Capítulo 4

La Hipérbola

4.1 DEFINICION. Una *hipérbola* es el conjunto de todos los puntos del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ tales que que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es en valor absoluto una constante.

Así, si F_1 y F_2 son dos puntos fijos de $\mathbb{R}^2$ y a es un real positivo, se tiene

$$\mathbb{H} = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a\}$$

Una hipérbola se compone de dos *ramas* $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ definidas por

$$\mathbb{H}_1 = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a\}$$
$$\mathbb{H}_2 = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}$$

4.2 NOTACION Y PROPIEDADES

1. Los puntos F_1 y F_2 se llaman *focos de la hipérbola*.
2. El punto medio $F_0 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro de la hipérbola*.

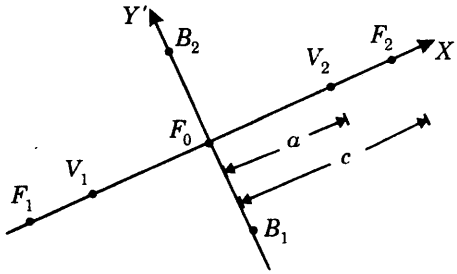
3. La hipérbola $\mathbb{H}$ corta la recta X' que pasa por los focos en exactamente dos puntos V_1 y V_2 que se llaman *vértices de la* hipérbola. Se cumple

$$d(V_1, F_0) = d(V_2, F_0 = a)$$

El segmento $\overline{V_1V_2}$ se llama *eje transversal* y posee longitud $2a$.

4. Si $c = d(F_1, F_0) = d(F_2, F_0)$ entonces $c > a$.

Hagamos $b^2 = c^2 - a^2$ y designemos por Y' la recta que pasa por F_0 y es perpendicular a X'. Sean B_1 y B_2 los puntos de Y' que distan b de F_0.



Se tiene $d(B_1, F_0) = d(B_2, F_0) = b$

El segmento $\overline{B_1B_2}$ se llama *eje conjugado* y tiene longitud $2b$.

5. Los números a y b se denominan *semieje transversal* y *conjugado*, respectivamente.

El número $e = \dfrac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la hipérbola. Observemos que $e > 1$.

6. Decimos que una hipérbola es *equilátera* si $a = b$, es decir si los semiejes transversal y conjugado son iguales.

Empleando la relación $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es fácil de ver que una hipérbola es equilátera si y solamente si $e = \sqrt{2}$.

4.3 ECUACION DE LA HIPERBOLA CON EJE TRANSVERSAL PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS CARTESIANAS

TEOREMA.

1) La ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Y donde se tiene que $\begin{cases} \text{centro de la hipérbola:} & (h, k) \\ \text{vértices de la hipérbola:} & (h, k) \text{ y } (h + a, k) \\ \text{focos de la hipérbola:} & (h - c, k) \text{ y } (h + c, k);\ c = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

2) La ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje Y es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Y donde se tiene que $\begin{cases} \text{centro de la hipérbola:} & (h, k) \\ \text{vértices de la hipérbola:} & (h, k-a) \text{ y } (h, k+a) \\ \text{focos de la hipérbola:} & (h, k-c) \text{ y } (h, k+c);\ c = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

Asíntotas de la Hipérbola

1. Se llaman asíntotas *de la hipérbola* $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

a las rectas $\begin{cases} L_1:\ y = k + \dfrac{b}{a}(x-h) \\ L_2:\ y = k - \dfrac{b}{a}(x-h) \end{cases}$

que se obtienen igualando a cero el segundo miembro de la ecuación de la hipérbola. Así, los puntos de las asíntotas son aquellos que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

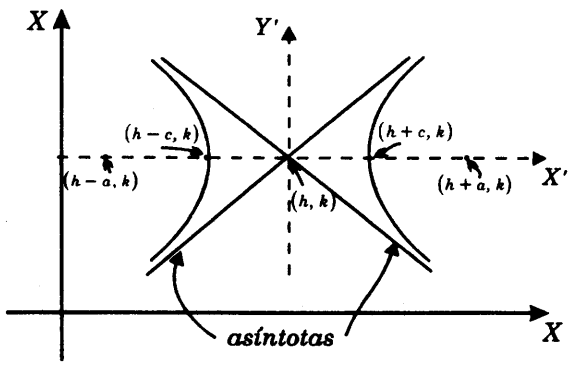
Las asíntotas L_1 y L_2 son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola y forman con el eje transversal de ésta un ángulo α con $\operatorname{tg} \alpha = \pm b/a$.

Propiedad de las Asíntotas. Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces la distancia de P a la asíntota más próxima tiende hacia cero a medida que $|x|$ crece indefinidamente (ver problema resuelto Nº 10).

2. De igual modo se llaman *asíntotas de la hipérbola* $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

a las rectas $\begin{cases} L_1:\ y = k + \dfrac{a}{b}(x-h) \\ L_2:\ y = k - \dfrac{a}{b}(x-h) \end{cases}$

que se obtienen igualando a cero el segundo miembro de la ecuación de la hipérbola.



Hipérbola con eje transversal paralelo al eje X

4.4 HIPERBOLAS CONJUGADAS

Decimos que dos hipérbolas son *conjugadas* si tienen los ejes transversales y conjugados intercambiados.

En forma explícita, las hipérbolas H y H' son conjugadas si se cumple

$$\begin{cases} \overline{V_1V_2} = \text{eje transversal de } H = \text{eje conjugado de } H' \\ \qquad \text{y} \\ \overline{B_1B_2} = \text{eje conjugado de } H = \text{eje transversal de } H' \end{cases}$$

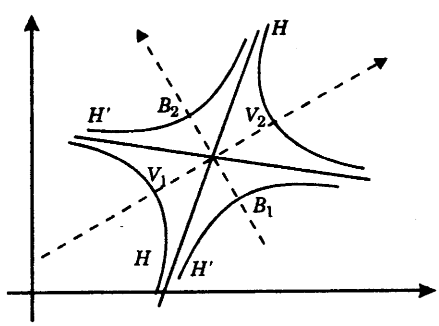
Por ejemplo, las hipérbolas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y $$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

son conjugadas.

Dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.



Hipérbolas conjugadas

4.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 255$ y cuyos vértices son los focos de la elipse.

SOLUCION. De la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

obtenemos $a^2=25,\ b^2=9$ y $c^2=16$.

Por lo tanto, vértices de la elipse: $(0,-5),\ (0,5)$;

focos de la elipse: $(0,-4),\ (0,4)$;

Luego se tiene focos de la hipérbola: $(0,-5),\ (0,5)$;

vértices de la hipérbola: $(0,-4),\ (0,4)$;

centro de la hipérbola: $(0,0)$.

La ecuación tiene la forma

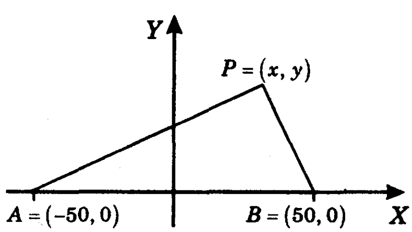
$$\frac{y^2}{A^2}-\frac{x^2}{B^2}=1$$

donde $A=4,\ C=5$ y $B=\sqrt{C^2-A^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

Se sigue entonces que $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ es la ecuación requerida.

RESPUESTA. $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

PROBLEMA 2. El costo de producción de un artículo es \$12 menos por unidad en un punto A que en un punto B. Si la distancia de A a B es de 100 Kms., la ruta de entrega está a lo largo de una línea recta y el transporte cuesta \$0.20 por unidad por Km; ¿cuál es la curva en cualquier punto de la cual cueste lo mismo un artículo transportado desde A o B?



SOLUCION. Tracemos un sistema rectangular de coordenadas como se muesra en la figura

Designemos los siguientes costos por unidad de artículo

p = costo de producción en B

C_A = costo en P de mercancía proveniente de A

C_B = costo en P de mercancía proveniente de B

Desde que costo total = costo de producción + costo de transporte se tiene

$$C_A = (p-12) + 0.20\, d(A,P)$$

$$C_B = p + 0.20\, d(B,P)$$

Ahora bien si $P = (x, y)$ es un punto en el cual $C_A = C_B$

entonces se tendrá que

$$(p-12) + 0.20\, d(A,P) = p + 0.20\, d(B,P)$$

o

$$d(A,P) - d(B,P) = 60$$

Luego P se encuentra en la rama derecha de la hipérbola con focos en $A = (-50, 0)$ y $B = (50, 0)$ y cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$$

RESPUESTA. Rama derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 14\,400$.

PROBLEMA 3. Hallar una ecuación del conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que la distancia de P a $(1, 2)$ es $3/2$ de la distancia de P a la recta $y = -1$.

SOLUCION. Sean $F_0 = (1, 2)$ y L: $y = -1$.

Si $P = (x, y)$ cumple $d(P, F_0) = \frac{3}{2}\, d(P, L)$

entonces se tiene

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \tfrac{3}{2}(y+1)$$

$$4\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] = 9(y+1)^2$$

$$4(x-1)^2 - 5y^2 - 34y = 7$$

$$5\left(y^2 + \tfrac{34}{5}y\right) - 4(x-1)^2 = 7$$

Y completando cuadrados

$$5\left(y + \frac{17}{5}\right)^2 - 4(x-1)^2 = 7 + \frac{17^2}{5} = \frac{324}{5}$$

obtenemos

$$\frac{\left(y + \frac{17}{5}\right)^2}{\frac{324}{25}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{81}{5}} = 1$$

RESPUESTA. Una ecuación es $\dfrac{\left(y+\frac{17}{5}\right)^2}{\frac{324}{25}} - \dfrac{(x-1)^2}{\frac{81}{5}} = 1$

que representa una hipérbola con centro en $\left(1, -\frac{17}{5}\right)$, eje transversal paralelo al eje Y y semiejes transversal y conjugado $\frac{18}{5}$ y $\frac{9\sqrt{5}}{5}$, respectivamente.

PROBLEMA 4. Sea $k \neq 0$. Probar que la ecuación $xy = k$ es la ecuación de una hipérbola equilátera efectuando la rotación de 45° del sistema de coordenadas XY dada por:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad\qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

SOLUCION. Sustituyendo las expresiones de x, y, dadas por las ecuaciones de cambio de coordenadas en $xy = k$, obtenemos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = k$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = k \qquad \text{o también} \qquad \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1$$

que representa una hipérbola equilátera con eje transversal X' o Y' según sea $k > 0$ o $k < 0$.

PROBLEMA 5. Sean e un número real > 1, F un punto fijo y L una recta que no contiene a F.

1) Probar que los puntos P del plano cuya distancia del punto F es e veces la distancia de la recta L, forman una hipérbola.
2) Si a y b son los semiejes transversal y conjugado de la hipérbola y si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, probar que $c = ea$.

Nota. Llamamos *foco* al punto F, *excentricidad* al número e y *directriz* a la recta L.

SOLUCION.

1) Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el punto F tal que el eje X sea perpendicular a la recta L y orientamos X positivamente en el sentido de la recta L al punto F.

   Se tiene así $\qquad F = (0, 0), \qquad L\colon\ x = -d,$

   donde $\qquad d = d(F, L).$

   Designemos con $P = (x, y)$ un punto tal que $\quad d(P, F) = e\,d(P, L).$

Se tiene entonces
$$\sqrt{x^2+y^2} = e\,|x+d|$$
$$\left(x^2+y^2\right) = e^2\,(x+d)^2$$

o
$$\left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2dx + y^2 = e^2d^2\,,$$

completando cuadrados
$$\left(1-e^2\right)\left[x-\frac{e^2d^2}{1-e^2}\right]^2 + y^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

y dividiendo entre $\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}$ se obtiene
$$\frac{\left[x-\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}\right]^2}{\dfrac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1$$

El primer denominador es >0, y el segundo es <0, pues $e>1$ implica $e^2>1$ y $1-e^2<0$. Por lo tanto, la ecuación representa una hipérbola con centro en $\left(\dfrac{e^2d^2}{1-e^2},\ 0\right)$ y eje transversal paralelo al eje X.

2) Si a y b son los semiejes transversal y conjugado de la hipérbola respectivamente, de acuerdo a lo que se acaba de establecer, se debe cumplir que
$$a^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}\,, \quad b^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

Luego
$$c^2 = a^2+b^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = \frac{e^4d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2 \times \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2a^2$$

Por lo tanto $\quad c = ea\,.$

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm\frac{3}{2}(x-1)+2$, y que pasa por el punto $(5,-9/2)$

SOLUCION. Puesto que las asíntotas son

$$y-2=\tfrac{3}{2}(x-1), \qquad y-2=-\tfrac{3}{2}(x-1),$$

multiplicando miembro a miembro, se obtiene

$$\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=0 .$$

Luego la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=k$$

donde k debe determinarse empleando la condición de que la hipérbola pasa por el punto $\left(5,-\frac{9}{2}\right)$. Haciendo $x=5$, $y=-\frac{9}{2}$, obtenemos

$$k=\frac{\left(-\frac{9}{2}-2\right)^2}{9}-\frac{(5-1)^2}{4}=\frac{25}{36}$$

RESPUESTA. $\dfrac{(y-2)^2}{\frac{25}{4}}-\dfrac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}}=1$

PROBLEMA 7. Hallar la ecuación de la hipérbola con focos en $(0,0)$ y $(6,0)$ y excentricidad $e=\frac{3}{2}$.

SOLUCION. El centro de la hipérbola es $(3,0)$ y la ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{(x-3)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se tiene además $\quad e=\frac{3}{2} \qquad$ **(1)**

$2c=$ distancia entre los focos $=d[(0,0),(6,0)]=6 \qquad$ **(2)**

$$c^2=a^2+b^2 \qquad \textbf{(3)}$$

$$c=ea \qquad \textbf{(4)}$$

De (1), (2) y (4): $\quad 3=\frac{3}{2}a \;\Rightarrow\; a=2 \qquad$ **(5)**

y de (3) y (5) : $b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=5$

RESPUESTA. $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1.$

PROBLEMA 8. Probar que el producto de las distancias de un punto cualquiera de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

SOLUCION. Consideremos la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

con asíntotas $\quad L_1:\ y = \dfrac{b}{a}x \quad$ o $\quad y - \dfrac{b}{a}x = 0$

$\quad L_2:\ y = -\dfrac{b}{a}x \quad$ o $\quad y + \dfrac{b}{a} = 0$

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Se tiene

$$d_1 = d(P, L_1) = \frac{\left| y - \dfrac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{-b}{a}\right)^2}} \quad , \quad d_2 = d(P, L_2) = \frac{\left| y + \dfrac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$$

Luego
$$d_1 d_2 = \frac{b^2 \left| \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} \right|}{1 + \left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

teniendo en cuenta que $\left| \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} \right| = 1$, pues P es un punto de la hipérbola.

Así, hemos demostrado que $\quad d_1 d_2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} =$ constante.

PROBLEMA 9. Sean A y B dos puntos fijos cuya distancia es d. Probar que el conjunto de los puntos P tales que el ángulo PAB es dos veces el ángulo ABP, es una hipérbola con excentricidad $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

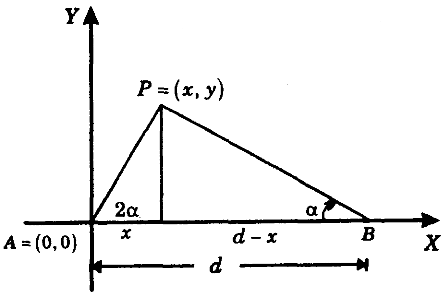
SOLUCION. Supongamos que

$$A = (0, 0) \quad \text{y} \quad B = (d, 0).$$

Sea $P = (x, y)$ un punto tal que $\measuredangle PAB = 2\measuredangle ABP$ y hagamos $\alpha = \measuredangle ABP$

Se tiene $\quad \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

y $\quad \dfrac{y}{d - x} = \operatorname{tg} \alpha$



Sustituyendo tg α en la primera ecuación
$$\frac{y}{x} = \frac{2\left(\dfrac{y}{d-x}\right)}{1-\left(\dfrac{y}{d-x}\right)^2}$$
$$y^2 - 3x^2 + 4dx = d^2,$$

y completando cuadrados
$$\frac{y^2}{\frac{7d^2}{3}} - \frac{\left(x-\frac{2}{3}d\right)^2}{\frac{7d^2}{3}} = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola con $a^2 = \dfrac{7d^2}{3}$, $b^2 = \dfrac{7d^2}{9}$; y calculando la excentricidad e:
$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{28}{9}d^2,$$
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{\frac{28}{9}d^2}{\frac{7}{3}d^2} = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

PROBLEMA 10. Sea H una hipérbola con centro C. Si P es punto culquiera de H y L es la asíntota más próxima a P, demostrar que la distancia $d(P, L)$ tiende a cero si $d(P, C)$ crece indefinidamente; es decir que se cumple $d(P,L_1) \to 0$ cuando $d(P, C) \to +\infty$

SOLUCION. Por simplicidad vamos a suponer que $C = (0, 0)$ y que la ecuación de la hipérbola es
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Las ecuaciones de las asintotas son: L_1: $y - \dfrac{b}{a}x = 0$, L_2: $y + \dfrac{b}{a}x = 0$.

Sea $P = (x, y)$ un punto de la hipérbola.

De (1) se tiene que
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Supongamos que $P = (x, y)$ se encuentra en la parte superior de la rama derecha de la hipérbola, es decir que se cumple $x \geq a$, $y \geq 0$.

Demostraremos que $d(P,L_1)$ tiende a 0

cuando $d(P,0) = \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$ tiende a $+\infty$, esto es cuando $x \to +\infty$.

Calculamos $d(P, L_1)$ sustituyendo (2) en

$$d(P,L_1) = \frac{\left| y - \frac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{\left| \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{b\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y racionalizando

$$d(P,L_1) = \frac{b\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|}{\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|} = \frac{ba^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|}$$

Luego, si $x \to +\infty$, entonces el denominador$\to +\infty$, el segundo miembro $\to 0$, y por lo tanto, $d(P, L_1) \to 0$.

De modo similar se prueban los casos en que P se encuentra en la parte inferior de la rama derecha o en las partes superior o inferior de la rama izquierda de la hipérbola.

PROBLEMA 11. Si $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de una hipérbola, las asíntotas $y = mx + b$ se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A + Bm + Cm^2 &= 0 \\ Bb + 2Cbm + D + Em &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Encontrar las asíntotas y el centro de la hipérbola

$$10x^2 + 11xy - 6y^2 - 82x - 9y + 262 = 0$$

SOLUCION. Utilizando las ecuaciones (*)

$$10 + 11m - 6m^2 = 0 \qquad (1)$$

$$11b - 12bm - 82 - 9m = 0 \qquad (2)$$

Las raices de la ecuación (1) son

$$m = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{12} = \begin{cases} 5/2 \\ -2/3 \end{cases}$$

que sustituidas en (2) dan $\quad b = \begin{cases} -11/2 \\ 4 \end{cases}$

Las asíntotas son

$$L_1:\ y = \tfrac{5}{2}x - \tfrac{11}{2} \qquad (3)$$

$$L_2:\ y = -\tfrac{2}{3}x + 4 \qquad (4)$$

El centro de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas. Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$x = 3 \qquad y = 2.$$

4.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar los focos, vértices, excentricidad y asíntotas de la hipérbola $25x^2 - 9y^2 = 225$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $5y + 12x - 39 = 0$, $5y - 12x + 9 = 0$, y que pasa por el punto $(-8,3)$.

Sugerencia. Usar la propiedad de que si P es un punto de la hipérbola y $d(P, L_1)$ y $d(P, L_2)$ son las distancias de P a las asíntotas, entonces

$$d(P, L_1) \times d(P, L_2) = \text{constante} = k \quad \text{(Ver problema resuelto Nº8).}$$

PROBLEMA 3. Hallar la ecuación de una hipérbola con eje transversal paralelo al eje X, excentricidad $5/3$, y que pasa por los puntos $(4,0)$, $(-2,2)$ y $(-11/4,5)$

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera cuyo centro es el origen y que tiene sus focos sobre la recta $y = \frac{4}{3}x$ a una distancia 5 del origen.

PROBLEMA 5. Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en $(-1,0)$, sus focos en el eje X y que pasa por los puntos $(4,0)$ y $\left(5\sqrt{2}-1, 12\right)$

PROBELMA 6. Si $4x^2 + 5xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$ es la ecuación de una hipérbola, hallar las asíntotas y el centro de la hipérbola.

PROBLEMA 7. Probar que no existe ninguna recta $y = mx$ que corta a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en exactamente un punto.

PROBLEMA 8. Las asíntotas de una hipérbola forman un ángulo de 60° con el eje transversal. Hallar la excentricidad de la hipérbola.

PROBLEMA 9. Se llama lado recto o cuerda focal de una hipérbola a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje transversal. Probar que la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$, donde a y b son los ejes transversal y conjugado, respectivamente.

PROBLEMA 10. La hipérbola H tiene las asíntotas $2x - 3y + 12 = 0$ y $2x + 3y = 0$. Si un vértice de H es $(0,2)$, hallar la ecuación de H.

PROBLEMA 11. Sea la hipérbola $4x^2 - 3y^2 = 36$. Hallar la ecuación de la cuerda cuyo punto medio es $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$.

RESPUESTAS.

1. focos: $\left(-\sqrt{34}, 0\right), \left(\sqrt{34}, 0\right)$; vértices: $(-3, 0), (3, 0)$;

   excentricidad: $e = \sqrt{34}/3$; asíntotas: $y = \pm\frac{5}{3}x$.

2. $\dfrac{(x-2)^2}{10^2} - \dfrac{(y-3)^2}{24^2} = 1.$

3. $\dfrac{(x-1)^2}{3^2} - \dfrac{(y-2)^2}{4^2} = 1$

4. $14x^2 - 14y^2 - 96xy + 625 = 0.$

5. $\dfrac{(x+1)^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{12^2} = 1.$

6. Asíntotas: $3x + 3y = -1$, $12x + 3y = -5$; Centro: $\left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

8. $e = 2$

10. $4x^2 + 24x - 2y^2 + 36y = 36.$

11. $y = 2x - 6.$