

# 6

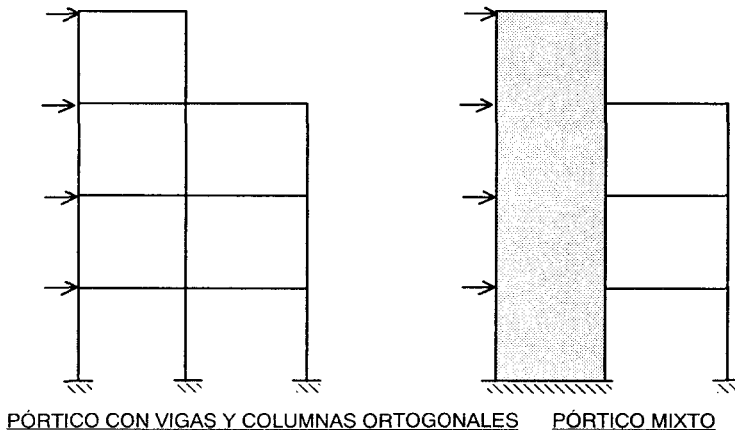
## ANÁLISIS SÍSMICO APROXIMADO DE EDIFICIOS

---

Este capítulo trata sobre el estudio de cuatro métodos que permiten resolver en forma aproximada a los pórticos de edificios sujetos a carga lateral (sismo o viento).

Estos métodos son: Portal,  
Voladizo,  
Muto, y  
Ozawa

Los métodos del Portal, Voladizo y de Muto se utilizan principalmente para resolver pórticos compuestos por vigas y columnas ortogonales, mientras que el método de Ozawa se emplea para solucionar pórticos mixtos conformados por placas, vigas y columnas (Fig. 6.1), e incluso para el análisis sísmico traslacional de edificios.



*Fig. 6.1. Elevación de Dos Pórticos Planos.*

Los métodos del Portal y Voladizo tan solo proporcionan como resultados los esfuerzos, y ambos deben ser utilizados estrictamente con fines de predimensionamiento o de verificación de esfuerzos. Sin embargo, conviene destacar que el método del Portal fue empleado para el diseño del edificio Empire State (uno de los más altos del mundo, ubicado en Nueva York), que si bien no tenía problemas sísmicos, ha podido soportar fuertes vientos; por supuesto que esto se hizo en una época donde se carecía de las herramientas computacionales existentes en la actualidad.

El método del Portal proporciona mejores resultados que el método del Voladizo cuando el pórtico es achatado, y en ambos métodos debe estimarse primeramente la posición del punto de inflexión (PI) en las columnas, tal como se muestra en la Fig. 6.2.

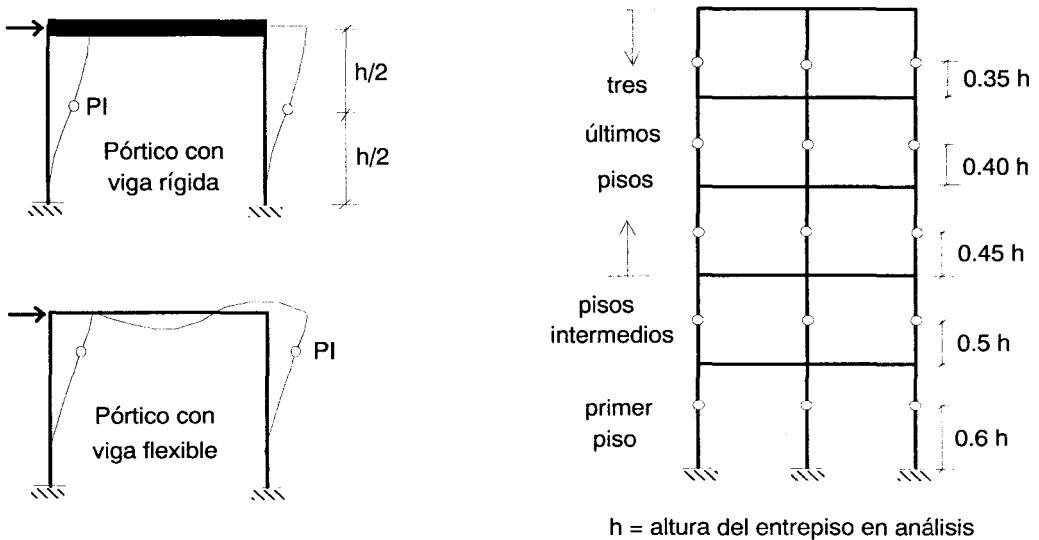


Fig. 6.2. Ubicación de los Puntos de Inflexión en los Métodos del Portal y Voladizo.

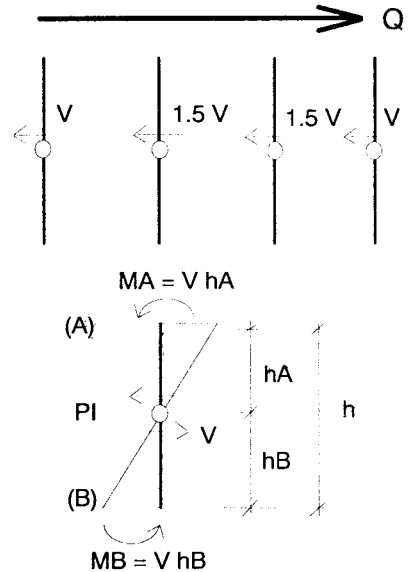
En cambio, el método de Muto contempla en cierta forma la deformación por flexión de las barras, lográndose mejores resultados que los proporcionados por los métodos del Portal o Voladizo, pudiéndose incluso obtener los desplazamientos laterales; por lo cual, sus resultados pueden ser empleados para el diseño de los edificios de mediana altura, donde los efectos de la deformación axial son despreciables.

En el método de Ozawa se hace uso de fórmulas muy sencillas de programar en calculadoras de bolsillo y puede aplicarse no solo al caso de los edificios de concreto armado, sino también de albañilería. Este método no contempla las deformaciones axiales de las barras (sólo flexión y corte), por lo que sus resultados (esfuerzos y desplazamientos) deben emplearse sólo para el diseño de edificaciones de mediana altura (máximo 10 pisos).

## 6.1. Método del Portal

Luego de haberse ubicado los puntos de inflexión en las columnas (Fig. 6.2), y conociéndose por equilibrio de fuerzas laterales la fuerza cortante que existe en cada entrepiso ( $Q$ ) correspondiente al pórtico en análisis, los pasos que se siguen ordenadamente en el método del Portal son:

- 1.- Asumir que las columnas internas absorben 1.5 veces el cortante que toman las columnas externas; luego, por equilibrio de fuerzas horizontales, se calcula el cortante en cada columna.
- 2.- Calcular los momentos flectores en las columnas ( $MA$  y  $MB$ ) y graficar su DMF.
- 3.- Determinar los momentos en las vigas, repartiendo el momento desequilibrado en los nudos proporcionalmente a las rigideces de las vigas ( $1/L$ ) y graficar su DMF.
- 4.- Evaluar el cortante en las vigas por equilibrio.
- 5.- Calcular la fuerza axial en las columnas.



### 6.1.1. Ejemplo de Aplicación

Empleando el método del Portal, se resolverá el pórtico mostrado en la Fig. 6.3. En este ejemplo, se desconoce las características geométricas de las secciones transversales de las vigas y columnas.

En este caso, para cada entrepiso se tiene:  $Q = V + 1.5 V + V = 3.5 V \rightarrow V = Q/3.5$ ; donde:  $Q_1 = 5 + 10 = 15 \text{ ton}$  y  $Q_2 = 10 \text{ ton}$ .

Luego de graficarse el DMF de las columnas, los momentos desequilibrados en los nudos centrales se han repartido sobre las vigas en proporción a la inversa de su longitud ( $1/5$  y  $1/6$ ), mientras que los momentos en los nudos externos de las vigas se han obtenido por equilibrio en forma directa.

En la Fig. 6.3A se muestra el DMF (en ton-m), las fuerzas cortantes (ton) en vigas y columnas, y la fuerza axial de tracción en la columna extrema izquierda, la misma que se obtiene acumulando (de arriba hacia abajo) las fuerzas cortantes existentes en las vigas del tramo izquierdo.

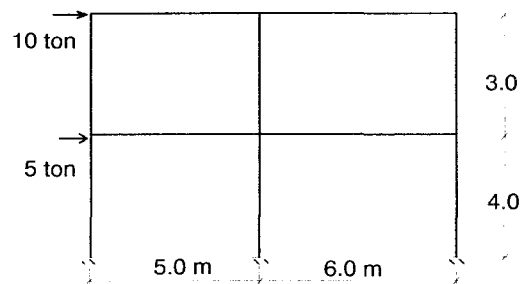


Fig. 6.3

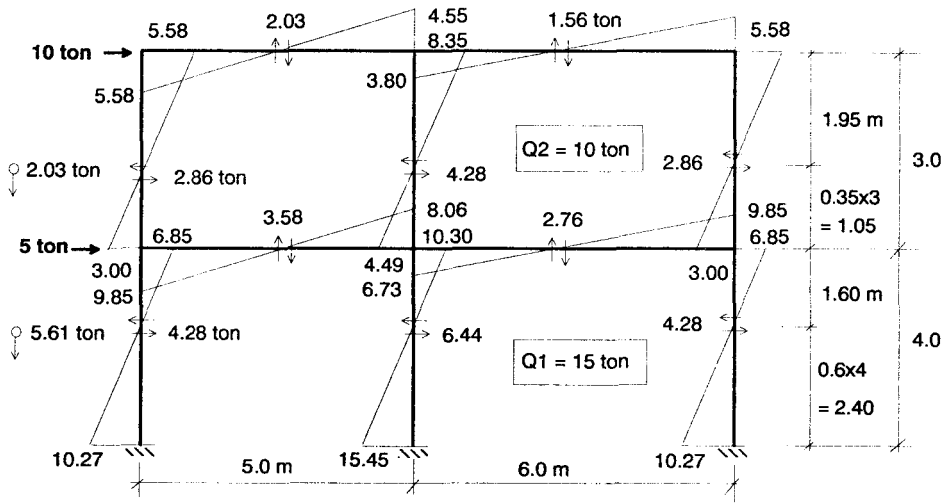


Fig. 6.3A.

### 6.2. Método del Voladizo

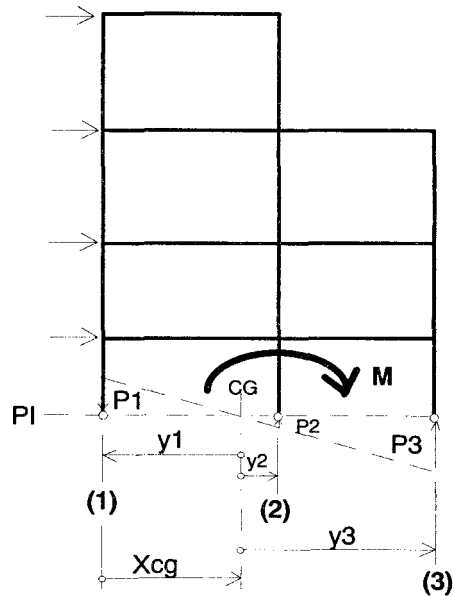
En este método se supone que el pórtico se comporta como una gran viga en voladizo, cuyas fibras son los ejes de columnas. Los pasos que se siguen ordenadamente son:

- 1.- Determinar el centroide (CG) de las áreas (Ai) de las columnas que conforman cada entrepiso. Con fines de predimensionamiento puede asumirse:  $A_i = \text{constante}$ , con lo cual se obtiene:

$$X_{cg} = \frac{\sum (A_i X_i)}{\sum A_i} = \frac{\sum (X_i)}{N}$$

Donde "N" es el número de columnas que conforman al entrepiso en análisis.

- 2.- Calcular el momento de inercia (despreciando la inercia propia) del grupo de columnas respecto al CG. Por Steiner:  $I = \sum A_i y_i^2$ ; donde  $y_i = X_i - X_{cg} = \text{distancia entre el eje de columna "i" y CG}$ .

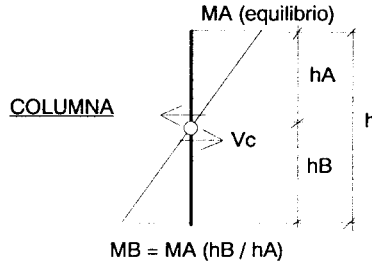
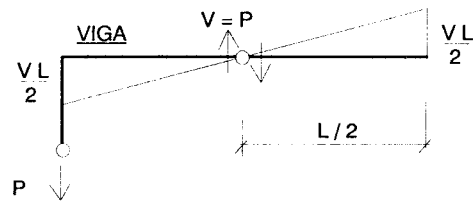


- 3.- Evaluar el momento volcante (M) producido por las cargas laterales. Este momento se calcula a la altura del PI de cada entrepiso (Fig. 6.2), para que de esta manera "M" sea equilibrado sólo por las fuerzas axiales "Pi" que se desarrollan en las columnas, de este modo, no intervienen los momentos hiperestáticos de las columnas.

- 4.- Calcular las fuerzas axiales acumuladas en cada columna. Por Resistencia de Materiales:  $\sigma_i = M y_i / I = P_i / A_i$ , con lo cual:  $P_i = M A_i y_i / \sum A_i y_i^2$ . Si se asume  $A_i = \text{constante}$ , entonces se obtiene:

$$P_i = M y_i / \sum y_i^2$$

- 5.- Por equilibrio hallar la fuerza cortante en las vigas (V); luego, asumiendo que el PI de las vigas cae al centro de su longitud, se determina los momentos en las vigas:  $M_v = V L/2$  y se dibuja su DMF.



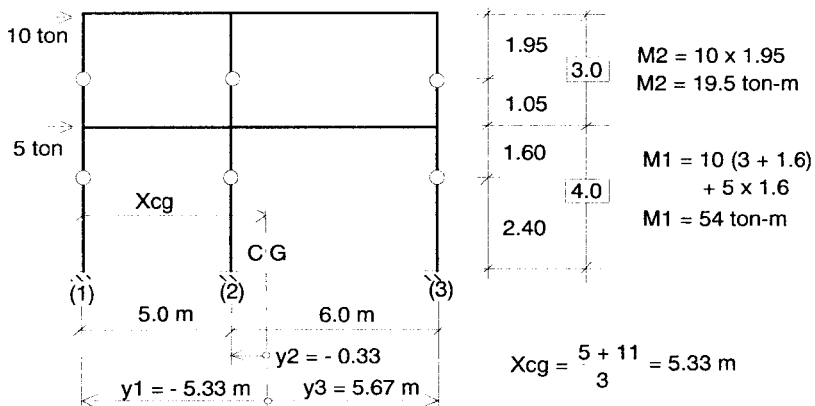
- 6.- Calcular los momentos en las columnas respetando la posición del PI asumida inicialmente. Este cálculo se efectúa de arriba hacia abajo. El momento MA se determina por equilibrio de momentos en el nudo superior, mientras que el momento en el extremo inferior se evalúa aplicando la expresión  $MB = MA (hB / hA)$ .

- 7.- Finalmente, se calcula la fuerza cortante en cada columna:  $V_c = (MA + MB) / h$ .

El proceso descrito es inverso al del Portal. Así, mientras que en el método del Portal el primer paso es hallar la fuerza cortante en las columnas, en el método del Voladizo éste es el último paso. Sin embargo, el método del Voladizo permite calcular las fuerzas axiales en las columnas en la etapa inicial, lo que es necesario para predimensionarlas.

### 6.2.1. Ejemplo de Aplicación

Resolver el pórtico mostrado en la Fig. 6.3 mediante el método del Voladizo.



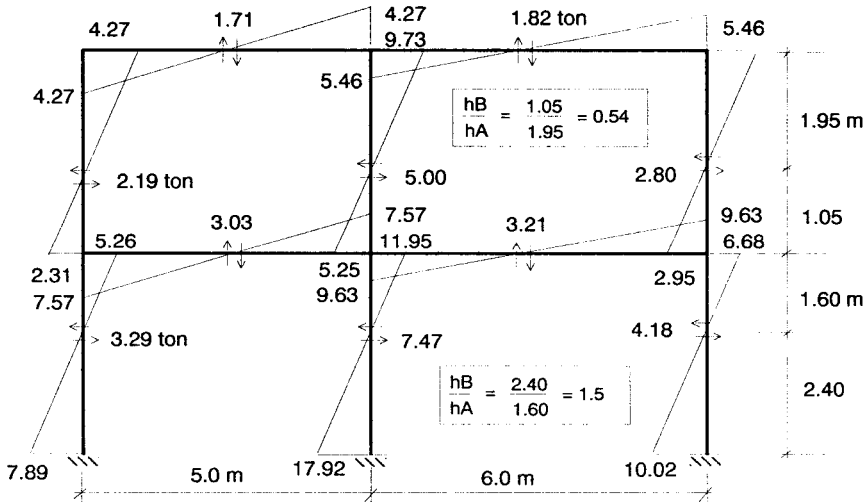
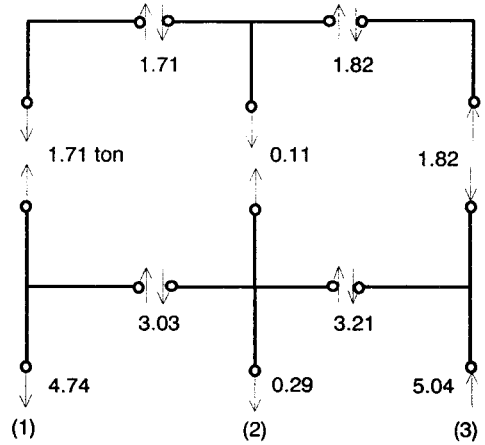
$$\sum y_i^2 = (-5.33)^2 + (-0.33)^2 + (5.67)^2 = 60.67 \text{ m}^2$$

Luego:  $P_i = M_{yi} / 60.67$

Cargas Axiales Acumuladas  $P_i$   
(ton, + en compresión)

Entrepiso Eje de Col.	1 M1=54	2 M2=19.5
1 ( $y_1=-5.33$ )	-4.74	-1.71
2 ( $y_2=-0.33$ )	-0.29	-0.11
3 ( $y_3= 5.67$ )	5.04	1.82
$\Sigma$	0.00	0.00

Nótese que en cada entrepiso por equilibrio de fuerzas verticales:  $\Sigma P_i = 0$



Cabe indicar que este pórtico fue resuelto mediante el método de Muto y también con el programa EDIFICIO (matricial), para lo cual se trabajó con vigas de 0.3x0.5 m y columnas de 0.3x0.4 m. La mayor diferencia de momentos se produjo en la base inferior de la columna central del primer piso, a continuación, entre paréntesis se muestra la diferencia porcentual respecto al análisis matricial de los momentos obtenidos en ese nudo.

M (Portal) = 15.45 ton-m (27%)  
M (Muto) = 12.52 ton-m (3%)

M (Voladizo) = 17.92 ton-m (48%)  
M (EDIFICIO) = 12.13 ton-m

De esta manera, puede decirse que el método del Portal proporciona mejores resultados que el del Voladizo cuando el pórtico es achatado.

### 6.3. Método de Muto

El método de Muto se utiliza para resolver en forma aproximada a los pórticos de edificios compuestos por vigas y columnas ortogonales, sujetos a carga lateral producidas por el viento o los sismos. El método contempla en cierta forma la deformación por flexión de las barras, con lo cual, los resultados que se obtienen son mucho más precisos que los calculados mediante el método del Portal o del Voladizo, e incluso pueden utilizarse para el diseño de estructuras de mediana altura, donde los efectos de la deformación axial son despreciables.

#### 6.3.1. Rigidez Lateral

Supongamos la siguiente columna biempotrada, sujeta a un desplazamiento lateral

Por equilibrio:  $V = 12 EI / h^3$

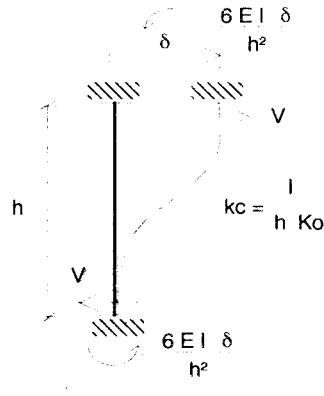
Siendo:  $k_c = I / h Ko$

Se obtiene:  $V = ( 12 E Ko / h^2 ) kc$

Multiplicando por:  $a = 1$

Resulta:  $V = ( 12 E Ko / h^2 ) (a kc)$

Se define a la Rigidez Lateral Absoluta (K o Da) como aquella fuerza cortante (V) capaz de originar un desplazamiento lateral unitario, relativo entre los extremos de la columna, bajo esta definición se obtiene:



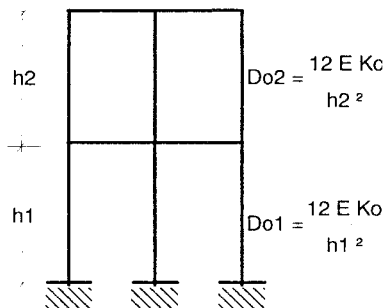
**Rigidez Lateral Absoluta = K = Da = V/d = (12 E Ko / h^2) a kc = Do (a kc) = Do D**

Donde Do es la denominada Rigidez Lateral Estándar (con unidades de fuerza entre longitud, usualmente ton / cm) calculada como:

**Rigidez Lateral Estándar = Do = 12 E Ko/h^2**

La Rigidez Lateral Estándar depende de la altura de cada columna, pero, como usualmente las columnas que conforman un entrepiso tienen la misma altura, entonces esas columnas tendrán el mismo valor Do. Por otro lado, se define a la Rigidez Lateral Relativa (adimensional) al valor:

**Rigidez Lateral Relativa = D = K/Do = a kc**



El coeficiente "a" contempla el grado de empotramiento que tiene la columna en sus extremos; para el caso que la columna esté biempotrada (vigas muy rígidas) el valor de "a" es 1. En cambio, si la columna está biarticulada "a" es cero (no tiene rigidez lateral, o no opone resistencia al desplazamiento lateral); por otro lado, si la columna está articulada en su base (por ejemplo, zapata sobre un suelo muy blando) y empotrada en su extremo superior (vigas rígidas), se demostrará que "a" es  $\frac{1}{4}$

Por equilibrio:  $V = \frac{3EI\delta}{h^2}$ ,  $n^2 = \frac{12EKo}{kc}$

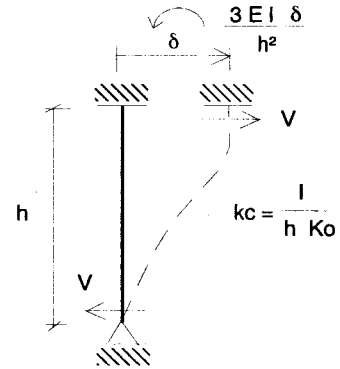
Siendo:  $Do = \frac{12EKo}{h^2}$

Resulta:  $V = Do (\frac{1}{4} kc) \delta$

Con lo cual:  $K = \frac{V}{\delta} = Do (\frac{1}{4} kc)$

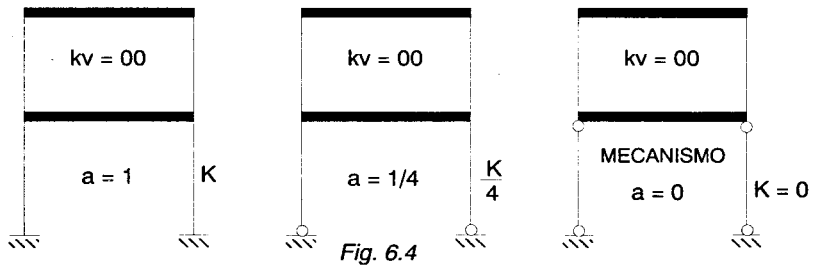
Como:  $K = Do (a kc)$

Se concluye que:  $a = \frac{1}{4}$

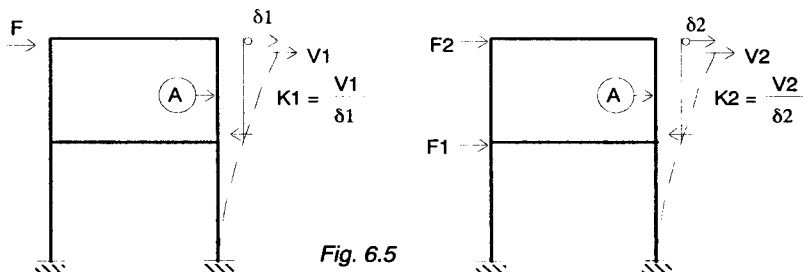


Cabe indicar que pese a que la columna esté articulada en su base, en el método de Muto siempre se trabaja con un coeficiente de rigidez a la flexión  $kc = I / (h Ko)$ .

El valor "a" está comprendido entre 0 y 1 ( $0 \leq a \leq 1$ ), y la máxima rigidez lateral (K) se obtiene cuando la columna está biempotrada; si esa columna se articula en su base (por ejemplo, por la formación de una rótula plástica) K se reduce en 75%, y si luego se articula en su extremo superior, K se degrada en 100%, convirtiéndose el sistema en un mecanismo inestable (Fig. 6.4).

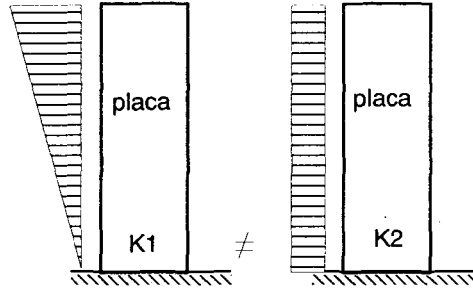


Tal como se ha definido la rigidez lateral, se tendría que ella resulta dependiente del sistema de carga lateral actuante; sin embargo, Muto concluye que en los pórticos compuestos por vigas y columnas, la distribución y magnitud de las cargas laterales no afecta



el valor de K. Por ejemplo, si se calculase mediante Cross el desplazamiento y la fuerza cortante en la columna "A" del pórtico mostrado en la Fig. 6.5, para dos estados de carga, resulta  $K_1 \approx K_2 \approx K$ .

Es decir, las variables que intervienen en mayor grado en el cálculo de K son las propiedades elásticas y geométricas de la columna, así como el grado de empotramiento que tiene en sus extremos. Esto no es cierto para el caso de Placas, cuya rigidez lateral depende fuertemente de la distribución que adoptan las cargas laterales.



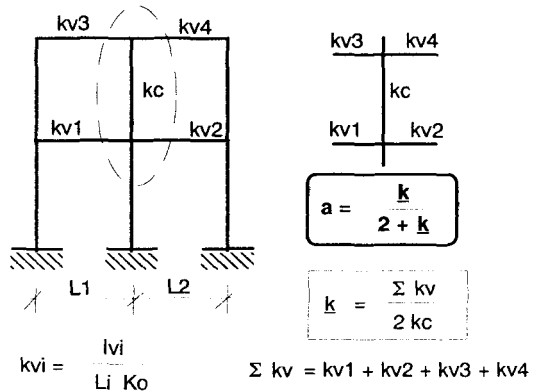
**CÁLCULO DEL COEFICIENTE "a"**

A través de una serie de comparaciones contra resultados obtenidos mediante métodos matriciales, Muto recomienda emplear las siguientes fórmulas para calcular "a":

**1.- Columnas que Pertenecen a Entresijos Superiores al Primero**

Observaciones:

- a.- Si  $k \rightarrow \infty \Rightarrow a = 1$
- b.- El método es válido sólo cuando  $k \geq 0.2$ , de lo contrario, la fórmula resulta imprecisa. El valor  $k$  es menor que 0.2 cuando las vigas son muy flexibles en relación con la columna (vigas chatas), o cuando la columna trata de transformarse en una placa.

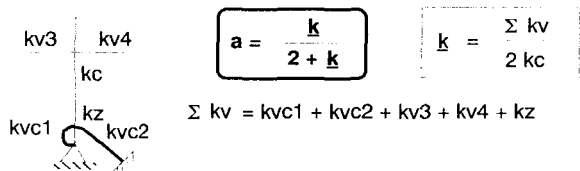


**2.- Subcasos para las Columnas del Primer Piso**

a.- Base Semiempotrada

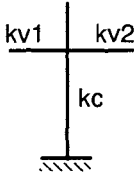
Aparte de existir vigas de cimentación (VC), la rigidez aportada por los pilotes o el suelo de cimentación ( $K_\theta$ ) se contempla mediante la expresión:

$$k_z = K_\theta / (4 E K_0)$$



Cuando la base de la columna esté semiempotrada, el valor que se obtenga de "a", deberá ser inferior al caso en que la base esté empotrada (subcaso "b").

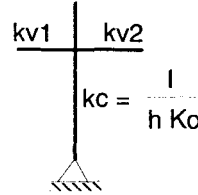
b.- Base Empotrada



$$a = \frac{0.5 + k}{2 + k}$$

$$k = \frac{kv1 + kv2}{kc}$$

c.- Base Articulada



$$a = \frac{0.5 k}{1 + 2 k}$$

$$k = \frac{kv1 + kv2}{kc}$$

6.3.2. Cálculo de Desplazamientos y Cortantes. Columnas en Paralelo

La condición para que un conjunto de columnas estén dispuestas en paralelo es que su desplazamiento relativo ( $\delta$ ) sea único. Esto ocurre en los edificios compuestos por losas de piso axialmente rígidas (aligerados o losas macizas), denominadas "diafragmas rígidos", donde, al existir monolitismo entre las vigas y la losa (ya que el concreto de ambos elementos se vacía en simultáneo), las vigas también serán rígidas axialmente.

Estudiando un entrepiso cualquiera del pórtico mostrado en la Fig. 6.6, y llamando Q al cortante de entrepiso (valor conocido por equilibrio de fuerzas laterales), se tratará de reducir el conjunto de columnas a un sólo eje vertical, cuya rigidez de entrepiso sea la suma de las rigideces laterales de las columnas que conforman ese entrepiso.

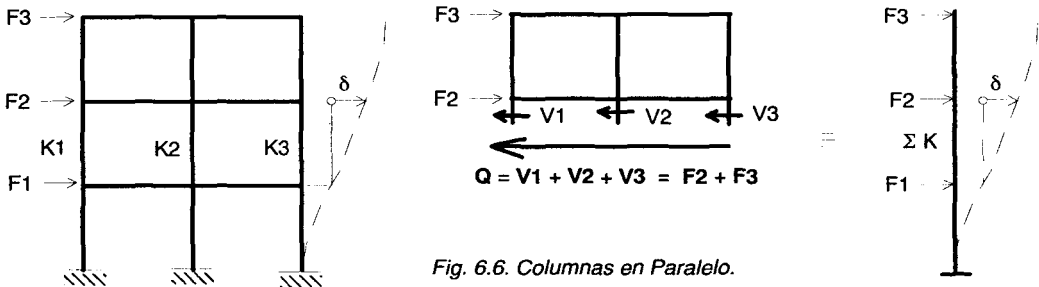


Fig. 6.6. Columnas en Paralelo.

Como  $V_i = K_i \delta$ , entonces:  $Q = V_1 + V_2 + V_3 = K_1 \delta + K_2 \delta + K_3 \delta = \delta \Sigma K_i$ , de la cual puede obtenerse:

$$\delta = Q / \Sigma K_i$$

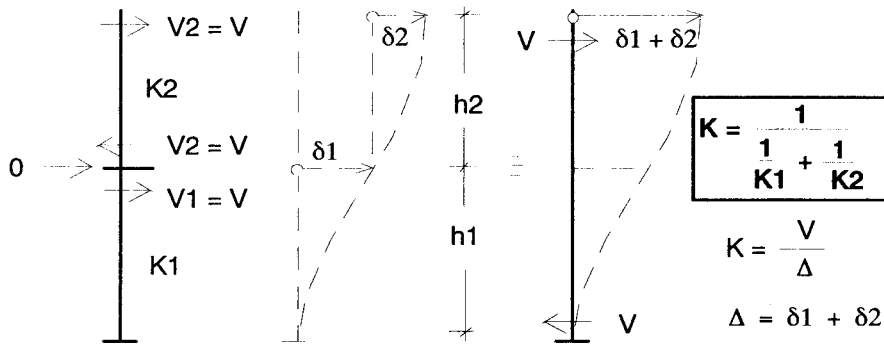
Luego, la fuerza cortante en cada columna se calcula como:

$$V_i = K_i \delta = Q ( K_i / \Sigma K_i )$$

Es decir, cada columna absorbe fuerza cortante en proporción a su rigidez lateral. Por otro lado, puede observarse que el desplazamiento del entrepiso ( $\delta$ ) pueden obtenerse si se modela al pórtico como un sólo eje vertical, cuya rigidez de entrepiso sea  $\Sigma K_i$ .

### 6.3.3. Pórticos con Mezzanine y Vigas de Entrepiso. Columnas en Serie

La condición para que dos o más columnas (ubicadas una sobre la otra) estén dispuestas en serie es que la fuerza cortante en ellas sea única, lo que implica que la fuerza actuante a la altura del nivel que separa a las columnas es nula. Este sistema puede reducirse a una sólo columna equivalente de doble altura de la siguiente manera:



En el primer piso:

$$V_1 = V = K_1 \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = V / K_1$$

En el segundo piso:

$$V_2 = V = K_2 \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = V / K_2$$

Luego:

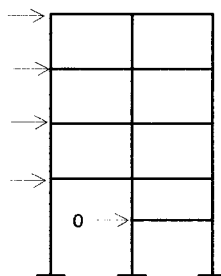
$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 = V / K_1 + V / K_2 = V ( 1 / K_1 + 1 / K_2 )$$

De la cual:

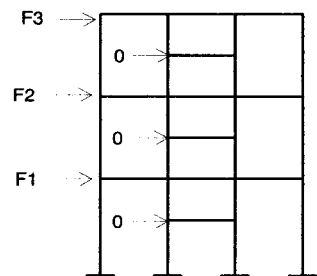
$$K = V / \Delta = 1 / [ 1 / K_1 + 1 / K_2 ]$$

En general para columnas en serie se tiene:  $K = 1 / \Sigma (1/K_i)$

Este caso de columnas en serie puede presentarse en pórticos con mezzanine, donde a la altura del mezzanine la masa es pequeña, así como la aceleración sísmica, con lo cual, la fuerza de inercia en ese nivel es prácticamente despreciable con relación a las que existen en los niveles superiores. También puede presentarse en pórticos con viga intermedia en el entrepiso, que sirve como apoyo del descanso de alguna escalera, al ser su masa pequeña, la fuerza de inercia será prácticamente nula en ese nivel.



Pórtico con Mezzanine

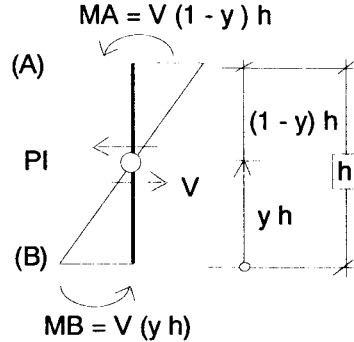


Pórtico con Viga en el Entrepiso

**6.3.4. Determinación de Esfuerzos**

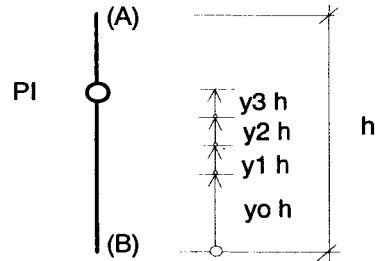
Conocido el cortante que absorbe una columna ( $V$ ), Muto proporciona unas Tablas (ver el Anexo 2) que permiten ubicar la posición del punto de inflexión (PI). Luego, siguiendo un proceso similar al explicado para el método del Portal, se determinan los esfuerzos:

- a.- Graficar el DMF en las columnas.
- b.- Calcular los momentos en las vigas, repartiendo el momento desequilibrado en los nudos en proporción a las rigideces de las vigas ( $k_v$ ), y graficar su DMF.
- c.- Determinar la fuerza cortante en las vigas por equilibrio.
- d.- Evaluar la fuerza axial en las columnas.



**Ubicación del Punto de Inflexión (PI) en las Columnas**

Este punto se localiza a una altura medida a partir de la base de la columna igual a " $y h$ ", el valor " $y$ " se determina como  $y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$ ; donde " $y_0$ " es a la altura estándar del PI, " $y_1$ " es una corrección por variación de rigideces de las vigas, mientras que " $y_2$ " e " $y_3$ " corresponden a correcciones por diferencias de alturas entre los pisos consecutivos. Como usualmente los pisos son típicos, sólo se calcula " $y_0$ ".

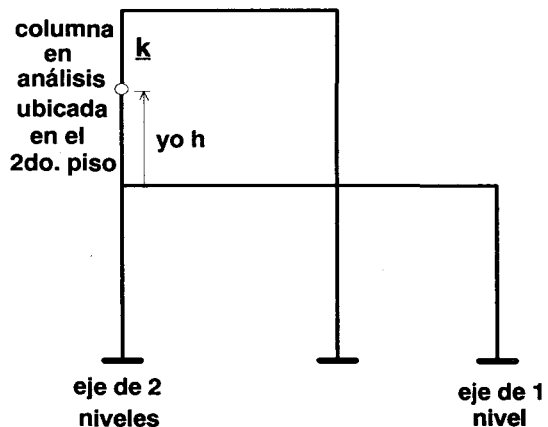


**a.- Altura Estándar del PI ( $y_0 h$ ). Tabla 1A**

Muto elaboró la Tabla 1A, suponiendo que las alturas de los entrepisos eran iguales, así como que las rigideces de las vigas no variaban y que la distribución de las fuerzas laterales era triangular.

El cálculo de " $y_0$ " se efectúa en cada eje vertical de columnas.

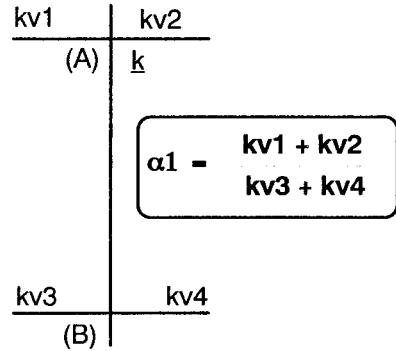
Para ingresar a la Tabla 1A, es necesario saber cuántos niveles tiene el eje de la columna en análisis, en que entrepiso está ubicada y el valor de  $k$ .



**b.- Corrección "y1", Tabla 2**

Esta corrección se realiza sólo cuando las vigas que llegan al extremo superior (A) de la columna tienen distinta rigidez a flexión que las inferiores (B). Para calcular "y1" es necesario determinar el parámetro  $\alpha_1$  y  $k$ , para luego ingresar a la Tabla 2, anotándose que:

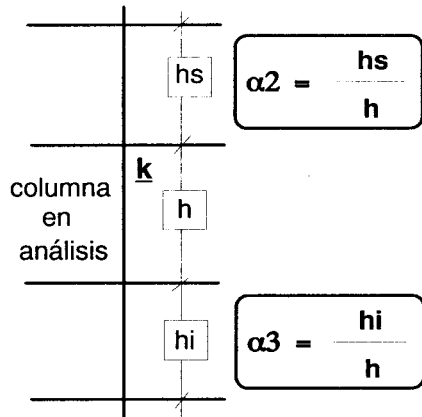
- Si  $\alpha_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 0$  (es lo usual).
- Para el primer piso "  $y_1 = 0$  ", salvo que la base esté semiempotrada.
- Si  $\alpha_1 > 1$ , se ingresa a la Tabla 2 con la inversa de  $\alpha_1$  y se cambia de signo al valor "y1"; es decir, el PI se corre hacia abajo.



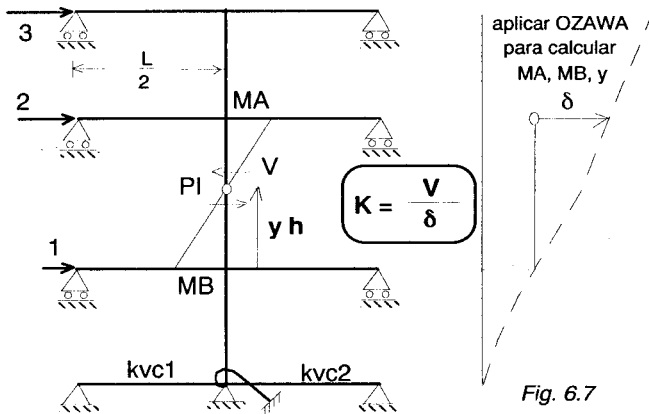
**c.- Correcciones "y2", "y3", Tabla 3**

Estas correcciones se efectúan cuando la columna superior o inferior a la que está en estudio, tienen distintas alturas; para esto, es necesario calcular los parámetros  $\alpha_2, \alpha_3$  y  $k$ . Observaciones:

- Si  $\alpha_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$
- Si  $\alpha_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0$
- Para columnas del primer piso  $\Rightarrow y_3 = 0$
- Para columnas del último piso  $\Rightarrow y_2 = 0$



**Nota:** Si se dispone de una calculadora programable, lo más adecuado es evaluar la rigidez lateral  $K$  y la posición del punto de inflexión (PI) en la columna, resolviendo el modelo mostrado en la Fig. 6.7 mediante el método de Ozawa; donde las alturas y rigideces de las columnas pueden cambiar, así como las rigideces de las vigas; también, la base puede ser flexible (con resorte helicoidal). En este modelo se supone que el PI de las vigas está ubicado al centro de su longitud, y se ha adoptado una distribución triangular de cargas laterales cuyas magnitudes son conocidas.



6.3.5. Ejemplos de Aplicación

**EJEMPLO 1.** Resolver el pórtico mostrado en la Fig. 6.8. Suponer:

$E = 210 \text{ ton/cm}^2$

Vigas: 30 x 60 cm

Columnas: 30 x 45 cm

$K_0 = 760 \text{ cm}^3$

COEFICIENTE DE RIGIDEZ A FLEXIÓN (k)

$k = I / (L K_0)$

Columna con base rotulada:

$k_c = 30 \times 45^3 / (12 \times 200 \times 760) = 1.5$

Vigas:

$k_v = 30 \times 60^3 / (12 \times 600 \times 760) = 1.18$

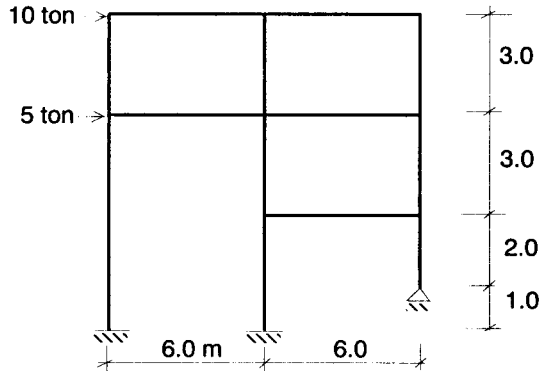
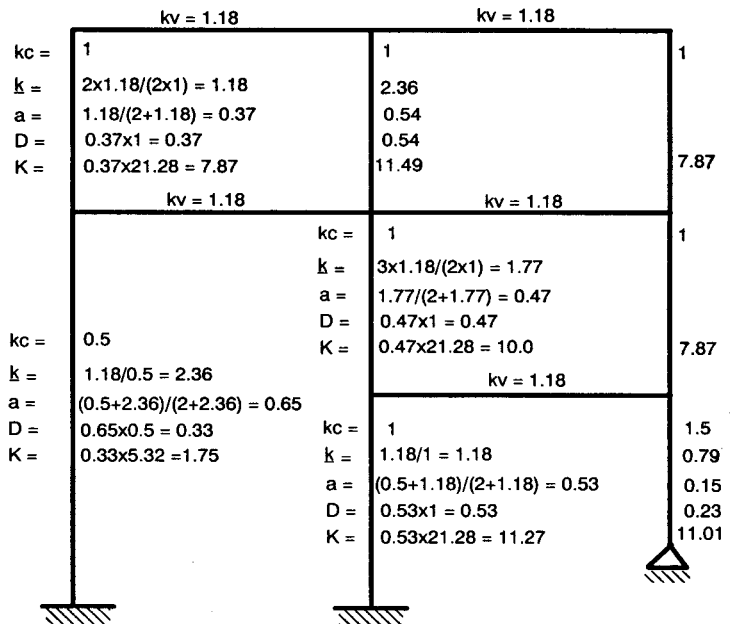


Fig. 6.8

RIGIDEZ LATERAL ABSOLUTA (K):

$D = a k_c$

$K = D D_0 \text{ (ton/cm)}$



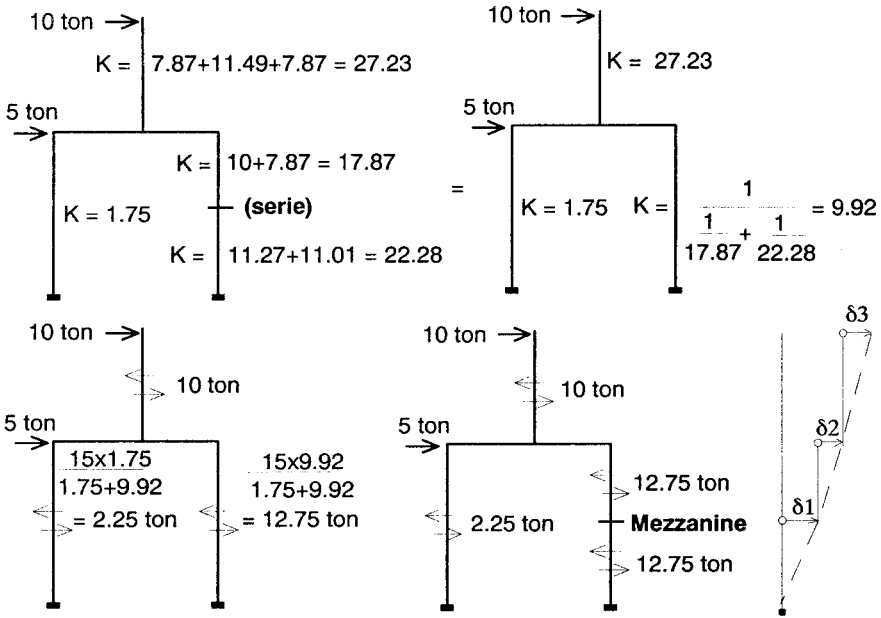
$D_0 = 12 E K_0 / h^2$

Para  $h = 300 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 300^2 = 21.28 \text{ ton/cm}$

Para  $h = 600 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 600^2 = 5.32 \text{ ton/cm}$

Para  $h = 200 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 200^2 = 47.88 \text{ ton/cm}$

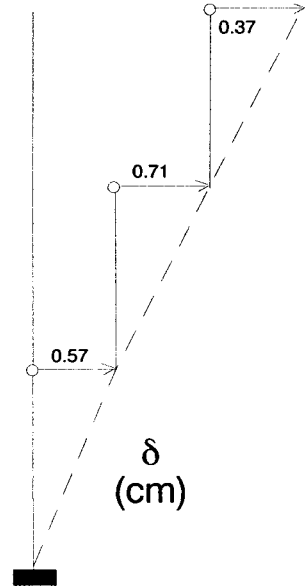
CÁLCULO DE  $\delta$ . Trabajando con los conceptos de columnas en paralelo y en serie:



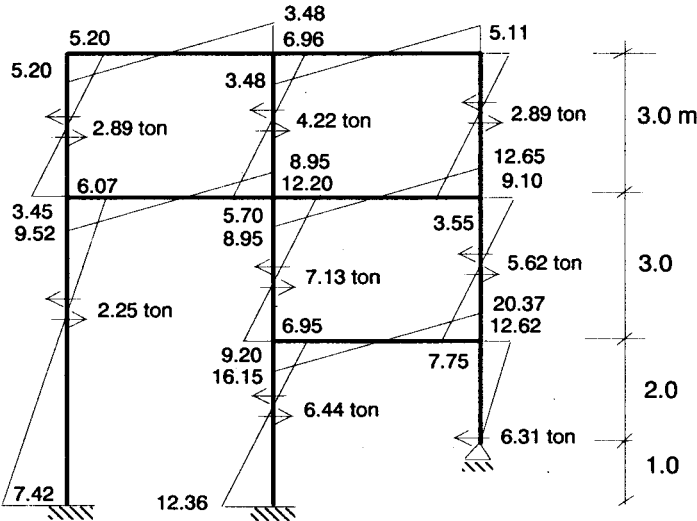
$\delta_1 = 12.75 / 22.28 = 0.57 \text{ cm}$ ;  $\delta_2 = 12.75 / 17.87 = 0.71 \text{ cm}$ ;  $\delta_3 = 10 / 27.23 = 0.37 \text{ cm}$

CÁLCULO DE "y", "Vi = Ki  $\delta_i$  = Q Ki / Ki"

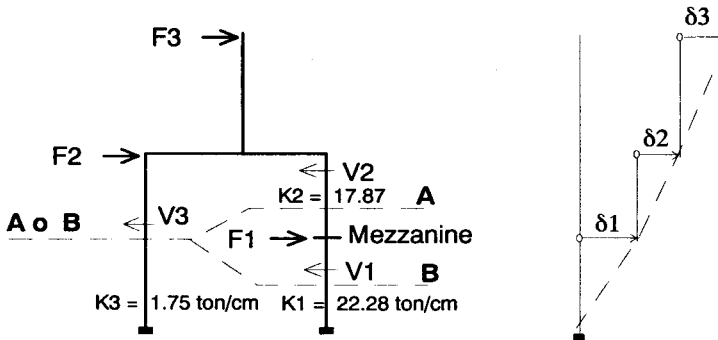
$k = 1.18$	$k = 2.36$	$k = 1.18$
$y_0 = 0.45$	$y_0 = 0.45$	$y_0 = 0.41$
$\alpha_3 = 6/3 \rightarrow y_3 = -0.05$	$y = 0.45$	$y = 0.41$
$y = 0.45 - 0.05 = 0.4$	$K = 11.49$	$K = 7.87$
$K = 7.87$	$V = 4.22 \text{ ton}$	$V = 2.89$
$V = 2.89 \text{ ton}$		
	$k = 1.77$	$k = 1.18$
	$y_0 = 0.49$	$y_0 = 0.46$
	$\alpha_1 = 2 \rightarrow y_1 = -0.06$	$\alpha_3 = 2/3$
	$y = 0.49 - 0.06 = 0.43$	$y_3 = 0$
	$K = 10.0$	$y = 0.46$
	$V = 7.13 \text{ ton}$	$K = 7.87$
		$V = 5.62$
	$k = 1.18$	
	$y_0 = 0.64$	$y = 0$
	$y = 0.64$	$K = 11.01$
$K = 1.75$	$K = 11.27$	$V = 6.31$
$V = 2.25 \text{ ton}$	$V = 6.44 \text{ ton}$	



DMF (ton-m):



De haber existido una fuerza (F1) aplicada a la altura del Mezzanine del ejemplo anterior, tendría que procederse aplicando las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de desplazamientos para calcular  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , tal como se ilustra a continuación.



Corte A-A:  $F_2 + F_3 = V_2 + V_3 = K_2 \delta_2 + K_3 (\delta_1 + \delta_2) \dots$  (1)

Corte B-B:  $F_1 + F_2 + F_3 = V_1 + V_3 = K_1 \delta_1 + K_3 (\delta_1 + \delta_2) \dots$  (2)

De (1) y (2) se despeja  $\delta_1$  y  $\delta_2$ ; luego, la fuerza cortante que absorbe cada columna se calcula aplicando:  $V_i = K_i \delta_i$ .

Cabe mencionar que este problema resultó un tanto complicado de analizar, debido a que la intención fue estudiar una serie de casos particulares como fueron: una estructura con mezzanine, base articulada y columnas de diferentes alturas; sin embargo, para los casos convencionales resulta muy simple aplicar el método de Muto, tal como se verá en el segundo ejemplo.

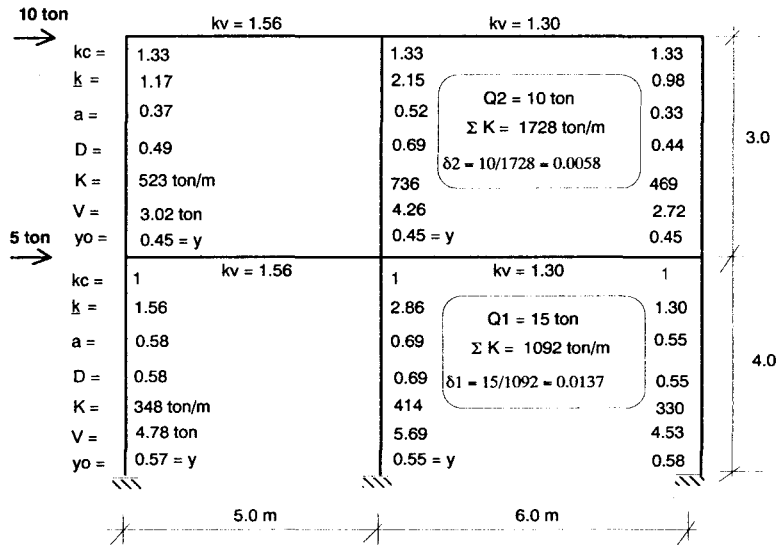
**EJEMPLO 2.** Aplicando el método de Muto, analizar al pórtico resuelto mediante los métodos del Portal y Voladizo (Fig. 6.3).

Asumir:

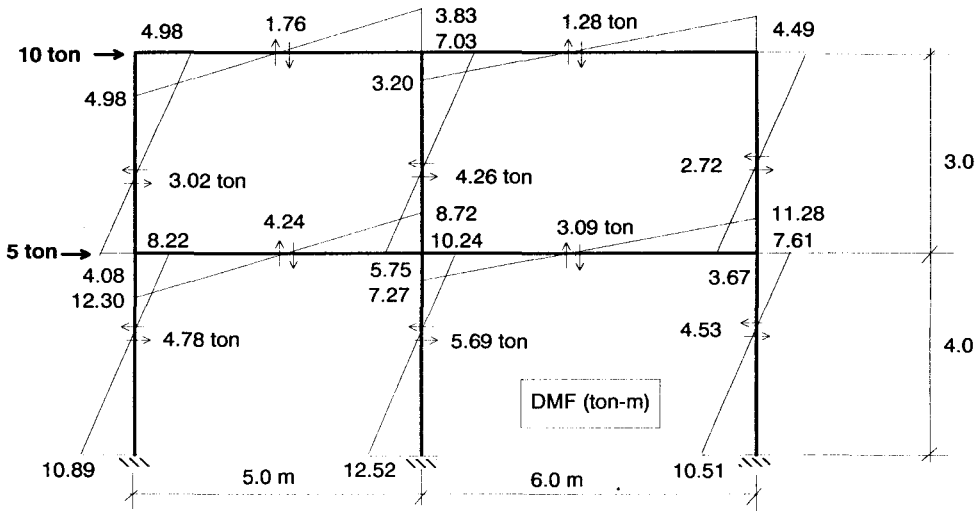
Vigas: 0.3 x 0.5 m  
Cols.: 0.3 x 0.4 m

$K_0 = 0.0004 \text{ m}^3$   
 $E = 2'000,000 \text{ tn/m}^2$

$D_0 = 12 E K_0 / h^2$   
para  $h = 3 \text{ m}$ :  
 $D_0 = 1067 \text{ ton/m}$   
para  $h = 4 \text{ m}$ :  
 $D_0 = 600 \text{ ton/m}$



En este caso no existen correcciones  $y_1, y_2, y_3$ ; es decir:  $y = y_0$ . Ver la Nota al pie de la página.



**Nota:** Cuando no existe un cambio significativo entre las alturas de los pisos consecutivos (menos de 30%) y cuando el valor  $\bar{k} \geq 1$ , puede observarse en la Tabla 3 del Anexo 2 que  $y_2 = y_3 = 0$

**6.3.6. Problema Propuesto**

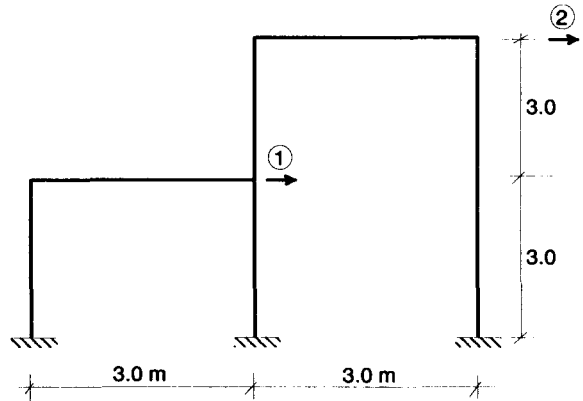
Mediante el método de Muto, calcule la rigidez lateral absoluta de cada columna (K); luego, con esos valores, formule la matriz de rigidez lateral [ R ] y la matriz de flexibilidad lateral [ f ] correspondientes al pórtico mostrado.

Suponer:

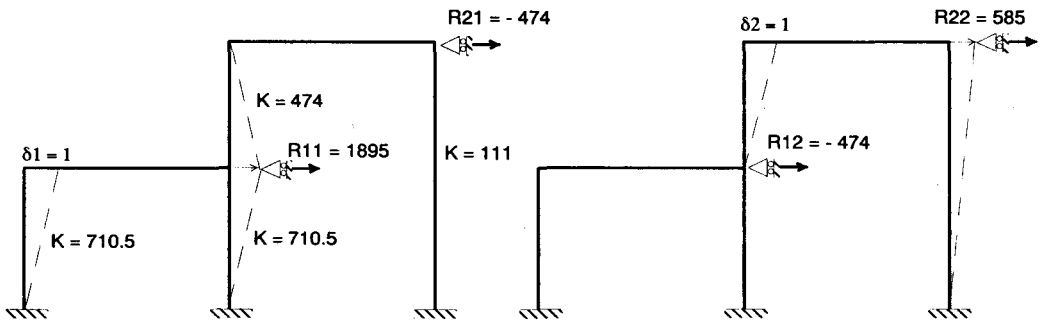
Vigas y Columnas: 0.30 x 0.40 m

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

$K_0 = 533 \text{ cm}^3$



RESULTADO ( $R_{ij}$  y  $K_i$  en ton/m):



$$[ R ] = \begin{bmatrix} 1895 & -474 \\ -474 & 585 \end{bmatrix} \text{ ton / m}$$

### 6.4. Análisis Sísmico Traslacional de Edificios Aportricados

Las fuerzas sísmicas (  $F$  ) son fuerzas de inercia producidas por el hecho de que los niveles tienen masas (  $M$  ), que se ven sujetas a aceleraciones (  $a$  ) ante la acción de un sismo (Fig. 6.9).

Cuando el edificio presenta simetría en forma, toda la losa y, por lo tanto, cada diferencial de masa (  $dm$  ) existente en el nivel respectivo, está sujeta a la misma aceleración, debido a que se supone que la losa se traslada una única cantidad, ya que ella se comporta como una plancha axialmente rígida ("Diafragma Rígido") que trata de compatibilizar o uniformizar el desplazamiento lateral de los pórticos orientados en la dirección del movimiento. Por lo tanto, la resultante (  $F$  ) de las diferenciales de las fuerzas de inercia (  $dF$  ) se encontrará alojada en el centro de masas (  $CM$  ) del nivel en análisis, el cual, razonablemente puede decirse que coincide con el centroide del área en planta, a no ser que exista concentraciones de masas ubicadas en ciertas zonas de la losa.

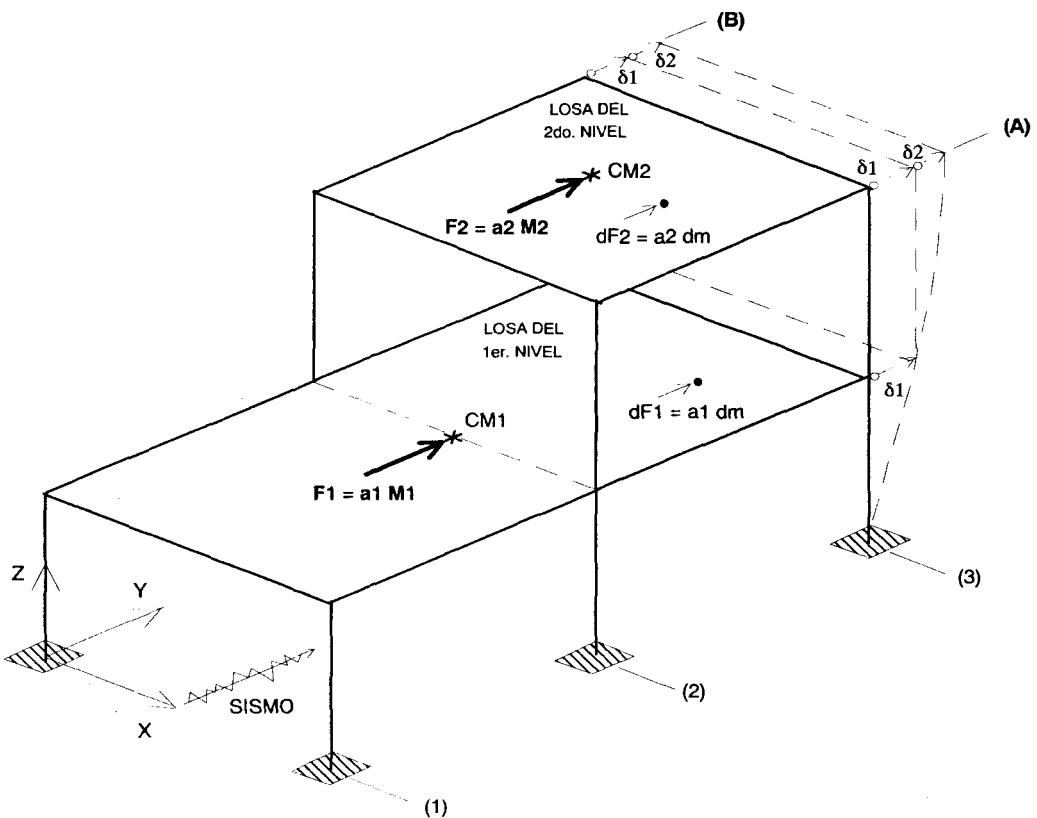


Fig. 6.9. Traslación en la Dirección Y-Y de un Edificio Aportricado Sujeto a un Sismo.

Para los edificios convencionales, las fuerzas de inercia ( $F$ ) son proporcionadas por el Reglamento, como si fuesen fuerzas estáticas actuando en cada dirección independientemente. Pero, estas fuerzas actúan sobre todo el edificio, por lo que viene el problema de discretizarlas en cada pórtico; esto es, saber cuánta fuerza absorbe cada eje.

La hipótesis fundamental para resolver el problema mencionado en el párrafo anterior, consiste en aceptar que la losa del techo se comporta como un "Diafragma Rígido", lo que resulta válido sólo cuando la losa es maciza o aligerada. En cambio, cuando el techo es metálico o de madera, se supone que cada pórtico se comporta independientemente, y las fuerzas laterales se calculan considerando las masas existentes en el área de influencia del pórtico en análisis.

**Matricialmente**, la discretización de las fuerzas sísmicas traslacionales se efectúa en base a conocer la matriz de rigidez lateral de cada pórtico "i":  $[R_i]$ . Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.9, llamando  $\{F_i\}$  al vector de fuerzas absorbido por el pórtico "i" y  $\{d\}$  al vector de desplazamientos laterales absolutos (totales del nivel), se tendrá para la dirección Y-Y lo siguiente:

$$\text{Por equilibrio: } \{F\} = \{F_A\} + \{F_B\}$$

$$\text{Al ser: } \{F_i\} = [R_i] \{d\}$$

$$\text{Se tendrá: } \{F\} = [R_A] \{d\} + [R_B] \{d\} = [[R_A] + [R_B]] \{d\} = [R] \{d\}$$

Donde:  $[R] = [R_A] + [R_B] =$  matriz de rigidez lateral del edificio según Y-Y

$$\text{Con lo cual: } \{d\} = [R]^{-1} \{F\}$$

$$\text{Luego: } \{F_A\} = [R_A] \{d\} \quad \text{y} \quad \{F_B\} = [R_B] \{d\}$$

El proceso descrito es empleado por el programa "EDIFICIO", cuando se utiliza la opción de analizar traslacionalmente al edificio (con un grado de libertad en cada diafragma).

Para el **Análisis Manual**, se supone que las rigideces laterales de entrepiso ( $K$ ) han sido calculadas previamente (por ejemplo, aplicando el método de Muto), y se trabaja con los desplazamientos relativos de entrepiso ( $\delta$ ), colocando a los pórticos orientados en la dirección en análisis

uno a continuación del otro, sin importar el orden en que estén dispuestos. Estos pórticos se conectan a través de bielas rígidas para garantizar que todos ellos se desplacen lateralmente la misma cantidad en cada nivel. Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.9, se tendrá en la dirección Y-Y el modelo indicado en la Fig. 6.10.

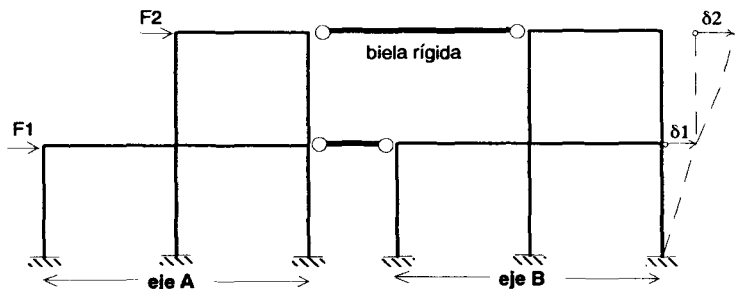


Fig. 6.10

Las columnas que conforman al entrepiso de cada pórtico están dispuestas en paralelo, al igual que ambos pórticos, ya que sus desplazamientos relativos son los mismos, por lo que el sistema se reduce al esquema mostrado en la Fig. 6.10A. De esta manera, es posible determinar los desplazamientos de entrepiso ( $\delta$ ) y el cortante ( $Q$ ) que absorbe cada pórtico como se indica a continuación:

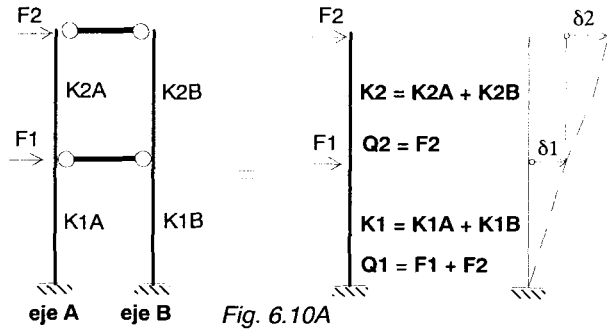


Fig. 6.10A

$$\delta_2 = Q_2 / K_2 \qquad \delta_1 = Q_1 / K_1$$

Eje A:  $Q_{2A} = K_{2A} \delta_2$        $Q_{1A} = K_{1A} \delta_1$

Eje B:  $Q_{2B} = K_{2B} \delta_2$        $Q_{1B} = K_{1B} \delta_1$

Finalmente, las fuerzas laterales ( $F$ ) actuantes en los niveles de cada pórtico pueden ser calculadas, tal como se muestra en la Fig. 6.11, y los esfuerzos en las barras se determinan aplicando los métodos de Muto o Cross.

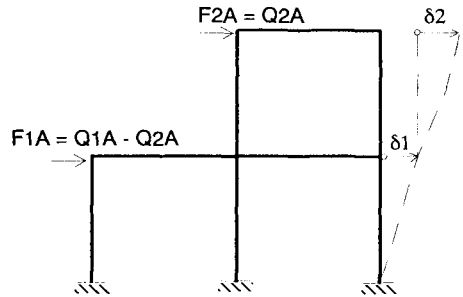


Fig. 6.11. Fuerzas en el eje A.

### 6.5. Interacción Pórtico-Placa

En el Análisis Sísmico Traslacional Manual, las dificultades se presentan cuando existen placas (Fig. 6.12) cuyas rigideces de entrepiso ( $K_{wi}$ ) dependen de la distribución que adoptan las fuerzas laterales, cosa que no ocurre cuando se trabaja matricialmente, en vista que la matriz de flexibilidad lateral de la placa se calcula aplicando cargas unitarias en cada nivel (distribución única de fuerzas para cada estado de carga). En cambio, como ya se ha mencionado, la rigidez lateral de una columna resulta ser prácticamente independiente de la distribución que adoptan las cargas laterales.

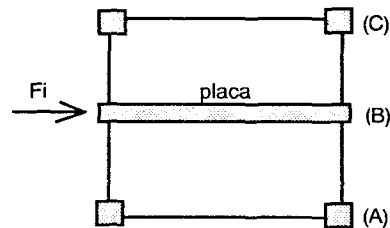


Fig. 6.12. Planta de un Edificio con Placa

Por lo que mientras no se conozca la rigidez lateral de la placa ( $K_{wi}$ ), no se podrá determinar la fuerza cortante que ella absorbe y viceversa, mientras no se conozca la fuerza

cortante que absorbe la placa, no se podrá calcular su rigidez lateral, creándose de esta manera un problema iterativo.

Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.12, las rigideces laterales de las columnas correspondientes a los pórticos A y C, pueden calcularse aplicando el método de Muto y como están dispuestas en paralelo, se suman para condensarlas en un sólo eje de columnas, obteniéndose los valores  $K_{ci}$ . Pero, la rigidez lateral de la placa del eje B ( $K_{wi}$ ) es aún desconocida y en un primer paso del proceso iterativo  $K_{wi}$  debe ser calculada analizando la placa como si fuese una barra en voladizo (deformable por corte y flexión), sujeta a una distribución de cargas estimada.

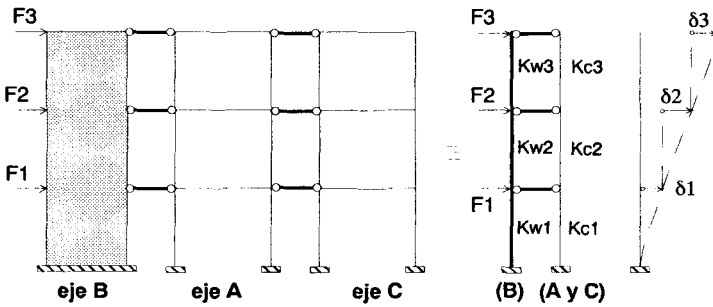


Fig. 6.13. Modelo para el Análisis Manual Traslacional del Edificio de la Fig. 6.12.

Si se supusiera que la placa trabaja aisladamente (Fig. 6.14), se tendría una deformada como la correspondiente a una viga en voladizo, donde en los pisos inferiores predomina la deformación por corte (pequeña), mientras que en los pisos superiores prevalece la deformación por flexión (elevada).

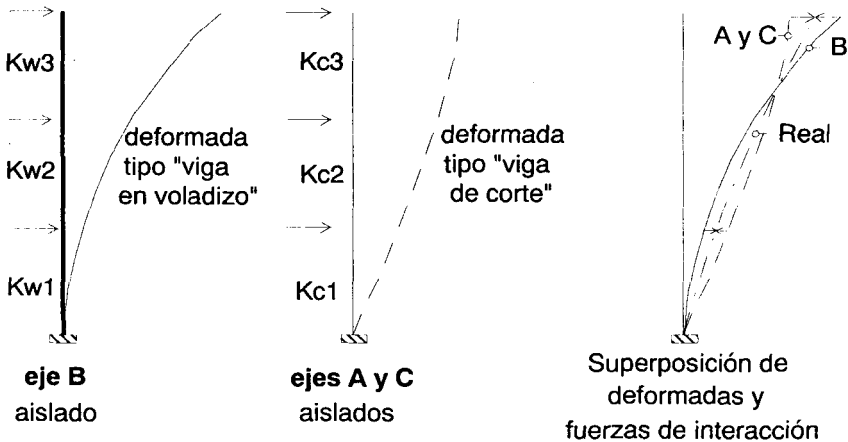


Fig. 6.14. Ejes Aislados.

En cambio, si el conjunto de columnas (ejes A y C) trabajase aisladamente, existiría poco desplazamiento relativo en los pisos superiores, mientras que estos desplazamientos serían altos en los pisos inferiores (Fig. 6.14); a este tipo de estructura se le denomina “**Viga de Corte**”, debido a que su deformada depende fundamentalmente de la magnitud de la fuerza cortante. Esto se produce porque los valores de las rigideces laterales  $K_{ci}$  no varían mucho entre los pisos consecutivos ( $K_{c1} \approx K_{c2} \approx K_{c3} \approx K$ ), con lo cual se tendría:  $V_i \approx K \delta_i$ ; por lo que cuánto mayor sea  $V$ , se tendrá mayor  $\delta$ .

Pero, como debe existir compatibilidad de desplazamientos laterales entre la placa y el conjunto de columnas, ocurrirá que en los pisos superiores la placa no se deformará tanto y el desplazamiento del conjunto de columnas será mayor, lo que dará lugar a la generación de fuerzas de interacción (iguales pero de sentido contrario) negativas en la placa (tratan de descargarla) y positivas en el conjunto de columnas (tratan de recargarlas); mientras que en los pisos inferiores ocurre todo lo contrario (Fig. 6.14).

El problema descrito se acentúa conforme el edificio es más elevado, lo que puede dar lugar a distribuciones de fuerzas laterales fuera de lo común (Fig 6.15), pero todo esto se debe, como ya se explicó, a la interacción pórtico-placa. Por otro lado, podría pensarse que la placa es ineficiente en los pisos superiores y hasta podría tentarnos discontinuarla verticalmente, transformándola en columnas, pero esta solución es inadecuada,

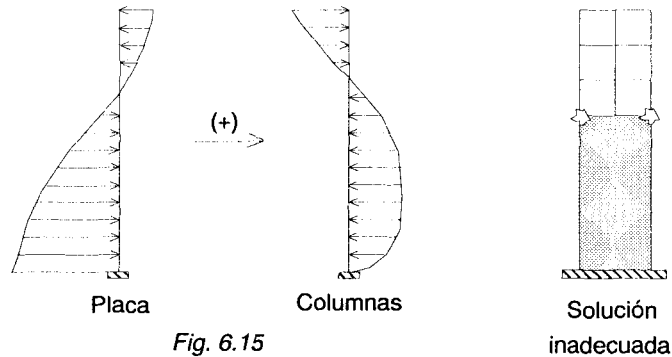


Fig. 6.15  
Distribución de Fuerzas Contemplando la Interacción Placa-Pórtico

porque se produciría concentración de esfuerzos en la zona de contacto columna-placa, por el cambio brusco de rigideces entre los pisos consecutivos; lo más adecuado es no perder la continuidad vertical de la placa, es más, las fuerzas negativas que se desarrollan en su parte superior, contrarrestarían el gran momento basal que usualmente tienen las placas.

En el proceso de **Cálculo Manual** (empleado en la década de los 60), contemplando la interacción pórtico-placa, habría que seguir el siguiente proceso iterativo:

- 1.- Darse una distribución de fuerzas laterales sobre la placa, contemplando la interacción pórtico-placa.
- 2.- Resolver la placa como si fuese una viga en voladizo (isostática) deformable por flexión y corte, luego hallar su rigidez lateral  $K_{wi} = Q_{wi} / \delta_i$ .
- 3.- Calcular el cortante que absorbe la placa:  $Q_{wi} = Q_i K_{wi} / (K_{wi} + K_{ci})$ , lo que dará lugar a otra distribución de fuerzas laterales sobre la placa. En este paso se está

compatibilizando los desplazamientos laterales entre la placa y el conjunto de columnas al asumirlas como elementos en paralelo.

4.- Regresar al paso 2, y así sucesivamente hasta que los valores de  $K_{wi}$  converjan.

Cabe mencionar que si la placa no fuese una barra en voladizo (isostática), sino más bien formase parte de un Pórtico Mixto (Fig. 6.16), el paso 2 del proceso iterativo se complica tremendamente, a pesar que el modelo se simplifique al máximo estimando la posición del punto de inflexión de las vigas que concurren a la placa y condensando la rigidez lateral de las 5 columnas en un sólo eje, tal como se muestra en la Fig. 6.17, donde se observa que la placa es un elemento hiperestático por las vigas coplanares.

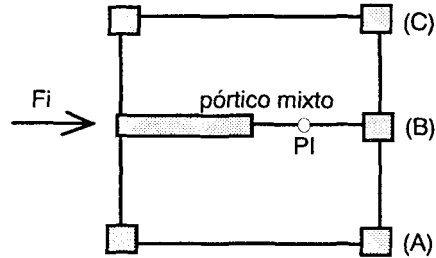


Fig. 6.16. Planta de un Edificio con Pórtico Mixto

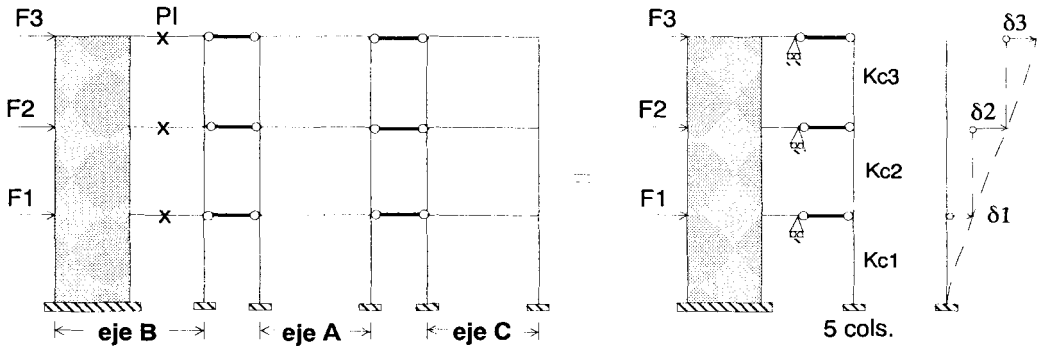


Fig. 6.17. Simplificación Máxima Para el Análisis Traslacional del Edificio de la Fig. 6.16.

Para estos casos, si se pretende realizar un **Análisis Manual**, se recomienda aplicar el método de Ozawa, expuesto en el acápite 6.6.

### 6.6. Método de Ozawa

El método de Ozawa es un proceso manual de cálculo que se utiliza para solucionar, en forma aproximada, pórticos mixtos sujetos a carga lateral. Bajo este procedimiento se resuelve el problema de interacción pórtico-placa sin recurrirse a procesos iterativos; también, puede ser empleado en el análisis sísmico traslacional de edificios de mediana altura (menos de 10 pisos) compuestos por una sola placa y columnas, o varias placas de igual geometría, pero, cuando el edificio contiene placas de diferentes características, será necesario emplear una técnica adicional que se explicará en el acápite 6.6.2.

El método contempla las deformaciones por flexión y por corte en la placa, pero no la deformación axial, por lo que los resultados son bastantes precisos cuando se aplica en estructuras de mediana altura. Por otro lado, se trabaja con rigideces relativas estandarizadas al material de la placa (módulo de elasticidad = E), por lo que si se tuviese, por ejemplo, vigas y columnas de concreto armado ( $E_c$ ) con un muro de albañilería ( $E_a$ ), será necesario aplicar el criterio de la sección transformada, multiplicando el espesor real de las vigas y columnas por la relación  $E_c / E_a$ , desde el inicio del problema.

En este libro sólo se explicará la manera como se aplica el método, así como las hipótesis generales que permitieron la deducción de las fórmulas respectivas.

#### 6.6.1. Nomenclatura y Fórmulas que Emplea el Método

En la Fig. 6.18, se ilustra la nomenclatura utilizada en el Método de Ozawa, ésta es:

$n$  = número asignado a un nivel o a un entrepiso (las variables relativas al entrepiso siguen la numeración del entrepiso).

$\theta$  = ángulo de rotación por flexión en el eje de la placa (radianes), positivo cuando está dirigido en el sentido horario.

$\phi$  =  $2 E K_o \theta$  (giro proporcional al real).

$K_o$  = rigidez estándar, usualmente  $0.001 \text{ m}^3$ .

$D_{on}$  =  $12 E K_o / h_n^2$  = rigidez lateral estándar de la placa en el piso "n"

$k_w$  =  $l_w / (h K_o)$  = coeficiente de rigidez a flexión de la placa en el piso "n".

$D_c$  = rigidez lateral relativa de una columna.

$\Sigma D_c$  = suma de las rigideces laterales de las columnas que conforman al entrepiso en la dirección en análisis ( $D_{c1} + \dots + D_{c7}$ ).

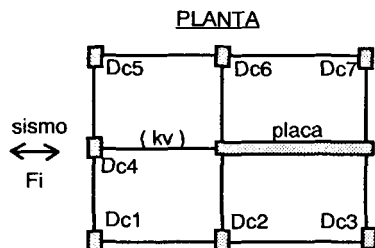
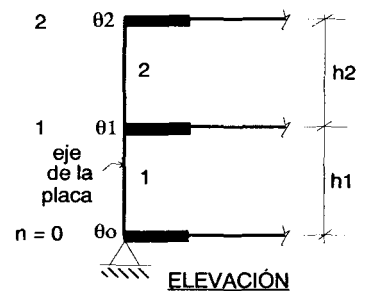


Fig. 6.18

$A_w, I_w, f$  = área axial, momento de inercia y factor de forma de la sección de la placa.

$Q$  = cortante total del entrepiso "n" (valor conocido) =  $\sum F_i$

$Q_w$  = cortante que absorbe la placa (valor desconocido) en el entrepiso "n".

$Q_c$  = cortante que absorbe el grupo de columnas en el entrepiso "n" =  $Q - Q_w$

$V_c$  = cortante que absorbe una columna:  $V_c = D_c Q_c / \sum D_c$

**1.- CONSTANTES DE ENTREPISO**

Para la deducción de las siguientes expresiones, se ha considerado que existe compatibilidad de desplazamiento horizontal entre la placa y el conjunto de columnas (hipótesis de diafragma rígido).

$$X_n = 1 + \frac{\sum D_{cn}}{k_{wn}} + \frac{12 E K_o f \sum D_{cn}}{G A_{wn} h_n} \qquad Z_n = \frac{\sum D_{cn}}{X_n}$$

$$B_n = k_{wn} - 3 Z_n \qquad A_n = k_{wn} + 3 Z_n \qquad C_n = \frac{Q_n h_n}{X_n}$$

Las constantes  $X_n, Z_n, B_n$  y  $A_n$  son adimensionales, mientras que  $C_n$  tiene unidades (ton-m); ellas se tabulan ordenadamente por cada entrepiso "n" de la siguiente manera:

Piso	$k_w$	$\sum D_c$	$X_n$	$Z_n$	$B_n$	$A_n$	$Q_n$	$C_n$

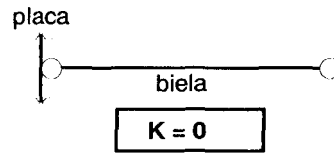
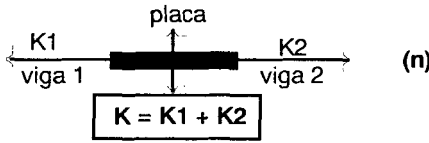
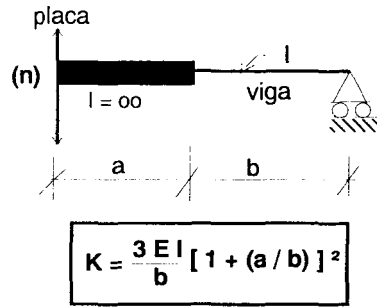
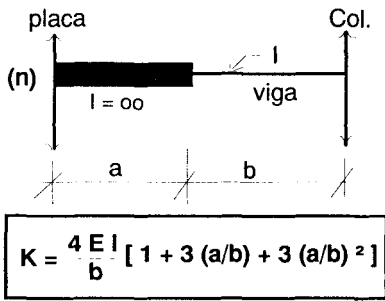
*Nota:* si se estuviese analizando una placa aislada, sin columnas, entonces:  $D_c = 0, X_n = 1, Z_n = 0, B_n = A_n = k_{wn}$ .

**2.- COEFICIENTE DE RIGIDEZ A FLEXIÓN DE LA VIGA DE BORDE ( $k_v$ )**

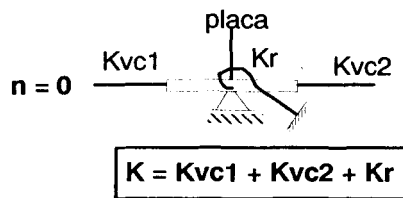
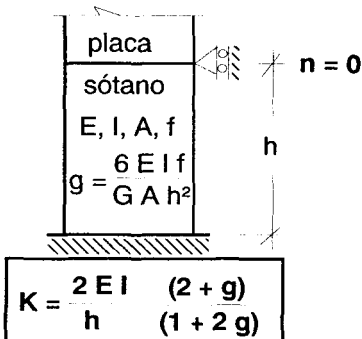
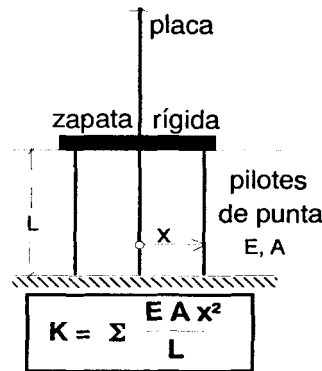
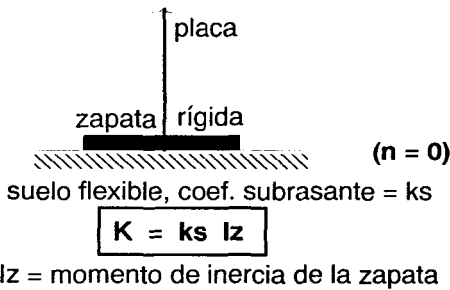
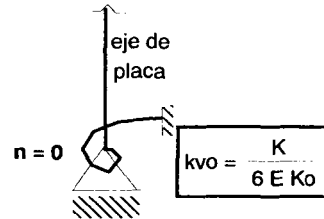
Este coeficiente (adimensional) se obtiene como la rigidez al giro absoluta (  $K$  ) de la viga que llega al plano de la placa dividida entre la constante  $6 E K_o$ ; en cambio, en el método de Muto se usa la constante  $4 E K_o$ .

$E$  = módulo de elasticidad de la placa.  $k_v = \frac{K}{6 E K_o}$

En el cálculo de  $K$  existen varios casos, los cuales se muestran a continuación.



Cuando la base de la placa (nivel  $n = 0$ ) rota, debe calcularse la rigidez absoluta del resorte helicoidal ( $K$ ) y dividirla entre  $6 E K_0$ . Acá también se presentan varios casos, los que se muestran a continuación.



$K_{vc}$  = rigidez al giro de la viga de cimentación

3.- CONSTANTES POR CADA NIVEL QUE ROTEN

En cada nivel del eje de la placa, donde el giro  $\theta_n$  sea un grado de libertad, deberá calcularse las siguientes constantes imponiendo condiciones de borde:

$$a_n = A_n + A_{n+1} + 6 k_v n \qquad b_n = B_n \qquad d_n = C_n + C_{n+1}$$

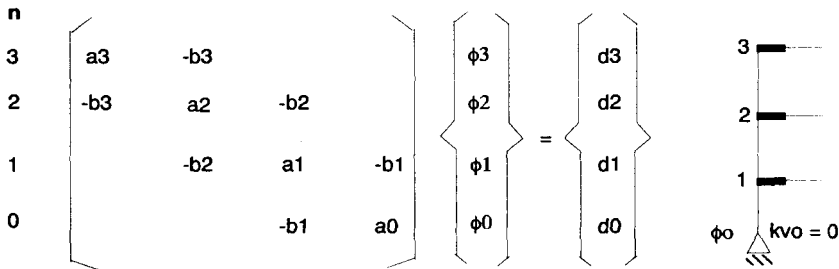
Por ejemplo, si se está en el último nivel, los términos  $A_{n+1}$  y  $C_{n+1}$  son nulos.

4.- ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS (ECUACIÓN DE OZAWA)

Esta ecuación proviene de efectuar el equilibrio de momentos en cada nudo "n" de la placa y se plantea sólo en los niveles que roten:

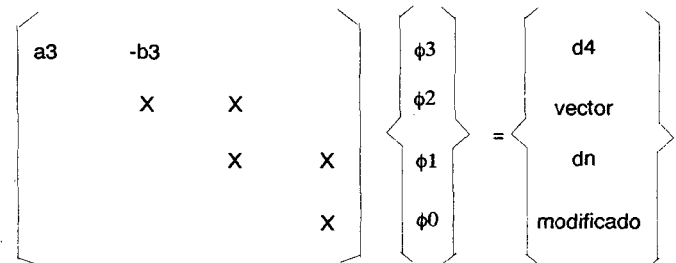
$$- b_{n+1} \phi_{n+1} + a_n \phi_n - b_n \phi_{n-1} = d_n$$

El planteo de esta ecuación conduce a una formulación matricial, donde como regla práctica se llena primeramente por cada fila "n" los términos  $a_n$ ,  $-b_n$  y  $d_n$ ; finalmente, a sabiendas que la matriz correspondiente al primer miembro de la ecuación de Ozawa es simétrica y bandeada en forma tridiagonal, se completa esta matriz llenando los términos que aparecen debajo de la diagonal.



5.- SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS

Puede aplicarse cualquier método para solucionar las ecuaciones del paso anterior; sin embargo, se recomienda eliminar los términos que aparecen debajo de la diagonal, para finalmente, por un proceso de sustitución inversa, calcular  $\phi_n$



6.- CÁLCULO DE LA FUERZA CORTANTE QUE ABSORBE LA PLACA (Qw), EL CONJUNTO DE COLUMNAS (Qc) Y CADA COLUMNA (Vc)

$$Q_{wn} = [ C_n - 3 \sum Z_n (\phi_{n-1} + \phi_n) ] / h_n \qquad Q_{cn} = Q_n - Q_{wn}$$

$$V_c = D_c Q_{cn} / \sum D_c$$

7.- CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO RELATIVO DEL ENTREPISO (n) Y DE LA RIGIDEZ LATERAL ABSOLUTA DE LA PLACA (Kwn)

Puede aplicarse cualquiera de las dos ecuaciones mostradas, ya que existe compatibilidad de desplazamientos entre la placa y el grupo de columnas.

$$(1) \quad \delta_n = \frac{1}{h_n \sum D_{cn}} \left[ 3 (\phi_{n-1} + \phi_n) + \frac{Q_{wn} h_n}{k_{wn}} \right] + \frac{f h_n Q_{wn}}{G A_{wn}}$$

$$(2) \quad \delta_n = \frac{Q_{cn}}{\sum D_{cn}}$$

Luego:  $K_{wn} = Q_{wn} / \delta_n$

8.- CÁLCULO DE MOMENTOS EN EL EJE DE LA PLACA, COLUMNAS Y VIGAS

Conocido Vc en cada columna, se aplica el método de Muto para obtener los momentos en las vigas y columnas. El momento flector en el extremo de la viga que concurre al eje de la placa se calcula con la expresión:  $M_{vn} = 3 k_{vn} \phi_n$  (positivo en el sentido horario); de existir varias vigas u otros elementos que concurren al nudo "n",  $M_{vn}$  se reparte en proporción a la rigidez al giro de cada uno de ellos.

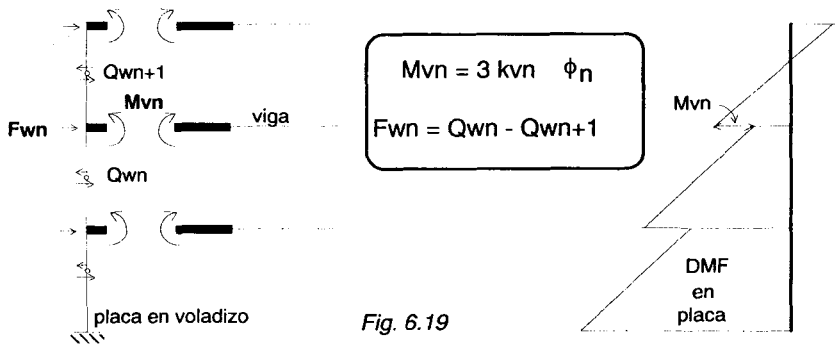


Fig. 6.19

$M_{vn}$  actúa sobre la placa en sentido contrario, y ésta se resuelve como si fuese una barra en voladizo, isostática (Fig. 6.19), sujeta a momentos ( $M_{vn}$ ) y a fuerzas laterales cuyas magnitudes son:  $F_{wn} = Q_{wn} - Q_{wn+1}$ .

**6.6.2. Caso en que Existen Placas de Diferentes Características**

En este caso, se trata de evaluar los desplazamientos laterales del edificio aplicando el método de Ozawa, para lo cual se agrupa (o condensa) al conjunto de placas en un sólo eje vertical equivalente y al grupo de columnas en otro eje. El método se aplica empleando los siguientes parámetros (ver la Fig. 6.20):

<b>Eje de placa equivalente:</b>	$k_w$	=	$S$	$k_{wi}$	=	$k_{w1} + k_{w2} + k_{w3}$
	$A_w$	=	$\Sigma$	$A_{wi}$	=	$A_{w1} + A_{w2} + A_{w3}$
	$k_v$	=	$\Sigma$	$k_{vi}$	... ( * )	
	$f$	=	valor promedio de los factores de forma de las secciones transversales de las distintas placas.			

(\*) En  $\Sigma k_{vi}$  intervienen sólo las vigas que concurren al plano de las diversas placas. Por ejemplo, en la Fig. 6.20, para la dirección X-X:  $\Sigma k_{vi} = k_{v1} + k_{v2} + k_{v3} + k_{v4}$

<b>Eje de columna equivalente:</b>	$\Sigma D_{ci}$	=	$D_{c1} + D_{c2} + D_{c3} + D_{c4} + D_{c5} + D_{c6}$
------------------------------------	-----------------	---	---

Una vez calculado los desplazamientos laterales de entrepiso ( $\delta$ ) mediante Ozawa, se trabaja con cada placa individualmente, estimando la posición del punto de inflexión (PI) de sus vigas coplanares, luego se evalúan los momentos de empotramiento en cada entrepiso inducidos por  $\delta$  y se resuelve el problema por Cross, considerando que sólo los giros por flexión son los grados de libertad. Cabe remarcar que debe contemplarse las deformaciones por corte en la placa al calcular los momentos de empotramiento, las rigideces al giro y los factores de transporte.

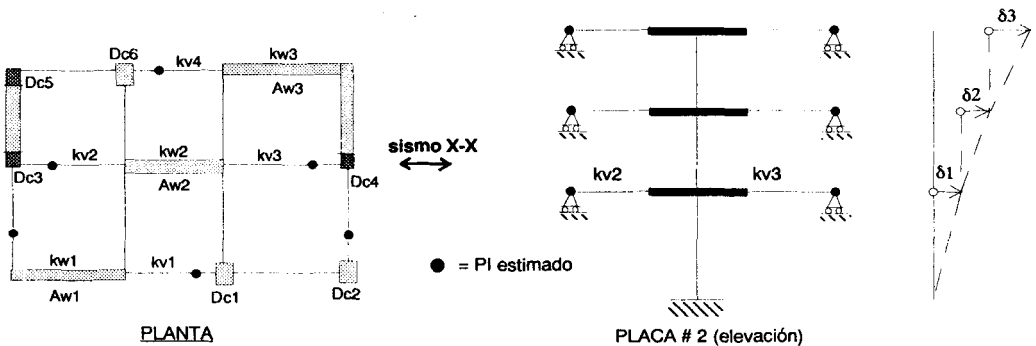


Fig. 6.20. Caso en que Existen Placas de Diferentes Características.

6.6.3. Ejemplo de Aplicación

Resolver el pórtico mixto mostrado en la Fig. 6.21. Suponer:

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

$E / G = 2.3$

$K_o = 0.001 \text{ m}^3$

$D_o = 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.001 / 3^2 = 2667 \text{ ton/m}$

$6 E K_o = 12000 \text{ ton-m}$

Vigas:  $0.30 \times 0.60 \text{ m}$

$I_v = 0.3 \times 0.6^3 / 12 = 0.0054 \text{ m}^4$

$K = 4 E I_v [1 + 3 (a/b) + 3 (a/b)^2] / b$

$K = 23873 \text{ ton-m}$

$k_{vn} = 23873 / 12000 = 1.99$

Columnas:  $0.45 \times 0.45 \text{ m}$

$k_c = 0.45 \times 0.45^3 / (12 \times 3 \times 0.001) = 1.14$

Placa:  $0.15 \times 3.00 \text{ m}$

$k_w = 0.15 \times 3^3 / (12 \times 3 \times 0.001) = 112.5$

$A_{wn} = 0.15 \times 3 = 0.45 \text{ m}^2$

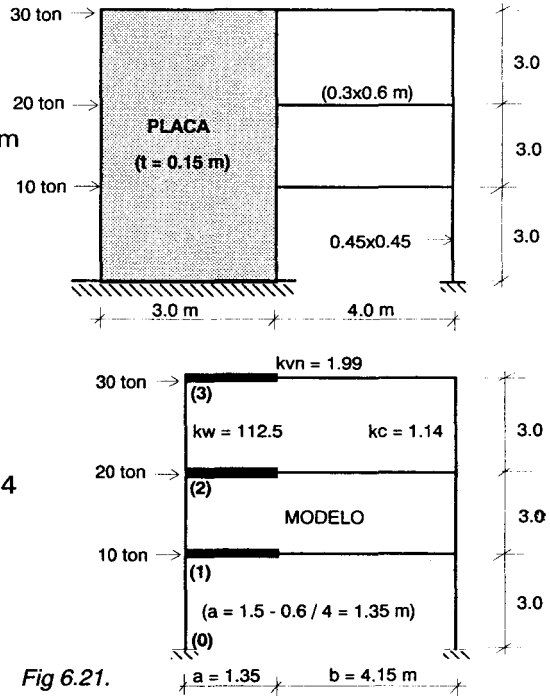
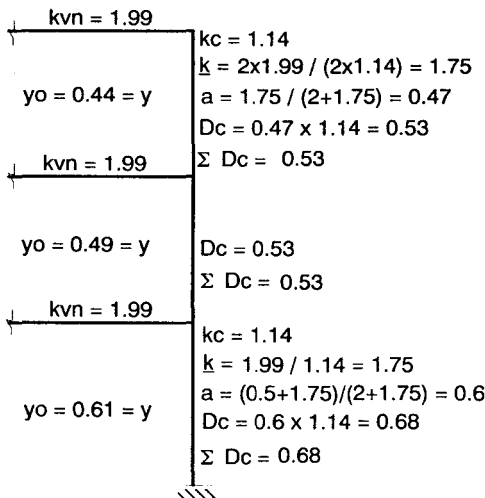


Fig 6.21.

CÁLCULO DE "Σ Dc"



*Nota: realmente, Dc debió calcularse utilizando la rigidez a flexión de la viga que concurre a la columna ( $k_v = I_v / b K_o$ ); sin embargo, ha podido observarse que la rigidez lateral de una columna vecina a la placa se incrementa, esto se debe a que el punto de inflexión en la viga se corre hacia el nudo menos rígido (hacia el lado de la columna). De este modo, siendo Ozawa un método aproximado, se recomienda (sólo para las columnas que estén a un costado de la placa) trabajar con "kvn" valor que siempre resulta mayor que "kv". Por otro lado, como existe una sólo columna en cada entrepiso, se tiene:  $\Sigma Dc = Dc$*

**CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE ENTREPISO**

$$X_n = \frac{1 + \sum D_{cn} / k_{wn} + 12 E K_o f \sum D_{cn} / (G A_{wn} h_n)}{1 + \sum D_{cn} / 112.5 + 12 \times 2.3 \times 0.001 \times 1.2 \times \sum D_{cn} / (0.45 \times 3)} = 1 + 0.033 \sum D_{cn}$$

$$Z_n = \sum D_c / X_n \quad B_n = k_{wn} - 3 Z_n \quad A_n = k_{wn} + 3 Z_n \quad C_n = Q_n h_n / X_n$$

n	k <sub>wn</sub>	D <sub>cn</sub>	X <sub>n</sub>	Z <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	Q <sub>n</sub> (ton)	C <sub>n</sub> (t-m)
3	112.5	0.53	1.018	0.52	110.9	114.1	30	88.4
2	112.5	0.53	1.018	0.52	110.9	114.1	50	147.3
1	112.5	0.68	1.023	0.66	110.5	114.5	60	176.0

**CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE NIVEL (en cada nivel que rote)**

$$a_n = A_n + A_{n+1} + 6 k_{vn} \quad b_n = B_n \quad d_n = C_n + C_{n+1}$$

n	6 k <sub>vn</sub>	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>	d <sub>n</sub> (t-m)
3	11.94	126.0	110.9	88.4
2	11.94	240.1	110.9	235.7
1	11.94	240.5	110.5	323.3

NOTA: A<sub>4</sub> = 0  
C<sub>4</sub> = 0

**ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS (planteada en cada nivel que rote):**

$$-b_{n+1} \phi_{n+1} + a_n \phi_n - b_n \phi_{n-1} = d_n$$

$$\begin{bmatrix} 126.0 & -110.9 & & \\ -110.9 & 240.1 & -110.9 & \\ & -110.9 & 240.5 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88.4 \\ 235.7 \\ 323.3 \end{Bmatrix}$$

= fila 3 modificada  
x 126 / 110.9 + fila 3 modif. = fila 2 modif.  
x 161.9 / 110.9 + fila 2 modif. = fila 1 modif.

**FILAS MODIFICADAS**

$$\begin{bmatrix} 126.0 & -110.9 & & \\ & 161.9 & -126.0 & \\ & & 225.1 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88.4 \\ 356.2 \\ 828.2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.158 \\ 5.063 \\ 3.679 \end{Bmatrix} \text{ ton-m}$$

**CÁLCULO DE Q<sub>w</sub>, Q<sub>c</sub>, V<sub>c</sub>, M<sub>v</sub>, δ**

$$\theta_n = \phi_n / 2 E K_o \dots (\text{rad}) \quad M_{vn} = 3 \phi_n k_{vn} \dots (\text{ton-m}) \quad Q_{wn} = [C_n - 3 Z_n (\phi_{n-1} + \phi_n)] / h_n$$

$$Q_{cn} = Q_n - Q_{wn} \dots (\text{ton}) \quad V_{cn} = Q_{cn} D_{cn} / \sum D_{cn} \quad \delta_n = Q_{cn} / (D_{on} \sum D_{cn})$$

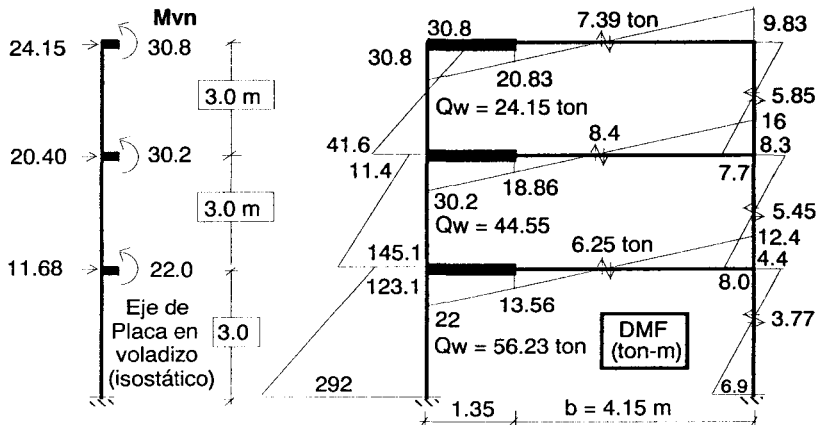
$$\text{también: } \delta_n = [3 (\phi_{n-1} + \phi_n) + Q_{wn} h_n / k_{wn}] / (h_n D_{on}) + f h_n Q_{wn} / (G A_{wn})$$

n	$\phi_n$	$3(\phi_{n-1} + \phi_n)$	Zn	Cn	Qwn	Qcn	Mvn	Nota:
3	5.158	30.66	0.52	88.4	24.15	5.85	30.8	$\phi_0 = 0$
2	5.063	26.23	0.52	147.3	44.55	5.45	30.2	
1	3.679	11.04	0.66	176.0	56.23	3.77	22.0	

n	$\delta_n$ (m)	$\delta_{total}$ (m)	$\delta_{total}$ "EDIFICIO"	Kwn = Qwn / $\delta_n$ (ton/m)	Obsérvese como decrece la rigidez lateral de la placa (Kwn) conforme se sube de nivel.
3	0.0041	0.0100	0.00981	5890	
2	0.0038	0.0059	0.00580	11724	
1	0.0021	0.0021	0.00205	26776	

En la tabla anterior se han agregado los desplazamientos totales obtenidos mediante el programa matricial EDIFICIO (incluyendo los efectos de las deformaciones axiales de las columnas y placas); puede notarse que los desplazamientos calculados mediante el método de Ozawa apenas difieren en 2% con respecto a los obtenidos por computadora.

CÁLCULO DE LOS MOMENTOS FLECTORES



Para ilustrar cómo se resuelve una de las placas cuando existen otras con distintas características (acápite 6.6.2), se aplicará Cross en el eje de la placa del ejemplo anterior, estimando la ubicación del punto de inflexión de la viga de borde al 40 % de "b" (Fig. 6.22), medido desde el eje de la columna. Para el cálculo de los momentos de empotramiento, se utilizarán los desplazamientos ( $\delta_n$ ) determinados mediante Ozawa.

Vigas:  $K_v = 3 E I_v (1 + a / b)^2 / b$   
 $a = 1.35 \text{ m}, b = 2.49 \text{ m} \rightarrow K_v = 30946 \text{ ton-m}$

Placas:  $g = 1.38 (d / h)^2 = 1.38 (3 / 3)^2 = 1.38$   
 $f_{ij} = f_{ji} = (1 - g) / (2 + g) = -0.112$   
 $K_{ij} = K_{ji} = K_p = 2 E I_p (2 + g) / [h (1 + 2 g)] = 404521 \text{ ton-m}$

Momentos de empotramiento en las placas:

$$u_{ij} = u_{ji} = -6 E I_p \delta_{ij} / [h^2 (1 + 2 g)]$$

$$u_{ij} = u_{ji} = -119680 \delta_{ij} \dots (\text{ton-m})$$

Donde:  $\delta_{01} = 0.0021 \text{ m}$   
 $\delta_{12} = 0.0038 \text{ m}$   
 $\delta_{23} = 0.0041 \text{ m}$

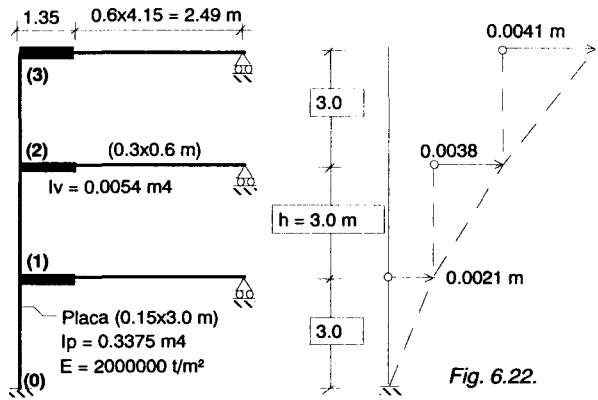


Fig. 6.22.

Aplicando Cross:

	(0)	(1)		(2)		(3)
	$f_{ij} = -0.112$	$K_v$	$f_{ij} = -0.112$	$K_v$	$f_{ij} = -0.112$	$K_v$
$\alpha_{ij}$	0	0.482	0.482	0.482	0.482	0.929
$u_{ij}$	-251	-251	-455	-455	-491	-491
D	0	340	340	456	456	456
T	-38.1	0	-51	-38.1	-51	-51
D	0	24.6	24.6	42.9	42.9	47.4
T	-2.7	0	-4.8	-2.7	-5.3	-4.8
D	0	2.3	2.3	3.8	3.8	4.4
Mij Cross	-291.8	115.9	-143.9	6.9	-44.6	-39
Ozawa	-292	123.1	-145.1	11.4	-41.6	-30.8
EDIFICIO	-288	118.5	-142	8.4	-40.4	-27.4

Adicionalmente a los momentos flectores obtenidos mediante Cross, en la tabla anterior aparecen los resultados provenientes de resolver al pórtico mixto completo (sin cortar a la viga de borde en su punto de inflexión, Fig 6.21) aplicando el método de Ozawa y el programa matricial "EDIFICIO" (que contempla las deformaciones por flexión, corte y axial), puede observarse que no existe mayores diferencias entre los momentos flectores en el eje de la placa, con excepción de  $M_{32}$ , debido a la condición de borde.

**6.6.4. Problemas Propuestos**

1.- La figura muestra a un muro de Albañilería Armada (en voladizo) que apoya sobre un muro de sótano de Concreto Armado. Aplicando el método de Ozawa, calcule la rigidez lateral del muro de albañilería.

Suponer:

$K_o = 0.001 \text{ m}^3$

Espesor de los 2 muros = 0.15 m

Concreto armado:

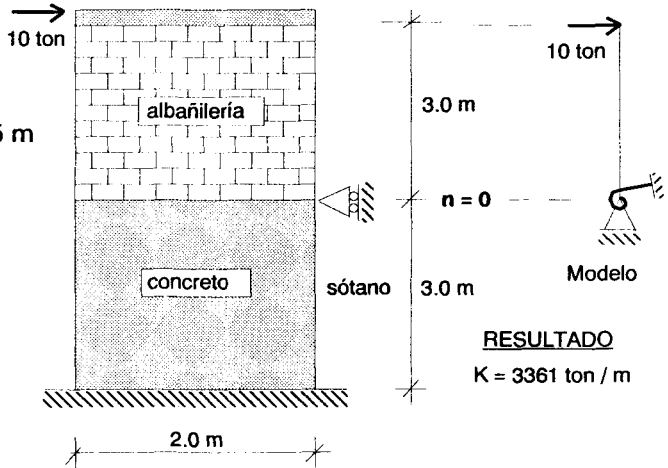
$E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

$E_c / G_c = 2.3$

Albañilería Armada:

$E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$

$E_a / G_a = 2.5$



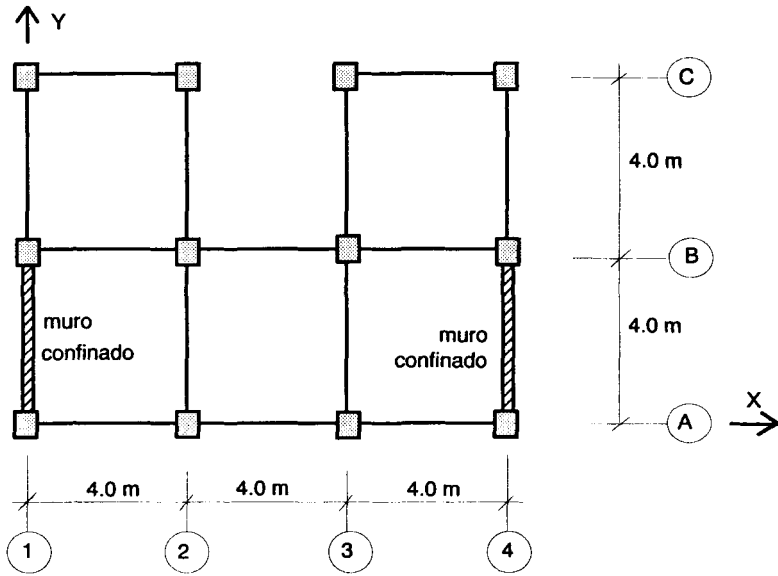
**RESULTADO**  
K = 3361 ton / m

2.- En la figura se muestra la planta típica de un edificio aporticado de concreto armado, de 3 pisos, con la excepción de los ejes 1 y 4 que contienen muros de albañilería confinada. Aplicando el método de Ozawa, se hará el análisis sísmico traslacional en la dirección Y-Y. Se dibujará el DMF correspondiente al eje 1.

Datos:

- Concreto Armado:  $E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$
- Albañilería:  $E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$   $E_a / G_a = 2.5$
- $K_o = 0.001 \text{ m}^3$
- Columnas: 0.40 x 0.40 m
- Vigas: 0.30 x 0.40 m
- Espesor de muros: 0.15 m
- Altura de entrepiso: 3.0 m
- Fuerzas de inercia según Y-Y:  $F_3 = 10 \text{ ton}$
- $F_2 = 7.5 \text{ ton}$
- $F_1 = 5.0 \text{ ton}$

*Sugerencia:* Por simetría en la dirección Y-Y, puede trabajarse con medio edificio (ejes 1 y 2) empleando la mitad de las cargas laterales. Adicionalmente, se sugiere transformar la sección transversal de las vigas y columnas (barras que se deforman por flexión) en secciones equivalentes de albañilería.



3.- Dibuje la envolvente de momento flector para la zona flexible de la viga correspondiente al pórtico mixto mostrado. El análisis por carga vertical se hará aplicando el método de Cross, asumiendo que la placa es indeformable. El análisis sísmico se realizará mediante el método de Ozawa. Suponer:

$K_o = 1000 \text{ cm}^3$

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

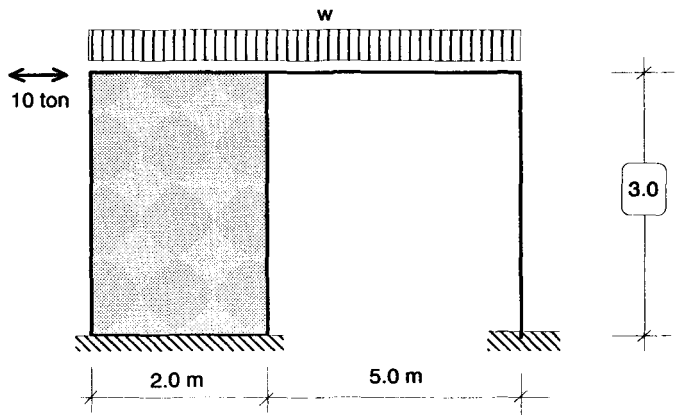
$E / G = 2.3$

Viga: 30 x 60 cm

Columna: 30 x 60 cm

Placa: 12 x 200 cm

$w = 4 \text{ ton/m}$



## 6.7. Corrección por Torsión en un Entrepiso de un Edificio

Cuando los elementos estructurales de un edificio no están dispuestos simétricamente en planta, o cuando los centros de masas (CM) de los distintos niveles no están contenidos en el mismo eje vertical (Fig. 6.23), existirá rotación de la losa del techo, torsionándose el edificio cuando actúe un sismo.

Es más, en la Norma Sismo-resistente E-030 se especifica que incluso en edificios simétricos cabe la posibilidad de que se presente torsión de carácter accidental, porque los defectos constructivos (cangrejas, por ejemplo) y las variaciones en la posición de la sobrecarga, pueden causar una modificación de la rigidez lateral teórica o un corrimiento del centro de masas, respectivamente. Estos problemas se contemplan utilizando una excentricidad accidental  $E_a = 0.1 B$ , donde "B" es la dimensión de la planta medida en la dirección transversal a la que está en análisis.

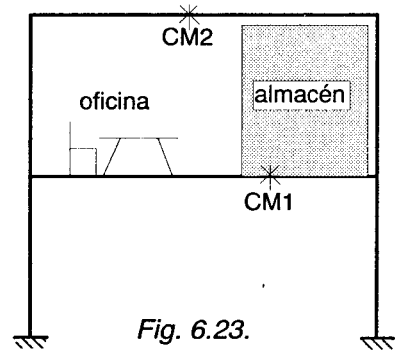


Fig. 6.23.

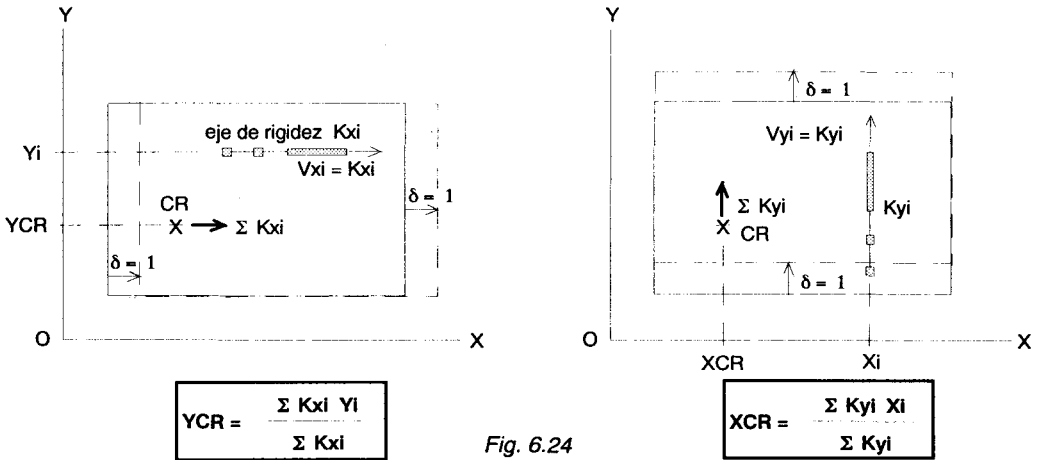
Manualmente, la corrección por torsión se realiza analizando cada entrepiso y cada dirección en forma independiente, como si el 100% del sismo actuase en la dirección X-X y 0% en Y-Y y viceversa. Según la Norma E-030, los cortantes que se obtengan por torsión ( $q$ ) en cada eje del edificio deberán sumarse con los cortantes producidos por la traslación, nunca deberán restarse; asimismo, deberá efectuarse el "control de giros en planta", de manera que el desplazamiento relativo máximo entre dos pisos consecutivos (medido en cualquier punto de la planta) producidos por torsión no exceda al obtenido por traslación en más del 75%, esto puede interpretarse como que los cortantes inducidos por la torsión deben ser como máximo el 75% de los producidos por traslación.

### 6.7.1. Centro de Rigidez Lateral (CR)

El centro de rigidez lateral (CR), o centro de giro, se define como aquel punto del entrepiso sujeto sólo a traslación, alrededor del cual rotan y se trasladan el resto de puntos. Este punto corresponde al centro estático de las rigideces laterales de los diversos ejes estructurales que componen al entrepiso en estudio.

En realidad, no debe trabajarse directamente con las rigideces debido a que éstas son cantidades escalares, por lo que para calcular CR (Fig. 6.24), debe imprimirse un desplazamiento unitario al entrepiso en cada dirección (independientemente), generándose una fuerza cortante en cada pórtico "i" (orientado en la dirección en análisis) igual a la magnitud de su rigidez lateral ( $K_i$ ). Luego, igualando el momento de la fuerza cortante resultante respecto al origen del sistema de referencia (O) a la suma de los momentos causados por sus componentes, se determina la posición de CR ( $X_{CR}$ ,  $Y_{CR}$ ).

De las expresiones que se obtienen para hallar "CR" (Fig. 6.24), puede observarse que el centro de rigidez lateral trata de correrse hacia la zona más rígida del edificio.



### 6.7.2. Centro de Carga (CQ)

Las fuerzas de inercia ( $F_i$ ) proporcionadas por la Norma E-030 actúan en el centro de masas de cada nivel (CM), el cual prácticamente coincide con el centroide del área en planta debido a que la masa gobernante (losa, vigas, acabados, sobrecarga, tabiques, etc.) se encuentra concentrada en el nivel; sin embargo, de existir concentración de sobrecarga o tabiques en ciertas zonas de la planta, deberá calcularse la posición real de CM, para lo cual, adicionalmente, deberá contemplarse la masa de los elementos estructurales verticales (columnas, placas, muros portantes de albañilería, etc.) los que contribuyen en media altura sobre los niveles adyacentes (Fig. 6.25), en cambio, los tabiques actúan directamente en el nivel sobre el cual se apoyan.

Como la corrección por torsión se realiza trabajando con los entrepisos, es necesario determinar la posición (CQ) del cortante de entrepiso (Q), o centro de carga, de manera que "Q" genere en un entrepiso determinado el mismo momento torsor ( $M_t$ ) que sus componentes (que son las fuerzas de inercia  $F_i$ ), tal como se ilustra en la Fig. 6.26.

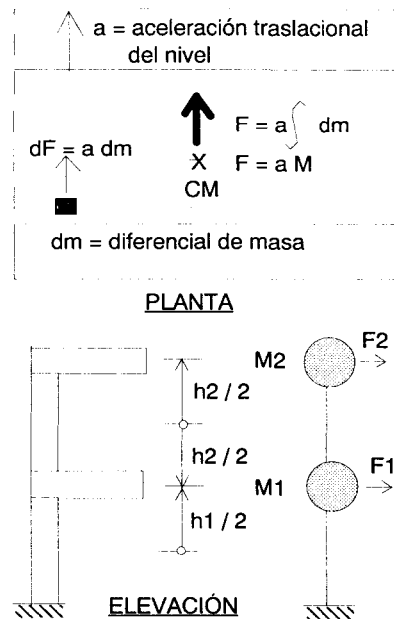


Fig. 6.25. Distribución de Masas.

Denominado "i" al entrepiso en análisis, se tiene:

$$X_{cqi} = \frac{\sum_{j=i}^N F_{yj} X_{cmj}}{Q_{yi}}$$

Similarmenete:

$$Y_{cqi} = \frac{\sum_{j=i}^N F_{xj} Y_{cmj}}{Q_{xi}}$$

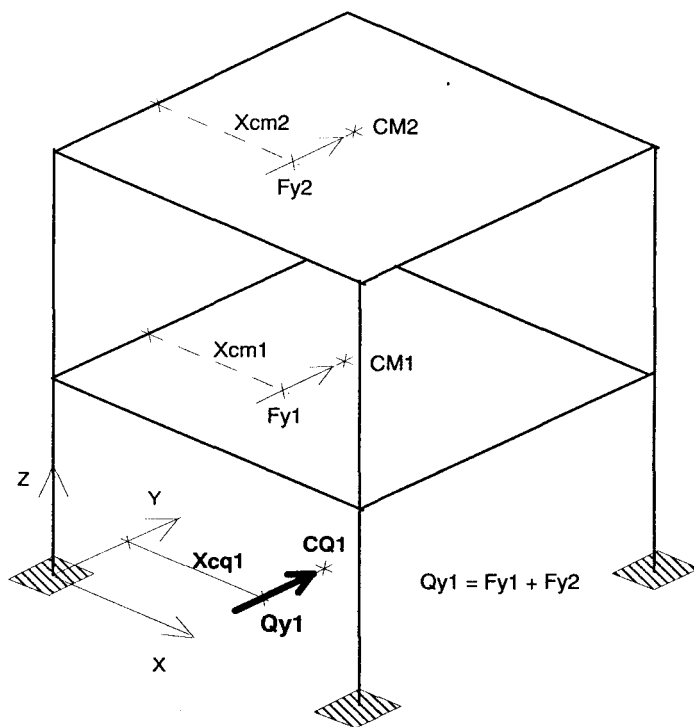


Fig. 6.26. Determinación del Centro de Carga "CQ"

En las expresiones mostradas en la Fig. 6.26 para hallar "CQ", puede observarse que cuando "CM" está contenido en el mismo plano vertical (por ejemplo, paralelo a Y-Z, con  $X_{cm1} = X_{cm2} = X_{cm}$ ), entonces, el centro de cargas coincide en todos los pisos con el centro de masas ( $X_{cq} = X_{cm}$ ); pero, de existir reducciones entre las plantas consecutivas del edificio, CQ no coincidirá con CM.

La Torsión se presenta cuando el centro de cargas (CQ) no coincide con el centro de rigidez lateral (CR), en este caso, la losa del techo rota como un sólido rígido (si es que es un diafragma rígido) alrededor de CR, generando desplazamientos y, por lo tanto, fuerzas cortantes "qi" en todos los ejes que componen al edificio (X, Y).

Cabe remarcar que a pesar de que el análisis sísmico se esté efectuando sólo en una de las direcciones, por torsión trabajan todos los ejes del edificio, a diferencia del análisis sísmico traslacional que produce cortantes sólo en los ejes orientados en la dirección en análisis; esto se puede apreciar en las figuras 6.27 y 6.28, donde los ejes han sido esquematizados a través de resortes cuyas constantes son iguales a las rigideces laterales de los pórticos correspondientes.

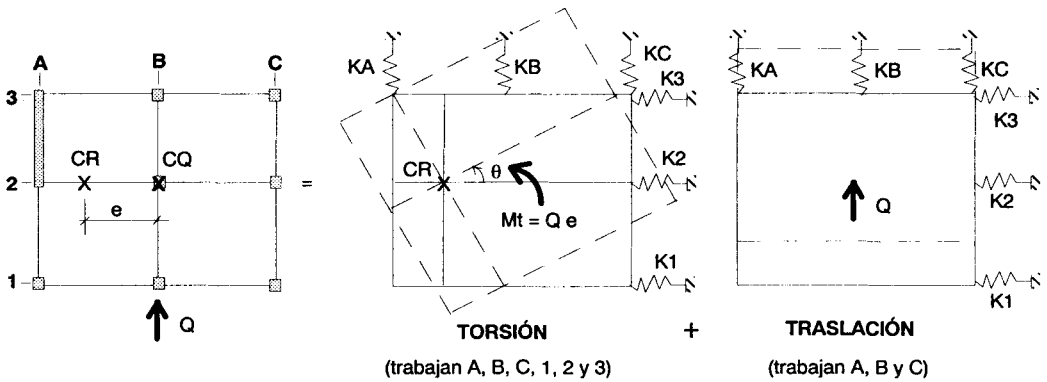


Fig. 6.27. Efectos de la Torsión y Traslación en la Planta de un Edificio.

Analizando un eje cualquiera "i" en el estado torsional (Fig. 6.28) y llamando  $R_i$  a la distancia que existe entre ese eje y CR, se tendrá:

$$M_t = \sum q_i R_i = \theta \sum K_i R_i^2 = \theta R_T$$

Luego, el giro relativo nivel a nivel será:  $\theta = M_t / \sum K_i R_i^2 = M_t / R_T$

Por lo que, el cortante inducido por la torsión será:  $q_i = K_i R_i M_t / R_T$

La rigidez torsional ( $R_T$ , Fig. 6.28A) se define como el momento torsor que produce una rotación unitaria en la planta del edificio; lógicamente, conviene que  $R_T$  sea máxima a fin de que disminuyan  $\theta$  y  $q_i$ .

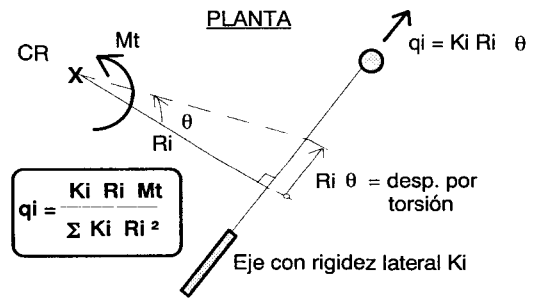
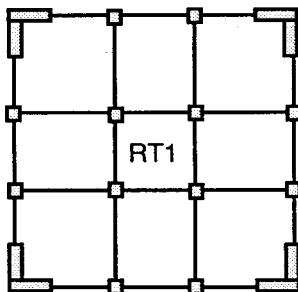


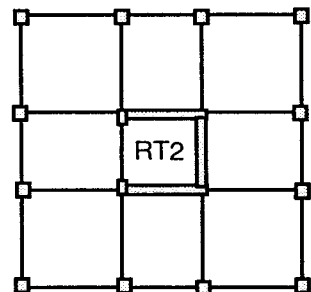
Fig. 6.28. Cálculo de "qi"



$$R_T = \frac{M_t}{\theta} = \sum K_i R_i^2$$

$$RT1 > RT2$$

Fig. 6.28A



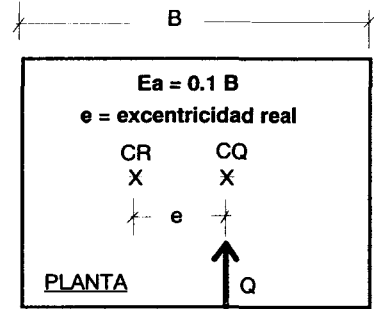
**6.7.3. Momento Torsor Reglamentario ( $M_t$ )**

De acuerdo a la Norma E-030, el momento torsor debe contemplar a la excentricidad accidental ( $E_a$ ). De esta manera:  $M_t = Q e'$

donde:

$$e'1 = | e | + E_a \quad [1]$$

$$e'2 = | e | - E_a \quad [2]$$



La primera fórmula representa una amplificación de la excentricidad real ( $e$ ) y debe utilizarse siempre; en cambio, la segunda fórmula representa una posible inversión en el sentido del momento torsor y se le emplea sólo cuando la excentricidad real es pequeña ( $| e | \leq E_a$ ). En ambos casos, deberá cumplirse las siguientes especificaciones reglamentarias:

- 1.- En cualquier eje, el cortante por torsión ( $q$ ) deberá ser menor que el 75% del cortante por traslación; de lo contrario, el edificio estará mal estructurado.
- 2.- El cortante por torsión ( $q$ ) deberá sumarse (recarga) con el debido a traslación, nunca deberá restarse (descarga). Ver la Fig. 6.29.

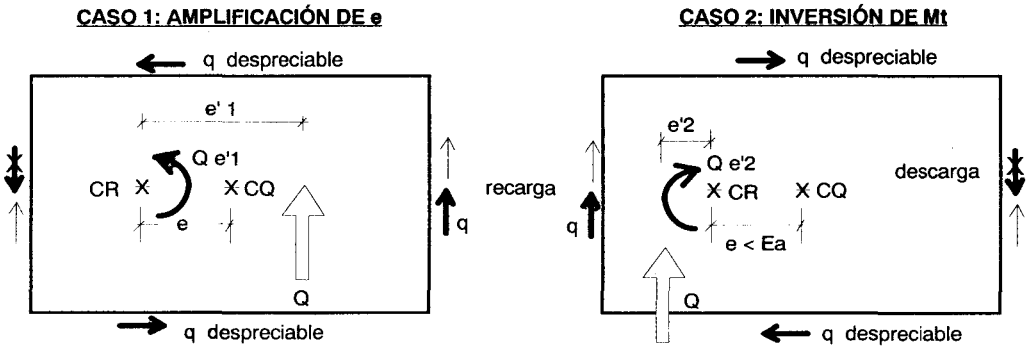


Fig. 6.29. NOTACIÓN   
 → Cortante por Torsión ( $q$ )   
 - - -> Cortante por Traslación

Generalmente, el cortante que por torsión se produce en los ejes transversales a la dirección en análisis, resulta despreciable en comparación con el obtenido al analizar la otra dirección. Adicionalmente, si el sismo ocurriese en sentido contrario (-Y, Fig. 6.30), son los mismos ejes los que se recargan o descargan y tan sólo ocurrirá una inversión en el sentido de los esfuerzos manteniéndose sus magnitudes.

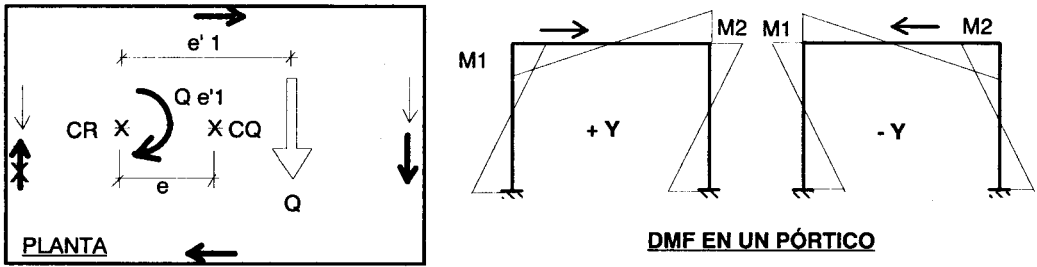


Fig. 6.30. Sismo en la Dirección -Y.

6.7.4. Ejemplo de Aplicación

Suponiendo que todos los elementos estructurales verticales están “biempotrados”, calcular el cortante por traslación y torsión en cada eje del edificio de cuatro pisos de concreto armado cuya planta típica se muestra en la Fig. 6.31. Se analizará sólo el primer entrepiso.

Se hace notar que este procedimiento (suponiendo barras biempotradas) puede emplearse sólo con fines de predimensionamiento o de verificación de la estructuración por torsión; pero, para un análisis definitivo, debe emplearse las rigideces laterales provenientes del análisis traslacional, hecho mediante el método de Muto, Ozawa, Cross, etc.

Se asumirá (sólo para el ejemplo) que las fuerzas de inercia en X-X y en Y-Y son iguales ( $F_{xi} = F_{yi} = F_i$ ), por lo cual, el cortante basal será el mismo en las dos direcciones ( $Q_{1x} = Q_{1y} = Q_1 = \sum F_i$ ); para situaciones reales, deberá calcularse  $F_{xi}$  y  $F_{yi}$ .

Suponer:

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

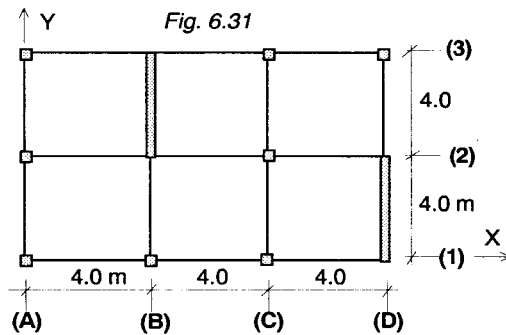
$E / G = 2.3$

$h = 3 \text{ m} = \text{altura de entrepiso}$

Columnas:  $0.45 \times 0.45 \text{ m}$

Placas:  $0.2 \times 4.0 \text{ m}$

Placa efectiva:  $2.0 \times 0.2 \text{ m} (*)$



Fuerzas de Inercia  $F_i$  (ton):  $F_4 = 20, F_3 = 15, F_2 = 10, F_1 = 5 \rightarrow Q_1 = 50 \text{ ton}$

(\*) Cuando el sismo actúa en la dirección X-X, existe un ancho tributario de la placa que trabaja como si fuese una columna adicional en los ejes 1, 2 y 3. En este caso, al haberse supuesto que todos los elementos verticales están biempotrados, se tomará como ancho tributario la mitad de la longitud de la placa (2 m).

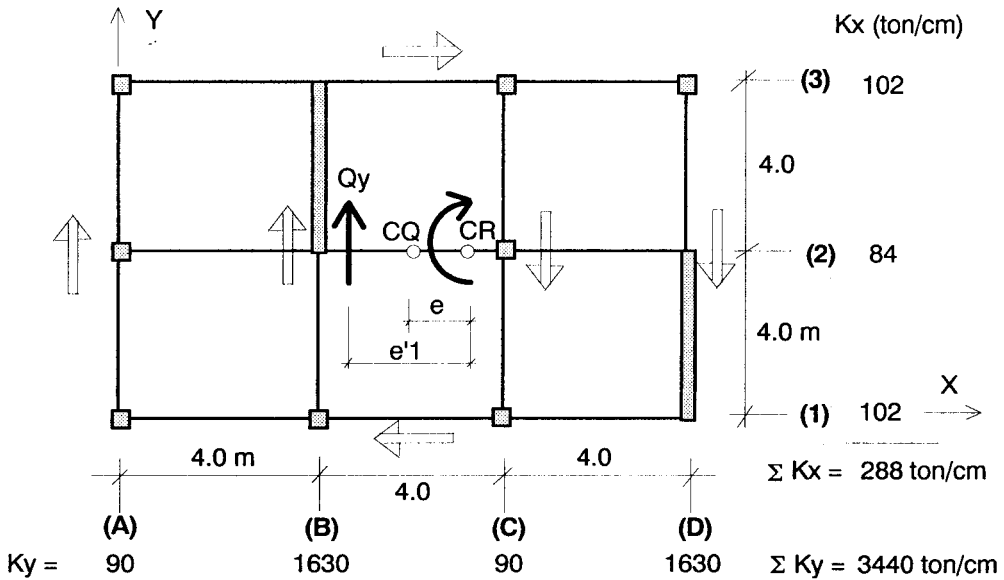


Fig. 6.31A. Análisis Sísmico Aproximado del Primer Piso de un Edificio.

**CÁLCULO DE RIGIDECES LATERALES EN BARRAS BIEMPOTRADAS**

$K = 12 EI / [h^3 (1 + 2g)];$  donde:  $g = 6 E I_f / G A h^2 = 1.38 (d / h)^2$   
 $g = 0$  en columnas

Elemento	b x d (m)	I= b d³/12 (m4)	g	K (ton/m)	K (ton/cm)
Columna	0.45x0.45	0.00342	0	3000	30
Placa	0.20x4.00	1.066	2.45	160000	1600
Placa efe	2.00x0.20	0.0013	0	1200	12

Luego, se podrá determinar la rigidez lateral de cada eje como sigue:

Ejes A y C (compuesto por 3 columnas):  $K_A = K_C = 3 \times 30 = 90 \text{ ton/cm}$

Ejes B y D (1 columna + 1 placa):  $K_B = K_D = 30 + 1600 = 1630 \text{ ton/cm}$

Ejes 1 y 3 (3 columnas + 1 placa efectiva):  $K_1 = K_3 = 3 \times 30 + 12 = 102 \text{ ton/cm}$

Eje 2 (2 columnas + 2 placas efectivas):  $K_2 = 2 \times 30 + 2 \times 12 = 84 \text{ ton/cm}$

Estas rigideces se muestran en la planta del edificio (Fig. 6.31A).

**CENTRO DE CARGA (CQ)**

Se asumirá que el centro de masas (CM, punto donde actúa "Fi") coincide con el centroide de la planta:  $X_{cm} = 6 \text{ m}$ ,  $Y_{cm} = 4 \text{ m}$ .

Como no hay variación en la posición de CM en los 4 niveles se tendrá:

$$X_{cq} = \sum F_{yi} X_{cmi} / Q_y = X_{cm} = 6 \text{ m} \quad Y_{cq} = \sum F_{xi} Y_{cmi} / Q_x = Y_{cm} = 4 \text{ m}$$

**CENTRO DE RIGIDEZ LATERAL (CR)**

$$X_{CR} = \sum K_{yi} X_i / \sum K_{yi} = (1630 \times 4 + 90 \times 8 + 1630 \times 12) / 3440 = 7.8 \text{ m}$$

$$Y_{CR} = K_{xi} Y_i / \sum K_{xi} = 4 \text{ m} \dots (\text{por simetría})$$

**ANÁLISIS EN LA DIRECCIÓN Y-Y**

$$\text{Excentricidad accidental: } E_a = 0.1 B = 0.1 \times 12 = 1.2 \text{ m}$$

$$\text{Excentricidad real} = e = X_{CR} - X_{cq} = 7.8 - 6 = 1.8 \text{ m} > E_a \dots (\text{no hay inversión de } M_t).$$

$$\text{Excentricidad reglamentaria: } e'1 = e + E_a = 1.8 + 1.2 = 3.0 \text{ m}$$

$$\text{Momento Torsor: } M_t = Q_{y1} e'1 = 50 \times 3 = 150 \text{ ton-m}$$

Cortante producido por la torsión (doble flecha en la Fig. 6.31A):

$$q_i = K_i R_i M_t / \sum K_i R_i^2 = K_i R_i \times 150 / 61034 \dots (\text{ver el cálculo de } R_T \text{ en la Tabla})$$

$$\text{Cortante producido por traslación: } V_{tras} = 50 K_{yi} / \sum K_{yi} = 50 K_{yi} / 3440$$

**ANÁLISIS EN LA DIRECCIÓN X-X**

Por simetría  $e = 0$ ; sólo existe  $E_a = 0.1 \times 8 = 0.8 \text{ m}$ ; con  $Q_{x1} = 50 \text{ ton}$ ; luego:

$$e'1 = e + E_a = + 0.8 \text{ m} \quad e'2 = e - E_a = - 0.8 \text{ m}$$

$$M_t = 50 \times (\pm 0.8) = \pm 40 \text{ ton-m} \quad q_i = \pm K_i R_i \times 40 / 61034 \dots (\text{ver } R_T \text{ en Tabla})$$

$$V_{tras} = 50 K_{xi} / \sum K_{xi} = 50 K_{xi} / 288$$

**Nota:** De acuerdo al reglamento, los cortantes de diseño ( $V$ ) se obtienen como  $V_{tras} + q$  (nunca debe descargarse por torsión el eje). Asimismo, para que un edificio se considere bien estructurado ante los efectos torsionales, debe cumplirse:  $q < 0.75 V_{tras}$ , en este ejemplo el eje A no cumple con esa condición (ver Tabla), por lo que será conveniente rigidizarlo.

A continuación se muestra en forma tabulada los cálculos.

TABLA				SISMO EN "Y-Y"			SISMO EN "X-X"		
eje	Ri (m)	Ki (t/cm)	Ki Ri (t-m/cm)	qi (ton)	Vtras (ton)	V (ton)	qi (ton)	Vtras (ton)	V (ton)
A	7.8	90	702	1.72	1.5	3.22	± 0.46		
B	3.8	1630	6194	15.22	23.5	38.72	± 4.06		
C	0.2	90	18	-0.05	1.5	1.5	± 0.01		
D	4.2	1630	6846	-16.82	23.5	23.5	± 4.48		
1	4	102	408	-1.0			± 0.27	17.71	17.98
2	0	84	0	0			± 0	14.58	14.58
3	4	102	408	1.0			± 0.27	17.71	17.98
$\Sigma Ki Ri^2 = 61034 \text{ ton-m}^2/\text{cm}$				0.0	50.0		0.0	50.0	

Nótese que por equilibrio  $\Sigma qi = 0$ , y que cuando se analiza según X-X, los cortante producidos por la torsión en los ejes A, B, C y D (orientados según Y-Y) son despreciables con relación a los cortantes de diseño (V) obtenidos al analizar la dirección Y-Y y viceversa. Por otro lado, tablas como ésta deberían hacerse por cada entrepiso, para así obtener las fuerzas laterales finales en cada pórtico.

### 6.7.5. Edificios con Ejes Inclinados en Planta

La fórmula deducida anteriormente, para calcular el cortante inducido por la torsión, se sigue cumpliendo:

$$q_i = K_i R_i M_t / \Sigma K_i R_i^2$$

Donde  $K_i$  es la rigidez lateral del pórtico plano "i" (Fig. 6.32).

Tomando un punto de paso del eje "i" ( $X_i, Y_i$ ), puede determinarse la distancia ( $R_i$ ) que existe entre dicho eje y el centro de rigidez lateral (CR):

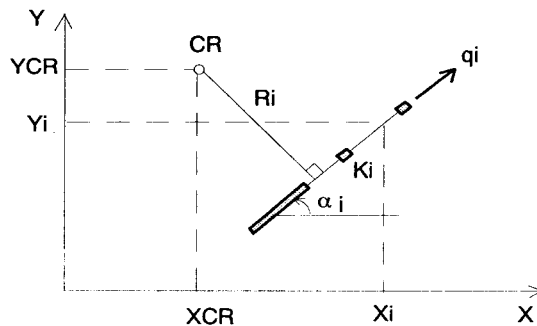
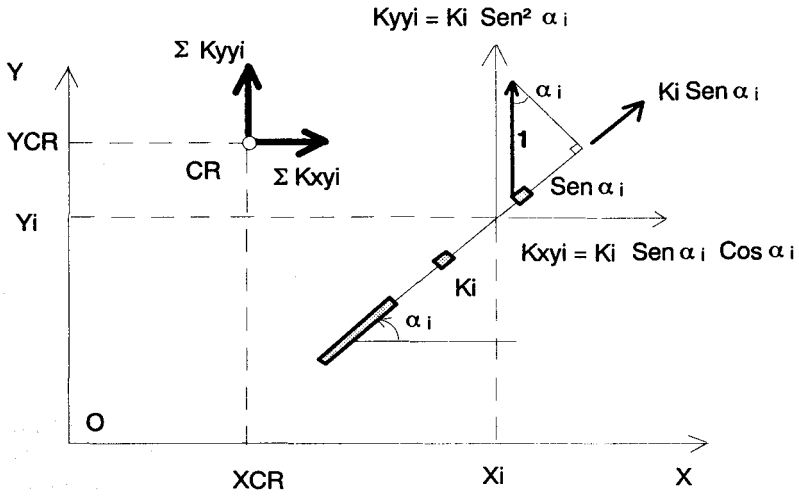


Fig. 6.32. Ejes Inclinados en Planta.

$$R_i = | ( X_i - X_{CR} ) \text{ Sen } \alpha_i - ( Y_i - Y_{CR} ) \text{ Cos } \alpha_i |$$

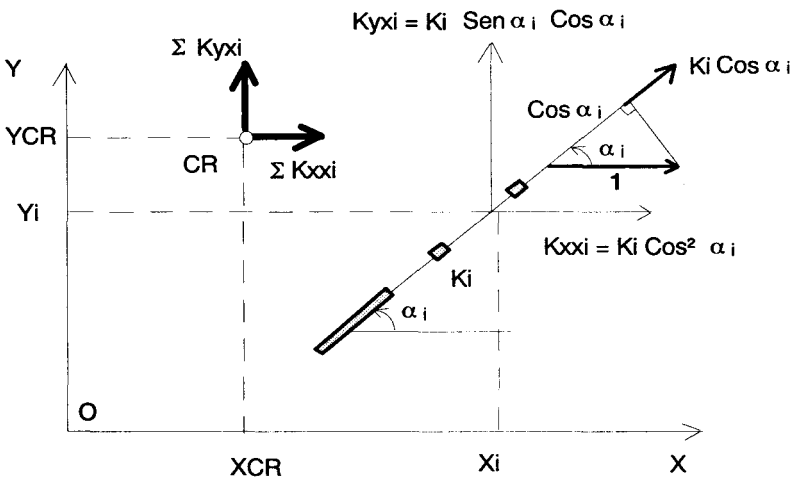
El problema consiste en determinar las coordenadas de CR, para lo cual se generarán desplazamientos unitarios en la losa del techo en cada dirección del edificio (X,Y). Recordando que en CR se encuentra concentrada toda la rigidez lateral del entrepiso y que el momento de la resultante es igual al momento que generan sus componentes respecto al origen del sistema de coordenadas (O), se tendrá:

**DESPLAZAMIENTO UNITARIO EN Y-Y ( $\delta_y = 1$ )**



$$X_{CR} \sum K_{yyi} - Y_{CR} \sum K_{xyi} = \sum K_{yyi} X_i - \sum K_{xyi} Y_i \dots [1]$$

**DESPLAZAMIENTO UNITARIO EN X-X ( $\delta_x = 1$ )**



$$Y_{CR} \sum K_{xxi} - X_{CR} \sum K_{xyi} = \sum K_{xxi} Y_i - \sum K_{xyi} X_i \dots [2]$$

De [1] y [2] podrá calcularse la ubicación del centro de rigidez lateral (XCR, YCR). Por otro lado, cabe indicar lo siguiente:

- 1.- Para el análisis sísmico traslacional debe trabajarse con la rigidez lateral  $K_{xxi} = K_i \cos^2 \alpha_i$  (según X-X) y  $K_{yyi} = K_i \sin^2 \alpha_i$  (según Y-Y). Luego, la fuerza cortante que se obtenga por traslación debe descomponerse en la dirección del pórtico y sumarse (si es que procede) con "qi".
- 2.- Si  $\alpha_i = 0^\circ$  (pórtico orientado en la dirección X-X), entonces  $K_{xxi} = K_i$ , por lo que el pórtico "i" trabajará al 100% en la dirección X-X, con  $K_{xyi} = K_{yxi} = 0$ .
- 3.- Si  $\alpha_i = 90^\circ$  (pórtico orientado en la dirección Y-Y), entonces  $K_{yyi} = K_i$ , por lo que el pórtico "i" trabajará al 100% en la dirección Y-Y, con  $K_{xyi} = K_{yxi} = 0$ .
- 4.- Las ecuaciones (1) y (2) pueden arreglarse matricialmente, dando lugar a:

$$\begin{pmatrix} \Sigma K_{yy} & - \Sigma K_{xy} \\ - \Sigma K_{yx} & \Sigma K_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{CR} \\ Y_{CR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K_{yy} X - \Sigma K_{xy} Y \\ \Sigma K_{xx} Y - \Sigma K_{yx} X \end{pmatrix}$$

Donde:

$$K_{xx} = K \cos^2 \alpha$$

$$K_{yy} = K \sin^2 \alpha$$

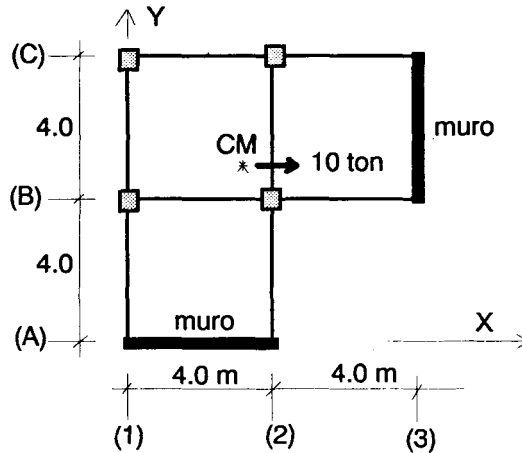
$$K_{xy} = K_{yx} = K \sin \alpha \cos \alpha$$

(X, Y) = punto de paso del pórtico correspondiente

### 6.7.6. Problemas Propuestos

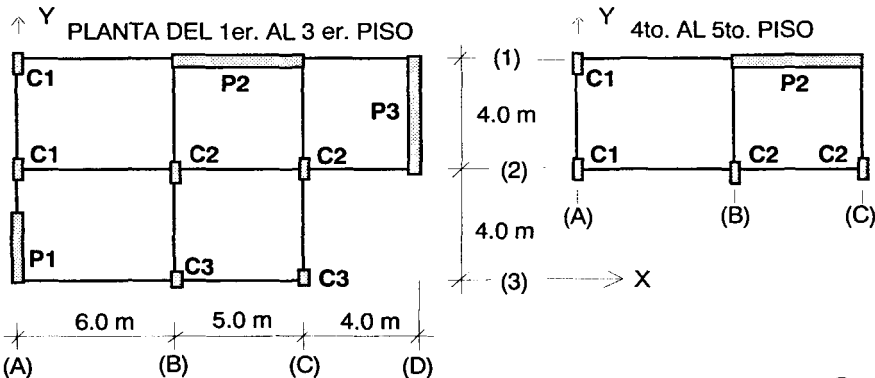
- 1.- Verifique si la planta del edificio de un piso mostrada está bien estructurada por efectos de torsión sísmica. En el cálculo de las rigideces laterales se supondrá que las columnas están biempotradas y que el muro de albañilería armada actúa en voladizo.

**Datos:** Columnas: 0.45 x 0.45 m  $E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$   
 Muro: 0.15 x 4.00 m  $E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$   $E_a/G_a = 2.5$   
 Altura: h = 2.6 m



2.- Incluyendo la corrección por torsión reglamentaria, determine la fuerza cortante que absorbe cada eje del edificio cuyas plantas se muestran, el análisis se efectuará sólo para el primer piso. Las rigideces laterales de los elementos verticales se determinarán suponiendo que están biempotrados. Las fuerzas de inercia (ton) en X-X y Y-Y son:  $F5 = 25$ ,  $F4 = 20$ ,  $F3 = 15$ ,  $F2 = 10$ ,  $F1 = 5$ , aplicadas en el centroide del área de la planta correspondiente. Suponer:

- |           |                                 |                   |                   |
|-----------|---------------------------------|-------------------|-------------------|
| Placas:   | P1: 0.25 x 2.00                 | P2: 0.30 x 5.00 m | P3: 0.25 x 4.00 m |
| Columnas: | C1: 0.25 x 0.60                 | C2: 0.30 x 0.60 m | C3: 0.30 x 0.30 m |
|           | $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$ | $E / G = 2.3$     | $h = 3 \text{ m}$ |



3.- Suponiendo que las columnas de sección circular ( $\phi = 0.4 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,  $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$ ) del edificio de un piso cuya planta se muestra, están biempotradas, dibuje el DMF para la columna más solicitada. Se incluirá la corrección por torsión reglamentaria.

