Capítulo 1

SISTEMAS DE COORDENADAS Y GRAFICAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1.1. SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO

Esta vez trabajaremos con pares ordenados (x, y) de números reales.

El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) se llama *plano numérico* y se denota con $\mathbb{R}^2$. Así:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Se trata ahora de identificar cada par ordenado de $\mathbb{R}^2$ con puntos en un plano geométrico tal como se hace con los números reales y los puntos de la recta. Usaremos para este fin el *Método de Descartes:*

Tomemos una recta horizontal en el plano geométrico y llamemos a ésta eje X, tomemos también una recta vertical y llamémosla eje Y. La intersección de los ejes se llama *origen,* y lo denotaremos con O. Escogemos una unidad de medida y con ella establecemos en cada recta un sistema coordenado cuidando de que el cero·de ambas coincidan con el origen. Fijamos además la dirección positiva en el eje X a la derecha del origen y la dirección positiva en el eje Y arriba del origen.

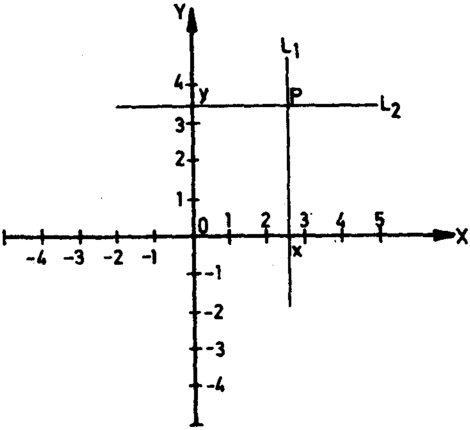

Fig. 1.1

Para cada punto P del plano consideremos las rectas L_1 y L_2 perpendiculares a los ejes X e Y, respectivamente, trazadas desde P. El número que corresponde a la intersección de L_1 con el eje X se llama *abscisa* de P (o *coordenada x*) y se denota con x, mientras que el número que corresponde a la intersección de L_2 con el eje Y se llama *ordenada* de P (o *coordenada y*) y se denota con y.

Por el método descrito siempre es posible asignarle a cada punto P del plano geométrico un único par ordenado (x, y) formado por su abscisa y ordenada. Recíprocamente, a cada par ordenado (u, v) de $\mathbb{R}^2$ se le puede asignar un único punto Q en el plano geométrico, el que

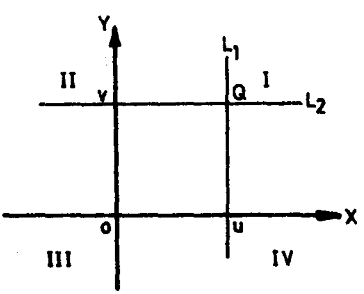

Fig. 1.2

se consigue ubicando el número u en el eje X y el número v en el eje Y para luego trazar las rectas L_1 y L_2 perpendiculares a los ejes X e Y, respectivamente, en los puntos correspondientes a u y v. La intersección de L_1 y L_2 será el punto Q buscado. (Fig. 1.2.)

Hemos establecido una *"correspondencia biunívoca"* entre cada punto P del plano geométrico y cada par (x, y) de $\mathbb{R}^2$ en el sentido siguiente:

"A cada punto P le corresponde un único par (x, y) y recíprocamente, a cada par (x, y) corresponde un único punto P".

La correspondencia biunívoca se llama un *sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas.*

Los ejes X e Y se llaman *ejes coordenados* y dividen al plano en 4 regiones cada una de las cuales se llama *cuadrante.* Se considera como primer cuadrante aquel en donde la abscisa y ordenada son positivas; los otros se enumeran siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj.

En virtud de la correspondencia establecida queda identificado $\mathbb{R}^2$ con el plano geométrico, de este modo podemos llamar a cada par (x, y) con la palabra *punto.* En adelante si el punto P tiene coordenadas (x, y) escribiremos $P = (x, y)$ o simplemente $P\ (x, y)$.

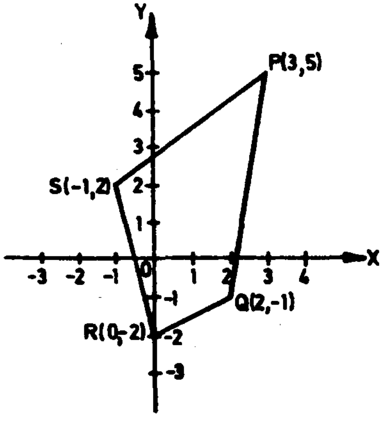

Fig. 1.3

Ejemplo 1.1. La gráfica del cuadrilátero cuyos vértices *PQRS* son P(3, 5), Q(2, –1), R(0, –2) y S(–1, 2) aparece en la figura 1.3.

El sistema cartesiano rectangular es un caso particular de los sistemas cartesianos en general, en los cuales el ángulo formado por los ejes puede tener cualquier medida entre 0° y 180°. Existe también en el plano otro sistema muy utilizado y que estudiaremos más adelante: el sistema de coordenadas polares.

1.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Obtendremos una fórmula que nos permita calcular la distancia entre dos puntos $P\ (x_1, y_1)$ y $Q\ (x_2, y_2)$. Por la correspondencia biunívoca establecida entre los planos numérico y geométrico podemos identificar la idea de distancia entre dos puntos con el concepto geométrico de longitud de un segmento. Si denotamos con $d\ (P, Q)$ a la distancia entre los puntos P y Q y por $\overline{PQ}$ al segmento que los une, entonces $d\ (P, Q) = |\overline{PQ}|$, donde las barras verticales indican longitud del segmento.

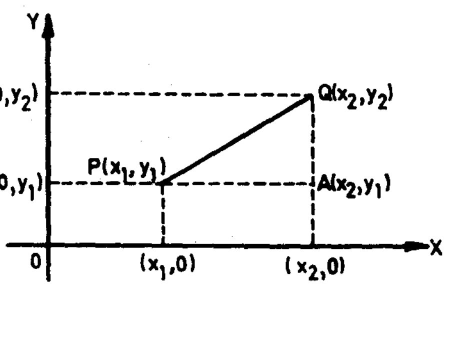

Fig. 1.4

Tracemos el triángulo rectángulo *PAQ* rectángulo en *A*. Las coordenadas del punto *A* son (x_2, y_1). Por encontrarse *P* y *A* sobre una recta paralela al eje de abscisas, entonces $d\ (P, A) = |\overline{PA}| = |x_2 - x_1|$. Por encontrarse Q y A sobre una recta paralela al eje de ordenadas, entonces $d\ (Q, A) = |y_2 - y_1|$. Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$d\ (P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}\ .$$

Esto es:

$$d\ (P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Observaciones: Se deduce inmediatamente de la fórmula de la distancia las siguientes propiedades:

1. $d\ (P, Q) = d\ (Q, P)$. Es decir la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q a P.

2. $d\ (P, Q) \geq 0$ y $d\ (P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.

Ejemplo 1.2. a) si $P = (1, 2)$ y $Q = (4, 6)$, entonces

$$d\ (P, Q) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$$

b) si $P = (1, 2)$ y $Q = (3, -4)$, entonces

$$d\ (P, Q) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-4 - 2)^2} = 2\sqrt{10}$$

c) si $P = (7, 5)$ y $Q = (7, 3)$, entonces

$$d\ (P, Q) = \sqrt{(7 - 7)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2} = |3 - 5| = 2.$$

Ejemplo 1.3. Usar el teorema de Pitágoras para probar que el triángulo cuyos vértices son

$A = (1/4, 3/4)$, $B = (1/2, 1/2)$ y $C = (4, 4)$ es rectángulo.

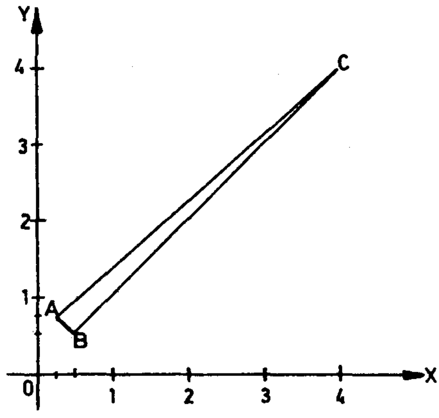

Fig. 1.5

El lado $\overline{AB}$ mide:

$$d\ (A,\ B) = \sqrt{(1/4 - 1/2)^2 + (3/4 - 1/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

El lado $\overline{BC}$ mide:

$$d\ (B,\ C) = \sqrt{(4 - 1/2)^2 + (4 - 1/2)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

El lado $\overline{CA}$ mide:

$$d\ (C,\ A) = \sqrt{(4 - 1/4)^2 + (4 - 3/4)^2} = \frac{\sqrt{394}}{4}$$

Se tiene además que: $(d\ (A,\ B))^2 + (d\ (B,\ C))^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$$+\left(\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{197}{8} = (\mathrm{d}\ (C,\ A))^2.$$

Luego se trata de un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{AC}$.

Ejemplo 1.4. Probar que las diagonales de un rectángulo tienen longitudes iguales.

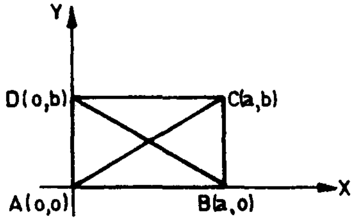

Fig. 1.6

Para simplificar las expresiones de cada uno de los vértices, tracemos el rectángulo de tal modo que dos de los lados consecutivos coincidan con los ejes. De este modo los vértices son:

$A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, b)$ y $D = (0, b)$.

Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos que:

$$d\ (D, B) = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \text{y}$$

$$d\ (A, C) = \sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

luego $\quad d\ (D, B) = d\ (A, C)$.

Ejemplo 1.5. Determinar un punto equidistante de los puntos $A = (1, 7)$, $B = (8, 6)$ y $C = (7, -1)$.

Sea $P = (x, y)$ el punto buscado. Debe cumplirse:

$d\ (P, A) = d\ (P, B) = d\ (P, C)$.

$d\ (P, A) = d\ (P, B)$ se cumple si y sólo si:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 7)^2} = \sqrt{(x - 8)^2 + (y - 6)^2}\ ; \qquad \text{(a)}$$

$d\ (P, A) = d\ (P, C)$ se cumple si y sólo si:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 7)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + (y + 1)^2} \qquad \text{(b)}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (a) y (b) se obtiene el sistema:

$$7x - y - 25 = 0$$

$$3x - 4y = 0.$$

cuya solución es $x = 4$, $y = 3$. Luego el punto buscado es $P = (4, 3)$.

Definición 1.1. Dados los puntos $P = (x_1 , y_1)$ y $Q = (x_2 , y_2)$, el *punto medio* del segmento de recta que une P y Q se define como el punto M con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Se comprueba directamente que $d\,(P, M) + d\,(M, Q) = d\,(P, Q)$ y $d\,(P, M) = d\,(M, Q)$. Luego M *está en el segmento de recta* $\overline{PQ}$ y además equidista de sus extremos P y Q.

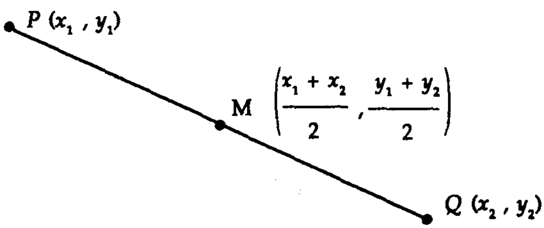

Fig. 1.7

Ejemplo 1.6. El punto medio del segmento que une los dos puntos $P = (3, 7)$ y $Q = (8, -3)$ es

$$M = \left(\frac{3 + 8}{2}, \frac{7 + (-3)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 2\right)$$

Ejemplo 1.7. Los vértices de un triángulo son $A = (1, 7)$, $B = (8, 6)$ y $C = (7, -1)$. Si D es el punto medio del lado $\overline{BC}$, hallar la longitud de la mediana $\overline{AD}$:

El punto medio D tiene coordenadas (15/2, 5/2). Luego la longitud de la mediana $\overline{AD}$ es:

$$\sqrt{(15/2 - 1)^2 + (5/2 - 7)^2} = \frac{\sqrt{250}}{2}$$

Ejemplo 1.8. Dado el cuadrilátero *ABCD* (figura 1.8), probar que el segmento que une los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, biseca al segmento que une los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

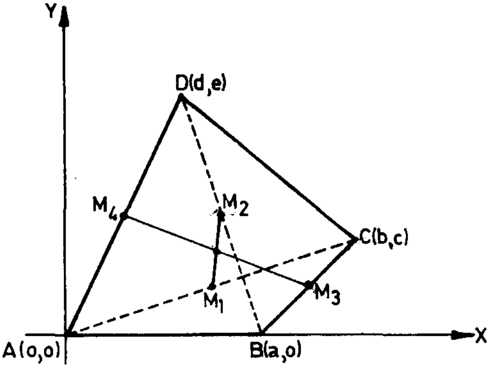

Fig. 1.8

Llamemos con M_1 y M_2 a los puntos medios de las diagonales y con M_3 y M_4 los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.

Las coordenadas de estos puntos medios son:

$$M_1 = (b/2,\ c/2)\ ,\quad M_2 = \left(\frac{a+d}{2}\ ,\ e/2\right).$$

$$M_3 = \left(\frac{a+b}{2}\ ,\ c/2\right)\ ,\quad M_4 = (d/2\ ,\ e/2)\ .$$

El punto medio del segmento que une M_1 y M_2

es $$\left(\frac{a+b+d}{4}\ ,\ \frac{e+c}{4}\right)$$

El punto medio del segmento que une M_3 y M_4 es

$$\left(\frac{a + b + d}{4}, \frac{c + e}{4}\right)$$

Como ambos puntos medios tienen iguales coordenadas entonces coinciden y se tiene demostrado lo pedido.

1.3. DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Dado el segmento de recta $\overline{P_1 P_2}$ que une los puntos P_1 y P_2 se trata de encontrar las coordenadas de un punto P (x, y) que esté en el segmento y lo divida en una razón dada.

Definición 1.2. Dados los puntos P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) y los números positivos r_1 y r_2 diferentes de cero, se dice que el punto P (x, y), del segmento que une P_1 y P_2, *divide al segmento en la razón* r_1 / r_2 si se cumple que:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ejemplo 1.9. El punto P $(8/3, 8/3)$ divide al segmento que une los puntos P_1 $(0, 0)$ y P_2 $(4, 4)$ en la razón 2.

En efecto:

$$\frac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \frac{\sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9}}}{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}}} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = 2$$

En los ejemplos y ejercicios, cuando se indican los extremos de un segmento, asumiremos que el extremo nombrado en primer orden es el extremo inicial (punto P_1) .

Ejemplo 1.10. El punto medio de un segmento divide a éste en la razón 1.

En efecto, si P_1 y P_2 son los extremos del segmento y M el punto medio, entonces $d\ (P_1\ , M) = d\ (M, P_2)$ y por tanto:

$$\frac{d\ (P_1\ , M)}{d\ (M\ , P_2)} = 1$$

Probaremos que si $P\ (x, y)$ divide al segmento con extremos P_1 (x_1, y_1) y $P_2\ (x_2\ , y_2)$ en la razón $r_1\ /\ r_2$, entonces:

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2} \qquad\qquad y = \frac{r_1\, y_2 + r_2\, y_1}{r_1 + r_2} \qquad (1.1)$$

Formemos los triángulos rectángulos P_1AP y PBP_2 (figura 1.9), donde las coordenadas de A son (x, y_1) y las de B, $(x_2\ , y)$

Por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{d\ (P_1\ , P)}{d\ (P, P_2)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Como el punto P divide al segmento en la razón r_1/r_2 , entonces:

$$\frac{d\ (P_1\ , P)}{d\ (P, P_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

luego, según sea la posición de P con respecto a P_1 y P_2 , se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad \text{(fig. 1.9 a)}$$

ó

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \qquad \text{(fig. 1.9 b)}$$

Despejando x de cualquiera de las expresiones anteriores se obtiene

$$x = \frac{r_1\, x_2 + r_2\, x_1}{r_1 + r_2}$$

De igual manera se obtiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \text{ó} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$$

y despejando y se consigue la fórmula

$$y = \frac{r_1\, y_2 + r_2\, y_1}{r_1 + r_2} \ .$$

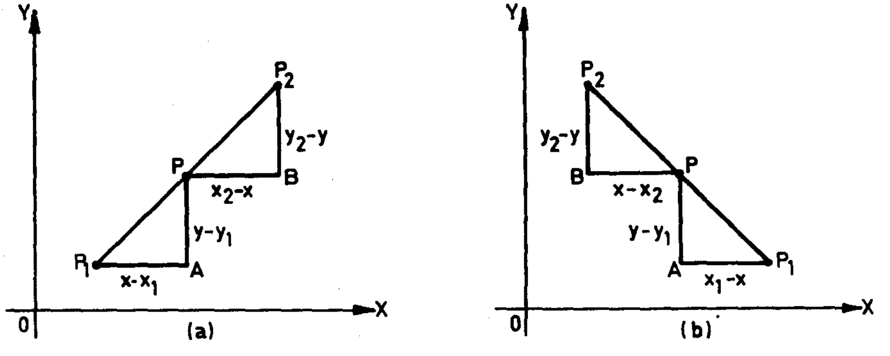

Fig. 1.9

Ejemplo 1.11. Encontrar las coordenadas del punto que divide al segmento de extremos P_1 (–2, 5) y P_2 (3, 0) en la razón 3/2.

En este caso, bastará sustituir en las fórmulas anteriores los valores $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 5$, $y_2 = 0$; obteniéndose:

$$x = 1, \qquad y = 2 \ .$$

El punto buscado tiene coordenadas P (1, 2).

Ejemplo 1.12. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las medianas (baricentro) del triángulo con vértices en $A(x_1,\ y_1)$,

$B(x_2\,,\,y_2)$ y $C(x_3\,,\,y_3)$. (Usar el hecho de que el baricentro divide a la mediana $\overline{AM_1}$, en la razón 2, siendo M_1 el punto medio del lado opuesto al vértice A).

Sea $P\,(x, y)$ el punto de intersección de las medianas. Se sabe que el baricentro divide a las medianas en la razón 2, en particular a la mediana $\overline{AM_1}$. Como M_1 tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\ ,\ \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

entonces utilizando las fórmulas de las coordenadas de un punto de división, se tiene para $r_1 = 2$, y $r_2 = 1$:

$$x = \frac{x_1 + 2\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right)}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + 2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

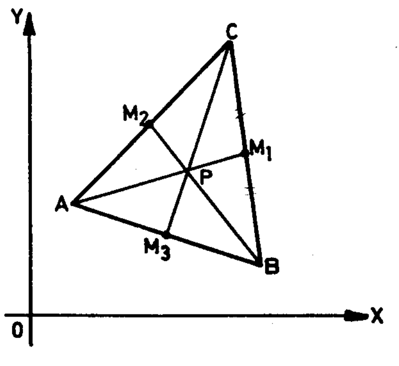

Fig. 1.10

Nota.— Las fórmulas establecidas en (1.1) consideran que el punto P de división pertenece al segmento $\overline{P_1\ P_2}$, es decir, el punto

P es un punto de división interno. Sin embargo, este concepto puede ser extendido para el caso en que el punto P está fuera del segmento. Si consideramos la misma definición y usamos la figura 1.11 se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d\ (P_1\ ,\ P)}{d\ (P,\ P_2)} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

de donde:

$$x = \frac{r_1\ x_2 + (-r_2)\ x_1}{r_1 + (-r_2)}\ ,$$

$$y = \frac{r_1\ y_2 + (-r_2)\ y_1}{r_1 + (-r_2)}$$

Observamos que las fórmulas que se obtienen para x e y son parecidas a las que se tienen en (1.1) salvo en el signo de r_2 . Esto indica que si establecemos, convencionalmente, que la *razón* r_1/r_2 *es negativa cuando P es externo,* se tendrá:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

obteniéndose de aquí las mismas fórmulas de (1.1).

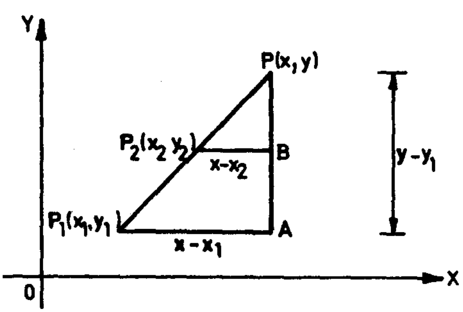

Fig. 1.11

Ejemplo 1.13. El segmento con extremos en P_1 (–2, –2) y P_2 (1, 0) es dividido por el punto P (x, y) en la razón –3/2. Encontrar P.

La razón negativa nos indica que P es un punto de división externo. En este caso $r = -3/2$ y podemos tomar $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$ (o también $r_1 = -3$ y $r_2 = 2$, el resultado es el mismo) :

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2} = \frac{(3)(1) + (-2)(-2)}{3 + (-2)} = 7$$

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2} = \frac{(3)(0) + (-2)(-2)}{3 + (-2)} = 4$$

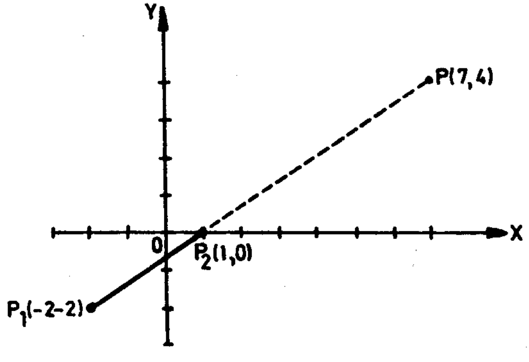

Fig. 1.12

EJERCICIOS 1.1

1. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son A (a, b), B $(a + c, b)$, C $(a + c, b + d)$.
2. P_1 (1, 1), P_2 (–3, –1) y P_3 (4, y) son vértices de un triángulo rectángulo. Hallar y.
3. La distancia del punto (x, –6) al punto (3, 4) es 10. Hallar el valor de x.
4. El punto (3, 4) es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Hallar las coordenadas del punto B si A = (1, 1).

5. Probar que el triángulo ABC con vértices A (0, 0), B (1/2, 1) y C (0, 5/4) es un triángulo rectángulo.
6. Pruebe que las diagonales de un trapecio isósceles tienen igual longitud.
7. Demuestre, usando la fórmula de distancia, que los puntos P_1 (0, 1), P_2 (3, 7) y P_3 (–3, –5) son colineales.
8. Pruebe que en un triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.
9. Hallar las longitudes de las medianas del triángulo cuyos vértices son A (– 4, 4), B (0, 0) y C (0, – 4).
10. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón –1/2 siendo P_1 (–4, –2) y P_2 (4, 6).
11. Hallar las coordenadas del punto P si :
    a) Está en el segmento con extremos P_1 = (1, 1), P_2 = (3, 4) y dista 4 veces más de P_1 que de P_2.
    b) Está en la prolongación del segmento con extremos P_1 = (0, 4) y P_2 = (3, 3) y $d\ (P, P_1) = 4\ d\ (P_1\ P_2)$.
12. Hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que dividen internamente al segmento de extremos A (0, 2) y B (–3, 10) en 3 partes iguales.
13. Hallar el área del rectángulo cuyos vértices opuestos son P_1 (4, 6) y P_2 (–1, – 4).
14. Probar que si dos medianas de un triángulo tienen longitudes iguales, éste es isósceles.
15. El triángulo ABC isósceles es rectángulo en A (–2, 1). Si el punto P (1, 4) divide al cateto $\overline{AC}$ en la relación

$$\frac{d\ (A,\ P)}{d\ (A,\ C)} = \frac{1}{2}$$

determinar la ordenada del vértice B, sabiendo que B se encuentra en el cuarto cuadrante.
16. Determinar el producto de las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo de vértices A (1, 2), B (5, 3) y C (3, 4).
17. Un triángulo tiene por vértices A (–4, –3), B (8, 0), y C (6, 12). Por el punto (36/5, 24/5) que pertenece al lado $\overline{BC}$ se traza una

paralela a $\overline{AB}$ que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto D. Calcular la abscisa de D.

18. Sabiendo que en un triángulo la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a las longitudes de los lados adyacentes, calcular la longitud de la bisectriz del triángulo ABC trazada desde A (1, 3), si $B = (-2, -3)$ y $C = (3, -1)$.
19. Los puntos extremos de un segmento son P_1 (6, 2) y P_2 (–3, 10). Determinar el punto P (x, y) que divide a este segmento en la razón $-8/3$.

1.4. GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES E INECUACIONES

Hemos estudiado el concepto de relación de un conjunto A en un conjunto B. Esta vez nos interesa el caso en donde A y B son iguales a $\mathbb{R}$. Es decir, relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Estas relaciones se llaman relaciones *reales*. Las relaciones reales que serán de mayor interés en nuestro desarrollo serán aquellas que están determinadas por ecuaciones o inecuaciones. Es el caso, por ejemplo, de la relación $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = x^2 + 1\}$, que está formada por todos los pares (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuya segunda componente es igual al cuadrado de la primera más uno. Otro caso es el de la relación $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y < x\}$, formada por todos los pares (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuya segunda componente es menor que la primera.

DOMINIO Y RANGO DE UNA ECUACION

En adelante, una relación real definida por una ecuación, será referida indicando tan sólo la ecuación que la determina. En tal sentido hablaremos del *dominio* de la ecuación o *extensión* de x y del *rango* de la ecuación o *extensión* de y en lugar del dominio o rango de la relación; correspondiendo al dominio los valores de x para los que puede obtenerse un valor y cuando x se reemplaza en la ecuación. Las mismas consideraciones se siguen si la relación está definida mediante una inecuación.

En virtud de la identificación de los pares de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con los puntos del plano geométrico, podemos representar a las relaciones reales en el plano geométrico y como en el caso del dominio y rango hablaremos de la representación gráfica de la ecuación o inecuación cuando se trate de representar gráficamente a relaciones definidas por ecuaciones o inecuaciones.

GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES

Tomemos la ecuación $y = x^2 + 1$ que define al conjunto R_1 descrito en la introducción y consideremos algunas soluciones de esta ecuación, es decir consideremos algunos pares (x, y) que satisfacen la ecuación. Por ejemplo el par (0, 1), obtenido al poner $x = 0$ en la ecuación. Del mismo modo obtenemos las soluciones (1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17), (–1, 2), (–2, 5), (–3, 10), (–4, 17), etc.

Las soluciones señaladas pueden disponerse en una tabla como la siguiente:

x	0	1	2	3	4	–1	–2	–3	–4
$y = x^2 + 1$	1	2	5	10	17	2	5	10	17

Es claro que tales soluciones no son todas las que satisfacen la ecuación. El número de soluciones es infinito.

Podemos ubicar en el plano geométrico los pares obtenidos y unirlos con una curva lisa. Si asumimos que esta curva contiene todas las soluciones y que todo punto que no esté en la curva no satisface la ecuación, entonces la curva trazada (Fig. 1.13) representa a la ecuación $y = x^2 + 1$.

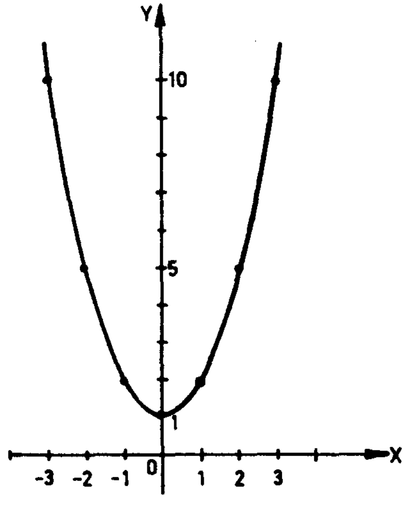

Fig. 1.13

Presentamos a continuación la definición de gráfica de una ecuación.

Definición 1.3. La *gráfica de una ecuación* en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares (x, y) de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación.

La gráfica de una ecuación también se llama *lugar geométrico o curva.* Generalmente se usa también la expresión "la gráfica de una ecuación", para referirse a la representación gráfica de los pares (x, y) que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1.14. Trazar la gráfica de $y = x + 1$

Algunos pares se muestran en la siguiente tabla:

x	0	1	2	4	-1	-2	-3
$y = x + 1$	1	2	3	5	0	-1	-2

Obsérvese que cualquiera que sea el valor de x que se reemplace en la ecuación siempre se obtiene un valor para y. También podemos obtener valores de x si reemplazamos valores determinados de y.

La gráfica que aparece en la figura 1.14 representa a la ecuación dada y corresponde a una recta.

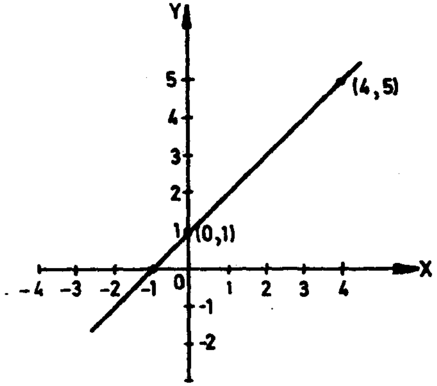

Fig. 1.14

Ejemplo 1.15. Trazar la gráfica de $y = |x|$

Cualquiera que sea el valor de x que se reemplace, este determina un valor de y real no negativo. Según esto no existirán puntos de la gráfica debajo del eje X.

Algunos pares que satisfacen la ecuación aparecen en la siguiente tabla:

x	0	1/2	1	2	3.4	–1	–3
$y = \|x\|$	0	1/2	1	2	3.4	1	3

La gráfica aparece en la figura 1.15.

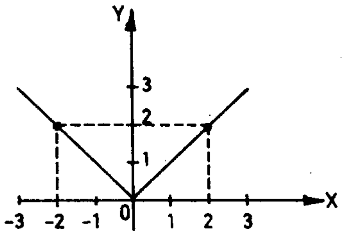

Fig. 1.15

Ejemplo 1.16. Trazar la gráfica de $y^2 + x = 4$.

La ecuación puede ser escrita en la forma: $y = \pm\sqrt{4 - x}$.

Algunas soluciones aparecen en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	−1	−2
$y = \pm\sqrt{4 - x}$	± 2	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{2}$	± 1	$\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{6}$

Cuando se reemplaza x por el valor 0, se obtiene ± 2, es decir se tienen los pares (0, 2) y (0, −2), cuando se reemplaza x por 1, se tienen los pares $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$, etc.

Nótese que los valores x que pueden ser reemplazados en la ecuación y para los cuales tiene ésta sentido, no pueden ser mayores que 4, es decir debe cumplirse $x \leq 4$. Si en la ecuación dada despejamos x, se observa en cambio que para cualquier valor de y, siempre se obtiene para x, un valor real: $x = 4 - y^2$.

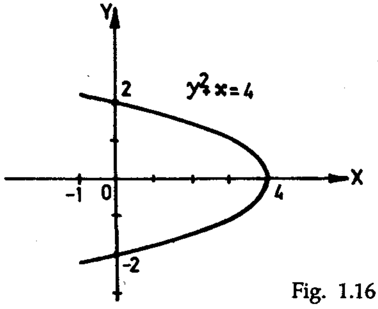

Fig. 1.16

Ejemplo 1.17. Determinar el dominio y rango de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Trazar la gráfica correspondiente.

Despejando el valor de y se tiene que $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$, de donde se observa que para que y tenga un valor real debe cumplirse: $9 - x^2 \geq 0$, es decir $x^2 \leq 9$, o sea $-3 \leq x \leq 3$. Por tanto el dominio es:

$$D = \{x \,/ -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3].$$

Si despejamos el valor de x: $x = \pm\sqrt{9 - y^2}$, se tiene que los valores de y para los que tiene sentido la ecuación deben cumplir: $9 - y^2 \geq 0$, y como en el caso anterior el rango es:

$$R = \{y \,/ -3 \leq y \leq 3\} = [-3, 3]\,.$$

Algunos pares que satisfacen la ecuación aparecen en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$	0	$\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{8}$	± 3	$\pm\sqrt{8}$	$\pm\sqrt{5}$	0

La representación de la gráfica aparece en la figura 1.17 y corresponde a una circunferencia de radio 3 y centro en (0, 0).

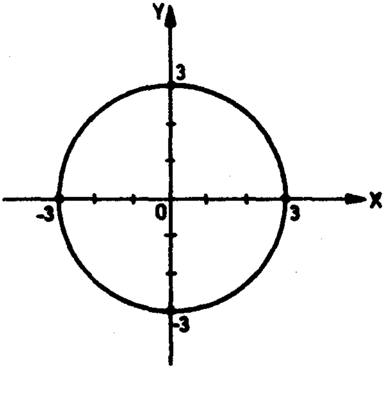

Fig. 1.17

Ejemplo 1.18. Trazar la gráfica de $y = 2$ e indicar el dominio y el rango.

La ecuación es independiente de x, cualquiera que sea el valor que se tome para x siempre se tiene que $y = 2$. El dominio es el conjunto de todos los números reales, mientras que el rango sólo tiene un elemento: {2} (Fig. 1.18).

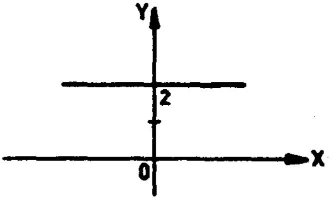

Fig. 1.18

Ejemplo 1.19. Determinar el dominio y el rango de la ecuación

$$y = \frac{|x|}{x} - 1$$

La ecuación tiene sentido para todo valor real de x diferente de 0. Luego el dominio se puede escribir como $\mathbb{R} - \{0\}$

Si $x < 0$, $y = \frac{-x}{x} - 1$, es decir $y = -2$

Si $x > 0$, $y = \frac{x}{x} - 1$, es decir $y = 0$.

Luego el rango de la ecuación está formado por dos valores: -2 y 0. El gráfico de la 'ecuación aparece en la figura 1.19.

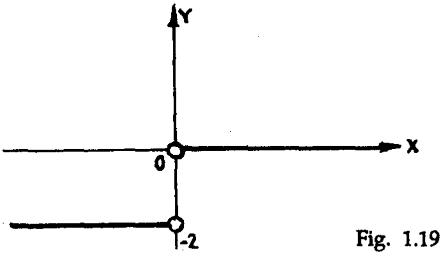

Fig. 1.19

Ejemplo 1.20. Trazar la gráfica de $(y - x)(y - x^3) = 0$.

Se sabe que en los números reales, $ab = 0$ es equivalente a decir que $a = 0$ ó $b = 0$, de aquí que la ecuación dada es equivalente a:

(a) $y - x = 0$ ó (b) $y - x^3 = 0$.

Los puntos que satisfacen la ecuación dada, satisfacen la ecuación (a) o la ecuación (b); así mismo, los puntos que satisfacen la ecuación (a) o (b) satisfacen $(y - x)(y - x^3) = 0$

La representación de la ecuación corresponde a las gráficas de $y = x$ y de $y = x^3$, (fig. 1.20).

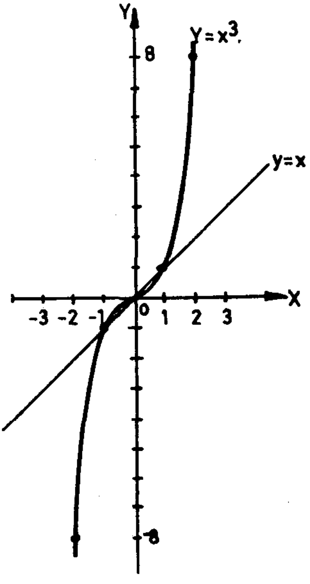

Fig. 1.20

El estudio y trazado de la gráfica de una ecuación puede efectuarse en forma más precisa si previamente a la determinación de puntos de la curva, se procede al análisis de ciertas características o propiedades de la gráfica, como por ejemplo: intersecciones con los ejes, simetría, extensiones y asíntotas.

El estudio de las extensiones se refiere a un punto tratado anteriormente, la determinación del dominio y rango de la ecuación. Los otros temas los trataremos a continuación.

INTERSECCIONES CON LOS EJES

Los puntos en el eje X tienen la forma $(x, 0)$, luego si queremos encontrar los puntos de intersección de una gráfica con el eje X, bastará con sustituir en su ecuación y por el valor 0, y resolver para x. Así mismo, si queremos hallar las intersecciones de la gráfica con el eje Y, bastará con sustituir el valor de x por 0 y resolver para y debido a que los puntos en el eje Y tienen la forma $(0, y)$.

Ejemplo 1.21. Intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Haciendo $y = 0$ en la ecuación se obtiene $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ ó factorizando:

$$(x - 1)\ (x + 1)\ (x + 3) = 0.$$

Luego $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-3, 0)$ son los 3 puntos de intersección de la gráfica con el eje X.

Haciendo $x = 0$, se obtiene $y = -3$. El único punto de corte de la gráfica y el eje Y es entonces $(0, -3)$.

SIMETRIA DE LA GRAFICA DE UNA ECUACION RESPECTO DE UNA RECTA

La siguiente definición es importante para definir, después, la simetría de la gráfica de una ecuación respecto de una recta.

Definición 1.4. Se dice que *los puntos P y P' son simétricos respecto de la recta L,* si ésta es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

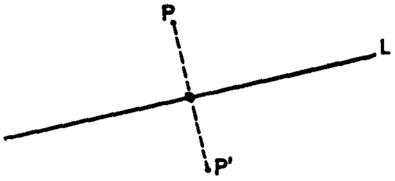

Fig. 1.21

Así el punto P (1, –2) es simétrico al punto P' (–1, –2) respecto de la recta $x = 0$ (eje Y) ; el punto Q (1, 0) es simétrico al punto Q' (0, 1) respecto a la recta $y = x$; el punto R (3, 3) es simétrico, respecto de la recta $y = 2$, con el punto R' (3, 1). (fig. 1.22).

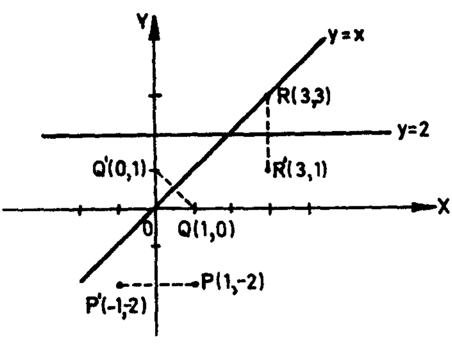

Fig. 1.22

Definición 1.5. La *gráfica de una ecuación es simétrica respecto a una recta* L si para todo punto P de la gráfica existe un punto Q de la gráfica tal que P y Q son simétricos respecto de L.

Es importante considerar la simetría respecto a los ejes coordenados.

SIMETRIA RESPECTO DEL EJE Y

Si un punto P (x, y) está en la gráfica de una ecuación que es simétrica respecto del eje Y, entonces el punto P' $(-x, y)$ también está en la gráfica. Recíprocamente, si los puntos P (x, y) y P' $(-x, y)$ satis-

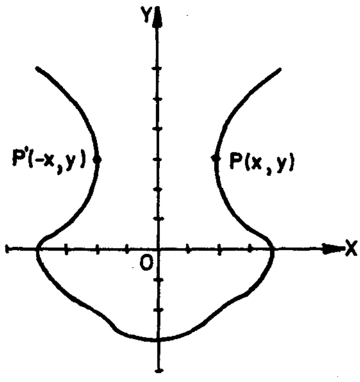

Fig. 1.23

facen una ecuación, entonces la gráfica de esta ecuación es simétrica respecto del eje Y. Luego, *la gráfica de una ecuación es simétrica respecto del eje si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente al reemplazar* x *por* $-x$. En la figura 1.23 aparece una gráfica simétrica al eje Y.

Ejemplo 1.22. La gráfica $y = x^2 + 1$ es simétrica respecto del eje Y, pues si sustituimos x por $-x$ en la ecuación ésta no se altera:

$$y = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \qquad \text{(ver figura 1.13).}$$

SIMETRIA RESPECTO DEL EJE X

De manera análoga al caso anterior, se tiene que: *la gráfica de una ecuación es simétrica respecto del eje* X *si y sólo si al sustituir* y *por* $-y$ *en la ecuación se obtiene otra ecuación equivalente a la primera.*

Ejemplo 1.23. La gráfica de $y^2 + x = 4$ es simétrica respecto al eje X. (Fig. 1.16).

Ejemplo 1.24. La gráfica de $y^2 - x^2 = 0$ es simétrica respecto del eje X, pues al reemplazar x por $-x$, se tiene $y^2 - (-x)^2 = 0$, que corresponde a una ecuación equivalente a la anterior. También es simétrica con respecto al eje Y.

SIMETRIA RESPECTO DE UN PUNTO

Definición 1.6. *Dos puntos P y P' son simétricos respecto del punto A,* si A es punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Así, (3, 1) es simétrico con el punto (5, 9) respecto del punto (4, 5); y (–9, 4) es simétrico con (9, –4) respecto del origen de coordenadas.

Definición 1.7. *Una gráfica es simétrica respecto del punto A,* si para cada punto P de la gráfica existe un punto P' de la gráfica que es simétrico respecto de A.

Es fácil demostrar que la *gráfica de una ecuación es simétrica respecto del origen de coordenadas si al sustituir x por $-x$ e y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente a la anterior* (fig. 1.24).

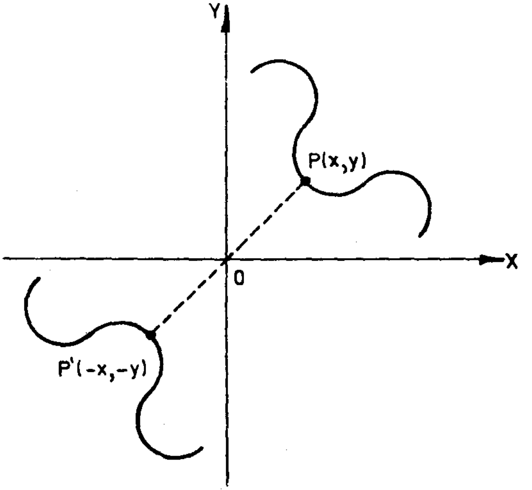

Fig. 1.24

Ejemplo 1.25. La gráfica de $y = x^3$ es simétrica respecto del origen de coordenadas pues $-y = (-x)^3$ corresponde a una ecuación equivalente a $y = x^3$.

Las simetrías estudiadas son importantes para la representación de curvas en el plano. Si una gráfica por ejemplo, es simétrica respecto del eje Y, bastará con encontrar su representación en el primer y cuarto cuadrante, y luego hacer uso de la simetría mencionada para completarla.

Ejemplo 1.26. Teniendo en cuenta el dominio, rango, las simetrías y las intersecciones con los ejes, trazar la gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Dominio y rango:

La ecuación la podemos escribir en la forma:

$$y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2},$$

luego los valores de x para los cuales existe un valor real de y son aquellos que cumplen con la relación: $4 - x^2 \geq 0$ ó en forma equivalente con la relación $(2 - x)(2 + x) \geq 0$; ésta a su vez es equivalente a las relaciones $2 - x \geq 0$ y $2 + x \geq 0$ ó a las relaciones $2 - x \leq 0$ y $2 + x \leq 0$. Resolviendo las dos primeras resulta que x debe cumplir con la relación $-2 \leq x \leq 2$, mientras que si resolvemos las dos últimas relaciones, tendremos los resultados: $x \geq 2$ y $x \leq -2$ que no pueden ser cumplidos por un valor de x, simultáneamente. Luego el dominio es $[-2, 2]$.

Si despejamos el valor de x en la ecuación dada,

$$x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - y^2}$$

se tiene, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, que los valores de y para los que existe un valor real de x son aquellos que satisfacen la relación $-3 \leq y \leq 3$, que representa el rango de la ecuación.

Simetría:

La gráfica es simétrica respecto del eje Y pues reemplazando x por $-x$ en la ecuación se tiene otra ecuación equivalente:

$$\frac{(-x)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Asimismo se puede comprobar que la gráfica es simétrica con respecto del eje X y con respecto del origen. Bastará con graficar en el primer cuadrante.

Intersecciones:

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación se tiene: $\dfrac{x^2}{4} = 1$,

resolviendo para x resulta: $x = \pm 2$.

Luego las intersecciones con el eje X son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Haciendo $x = 0$ y resolviendo para y en la ecuación, se tiene que $y = \pm 3$; por tanto las intersecciones con el eje Y son $(0, 3)$ y $(0, -3)$.

La gráfica está representada en la figura 1.25 y corresponde a una elipse, curva que estudiaremos en detalle más adelante.

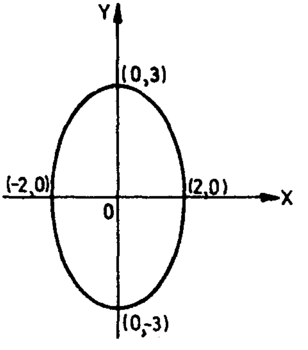

Fig. 1.25

ASINTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES DE LA GRAFICA DE UNA ECUACION

Consideremos la ecuación: $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

Algunos pares de la gráfica de esta ecuación se escriben en la siguiente tabla:

x	5	4	3	2	1.5	1.3	1.2	1.1	1.01	0.7	0.9	0.99
$y = \dfrac{1}{x-1}$	1/4	1/3	1/2	1	2	10/3	5	10	100	-10/3	-10	-100

La representación de la ecuación aparece en la figura 1.26

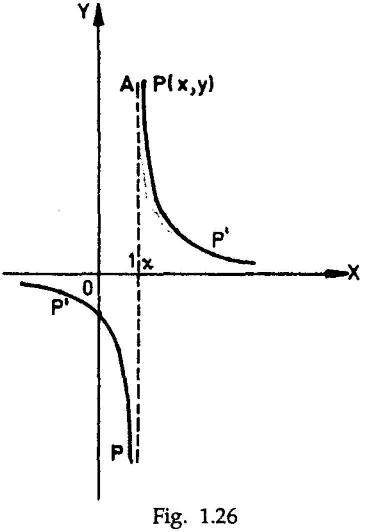

Fig. 1.26

Obsérvese que a medida que los valores de x se acercan a 1 por la derecha, el punto P (x, y) se aleja cada vez más del origen mientras que el segmento de perpendicular trazado de P a la recta $x = 1$ tiene longitud cada vez más pequeña.

Consideraciones análogas podemos hacer cuando x toma valores cada vez más cercanos a 1 por la izquierda. En este caso se dice que la recta $x = 1$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de

$$y = \frac{1}{x - 1} \quad .$$

Por otro lado, si la ecuación dada se escribe

$$x = \frac{1}{y} + 1 \;,$$

se observa que a medida que y se acerca a 0 por encima del eje X, el punto $P\ (x,\ y)$ que se obtiene se aleja cada vez más del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta $y = 0$ (eje de las x), tiende a 0. La recta $y = 0$ se llama en este caso *asíntota horizontal* de la gráfica de

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

En general decimos que: la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical de la gráfica de una ecuación si cuando* x se acerca a x_0 por la derecha (o por la izquierda), el punto $P\ (x,\ y)$ que se obtiene se aleja indefinidamente del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta tiende a 0; y que la recta $y = y_0$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de esta ecuación si cuando y se acerca a y_0 por arriba (o por debajo), el punto $P\ (x,\ y)$ que se obtiene se aleja indefinidamente del origen a la vez que la longitud del segmento de perpendicular trazado de P a la recta tiende a 0.

Ejemplo 1.27. La ecuación

$$y = \frac{1}{x^2}$$

tiene como asíntota vertical a la recta $x = 0$ (eje de las Y) y como asíntota horizontal a la recta $y = 0$ (eje de las X) (fig. 1.27).

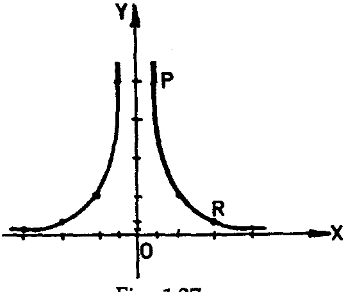

Fig. 1.27

Ejemplo 1.28. La ecuación

$$y = \frac{1}{x + 3} + 1$$

tiene como asíntota vertical a la recta $x = -3$ y como asíntota horizontal a la recta $y = 1$. Esta última se obtiene si se escribe la ecuación en la forma $x = \dfrac{1}{y - 1} - 3$. Véase la figura 1.28 .

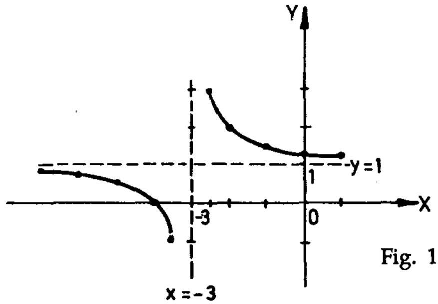

Fig. 1.28

Ejemplo 1.29. La gráfica de la ecuación

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

tiene como asíntotas verticales a las rectas $x = 1$ y $x = -1$ y como asíntota horizontal a la recta $y = 0$. Estas afirmaciones se constatan si en primer lugar se escribe la ecuación como

$$y = \frac{1}{(x - 1)\ (x + 1)}$$

(para las asíntotas verticales) y en la forma $\dfrac{1}{y} + 1 = x^2$ para la asíntota horizontal. (Fig. 1.29) .

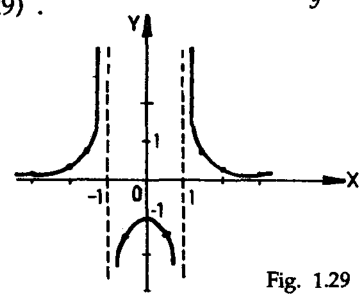

Fig. 1.29

INTERSECCIONES DE GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES

A menudo es importante conocer puntos que están a la vez en dos o más gráficas definidas por ecuaciones; la manera de hallar tales puntos se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.30. Hallar la intersección de las gráficas definidas por las ecuaciones:

$$y + x = 5 \quad \text{y} \quad x - y = 2\ .$$

Si existe algún punto de intersección, este deberá satisfacer ambas ecuaciones, de ahí que resolviendo el sistema tendremos el o los puntos de intersección.

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ x - y = 2\ , \end{cases}$$

se tiene que $x = 7/2, \quad y = 3/2.$

Luego existe un punto de intersección, $P = (7/2,\ 3/2)$.

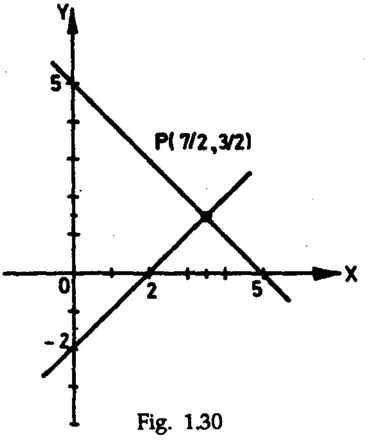

Fig. 1.30

Ejemplo 1.31. Hallar la intersección de las gráficas de

$$x^2 + 2y^2 = 3 \qquad \text{y} \qquad y = x + 2.$$

Como en el caso anterior, resolvemos el sistema;

$$x^2 + 2y^2 = 3 \qquad \text{(a)}$$

$$y - x = 2 \qquad \text{(b)}$$

De b) se tiene $y = 2 + x$, valor que reemplazado en a) nos da: $x^2 + 2\,(2 + x)^2 = 3$ ó $3x^2 + 8x + 5 = 0$, de donde

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -5/3.$$

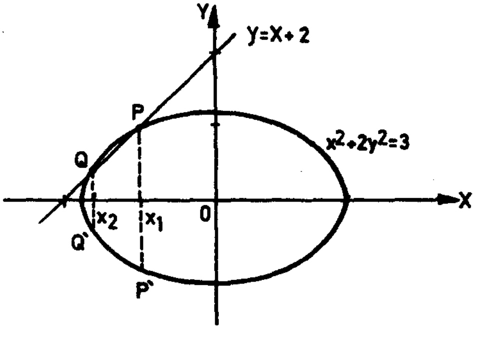

Fig. 1.31

Reemplazando los valores hallados para x en la ecuación b) se tienen los puntos $P = (-1, 1)$ y $Q = (-5/3, 1/3)$ intersección de las gráficas.

Conviene hacer la aclaración siguiente: si el reemplazo de x_1 y x_2 se efectúa en la ecuación a) entonces se obtiene, además de los puntos P y Q, los puntos P' $(-1, -1)$ y Q' $(-5/3, -1/3)$.

Sin embargo estos últimos puntos no están en la intersección pues si bien satisfacen b) en cambio no satisfacen a).

Ejemplo 1.32. Hallar $A \cap B$ donde:

$$A = \{(x, y) \ / \ 2x^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{y}$$
$$B = \{(x, y) \ / \ x^2 + 2y^2 = 1\}$$

$A \cap B$ tiene por elementos los pares $P\ (x, y)$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones $2x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + 2y^2 = 1$, es decir el sistema:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + 2y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda multiplicada por –2, se obtiene: $-3y^2 = -1$ de donde $y = \pm\sqrt{1/3}$ que reemplazado en la primera ecuación da $2x^2 = 2/3$ o $x = \pm\sqrt{1/3}$.

Luego:

$$A \cap B = \{(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}), (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}), (-\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}), (\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3})\}$$

EJERCICIOS 1.2

1. Determinar en que cuadrantes pueden estar los puntos $P\ (x, y)$ si:

   a. $xy = 9$
   b. $x - y = 0$
   c. $xy = -9$
   d. $y = |x| + 1$
   e. $x^2 = y^2$

2. Determinar el punto simétrico de:

   a) $A\ (2, 3)$ b) $B\ (-1, 4)$ c) $C\ (0, 4)$ d) $D\ (-1, 1/2)$, respecto de: el origen de coordenadas, el eje X, el eje Y, la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

3. Estudiar la simetría con respecto al eje X, eje Y y del origen, de las siguientes ecuaciones:

   a. $y = x^4$
   b. $y^2 = |x|$
   c. $2x^2 + 3y^2 = 1$
   d. $y = \sqrt{5x + 1}$
   e. $xy + y^2 = 7x - 1$

4. Determinar el dominio y rango de las siguientes ecuaciones:
   a. $x^2 - y^2 = 0$
   b. $y + 2x + 1 = 0$
   c. $y = x^2 + 4$
   d. $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$
   e. $yx = 4$
   f. $y = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x \end{cases}$
   g. $x^2y + 2xy - 1 = 0$
   h. $2xy^2 + 2yx = 1$
   i. $|x| + |y| = 1$
   j. $|x| = 1$
   k. $y = -x - |x - 2|$

5. Hallar el rango de las siguientes ecuaciones si el dominio es el que se indica:

   a. $y = 2x + 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} \ / -1 \leq x \leq 5\}$
   b. $y = x^2 + 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x\}$
   c. $y = x^3$; $D = \{x \in \mathbb{R} \ / -2 \leq x \leq 1\}$
   d. $y = |x|$; $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \leq 2\}$
   e. $xy = 1$; $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \leq 1\}$

6. Teniendo en cuenta el dominio, rango, simetría respecto del eje X, eje Y y origen, intersecciones con los ejes y asíntotas, representar las gráficas de las siguientes ecuaciones:

   a. $y = -x - 3$
   b. $y = 2x^2 + 3$
   c. $y + x^3 + 1 = 0$
   d. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
   e. $x^2 - y^2 = 1$
   f. $y = \sqrt{x + 1}$
   g. $x + y^2 = 4$
   h. $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   i. $y = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$
   j. $y = \dfrac{|x| + x}{2}$

k. $|y| = 2x + 3$

l. $(x + y)(y - 1) = 0$

m. $y^2 - x^2y - xy + x^3 = 0$

n. $x^2 - y^2 = 0$

o. $x^3 - x^2y - 6xy^2 = 0$

p. $|x^2 - 4| = y + 4$

q. $\dfrac{1}{(y - 1)^2} = x$

r. $y - 3 = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

s. $y^3 = x^2$

t. $|y + x| = x$

u. $(x^2 + 5x - 24)\, y = x + 8$

v. $(x - 4)y^2 = x + 3$

w. $(1 + x^2)y = x$

7. En cada uno de los casos siguientes hallar los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones dadas:

a. $y = 4x^2$
$y = 8x$

b. $y^2 = 4x$
$x - y = -4$

c. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
$x + y = 4$

d. $x\,y = 1$
$x + y = 2$

e. $y^2 + 2xy - 3x^2 + 7 = 0$
$x - 3y + 1 = 0$

f. $x^2 + y^2 - 2x = 1$
$2x + y - 5 = 0$

g. $3xy + 6x = 4y$
$2y - 3x - 4 = 0$

h. $x^2 + y^2 = 1$
$y = x^2$

i. $x^2 + y^2 = 1$
$y = x^3$

j. $x^2 + y^2 = 4$
$x^2 - y^2 = 1$

k. $-x^2 + y^2 = 1$
$x^2 - y^2 = 1$

l. $-x^2 + y^2 = 1$
$2x^2 - y^2 = 5$

GRAFICAS DEFINIDAS POR INECUACIONES

Consideremos ahora el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y < 2x + 1\}$, de todos los pares cuya segunda componente es menor que el doble de la primera componente más 1.

Algunos pares que están en B o que satisfacen la inecuación son: (2, 1), (10, 9), (7, –8), (0, 0.5). Para representar la gráfica de la inecuación tracemos la gráfica de $y = 2x + 1$ que corresponde a una recta que divide al plano en dos partes denominadas semiplanos.

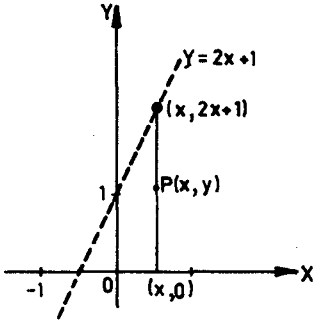

Fig. 1.32

Observemos que para cada valor de x, la parte de la recta paralela al eje Y que pasa por $(x, 0)$ y contenida en el semiplano que está por debajo de $y = 2x + 1$ tiene sus puntos $P(x, y)$ con $y < 2x + 1$.

Esto sucede para cada valor de x, luego el semiplano que está por debajo de la recta $y = 2x + 1$ (sin incluir a ésta) representa a $y < 2x + 1$. (La línea punteada indica que $y = 2x + 1$ no está incluida en la representación).

En general podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.8. La *gráfica de una inecuación en* $\mathbb{R}^2$ se define como el conjunto de todos los pares $P(x, y)$ que satisfacen la inecuación.

Ejemplo 1.33. Representar la gráfica de $x + y > 2$.

La inecuación $x + y > 2$, equivale a la inecuación $y > 2 - x$, si seguimos un proceso análogo al ejemplo anterior se tendrá que la representación de $x + y > 2$ corresponde al semiplano que está por encima de la recta $y = 2 - x$ (sin incluir a ésta).

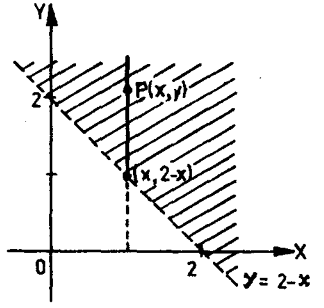

Fig. 1.33

Ejemplo 1.34. Representar la gráfica de $y \leq x^2$.

Los puntos que satisfacen la desigualdad están en la curva y por debajo de la curva (parábola) $y = x^2$.

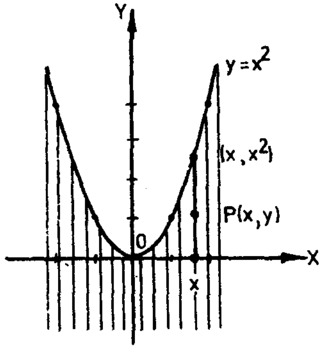

Fig. 1.34

Ejemplo 1.35. Trazar la gráfica de $x^2 + y^2 < 4$.

Todos los puntos que están en la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia), satisfacen la igualdad $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Luego estos puntos distan del centro 2 unidades. Los puntos que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 4$, también satisfacen la desigualdad $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$; por tanto estos puntos distan del centro en menos de dos unidades, luego están dentro del círculo; (fig. 1.35).

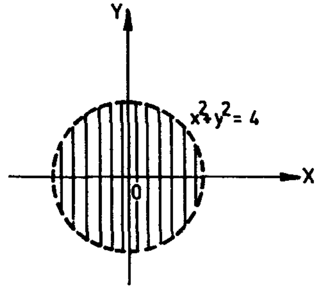

Fig. 1.35

INTERSECCIONES DE GRAFICAS DEFINIDAS POR INECUACIONES

Consideremos ahora regiones del plano definidas por la intersección de gráficas de inecuaciones. Los siguientes ejemplos ilustran regiones de este tipo.

Ejemplo 1.36. Representar gráficamente $A \cap B$, donde:

$A = \{(x, y) \; / \; y < x\}$ y

$B = \{(x, y) \; / \; y > 1 - x\}$.

Los pares (x, y) que están en la intersección $A \cap B$ satisfacen a la

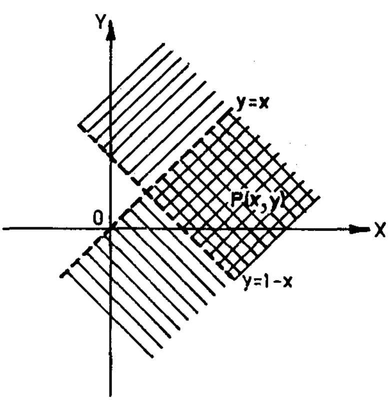

Fig. 1.36

vez las desigualdades: $y < x$ y $y > 1 - x$; tales pares están en el semiplano que está por debajo de la recta $y = x$ y en el semiplano que está por encima de la recta $y = 1 - x$. (En ambos casos los puntos sobre las rectas no pertenecen a los conjuntos considerados).

Ejemplo 1.37. Representar A ∩ B ∩ C, si:

$A = \{(x, y) \ / \ y - x - 1 \geq 0\}$

$B = \{(x, y) \ / \ y - 5x - 5 \leq 0\}$

$C = \{(x, y) \ / \ y + x - 5 \leq 0\}$

La gráfica corresponde a los puntos $P\ (x, y)$ que satisfacen a la vez las desigualdades:

$$y - x - 1 \geq 0 , \quad y - 5x - 5 \leq 0 \quad \text{y} \quad y + x - 5 \leq 0 .$$

Dicha región aparece representada en la figura 1.37.

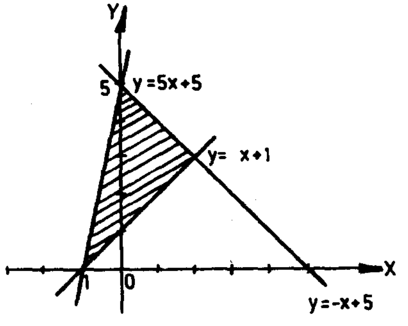

Fig. 1.37

Ejemplo 1.38. Representar gráficamente al conjunto A ∩ B donde:

$A = \{(x, y) \ / \ |x| \leq 1/2\}$

$B = \{(x, y) \ / \ x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$.

Los pares del conjunto A pueden ser caracterizados, en forma equivalente, por la relación $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ ó por la relación $-\dfrac{1}{2} \leq x$ y $x \leq \dfrac{1}{2}$.

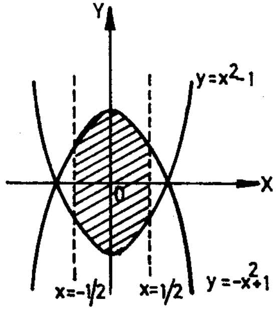

Fig. 1.38

Los pares del conjunto B pueden ser caracterizados por las dos relaciones:

$$x^2 - 1 \leq y \qquad \text{y} \qquad y \leq -x^2 + 1 \ .$$

Luego los pares P (x, y) deben satisfacer a la vez las desigualdades $x \leq 1/2$, $-1/2 \leq x$, $x^2 - 1 \leq y$, $y \leq -x^2 + 1$.

La figura 1.38 representa al conjunto $A \cap B$.

Ejemplo 1.39. Representar gráficamente el conjunto de los pares P (x, y) que satisfacen las relaciones:

$$y \leq x \leq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Los pares deben satisfacer las inecuaciones: $y \leq x$ (por debajo o en la recta $y = x$), $x \leq 0$ (a la izquierda o en el eje de ordenadas), $x^2 + y^2 \leq 4$) (interior a la circunferencia o en ella).

La representación gráfica aparece en la figura 1.39.

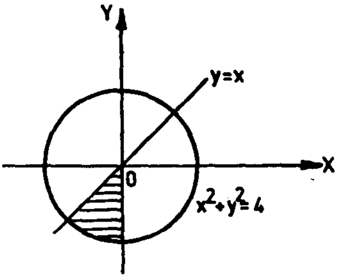

Fig. 1.39

Ejemplo 1.40. Representar gráficamente el conjunto $A = \{(x, y) \,/\, |x| + |y| \leq 1\}$.

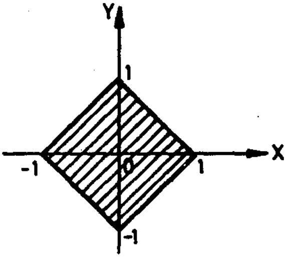

Fig. 1.40

Los pares $P\ (x, y)$ que están en A satisfacen la relación $|x| + |y| \leq 1$.

Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ la relación se puede escribir como: $x + y \leq 1$. Si $x \leq 0$ e $y \leq 0$ la relación se puede escribir $-x - y \leq 1$. Si $x \leq 0$ e $y \geq 0$, la relación se puede escribir $-x + y \leq 1$. Si $x \geq 0$ e $y \leq 0$, la relación se puede escribir como $x - y \leq 1$. En resumen, los pares deben satisfacer:

$x + y \leq 1$	si	$x \geq 0$	e	$y \geq 0$	(I cuadrante)
$-x - y \leq 1$	si	$x \leq 0$	e	$y \leq 0$	(III cuadrante)
$-x + y \leq 1$	si	$x \leq 0$	e	$y \geq 0$	(II cuadrante)
$x - y \leq 1$	si	$x \geq 0$	e	$y \leq 0$	(IV cuadrante)

La figura 1.40 representa al conjunto A.

1.5. DETERMINACION DE LA ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO

Uno de los más importantes logros de la Geometría Analítica es el haber conseguido la integración del álgebra con la geometría. Esto lo podemos apreciar a través de dos problemas fundamentales que se presentan en el curso:

(1) Dada una ecuación, trazar en el plano la gráfica que la representa;

(2) Dadas ciertas condiciones geométricas que deben cumplir los puntos de un lugar geométrico o gráfica, determinar su ecuación.

En las secciones anteriores hemos estudiado el primer problema. En esta sección estudiaremos el segundo.

Aclaremos que la determinación de la ecuación de un lugar geométrico implica la determinación de una ecuación que es satisfecha por todos los puntos que pertenecen al lugar geométrico y que no es satisfecha por los puntos que no están en el lugar geométrico.

No hay ningún método general que se pueda dar para resolver este problema. Sin embargo, puede ser útil en la mayoría de los casos, comenzar con un croquis, hecho en base a las condiciones geométricas que definen al lugar geométrico dado, donde se situará un punto genérico $P\ (x,\ y)$ del lugar. Luego se expresarán analíticamente las condiciones geométricas dadas y se tratará de determinar una ecuación que relacione las coordenadas x e y del punto genérico P.

Los ejemplos siguientes aclararán el método.

Ejemplo 1.41. Determinar la ecuación del lugar geométrico o gráfica de los puntos $P\ (x,\ y)$ que equidistan de los puntos $A\ (1,\ 0)$ y $B\ (0,\ 1)$.

La figura. 1.41 muestra un croquis con los datos.

Según la condición del problema, el punto $P\ (x,\ y)$ está situado en el plano de manera que $d\ (P,\ A) = d\ (P,\ B)$, es decir:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

elevando al cuadrado: $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2$

Simplificando: $y = x$

Luego la ecuación que cumplen los puntos $P\ (x, y)$ que equidistan de A y de B es la de la recta $y = x$.

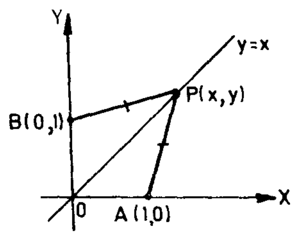

Fig. 1.41

Ejemplo 1.42. Determinar la ecuación de los puntos $P\ (x, y)$ que distan del origen de coordenadas O (0, 0), 4 unidades.

Por la propiedad descrita se tiene que:

$d\ (P, 0) = 4$ ó $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4$

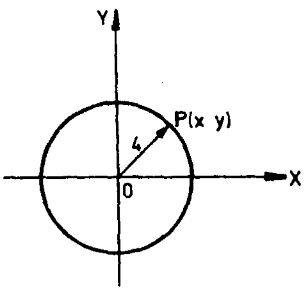

Fig. 1.42

Elevando al cuadrado y simplificando: $x^2 + y^2 = 16$. Ecuación que corresponde a la circunferencia de centro (0, 0) y radio 4.

Ejemplo 1.43. Un punto P (x, y), se mueve de tal modo que su distancia al eje X es igual a su distancia al punto fijo F (0, 4).

Un punto genérico P (x, y) del lugar geométrico es tal que: d (P, F) = distancia de P al eje X.

La distancia de P al eje X es $|y|$. Luego: d $(P, F) = |y|$ ó $\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = |y|$.

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene la ecuación que debe cumplir P:

$$y = 1/8\ x^2 + 2$$

Ecuación que corresponde a una parábola (figura 1.43)

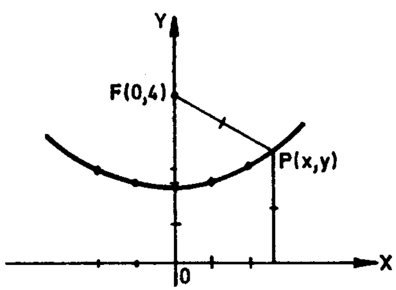

Fig. 1.43

Ejemplo 1.44. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) tales que la suma de sus distancias a los puntos F_1 (2, 0) y F_2 (–2, 0) es siempre igual a 6 .

Un punto P (x, y) con tal propiedad cumple con la siguiente condición:

$$d\ (P, F_1) + d\ (P, F_2) = 6$$

ó $$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2} = 6$$

ó $$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2 \quad ;$$

ecuación que se puede escribir como:

$$36 + 8x = 12\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando se tiene:

$$9y^2 + 5x^2 = 45$$

ó $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Ejemplo 1.45. Un segmento $\overline{AB}$ se mueve de tal modo que su extremo A se encuentra siempre en el semieje positivo de las X, mientras que el extremo B se encuentra siempre en el semieje positivo de las Y. Hallar el lugar geométrico del punto medio $P\ (x, y)$ del segmento $\overline{AB}$, sabiendo que el triángulo AOB que forma el segmento con los ejes tiene siempre área igual a 8 unidades.

Como $P\ (x, y)$ es punto medio del segmento $\overline{AB}$ se tiene que las

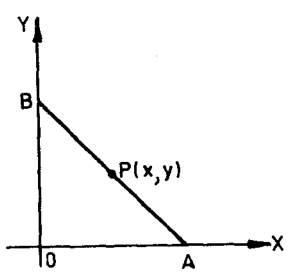

Fig. 1.44

coordenadas de A son: $A = (2x, 0)$ y las de $B = (0, 2y)$. Luego, como el área del triángulo AOB es 8 se tiene la ecuación:

$$\frac{(2x)\,(2y)}{2} = 8 \qquad \text{con} \qquad x > 0 \qquad \text{e} \qquad y > 0$$

$$\text{ó} \qquad y = \frac{8}{2x} \qquad \text{con} \qquad x > 0 \qquad \text{e} \qquad y > 0$$

Ejemplo 1.46. Un punto $P\ (x, y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje X es igual a la menor distancia de P a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Hallar la ecuación del lugar geométrico generado por P.

La distancia de $P\ (x, y)$ al eje X es $|y|$. La menor distancia de P a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es: $|\sqrt{x^2 + y^2} - 1|$.

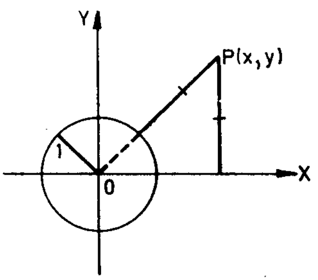

Fig. 1.45

Luego P cumple con la igualdad:

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - 1| = |y|$$

la cual es equivalente a:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = y \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = -y$$

Luego: $P\ (x, y)$ cumple con:

$$x^2 + y^2 = (y + 1)^2 \qquad \text{ó} \qquad x^2 + y^2 = (-y + 1)^2$$

Equivalentemente $P\ (x, y)$ cumple con:

$$x^2 = 2y + 1 \qquad \text{o con:} \qquad x^2 = -2y + 1.$$

Se recomienda al lector dibujar el lugar geométrico utilizando las ecuaciones halladas y comprobar que una parte del lugar geométrico está en el interior de la circunferencia.

EJERCICIOS 1.3

A) Gráficas definidas por inecuaciones.

1.— Representar las gráficas definidas por las inecuaciones siguientes:

a)	$y \leq 2x + 1$	h)	$y \geq -3$	o)	$xy \leq 1$
b)	$y \geq 2x + 1$	i)	$\lvert y \rvert \leq 5$		
c)	$y \leq x^3$	j)	$y - x^4 \geq 0$	p)	$y^2 \geq \dfrac{1}{x}$
d)	$\lvert x \rvert \leq 2$	k)	$y > \lvert x \rvert - 1$		
e)	$\lvert x \rvert \geq 2$	l)	$y > \lvert x + 2 \rvert$		
f)	$x^2 + y^2 \leq 16$	m)	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert \geq 1$		
g)	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert \leq 1$	n)	$(x - 4)\, y^2 > x + 3$		

2.— Representar $A \cap B$ donde A y B se dan en cada caso.

a) $A = \{(x, y) \;/\; 2x + y - 3 \geq 0\}$
$B = \{(x, y) \;/\; x - 2y + 1 \leq 0\}$

b) $A = \{(x, y) \;/\; 0 < y \leq x\}$
$B = \{(x, y) \;/\; y > \lvert x \rvert - 1\}$

c) $A = \{(x, y) \;/\; \lvert x \rvert \geq 1\}$
$B = \{(x, y) \;/\; \lvert y \rvert \geq 1\}$

d) $A = \{(x, y) \;/\; \lvert x \rvert < \lvert y \rvert\}$
$B = \{(x, y) \;/\; 1 < \lvert x \rvert\}$

e) $A = \{(x, y) \;/\; y \geq x^2\}$
$B = \{(x, y) \;/\; y \leq 2\}$

3.— Representar $A \cap B \cap C$ donde A, B, y C se dan en cada caso.

a) $A = \{(x, y) \;/\; y \geq x\}$
$B = \{(x, y) \;/\; y \geq -x\}$
$C = \{(x, y) \;/\; y \leq 4\}$

b) $A = \{(x, y) \ / \ y \leq 2x + 1\}$
$B = \{(x, y) \ / \ y \leq 4x + 5\}$
$C = \{(x, y) \ / \ y \geq 4x - 3\}$

c) $A = \{(x, y) \ / \ 2x + 2y \leq 10\}$
$B = \{(x, y) \ / \ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$
$C = \{(x, y) \ / \ 2x \geq 3y\}$

d) $A = \{(x, y) \ / \ |x| \leq 3\}$
$B = \{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 = 16\}$
$C = \{(x, y) \ / \ y \geq 3\}$

4.— Representar gráficamente las regiones siguientes:

a) $1 < |x| < |y|$
b) $2 < y < x^2$
c) $5 < y < |x + 2|$
d) $2 < x < |y - 1|$

B) Lugares Geométricos.

5.—Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P\ (x, y)$ que equidistan de $A\ (2, 3)$ y $B\ (-1, 1/2)$.

6.—Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de sus distancias a los puntos fijos $A\ (2, 0)$ y $B\ (-2, 0)$ es siempre igual a 8.

7.—Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos $F_1\ (1, 4)$ y $F_2\ (1, -4)$ en valor absoluto es igual a 6.

8.—Sea el triángulo ABP de vértices $A\ (-4, 0)$, $B\ (4, 0)$ y $P\ (x, y)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice P en cada uno de los casos siguientes:

a) El área del triángulo es 24 unidades cuadradas.
b) El perímetro es igual a 24 unidades de longitud.

9.—Un punto P se mueve de tal modo que la suma de los cuadrados de sus distancias a los 4 vértices del cuadrado con vértices $A\ (0, 0)$, $B\ (a, 0)$, $C\ (0, a)$ y $D\ (a, a)$ es igual a dos veces el área del cuadrado. Hallar la ecuación que cumple el punto P.

10.—Encontrar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento que tiene sus extremos en los semiejes negativos de X

e Y y forma con ellos un triángulo de área constante e igual a 12 unidades.

11.—Un triángulo ABC tiene dos vértices fijos A (0, 0) y B (2, 0) y el tercer vértice describe la curva cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M intersección de las medianas.

12.—Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto P (x, y) que divide al segmento $\overline{AB}$, con extremos en los semiejes positivos de X e Y y que forma con ellos un triángulo de área igual a 49/2, en la razón

$$\frac{d\ (A,\ P)}{d\ (A,\ B)} = \frac{3}{7}$$

13.—Hallar la ecuación del lugar geométrico determinado por los puntos de intersección de las familias de rectas

$y = m\ (x + 2)$ e $y = \frac{3}{m}\ (x - 2)$, para todo valor de $m \neq 0$.

14.—Sea $\overline{AP}$ un segmento de 9 unidades de longitud y B un punto del segmento que dista 4 unidades de A. El segmento $\overline{AP}$ se desplaza de manera que los puntos A y B se encuentran siempre en los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por P.

15.— Un punto se mueve en el primer cuadrante de manera que su distancia al eje Y es proporcional al tiempo y su distancia al eje X, proporcional al cuadrado del tiempo. Determinar la ecuación de la trayectoria que describe el punto sabiendo que parte del origen y que en algún instante pasa por (3, 4).

16.—Una recta móvil corta a los ejes coordenados determinando con ellos triángulos de área igual a 5 unidades de superficie. Determinar el lugar geométrico descrito por el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la recta móvil.

17.— Un segmento de recta de longitud constante igual a 6 unidades se mueve de modo que sus extremos siempre están en los ejes coordenados. Determinar la ecuación del lugar geométrico generado por el pie de la perpendicular trazada desde el origen al segmento dado.

18.—A (4, 0) y B (– 4, 0) son dos de los vértices de un triángulo ABP cuyo tercer vértice P (x, y) se mueve de manera que siempre la suma de los ángulos del triángulo en A y B es 135°. Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por el vértice P al moverse éste en el primer y segundo cuadrante.

19.—Dos de los vértices de un triángulo son A (1 ,0) y B (5, 0) y los ángulos interiores correspondientes a estos vértices miden 2α y α respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico generado por el tercer vértice.

20.—Hallar una ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de longitud 12 cuyos extremos se apoyan siempre en los ejes coordenados.

21. Un triángulo tiene dos vértices en (0, 0), (4, 0) y el tercero varía en la recta $y = 4$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del ortocentro del triángulo.