la distancia entre ellas.

El momento o torque producido por estas fuerzas con respecto a O es:

$$\tau_O = Fx_2 - Fx_1 = F(x_2 - x_1) = Fd$$

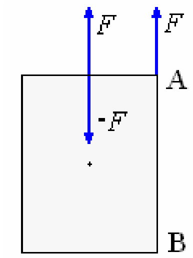
Este resultado no depende de la selección del punto O, el momento producido por un par es el mismo respecto a cualquier punto del espacio.

Ejemplo 18. Una fuerza vertical F que actúa en A. en el sólido rectangular mostrado en la figura, queremos sustituirla por otra cuya línea de acción pasa por el centro de masa más un par de fuerzas que actúen horizontalmente aplicados en A y B.

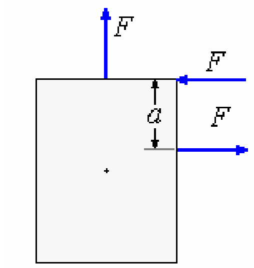


Solución.

a) Sustituir la fuerza vertical dada por otra igual paralela cuya línea de acción pase por el centro de masa.

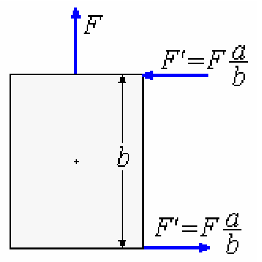


b) Hacer girar el plano del par, hasta desplazarlo hasta la línea A B.



c) Se cambian los módulos de las fuerzas a F' de tal modo que:

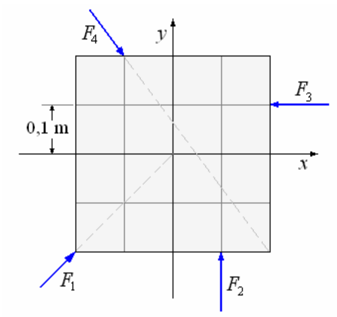
$$F'b = Fa \Rightarrow F' = F\frac{a}{b}$$



Ejemplo 19. Sobre una placa sólida actúan cuatro fuerzas de módulos

F_1 = 28,3 N, F_2 = 60 N, F_3 = 20 N y F_4 = 50 N.

Como se indican en la figura. Hallar la tuerza resultante sobre la placa y determinar su línea de acción.



Solución.
Utilizando el cuadriculado obtenemos:

$\vec{r}_1 = -0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}$,

$\vec{F}_1 = 28,3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + 28,3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{j} = 20\hat{i} + 20\hat{j}$

$\vec{r}_2 = 0,1\hat{i} - 0,2\hat{j}$, $\vec{F}_2 = 60\hat{j}$

$\vec{r}_3 = 0,2\hat{i} + 0,1\hat{j}$, $\vec{F}_3 = -20\hat{i}$

$\vec{r}_4 = -0,1\hat{i} + 0,2\hat{j}$, $\vec{F}_4 = 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{i} - 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{j}$

$= 30\hat{i} - 40\hat{j}$

La fuerza resultante es

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

$= (20 - 20 + 30)\hat{i} + (20 + 50 - 40)\hat{j}$

$= \left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)N$

El torque resultante respecto al centro de masa es la suma de los torques individuales.

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4$

Siendo:

$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$= \left(-0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}\right)\times\left(20\hat{i} + 30\hat{j}\right) = 0$

$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

$= \left(0,1\hat{i} - 0,2\hat{j}\right)\times\left(60\hat{j}\right) = 6\hat{k}$

$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$

$= \left(0,2\hat{i} + 0,1\hat{j}\right)\times\left(-20\hat{j}\right) = 2\hat{k}$

$\vec{\tau}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$

$= \left(-0,1\hat{i} + 0,2\hat{j}\right)\times\left(20\hat{i} - 40\hat{j}\right) = -2\hat{k}$

Reemplazando:

$\vec{\tau} = 6\hat{k}$ Nm

Para determinar la línea de acción de la tuerza, consideremos que el punto de aplicación de la fuerza resultante es:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Tal que

$\vec{\tau} = 6\hat{k} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)\times\left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)$

$= (40x - 30y)\hat{k}$

De aquí:

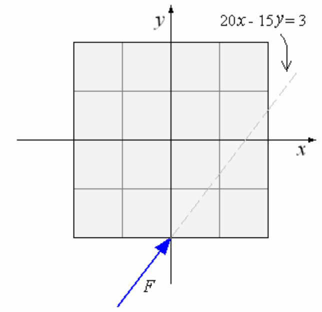
$(40x - 30y) = 6$

$\Rightarrow\ 20x - 15y = 3$

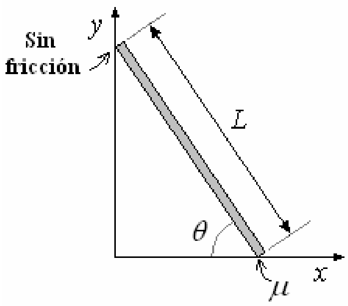
Esta es la ecuación de la línea de acción de la fuerza; si esta tuerza a de situarse en algún punto del borde inferior de la placa, y = - 0,2 m..
Obtenemos

$x = \frac{3 + 15y}{20} = \frac{3 + 15(-0,2)}{20} = 0$

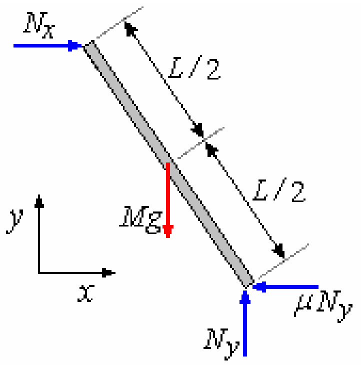
La figura siguiente muestra la fuerza resultante:



Ejemplo 20. Se tiene una escalera dé masa M y largo L apoyada contra la pared .No hay fricción en la pared y el coeficiente de fricción del piso es μ .
¿Cuál es el mínimo ángulo de inclinación para que no comience a resbalar?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre de la escalera.



Condición para que el centro de masa no acelere:

$$\sum F_x = 0 = N_x - \mu N_y ,$$
$$\sum F_y = 0 = Mg - N_y$$

De aquí obtenemos:

$$N_y = Mg ,\ N_x = \mu N_y = \mu Mg$$

Condición de no rotación:
La suma de momentos de fuerza con respecto al centro de masa es cero.

$$N_y \frac{L}{2}\cos\theta - \mu N_y \frac{L}{2}\text{sen}\theta - N_x \frac{L}{2}\text{sen}\theta = 0$$

Reemplazando las fuerzas:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta = 0$$
$$\Rightarrow 2\mu\text{sen}\theta = \cos\theta$$
$$\Rightarrow \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Otra forma:
En lugar de tomar el centro de masa como origen tomemos extremo inferior de la escalera.
Tomando momentos con respecto a este punto.

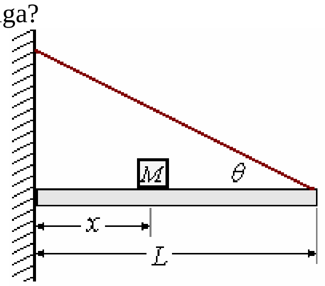
$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - N_x L\text{sen}\theta = 0$$

Reemplazando el valor de N_x:

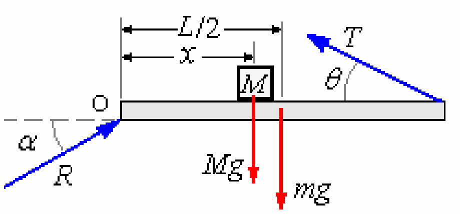
$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu MgL\text{sen}\theta = 0$$
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Obtenemos la misma respuesta porque no importa con respecto a que eje tomemos el torque.

Ejemplo 21. Una viga de masa m se empotra a la pared como se muestra en la figura y se sujeta por medio de un alambre. Si la tensión en el alambre excede T_m el alambre se rompe. ¿Para qué valor de x, el alambre se romperá por una masa M colocada sobre la viga?



Solución.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre del sistema viga-masa.



R es a reacción de la pared.
Como el sistema está en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$
$$\begin{cases} \sum F_x = R\cos\alpha - T\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = R\text{sen}\alpha - T\text{sen}\theta - Mg - mg = 0 \end{cases}$$

Con $\sum \vec{\tau} = 0$ alrededor de cualquier punto.
Tomamos momentos con respecto a O.

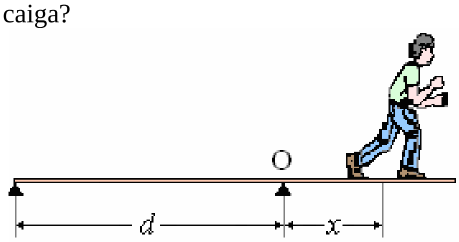
$$TL\text{sen}\theta - mg\frac{L}{2} - Mgx = 0$$

De esta última ecuación obtenemos

$$x = \frac{TL\text{sen}\theta - mg\frac{L}{2}}{Mg}$$

Si $T = T_m$ obtenemos el valor máximo de x.
Si estuviéramos interesados en conocer R, sería mejor tomar momentos con respecto al otro extremo.

Ejemplo 22. Un albañil de 75 kg camina sobre un tablón de 3 m de largo y 80 kg apoyado sobre dos vigas distantes 2 m, tal como indica la figura. ¿Cuál es la máxima distancia x que puede recorrer, sin que caiga?



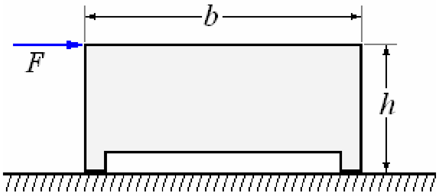
Solución.
Para que el tablón gire, el torque del peso del albañil respecto del punto O, más el torque del peso de la parte de tablón que sobresale, debe ser mayor o igual que el torque del peso de la parte de tablón apoyada entre las vigas:
Llamando λ a la densidad lineal del tablón:

$\lambda = \dfrac{M}{L}$, haciendo d = 2 m, L = longitud del tablón, M = masa tablón, m = masa albañil tendremos:

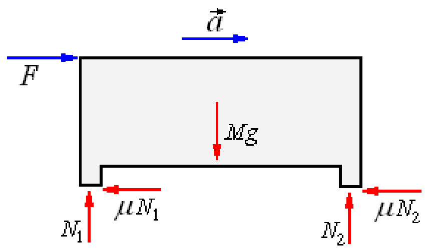
$$mgx + \lambda(L-d)g\frac{(L-d)}{2} = \lambda dg\frac{d}{2}$$
$$\Rightarrow \ mx + \lambda\left[d^2 - (L-d)^2\right] = \frac{M}{2L}\left(2Ld - L^2\right),$$
$$\Rightarrow x = \frac{M}{2m}(2d - L) = 0{,}53 \text{ m}$$

Ejemplo 23. Un baúl de masa M se empuja sobre un suelo con coeficiente de rozamiento
a) Qué fuerza F se ejerce si el baúl se mueve con aceleración constante a?
b) ¿Si el baúl se mueve con velocidad constante?

c) ¿Qué fuerza se necesita para inclinar el baúl?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre del baúl.



a) Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F - \mu_k (N_1 + N_2) Ma\ ,$$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg = 0$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$F = M(a + \mu_k g)$$

b) En el caso que el baúl va con velocidad constante

$a = 0$ y $F = M\mu_k g$

c) Para analizar la inclinación del baúl tenemos que escribir la ecuación de momentos con respecto al borde delantero, sin rotación $\alpha = 0$, luego

$$\sum \tau = -bN_1 - hF + \frac{b}{2}Mg = 0$$

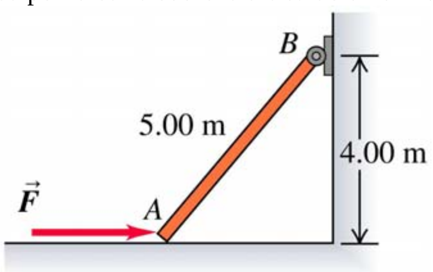
Cuando el baúl empiece a inclinarse, empezará a rotar en el sentido horario y $N_1 = 0$, de aquí:

$$F = \frac{bMg}{2h}$$

y la aceleración:

$$a = \frac{F}{M} - \mu_k g = \left(\frac{b}{2h} - \mu_k\right) g$$

Ejemplo 24. El extremo *A* de la barra *AB* de la figura descansa en una superficie horizontal sin fricción, y el extremo *B* tiene una articulación. Se ejerce en *A* una fuerza horizontal *F* de magnitud 120 N. Desprecie el peso de la barra. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre la articulación en *B*.



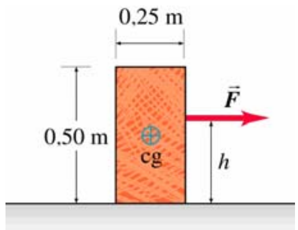
Solución.

La componente horizontal de la fuerza ejercida en la barra por la bisagra debe equilibrar la fuerza $\vec{F}$ aplicada, y así tiene magnitud 120,0 N y es hacia la izquierda.
Tomando torques alrededor del punto *A*

$$(120{,}0\ \text{N})(4{,}00\ \text{m}) + F_V (3{,}00\ \text{m})$$

La componente vertical es – 160 N, el signo menos indica una componente hacia abajo, ejerciendo un torque en una dirección opuesta a la de la componente horizontal.
La fuerza ejercida por la barra en la bisagra es igual en magnitud y contrario en la dirección a la fuerza ejercida por la bisagra en la barra

Ejemplo 25. La caja es arrastrada sobre una superficie horizontal con rapidez constante por una fuerza. El coeficiente de fricción cinética es de 0,35.
a) Calcule la magnitud de *F*.
b) Determine el valor de *h* con el cual la caja comience a volcarse.



Solución.

a) $F = F_f = \mu_k N = \mu_k mg$

$$= (0{,}35)(30{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)$$

$= 103$ N

b) Con respecto al borde delantero de la caja.
El brazo de palanca del peso es

$$\frac{0{,}250}{2} = 0{,}125\ \text{m}$$

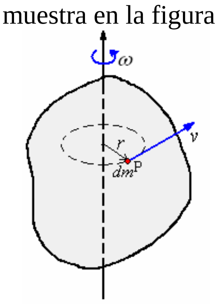
El brazo de palanca *h* de la fuerza aplicada es entonces

$$h = (0{,}125)\frac{mg}{F} = (0{,}125)\frac{1}{\mu_k}$$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}35} = 0{,}36\ \text{m}.$$

TRABAJO Y ENERGIA EN ROTACIÓN.

Consideremos un cuerpo que gira alrededor de un eje tal como se muestra en la figura



La energía cinética de un elemento de masa *dm* que gira a una distancia *r* del eje de rotación es:

$dK = \frac{1}{2}dmv^2$, $v = \omega r$

$\Rightarrow dK = \frac{1}{2}dm\omega^2 r^2$

Integrando.

$K = \int dK = \int_M \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$

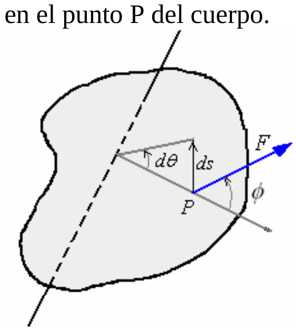
como ω es constante.

$K = \int dK = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2 dm$

El término integral es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación

$K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Para relacionar la energía cinética, al trabajo efectuado sobre el cuerpo por un torque τ .
Supongamos que se aplica una fuerza externa única *F*, que actúa en el punto P del cuerpo.



El trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que el cuerpo gira recorriendo una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$ en un tiempo *dt* es:

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\text{sen}\phi rd\theta$

Como $F\text{sen}\phi r$ es el torque de la fuerza *F* alrededor del origen se puede escribir el trabajo realizado para la rotación infinitesimal como:

$dW = \tau d\theta$

Cuando el cuerpo gira en torno a un eje fijo bajo la acción de un torque. El cambio de su energía cinética durante el intervalo *dt* se puede expresar como:

$dK = \frac{dK}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)dt$

$= I\omega\frac{d\omega}{dt}dt = I\omega\alpha dt = I\alpha\,\omega dt$

Como

$\tau = I\alpha$ y $d\theta = \omega dt$

Obtenemos:

$dK = \tau\, d\theta = dW$

Si se íntegra esta expresión se obtiene el trabajo total

$W_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$

$= \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$

$= K_2 - K_1 = \Delta K$

“E1 trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía cinética de rotación”.

Por la analogía que existe entre las expresiones para el movimiento lineal y el movimiento angular, podemos decir que un torque será conservativo a condición que exista una función potencial $U = U_{(\theta)}$ de tal modo que el trabajo efectuado por $\vec{\tau}$, cuando el cuerpo sufre un desplazamiento angular $(\theta_2 - \theta_1)$ es la diferencia $\left(U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)}\right)$.

Así pues se deduce que:

$U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)} = K_2 - K_1$

ó $K_1 + U_{(\theta_1)} = K_2 + U_{(\theta_2)} = \text{constante}$

Cuando el sistema no es conservativo

$W_{\text{NO CONSERVATIVO}} = \left(K_1 + U_{(\theta_1)}\right) - \left(K_2 + U_{(\theta_2)}\right)$

POTENCIA

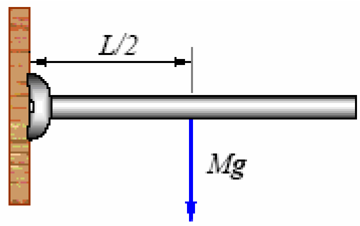
La rapidez con que se realiza este trabajo es:

$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$

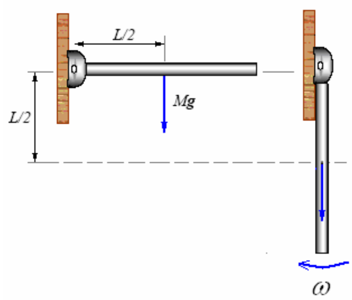
Expresión que corresponde a la **potencia** instantánea.

$P = \tau\omega$

Ejemplo 26. Para la barra giratoria, calcular su rapidez angular y la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.



Solución.



Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene Ki y cuando esta vertical tiene solo K_f, entonces:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

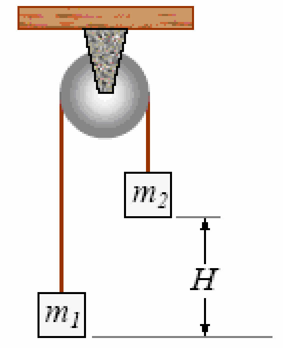
$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es

$$v = 2v_{cm} = \sqrt{3gL}$$

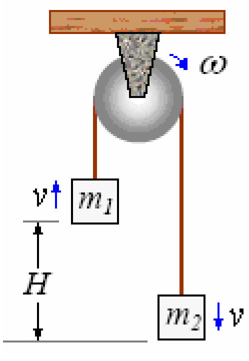
Ejemplo 27. Para el sistema de la figura, las masas tiene momento de inercia I en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo.

Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido H y la rapidez angular de la polea.



Solución.
Como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa m_1 y m_2, suponiendo que m_2 se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$E_i = E_f$$

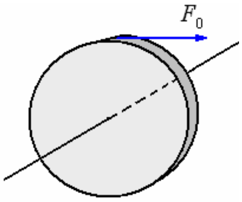


$$\Rightarrow K_{1i} + K_{2i} + U_{1i} + U_{2i}$$
$$= K_{1f} + K_{2f} + K_p + U_{1f} + U_{2f}$$
$$\Rightarrow 0 + m_2 gH$$
$$= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 gH$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_2 - m_1)gH$$

Donde se ha usado la relación $v = R\ \omega$, despejando v se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

Ejemplo 28. Sobre un cilindro homogéneo de radio R y masa M. tiene El cual tiene libertad de girar sin fricción sobre un eje, como se muestra en la figura. Si se le aplica en su borde una fuerza tangencial de magnitud F.
a) ¿Cuál es la aceleración angular α del cilindro?
b) ¿Cual es la velocidad angular y la energía cinética del cilindro al tiempo t?
c) ¿qué cantidad de trabajo aplica la fuerza durante este intervalo t?.



Solución.
El momento de inercia del cilindro en torno a su eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

a) Con $\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I}$, $\tau = F_0R$

tenemos $\alpha = \dfrac{F_0R}{\frac{1}{2}MR^2} = \dfrac{2F_0}{MR}$

b) Siendo α constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

Si $\omega_0 = 0$, $\omega = \alpha\, t$, $\omega = \dfrac{2F_0}{MR}t$

La energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{2F_0}{MR}t\right)^2$$
$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

c) El trabajo realizado

$$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{F_0^2}{M}t^2 - 0$$
$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

Otra forma de calcular es:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta, \quad \tau = F_0 R \text{ (constante)}$$

$$W = F_0 R(\theta_2 - \theta_1) = F_0 R \Delta\theta$$

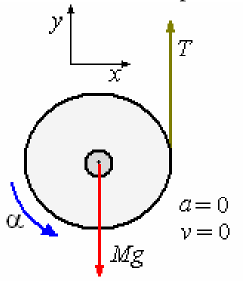
Con $\alpha = \dfrac{2F_0}{MR}$, $\omega_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2F_0}{MR}\right)t^2 = \frac{F_0}{MR}t^2$$

Finalmente

$$W = F_0 R\left(\frac{F_0}{MR}t^2\right) = \frac{F_0^2}{M}t^2$$

Ejemplo 29. Un carrete de hilo delgado tiene radio *R* y masa *M*. Si se jala el hilo de tal modo que el centro de masa del carrete permanezca suspendido en el mismo lugar.
a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el carrete?
b) ¿Cuánto trabajo se habrá realizado cuando el carrete gira con velocidad angular ω?
Solución.
La figura muestra al carrete suspendido.



El carrete solo tiene movimiento circular ya que está en equilibrio vertical
Aplicando las leyes de Newton:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - Mg = 0$$

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = I\alpha$$

Como $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, obtenemos:

$$MgR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

y $\alpha = \dfrac{2g}{R}$

a) La fuerza que se ejerce sobre el carrete es
$T = Mg$

b) Como el trabajo realizado es:
$W = \tau \, \Delta\theta$, donde $\tau = TR = MgR^2$

Siendo α constante $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Si $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta$ y

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{\omega^2 R}{4g}$$

Luego $W = MgR\dfrac{\omega^2 R}{4g} = \dfrac{1}{4}M\omega^2 R^2$

Otra forma de evaluar el trabajo es por la conservación de la energía.

$$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}M\omega^2 R^2$$

Ejemplo 30. Una plataforma cilíndrica uniforme de 180 kg de masa y 4,5 m de radio se frena de 3,2 rev/s al reposo en 18 s cuando se desconecta el. motor. Calcular la potencia de salida del motor (hp) para mantener una velocidad constante de 3,2 rev/s.
Solución.
Como primer paso debemos conocer cuál es el torque de frenado que tenemos que vencer para mantener la velocidad constante, ese torque lo calcularemos de la siguiente manera:

$$\tau_{\text{frenado}} = I\alpha_{\text{frenado}}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

$$\alpha_{\text{frenado}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = -\frac{\omega}{t}$$

$$\tau_{\text{frenado}} = \frac{1}{2}MR^2\frac{\omega}{t} = \frac{MR^2\omega}{2t}$$

La potencia es:

$$P = \tau\,\omega = \frac{MR^2\omega^2}{2t}$$

Siendo
M =180 kg, R = 4,5 m,

$$\omega = 3{,}2\frac{\text{rev}}{\text{s}}\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} = 6{,}4\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

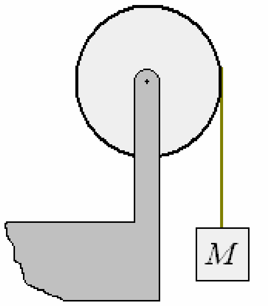
t = 18 s.

$$P = \frac{(180)(4{,}5)^2(6{,}4\pi)^2}{2(18)} = 40889{,}73 \text{ W}$$

Como 1 hp = 735,5 W

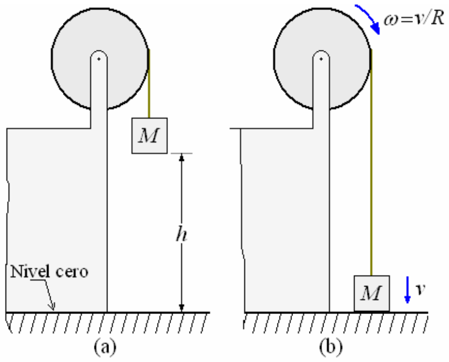
P = 55,6 hp

Ejemplo 31. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*. Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo. Resolver desde el punto de vista de energía.



Solución.
Por el principio de conservación de la energía E_{total} = constante
Al inicio del movimiento toda la energía es potencial, si consideramos como nivel cero el indicado en la figura (a).

$$E_i = Mgh$$



La energía final es pura energía cinética, de la nasa *M* con velocidad v antes de chocar y el disco con momento de Inercia *I* con velocidad angular $\omega = v/R$, figura (b).

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

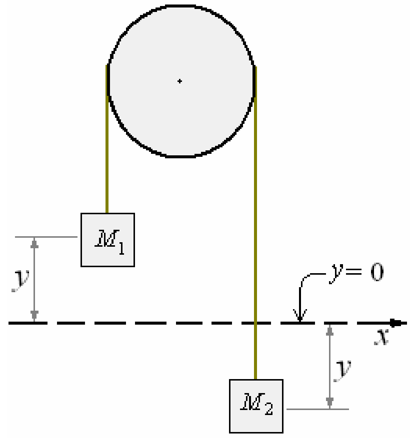
Como $E_i = E_f$

$$Mgh = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

y $v^2 = \dfrac{2M}{M + 1/R^2}gh$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2M}{M + 1/R^2}gh}$$

Ejemplo 32. Resolver la máquina le Atwood utilizando Conceptos de trabajo y energía,
Solución.



Las masas M_1 y M_2 inicialmente están en reposo en la posición $y = 0$, después de soltarlas una sube y la otra baja como muestra la figura.
Las masas estarán moviéndose con velocidad v la Polea tendrá una velocidad angular ω.
Como no hay rozamiento por la conservación de la energía

$$E_1 = E_2$$

$$0 = +\frac{1}{2}M_1v^2 + \frac{1}{2}M_2v^2 +$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + M_1gy - M_2gy$$

Siendo $\omega = \dfrac{v}{R}$, $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 + \frac{M}{2}\right)v^2 = (M_1 - M_2)gy$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \dfrac{M}{2}\right)}gy$$

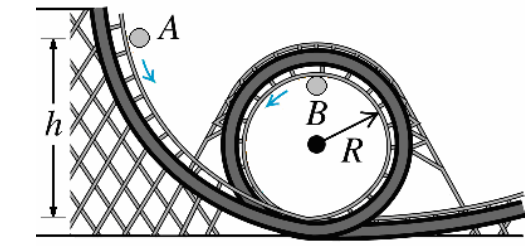
Para un movimiento uniformemente acelerado

$$v^2 = 2ay$$

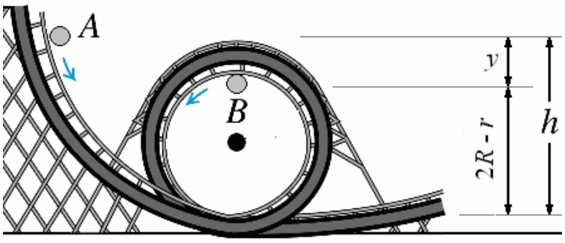
Comparando:

$$a = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1 + M/2)}g$$

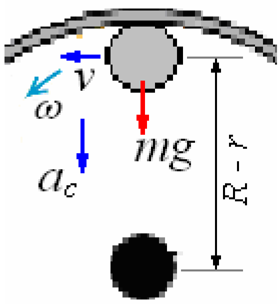
Ejemplo 33. Una canica sólida uniforme de radio *r* parte del reposo con su centro de masa a una altura *h* sobre el punto más bajo de una pista con un rizo de radio *R*. La canica rueda sin resbalar. La fricción de rodamiento y la resistencia del aire son despreciables.
a) ¿Qué valor mínimo debe tener *h* para que la canica no se salga de la pista en la parte superior del rizo? (Nota*:* *r* no es despreciable en comparación con *R*.)
b) ¿Qué valor debe tener *h* si la pista está bien lubricada, haciendo despreciable la fricción?



Solución.
a) De a a B, la distancia que la canica ha caído es $y = h - (2R - r) = h + r - 2R.$



El radio de la trayectoria del centro de masa de la canica es $R - r$, .



La condición para que la canica permanezca en la pista es

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -mg = -m\frac{v^2}{(R-r)} \Rightarrow$$

$$v^2 = g(R - r).$$

La velocidad se determina del teorema del trabajo - energía,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Se tiene:

$$y = h - (2R - r)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Se sabe que para una esfera

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Reemplazando estos valores en la ecución de la energía:

$$mg(h - 2R + r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow$$

$$g(h - 2R + r) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow$$

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}v^2$$

Reemplazando el valor de v^2 :

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}g(R - r) \Rightarrow$$

$$h - 2R + r = \frac{7}{10}(R - r) \Rightarrow$$

$$h = 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= \frac{27}{10}R - \frac{17}{10}r$$

$$= 2{,}7R - 1{,}7r$$

b) En ausencia de fricción no habrá rotación. Luego:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

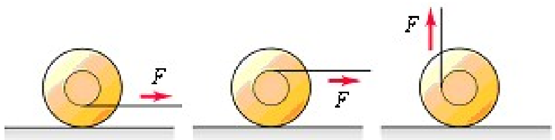
Sustituyendo las expresiones para y y v^2 en términos de los otros parámetros da

$$h - 2R + r = \frac{1}{2}(R - r)$$

Resolviendo obtenemos

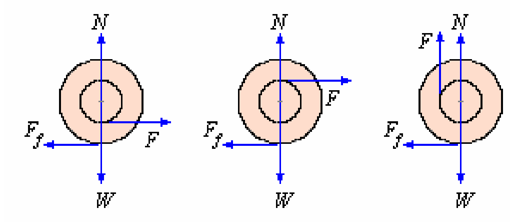
$$h = \frac{5}{2}R - \frac{3}{2}r.$$

Ejemplo 34. La figura muestra tres yoyos idénticos que inicialmente están en reposo en una superficie horizontal. Se tira del cordel de cada uno en la dirección indicada. Siempre hay suficiente fricción para que el yoyo ruede sin resbalar. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada yoyo. ¿En qué dirección girará cada uno? Explica tus respuestas

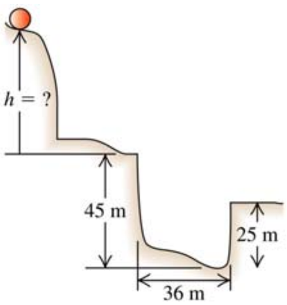


Solución. En el primer caso, $\vec{F}$ y la fuerza de la fricción actúan en direcciones opuestas, y la fuerza de fricción tiene el torque mayor que hace rotar el yo-yo a la derecha. La fuerza neta a la derecha es la diferencia $F - F_f$, tal que la fuerza neta es a la derecha mientras que el torque neto causa una rotación a la derecha.

Para el segundo caso, el torque y la fuerza de fricción tienden a dar vuelta al yoyo a la derecha, y el yo-yo se mueve a la derecha.
En el tercer caso, la fricción tiende a mover al yo-yo a la derecha, y puesto que la fuerza aplicada es vertical, el yoyo se mueve a la derecha.



Ejemplo 35.
Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura, partiendo del reposo.
a) Calcule la altura mínima *h* que evita que la canica caiga en el foso.
b) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta a la parte (a) no depende del radio de la canica.
c) Resuelva la parte (a) para un bloque que se desliza sin fricción en vez de una canica que rueda. Compare la *h* mínima en este caso con la respuesta a la parte (a).



Solución.
a) Encuentre la velocidad *v* que necesita la canica en el borde del hoyo para hacerlo llegar a la tierra plana en el otro lado.
La canica debe viajar 36 m horizontalmente mientras cae verticalmente 20 m.
Use el movimiento vertical para encontrar el tiempo.
Tome + *y* hacia abajo.

$v_{0y} = 0, a_y = 9{,}80 \text{ m/s}^2, y - y_0 = 20 \text{ m}, \; t = ?$

$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \;\; \Rightarrow t = 2{,}02 \text{ s}$

Luego $x - x_0 = v_{0x}t \;\; \Rightarrow v_{0x} = 17{,}82 \text{ m/s}.$

Utilice la conservación de la energía, donde el punto 1 está en el punto de partida y el punto 2 está en el borde del hoyo, donde $v = 17{,}82 \text{ m/s}.$

Haga $y = 0$ en el punto 2, tal que

$y_2 = 0$ e $y_1 = h$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Rodar sin resbalar significa

$\omega = \frac{v}{r}$, $I = \frac{2}{5}mr^2$

Tal que $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$

$mgh = \frac{7}{10}mv^2$

$\Rightarrow h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7(17{,}82 \text{ m/s})}{10(9{,}80 \text{ m/s}^2)}$

= 23 m

b) $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$, Independiente de *r*.

c) Todo es igual, excepto que no hay el término de energía rotacional cinética en *K*:

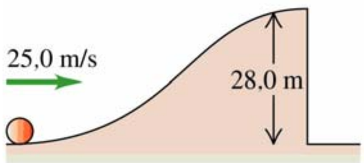
$K = \frac{1}{2}mv^2$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2$

$h = \frac{v^2}{2g} = 16 \text{ m}.$

Comparado con la altura de la parte (a), 16 /23 = 0,7, es el 70 %.

Ejemplo 36. Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura. En la cima, se está moviendo horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical.
a) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo?
b) Observe que, al tocar tierra la esfera, tiene mayor rapidez de traslación que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? Explique.



Solución.
a) Use la conservación de la energía para encontrar la velocidad v_2 de la bola momentos antes que salga de la parte alta del acantilado. Sea el punto 1 en la base de la colina y el punto 2 en la cima de la colina.
Tome $y = 0$ en la base de la colina, tal que

$y_1 = 0$ e $y_2 = 28{,}0 \text{ m}.$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Rodar sin resbalar significa $\omega = v/r$ y

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}mr^2\right)(v/r)^2 = \frac{1}{5}mv^2$$

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = mgy_2 + \frac{7}{10}mv_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{10}{7}gy_2} = 15{,}26\ \text{m/s}$$

Considere el movimiento de proyectil de la bola, después de salir de la cima del acantilado hasta justo antes de tocar tierra. Tome $+y$ hacia abajo.

Utilice el movimiento vertical para encontrar el tiempo en el aire:

$v_{0y} = 0$, $a_y = 9{,}80\ \text{m/s}^2$

$y - y_0 = 28{,}0\text{m}$, $t = ?$

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow t = 2{,}39\ \text{s}$$

Durante este tiempo la bola viaja horizontalmente

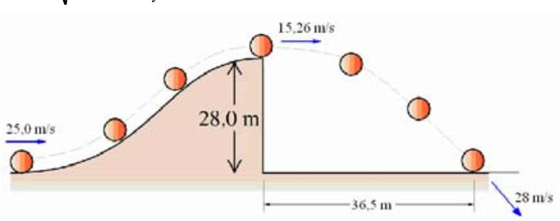
$$x - x_0 = v_{0x}t = (15{,}26\ \text{m/s})(2{,}39\ \text{s}) = 36{,}5\ \text{m}.$$

Justo antes de tocar tierra,

$v_y = v_{0y} + gt = 23{,}4\ \text{m/s}$ y

$v_x = v_{0x} = 15{,}26\ \text{m/s}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28{,}0\ \text{m/s}$$



b) En la base de la colina,

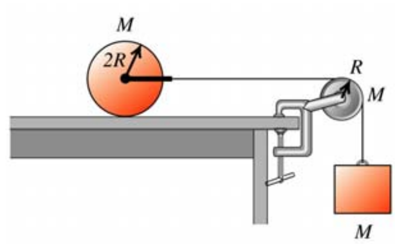
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{25{,}0\ \text{m/s}}{r}$$

La razón de la rotación no cambia mientras la bola está en el aire, después de dejar la parte alta del acantilado, tal que momentos antes de tocar tierra

$$\omega = \frac{15{,}3\ \text{m/s}}{r}$$

La energía cinética total es igual en la base de la colina y momentos antes de tocar tierra, pero momentos antes de tocar tierra poco de esta energía es energía cinética rotatoria, así que la energía cinética de traslación es mayor.

Ejemplo 37. Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata un hilo mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro de modo que éste puede girar sobre el eje. El hilo pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo. El hilo no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?



Solución.

Hacer este problema usando la cinemática implica cuatro incógnitas (seis, contando las dos aceleraciones angulares), mientras que usando consideraciones de la energía se simplifican los cálculos.

Si el bloque y el cilindro ambos tienen velocidad v, la polea tiene velocidad angular v/R y el cilindro tiene velocidad angular $v/2R$, la energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2}\left[Mv^2 + \frac{M(2R)^2}{2}(v/2R)^2 + \frac{MR^2}{2}(v/R)^2 + Mv^2\right]$$

$$= \frac{3}{2}Mv^2. \quad (1)$$

Esta energía cinética debe ser el trabajo hecho por la gravedad; si la masa que cuelga desciende una distancia y,

$$K = Mgy. \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$v^2 = \frac{2}{3}gy$$

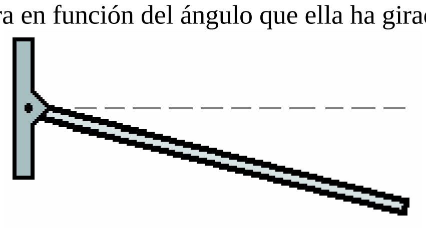
Para aceleración constante

$$v^2 = 2ay,$$

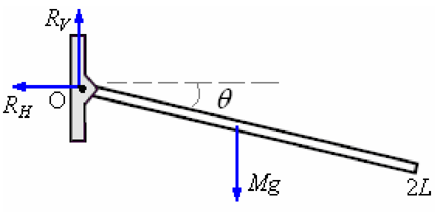
Por comparación de las dos expresiones obtenemos:

$$a = \frac{g}{3}$$

Ejemplo 38. Una barra de largo $2L$ y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.



Solución.



Por conservación de energía tenemos que

$$\frac{11}{23}M(2L)^2\dot{\theta}^2 - Mg\,\text{sen}\theta = 0$$

Luego la velocidad angular de la barra es:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\theta}$$

Además $-R_H = M\dfrac{d^2}{dt^2}L\cos\theta$,

$$R_V - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\theta)$$

Entonces

$$R_H = ML\frac{1}{2\,\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\,\dot{\theta}\right)^2$$

$$= ML\frac{1}{2\,\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\theta\right)$$

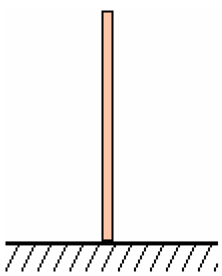
$$= \frac{9}{4}ML\,\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$R_V = Mg - M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\theta)$$

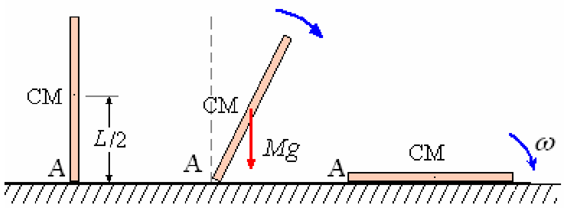
$$= Mg - ML\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\theta\right)$$

$$= \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta$$

Ejemplo 39. Una barra de longitud L y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine:
a) La velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.
b) La aceleración angular en dicho instante.



Solución.



a) Momento de inercia de la barra con respecto a un extremo

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

Por conservación de energía.

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

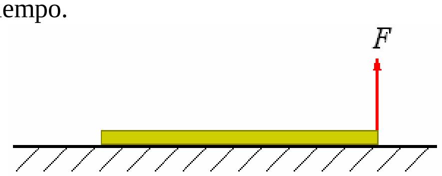
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{CM} = \omega\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

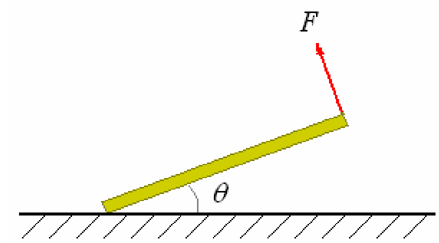
b) La aceleración angular en dicho instante.

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Ejemplo 40. Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.



Solución.



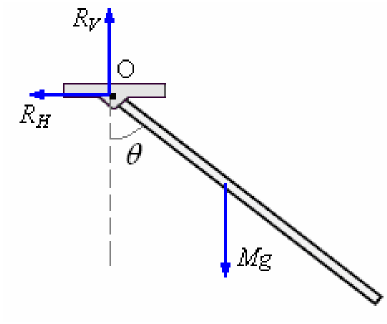
El torque respecto al centro de masa conduce a

$$FL\,\text{sen}\theta = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3F}{L}\text{sen}\theta$$

Ejemplo 41. Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.

Solución.



Por conservación de energía

$$E = \frac{11}{23}ML^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

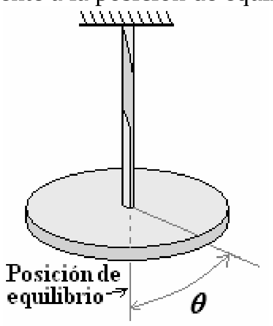
Derivando respecto al tiempo

$$\frac{1}{3}ML^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Ejemplo 42. Un péndulo de torsión consiste en un disco uniforme de masa *M* y radio *R* suspendido de una barra delgada y vertical de masa despreciable y que puede torcerse al dar vuelta al disco alrededor de su eje, como se indica en la figura. La barra tiene una Constante de elasticidad torsional *k*. inicialmente se hace girar el disco un ángulo θ respecto del equilibrio y luego se le suelta desde el reposo. Determinar su velocidad de rotación cuando llega nuevamente a la posición de equilibrio.



Solución.

Con la ley de Hooke para rotación,

$\tau = -k\theta$

El trabajo para torcer un ángulo θ es:

$$W = -\int_0^\theta \tau\, d\theta = -\int_0^\theta (-k\theta)d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Este trabajo queda como energía potencial.

$$U_{(\theta)} = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Al liberarse esta se convierte en energía cinética. Al pasar por el punto de equilibrio la energía es puramente energía cinética.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

Por conservación de energía.

$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k\theta^2}{MR^2}$$

Finalmente $\omega = \sqrt{\dfrac{2k\theta^2}{MR^2}}$

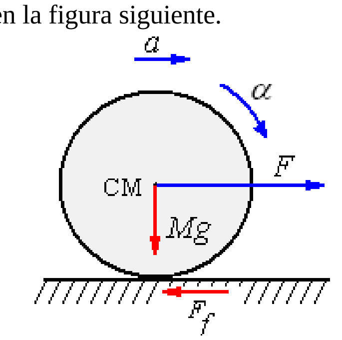
TRASLACIONES Y ROTACIONES COMBINADAS

Hasta ahora solo hemos tomado en consideración la rotación del cuerpo en torno a un eje fijo en el espacio.

La finalidad de esta sección es estudiar el caso en que el eje de rotación si acelera también vamos a presentar tres métodos analíticos de resolver este caso.

Primer método

Aplicamos la segunda ley de Newton para traslación relativa ejes no rotantes a través del centro de masa. Para ilustrar este método y los otros también, consideremos un cuerpo de radio *R*, masa *M* y momento de inercia respecto a su entro masa *I*, al que se le obliga a rodar sin deslizamiento a lo largo de una superficie horizontal por medio de una fuerza *F* que actúa en su centro de masa, La tuerza de fricción F_f y la reacción *N* actúan tal como se muestra en la figura siguiente.



EL cuerpo se mueve con una aceleración horizontal a que es la que corresponde a su centro de masa, y a su vez rota con aceleración angular α .

Como rueda sin deslizamiento la relación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular es $x = R\theta$.

La velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega$$

La aceleración es

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R\alpha$$

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación alrededor del centro de masa

$$-RF_f = -I_{CM}\alpha$$

Eliminando F_f y α , obtenemos:

$$\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)a = F$$

La aceleración

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Si para t = 0:

$x_0 = 0$, $v_0 = 0$,

Siendo a = constante

La velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = \frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t$$

El desplazamiento es:

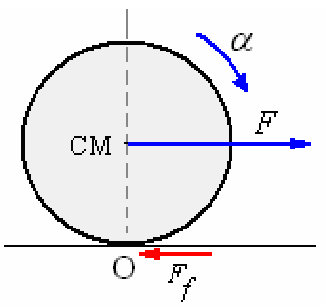
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t^2$$

Segundo método

En este método escribimos la ecuación para traslación igual que en el anterior método, pero para la rotación se aplica la segunda ley de Newton con respecto al eje de rotación que pasa a través del punto de reposo instantáneo (punto de apoyo en el movimiento) si tal punto no existe no puede usarse este método

Como ilustración veamos el ejemplo anterior. El punto contacto es el punto fijo instantáneo O, consideremos que este no desliza y todos los otros puntos de eje momentáneamente rotan alrededor de el.



En este caso como la aceleración del centro masa es a, la aceleración angular del cuerpo alrededor de O es $\alpha = a/R$.

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación:

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación a alrededor de O:

$$-FR = -I_O\alpha$$

Como $\alpha = a/R$ y $I_O + I_{CM} + MR^2$:

con la segunda ecuación,

$$\left(I_{CM} + MR^2\right)\frac{a}{R} = FR \;\Rightarrow\; a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Tercer método

Este método Consiste en usar las ecuaciones de la energía directamente.

Es un Sistema Conservativo

$$K + U = \text{Constante}$$

Resolveremos por este método el ejemplo anterior. Puesto que no hay deslizamiento la tuerza de fricción sobre el cuerpo no trabaja sobre el mientras rueda. Siendo un sistema conservativo la fuerza F se puede deducir de una función Potencial U = - Fx donde x es la coordenada horizontal del centro de nasa.

La energía E del cuerpo es:

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 ,\; U = -Fx$$

Luego: $E = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 - Fx$

Siendo $\omega = \frac{v}{R} \;\Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx$$

De aquí podemos evaluar la velocidad considerando que para el instante inicial x = 0, y v = 0, por consiguiente E = 0.

$$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx = 0 \text{ y}$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) = Fx$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}}$$

Siendo un movimiento con aceleración constante

$v = \sqrt{2ax}$

De esto

$$a = \frac{F}{\dfrac{I_{CM}}{R^2} + M}$$

Otra forma de calcular la aceleración.

Considerando que

$$E = \text{Constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx\right] = 0$$

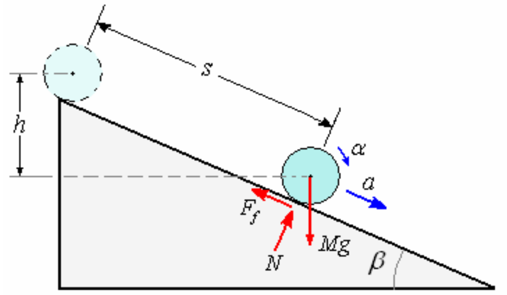
$$\Rightarrow v\frac{dv}{dt}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - F\frac{dx}{dt} = 0$$

Como $\frac{dv}{dt} = a$ y $\frac{dx}{dt} = v$

$$va\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fv = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$a = \frac{F}{\left(M + \dfrac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Ejemplo 43. Analizar el movimiento de un cuerpo de radio R, momento de inercia respecto a su centro de masa I que rueda sin deslizar hacia abajo en plano inclinado de ángulo θ.



Solución.

Como se muestra en la figura hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, Mg actúa en el centro de gravedad y la fuerza de contacto que se descompone en la reacción normal N y la fuerza de fricción F_f.

Vamos a resolver por el primer método.

Traslación:

$$Mg\text{sen}\beta - F_f = Ma$$

Rotación:

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

Por la condición de no deslizamiento:

$$\alpha = a/R$$

Eliminando α y F_f obtenemos:

$$a = \frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}$$

Considerando que para $t = 0$: $s = 0$, y $v = 0$.

$$v = \left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t,$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t^2$$

Para un anillo:

$$I_{CM} = MR^2,\; s = \frac{1}{4}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un disco:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\; s = \frac{1}{3}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para una esfera:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2,\; s = \frac{5}{14}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un plano sin fricción (sin rodadura)

$$s = \frac{1}{2}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Por la ecuación de energía

Si para $t = 0$: $K_0 = 0$ y $U_0 = 0$

$$E = K_0 + U_0 = 0$$

Llamando h a la caída del centro de masa desde la posición de reposo, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2,$$

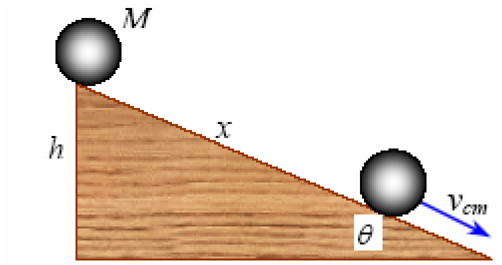
$$U = -Mgh = -Mgs\,\text{sen}\beta = 0,$$

$$\omega = v/R$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) - Mgs\,\text{sen}\beta$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}s}$$

Ejemplo 44. Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa M que rueda por un plano inclinado θ y rugoso.



Solución.
Se supone que el cuerpo rígido parte del reposo desde una altura h y que rueda por el plano sin resbalar la conservación de energía da:

$$E = \text{cte} \Rightarrow K + U_g = \text{cte} \Rightarrow$$

$$K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Pero
$Ki = 0$ y $Ugf = 0$, entonces

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$$

Como
$v_{cm} = R\ \omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm}\frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando v_{cm} se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{I + I_{cm}/MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme de momento de inercia $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, se puede calcular su v_{cm} en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{(2/5)MR^2}{MR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{10}{7}gh$$

$$\Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

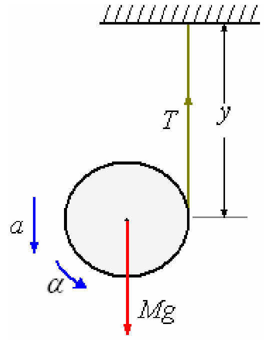
La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{cmi}^2 + 2a_{cm}x \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene: $h = x$ sen θ, donde x es la longitud del plano, reemplazando en a_{cm}:

$$a_{cm} = \frac{\frac{5}{7}gx\text{sen}\theta}{2x} = \frac{5}{7}g\text{sen}\theta$$

Ejemplo 45. Un disco homogéneo de radio R y masa M tiene una cuerda enrollada alrededor, según vemos en a figura. Sujetando el extremo libre de la cuerda a un soporte fijo, se deja caer el disco. Estudiar el movimiento.



Solución.
Vamos a resolver primero por las ecuaciones del movimiento de Newton.
Traslación.:

$$Mg - T = Ma$$

Rotación.:

$$RT = I_{CM}\alpha$$

Como:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\ \alpha = \frac{a}{R}:$$

$$RT = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

De aquí se obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}Ma \text{ y } a = \frac{2}{3}g$$

El yo-yo funciona según este principio, está proyectado para que a sea mucho menor que g.

Resolviendo por conservación de la energía

$$E = K + U =$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 - Mgy$$

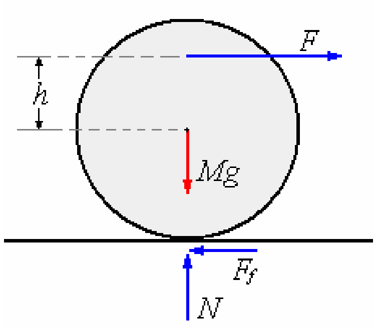
Como $E = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

También $v = \frac{dy}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$

Con esto encontramos que

$$a = \frac{2}{3}g$$

Ejemplo 46. Estudiar el movimiento de un disco homogéneo de radio R y masa M, sobre el que actúa una fuerza horizontal F aplicada un punto variable a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro, según se indica en la figura. Supóngase el movimiento sobre un plano horizontal.



Solución.
En la figura vemos que la fuerza F se aplica a una distancia h sobre el centro.
Suponiendo que F_f actúa hacia la izquierda.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento:
Traslación

$$F - F_f = Ma \qquad (1)$$

$$N - Mg = 0 \qquad (2)$$

Rotación alrededor del centro de masa

$$Fh + F_f R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad (3)$$

Considerando $\alpha = \dfrac{a}{R}$

$$2F\frac{h}{R} + 2F_f = Ma \qquad (3a)$$

Igualando (1) y (3a)

$$F - F_f = 2F\frac{h}{R} + 2F_f$$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

Discusión:

a) $F_f = 0$, cuando $1 - 2\dfrac{h}{R} = 0 \Rightarrow h = \dfrac{R}{2}$

Esto quiere decir si F se aplica a $R/2$ del centro, la fuerza de rozamiento es cero.

b) Si $h = R$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{R}{R}\right) = -F \Rightarrow F_f = -\frac{F}{3}$$

el rozamiento es en sentido contrario al indicado y la ecuación (3) se convierte en:

$$F(R) - \left(\frac{F}{3}\right)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}F = \frac{1}{2}MR\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4F}{3MR}$$

Esto indica que el cilindro rueda hacia la derecha.

c) Si disminuye h hasta que $h = 0$.

$$3F_f = F\left[1 - 2\frac{(0)}{R}\right] = F \Rightarrow F_f = \frac{F}{3}$$

En la ecuación (3)

$$F(0) + \left(\frac{F}{3}\right)R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

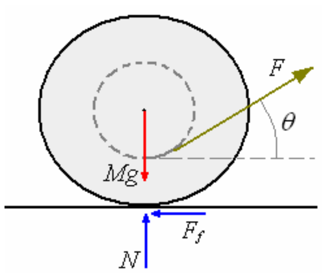
$$\frac{F}{3}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2F}{3MR}$$

El cilindro rueda hacia la derecha.

d) Si F se hace muy grande tal que F_f tiende a aumentar, tan pronto como sobrepase el valor máximo posible de la tuerza de rozamiento (μN), el disco deslizará.
Se debe hacer una nueva hipótesis, esta vez se tienen también las ecuaciones (1), (2) y (3) pero $\alpha \neq a/R$.

Ejemplo 47. Un carrete de radio interior R_1 y radio exterior R_2 se halla sobre un suelo áspero. Se tira de él con una tuerza F mediante un hilo arrollado en torno a su cilindro interior. Se mantiene un ángulo θ con la horizontal. Se observa que hay un ángulo Crítico θ_0, tal que $\theta < \theta_o$, el carrete rueda sin deslizar en el sentido del cual se tira de él, y para $\theta > \theta_o$ el carrete rueda sin deslizar en sentido contrario, ¿Cuál es el valor del ángulo critico.



Solución.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento;
Traslación:

$$F\cos\theta - F_f = Ma = M\alpha R_2 \qquad (1)$$

$$F\text{sen}\theta - Mg + N = 0$$

Rotación:

$$-F_f R_2 + FR_1 = I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f R_2 = FR_1 - I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f = F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha \qquad (2)$$

Eliminando la fuerza F_f ., reemplazando (2) en (1):

$$F\cos\theta - \left(F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha \right) = Ma$$

$$\Rightarrow \; F\cos\theta - F\frac{R_1}{R_2}R_1 + \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha = M\alpha R_2$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{R_2\cos\theta - R_1}{R_2} \right) = \left(\frac{MR_2^2 - I_{CM}}{R_2} \right)\alpha$$

$$\Rightarrow \; \alpha = F\frac{\left(R_2\cos\theta - R_1\right)}{\left(MR_2^2 - I_{CM}\right)} = \frac{d\omega}{dt}$$

La rotación hará que el movimiento del carrete será hacia adelante cuando $\frac{d\omega}{dt} > 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 > 0$$

$$\Rightarrow \; \cos\theta > \frac{R_1}{R_2}$$

El movimiento será hacia atrás cuando $\frac{d\omega}{dt} < 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 < 0$$

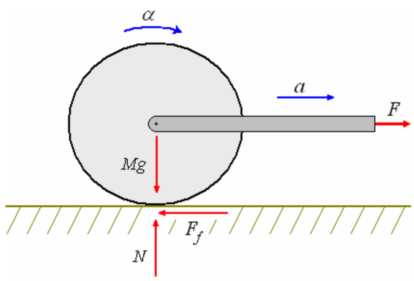
$$\Rightarrow \; \cos\theta < \frac{R_1}{R_2}$$

El ángulo crítico es cuando $\frac{d\omega}{dt} = 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 = 0$$

$$\Rightarrow \; \cos\theta = \frac{R_1}{R_2}$$

Ejemplo 48. Un disco de masa *M* y radio *R* se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante *F*, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.
Solución.



Aquí

$$F - F_f = Ma\,,\quad N - Mg = 0\,,$$

$$F_f R = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$$

Entonces

$$F_f = \frac{1}{2}Ma$$

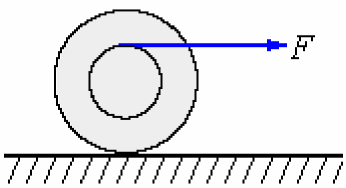
Que sustituida en la primera da:

a) $a = \frac{2F}{3M}$,

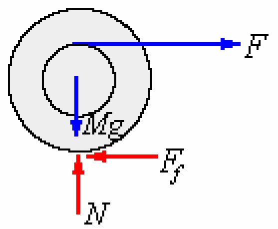
b) $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2F}{3MR}$,

c) $F_f = \frac{1}{2}Ma = \frac{F}{3}$

Ejemplo 49. Un disco de masa *M* y radio 2*R* se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un resalto de radio *R* como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante *F*, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.



Solución.



Ahora $F - F_f = Ma$, $N - Mg = 0$

$$F_f 2R + FR = \frac{1}{2}M(2R)^2\alpha$$

$$= 2MR^2\left(\frac{a}{2R}\right) = MRa$$

Simplificando:

$$2F_f + F = Ma = F - F_f$$

$$\Rightarrow F_f = 0$$

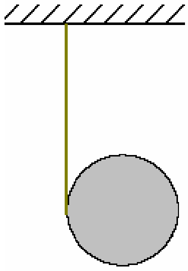
De donde resulta:

a) $a = \frac{F}{m}$

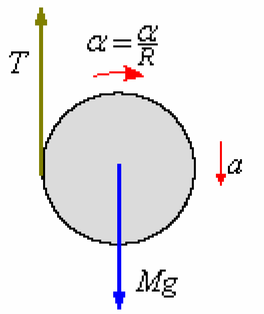
b) $\alpha = \frac{F}{2MR}$

c) $F_f = 0$

Ejemplo 50. Un disco de masa *M* y radio *R* tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:
a) La aceleración de bajada del disco.
b) La tensión de la cuerda.



Solución.



Aquí $Mg - T = Ma$,

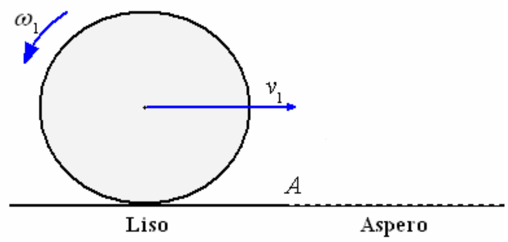
$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$$

De donde $Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$

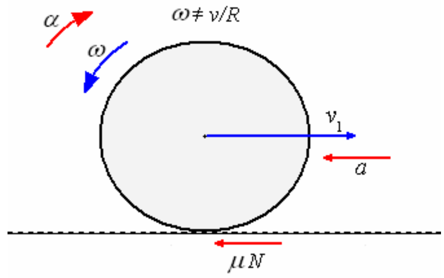
a) $a = \frac{2}{3}g$

b) $T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{3}Mg$

Ejemplo 51. Se da a un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M* con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1/R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.



Solución.
En la parte lisa el cuerpo se mueve con velocidad horizontal constante v_1 hacia la derecha, rotando con velocidad angular ω_1 en el sentido antihorario.
A partir del punto A en que el piso es áspero deslizará primeramente sobre el plano áspero, pero acabará rodando sin deslizar.
En la parte intermedia habrá una aceleración a que disminuye a la velocidad de v_1 a v_2 y una aceleración angular α que disminuye a ω_1, la hace igual a cero y cambia su rotación hasta que llega la velocidad angular a un valor tal que $\omega_2 = v_2/R$.
Aplicando las leyes de Newton en la figura siguiente.



Traslación: $\mu N = Ma$, $N - Mg = 0$

Rotación: $-R\mu N = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

De esto obtenemos: $a = -\mu g$, $\alpha = -\frac{2\mu g}{R}$

La velocidad es: $v = v_1 + at = v_1 - \mu gt$
La velocidad angular es:

$$\omega = \omega_1 - \alpha\, t = \frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t$$

Parta encontrar el tiempo en que el disco deja de resbalar, debe cumplirse: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

$$v\hat{i} = \omega\hat{k} \times R\hat{j} = -\omega R\hat{i}$$

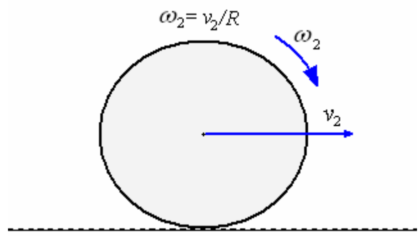
$$(v_1 - \mu gt) = -\left(\frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t\right)R$$

$$2v_1 = 3\mu gt \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}$$

con este valor de t

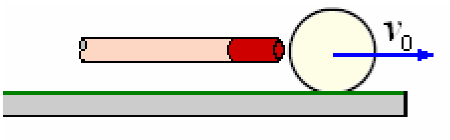
$$v_2 = v_1 - \mu g\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}\right) = \frac{v_1}{3}$$

La velocidad final es un tercio de la inicial



Ejemplo 52. Se lanza una bola de billar con una velocidad inicial v_0 sobre una mesa horizontal,

existiendo entre la bola y la mesa un coeficiente de rozamiento μ. Calcular la distancia que recorrerá hasta que empiece a rodar sin deslizamiento.
¿Qué velocidad tendrá en ese instante?
Aplicar para el caso v_0 = 7 m/s, μ = 0,2.



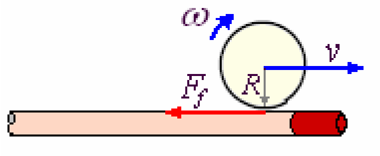
Solución.
La fuerza de rozamiento $\mu N = \mu mg$ se opone al movimiento, siendo además la fuerza resultante, por lo que:

$$-\mu mg = ma\,,\ a = -\mu g$$

La velocidad de la bola comenzará a disminuir de tal modo que:

$$v = v_0 - at = v_0 - \mu gt\,.$$

Al mismo tiempo, sobre la bola que inicialmente no rueda, (ω_0 = 0) actúa un momento de fuerza:



$$\tau = F_f R = \mu mgR$$

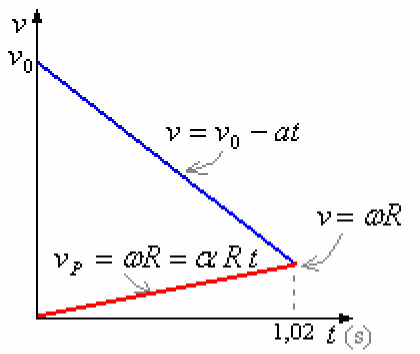
que producirá una aceleración angular $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$$

Por lo que la velocidad angular irá aumentando:

$$\omega = \alpha t = \frac{5\mu gt}{2R}$$

La velocidad de un punto de la periferia de la esfera vale $v_P = \omega R$, que irá aumentando con el tiempo, porque ω aumenta con el tiempo.



Por tanto, observamos que la velocidad de la bola disminuye, y la velocidad de la periferia de la bola aumenta. En el momento en que la velocidad de la periferia se iguale a la velocidad de traslación, se conseguirá la rodadura, es decir el no deslizamiento.

$$v = v_P \quad v = \omega R$$

$$v_0 - \mu gt = \frac{5\mu gt}{2} \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

la velocidad en ese instante es

$$v = \frac{5}{7}v_0 = 5 \text{ m/s},\ t = 1{,}02 \text{ s}$$

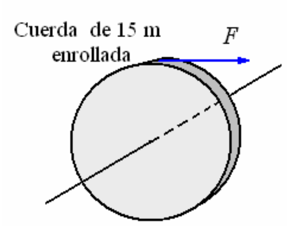
La distancia recorrida

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$= \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

= 6,12 m.

Ejemplo 53. Un tambor tiene un radio de 0,40 m y un momento de la inercia de 5,0 kg m^2. El torque producido por la fuerza de fricción de los cojinetes de anillo del tambor es 3,0 Nm. Un anillo en un extremo de una cuerda se desliza en una clavija corta en el borde del tambor, y una cuerda de 15 m de longitud se enrolla sobre el tambor. El tambor está inicialmente en reposo. Una fuerza constante se aplica al extremo libre de la cuerda hasta que la cuerda se desenrolla y se desliza totalmente de la clavija. En ese instante, la velocidad angular del tambor es de 12 rad/s. El tambor después decelera y se detiene.



a) ¿Cuál es la fuerza constante aplicada a la cuerda?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del tambor en el instante en que la cuerda deja el tambor?
c) ¿Cuál es el trabajo negativo realizado por la fricción?
d) ¿Qué tiempo el tambor estuvo en movimiento?
Movimiento con la cuerda?

Solución.
a)
Trabajo de la fuerza F + trabajo de la fricción
= Energía cinética ganada al terminarse la cuerda

$$F\Delta s + \tau_f \Delta\theta = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$\Rightarrow\ F(15) - 3{,}0\left(\frac{15}{0{,}4}\right) = \frac{1}{2}(5{,}0)(12)^2$$

$\Rightarrow$ F = 31,5 N
b)

$$L = I_O\omega = (5)(12)$$

= 60 kg.m^2/s
c)
Movimiento con la cuerda

$W_{f1} = -\tau_f \Delta\theta = -3\left(\frac{15}{0,4}\right)$ = - 112,5 J

Movimiento sin la cuerda

$W_{f2} = -\frac{1}{2} I_O \omega_O^2 = -\frac{1}{2}(5,0)(12)^2 = -360$

Trabajo total

$W_f = W_{f1} + W_{f2} = -482,5J$

d)

$\sum \tau_O = I_O \alpha$

$FR - \tau_f I_O \alpha \Rightarrow 31,5(0,4) - 3,0 = 5,0\alpha$

$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{31,5(0,4)-3,0}{5,0} = 1,92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Por otra parte

$\omega_o = \alpha_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_1} = \frac{12}{1,92} = 6,25\text{ s}$

Movimiento sin la cuerda

$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow -3 = 5\alpha_2$

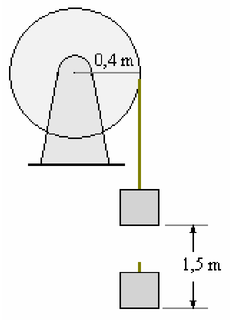
$\Rightarrow \alpha_2 == -\frac{3}{5} = -0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$0 = \omega_0 + \alpha_2 t_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{-\omega_0}{\alpha_2} = \frac{-12}{-0,6} = 20\text{s}$

El tiempo total es 26,25 s

Ejemplo 54. Una rueda tiene un radio de 0,40 m y se monta en cojinetes sin fricción. Un bloque se suspende de una cuerda que se enrolla en la rueda. La rueda se libera de reposo y el bloque desciende 1,5 m en 2,00 segundos. La tensión en la cuerda durante el descenso del bloque es 20 N.
a) ¿Cuál es la masa del bloque?
b) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?



Solución.

a)

$h = \frac{1}{2} a t^2$

$\Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(1,5)}{(2)^2}$

$= 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$mg - T = ma$

$\Rightarrow m = \frac{T}{g-a} = \frac{20}{9,8-0,75}$

= 2,21 kg

b)

$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0,75}{0,4}$

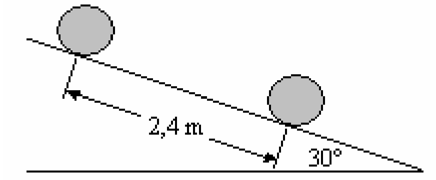
$= 1,875 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow TR = I_O \alpha$

$\Rightarrow I_O = \frac{TR}{\alpha} = \frac{20(0,4)}{1,875}$

$= 4,27\text{ kg m}^2$

Ejemplo 55. El radio de una rueda de 3,0 kilogramos es 6,0 centímetros. La rueda se suelta del reposo en el punto A en un plano inclinado 30°. La rueda gira sin deslizar y se mueve 2,4 m al punto B en 1,20s.
a) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?
b) ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?



Solución.

a) $I_O = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2}(3\text{kg})(0,06\text{m})^2$

= 0,0054 kg m^2

b)

$mg\text{sen}30° - F_f = ma \quad F_f R = I_O \alpha$

$\Rightarrow F_f = \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha$

$mg\text{sen}30° - \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha = mR\alpha$

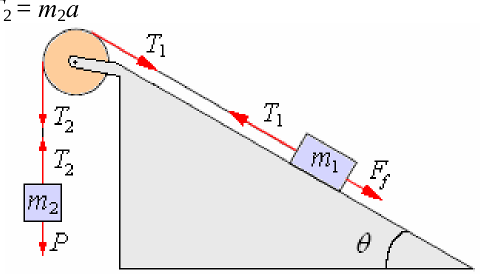
$\Rightarrow \alpha = \frac{mg\text{sen}30°}{\left(\frac{I_O}{R}\right) + mR} = \frac{3(9,8)(0,5)}{\frac{0,0054}{0,06} + 3(0,06)}$

$= \frac{14,7}{0,27} = 54,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

Ejemplo 56. Una masa de 20 kg se halla sobre un plano inclinado 30º, con el que tiene un rozamiento cuyo coeficiente vale 0,3, unida a una cuerda sin masa e inextensible que pasa por una polea de M_P = 160 kg, cuyo radio geométrico es de 20 cm y radio

de giro r_g = 15 cm. De dicha cuerda pende una masa de 40 kg que es abandonada libremente.
Calcular:
a) Aceleración con que se mueve el sistema.
b) Tensiones en la cuerda.
c) ¿En qué rango de valores de la masa que pende, el sistema estará en equilibrio?
Momento de inercia de la polea $I_P = Mr_g^2$.

Solución.
a) Partiendo de la suposición de que la masa colgante acelera hacia abajo, plantearemos las tres ecuaciones correspondientes al movimiento de las tres masas:
$m_2g - T_2 = m_2a$



$$T_1 - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1 a\,,$$

$$T_2R - T_1R = I\alpha = M_P r_g^2 \frac{a}{R}$$

Sumando las tres ecuaciones siguientes

$$m_0 g - T_2 = m_2 a\,,$$

$$T_1 - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1 a$$

$$T_2 - T_1 M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a$$

Obtenemos:

$$m_2 g - m_1 g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta$$

$$= a\left[m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta}{m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2} g$$

$$= \frac{40 - 10 - 5{,}2}{60 + 160\left(\frac{15}{20}\right)^2} g$$

$= 1{,}62$ m/s^2

b)

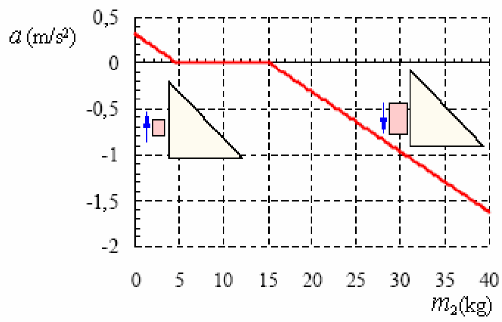
$T_2 = m_2(g - a)$ = 327 N,

$T_1 = T_2\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a$ = 181 N.

c) El valor mínimo que hace que la masa m_2 acelere hacia abajo se produce cuando a = 0, es decir:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 + 5,2 = 15,2 kg.



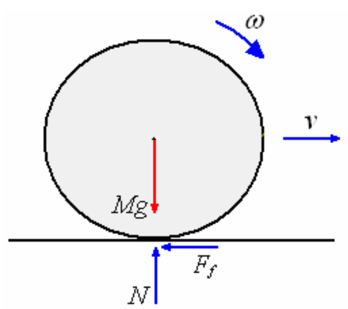
Si la masa m_2 se hace aún menor, llegará un momento en que será arrastrada por m_1. Esto produciría una inversión en el sentido de la fuerza de rozamiento. El valor máximo de m_2 deberá cumplir ahora:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 – 5,2 = 4,8 kg.

Por tanto, entre 0 y 4,8 kg el sistema acelerará de modo que m_2 suba; entre 4,8 y 15,2 kg, permanecerá en equilibrio; y para más de 15,2 kg m_2 acelerará hacia abajo.

Ejemplo 57. ¿Porqué una esfera que rueda se detiene? En esta parte vamos a tratar de explicar la resistencia al rodamiento.
La figura siguiente muestra una esfera de masa M y radio R la cual está rodando con una velocidad angular ω y avanza con una velocidad $v = \omega R$.



Solución.
La fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso Mg la reacción del piso N y la fuerza de fricción F_f. Si aplicamos la segunda ley de Newton a la traslación.

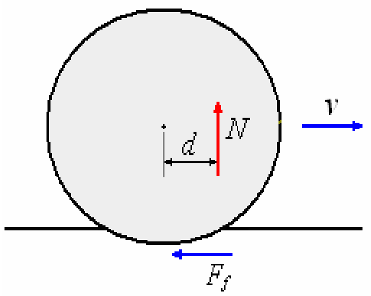
$$\vec{F}_f = M\vec{g}$$

debe haber una aceleración $\vec{a}$ y $\vec{v}$ decrecería. Si aplicamos segunda ley de Newton a la rotación.

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

la aceleración angular α depende de F_f. por consiguiente F_f actúa incrementando ω.
En resumen: en traslación F_f. acelera, en rotación F_f. desacelera, esto aparentemente es una contradicción.
Por otra parte Mg y N están en la línea vertical que por el centro de masa y no causan efecto en el

movimiento horizontal.
Si la esfera y el plano son rígidos, de modo que la esfera esté en contacto solo en un punto, tampoco originan alrededor del centro de masa. .porque actúan a través de él
Para resolver la Contradicción suprimamos la idealización de que todos los cuerpos son rígidos, la esfera se aplana un poco y el nivel de La superficie se hunde Ligeramente (ver la figura a continuación)



La reacción N actúa delante del centro de masa, produciendo un torque $\tau_N = dN$ de resistencia al rodamiento.

$$\tau_N - RF_f = I_{CM}\alpha$$

Como $N = Mg$, $F_f = Ma$, $\alpha = \dfrac{a}{R}$:

$$\tau_N - RMa = I_{CM}\frac{a}{R}$$

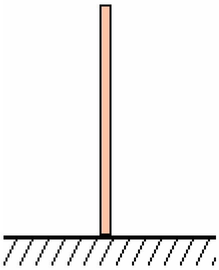
$$\Rightarrow \tau_N = a\left(\frac{I_{CM}}{R} + RM\right)$$

Para una esfera: $I_{CM} = \dfrac{2}{5}MR^2$

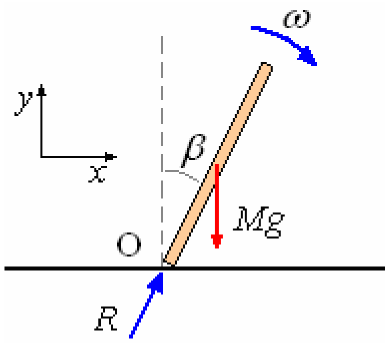
Luego: $\tau_N = \dfrac{7}{5}MRa$, como $N = Mg$

$$d = \frac{\tau_N}{Mg} = \frac{7R}{5g}a$$

Ejemplo 58. La figura muestra una varilla homogénea de masa M y longitud L en posición vertical. La cual se deja caer desde el reposo.
a) ¿A que ángulo θ entre la varilla y la vertical, la varilla ya no presionará al piso?
b) ¿Con qué coeficiente de fricción el extremo de La varilla no resbalará hasta este momento?



Solución.
a) La figura siguiente muestra .la varilla cuando forma un ángulo θ con la vertical.



Sobre la varilla actúa el peso Mg y la reacción R. La velocidad angular ω en este instante se puede encontrar aplicando la ecuación de la energía.

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Como $I_O = \dfrac{1}{3}ML^2$

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\beta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}\text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{3g}{L}\left(2\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

Aplicando la segunda Ley de Newton para traslación a lo largo de la varilla.

$$\sum F = ma_c \Rightarrow R - Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

Cuando La varilla deja de presionar $R = 0$, y:

$$-Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

reemplazando el valor de ω^2 encontrado

$$Mg\cos\beta = M\left(\frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)\frac{L}{2}$$

Simplificando

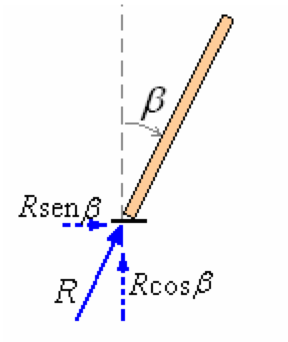
$$\cos\beta = 6\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\beta}{2} = 5\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

De aquí: $\beta = 48{,}2^\circ$

b) Para que la varilla no resbale tenemos en la figura siguiente.
Las componentes de R son:

$$\vec{R} = R\text{sen}\beta\,\hat{i} + R\cos\beta\hat{j}$$



La condición para que la varilla no resbale es:

$F_f \geq R\text{sen}\beta$

Con $F_f = \mu N$ y $N = R\cos\beta$

$\mu R\cos\beta \geq R\text{sen}\beta$

$\mu \geq \tan\beta$

El coeficiente de rozamiento del piso debe ser cuando menos igual a $\tan\beta$ para que llegue sin deslizar hasta el ángulo β.

Para $\beta = 48{,}2^\circ \Rightarrow \mu \geq 1{,}12$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.

Anteriormente hemos visto que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ y también } \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

y mostramos que para un cuerpo rígido.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$$

Si no hay torque externo con respecto a algún eje la cantidad de movimiento angular será constante con respecto a ese eje.

$$\vec{L}_{\text{total}} = \text{Constante}$$

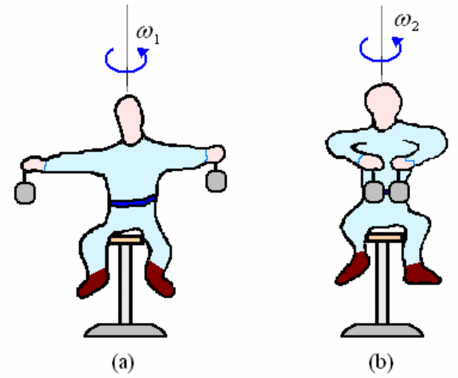
o expresado en función del momento de inercia apropiado.

$$I\vec{\omega} = \text{Constante}$$

Esta relación nos va a ser muy útil como veremos a continuación.

Ejemplo 59. Un estudiante está sentado sobre un banco giratorio montado sobre cojinetes sin fricción que puede girar libremente alrededor de un eje vertical como se muestra en la figura (a). El estudiante sostiene en las manos extendidas dos pesas. Su momento de inercia en esta posición es I_1 y su velocidad angular ω_1. No actúan sobre él torques no equilibrados y en consecuencia su cantidad de movimiento angular tiene que conservarse.

Cuando el estudiante acerca las manos al cuerpo, su momento de inercia varía, figura (b) ahora es I_2 y su velocidad angular será ω_2



Por la conservación de la cantidad de movimiento angular.

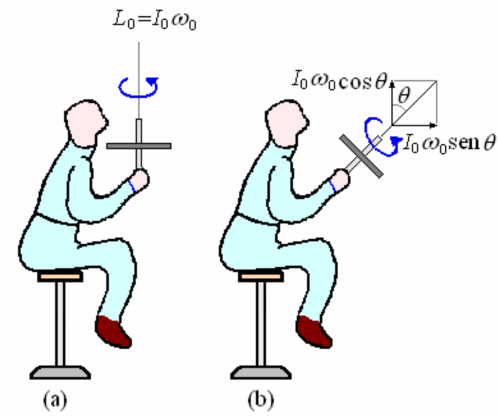
$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

Siendo $I_2 < I_1$, resulta $\omega_2 > \omega_1$

Su velocidad aumenta.

Ejemplo 60. Esta vez el mismo estudiante sentado sobre el mismo banco, sostiene en sus manos en posición vertical al eje de rotación de una rueda de bicicleta, la rueda gira alrededor de ese eje vertical con velocidad angular ω_0, el estudiante y el banco están en reposo (a).

El estudiante gira el eje de la rueda en ángulo θ con la vertical (b), como no hay torque respecto al eje vertical, la cantidad de movimiento angular con respecto al eje vertical debe conservarse.



Inicialmente se tiene

$$\vec{L} = I_0\omega_0\hat{k}$$

Cuando se inclina la rueda (respecto al eje vertical)

$$\vec{L}' = \vec{L}_{estudiante+banco} + \vec{L}_{rueda}$$

$$= I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k}$$

Siendo I_e el momento de inercia del estudiante y banco respecto al eje vertical, ω_e su velocidad angular con respecto a ese eje.

Como $\vec{L} = \vec{L}'$

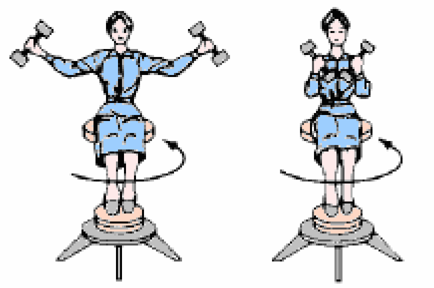
$$I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k} = I_0\omega_0\hat{k}$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{I_0}{I_e}\omega_0(1-\cos\theta)\hat{k}$$

Es la velocidad angular del estudiante con el sentido de giro inicial de la rueda.
Cuando la rueda se invierte se invierte totalmente $\theta = \pi/2$, y:

$$\vec{\omega}_e = \frac{2I_0}{I_e}\omega_0\,\hat{k}$$

Ejemplo 61. Una persona está sentada en una silla giratoria manteniendo los brazos extendidos con una pesa en cada mano. Gira con una frecuencia de 2 Hz. El momento de inercia de la persona con los pesos es de 5 kg m^{2}. Hallar:
a) la nueva frecuencia cuando encoja los brazos y disminuya el momento de inercia a 2 kg m^2.
b) La variación de energía cinética del sistema.
c) ¿De dónde procede este incremento de energía cinética?



Solución.
a) Al encoger los brazos, están actuando fuerzas y torques de fuerzas internas, por lo que podemos admitir que se conserva la cantidad de movimiento angular.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_2, \Rightarrow\ 2\pi\, f_2 = \frac{I_1}{I_2}2\pi\, f_1,$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{I_1}{I_2}f_1 = \frac{5}{2}2 = 5 \text{ Hz}$$

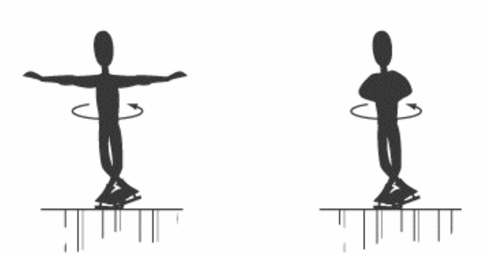
b) $$\Delta K = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1}$$

$$L = I_1\omega_1 = 5(2\pi 2) = 20\pi \text{kg m}^2\text{s};$$

$$\Delta K = 200\pi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = 60\pi^2 \text{ J}.$$

El signo positivo nos indica que hay un aumento de energía cinética.
c) Este incremento de energía cinética procede de la energía química almacenada en los músculos del brazo.

Ejemplo 62. Un patinador, con los brazos extendidos y las piernas abiertas y con un momento de inercia respecto a su eje vertical de 7 kg.m^2, inicia un giro sobre si mismo con una aceleración de 2 rad/s^2 durante 6 segundos, momento en el cual encoge los brazos y acerca sus piernas al eje hasta tener un momento de inercia de 4 kg.m^2.
Determinar su velocidad de giro final.



Solución.

Después de un tiempo t de iniciar el giro, su velocidad angular será:

$$\omega_{(t)} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2)(6)^2 = 36 \text{ rad/s}$$

al acercar brazos y piernas al eje, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{Después}} = \frac{I_{\text{Antes}}}{I_{\text{Después}}}\omega_{\text{Antes}}$$

$$= \frac{7}{4}36 = 63 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 63. Un muchacho de 25 kg corre con velocidad de 2,5 m/s hacia un tiovivo en reposo de radio 2 m cuyo, momento de inercia vale 500 kg m^2. Hallar la velocidad angular y frecuencia del conjunto después de que el muchacho suba al tiovivo justo en el borde.

Solución.
La cantidad de movimiento angular del muchacho respecto al centro del tiovivo es:

$$L_1 = mvR = (25)(2,5)(2) = 125 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

El momento de inercia del conjunto tiovivo-muchacho es
$I = I_m + I_T = 25\text{x}2^2 + 500$
$= 600$ kg m^2
Planteando la igualdad entre la cantidad de movimiento angular inicial y final, tendremos:

$$L_1 = L_2,\ mvR = \left(I_m + I_T\right)\omega$$

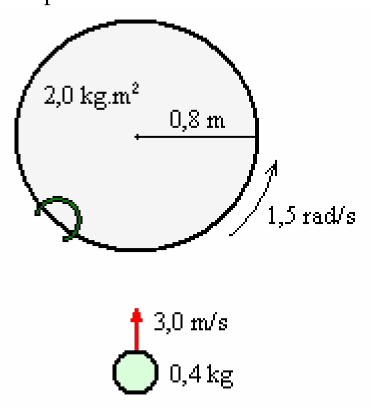
$$\omega = \frac{mvR}{\left(I_m + I_T\right)} = \frac{125}{600}$$

$= 0,208$ rad/s

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,033 \text{ Hz}$$

$= 1,99$ r.p.m.

Ejemplo 64. Una tornamesa con radio de 8,0 m y momento de inercia de 2,0 kg.m^2. La placa tornamesa rota con una velocidad angular de 1,5 rad/s sobre un eje vertical que pasa a través de su centro en cojinetes sin fricción. Una bola de 0,40 kg se lanza horizontalmente hacia el eje de la tornamesa con una velocidad de 3,0 m/s. La bola es cogida por un mecanismo con forma de tazón en el borde de la tornamesa.
a) ¿Cuál es cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa?
b) ¿Qué fracción de energía cinética se pierde durante la captura de la bola?



Solución.
a) La cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa es cero
b)

$$\text{Energía antes} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(0,4)(3,0)^2 + \frac{1}{2}(2,0)(1,5)^2$$

$= 4,05$ J

$$\text{Energía después} = \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2$$

Para calcular esta energía necesitamos conocer I_0 y ω'.

$$I'_O = I_O + mR^2 = 2,0 + (0,4)(0,8)^2$$

$= 2,256$ kg/ m^2

$$L_{antes} = L_{después} \Rightarrow I_O\omega = I'_O\,\omega'$$

$$\omega' = \left(\frac{I_O}{I'_O}\right)\omega = \left(\frac{2,0}{2,256}\right)1,5$$

$$= 1,33\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

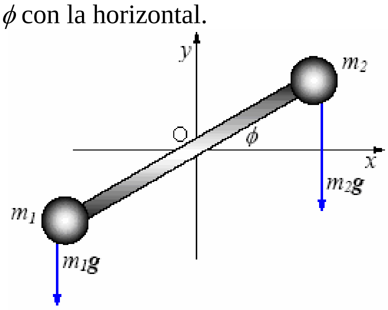
Reemplazando:

$$\text{Energía después} = \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2 = \frac{1}{2}(2,256)(1,33)^2$$

$= 2$ J
Se pierde 4,05 -2 = 2,05

$$\text{fracción de energía} = \frac{2,05}{4,05} = 0,5$$

Ejemplo 65. Una barra rígida de masa M y largo L gira en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En los extremos de la barra se unen dos cuerpos de masas m_1 y m_2. Calcular la magnitud del momento angular del sistema cuando su rapidez angular es ω y la aceleración angular cuando la barra forma un ángulo ϕ con la horizontal.



Solución.
El momento de inercia por el eje de rotación del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes, con los valores de la tabla se obtiene:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)$$

Como el sistema gira con rapidez angular ω, la magnitud del momento angular es:

$$L = I\omega = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)\omega$$

Para calcular la aceleración angular usamos la relación

$\tau_t = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\tau_t}{I}$, al calcular el torque total en torno el eje de rotación, se obtiene:

$$\tau_t = m_1 g\frac{L}{2}\cos\phi - m_2 g\frac{L}{2}\cos\phi$$

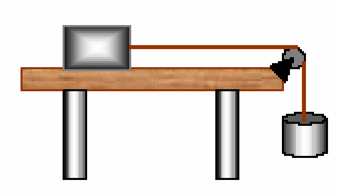
$$= \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gL\cos\phi$$

Reemplazando en α *l*os valores de *I* y de τ_t , se obtiene la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\tau_t}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\phi}{L(m_1 + m_2 + M/3)}$$

Ejemplo 66. En la figura las masas m_1 y m_2 se conectan por una cuerda ideal que pasa por una polea de radio *R* y momento de inercia *I* alrededor de su eje. La mesa no tiene roce, calcular la aceleración del sistema.

Solución. Primero se calcula en momento angular del sistema de las dos masas más la polea:



$$L = m_1 vR + m_2 vR + I\frac{v}{R}$$

Luego se calcula el torque externo sobre el sistema, la única fuerza externa que contribuye al torque total es m_1g, entonces el torque es

$\tau = m_1 gR$.

Entonces se tiene:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow$$

$$m_1 gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)vR + I\frac{v}{R}\right]$$

$$m_1 gR = (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

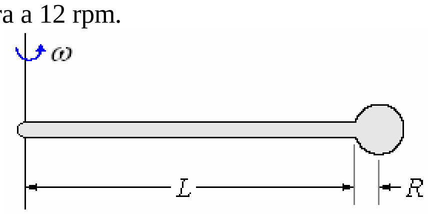
$$\Rightarrow m_1 gR = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)Ra$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Ejemplo 67. Una varilla de 500 g y 75 cm de longitud, lleva soldada en un extremo una esfera de 10 cm de radio y 250 g de masa. Calcular:

a) El momento de inercia cuando gira, alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el extremo libre.

b) La cantidad de movimiento angular del conjunto si gira a 12 rpm.



Solución.

a) El momento de inercia será la suma del momento de inercia de una varilla, más el de la esfera. Como la esfera está a *L*+*R* del eje, aplicamos Steiner:

$$I_e = \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2,\ I_V = \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = I_e + I_V$$

$$= \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2 + \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = \frac{2}{5}(0,25)(0,1)^2 + (0,25)(0,85)^2 + \frac{1}{3}(0,5)(0,75)^2$$

$= 0,27$ kg.m^2

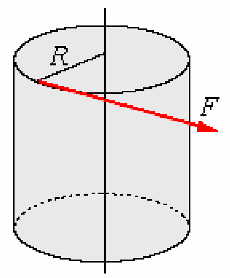
b) $L = I\omega = 0,27\frac{2\pi}{T} = 0,27(2\pi f)$

$= 0,54\pi\frac{12}{60} = 0,345$ kgm^2 / s

Ejemplo 68. Un cilindro de 50 kg y 20 cm de radio, gira respecto de un eje vertical que coincide con su eje de simetría, debido a una fuerza constante, aplicada a su periferia que, después de 40 s de iniciado el movimiento, alcanza 200 r.p.m.

Calcular:

El valor de la fuerza y el torque de la fuerza aplicada.



Solución.

La frecuencia de rotación adquirida vale:

$$f = \frac{200}{60}\text{Hz}$$

La velocidad angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{200}{60} = \frac{20}{3}\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi}{6}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Por otra parte el momento de inercia del cilindro vale:

$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50)(0,2)^2 = 1$ kgm^2.

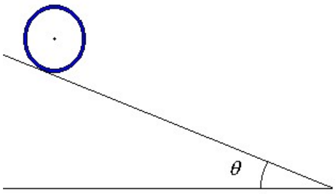
Luego el torque de la fuerza aplicada

$\tau = FR = I\alpha = (1)\frac{\pi}{6} = 0,52$ Nm.

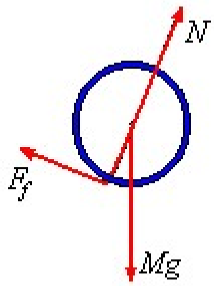
La fuerza tangencial:

$F = \frac{\tau}{R} = \frac{0,52}{0,2} = 2,6$ N

Ejemplo 69. Un anillo de masa M y radio R ($I_{CM} = MR^2$), cae en rodadura pura sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.
a) Hacer el DCL. del anillo.
b) Hallar la aceleración del centro de masa del anillo.
c) Encontrar el valor de la fricción entre el plano inclinado y el anillo.
d) ¿Cuál debe ser el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura?



Solución.
a) El DCL. del anillo.



b) Segunda ley de Newton para la traslación

$$Mgsen\theta - F_f = Ma$$

Segunda ley de Newton para la rotación

$$I\alpha = F_f R \Rightarrow MR^2 \frac{a}{R} = F_f R \Rightarrow$$

$$F_f = Ma$$

Reemplazando el valor de F_f en la primera ecuación.

$$Mgsen\theta - Ma = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}\theta = 2Ma$$

Finalmente $a = \frac{1}{2} g\text{sen}\theta$

c) El valor de la fuerza de fricción entre el plano inclinado y el anillo.

$$F_f = Ma = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$

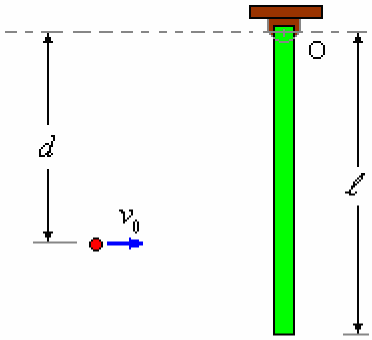
d) El mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura debe de cumplir

$$F_f = \mu_k N = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{Mg\text{sen}\theta}{2Mg\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Ejemplo 70. Una barra uniforme AB de masa M y longitud ℓ $\left(I_{CM} = \frac{1}{12} M\ell^2 \right)$ se sostiene de un extremo mediante un pivote sin fricción. La barra se encuentra inicialmente en reposo en forma vertical cuando un proyectil de masa m impacta sobre ella y queda incrustado instantáneamente. La velocidad inicial del proyectil es v_0. Hallar:
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.

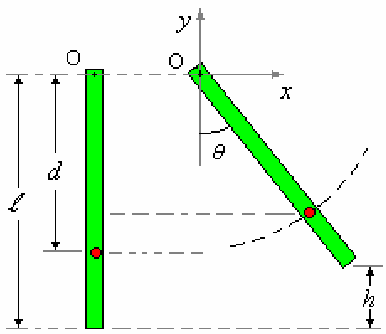
b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.
c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.



Solución.
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.

$$L_{antes} = mv_0 d$$

b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.



$$L_{antes} = L_{después}$$

$$mv_0 d = \frac{1}{3} M\ell^2 \omega + (\omega d) d$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 d}{\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)}$$

c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
Energía justo después del choque

$$= \frac{1}{2} I_O \omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)$$

$$= I_O = \left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)$$

Energía cuando alcanza el punto más alto

$$= -\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)(1 - \cos\theta)$$

Por conservación de energía:
Energía justo después del choque = energía cuando alcanza el punto más alto.

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)$$

$$= -\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2} I_O \omega^2}{\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)\frac{(mv_0 d)^2}{\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right)^2}}{\left(Mg\frac{\ell}{2} + mgd \right)}$$

$$= \frac{m^2 v_0^2 d^2}{2\left(M\frac{\ell}{2} + md \right)\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2 \right) g}$$

$$\Rightarrow h_{máx} = \ell(1 - \cos\theta)$$

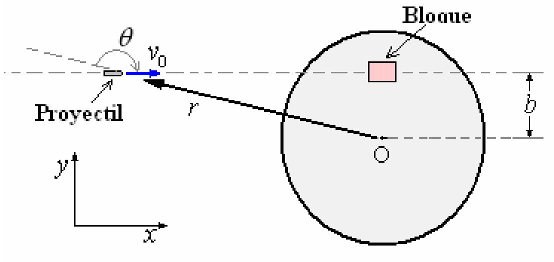
d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.

$$W = \Delta E = \left(\frac{1}{2} m v_0^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mgd \right)$$

$$- \left[\frac{1}{2} I_O \omega^2 + \left(-Mg\frac{\ell}{2} - mgd \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

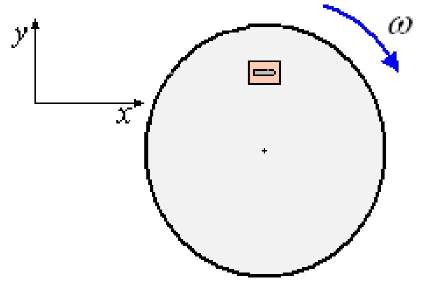
Ejemplo 71. Un bloque de masa *M* se pega a una plataforma circular, a una distancia *b* de su centro. La plataforma puede rotar, sin fricción, alrededor de un eje vertical alrededor de su centro. Siendo I_p su momento de inercia con respecto a ésta. Si un proyectil de masa *m* que se mueve con una velocidad horizontal v_0, como se muestra en la figura, incide y queda en el bloque. Encontrar la velocidad angular del bloque después del choque.



Solución.
Cantidad de movimiento angular antes del choque con respecto al eje O.

$$\vec{L}_{\text{antes}} = \vec{r} \times \vec{p} = -rmv_0 \text{sen}\theta\, \hat{k} = -mbv_0 \hat{k}$$

Para encontrar la cantidad de movimiento angular después del choque, según la figura siguiente.



$$\vec{L}_{\text{después}} = \left[I_p + (m + M)b^2 \right]\vec{\omega}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular

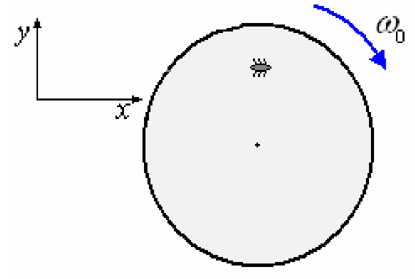
$$\vec{L}_{\text{antes}} = \vec{L}_{\text{después}}$$

$$\Rightarrow -rmv_0 \text{sen}\theta\, \hat{k} = \left[I_p + (m + M)b^2 \right]\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{rmv_0 \text{sen}\theta}{\left[I_p + (m + M)b^2 \right]}\hat{k}$$

Ejemplo 72. Se tiene una plataforma circular que puede rotar sin fricción alrededor de un eje perpendicular al centro. E1 momento de inercia de la plataforma con respecto al eje es I_p. Un insecto de masa *m* se coloca sobre la plataforma a una distancia *b* del eje. El sistema se hace girar con una velocidad angular ω_0 en el sentido horario. El insecto empieza a correr en una circunferencia de radio *b* alrededor del eje con una velocidad de magnitud constante v_0, medida relativa a tierra.
a) ¿Cual es la cantidad de movimiento angular total si el insecto corre con la plataforma?
b) ¿Cuál será si corre en oposición a la rotación de la plataforma?
c) ¿Es posible que el pequeño insecto pueda detener la gran plataforma? ¿Cómo?
Solución.
La cantidad de movimiento angular del sistema antes que el insecto comience a correr es:

$$\vec{L} = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}_0 = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$$

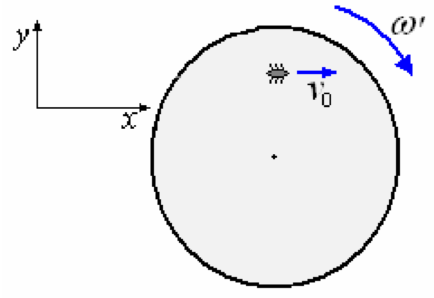


a) Cuando el insecto corre en el mismo sentido del giro con módulo de velocidad v_0 su cantidad de movimiento angular es:

$$\vec{L}' = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}' - mbv_o \hat{k}$$

Pero como la cantidad de movimiento angular es constante. La cantidad de movimiento angular total es:

$$\vec{L}' = \vec{L} = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$$



b) En este caso, como en el caso anterior

$$\vec{L}' = \vec{L}$$

$$\overleftarrow{L}' = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$$

c) Si es posible, tomando el caso a)

$$\vec{L}' = \left(I_p + mb^2\right)\vec{\omega}' - mbv_o \hat{k}$$

$$= -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$$

La plataforma se detiene cuando $\omega' = 0$, es decir:

$$-mbv_0 \hat{k} = -\left(I_p + mb^2\right)\omega_0 \hat{k}$$

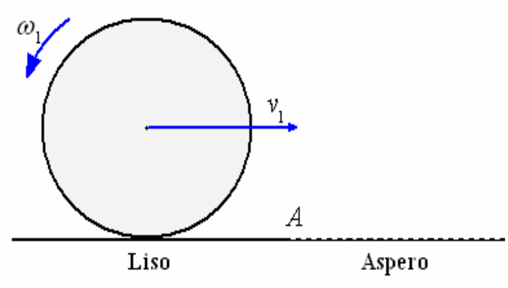
Esto sucede cuando

$$v_0 = \frac{\left(I_p + mb^2\right)}{mb}\omega_0$$

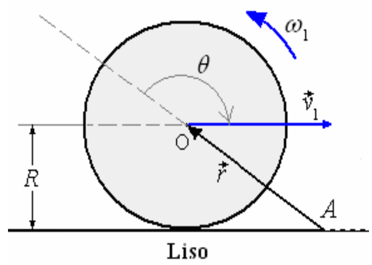
En el sentido indicado en el caso a).

Ejemplo 73. Se da a un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M* con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1 / R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.

Resolver usando la conservación de la cantidad de movimiento angular.



Solución.
En la parte lisa no hay fuerza de fricción, en la parte áspera aparece la tuerza de fricción, cuya línea de acción está en el plano. Por tanto, la cantidad de movimiento angular del disco respecto a un punto de referencia en el plano permanecerá Constante durante todo el movimiento (por ejemplo A).
La cantidad de movimiento antes de llegar a A.



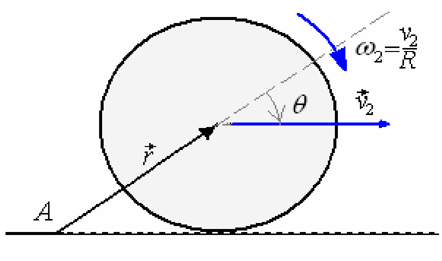
$$\vec{L} = \vec{r} \times M\vec{v}_1 = I_0 \vec{\omega}_1$$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_1 = -rv_1 \text{sen}\theta \, \hat{k} = -Rv_1 \hat{k}$,

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2, \quad \vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{k} = \frac{v_1}{R}\hat{k}$$

$$\vec{L} = -MRv_1 \hat{k} + \frac{1}{2}MRv_1 \hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1 \hat{k}$$

La cantidad de movimiento angular después de pasar A y haber 1legado a rodar sin deslizar. Se traslada con velocidad v_2 tal que $\omega_2 = \dfrac{v_2}{R}$.



$$\vec{L}' = \vec{r} \times M\vec{v}_2 = I_0 \vec{\omega}_2$$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_2 = -rv_2 \text{sen}\theta \, \hat{k} = -Rv_2 \hat{k}$,

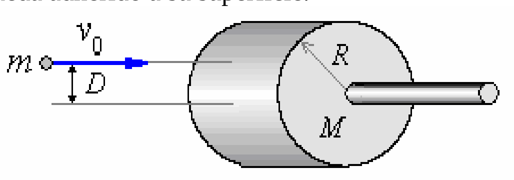
$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2, \quad \vec{\omega}_2 = -\omega_2 \hat{k} = \frac{v_2}{R}\hat{k}$$

$$\vec{L}' = -MRv_2 \hat{k} - \frac{1}{2}MRv_2 \hat{k} = -\frac{3}{2}MRv_2 \hat{k}$$

Igualando $\vec{L}' = \vec{L}$, tenemos:

$$-\frac{3}{2}MRv_2\hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1\hat{k} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{3}$$

Ejemplo 74. Un proyectil de masa *m* y velocidad v_0 se dispara contra un cilindro sólido de masa *M* y radio *R*. El cilindro está inicialmente en reposo montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. El proyectil se mueve perpendicular al eje y se encuentra a una distancia *D* < *R* sobre el eje. Calcular la rapidez angular del sistema después que el proyectil golpea al cilindro y queda adherido a su superficie.



Solución.
El momento angular del sistema se conserva, entonces

$$L_i = L_f$$

$$mv_0D = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0D}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}$$

Ejemplo 75. Un disco de masa *M* y radio *R* gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin roce. Un gato de masa *m* camina desde el borde del disco hacia el centro. Si la rapidez angular del sistema es ω_0 cuando el gato está en el borde del disco, calcular:
a) la rapidez angular cuando el gato ha llegado a un punto a *R*/4 del centro,
b) la energía rotacional inicial y final del sistema.
Solución.
Llamando I_d al momento de inercia del disco e I_g al momento de inercia del gato, el momento de inercia total inicial y final del sistema es:

$$I_i = I_d + I_g = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2$$

a) Como no hay torques externos sobre el sistema en torno al eje de rotación, se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right]\omega_0$$

$$= \left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{16}}\omega_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{M}{2} + m}{\frac{M}{2} + \frac{m}{16}}\right)\omega_0$$

b)

$$K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\left(\frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\right)^2\omega_0^2$$

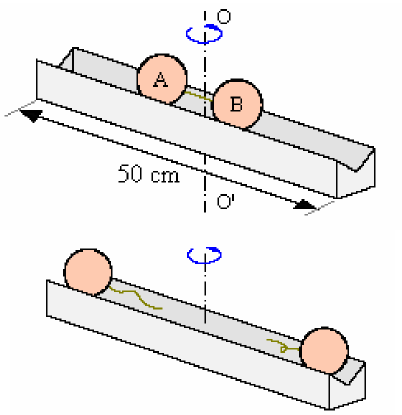
$$= \frac{1}{4}\left(M + \frac{m}{8}\right)\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)^2 R^2\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

Como $\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right) > 1$

La energía rotacional aumenta.

Ejemplo 76. La barra horizontal de la figura tiene un momento de inercia respecto al eje de rotación de 5x10^{-3} kg m^2, y cada una de las bolas que pueden deslizar sobre ella pesan 50 g y se consideran de dimensiones despreciables. El conjunto está girando libremente alrededor del eje O-O' con las bolas dispuestas simétricamente respecto al eje y sujetas por un hilo AB de 20 cm. Si se rompe el hilo cuando el conjunto gira a 20 rad/s, determinar la nueva velocidad angular cuando las bolas lleguen a los topes del extremo de la barra.



Solución.

Empecemos calculando el momento de inercia del conjunto, cuando las bolas están separadas 20 cm.

$I_1 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\,m\,r_1^2 = 5x10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1x0{,}1^2 = 6x10^{-3}$ kg m^2

Cuando se alejen hasta los topes:

$I_2 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\,m\,r_2^2$

$= 5x10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1x0{,}25^2$

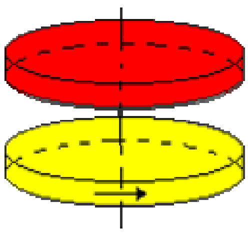
$= 11{,}25x10^{-3}$ kg m^2

La rotura del hilo libera fuerzas exclusivamente internas, por lo que se conservará la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L_1 = L_2 \;\Rightarrow\; I_1\omega_1 = L_2\omega_2 \;\Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{6}{11{,}25}20 = 10{,}67 \text{ rad / s}$$

Ejemplo 77. Un disco de 2 kg de masa y 10 cm de radio gira alrededor de su eje a 180 r.p.m.. Encima, pero sin que exista contacto, se encuentra otro disco de 1 kg de masa, del mismo radio y en reposo. Cuando el disco superior se deja caer, ambos se mueven solidariamente. Calcular la velocidad angular final.



Solución.

Cuando el disco superior se posa sobre el inferior, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$.

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}}$$

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \;\Rightarrow\; \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

Como el Momento de inercia de un disco es ½.m.R^2 se obtiene:

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2}{\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\right)}\omega_i = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\omega_i$$

En este caso particular:

$$\omega_f = \frac{2}{(2+1)}180 = 120 \text{ rpm.}$$

GIROSCOPOS Y TROMPOS - MOVIMIENTO DE PRECESION

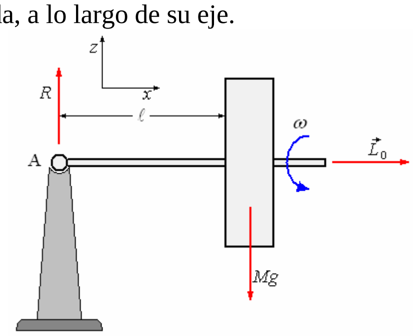
El giróscopo es una rueda montada en rodamientos sin fricción, en tal forma que la rueda tiene libertad de rotar en cualquier dirección con respecto al marco que lo sujeta.

Para lograr esto se necesitan tres gímbalos (correspondientes a los tres espacios dimensionales). Como los rodamientos no tienen fricción no se ejercen torques sobre la rueda. Esto significa que una vez iniciado el giro, el eje de rotación permanecerá fijo no importando que movimiento se de al mareo exterior. La dirección en el espacio del eje no variará.

Hasta ahora vimos el movimiento rotacional en que el eje de rotación está fijo, o tiene movimiento de traslación sin cambio en su dirección. La mayoría de los movimientos rotacionales quedan en estas categorías, pero en el caso de un trompo o giróscopo en rotación no se cumple lo anterior. Si se hace girar rápidamente el rotor de este aparato y luego se coloca un extremo libre del eje de rotación sobre un soporte fijo, como se muestra en la figura. El giróscopo no caerá del soporte sino que se mantiene en posición casi horizontal mientras que el eje de su rotor gira lentamente en un plano horizontal, esta rotación lenta del eje se conoce como PRECESION.

Veamos como se origina la precesión.

Consideremos un giróscopo simplificado mostrado en la figura siguiente, un disco cilíndrico muy macizo de masa M y radio a que tiene libertad para girar sin fricción en torno a una varilla muy ligera y delgada, a lo largo de su eje.



Un extremo de la varilla se apoya en A. que está a una distancia ℓ del disco. Si se mantiene la varilla

horizontal, y se hace girar al disco con una velocidad angular ω en torno a su eje y luego, se suelta.
Como actúan dos únicas fuerzas el peso *Mg* y la reacción del apoyo *R*, podría pensarse que el disco caería. Si $\vec{L}_0$ fuera cero sucedería esto, pero el torque que produce *Mg* es:

$$\vec{\tau} = \left(\ell\hat{i}\right)\times\left(-Mg\hat{k}\right) = Mg\ell\hat{j}$$

este torque produce un cambio en la cantidad de movimiento angular

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt = \left(Mg\ell\hat{j}\right)dt$$

la magnitud. de este cambio es:

$$dL = Mg\ell dt$$

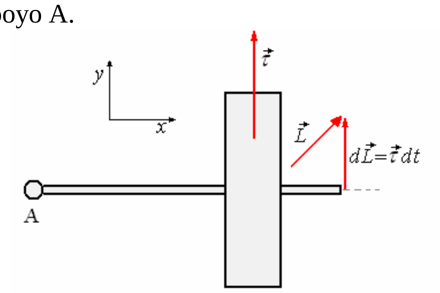
Por otra parte: $dL = L_0 d\theta$

De aquí $Mg\ell dt = L_0 d\theta$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{Mg\ell}{L_0}$

Como $L_0 = L_0\omega = \dfrac{1}{2}Ma^2\omega$;

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Mg\ell}{\frac{1}{2}Ma^2\omega} = \frac{2g\ell}{a^2\omega}$$

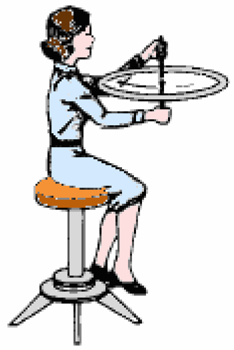
Por consiguiente el disco no caerá, en lugar de ello girará en el plano horizontal *xy* (ver la figura siguiente) en torno al eje vertical a través del punto de apoyo A.



La velocidad angular de esta precesión es:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\tau}{I\omega} = \frac{2g\ell}{\omega a^2}$$

Ejemplo 78. Una profesora de física se encuentra sentada en una silla giratoria manteniendo en sus manos una rueda de bicicleta como se indica en la figura. El momento de inercia de la rueda respecto a su eje es de 0,2 kg m^2, y el momento de inercia de la profesora más la rueda respecto del eje de la silla es de 2,7 kg m^2. La velocidad angular inicial de la rueda es de 55 rad/s en sentido antihorario. En un momento dado la profesora gira 180º el eje de la rueda pasando a girar con -55 rad/s en sentido contrario al anterior. Calcular:
a) La velocidad angular adquirida por la silla y el sentido de giro.
b) El trabajo realizado por la profesora.



Solución.
a) Dado que no hay momentos externos sobre la silla giratoria podemos considerar que el momento angular no varía.

$$L_1 = I_{\text{RUEDA}}\omega_1 ,$$

$$L_2 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\omega_2$$

$$I_{\text{RUEDA}}\omega_1 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2I_{\text{RUEDA}}}{I_{\text{SILLA}}}\omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{2(0{,}02)}{2{,}7}55 = 8{,}15 \text{ rad/s}$$

(Positivo, por tanto en el sentido de rotación inicial de la rueda)
b)

$$W = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\omega_1^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\omega_2^2 = 89{,}6 \text{ J}$$

El trabajo es por tanto la energía adquirida por la silla, ya que la energía de la rueda no varía.

Dicho trabajo, positivo, es producido por la fuerza muscular (interna) de la profesora.

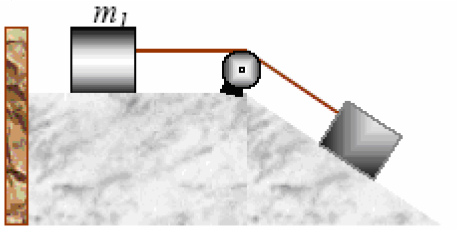
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. El centro de masa de una pelota de radio *R*, se mueve a una rapidez *v*. La pelota gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular ω. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética de traslación. Considere la pelota una esfera uniforme.

2. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio *R* = 0,6 m y masa *M* = 15 kg puede llevarse

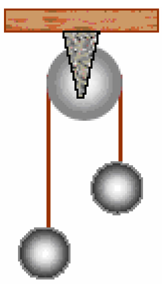
hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0,6 s por medio de un motor que ejerce un torque constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción?
Respuesta. 2.8%.

3. Un bloque de masa m_1 y uno de masa m_2 se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea en forma de disco de radio R**,** momento de inercia I y masa M. Así mismo, se deja que los bloques se muevan sobre una superficie en forma de cuña con un ángulo θ como muestra la figura. El coeficiente de fricción cinético es μ para ambos bloques. Determine
a) la aceleración de los dos bloques y
b) la tensión en cada cuerda.

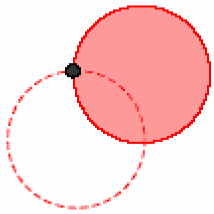


Respuesta.
a) $(m_2\text{sen}\,\theta - \mu)(m_1 + m_2\cos\theta)g/(m_1 + m_2 + M)$,
b) $T_1 = \mu m_2 g + m_1 a$, $T_2 = T_1 + ½Ma$.

4. Una masa m_1 y una masa m_2 están suspendidas por una polea que tiene un radio R y una masa m_3. La cuerda tiene un masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia D. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.



5. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde.
Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo.
a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada en el círculo punteado?
b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición de la circunferencia punteada?
c) Repetir para un aro uniforme

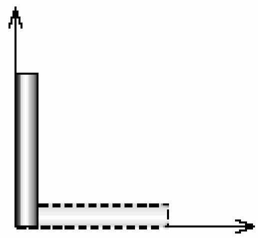


Respuesta. a) $2(Rg/3)^{1/2}$, b) $4(Rg/3)^{1/2}$, c) $(Rg)^{1/2}$.

6. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una pelota de 0,25 m de radio y 3 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6 m sobre el piso.
a) calcular la tensión de la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso.
b) Calcular la rapidez con el principio de la conservación de la energía.
Respuesta. a) 11,4N, 7,6 m/s^2, 9,5 m/s, b) 9,5 m/s.

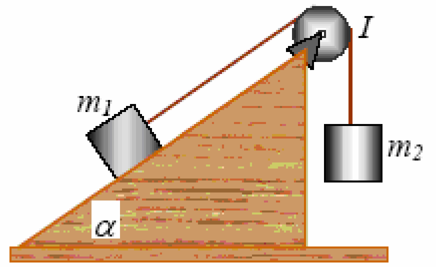
7. Una ligera cuerda de nylon de 4 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0,5 m de radio y 1 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se tira del carrete con una aceleración constante de 2,5 m/s^2. a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8 rad/s?
b) Suponiendo que no hay la suficiente cuerda sobre el carrete, ¿Cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular?
c) ¿Hay suficiente cuerda sobre el carrete?
Respuesta. a) 4 J, 1,6 s, c) sí.

8. Una barra uniforme de longitud L y masa M gira alrededor de un eje horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta desde el reposo en una posición vertical. En el instante en que está horizontal, encuentre
a) su rapidez angular,
b) la magnitud de su aceleración angular,
c) las componentes x e y de la aceleración de su centro de masa, y
d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje.
Respuesta. a) $(3g/L)^{1/2}$, b) $3g/2L$,
c) $-(3/2\hat{i} + ¾\hat{j})g$, d) $(-3/2\hat{i} + ¼\hat{j})Mg$.



9. Los bloques mostrados en la figura están unidos entre si por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque sobre la pendiente sin fricción

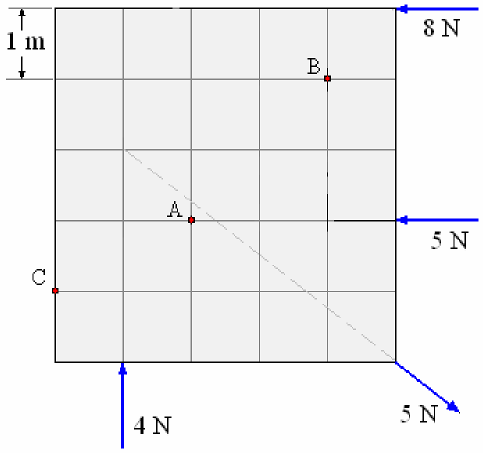
se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud a.
a) Determine las tensiones en las dos partes de la cuerda,
b) encuentre el momento de inercia de polea.



Respuesta. a) $T_1 = m_1(a + g\,\text{sen}\,\theta)$,
$T_2 = m_2(g - a)$

b) $m_2R^2\dfrac{g}{a} - m_1R^2 - m_2R^2 - m_1R^2\dfrac{g}{a}\text{sen}\,\theta$

10. Un cuerpo plano está sometido a cuatro fuerzas como se indica en la figura.
a) Hallar el módulo y dirección del torque actuante respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por el punto A.
b) Respecto a un eje que pasa por el punto B.
e) Respecto a un eje que pasa por el punto C.
d) Determinar la fuerza equivalente y su línea de acción.
e) Sustituir esta fuerza por otra que esté aplicada en A y un par de fuerzas o cupla aplicadas en los puntos B y C y hallar el valor mínimo de estas fuerzas.

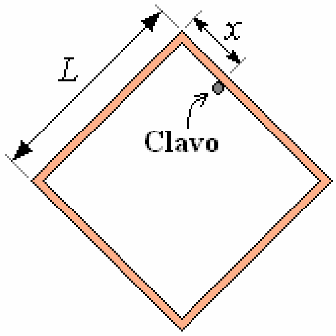


Respuesta.
a) τ = 23 Nm, b) τ = 23 Nm, c) τ = 24 Nm,

d) $\vec{F} = \hat{i} + \hat{j}$, $y = x - 23$,

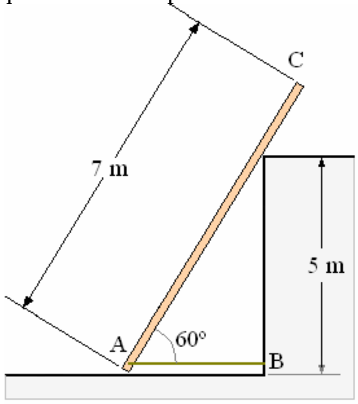
e) $\vec{F}_B = \dfrac{23}{25}\left(-3\hat{i} + 4\hat{j}\right) = -\vec{F}_C$

11. Un marco cuadrado de lado L. Se cuelga de un clavo rugoso de coeficiente de rozamiento estático μ_s. ¿A qué distancia del vértice está clavado si el marco está a punto de deslizar?



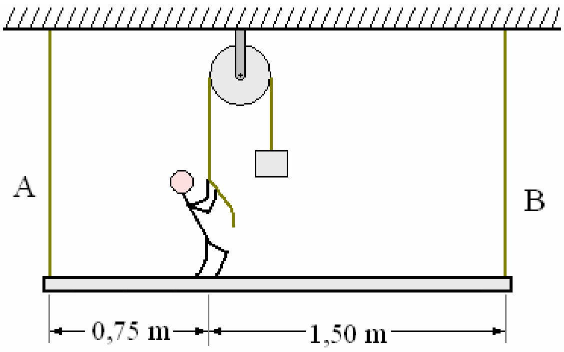
Respuesta. $x = \dfrac{L}{2}(1 - \mu_s)$

12. Determinar la tensión en el cable AB que Impide que el poste BC deslice. En la figura se ven los datos esenciales. La masa del poste es de 18 kg. Suponer que todas las superficies son lisas.



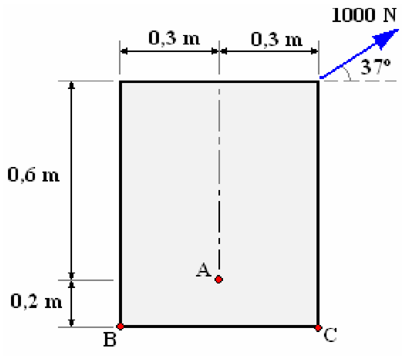
Respuesta. T = 46,2 N

13. Un hombre de 70 kg, sostiene un objeto de 31,9 kg. Como se indica en la figura. La polea carece de rozamiento. La plataforma sobre la que está situado el hombre está colgada mediante dos cuerdas en A y otras dos en B. ¿Cuál e tensión de una de las cuerdas en A?



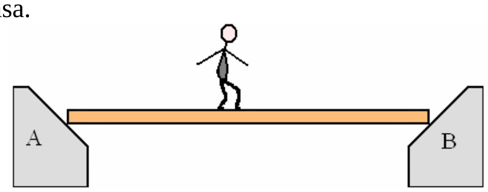
Respuesta. 124,5 N

14. Reemplace la fuerza de 1000 N de la figura por una fuerza que pasa por A y una cupla cuyas fuerzas actúan verticalmente a través de B C.



Respuesta. $\vec{F}_A = 800\hat{i} + 600\hat{j}$, $\vec{F}_B = 467\hat{j}$, $\vec{F}_C = -467\hat{j}$

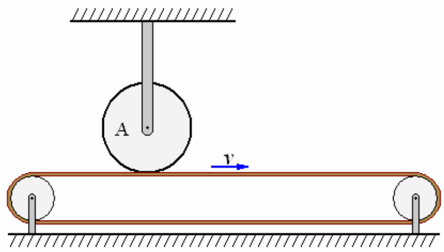
15. Un hombre de 60 kg que camina a 2 m/s atraviesa un tabla de 30 kg y 10 m de largó
a) ¿Cuál es la fuerza sobre el soporte B en función d tiempo?
b) Si la máxima fuerza que puede resistir B es 490 ¿Cuándo y dónde caerá al río el hombre?
Considerar que el peso del hombre siempre actúa en dirección de la vertical que pasa por su centro de masa.



Respuesta: a) $F_B = (12t + 15)9{,}8$ N, b) t = 2,92 s, x = 5,83 m de A.

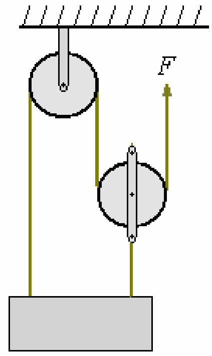
16. Un hombre de masa m quiere subir por una escalera. La escalera tiene masa M, largo L y forma un ángulo θ con e piso. El coeficiente de fricción entre la escalera y e peso es μ, mientras que la pared no tiene fricción.
a)¿A qué altura de la escalera puede llegar antes que comience a resbalar?
b) ¿Si el ángulo θ es el mayor sin que la escalera sola puede estar sin resbalar, cuál es la altura a la que puede llegar el hombre?
Respuesta. a)
$$\left[(m+M)\mu L \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} ML\cos\theta\right]\mu M\cos\theta$$
b) $L/2\mu$

17. El disco A tiene una masa de 2 kg y un radio de 7,5 cm, se coloca en contacto con una correa que se mueve con una velocidad v = 15 m/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el disco y la correa es 0,2, calcular tiempo necesario para que el disco alcance una velocidad angular constante.



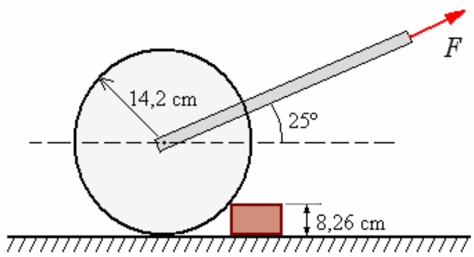
Respuesta. 3,82 s

18. Si se aplica La fuerza F a una cuerda ligera atada a un bloque con el sistema de poleas mostrado en la figura. ¿Cuál es el máximo peso que puede levantar?



Respuesta. 3F

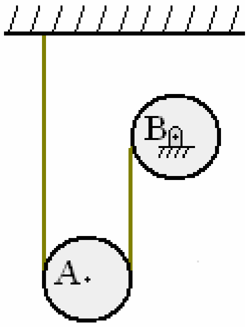
19. El rodillo que se ve en la figura tiene una masa de 339 kg ¿Que fuerza F es necesaria para subir el rodillo sobre el bloque?



Respuesta. F =3949,4 N

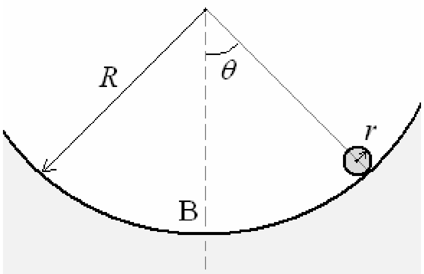
20. La línea de acción de una fuerza de 1N está en el plano xz y corta el eje z en un punto que dista 0,6 m del origen.
a) ¿Cuál es el torque respecto al eje y si el ángulo comprendido entre la dirección de la fuerza y el eje z es 60º?
b) ¿Si el ángulo e l80º?
c) ¿Si el ángu1o es 330º?
Respuesta. a) τ = 0,52 N m , b) τ = 0
c) τ = - 0,3 N m

21. Dos discos de masa 10 kg y radio R = 0,3 m cada uno están conectados mediante una cuerda. En el instante mostrado en la figura, la velocidad angular del disco B es de 20 rad/s en sentido horario. Calcular cuánto sube el disco A cuando la velocidad angular del disco B sea de 4 rad/s.



Respuesta. 1,54 m

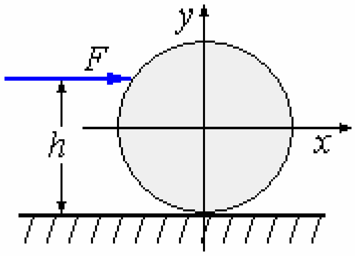
22. Un cilindro de masa ni y radio r rueda sin deslizar sobre la cara interior de una superficie cilíndrica de radio *R*. Sabiendo que la esfera parte del raposo en la posición indicada en la figura, obtener:
a) La velocidad de la esfera al paso por B.
b) El módulo de la reacción normal en cada instante.



Respuesta. a) $\sqrt{\frac{4}{3}g(R-r)(1-\cos\theta)}$,

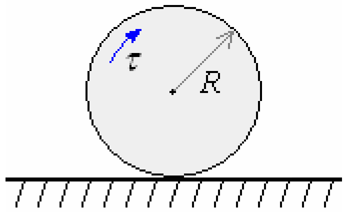
b) $\frac{mg}{3}(7-4\cos\theta)$

23. ¿A que altura sobre la mesa debe golpearse una bola de billar con un taco mantenido horizontalmente para que la bola comience su movimiento sin rozamiento entre ella y la mesa?



Respuesta. 7/5*R*

24. Un cilindro homogéneo de masa m y radio R descansa sobre un plano horizontal. Se aplica un torque, según se indica en la figura. Hallar el valor del coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano para que aparezca rodadura pura.



Respuesta. $\mu \geq \frac{2\tau}{3mgR}$

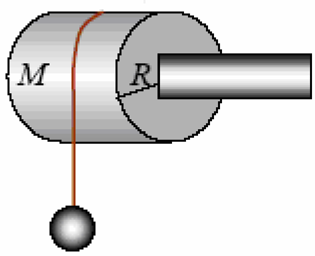
25. Una esfera de l00 kg de masa y 0,6 m de diámetro baja rodando, partiendo del reposo, por un plano inclinado 25º. recorriendo 30 m..
a) ¿Cuál es su energía cinética al cabo de los 30 m?
b) ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa?
Respuesta. a) 1268 kg m, b) 13,3 m/s

26. Un pasajero viaja de pie en un ómnibus. El ómnibus se mueve con una velocidad de 50 km/h cuando el conductor aplica los frenos. El ómnibus desacelera de modo uniforme durante una distancia de 15 ni hasta detenerse. ¿Qué ángulo respecto a la vertical deberá inclinarse el pasajero para evitar su caída?
Respuesta. 33,27 hacia atrás.

27. a) ¿Cómo podría distinguirse una esfera de oro de otra de plata si ambas tuviesen el mismo peso, el mismo radio y las dos estuvieron pintadas del mismo color?
b) ¿Cómo podría distinguir un huevo duro de uno fresco si estuvieran juntos?

28. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior *R/2*, radio exterior *R* y masa *M* . Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa *m* se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa *m* desciende a partir del reposo una distancia *y* durante un tiempo *t*. Demuestre que el torque debido a la fuerza de roce entre el carrete y el eje es:

$$\tau = R\left[m\left(g-2\frac{y}{t^2}\right)-\frac{5}{4}M\frac{y}{t^2}\right]$$



29. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal.
En el instante en que se su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine:
a) la energía cinética traslacional de su centro de masa,

b) la energía rotacional de su centro de masa, y c) su energía total.
Respuesta. a) 500 J, b) 250 J, c) 750 J.

30. Una esfera sólida tiene un radio de 0,2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una rapidez angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).

31. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura *h*. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus rapideces cuando alcanzan el pie de la pendiente ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

32. Una bola de boliche tiene una masa *M*, radio *R* y un momento de inercia de $(2/5)MR^2$. Si rueda por la pista sin deslizar a una rapidez lineal *v*, ¿Cuál es su energía total de función de *M* y *v*?
Respuesta. $0,7Mv^2$.

33. Un anillo de 2,4 kg de masa de radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de θ = 37° con la horizontal. En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia de 2 m al ascender por el plano su rapidez es de 2,8 m/s.
El anillo continua ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?

34. Una barra rígida ligera de longitud *D* gira en el plano *xy* alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se conectan a sus extremos. Determine la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del centro de la barra en el instante en que la rapidez de cada partícula es *v*.
Respuesta. $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)vD$.

35. Un péndulo cónico consta de masa *M* que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento la cuerda de longitud *L* mantiene un ángulo constante con la θ vertical. Muestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la masa respecto del punto de soporte es:

$$L = \sqrt{\frac{gM^2L^3\text{sen}^4\theta}{\cos\theta}}$$

36. Una partícula de masa *m* se dispara con una rapidez *vo* formando un ángulo θ con la horizontal. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en:
a) el origen,
b) el punto más alto de su trayectoria,
c) justo antes de chocar con el suelo.

Respuesta. a) 0, b) $-\frac{mv_0^3}{2g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$,
c) $-\frac{2mv_0^3}{g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$

37. Un disco sólido uniforme de masa *M* y radio *R* gira alrededor de un eje fijo perpendicular su cara. Si la rapidez angular es ω, calcular la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación
a) pasa por su centro de masa, y
b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

38. Una partícula de 0,4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla de 0,1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regla se articula en torno de un eje,
a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm,
b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.
Respuesta. a) 0,43 kgm^2/s, b) 1,7 kgm^2/s.

39. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg·m2 y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en sentido horario (cuando se observa desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1,5 m/s en relación con la Tierra.
a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la mesa giratoria
b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria?
Respuesta. a) 0,36 rad/s, antihorario.

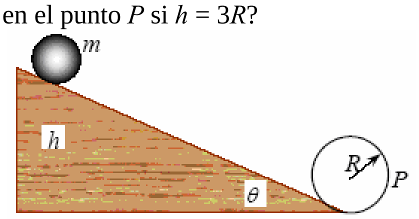
40. Una barra uniforme de masa *M* y longitud *d* gira en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa *m*, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones *x* (donde $x < d/2$) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira una rapidez angular ω. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre,
a) la rapidez angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y

b) la rapidez angular de la barra después de que las cuentan han salido de ella.

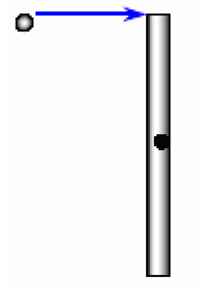
41. Un bloque de madera de masa M que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable. La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa m que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con rapidez v golpea el bloque y queda incrustada en él.
a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque?
b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión?
Respuesta. a) $mv\ell$, b) $M/(M+m)$.

42. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo. A medida que el disco desciende, demuestre que
a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco.
b) La magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y
c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{½}$.
Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

43. Una pequeña esfera sólida de masa m y de radio r rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura h, donde h es grande comparada con r
a) Cuál es el valor mínimo de h (en función de R) de modo que la esfera complete la trayectoria?
b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto P si $h = 3R$?

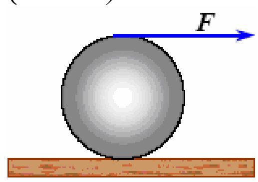


44. Un proyectil de masa m se mueve a la derecha con rapidez v_0. El proyectil golpea y queda fijo en extremo de una barra estacionaria de masa M y longitud D que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro.
a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión.
b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debida a la colisión.

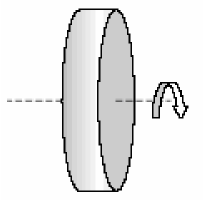


45. A una bola de boliche se le da una rapidez inicial v_o en una canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y la canal es μ. Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro,
a) la rapidez del centro de masa de la bola es $5v_o/7$, y
b) la distancia que recorre es $12\ v_o^2/49\ \mu g$.
(Sugerencia: Cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro, $v_{cm} = R\omega$. Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que $a_{cm} = \mu g$.)

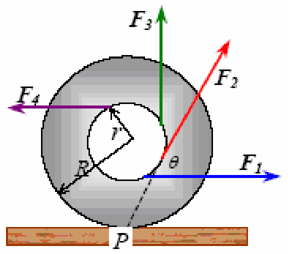
46. El alambre de un carrete de masa M y radio R se desenrolla con una fuerza constante F. Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es $4F/3M$, y
b) la fuerza de fricción es hacia la derecha y su magnitud es igual a $F/3$.
c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia D?
Respuesta. c) $(8FD/3M)^{½}$.



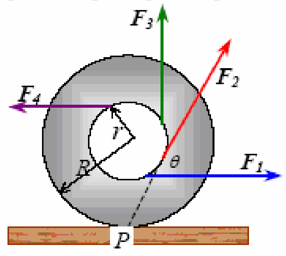
47. Suponga un disco sólido de radio R al cual se le da una rapidez angular ω_o alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en la. Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ.
a) Calcular la rapidez angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro.
b) Calcular la pérdida fraccionaria de energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro
c) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es $R\ \omega_o/3\ \mu\ g$.
d) Muestre que el tiempo que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es $R^2\ \omega_o{}^2/18\ \mu\ g$.



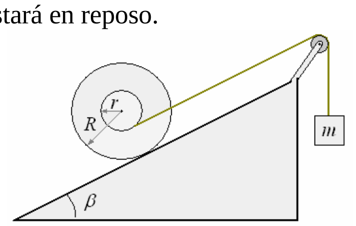
48. La figura muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se tira, no se desliza en el punto de contacto P. El carrete se tira en las direcciones indicadas por medio de los vectores F_1, F_2, F_3 y F_4. Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de F_2 pasa por P.



49. El carrete mostrado en la figura tiene un radio interior r y un radio externo R. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por $\cos\theta = r/R$.
(Sugerencia: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto.)

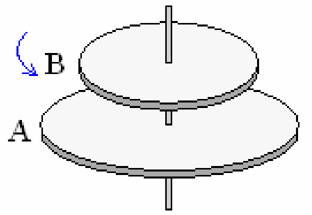


50. Se tiene un carrete sobre un plano inclinado, el cual tiene enrollado un hilo delgado y su extremo libre sujeta una masa m por medio de una polea sin fricción y masa despreciables. Se asume que la masa del carrete M está distribuida uniformemente en un círculo de radio R. Determinar el ángulo de inclinación β al cuál el centro de gravedad del carrete estará en reposo.



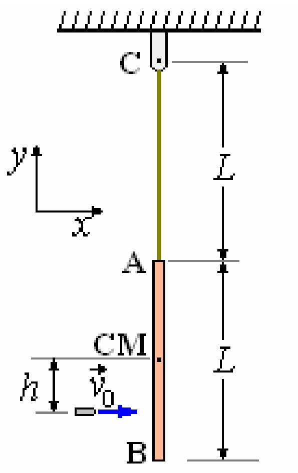
Respuesta. $\beta = \text{sen}^{-1}\dfrac{1}{\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right)}$. Estará en reposo solo si $\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right) \geq 1$

51. Los discos A y B son del mismo material y tienen el mismo espesor, pudiendo girar 1ibemente alrededor de un eje vertical. El disco B se encuentra en reposo cuando se deja caer sobre el disco A. el está girando con una velocidad angular de 400 rpm. Sabiendo que la masa del disco A es de 4 kg, calcular:
a) La velocidad angular final de los discos.
b) La variación de la energía cinética experimentada por el sistema.
$R_A = 0{,}1$ m, $R_B = 0{,}15$ m,



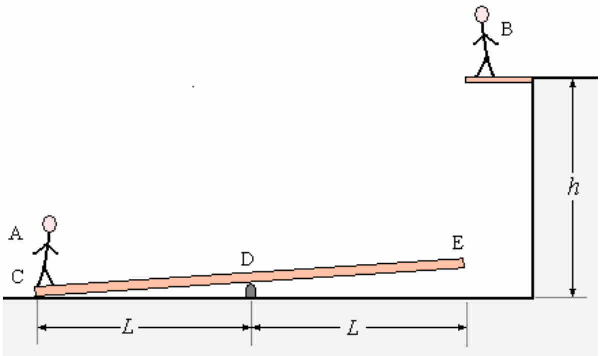
Respuesta. a) 334 rpm, .b).- 6,51 J

52. Una bala de 3g se dispara, con una velocidad horizontal de 550 m/s, contra. Una varilla de madera AB de longitud L = 0,750 m. La varilla que inicialmente está en reposo, se encuentra suspendida de una cuerda de longitud L = 0,750 m. Sabiendo que h = 0,150 m, calcular las velocidades de cada uno de los extremos de la varilla inmediatamente después de que la bala se haya incrustado.



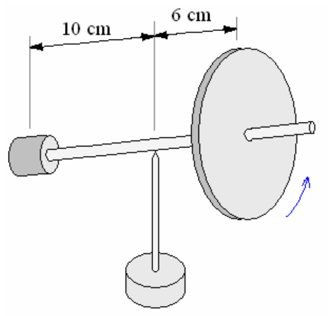
Respuesta. $\vec{v}_A = -0{,}566\hat{i}$, $\vec{v}_B = 6{,}22\hat{i}$

53. Un tablón masa M se apoya sobre un pequeño pivote D. Un gimnasta A de masa m está de pie sobre el extremo C del tablón, un segundo gimnasta B de la misma masa m salta desde la altura h y cae sobre el tablón en E. Suponiendo que este choque es perfectamente inelástico, determinar la altura que alcanzará el gimnasta A. (El gimnasta A permanece de pie completamente rígido).



Respuesta. $\dfrac{m^2 h}{(2m + M/3)^2}$

54. Un disco macizo de 1,2 kg de masa y 10 cm de diámetro está montado en un extremo de un eje de masa despreciable que está pivotado alrededor de un punto a 6 cm del, centro del disco en el otro extremo del eje, a una distancia de 10 cm del pivote, se cuelga un objeto de 0,96 kg de masa. Si la velocidad angular de giro del disco es 37,37 rad/s. ¿Cuál es la velocidad de precesión?



Respuesta. Ω = 2,1 rad/s

55. Una rueda de bicicleta de 82 cm de diámetro tiene una platina de acero enrollada en su parte exterior de modo que la masa resultante del sistema puede suponerse que está situada toda ella en la periferia de la rueda, siendo M = 7,3 kg sosteniendo los dos extremos del eje con las manos en la posición horizontal. El eje sobresale 15,2 cm a cada lado de la rueda. Mientras la rueda está girando con una velocidad angular de 25,12 rad/s se hace girar el eje con las manos en un plano horizontal alrededor de su centro. Calcular el valor y dirección de la fuerza que deberá ejercer en cada mano para producir una velocidad angular de precesión de 0,628 rad/s alrededor del centro.

Respuesta. un par de fuerzas de 64,6 N aplicadas en cada extremo del eje.