Capítulo 4

SISTEMAS DE COORDENADAS POLARES

4.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores hemos utilizado el sistema cartesiano rectangular como referencia para la ubicación de puntos en un plano. Sin embargo existen otros sistemas de coordenadas que para determinados problemas pueden ser utilizados con mayores ventajas que el cartesiano. Uno de estos sistemas es el de coordenadas polares que definiremos a continuación.

Consideremos una recta en el plano geométrico que llamaremos *eje polar* y un punto fijo en esta recta que llamaremos *polo.* Fijamos la dirección positiva del eje polar a la derecha del polo. Para cada punto P del plano consideremos el segmento $\overline{OP}$ que une el polo O con el punto P y el ángulo θ que hace este segmento $\overline{OP}$ con la parte positiva del eje polar. La longitud de $\overline{OP}$ es el *radio vector,* que se denota por r y θ es el *ángulo polar* o *vectorial.*

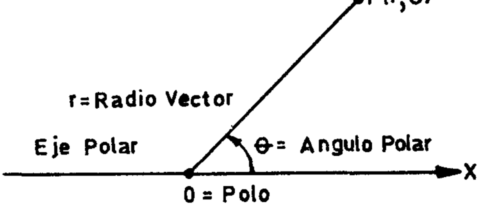


Fig. 4.1

Los valores de r y θ se llaman las *coordenadas polares* del punto P y se denotan por $P\ (r,\ \theta)$.

Hay diversas convenciones acerca de los signos que se pueden asignar a r y θ. Nosotros usaremos la siguiente:

CONVENCION DE SIGNOS DEL ANGULO POLAR Y EL RADIO VECTOR:

1ro.— El ángulo polar θ se mide siempre a partir de la parte positiva del eje polar y es positivo si la medida se efectúa en el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo si se hace en el sentido de las agujas de un reloj.

2do.— El radio vector se mide a partir del polo y es positivo cuando se mide sobre la línea terminal (OP) del ángulo polar y negativo si se mide sobre la prolongación de esta línea a través del polo.

El ángulo polar se puede dar en cualquier medida angular pero lo más frecuente es usar grados sexagesimales o radianes.

Dado entonces un par de coordenadas polares, existe un *único* punto P del plano con dichas coordenadas. Así, los puntos del plano correspondientes a los pares de coordenadas polares (2, 30°), (–3, $\pi/2$), (1, –60°) y (-2, –45°) son los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 respectivamente (figura 4.2).

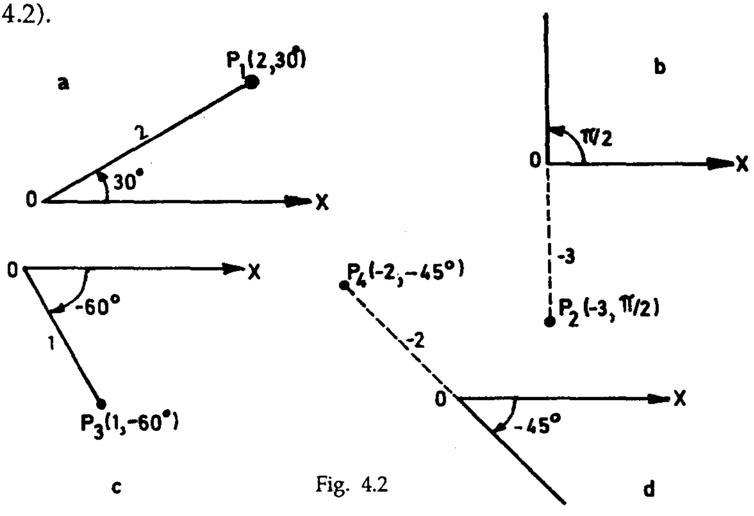


Fig. 4.2

Sin embargo el problema recíproco ya no mantiene la unicidad de relación entre un punto del plano y sus coordenadas polares. En efecto, la convención dada permite que un punto del plano pueda ser representado por infinitos pares de coordenadas polares. En primer lugar observemos que un ángulo polar θ y un ángulo polar $\theta + 2\, n\pi$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, tienen un lado final común; luego el punto $P\ (r,\ \theta)$ admite también las coordenadas $P\ (r,\ \theta + 2n\pi)$ para cualquier n entero. También el punto $P\ (r,\ \theta)$ tendrá coordenadas $(-r,\ \theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, e impar, por ejemplo. En fin, hay pues infinitos pares de coordenadas que corresponden a un mismo punto del plano.

Por ejemplo, el punto P (2, 30°) admite también las coordenadas polares (–2, 210°), (2, –330°) (–2, –150°), (2, 390°), entre otros.

Ya veremos más adelante los graves inconvenientes que acarrea esta falta de bi-unicidad entre pares de coordenadas polares y puntos del plano.

4.2 CAMBIOS DE COORDENADAS

Frecuentemente es necesario transformar la ecuación cartesiana de un lugar geométrico en la respectiva ecuación polar y viceversa.

Las fórmulas que permiten estas transformaciones se pueden determinar fácilmente si consideramos un sistema cartesiano rectangular y un sistema polar de manera que el origen y el eje de abscisas del primero coincidan con el polo y el eje polar del segundo, respectivamente, como en la figura 4.3.

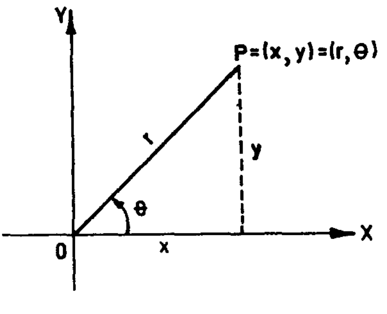


Fig. 4.3

Entonces, para un punto P cualquiera que tenga coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), se pueden establecer las fórmulas:

$$x = r \cos \theta \qquad (4.1) \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \qquad (4.2)$$

que permiten obtener las coordenadas cartesianas de un punto conocidas sus coordenadas polares.

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y luego sumándolas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \qquad \text{ó} \qquad r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4.3)$$

Dividiendo miembro a miembro, las dos primeras ecuaciones:

$$tg\ \theta = \frac{y}{x} \ , \qquad x \neq 0, \qquad \text{o} \qquad \theta = arc\ tg\ (y/x) \quad , \qquad (4.4)$$

con $x \neq 0$

Las ecuaciones (4.3) y (4.4) permiten conocer las coordenadas polares de un punto conocidas sus coordenadas cartesianas.

Finalmente, utilizando las fórmulas (4.1), (4.2) y (4.3) , se obtienen las dos siguientes que serán de utilidad en futuras transformaciones:

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (4.5) \quad , \qquad \cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (4.6)$$

Ejemplo 4.1. Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(-2, 135°)$.

Usando las fórmulas (4.1) y (4.2):

$$x = r \cos \theta = -2 \cos 135° = (-2) \left(- \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = -2 \operatorname{sen} 135° = (-2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = - \sqrt{2}.$$

Luego: $P\ (\sqrt{2}, - \sqrt{2})$.

En este caso no hay más que una solución posible.

Ejemplo 4.2. Hallar las coordenadas polares de un punto P cuyas coordenadas cartesianas son (–3, –2).

Empleando (4.3) y (4.4):

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{9 + 4} = \pm \sqrt{13}$$

$$\theta = arc\ tg \left(\frac{y}{x} \right) = arc\ tg \left(\frac{-2}{-3} \right) = \text{arc tg}\left(\frac{2}{3} \right) = arc\ tg\ (0.666)$$

En este caso tenemos infinitas soluciones.

Generalmente, mientras no se pida expresamente otra cosa, escogeremos de las infinitas soluciones, aquella que corresponde a un valor de r *positivo* y un valor de θ comprendido entre $0 \leq \theta < 360°$. Al par así escogido se le denomina *par principal* de coordenadas polares del punto. En el ejemplo, por estar P en el 3er. cuadrante, su par principal es $(\sqrt{13},\ 213°\ 41')$.

Otros pares de coordenadas polares de P son, por ejemplo

$$(-\sqrt{13},\ 33°\ 41'), \qquad (\sqrt{13},\ -\ 146°\ 19')\ .$$

Ejemplo 4.3. Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico cuya ecuación polar es $r = 2\ sen\ \theta$.

Usando (4.3) y (4.5):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad .$$

Efectuando: $x^2 + y^2 = 2y$ ó $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Ecuación de una circunferencia de centro (0, –1) y radio 1 .

Ejemplo 4.4. Determinar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación es $x^2 - 4y - 4 = 0$ (parábola de vértice en (0, –1) y eje focal el eje Y).

Reemplazando en la ecuación cartesiana: $x = r\ cos\ \theta$, $y = r\ sen\ \theta$, se obtiene:

$r^2 \cos^2 \theta - 4r \operatorname{sen} \theta - 4 = 0$,

$r^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - 4r \operatorname{sen} \theta - 4 = 0$,

$r^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4r \operatorname{sen} \theta + 4 = (r \operatorname{sen} \theta + 2)^2$. De donde:

$r = \pm (r \operatorname{sen} \theta + 2)$, o sea:

$$r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta} \qquad \text{ó} \qquad r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$$

Podría parecer que las dos ecuaciones encontradas representan lugares geométricos distintos, sin embargo este es uno de los inconvenientes que mencionamos, se presenta por la falta de biunicidad entre puntos del plano y sus coordenadas polares: *La ecuación de un lugar geométrico puede expresarse de varias formas distintas en coordenadas polares.*

Recordemos que las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ corresponden a un mismo punto. Luego, podemos reemplazar en la segunda ecuación (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$:

$$r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow -r = \frac{-2}{1 + \operatorname{sen} (\theta + \pi)} \Leftrightarrow r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$$

Es decir, las dos ecuaciones representan al mismo lugar geométrico.

La solución puede ser, entonces,

$$r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$$

4.3. GRAFICAS DEFINIDAS POR ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

De acuerdo a la definición dada en la sección 1.4, la gráfica de una ecuación en polares es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación.

Según esto, el método general para trazar una gráfica consiste en dar valores a una de las variables en la ecuación y encontrar el valor correspondiente a la otra variable, determinándose así pares (r, θ) que satisfacen la ecuación.

En la práctica el trazado de gráficas puede simplificarse si se efectúa previamente un estudio de intersecciones, simetría y extensión.

La determinación de asíntotas en polares, sin el auxilio del cálculo diferencial, es bastante complicado y preferimos dejarlo para el capítulo 5 cuando el estudiante tenga nociones de límites.

Intersecciones.— Las intersecciones que se acostumbra a determinar son las correspondientes al eje polar y a un eje perpendicular al eje polar en el polo.

Las primeras se encuentran haciendo $\theta = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, n\pi$ en general, para $n \in \mathbb{Z}$ y determinando en la ecuación los correspondientes valores de r.

Si existen algunas intersecciones con el eje a 90° , estas se obtendrán haciendo $\theta = \frac{n}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ e impar, ó sino:

$$\theta = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, \; n \in \mathbb{Z} \; .$$

Simetrías.— Las más importantes son las siguientes:

a) *Simetría con respecto al eje polar* (fig. 4.4)

Existe simetría con respecto al eje polar, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

— Se reemplaza θ por $-\theta$, ó
— Se reemplaza θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.

b) *Simetría con respecto al eje a 90°* (fig. 4.5).

Hay simetría con respecto al eje 90°, si la ecuación no se altera o se transofrma en una ecuación equivalente cuando:

— Se reemplaza θ por $\pi - \theta$, ó
— Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$.

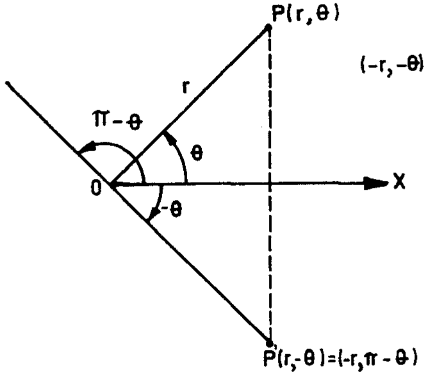


Fig. 4.4.

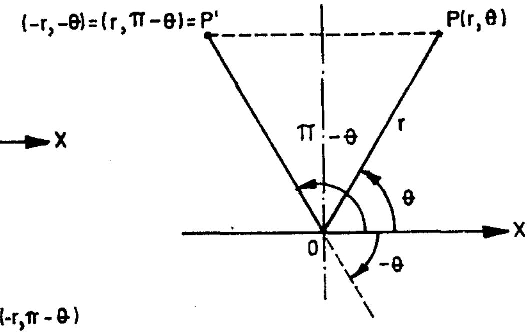


Fig. 4.5

c) *Simetría con respecto al polo* (Fig. 4.6).

Se tiene simetría con respecto al polo, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

— Se reemplaza θ por $\pi + \theta$, ó
— Se reemplaza r por $-r$.

Extensión. Para analizar la extensión de la gráfica, conviene en lo posible despejar r en función de θ. Los valores de θ que hacen a r imaginario ó complejo, deben ser desechados. Si algún valor de θ hace $r = +\infty$, esto indica que la curva "tiende hacia el infinito en esa dirección". A menudo, importantes cambios se presentan en las vecindades de los valores de θ que hacen $r = +\infty$ y por lo tanto puede ser útil determinar valores de r correspondientes a valores de θ un poco menores y un poco mayores que los que hacen a r infinito.

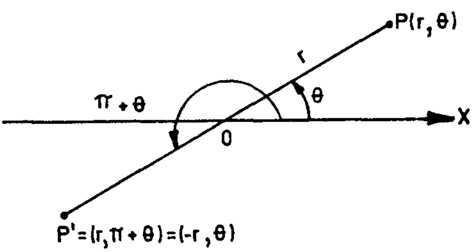


Fig. 4.6

También es importante determinar los valores de θ que hacen a r máximo o mínimo.

Todos estos puntos serán aclarados a lo largo de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.5. Dibujar la curva de ecuación: $r = 3\ sen\ 2\theta$.

Primero estudiaremos intersecciones, simetría y extensión.

a) *Intersecciones*

Con el eje polar: para $\theta = n\pi$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Con el eje a 90°: para $\theta = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)\pi$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Las intersecciones con los ejes se reducen al polo ($r = 0$). El haber obtenido $r = 0$ para $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$ indica que la curva se acerca al polo siguiendo las direcciones de los ángulos polares 0° y 90°.

b) *Simetrías.*— Con respecto al eje polar; cambiamos θ por $-\theta$ y observamos que la ecuación se altera: $r = 3\ sen\ 2(-\theta) = 3\ sen\ (-2\theta) = -3\ sen\ 2\theta$.

Sin embargo esto no indica que no existe la simetría; debemos además verificar la segunda regla, es decir, reemplazar θ por $\pi - \theta$ y $-r$ por $-r$:

$-r = 3\ sen\ 2(\pi - \theta) = 3\ sen\ (2\pi - 2\theta) = 3\ sen\ (-2\theta) = -3\ sen\ 2\theta \Leftrightarrow r = 3\ sen\ 2\theta$.

Luego existe simetría con respecto al eje polar.

— Con respecto al eje a 90° :
Se reemplaza θ por $\pi - \theta$;
$r = 3\ sen\ 2\ (\pi - \theta) = 3\ sen\ (2\pi - 2\theta) = 3\ sen\ (-2\theta) = -3\ sen\ 2\theta$. No cumple.

Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$:
$-r = 3\ sen\ 2\ (-\theta) = 3\ sen\ (-2\theta) = -3\ sen\ 2\theta \Leftrightarrow r = 3\ sen\ 2\theta$.

Existe simetría con respecto al eje a 90°.

— Con respecto al polo:

Se reemplaza r por $-r$ y se observa que no cumple.

Se reemplaza θ por $\pi + \theta$.

$r = 3 \; sen \; 2(\pi + \theta) = 3 \; sen \; (2\pi + 2\theta) = 3 \; sen \; 2\theta$.

Existe simetría con respecto al polo.

c) *Extensión.*— Por la simetría con respecto a los dos ejes y al polo, será suficiente estudiar la extensión para valores de θ correspondientes al primer cuadrante: $0 \leq \theta \leq 90°$.

Para todo valor de θ en el intervalo anterior, r existe con valores reales.

El valor máximo de r se obtiene cuando $sen \; 2\theta = 1$, es decir cuando $2\theta = 90°$ ó $\theta = 45°$ y corresponde a $r = 3$.

El mínimo valor ya lo obtuvimos para $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$ y corresponde a $r = 0$, el polo.

d) *Otros puntos de la curva*

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2θ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$sen \; 2\theta$	0	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	0
$r = 3 \; sen \; 2\theta$	0	3/2	2.60	3	2.60	3/2	0

e) *Gráfica.*— (Ver Fig. 4.7)

Ejemplo 4.6. Dibujar la gráfica de la ecuación $r = 6 \cos \theta + 3$.

a) *Intersecciones.*— Con el eje polar: $\theta = 0 \Rightarrow r = 9$

$\theta = 180° \Rightarrow r = -3$

Para otros múltiplos de π se obtienen los mismos valores. Luego hay dos puntos de intersección con el eje polar: (9, 0°) y (–3, 180°).

Con el eje a 90°: $\theta = 90° \Rightarrow r = 3$

$\theta = 270° \Rightarrow r = 3$

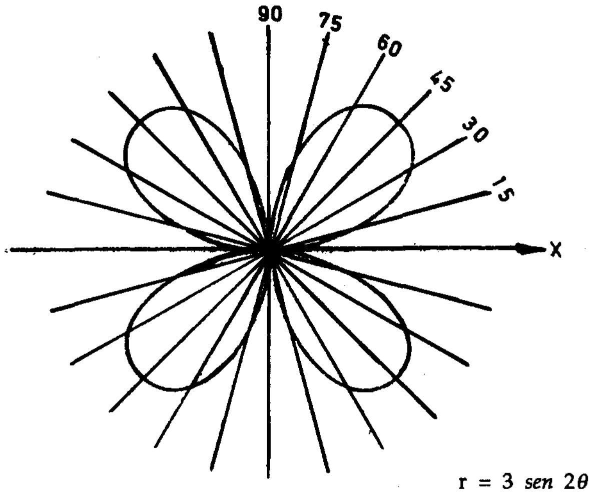


Fig. 4.7

Para otros múltiplos de la forma $(2n + 1)\ 90°$, para $n \in \mathbb{Z}$, se obtienen los mismos valores.

Luego hay dos puntos de intersección con el eje a 90° : (3, 90°) y (3, 270°).

b) *Simetrías.*— La única simetría que se puede verificar es la que corresponde al eje polar, pues al cambiar θ por $-\theta$ no cambia la ecuación.

No hay simetría con respecto a un eje a 90° ni con respecto al polo (verificarlo).

c) *Extensión.* Para todo valor de θ se obtiene uno de r, real y finito. La curva es cerrada. El máximo valor de r corresponde al valor θ que hace $\cos\ \theta = 1$, es decir $\theta = 0°$ y $r = 9$.

El mínimo valor de r corresponde al valor de θ que hace $\cos\ \theta = -1$, es decir $\theta\ = 180°$ y $r = -3$.

Conviene también estudiar para qué valores de θ, si existen, r toma el valor de cero:

$$0 = 6 \cos\ \theta + 3, \quad \cos\ \theta = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}\ , \quad \theta = \text{arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,$$

θ = 120° y 240° como valores principales. La curva pasa por el polo con direcciones 120° y 240° respectivamente.

d) *Otros puntos de la curva.*— Por la simetría con respecto al eje polar será suficiente dar valores a θ entre 0 y 180°. En la gráfica la parte que se ha dibujado por simetría, aparece en trazo discontinuo.

En la tabla que se da a continuación, se han tabulado los pasos que hay que efectuar para encontrar algunos puntos adicionales de la curva.

La última línea de la tabla se ha empleado para indicar las letras que se les ha asignado a los puntos respectivos de la gráfica en la figura 4.8.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	105°	120°	135°	150°	180°
$\cos\ \theta$	1	0.87	0.71	0.5	0	–0.26	–0.5	–0.71	–0.87	–1
$6\cos\ \theta$	6	5.2	4.2	3	0	–1.56	–3	–4.2	–5.2	–6
$r = 6\cos\theta + 3$	9	8.2	7.2	6	3	1.44	0	–1.2	–2.2	–3
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Ejemplo 4.7. Gráfica de la ecuación en polares de la espiral

hipérbolica $\quad r = \dfrac{\pi}{\theta}, \quad$ para valores de $\theta > 0$.

Para que la ecuación tenga sentido, los valores de θ deben ser tomados en radianes.

Para todo valor de $\theta \neq 0$ existe valor real de r .

Conforme θ se acerca al valor cero, r va tomando valores cada vez más grandes tendiendo hacia infinito.

"Si θ varía entre 0 y 2π radianes (1 vuelta completa), r decrecerá desde $+\infty$ hasta 1/2. Si θ sigue creciendo indefinidamente entonces el denominador del segundo miembro de la ecuación aumentará de valor

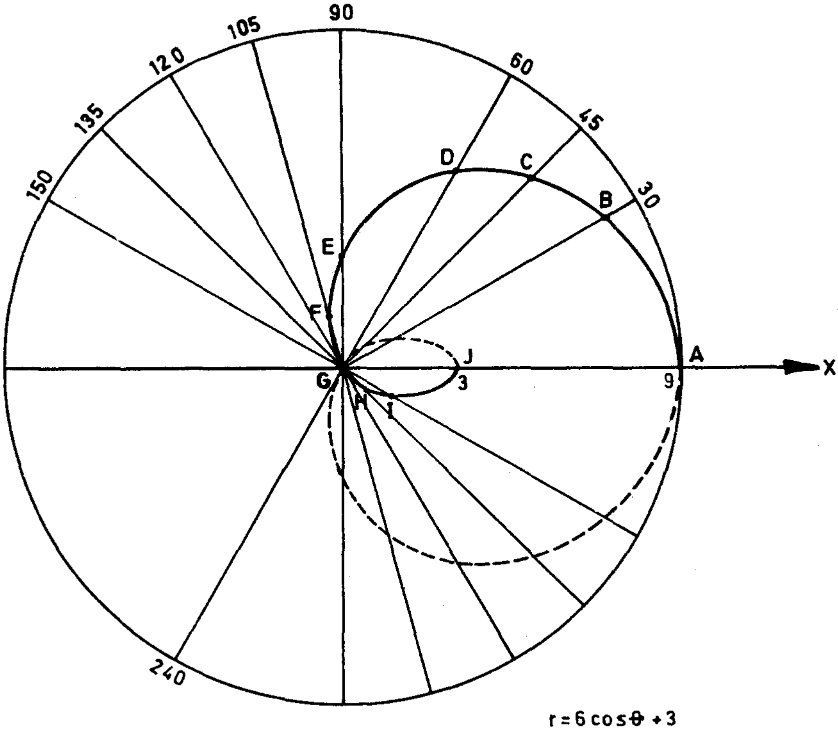


Fig. 4.8

indefinidamente y r decrecerá tendiendo a cero. Es decir, al crecer el ángulo polar la curva se va enrollando alrededor del polo pero sin llegar nunca a pasar por él. Se dice que el polo es un *punto asintótico* de la curva.

La curva cortará entonces a toda recta que pasa por el polo en infinitos puntos. Así por ejemplo, la dirección del eje polar está dada por los valores de $\theta = n\pi$ para cualquier n entero. Luego los infinitos puntos de corte de la curva con el eje polar son

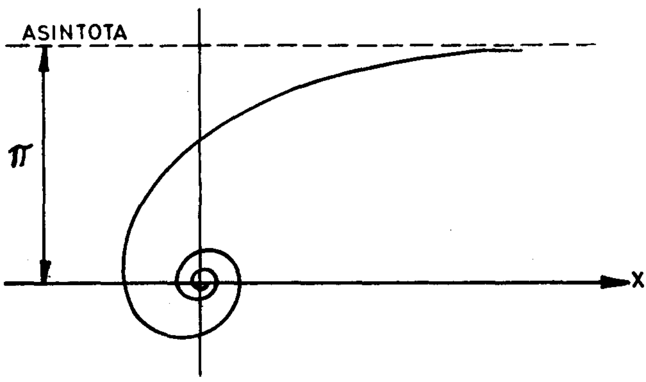
$$P_n \left(n\pi \, , \frac{1}{n} \right)$$

para n entero distinto de cero.

Ya vimos que para $n = 0$, $r = +\infty$ y la curva puede tener una asíntota según la dirección $\theta = 0$, es decir, una asíntota paralela al eje polar. La distancia de la asíntota (si existe) al polo se puede determinar fácilmente empleando límites y lo haremos en el capítulo siguiente. En nuestro caso, la asíntota dista π unidades del polo.

Las coordenadas de algunos puntos de la gráfica se encuentran en la tabla siguiente:

θ	$\frac{\pi}{12} = 15°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	crece indefinidamente
$r = \frac{\pi}{\theta}$	12	6	4	3	2	1	2/3	1/2	2/5	decrece hacia cero.



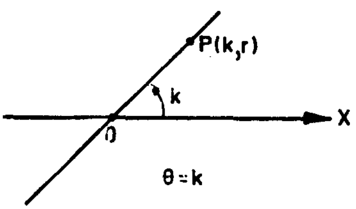
Espiral hiperbólica $r = \pi/\theta$

Fig. 4.9

Hemos visto en coordenadas cartesianas que las ecuaciones más simples son x = *constante* ó y = *constante,* que representan rectas paralelas a los ejes coordenados. En coordenadas polares también las ecuaciones más simples son de la forma θ = *constante* y r = *constante.*

La primera ecuación, $\theta = k$, constante, representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo ángulo polar es igual a k y su radio vector, cualquier valor. Es decir, se trata de una recta que pasa por el polo y forma un ángulo $\theta = k$ con el eje polar.

La segunda ecuación, $r = a$, constante, representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo radio vector es igual al valor a y su ángulo polar cualquier valor. La gráfica es una circunferencia de centro el polo y radio a.



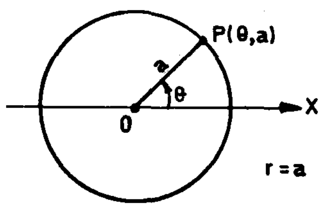


Fig. 4.10

INCONVENIENTES DE LA MULTIPLE REPRESENTACION QUE TIENE UN PUNTO EN COORDENADAS POLARES

Cuando se utiliza el sistema polar debe tenerse cuidado con los errores que se pueden presentar debido al hecho de que un punto tiene más de un par de coordenadas polares que lo representan.

Por ejemplo, algunas veces las coordenadas de un punto no satisfacen a una ecuación dada, pero sin embargo otro par de coordenadas del mismo punto si la satisface. Este es el caso del punto P (3/2, –15°) el cual, aparentemente, no pertenece a la gráfica de la ecuación $r = 3$ *sen* 2θ puesto que sus coordenadas no la satisfacen: $3/2 \neq 3$ *sen* $(-30°) = 3\ (-1/2) = -3/2$.

Sin embargo el par (–3/2 165°) que representa al mismo punto P, si es solución de la ecuación: $-3/2 = 3$ *sen* $(330°) = 3\ (-1/2) = -3/2$.

Debe también tenerse cuidado cuando se estudia la simetría de una curva, pues solo podemos asegurar que *no* es simétrica después de haber analizado todas las posibles representaciones de puntos simétricos correspondiente (ver ejemplo 4.5).

Cuando se trata de lugares geométricos, debe recordarse que estos pueden tener dos ó más ecuaciones distintas que los representan. Como en el caso de las ecuaciones

$$r = \frac{2}{1 - sen\ \theta} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{-2}{1 + sen\ \theta}$$ del ejemplo 4.4

Cuando se estudia la extensión de una ecuación, a menudo sucede que algunos valores de θ hacen r imaginario sin que esto signifique que necesariamente no exista curva en la región correspondiente.

Por ejemplo, en la ecuación $r^2 = sen\ \theta$, r es imaginario para $180° < \theta < 360°$, lo que parecería indicar que no existe curva por debajo del eje polar; sin embargo para cualquier valor de $0 < \theta < 180°$ se obtienen dos valores de r, uno positivo y otro negativo. El valor negativo nos dará justamente puntos de la curva por debajo del eje polar.

Estos son algunos ejemplos de los casos que nos obligan a extremar el cuidado cuando trabajamos en coordenadas polares.

4.4. INTERSECCIONES DE GRAFICAS EN POLARES

Las coordenadas de los puntos de intersección de dos gráficas en polares se determinan, igual que en cartesianas, resolviendo simultáneamente las ecuaciones respectivas o sus equivalentes. La diferencia está en que las ecuaciones por resolver no serán algebraicas sino trigonométricas en la mayoría de los casos.

Para tener seguridad de que se han encontrado todos los puntos de intersección, es recomendable hacer un croquis de las gráficas respectivas.

Ejemplo 4.8. Determinar los puntos de intersección de $r = 2\ sen\theta$ y $r = 3\ cos\ \theta$.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones dadas:

$2\ sen\ \theta = 3\ cos\ \theta$, ó $tg\ \theta = \dfrac{3}{2}$, de donde $\theta = 56°\ 18' + n.180°$, $n \in$

Los valores principales son $\theta_1 = 56°18'$ y $\theta_2 = 236°\ 18'$.

Los valores de r correspondientes son $r_1 = 2\ sen\ 56°\ 18' = (2)\ 0.832 = 1.664$, y $r_2 = 2\ sen\ 236°\ 18' = 2\ (-0.832) = -1.664$.

Ambos pares de coordenadas corresponden al *mismo punto* $P_1\ (1.664, 56°18') = (-1.664, 236°18')$. Cualquier otro valor de θ para n distinto de uno o cero, conducirá al mismo punto P_1.

Aparentemente P_1 es el único punto que tienen en común las gráficas. Sin embargo, como las coordenadas del polo son $r = 0$ y θ *cualquier valor, debe siempre analizarse por separado si el polo es un punto de la intersección de las gráficas.*

Bastará verificar si en cada una de las ecuaciones existe un valor de θ que hace que r sea nulo.

En nuestro ejemplo, para $\theta = 0°$ se obtiene $r = 0$ en la ecuación $r = 2sen\ \theta$ y para $\theta = 90°$ se obtiene también $r = 0$ en la segunda ecuación $r = 3cos\ \theta$.

Luego el polo pertenece a ambas gráficas y es por tanto otro punto de intersección.

Las dos gráficas se dan en la figura 4.11.

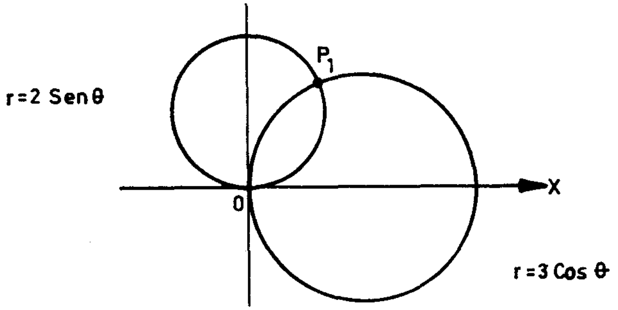


Fig. 4.11

Ejemplo 4.9. Determinar los puntos de intersección de las curvas de ecuación $r = sen^2\theta$ y $r = cos^2\theta$.

Procediendo como en el ejemplo anterior, se verifica que el polo es un punto de intersección de las curvas dadas.

Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones dadas:

$$cos^2\theta = sen^2\theta \quad , \quad cos^2\theta - sen^2\theta = 0 \ , \ cos\ 2\theta = 0 \ .$$

Luego: $2\theta = n\,\pi + \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$. Por tanto:

$sen\ \theta = sen\ \left(\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$, expresión que es igual a $\pm\ cos\ \dfrac{\pi}{4} =$

$\pm\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si n es impar, y a $\pm\ sen\ \dfrac{\pi}{4} = \pm\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si n es par.

Luego para todo valor de n se obtiene:

$$r = sen^2\ \theta = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad .$$

Los valores principales de θ se obtienen dando a n los valores $n = 0, 1, 2$ y 3, respectivamente.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}\ ,\ \theta_2 = \frac{3\pi}{4}\ ,\ \theta_3 = \frac{5\pi}{4}\ ,\ \text{ y } \ \theta_4 = \frac{7\pi}{4}\ .$$

Los puntos de intersección son cinco:

El polo, $P_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $P_3\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ y

$P_4\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

La gráfica correspondiente está dada en la figura 4.12 donde se aprecia que estos son los únicos 5 puntos de intersección.

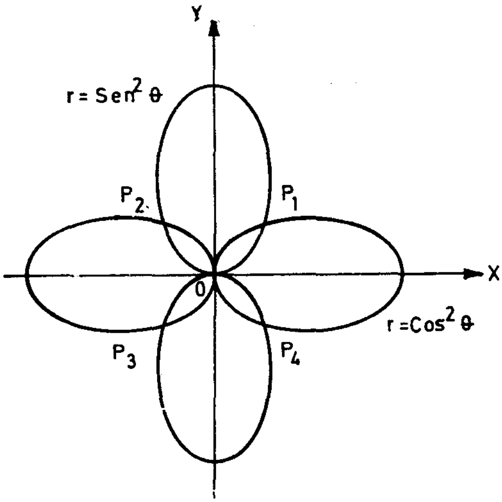


Fig. 4.12

4.5. LUGARES GEOMETRICOS EN POLARES

Este problema ya fue tratado en coordenadas cartesianas en el primer capítulo. Sin embargo, en el caso de polares, debe ponerse especial cuidado para que la ecuación determinada sea tal que las coordenadas de *todos* los puntos del lugar geométrico sean solución de ella y a su vez *ningún* punto que no esté en el lugar geométrico tenga algún par de coordenadas que sea solución de la ecuación.

Como señalamos anteriormente, no existe método general que pueda seguirse en la determinación de ecuaciones de lugares geométricos. Una recomendación importante es iniciar la solución del problema haciendo un croquis con los datos y luego plantear las condiciones que deben cumplir r y θ para que el punto genérico $P\ (r,\ \theta)$ pertenezca al lugar geométrico dado.

Algunos ejemplos ilustrarán la forma de como debe procederse.

Ejemplo 4.10. Un segmento de recta de longitud constante igual a 6 unidades, se mueve de modo que sus extremos están siempre en dos rectas que se cortan a 90°. Determinar la ecuación del lugar geométrico generado por el pie de la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las rectas al segmento dado.

Consideremos un sistema polar con su eje polar y su eje a 90° coincidentes con las rectas dadas.

Sea $\overline{AB}$ el segmento de longitud 6 y P (r, θ) el pie de la perpendicular frazada de O al segmento $\overline{AB}$ (figura 4.13).

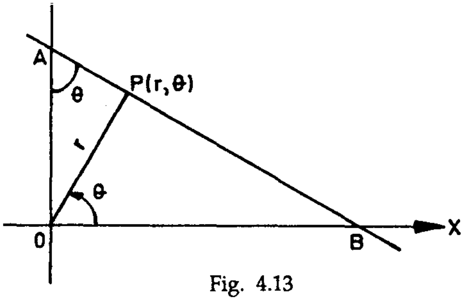


Fig. 4.13

En el triángulo rectángulo OPB: $r = d\ (O, B)\ cos\theta$, y en el triángulo rectángulo AOB:

$$d\ (O, B) = d\ (A, B)\ sen\ \theta = 6\ sen\ \theta.$$

Luego $r = 6\ sen\theta\ cos\theta = 3\ sen\ 2\theta$.

Como P puede estar en cualquiera de los 4 cuadrantes (según la posición de $\overline{AB}$), la curva constará de cuatro ramas. La gráfica de $r = 3\ sen\ 2\ \theta$, que analizamos en el ejemplo 4.5, corresponde a la rosa de 4 hojas.

Ejemplo 4.11. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del polo y de una recta paralela al eje polar que pasa por el punto $(4, \pi/2)$.

En la figura 4.14, $d\ (0, P) = d\ (P, R)$ es decir: $r = 4 - d\ (P, Q) = 4 - r\ sen\theta$.

Luego: $\quad r + r\ sen\ \theta = 4 \quad$ y $\quad r = \dfrac{4}{1 + sen\ \theta}$.

Ecuación de una parábola de foco en el polo y vértice en $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

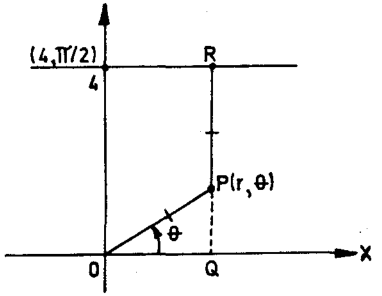


Fig. 4.14

Ejemplo 4.12. Sea una circunferencia de centro O, diámetro $\overline{AB}$ y radio a. Sea M un punto que se desplaza sobre la circunferencia y N la proyección de este punto sobre $\overline{AB}$. Sea P el simétrico de N respecto al radio $\overline{OM}$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por P.

Consideremos un sistema polar de referencia como se indica en la figura 4.15. Si las coordenadas de P son (r, θ), entonces:

$$r = d\ (0,\ P) = d\ (0,\ N) = a\ cos\ \frac{\theta}{2}\ .$$

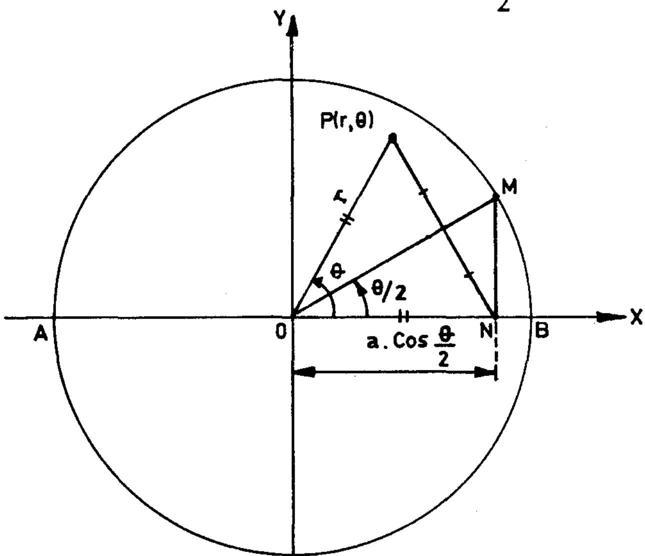


Fig. 4.15

EJECICIOS 4.1

1.— Ubicar en un sistema polar los puntos de coordenadas:

$(-3, 45°)$, $(2, -135°)$, $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\pi\right)$,

$(-2.5, 7\ rad.)$.

2.— Escribir tres pares de coordenadas distintas para cada uno de los puntos del ejercicio 1.

3.— Determinar las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas polares son:

$(0, 90°)$, $(\sqrt{2}, -45°)$, $(5, 420°)$, $(4, 0°)$, $(-1, \pi)$, $\left(-\sqrt{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$,

$\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

4.— Determinar la representación polar principal de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son:

$(1, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(5, 2)$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(2, 0)$ $(0, 3)$.

5.— Hallar la ecuación cartesiana correspondiente a cada una de las ecuaciones polares siguientes:

a) $r = 3 \cos \theta$; b) $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$; c) $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$;

d) $r = \dfrac{6}{1 - 1/2 \cos \theta}$.

6.— Hallar la ecuación polar correspondiente a cada una de las ecuaciones cartesianas siguientes:

a) $xy = 2$
b) $x^2 + y^2 = 16$;
c) $2x - y = 0$;
d) $x^2 - y^2 = 4$
e) $y^2 - 3x^2 - 24x - 36 = 0$

7.— Trazar la gráfica de las ecuaciones:

a) $r = \dfrac{3}{2}$ b) $\theta = 2$ radianes c) $r = 4 \operatorname{cosec} \theta$

d) $r = sen \dfrac{\theta}{2}$ e) $r = sen \dfrac{\theta}{3}$ f) $r^2 = sen\ 2\theta$

g) $r^2 = \dfrac{\text{sen } 3\theta}{cos\ \theta}$ h) $r = cos\ 3\theta$ i) $r = 2\ (1 - cos\ \theta)$.

8.— Determinar los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas:

a) $r = \dfrac{\pi}{\theta}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

b) $r = 2\ cos\ \theta$, $r = 1$

c) $r = \dfrac{1}{2 + 2\ cos\ \theta}$, $r = 2\ cos\ \theta + 1$

d) $r^2 = 9\ cos\ 2\theta$, $r = 3\sqrt{2}\ sen\ \theta$.

9.— Desde un punto fijo O de una circunferencia cuyo diámetro mide 6 unidades se traza una cuerda cualquiera $\overline{OB}$. Determinar la ecuación polar del punto P que se encuentra a una distancia constante igual a 3 unidades del punto B y sobre la cuerda $\overline{OB}$ o su prolongación.

10.—Dos vértices opuestos de un cuadrado son

$$P_1 \left(2, \frac{13\pi}{6}\right) \text{ y } P_2 \left(3, -\frac{17\pi}{6}\right).$$

Determinar el área del cuadrado.

11.—Determinar la ecuación en polares del lugar geométrico de los puntos que equidistan del polo y de la recta perpendicular al eje polar en el punto (–3, 0°).

12.—La ecuación $r = 2\ cos\ \theta + 2\sqrt{3}\ sen\ \theta$ representa una circunferencia. Determinar las coordenadas de su centro y la longitud del radio.

13.—Determinar el radio vector del punto $(-2, \pi/2)$ si se toma como polo el punto $(2, \pi/3)$ y eje polar un eje paralelo al primitivo.

14.—La ecuación

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

representa a una cónica. Calcular la longitud de su lado recto.

15.—Verificar que la ecuación

$$r = \frac{16}{3 - 5\cos\theta}$$

representa una de las ramas de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de las directrices y de las asíntotas de esta hipérbola.