

# Funciones Diferenciables

En la teoría económica que habitualmente se maneja, se consideran funciones diferenciables<sup>1</sup>. Conceptos como *producto marginal*, *costo marginal*, *tasa marginal de sustitución*, *tasa de sustitución técnica*, *multiplicador del ingreso*, *propensión marginal a consumir* y muchos otros, están ligados al concepto de diferenciability de funciones.

Asumimos que el lector está familiarizado con el cálculo diferencial en una variable real, pero para entender mejor la definición general que demos para funciones vectoriales de variable vectorial, haremos un breve resumen de algunas ideas fundamentales en torno al concepto de derivada de una función en un punto.

## 1.1 DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Supongamos que las variables reales  $x$ ,  $y$  que están vinculadas funcionalmente según una función  $f$ , siendo  $x$  la variable independiente; es decir, que  $y = f(x)$ . Asumamos, además, que no conocemos explícitamente la función  $f$  (lo cual ocurre con más frecuencia que la que comúnmente se cree).

---

<sup>1</sup> Cabe mencionar que problemas tan importantes como la explicación de los precios de las mercancías en una economía de propiedad privada y la explicación del papel de los precios en un estado óptimo de la economía han sido tratados con todo rigor sin recurrir al cálculo diferencial. En este sentido, el aporte de G. Debreu (1959) es un hito en la historia de la teoría económica.

*¿Qué podemos afirmar de esta función si sólo conocemos que el valor de su derivada, cuando  $x=3$  es el número 0.6?*

Según la notación habitualmente empleada, la información que tenemos es  $f'(3) = 0.6$ , o también  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = 0.6$ .

1. Una primera afirmación que podemos hacer en base a esta información, es que  $f$  es una función creciente cuando  $x$  toma valores cercanos a 3. Esta afirmación es porque  $f'(3) > 0$ , pero ya que sabemos exactamente que  $f'(3) = 0.6$ , podemos precisar más el carácter creciente de  $f$ ; así, como

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 0.6$$

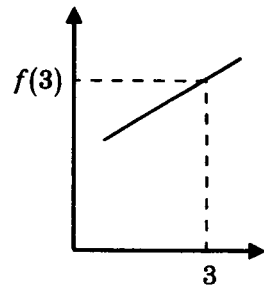


Figura 1.1

es la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f$ , en el punto  $(3, f(3))$ , en esta recta, por cada unidad que crece  $x$ , la ordenada crece 0.6 unidades (ver Figura 1.1); en consecuencia, una afirmación no muy alejada de lo que realmente sucede, será que

*cerca de  $x = 3$ , por cada unidad que crece  $x$ ,  $f(x)$  crecerá aproximadamente 0.6 unidades*

En símbolos:

$$f(3+h) - f(3) \approx 0.6,$$

para  $h$  suficientemente pequeño.

Es bueno notar que como no conocemos la función  $f$ , podría darse una de las siguientes situaciones, en donde se muestran hipotéticas porciones del gráfico de  $f$ , coherentes con  $f'(3) = 0.6$ .

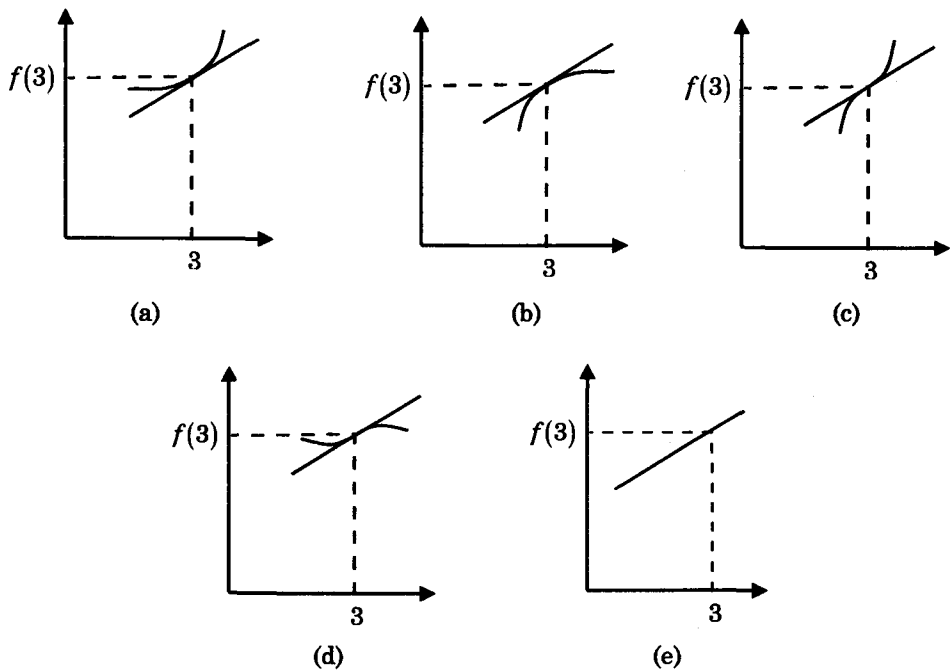


Figura 1.2

Observando los gráficos queda claro que la afirmación hecha es solamente de carácter local y que en casos como los mostrados en (a) el error cometido en la aproximación sería por defecto, mientras que en casos como (b) el error cometido en la aproximación sería por exceso. Sólo en el caso (e), en el que la función  $f$  coincide localmente con su tangente en  $(3, f(3))$ , el error sería nulo. Evidentemente, si el criterio de *cerca* es muy amplio, puede ser muy grande el error que se cometa en la aproximación, teniendo como referencia la pendiente de la tangente en un punto.

Un ejemplo: al resolver el problema del consumidor, es posible determinar la utilidad marginal del dinero, correspondiente al ingreso que se esté considerando (más adelante veremos que es el valor del multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ ). No se conoce exactamente cómo depende de su ingreso el nivel de utilidad del consumidor, pero con esta información tenemos una aproximación lineal que podemos utilizarla para estimar la variación del nivel de utilidad ante pequeñas variaciones del ingreso; sin embargo habrá que tener cuidado de no olvidar que tales

variaciones deben ser pequeñas, pues corremos el riesgo de cometer grandes errores. Las consecuencias de este tipo de errores pueden ser graves si se cometen al tomar decisiones de política económica en base a la información cuantitativa de los multiplicadores que se obtengan en el modelo.

2. Otra afirmación que podemos hacer, en base al dato  $f'(3) = 0.6$ , es que 0.6 es la tasa de cambio instantánea de la función  $f$ , por unidad de variación de su variable, cuando ésta toma el valor 3. Esta es una interpretación natural que se obtiene observando que el cociente  $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$  es la tasa de cambio promedio de  $f$  por unidad de variación de  $x$  en el intervalo  $[3, 3+h]$ . Es claro que  $f(3+h) - f(3)$  es el cambio total y al dividirlo entre el número de unidades en el intervalo, se obtiene la mencionada tasa de cambio promedio. Como  $f'(3)$  es el límite de este cociente, cuando  $h$  se considera cada vez más pequeño, resulta natural la interpretación de tasa de cambio instantánea (o *velocidad*). La interpretación geométrica es totalmente coherente con lo afirmado en (1). En este caso resulta claro cómo la recta tangente al gráfico de  $f$  en  $(3, f(3))$  es la posición límite de aquellas rectas secantes al gráfico de  $f$ , que pasan por los puntos  $(3, f(3))$  y  $(3+h, f(3+h))$  cuando  $h$  toma valores cada vez más pequeños. Así, la situación puede ser como una de las mostradas en las figuras 1.3 (a) y (b)

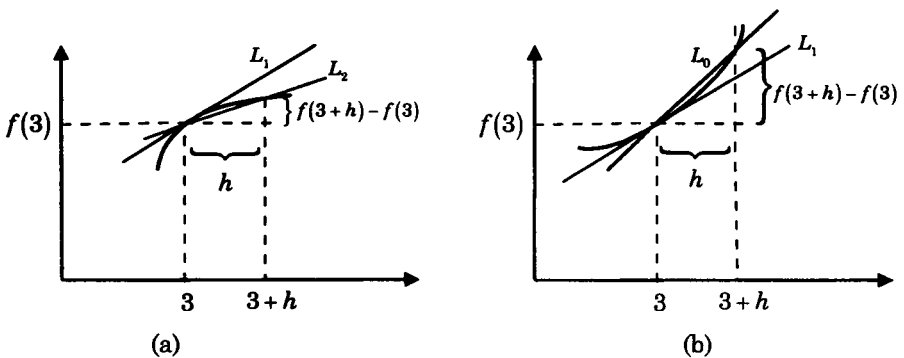


Figura 1.3<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sólo por razones didácticas, en éste y gráficos similares se ha considerado un tamaño grande al segmento de longitud  $h$ .

Los comentarios hechos nos ayudan a entender una función diferenciable en un punto  $a$ , como una *buena aproximación lineal a su comportamiento, cerca del punto  $a$* . Justamente este criterio es el que se precisa en la siguiente definición formalmente enunciada, con la ventaja de ser muy fácilmente generalizable para funciones de varias variables.

**Definición 1.1** Sea  $f$  una función real de variable real, con una vecindad  $B_r(a)$  del punto  $a$  contenida en su dominio. Decimos que  $f$  es diferenciable en  $a$  si y sólo si existe una función lineal  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0 \quad (|h| < r)$$

La función lineal  $T$  se denomina **derivada de  $f$  en  $a$**  y su imagen  $T(h)$ , al aplicarla en  $h$ , se denomina **diferencial de  $f$  en  $a$** .

**Observaciones 1.2**

1. Es usual que en lugar de  $h$  se tome  $dx$ , representando una variación pequeña de  $x$ .
2. Toda función lineal, real de variable real es de la forma  $T(h) = \alpha h$ , donde  $\alpha$  es un número real fijo; por ejemplo  $S(h) = 4h$ ,  $L(h) = -2h$ ,  $M(h) = 0.3h$ , son funciones lineales, reales de variable real.
3. Recordemos que toda función lineal de variable vectorial en  $\mathbb{R}^n$  y que toma valores en  $\mathbb{R}^m$  se identifica con su matriz de orden  $m \times n$  correspondiente a las bases usuales <sup>2</sup>. Para el caso en que  $n = m = 1$  la matriz resulta ser de orden  $1 \times 1$ , cuyo único elemento es el coeficiente y resulta más manejable en ese caso identificar la función lineal real, de variable real, con tal coeficiente; así, tomando los ejemplos de la observación (2), identificamos la función lineal  $S$  con el número 4, la

---

<sup>1</sup> Otra manera de expresar este límite es afirmar que la función "error", dada por  $f(a+h) - f(a) - T(h)$ , es de menor magnitud que  $h$  en 0; o, formalmente, que

$$f(a+h) - f(a) - T(h) = O(h)$$

<sup>2</sup> Revisar por ejemplo: Lang, Serge: [12], Cap. V.

función lineal  $L$  con el número  $-2$  y la función lineal  $M$  con el número  $0.3$ .

4. Lo anotado en (3) permite compatibilizar la definición dada con la que usualmente se maneja y según la cual la derivada en un punto de una función real de variable real, es un número.

**Ejemplo:** Si  $f(x) = x^2$ , usualmente calculamos así la derivada de  $f$  en  $3$ :

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$$

Según la definición dada, la derivada de  $f$  en  $3$  es una función lineal  $T$ , real y de variable real, tal que

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2 - T(h)}{h} = 0$$

Busquemos tal función  $T$ , sabiendo, por la observación 2, que  $T(h) = \alpha h$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2 - T(h)}{h} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2 - \alpha h}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h - \alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha = 6 \end{aligned}$$

Por consiguiente  $T(h) = 6h$ .

Resulta claro que cuando se calcula de la manera usual, se obtiene el número que se identifica con la función lineal que es la buena aproximación al comportamiento de  $f$ , cerca del punto en que se está analizando. En este sentido, la transformación lineal  $T$  de la definición dada, se identifica con el número  $f'(a)$  y así

$$T(h) = f'(a)h$$

y en consecuencia, para  $h$  suficientemente pequeño

$$f(a+h) - f(a) \approx T(h) = f'(a)h \quad (1.1.1)$$

o equivalentemente:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \quad (1.1.2)$$

5. Las dos últimas expresiones son muy importantes:

(1.1.1):

Nos dice claramente que al cambiar el valor de la variable de  $a$  a  $a + h$  (o sea al incrementar <sup>1</sup> el valor de la variable en  $h$  unidades), el incremento de  $f$ , que denotamos  $\Delta f(a;h)$ , se aproxima mediante el número real que resulta de multiplicar  $f'(a)$  por  $h$ . Tal número, en términos de la transformación lineal es  $T(h)$  y en consecuencia es el diferencial de  $f$  en  $a$ , considerando el incremento  $h$ , que lo denotamos  $df(a;h)$ ; así

$$f(a+h) - f(a) =: \Delta f(a;h) \approx df(a,h) =: f'(a)h,$$

expresión que usualmente se da con notación más simplificada:

$$\Delta f \approx df = f'(a)dx \quad (1.1.3)$$

### Aplicación 1.3

En el análisis marginal, tan usado en la teoría económica, se hace uso – esencialmente– de la expresión (1.1.1), considerando  $h = 1$ . En efecto, cuando por ejemplo se tiene la función costo  $C = C(y)$ , siendo  $y$  el nivel de producción, se denomina costo marginal al *costo adicional por unidad de producto* o, más claramente, *el costo adicional de incrementar en una unidad el nivel de producción*. Sin embargo, cuando se utiliza formalmente este concepto, se denomina costo marginal a *la derivada de la función costo*. La coherencia entre estas denominaciones la explica la expresión (1.1.1), pues asumiendo que se tiene fijado un nivel de producción, digamos  $\bar{y}$ , el costo marginal en el *primer sentido* (costo adicional de incrementar una unidad de producto) es

$$C(\bar{y} + 1) - C(\bar{y})$$

y en el *segundo sentido* es  $C'(\bar{y})$ ; pero aplicando (1.1.1) es claro que para  $h$  suficientemente pequeño

$$C(\bar{y} + h) - C(\bar{y}) \approx C'(\bar{y})h,$$

y considerando  $h = 1$ , tenemos

$$C(\bar{y} + 1) - C(\bar{y}) \approx C'(\bar{y}).$$

---

<sup>1</sup> Incrementar en el sentido más general, lo que significa asumir la posibilidad de incrementos negativos.

(1.1.2):

La expresión (1.1.2) podemos interpretarla desde un punto de vista geométrico y así ilustrar y complementar el comentario hecho a la primera. Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  y tiene pendiente  $f'(a)$ :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Así

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.1.4}$$

(ya sabemos que esta recta es tangente al gráfico de  $f$  en  $(a, f(a))$  ).

Si llamamos  $g$  a la función que a cada número real le asigna la imagen que le corresponde en la recta hallada, tenemos

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Podemos ahora hallar qué número le corresponde a  $a + h$  :

$$g(a + h) = f(a) + f'(a)h.$$

Comparando esta expresión con (1.1.2) tenemos

$$f(a + h) \approx g(a + h),$$

lo cual nos dice claramente que estamos tomando como valor aproximado de  $f(a + h)$  el valor correspondiente a  $(a + h)$  en la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ .

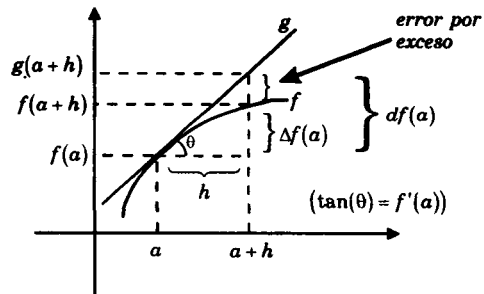


Figura 1.4

Evidentemente esta aproximación será mejor cuanto más pequeño sea  $h$ . Ya dijimos que el error que se comete puede ser por exceso o defecto, según la concavidad de  $f$ . (Cabe aclarar que la función  $g$  no es lineal, pues no pasa por el origen, pero es una lineal afín y geoméricamente se ve que es una *traslación* de la función lineal  $T$ , cambiando el origen de coordenadas al punto  $(a, f(a))$ ).

6. Hablar de la derivada de una función en un punto tiene pleno sentido, ya que un teorema garantiza que cuando la transformación lineal de la definición dada existe, ella es **única**. Geométricamente esto significa que una función diferenciable en el punto  $a$ , no puede tener un punto anguloso en  $(a, f(a))$ , pues en tal caso existirían dos rectas *tangentes* al gráfico de  $f$  en ese punto. En la Figura 1.5 se muestran gráficos de funciones no diferenciables en  $a$

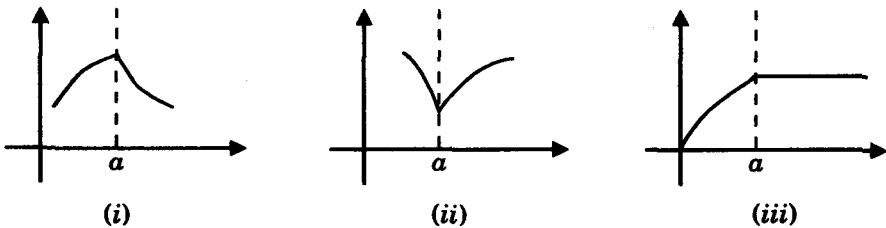


Figura 1.5

Es importante tener en cuenta que existen funciones en la teoría económica, que presentan puntos en los cuales no son diferenciables.

**Ejemplo:** En la teoría del desequilibrio macroeconómico se tiene que la demanda efectiva laboral está dada por  $l\left(\frac{w}{p}\right) = \min \left\{ F^{-1}(\bar{y}), F'^{-1}\left(\frac{w}{p}\right) \right\}$ ,

(Fig.1.6), donde  $F$  es una función de producción de corto plazo, creciente con rendimientos decrecientes,  $w/p$  es el salario real e  $\bar{y}$  es la restricción percibida a las ventas.<sup>1</sup>

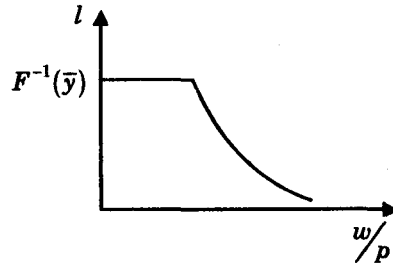


FIGURA 1.6

7. Teniendo en cuenta la observación anterior, es claro que si el gráfico de una función es una curva que no posee puntos angulosos, tal función será diferenciable en todo punto de su dominio. A funciones con esta característica se les denomina **funciones diferenciables** (al no indicarse que es diferenciable en un punto específico, se entenderá que es diferenciable en todo punto de su dominio).

<sup>1</sup> Cabe aclarar que  $\bar{y}$  debe leerse *ye barra*, pues el nombre castellano de la letra y es *ye*

8. Otro teorema que es importante comentar es el que establece que **toda función diferenciable es continua**. Así, las gráficas de funciones diferenciables son curvas *suaves y sin vacíos ni saltos*, ya que no poseen puntos angulosos, están definidas para todos los puntos del dominio y pequeños cambios en su variable ocasiona también pequeños cambios en sus respectivas imágenes.

Es usual que las funciones con las que se trabajan en la teoría económica más difundida sean funciones diferenciables, y en consecuencia continuas; sin embargo la teoría de catástrofes considera los casos en que los modelos deben incluir funciones con *saltos bruscos*<sup>1</sup>.

### Ejercicios 1.4

1. Esbozar el gráfico y analizar la continuidad y diferenciableidad de las siguientes funciones:

a)  $f(l) = 5l$

h)  $s(x) = 1/x$

b)  $\mu(x) = \ln(x)$

i)  $t(x) = \frac{1}{x-3}$

c)  $h(x) = \min\{4, 2x\}$

j)  $u(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

d)  $j(x) = \min\{2, \sqrt{x}\}$

k)  $w(x) = 6(x-2)^{1/3} + 4$

e)  $k(x) = \min\left\{\sqrt{x}, \frac{1}{4}x\right\}$

l)  $i(x) = (x-6)(x-1)^{2/3}$

f)  $n(x) = [x]$  (el mayor entero menor o igual a  $x$ )

g)  $r(x) = x - [x]$  (parte decimal de  $x$ )

2. En cada caso, emplear diferenciales para obtener un valor aproximado de la función dada en el punto indicado  $\bar{x}$ . Determinar si la aproximación es por exceso o por defecto.

a)  $f(x) = \sqrt{x-3}$  ;  $\bar{x} = 7.2$

d)  $h(x) = \frac{1}{x-2}$  ;  $\bar{x} = 1.03$

b)  $g(x) = \ln(x)$  ;  $\bar{x} = 1.09$

e)  $j(x) = 10 - \ln x^2$  ;  $\bar{x} = 1.09$

c)  $h(x) = \frac{1}{x-2}$  ;  $\bar{x} = 11.98$

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo: Weintraub, E. R. "Catastrophe Theory and Intertemporal Equilibrium" *Economie Appliquée* 32: 303 - 15, 1980

## 1.2 DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

Las funciones que relacionan un número  $n$  (entero positivo) de variables reales (vectores de  $\mathbb{R}^n$ ) con números reales, son muy frecuentes en los modelos económicos. Tenemos por ejemplo las *funciones de producción*, que a cada vector que representa cantidades de factores de producción le hacen corresponder un número real, que representa el mayor nivel de producción obtenible con tales cantidades. Otros ejemplos son las *funciones de utilidad*, las *funciones de demanda*, *de consumo*, *de inversión*, etc. Es útil y cómodo exigir que estas funciones sean diferenciables, pues –como ya lo hemos explicado para el caso  $n = 1$  en la sección (1.1)– ello permite tener una buena aproximación lineal de la función, para valores de la variable cercanos a un vector determinado. Una interpretación geométrica de esto es posible también para  $n = 2$ , y así la idea intuitiva de una función diferenciable de dos variables – digamos  $f$  – en un punto  $a = (a_1, a_2)$ , es que la superficie que representa gráficamente a la función tenga en el punto  $(a, f(a))$  un **plano tangente**, que sea una buena aproximación al gráfico de  $f$ , cerca del punto  $(a, f(a))$ .

Como el gráfico de una función cuyas variables son vectores de  $\mathbb{R}^n$  y cuyos valores son números reales es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , no es posible la ilustración gráfica de lo dicho anteriormente para funciones diferenciables cuando  $n > 2$ , pero la idea intuitiva será esencialmente la misma considerando hiperplanos, como lo veremos luego de la siguiente definición, que no es sino una generalización de la Definición 1.1.

**Definición 1.5** Sea  $f$  una función real de  $n$  variables reales con una vecindad  $B_r(a)$  del punto  $a$  contenida en su dominio. Decimos que  $f$  es diferenciable en  $a$  y sólo si existe una función lineal  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0 \quad (\|h\| < r)$$

La función lineal  $T$  se denomina **derivada de  $f$  en  $a$**  y su imagen  $T(h)$ , al aplicarla en  $h$ , se denomina **diferencial de  $f$  en  $a$** .

### Observaciones 1.6

1. Es claro que  $h$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  y entonces no tendría sentido que estuviera en el denominador sin las barras. Con ellas se tiene el módulo de  $h$  (su *tamaño*), que es un número real. Evidentemente al ser pequeño  $\|h\|$ , tienen que ser pequeñas las componentes de  $h$ , ya que

$$\|h\| = (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$$

De manera análoga a lo que ocurre con una variable, es usual tomar

$$h = dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n),$$

representando así un vector de incrementos.

2. Toda función lineal, real de variable vectorial, es de la forma

$$T(h) = \alpha \cdot h,$$

donde  $\alpha$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ , fijo; así, con  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,

$$T(h) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n;$$

por ejemplo

$$W(h_1, h_2) = 4h_1 + 5h_2$$

$$V(h_1, h_2, h_3) = 2h_1 - 6h_2 + 0.4h_3$$

$$U(h_1, h_2, h_3, h_4) = -h_1 + \sqrt{2}h_2 + \frac{2}{3}h_3$$

3. Recordando la identificación que se hace entre funciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  y matrices de orden  $m \times n$ , referidas a las bases usuales<sup>1</sup>, ahora tenemos el caso  $m = 1$  y las matrices serán de orden  $1 \times n$ ; así, tomando los ejemplos de la observación 2:

la matriz identificada con  $W$  es  $[4 \ 5]$

la matriz identificada con  $V$  es  $[2 \ -6 \ 0.4]$

la matriz identificada con  $U$  es  $[-1 \ \sqrt{2} \ \frac{2}{3} \ 0]$

---

<sup>1</sup> Cada vector básico usual de  $\mathbb{R}^n$  es  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  con el 1 en el  $i$ -ésimo lugar.

4. Es un teorema fácil de demostrar que la función lineal  $T$  de la definición es única y un convenio generalizado denotarla por  $Df(a)$  o  $f'(a)$ . También se puede demostrar que la matriz referida a las bases usuales, que la identifica, es

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  es la llamada **derivada parcial de  $f$  respecto a su variable  $x_i$  y calculada en el punto  $a \dots (i = 1, 2, \dots, n)$** . Cada uno de estos  $n$  números reales se obtiene considerando a  $f$  como función solamente de la variable  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (las otras variables se asumen constantes en los valores correspondientes de  $a$ ) y calculando la derivada de tal función *de una variable* cuando su variable  $x_i$  toma el valor  $a_i$ .

Esto se resume en la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i} \quad (1.2.1)$$

de la cual, análogamente a cómo lo hicimos en (1.1) con funciones de una sola variable, obtenemos que para  $h$  suficientemente pequeño:

$$f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i ; \quad (1.2.2)$$

$$f(a_1, \dots, a_i + dx_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i ; \quad (1.2.3)$$

Estas expresiones, podemos enunciarlas verbalmente usando la *jerga económica*:

*Si las variables de  $f$  toman los valores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  el efecto en  $f$  de una pequeña variación  $dx_i$ , ceteris paribus, de la variable  $x_i$ , lo mide aproximadamente* (1.2.4)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

o diciendo que

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  mide aproximadamente – y para cambios pequeños – cuánto aumenta o disminuye  $f(x)$  –respecto a  $f(a)$ – por cada unidad que aumente o disminuya  $x_i$  – respecto a  $a_i$ – manteniéndose constantes las otras variables.

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) > 0$ , la función crece al incrementarse  $x_i$

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) < 0$ , la función decrece al incrementarse  $x_i$

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ , la función se mantiene constante al modificarse  $x_i$

### Aplicación 1.7

Si  $f(K, L) = 6L^{2/3}K^{1/3}$  es una función de producción y se tiene  $K = 64$  y  $L = 27$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial K}(64, 27) = 6 \times \frac{2}{3} L^{2/3} K^{-2/3} \Big|_{(64, 27)} = 4 \left( \frac{L}{K} \right)^{2/3} \Big|_{(64, 27)} = 3,$$

lo cual nos dice que si  $K$  se incrementara en una unidad, la producción crecería –aproximadamente– en 3 unidades. Así, cuando  $K$  y  $L$  se usan a niveles 64 y 27 respectivamente, el **producto marginal** de  $K$  es 3.

Análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial L}(64, 27) = 6 \times \frac{1}{3} L^{-1/3} K^{1/3} \Big|_{(64, 27)} = 2 \left( \frac{K}{L} \right)^{1/3} \Big|_{(64, 27)} = \frac{32}{9}$$

lo cual nos dice que si  $L$  se incrementara en una unidad, el aporte a la producción de esta unidad adicional de  $L$  sería aproximadamente de  $\frac{32}{9}$  unidades; así, para estos niveles de uso de los factores productivos, el **producto marginal** de  $L$  es  $\frac{32}{9}$ .

5. Abreviando la expresión *la matriz relativa a las bases usuales que corresponde a la transformación lineal*  $Df(a)$  es

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right],$$

escribiremos

$$Df(a) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \tag{1.2.6}$$

y diremos que la derivada de  $f$  en  $a$  es tal matriz fila de orden  $1 \times n$ .

También, identificando la matriz fila de orden  $1 \times n$  con el vector de  $\mathbb{R}^n$  que tenga por componentes los mismos elementos correspondientes de la matriz, escribiremos

$$Df(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \tag{1.2.7}$$

Este vector de  $\mathbb{R}^n$  es conocido con el nombre de **vector gradiente** de  $f$  en  $a$  y se le denota  $\nabla f(a)$ .

Es claro que

$$Df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h \tag{1.2.8}$$

pues consideramos

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_n) \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \end{aligned}$$

### Aplicación 1.8

i) Si  $f$  es una función de  $n$  variables y posee gradiente en el punto  $a$  (en ese punto tiene derivadas parciales respecto a todas sus variables), entonces  $\nabla f(a)$  es un vector de  $n$  componentes que usualmente se le representa como un segmento orientado (flecha) que nace en el punto  $a$  (no en el punto  $(a, f(a))$ ). Ver Figura 1.7 para el caso  $n = 2$ .

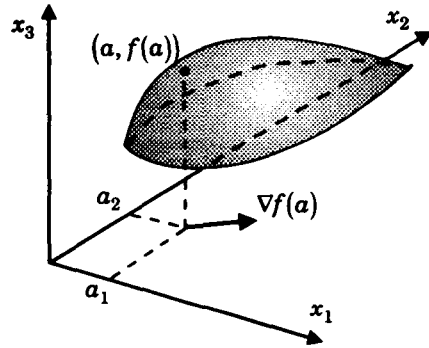


Figura 1.7

Si conocemos específicamente la función  $f$  y el punto  $a$ , al calcular  $\nabla f(a)$  tendremos también un vector específico y podremos representarlo como cualquier otro vector; por ejemplo, si

$$f(K, L) = 6L^{1/2}K^{2/3},$$

$$\nabla f(64, 27) = \left( 3, \frac{32}{9} \right).$$

Pero hay una interpretación muy importante del vector gradiente, que nos permite tener información del comportamiento de la función si sus variables se modifican siguiendo el sentido indicado por  $\nabla f(a)$ . Veamos: no es difícil demostrar<sup>1</sup> que

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u, \quad (1.2.9)$$

<sup>1</sup> En la Definición 1.5 tomemos  $h = tu$ , siendo  $t > 0$  y  $u$  un vector unitario de  $\mathbb{R}^n$  (es decir su tamaño es 1, o  $\|u\| = 1$ ); así

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} - Df(a)(u) \right) = 0$$

y entonces

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u$$

donde  $D_u f(a)$  es la **derivada direccional** de  $f$  en  $a$ , según la dirección del vector unitario  $u$ , definida por

$$D_u f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h} \tag{1.2.10}$$

Según esta definición,  $D_u f(a)$  se interpreta como la rapidez con la que están cambiando los valores de  $f$ , en el punto  $a$ , cuando sus variables se modifican siguiendo el sentido indicado por el vector unitario  $u$ . (Los puntos  $a + tu$ , con  $t > 0$  son puntos de la semirrecta que parte de  $a$  y es paralela al vector  $u$ . Como  $u$  es unitario, del punto  $a$  al punto  $a + tu$  se han recorrido  $t$  unidades). Ahora, en virtud de (1.2.9), tal rapidez (o razón de cambio) se puede determinar fácilmente y sin necesidad de calcular el límite de (1.2.10), pues numéricamente estará dada por  $\nabla f(a) \cdot u$ . Este resultado facilita resolver el siguiente

**Problema:** ¿En qué sentido deberían desplazarse las variables de  $f$ , partiendo del punto  $a$ , para que los valores de  $f$  crezcan más rápidamente?

*Solución:* Como la rapidez está dada por  $\nabla f(a) \cdot u$ , siendo conocidos  $f$  y  $a$  –y en consecuencia  $\nabla f(a)$ – sólo resta conocer el vector  $u$  que haga máximo el producto escalar.

Siendo  $\nabla f(a) \cdot u = \|\nabla f(a)\| \|u\| \cos \theta = \|\nabla f(a)\| \cos \theta$ ,

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\nabla f(a)$  y  $u$  (ver Fig.1.8),  $\nabla f(a) \cdot u$  será máximo si y sólo si  $\cos \theta$  es máximo; es decir, si  $\theta = 0$ , lo cual significa que el vector unitario  $u$  debe tener el mismo sentido que el vector gradiente de  $f$  en  $a$ ; o, en resumen, que

$$u = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \quad (\nabla f(a) \neq 0).$$

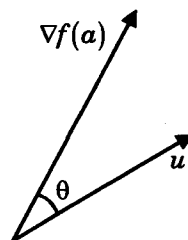


Figura 1.8

Tenemos así un resultado muy importante de uso frecuente en optimización, tanto lineal como no lineal, y que usualmente se emplea diciendo simplifícadamente que

*el vector gradiente de una función  $f$  en un punto  $a$  de su dominio se orienta en el sentido en el cual  $f$  crece más rápidamente*

- ii) La interpretación de  $\nabla f(a)$  que acabamos de enfatizar, compromete más a tener una idea intuitiva clara de la dirección del vector gradiente de una función  $f$  en un punto  $a$ . Es frecuente en economía trabajar gráficamente centrando la atención en los *conjuntos de nivel* de las funciones (que son las isocuantas en el caso de las funciones de producción, las curvas de indiferencia en el caso de las funciones de utilidad, las curvas de isocoste en el caso de las funciones de costo, etc.). Teniendo ésto en cuenta, es natural plantearnos el siguiente

**Problema:** Conociendo una curva de indiferencia de cierta función de utilidad de dos bienes, usual, según la cual *más es mejor*, y una *canasta* de bienes específica en ella ¿cómo representar adecuadamente el vector que indica el sentido más conveniente en el que se deben orientar los incrementos de los bienes para mejorar la utilidad más rápidamente?

**Solución:** Después del análisis hecho en (i) es evidente que de lo que se trata es de encontrar una representación adecuada del vector gradiente de la función de utilidad, calculado en la *canasta* de bienes que se conoce. (Obviamente la *elección* ha de hacerse entre vectores del mismo tamaño, ya que aunque un vector no estuviera con el sentido óptimo, siendo suficientemente grande puede alcanzar una curva de nivel superior a otro vector que tiene el sentido óptimo pero tamaño reducido).

Como se hace referencia a una función de utilidad usual, según los supuestos habituales en la teoría del consumidor la curva de indiferencia será como la que se muestra en la Figura 1.9, en la que además se indica el punto  $(a_1, a_2)$  correspondiente a la canasta conocida. Es claro que si se conociera la forma específica de la función de utilidad, al cono-

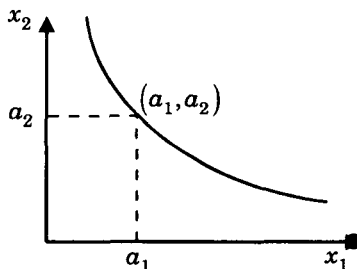


Figura 1.9

cer ya los valores numéricos de  $a_1$  y  $a_2$ , bastaría obtener el vector  $\nabla u(a_1, a_2) = (u_{x_1}(a_1, a_2), u_{x_2}(a_1, a_2))$  y lo representaríamos como un segmento orientado que parte de  $(a_1, a_2)$ ; pero al no conocer específicamente la función ¿qué sentido debe tener el segmento que represente a  $\nabla u(a_1, a_2)$ ? Por las consideraciones habituales que se hacen en la función de utilidad y coherentes con *más es mejor*, lo único claro es que los componentes del vector gradiente son positivos, lo cual gráficamente nos da infinitas posibilidades pues todo segmento que parta de  $(a_1, a_2)$  y tenga pendiente  $\frac{u_{x_2}(a_1, a_2)}{u_{x_1}(a_1, a_2)}$  (o sea que apunte *hacia arriba y hacia la derecha*) podría representar a  $\nabla u(a_1, a_2)$ ; sin embargo, siendo tan importante el vector gradiente debemos tener mayor precisión al representarlo. Una buena referencia será la recta tangente a la curva de indiferencia, que pasa por el punto  $(a_1, a_2)$ . Como esta recta es fácilmente representable, si supiéramos, por ejemplo, qué ángulos forman esta recta y el segmento correspondiente a  $\nabla u(a_1, a_2)$ , podríamos precisar más. Hasta ahora sólo conocemos que la pendiente de este segmento es

$$m_{\nabla} = \frac{u_{x_2}(a_1, a_2)}{u_{x_1}(a_1, a_2)} \quad (1.2.11)$$

Asumiendo que la curva de indiferencia define implícitamente una relación funcional  $x_2 = g(x_1)$  entre  $x_1$  y  $x_2$  (que ya está reflejada en la Fig. 1.9) y usando el cálculo diferencial de funciones de dos variables, podemos calcular la pendiente de la tangente a la curva en el punto  $(a_1, a_2)$ , que es la derivada de  $g$  respecto a  $x_1$ , calculada en  $(a_1, a_2)$  y que por simplicidad la denotaremos sólo  $\frac{dx_2}{dx_1}$ .

Así, como la ecuación de la curva de indiferencia en la que se encuentra la "canasta"  $(a_1, a_2)$ , es

$$u(x_1, x_2) = u(a_1, a_2) = \text{constante}$$

derivando implícitamente respecto a  $x_1$  y calculando las derivadas en  $(a_1, a_2)$ , tenemos

$$u_{x_1}(a_1, a_2) + u_{x_2}(a_1, a_2) \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

de donde

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}(a_1, a_2)}{u_{x_2}(a_1, a_2)} \quad (1.2.12)$$

Observando (1.2.11) y (1.2.12), concluimos que la recta tangente a la curva de indiferencia, en el punto correspondiente a la “canasta” dada, es perpendicular al segmento que representa al vector gradiente de la función de utilidad en ese punto, pues el producto de sus pendientes es  $-1$ . En consecuencia, la respuesta a la pregunta del problema se ilustra en la Figura 1.10:

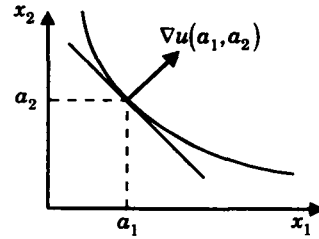


Figura 1.10

Se traza la recta tangente a la curva de indiferencia en el punto dado, y el vector gradiente quedará bien representado—salvo el tamaño— por un segmento, orientado hacia arriba y hacia la derecha, perpendicular a tal recta, en el punto considerado.

Problema similar podría plantearse considerando 3 bienes, y la solución nos conduciría a afirmar que el vector gradiente de la función de utilidad,  $\nabla u(a)$ , en la “canasta” considerada  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,

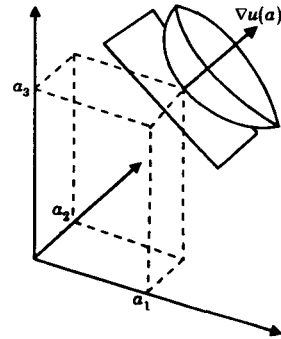


Figura 1.11

es perpendicular al *plano tangente a la superficie de indiferencia*, en el punto  $a$  (Fig. 1.11). El tratamiento matemático  $n > 3$  es esencialmente el mismo que para  $n = 3$ , y se obtiene que el hiperplano tangente al conjunto de nivel correspondiente al punto  $a \in \mathbb{R}^n$  es el conjunto

$$T_a = \{x \in \mathbb{R}^n / \nabla u(a) \cdot (x - a) = 0\} \quad (1.2.13)$$

Cabe subrayar que en todos los casos la tangencia no es al gráfico de la función de utilidad, sino a un conjunto de nivel de la función, en este caso conocido como *conjunto de indiferencia*.

6. Con las observaciones hechas y lo que acabamos de ver sobre plano tangente, podemos visualizar mejor la derivada de una función en un punto, como la transformación lineal que mejor aproxima el comportamiento de la función cerca a tal punto. Veamos :

*¿Cuál es la ecuación del hiperplano tangente al gráfico de una función  $f$ , de  $n$  variables, correspondiente a un punto  $a$ , en el que  $f$  es diferenciable?*

Como la caracterización que se hace en  $T$  es para hiperplanos tangentes a un conjunto de nivel, adecuemos la información:

El gráfico de  $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es también el gráfico del conjunto de nivel 0 de la función real  $\omega$  de  $n + 1$  variables, definida por

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{n+1}$$

(empleando  $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , tenemos, evidentemente

$$\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \omega(x, x_{n+1}) = 0\} = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

En consecuencia, podemos responder a la pregunta formulada empleando (1.2.13) para la función  $\omega$ ; así

$$\begin{aligned} T_a &= \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \nabla\omega(a).(x - a) = 0\} = \\ &= \left\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) - 1(x_{n+1} - a_{n+1}) = 0 \right\} \\ &= \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \nabla f(a).(x - a) - (x_{n+1} - a_{n+1}) = 0\} \\ &= \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = a_{n+1} + \nabla f(a).(x - a)\}. \end{aligned}$$

Es claro que  $a_{n+1} = f(a)$  y entonces reescribimos la ecuación del hiperplano tangente obtenida:

$$x_{n+1} = f(a) + Df(a)(x - a) \tag{1.2.14}$$

Así como esta expresión es análoga a (1.1.4), las correspondientes análogas a (1.1.1), (1.1.2) y (1.1.3), para un vector  $h \in \mathbb{R}^n$  de componentes suficientemente pequeños, son:

$$f(a+h) - f(a) \approx T(h) = Df(a)(h) \quad (1.2.15)$$

$$f(a+h) \approx f(a) + Df(a)(h) \quad (1.2.16)$$

$$\Delta f \approx df = Df(a)(dx) \quad (1.2.17)$$

y los comentarios hechos sobre la aproximación lineal en la Sección 1.1 son generalizables de manera natural, considerando ahora el mayor número de variables.

En la expresión (1.2.17) debe entenderse que

$$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

y la forma más frecuente de presentarla y usarla es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (1.2.18)$$

Una ilustración geométrica para el caso  $n=2$  se da en la Figura 1.12, que es la análoga correspondiente a la Figura 1.4

La figura también nos permite visualizar la unicidad del plano tangente en  $(a, f(a))$  —coherente con la unicidad de la transformación lineal  $T$ — al haber asumido diferenciabilidad de  $f$  en  $a$ .

Si el gráfico de una función tiene un punto anguloso, o una cresta angulosa, entonces, tal función *no* es

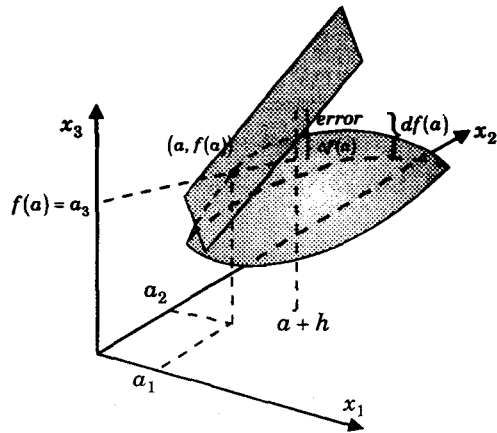


Figura 1.12

diferenciable en los puntos correspondientes, pues gráficamente se ve (seguimos con  $n = 2$ ) que no es posible tener un plano tangente (único) en tales puntos (Fig. 1.13 y 1.14).

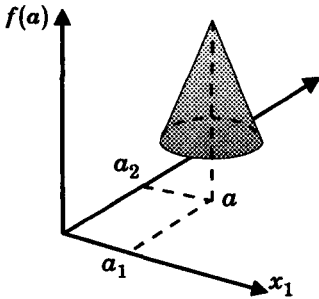


Figura 1.13

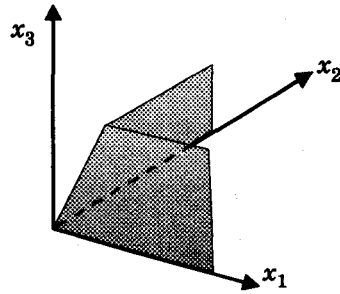


Figura 1.14

El gráfico mostrado en la Figura 1.14 corresponde a una función del tipo

$$f(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{s}\right\},$$

que en la teoría económica es conocida como una *función de producción de Leontief*. Estas funciones no son diferenciables, por ejemplo en  $(r, s)$  (en general, no son diferenciables en los puntos del rayo que parte de  $(0, 0)$  y pasa por  $(r, s)$ , que es el rayo de uso eficiente de los factores de producción). Es un ejercicio interesante hacer la demostración analítica (es sencillo usar la definición de derivada parcial dada en (1.2.1) para demostrar que no existe  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(r, s)$ ). Podemos ver fácilmente que consi-

derando una función de producción de Leontief con 3 o más factores productivos, ya tenemos un ejemplo concreto de función de más de 2 variables que tiene un subconjunto de su dominio en cuyos puntos *no* es diferenciable y que —obviamente— no es posible ilustrar gráficamente.

7. Cuando una función de  $n$  variables es diferenciable en todos los puntos de su dominio, decimos simplemente que es diferenciable.
8. Finalmente, como en el caso de funciones de una sola variable, se demuestra que toda función diferenciable es continua. Funciones cuyos gráficos son como los mostrados en las figuras 1.13 y 1.14 son algunos ejemplos de que la proposición recíproca es falsa; es decir, que existen funciones que son continuas pero que no son diferenciables.

### Ejercicios 1.9

- Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$ 
  - Hallar la derivada de  $f$  en  $p = (1, 1)$ .
  - ¿Existe un punto  $\bar{x}$  en el cual  $Df(\bar{x}) = (1, 3)$ ? ¿Tal punto  $\bar{x}$  es único?

- Analizar si la función

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \min\{x_1, x_2\}$$

es diferenciable

- Hallar, si existe,  $D_v g(3, 2)$ , donde

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1 x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$v = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

- Dada  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2} & , (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

hallar, si existen, sus derivadas parciales en  $(0, 0)$ . ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

- Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = x^2$ 
  - Hallar  $\nabla f(-1)$ ,  $\nabla f(0)$ .
  - Graficar  $f$  e interpretar los valores hallados en (a).
- Sea la función  $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ;
  - Esbozar un "mapa" de curvas de nivel de  $f$ .
  - Esbozar el gráfico de  $f$ .
  - Representar gráficamente  $\nabla f(1, 1)$ ,  $\nabla f(4, 1)$  y  $\nabla f(1, 4)$ .
  - Representar gráficamente  $\nabla f(5, 5)$ ,  $\nabla f(3, 2)$  y  $\nabla f(3, 12)$ .
  - ¿Qué relación existe entre las respuestas a c) y d)? ¿Tal relación sería similar con cualquier función diferenciable de dos variables, o que particularidad (no muy exigente) debería cumplir?

f) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de  $f$ , en el punto  $(4, 1)$ . Ilustrar gráficamente.

7. Sea la función

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} - x_3, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

- a) Esbozar el gráfico de la superficie de nivel 0
- b) Esbozar los gráficos de las superficies de nivel  $-1, 1$  y  $-2$
- c) Representar gráficamente  $\nabla g(1, 1, 1), \nabla g(4, 1, 2), \nabla g(1, 1, 0)$  y  $\nabla g(1, 1, 2)$  (notar que no todos los puntos están en la misma superficie de nivel)
- d) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel en el punto  $(4, 1, 2)$ . Ilustrar gráficamente.

8. Ilustrar gráficamente la vinculación entre los problemas 6 y 7.

9. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curvade nivel de  $u(x, y) = x + y^2$  en el punto  $(1, 2)$ . ¿Es verdad que la recta  $4x + y = 20$  es tangente a la curva de nivel que pasa por  $(4, 1)$ ? ¿Por qué?. Determinar – si es posible– el punto de tangencia entre la recta  $6x + 4y = 60$  y una curva de nivel de  $u$ . Ilustrar gráficamente.

10. Dada la siguiente función de producción

$$f(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

- a) Graficar algunas curvas de nivel, si  $\alpha = \frac{1}{3}$
- b) Si  $K = 100, L = 144$  y  $\alpha = 0.5$  ¿Qué incrementa más la producción; incrementar  $K$  en 5% y  $L$  en 4% o  $K$  en 6% y  $L$  en 3%. Justificar.

11. Dada la función de producción

$$f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}$$

Si los factores  $K, L$  y  $T$  son capital, trabajo y tierra respectivamente, y se está produciendo con  $K = 100, L = 16$  y  $T = 81$ .

- a) Determinar el efecto en el trabajo si se disminuye la disponibilidad de capital en 10 unidades y es imposible modificar la disponibilidad de tierra, pero se desea mantener el nivel de producción.
- b) Determinar el efecto en el capital si la disponibilidad de tierra disminuye en 5 unidades y la de trabajo en 2, pero se desea mantener el nivel de producción.

### 1.3 DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIAS VARIABLES REALES

Estudiaremos ahora la diferenciabilidad de funciones de varias variables reales (dominio en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ) y que toman valores vectoriales (rango en  $\mathbb{R}^m$ , con  $m \geq 1$ ). Este tipo de funciones se usa en los modelos económicos con más frecuencia que la que usualmente se piensa, pero no es frecuente presentarlas de esta manera, sino a través de sus funciones componentes, separadas. Por ejemplo, al estudiar el problema del consumidor y determinar las canastas óptimas, considerando sólo 2 bienes como es usual, las condiciones que se imponen a la función de utilidad son tales que se obtienen funciones de demanda marshalliana que para cada "juego de precios"  $p_1$  y  $p_2$  y nivel de ingreso  $I$ , hacen corresponder las cantidades del bien 1 y del bien 2 que maximizan la utilidad del consumidor. Tales funciones podemos denotarlas  $x_1$  y  $x_2$  y entonces tenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(p_1, p_2, I) \\x_2 &= x_2(p_1, p_2, I)\end{aligned}$$

Si nos referimos a una función de demanda de este consumidor, que recoja este planteamiento, tenemos la función vectorial  $x$  que a cada "juego de precios"  $p_1$  y  $p_2$  y nivel de ingreso  $I$ , le hace corresponder las cantidades  $x_1(p_1, p_2, I)$  y  $x_2(p_1, p_2, I)$  que maximizan su utilidad; así tenemos la función  $x$  definida por

$$x(p_1, p_2, I) = (x_1(p_1, p_2, I), x_2(p_1, p_2, I))$$

que evidentemente es una función que tiene tres variables reales y que toma valores vectoriales, en este caso en  $\mathbb{R}^2$ . Las funciones  $x_1$  y  $x_2$  se denominan funciones componentes de  $x$ . Es claro que al considerar  $n$  bienes en la economía, esta función de demanda sería de  $n+1$  variables (dominio en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) y tomaría valores vectoriales en  $\mathbb{R}^n$  (rango en  $\mathbb{R}^n$ ).

Situación similar a la presentada se da con más frecuencia aún al plantear modelos macroeconómicos, pues en las ecuaciones del modelo se están considerando implícitamente funciones componentes de una función vectorial de varias variables.

En general, una función vectorial de varias variables reales, es una función  $F$  cuyo dominio es un conjunto  $A$ , contenido en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , y cuyo conjunto de llegada es  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ . Simbólicamente:

$$\begin{aligned}F: A &\rightarrow \mathbb{R}^m \\(x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}$$

Como cada número real  $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ , está bien determinado al asignar valores a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se tienen las funciones componentes, de dominio  $A$ ,

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f^m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

y una manera útil de representar la función  $F$  es

$$F = (f^1, f^2, \dots, f^m)$$

**Ejemplo 1.10:** Si  $F$  está definida por

$$F(x_1, x_2) = (4x_1x_2, x_1^2 + x_2^2, \sqrt{x_2})$$

es claro que

- El dominio de  $F$  está en  $\mathbb{R}^2$  y el rango de  $F$  en  $\mathbb{R}^3$ ; así,  $F$  asigna un vector de  $\mathbb{R}^3$  a cada vector de  $\mathbb{R}^2$  que se escoja en su dominio.
- En este caso concreto, el dominio  $A$  de  $F$  es el conjunto

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq 0\}.$$

Esta restricción está dada por la presencia de  $\sqrt{x_2}$  en una de las funciones componentes de  $F$ . Evidentemente, dado el vector  $(1, 4) \in A \subset \mathbb{R}^2$ , el vector que  $F$  le asigna es  $F(1, 4) = (16, 17, 2) \in \mathbb{R}^3$  (Fig. 1.15); sin embargo, dado el vector  $(3, -5)$  que es de  $\mathbb{R}^2$ , pero que no pertenece al conjunto  $A$ ,  $F$  no puede asignarle vector alguno de  $\mathbb{R}^3$ , pues según la definición de  $F$ , la tercera componente resultaría un número imaginario.

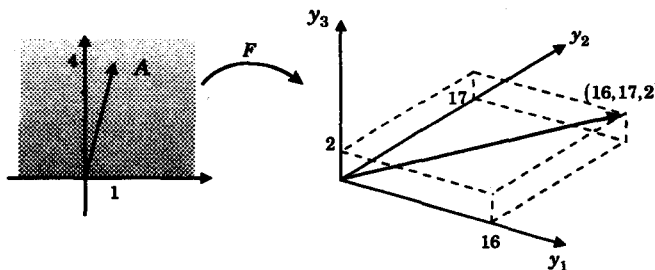


Figura 1.15

– Las funciones componentes de  $F$  son

$$\begin{aligned}f^1(x_1, x_2) &= 4x_1x_2 \\f^2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\f^3(x_1, x_2) &= \sqrt{x_2}\end{aligned}$$

### Aplicación 1.11

Sea el modelo macroeconómico

$$\begin{aligned}Y &= C_0 + C(Y, r) + I_0 + I(Y, r) + G_0 \\L_0 + L(Y, r) &= M_0\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

en el que la primera ecuación es de la curva conocida con el nombre de *IS* y relaciona el ingreso ( $Y$ ) con el consumo ( $C$ ), la inversión ( $I$ ) –que dependen a su vez del ingreso y de la tasa de interés ( $r$ )– y la demanda del gobierno  $G_0$ . La segunda ecuación es de la curva conocida con el nombre de *LM* y relaciona la demanda monetaria ( $L$ ) con la oferta monetaria  $M_0$ , siendo esta última exógena (al igual que  $C_0$ ,  $I_0$ ,  $G_0$  y  $L_0$ ) y dependiendo  $L$  de  $Y$  y de  $r$ .

Podemos reescribir el modelo haciendo explícita una función  $F$  de dos variables reales (las variables  $Y$ ,  $r$  que son endógenas en el modelo) y que toma valores vectoriales en  $\mathbb{R}^2$ ; así, es claro que (1.3.1) es equivalente a

$$\begin{aligned}Y - C_0 - C(Y, r) - I_0 - I(Y, r) - G_0 &= 0 \\L_0 + L(Y, r) - M_0 &= 0\end{aligned}$$

Si a los primeros miembros de estas ecuaciones los llamamos  $f^1(Y, r)$  y  $f^2(Y, r)$  respectivamente, ya tenemos las componentes de la función  $F = (f^1, f^2)$ ; es decir

$$F(Y, r) = (Y - C_0 - C(Y, r) - I_0 - I(Y, r) - G_0, L_0 + L(Y, r) - M_0)\tag{1.3.2}$$

y entonces (1.3.1) se puede escribir

$$F(Y, r) = 0,$$

donde, obviamente el 0 es el cero de  $\mathbb{R}^2$  (o sea  $(0, 0)$ ).

La utilidad de esta aparente complicación se verá al hacer análisis ya sea de estática comparativa o dinámica, pues en ambos casos se necesitará calcular la derivada de la función  $F$  en el punto de equilibrio.

**Observación 1.12**

Para las funciones vectoriales, de variable vectorial,  $F$ , podemos definir – de manera similar a cómo se hace para funciones de valores reales– lo que significa  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$  y lo que significa que una función  $F$  sea continua en un punto  $a$  de su dominio, o que sea continua en todo su dominio; sin embargo no nos detendremos a hacerlo formalmente, pues las ideas intuitivas son las mismas y se puede demostrar que una función  $F$  es continua si y sólo si cada una de sus funciones componentes  $f^i$  lo son. Así tenemos un *punte* que facilita el tratamiento de la continuidad de las funciones vectoriales de variable vectorial<sup>1</sup>. También la diferenciabilidad de las funciones  $F$ <sup>2</sup> pueden ser definidas y tratadas a través de sus funciones componentes, pero para que quede clara la generalización de la idea intuitiva de aproximación lineal, presente en las definiciones 1.1 y 1.5 para funciones reales de una y de varias variables respectivamente, damos la siguiente definición:

**Definición 1.13** Sea  $F = (f^1, f^2, \dots, f^m)$  una función de valores vectoriales en  $\mathbb{R}^m$  y de  $n$  variables reales, con una vecindad  $B_r(a)$  del punto  $a$  contenida en su dominio. Decimos que  $F$  es diferenciable en  $a$  si y sólo si existe una función lineal  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de modo que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (\|h\| < r)$$

La función lineal  $T$  se denomina **derivada de  $F$  en  $a$**  y su imagen  $T(h)$ , al aplicarla en  $h$ , se denomina **diferencial de  $F$  en  $a$** .

**Observaciones 1.14**

1. Es completamente pertinente una observación similar a la primera de Observaciones 1.6

---

<sup>1</sup> El lector interesado en el tratamiento formal puede consultar Spivak, M.: [20].

<sup>2</sup> El lector habrá notado que con  $F$  mayúscula estamos simbolizando funciones vectoriales de variable vectorial y con minúscula a sus componentes. También mantendremos el convenio mayúscula-minúsculas para función-componentes, con otras letras.

2. Toda función lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ , tendrá sus funciones componentes también lineales, siendo éstas  $m$  funciones reales de  $n$  variables reales y en consecuencia funciones como las comentadas en 2 de Observaciones 1.6. Así; un ejemplo de función lineal  $L$  de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  es

$$L(h_1, h_2) = (4h_1 + 5h_2, 3h_2, -h_1 + 0.4h_2)$$

3. Recordamos nuevamente que existe una correspondencia biunívoca entre funciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  y matrices de orden  $m \times n$  asociadas a ellas mediante las bases usuales en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ ; así, la matriz que le corresponde a la función  $L$  dada como ejemplo en el punto anterior es

$$M_L = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0.4 \end{bmatrix};$$

y es claro que

$$L(h_1, h_2) = M_L \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

4. También se demuestra que la función lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  de la definición es única; se la denota  $DF(a)$  o  $F'(a)$  y se puede demostrar que la matriz de orden  $m \times n$ , referida a las bases usuales, que la identifica es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

Esta es la *matriz jacobiana* de  $F$  en  $a$  y siendo cada elemento  $ij$  de ella la derivada parcial de la  $i$ -ésima función componente de  $F$  respecto a la  $j$ -ésima variable, se la denota abreviadamente por

$$\left[ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right]_{m \times n}$$

5. También, abreviando la expresión la *matriz de orden  $m \times n$ , referida a las bases usuales que corresponde a la transformación lineal  $DF(a)$*  es

$$\left[ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right]_{m \times n}, \text{ escribimos}$$

$$DF(a) = \left[ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right]_{m \times n} \tag{1.3.3}$$

y decimos que la derivada de la función  $F$  en el punto  $a$ , es la matriz jacobiana de  $F$ , calculada en  $a$ .

**Ejemplo 1.15** Retomando la función  $F$  dada en el ejemplo 1.10,

$$F(x_1, x_2) = (4x_1x_2, x_1^2 + x_2^2, \sqrt{x_2}),$$

calculemos la derivada de  $F$  en el punto  $a = (1, 4)$ , que como podemos ver en la Figura 1.12, tiene una vecindad  $B_r(a)$  contenida en el dominio  $A$  de  $F$  (basta tomar, por ejemplo  $r = 2$ ).

Como ya conocemos las funciones componentes de  $F$ , obtengamos sus correspondientes derivadas parciales; es decir, las componentes de  $DF(x_1, x_2)$ , que es la matriz jacobiana de  $F$  en un punto cualquiera  $(x_1, x_2)$  del interior de  $A$

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_2$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}};$$

así

$$DF(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_2 & 4x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}$$

y en consecuencia

$$DF(1,4) = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & 8 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

y debe quedar claro que la derivada de  $F$  en el punto  $(1,4)$  es la transformación lineal  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(h_1, h_2) = (16h_1 + 4h_2, 2h_1 + 8h_2, 0.25h_2).$$

y que la diferencial de  $F$  en  $(1,4)$ , aplicada en el vector  $(h_1, h_2)$ , es el vector

$$(16h_1 + 4h_2, 2h_1 + 8h_2, 0.25h_2).$$

Como ya dijimos antes, es usual que el vector  $h$  sea llamado vector de incrementos y se denote

$$h = dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n).$$

Usando esta notación y la adoptada para la diferencial de una función en un punto dado (observación 5 de la Sección 1.1), tenemos

$$dF((1,4); dx) = (16dx_1 + 4dx_2, 2dx_1 + 8dx_2, 0.25dx_2)$$

y observamos que las componentes de  $dF((1,4); dx)$  son precisamente las diferenciales de las funciones componentes de  $F$ , en el mismo punto  $a = (1,4)$  y aplicadas en el vector de incrementos  $dx = (dx_1, dx_2)$ .

6. Que la derivada de una función en un punto es la función lineal que mejor se aproxima a su comportamiento, cerca del punto, es particularmente útil cuando se trata de funciones vectoriales de varias variables reales, ya que son éstas las que están presentes en muchos modelos económicos —sobre todo macroeconómicos—. No es necesario restringirse a trabajar sólo con funciones lineales, ya que si no lo son, sus aproximaciones lineales nos darán buena información.

### Aplicación 1.16

Una consideración dinámica del modelo dado en la Aplicación 1.11 es asumir que tanto el ingreso como la tasa de interés varían en el tiempo y lo hacen proporcionalmente al exceso de demanda en los mercados de bienes y de dinero respectivamente; así

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= k_1(C_0 + C(Y, r) + I_0 + I(Y, r) + G_0 - Y); & k_1 > 0 \\ \frac{dr}{dt} &= k_2(L_0 + L(Y, r) - M_0); & k_2 > 0 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Evidentemente, (1.3.3) es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden cuyas soluciones nos darán las trayectorias temporales del ingreso y de la tasa de interés y podremos ver si éstas convergen o no a un punto de equilibrio; sin embargo el sistema (1.3.3) no necesariamente es lineal y entonces puede ser muy complicado resolverlo. Es usual considerar, por ejemplo, que la función es lineal y que la inversión depende sólo de la tasa de interés; pero estos son supuestos simplificadores innecesarios que hacen que el modelo describa con menos exactitud la realidad. Basta que adoptemos el supuesto plausible que la propensión marginal a consumir disminuye a medida que crece el ingreso (o sea  $\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} < 0$ ) para tener una función consumo no lineal y en consecuencia (1.3.3) no lineal. Teniendo un sistema no lineal se puede estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio analizando la matriz jacobiana – calculada en ese punto– de la función vectorial del sistema; así (1.3.3) podemos escribirlo vectorialmente

$$\begin{bmatrix} \frac{dY}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(C_0 + C(Y, r) + I_0 + I(Y, r) + G_0 - Y) \\ k_2(L_0 + L(Y, r) - M_0) \end{bmatrix}; \tag{1.3.4}$$

o, más brevemente, según lo establecido en la Aplicación 1.11,

$$\begin{bmatrix} \frac{dY}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 f^1(Y, r) \\ k_2 f^2(Y, r) \end{bmatrix}, \tag{1.3.5}$$

que también podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = G(Y, r), \tag{1.3.6}$$

donde  $G(Y, r) = (k_1 f^1(Y, r), k_2 f^2(Y, r))$ , y el estudio de estabilidad de un punto de equilibrio  $(Y^*, r^*)$  se hace analizando la matriz jacobiana  $DG(Y^*, r^*)$ .

Podemos hacer el análisis usando la misma función  $F$  definida en la Aplicación 1.11, si escribimos (1.3.5) con un producto matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dY}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1(Y,r) \\ f^2(Y,r) \end{bmatrix}; \quad (1.3.7)$$

así, otra manera de escribir (1.3.6) es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = K F(Y,r), \quad (1.3.8)$$

y el estudio de estabilidad de  $(Y^*, r^*)$  se hace analizando la matriz jacobiana  $DF(Y^*, r^*)$ .

Lo expuesto tiene sustento riguroso en la teoría de los sistemas dinámicos<sup>1</sup>; sin embargo podemos intuir su validez recordando que la derivada de una función en un punto es la aproximación lineal de tal función cerca de ese punto y así el estudio de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal lo hacemos estudiando la estabilidad de ese punto de equilibrio en un *sistema lineal aproximado*, cuya matriz de coeficientes es precisamente la matriz jacobiana calculada en tal punto. En el sistema (1.3.6) llamemos  $x^*$  al punto de equilibrio  $(Y^*, r^*)$  y  $x = x^* + h$  a cualquier punto  $(Y, r)$ , vecino de  $(Y^*, r^*)$  ( $h$  es un vector pequeño de  $\mathbb{R}^2$ ); así (1.3.6) podemos reescribir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= G(x) \\ &= G(x^* + h) \\ &\approx G(x^*) + DG(x^*)h \\ &= G(x^*) + DG(x^*)(x - x^*) \\ &= 0 + DG(x^*)x - DG(x^*)x^*, \end{aligned}$$

y tenemos el *sistema lineal aproximado* de (1.3.6):

$$\frac{dx}{dt} = DG(x^*)x - DG(x^*)x^*, \quad (1.3.9)$$

---

<sup>1</sup> Ver por ejemplo: Hirsh-Smale [11]

7. Las observaciones 7 y 8 correspondientes a funciones reales de varias variables, hechas en la sección anterior son igualmente válidas en este caso, con la restricción obvia de no poder ilustrar gráficamente, ni para el caso de funciones con dos variables y dos componentes, que existen funciones continuas que no son diferenciables.
8. Una observación final es que la existencia de la matriz jacobiana de una función  $F$  en un punto, no garantiza la diferenciabilidad de  $F$  en tal punto. Para ilustrar tomemos un caso sencillo, con  $n = 2$ ,  $m = 1$  y la función  $f$  definida por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Aplicando la definición de derivada parcial –y aún de manera más general la de derivada direccional– es fácil demostrar que las derivadas parciales de  $f$  en  $(0, 0)$  son ambas nulas (en verdad lo son todas las derivadas direccionales de  $f$  en  $0$ ) y en consecuencia la matriz jacobiana de  $f$  en  $(0, 0)$  es  $[0 \ 0]$ ; sin embargo también se puede probar que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$  y por consiguiente *no* es diferenciable en  $(0, 0)$ .

Cabe anotar que difícilmente se presentan este tipo de funciones en la teoría económica.

### Ejercicios 1.17

1. Sea  $f(x, y, z) = \left( 3x^2y, 1 + \frac{1}{xyz}, \frac{1}{xy^2 + yz^2}, x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} \right)$
- Hallar  $Df(x, y, z)$
  - Hallar  $Df(1, 1, 1)$ ,  $Df(1, 1, -1)$  y  $Df(-1, -1, 1)$
  - Emplear una de las derivadas halladas en (b) para obtener una aproximación de  $f(0.9, 0.8, 1.2)$ . Comparar el resultado obtenido con el que se obtenga directamente empleando calculadora.
2. Sea  $T(x, y, z, w) = (2x - 5y + w, 5z - 4y + 3w - x)$
- Verificar que la matriz jacobiana de  $T$  en cualquier punto  $(x, y, z, w)$  de  $\mathbb{R}^4$  coincide con la matriz de orden  $2 \times 4$  asociada a  $T$ , mediante las bases usuales de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^4$

- b) Hallar  $T(1.2, 0.8, 2.1, 3.9)$  y comparar el valor obtenido con el que se obtenga empleando  $dT((1, 1, 2, 4); (0.2, -0.2, 0.1, -0.1))$ . Explicar el resultado de la comparación.

3. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1x_2^2 - 7x_2^3 - 1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 5x_2$$

- a) Identificar la función  $F$  según la cual el sistema puede escribirse  $\frac{dx}{dt} = F(x)$ , siendo  $x = (x_1, x_2)$ .
- b) Determinar el punto  $x^*$  tal que  $F(x^*) = 0$  (punto de equilibrio del sistema).
- c) Determinar  $DF(x^*)$
- d) Obtener un sistema lineal aproximado al dado, para puntos vecinos de  $x^*$

## 1.4 MATRIZ HESSIANA DE UNA FUNCION REAL DE VARIAS VARIABLES REALES

Recordemos que al trabajar con funciones reales de una variable real, en la teoría de máximos y mínimos juega un papel muy importante la segunda derivada. Algo similar ocurrirá cuando estudiemos máximos y mínimos de funciones reales de varias variables reales y ésta es una razón más para respondernos a la pregunta que quizás el lector ya se la ha planteado: *¿cómo es la segunda derivada de una función de varias variables?*. Ciertamente, la respuesta rigurosa no es muy sencilla y requiere trabajar en espacios de funciones<sup>1</sup>, pero con lo estudiado en las secciones anteriores, podemos encontrar una expresión adecuada para la segunda derivada de una función real de variable vectorial, calculada en un punto determinado: obtendremos una matriz cuadrada, usualmente simétrica, llamada **matriz hessiana** de tal función, en tal punto.

---

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo: Lima, E. [15].

Veamos: Sea  $f$  una función real, definida en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  un punto de  $U$  en el cual  $f$  es diferenciable. Sabemos que su derivada en el punto  $a$  es una matriz fila de orden  $1 \times n$ , como lo escribimos en (1.2.6) y que la podemos identificar con un vector fila, como en (1.2.7):

$$Df(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Si la función  $f$  es diferenciable no sólo en  $a$  sino en una vecindad abierta  $V$  de  $a$ , para cada  $x \in V$  podemos asociar, de manera única, el vector  $Df(x)$  de  $\mathbb{R}^n$  y así tenemos una función definida en  $V$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ , que de manera natural la denotamos  $Df$ :

$$Df: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Como  $V \subset \mathbb{R}^n$ , esta función es vectorial de variable vectorial, sus  $n$  funciones componentes son  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  y bien podría ser diferenciable en algún punto  $b \in V$ . En tal caso, su derivada en  $b$ , según (1.3.3) es la matriz jacobiana

$$D(Df)(b) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (b) \right]_{n \times n} \tag{1.4.1}$$

que identificamos como la **segunda derivada** de  $f$  en  $b$  y la denotamos  $D^2f(b)$ . Esta matriz es conocida como **matriz hessiana** de  $f$  en  $b$  y suele denotarse también  $H_f(b)$  o simplemente  $H(b)$ , si está claro de qué función se trata.

Hagamos más explícita esta matriz desarrollando (1.4.1):

$$D^2f(b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (b) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (b) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (b) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (b) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (b) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (b) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (b) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (b) \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Usando la notación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(b) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(b),$$

también podemos escribir (1.4.1) como

$$D^2 f(b) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(b) \right]_{n \times n} \quad (1.4.3)$$

o

$$D^2 f(b) = [f_{ij}(b)]_{n \times n} \quad (1.4.4)$$

donde, obviamente,

$$f_{ij}(b) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(b) \quad (1.4.5)$$

**Ejemplo 1.18:** Retomemos la función de producción dada en la Aplicación 1.7:

$$f(K, L) = 6L^{1/3}K^{2/3}.$$

Sabemos que  $Df(K, L) = \left[ 4\left(\frac{L}{K}\right)^{1/3}, 2\left(\frac{K}{L}\right)^{2/3} \right]$ , para  $K \neq 0$ ,  $L \neq 0$  y podemos

ver que existe una vecindad abierta  $V$  del punto  $(64, 27)$ , en donde queda definida la función

$$Df: V \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(K, L) \rightarrow Df(K, L) = \left( 4\left(\frac{L}{K}\right)^{1/3}, 2\left(\frac{K}{L}\right)^{2/3} \right);$$

así, siendo diferenciables en  $V$  cada una de sus funciones componentes, también lo es  $Df$  y podemos calcular  $D^2 f(K, L)$ , con  $(K, L) \in V$

$$D^2 f(K, L) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \left( \frac{L}{K^4} \right)^{1/3} & \frac{4}{3} \frac{1}{(L^2 K)^{1/3}} \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(L^2 K)^{1/3}} & -2 \left( \frac{K^2}{L^5} \right)^{1/3} \end{bmatrix}$$

En particular,

$$D^2 f(64, 27) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{64} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & -\frac{32}{243} \end{bmatrix}$$

**Observaciones 1.19**

1. La simetría de la matriz hessiana del ejemplo anterior no es mera casualidad, pero tampoco se puede decir que toda matriz hessiana es simétrica. Es claro que tal situación se tendrá cuando para todo  $j$  y todo  $i$ , de 1 a  $n$ , se cumpla

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b),$$

y esto ocurrirá cuando las funciones  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  sean continuas en un conjunto abierto que contenga al punto  $b$ . Esta condición usualmente se cumple y por ello suele dársele poca importancia al orden en que se tomen las variables para calcular las derivadas parciales de segundo orden, obteniéndose generalmente matrices hessianas simétricas.

2. Al trabajar con funciones reales de una variable, sabemos, por ejemplo, que si en un punto interior de su dominio su primera derivada es nula y la segunda negativa, entonces tal punto corresponde a un máximo relativo de la función. Algo similar ocurre también con funciones reales de variable vectorial; pero siendo la segunda derivada de éstas una matriz,

*¿Cómo interpretar que  $D^2 f(b)$  sea negativa o positiva?*

La respuesta la tenemos al identificar la matriz hessiana  $D^2 f(b)$  con la forma cuadrática que define; es decir, con la función  $\phi$ , real de variable vectorial, definida por

$$\phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] D^2 f(b) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}; \tag{1.4.6}$$

o en forma breve, llamando  $h$  a la variable vectorial:

$$\phi(h) = h^t D^2 f(b) h. \tag{1.4.7}$$

Es fácil verificar que tanto (1.4.6) como (1.4.7) son formas abreviadas de expresar el polinomio homogéneo de segundo grado:

$$\phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b) h_i h_j \quad (1.4.8)$$

Como las formas cuadráticas pueden ser *positivo definidas*, *negativo definidas*, *positivo semidefinidas*, *negativo semidefinidas* o *indefinidas*, y existen teoremas para caracterizarlas, haremos uso de tales conceptos y teoremas para referirnos al signo de  $D^2f(b)$ ; así, por ejemplo, que  $D^2f(b)$  sea **positivo definida** significa que el polinomio de segundo grado definido por (1.4.6), (1.4.7) o (1.4.8) toma valores siempre mayores que cero, excepto en el caso que el vector  $h$  sea el vector nulo de  $\mathbb{R}^n$ . En símbolos:

$$D^2f(b) \text{ es positivo definida} \Leftrightarrow \phi(h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (1.4.9)$$

Aplicando teoremas del álgebra tenemos criterios más operativos, haciendo uso de  $D^2f(b)$  como matriz simétrica; así:

$$D^2f(b) \text{ es positivo definida} \Leftrightarrow \text{todos los valores propios}^1 \text{ de } D^2f(b) \text{ son positivos.} \quad (1.4.10)$$

ó:

$$D^2f(b) \text{ es positivo definida} \Leftrightarrow \text{todos los menores principales de la esquina superior izquierda de } D^2f(b) \text{ son positivos.} \quad (1.4.10)$$

Un menor principal de orden  $\ell$ , de la esquina superior izquierda de  $D^2f(b)$  es el determinante  $M_\ell$ , definido por

$$M_\ell := \begin{vmatrix} f_{11}(b) & f_{12}(b) & \cdots & f_{1\ell}(b) \\ f_{21}(b) & f_{22}(b) & \cdots & f_{2\ell}(b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell 1}(b) & f_{\ell 2}(b) & \cdots & f_{\ell \ell}(b) \end{vmatrix};$$

<sup>1</sup> Los valores propios de una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  se obtienen resolviendo la ecuación polinómica  $|A - \lambda I| = 0$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

Así, el criterio dado en (1.4.11) podemos expresarlo equivalentemente por:

$$D^2f(b) \text{ es positivo definida} \Leftrightarrow M_\ell > 0 \text{ para } \ell = 1, 2, \dots, n \quad (1.4.12)$$

De manera similar y teniendo en cuenta que una forma cuadrática  $\psi$  es **negativo definida**  $\Leftrightarrow$  su opuesta  $-\psi$  es positivo definida, se puede demostrar que:

$$D^2f(b) \text{ es negativo definida} \Leftrightarrow \text{ todos los valores propios de } D^2f(b) \text{ son negativos.} \quad (1.4.13)$$

$$D^2f(b) \text{ es negativo definida} \Leftrightarrow M_1 < 0, M_2 > 0, \dots, (-1)^n M_n > 0, \dots \quad (1.4.14)$$

Que  $D^2f(b)$  sea **positivo (negativo) semidefinida**, significa que el polinomio de segundo grado definido por (1.4.6),(1.4.7) o (1.4.8) toma valores siempre mayores o iguales que cero (menores o iguales que cero), para cualquier vector  $h$  de  $\mathbb{R}^n$ . De manera similar a (1.4.10) y (1.4.13) se tiene que

$$D^2f(b) \text{ es positivo (negativo) semidefinida} \Leftrightarrow \text{ todos los valores propios de } D^2f(b) \text{ son mayores o iguales que cero (menores o iguales que cero).} \quad (1.4.15)$$

Que  $D^2f(b)$  sea **indefinida**, significa que el ya mencionado polinomio de segundo grado toma tanto valores positivos como negativos, según sea el vector  $h$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se puede demostrar que

$$D^2f(b) \text{ es indefinida} \Leftrightarrow \text{ algunos valores propios de } D^2f(b) \text{ son positivos y otros negativos.} \quad (1.4.16)$$

**Ejemplo 1.20**

Si  $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^4$ , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) =: f_1(x_1, x_2) = 2 - 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) =: f_2(x_1, x_2) = 2x_2 - 8x_2^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = f_{11}(x_1, x_2) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = f_{21}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{12}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = f_{22}(x_1, x_2) = 2 - 24x_2^3$$

y entonces

$$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 - 24x_2^3 \end{bmatrix}.$$

En particular

$$D^2 f(1, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

y vemos que  $M_1 = -2 < 0$  y  $M_2 = 8 > 0$ , por lo cual concluimos que  $D^2 f(1, \frac{1}{2})$  es negativo definida. Por otra parte

$$D^2 f(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y como  $M_1 = -2 < 0$  y  $M_2 = -4 < 0$ , en virtud de (1.4.12) y (1.4.14) concluimos que  $D^2 f(1, 0)$  no es positivo definida y tampoco negativo definida. Aplicando el criterio (1.4.16), vemos que es indefinida, pues resolviendo  $\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ ; o sea  $\lambda^2 - 4 = 0$ , obtenemos  $\lambda = 2$  o  $\lambda = -2$ , lo cual nos muestra un valor propio positivo y otro negativo de  $D^2 f(1, 0)$ .

3. Un teorema importante, empleando derivadas de orden superior de una función, es el Teorema de Taylor, muy conocido en el caso de funciones reales de variable real. Una versión de él es la siguiente:

Si  $f$  es una función real de variable real definida en el número  $a$  y con derivadas continuas hasta el orden  $k$  en un intervalo de extremos  $a$  y  $x$ , entonces

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)} f(a)(x-a)^{k-1} + R_k \quad (1.4.17)$$

donde  $R_k$  es llamado *resto de orden  $k$*  y está dado por

$$R_k = \frac{1}{k!} D^k f(c) (x - a)^k \tag{1.4.18}$$

siendo  $c$  un número del intervalo abierto  $]a, x[$ .

Una aplicación importante de este teorema es aproximar una función mediante una serie de potencias; resulta así, por ejemplo, que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + R_k$$

y siendo  $f(x) = e^x$  una función con todas sus derivadas continuas en todo intervalo de extremos 0 y  $x$ , la aproximación de  $e$  será mejor cuanto mayor sea el  $k$  que elijamos. (Al no conocerse el valor de  $c$  en la fórmula de  $R_k$ , el desarrollo se “corta” en el término anterior. El valor de  $k$  depende de la aproximación deseada).

El lector se habrá preguntado ya si un teorema similar existe para funciones vectoriales de variable vectorial. La respuesta es afirmativa, pero tal teorema no lo enunciaremos aquí. Evidentemente, necesitaríamos definir las derivadas de orden superior de esas funciones y eso va más allá de lo que nos proponemos en este libro; sin embargo, como ya hemos definido la derivada de segundo orden de funciones reales de variable vectorial, podemos dar una versión bastante simplificada:

Si  $f$  es una función real de variable vectorial en  $\mathbb{R}^n$ , con segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto  $U$ , en el cual está integralmente contenido el segmento en  $\mathbb{R}^n$  cuyos extremos son  $a$  y  $x$  (puntos de  $\mathbb{R}^n$ ), entonces

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{(x - a)^t D^2 f(c) (x - a)}{2!}, \tag{1.4.19}$$

donde  $c$  es un vector de tal segmento<sup>1</sup>.

En base a esta formulación, al asumir continuidad y diferenciabilidad adecuadas de  $f$  y sus derivadas y estar  $a$  y  $x$  suficientemente próximos, se considerará que  $D^2 f(c)$  y  $D^2 f(a)$  son casi iguales, y se usará la siguiente expresión:

$$f(x) \approx f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{(x - a)^t D^2 f(a) (x - a)}{2!} \tag{1.4.20}$$

---

<sup>1</sup> En el capítulo de convexidad veremos en detalle segmentos de  $\mathbb{R}^n$ . Ahora basta considerar los segmentos en el plano y el espacio para  $n = 2$  y  $n = 3$ , respectivamente e intuir su generalización para  $n \geq 4$

o, haciendo  $x - a = h$

$$f(a+h) \approx f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{h^2 D^2 f(a) h}{2!} \quad (1.4.21)$$

En este contexto, es fácil adecuar las expresiones (1.4.19) a (1.4.21) considerando sólo diferenciabilidad de primer orden. Así:

$$f(x) = f(a) + Df(c)(x-a) \quad (1.4.22)$$

$$f(x) \approx f(a) + Df(a)(x-a) \quad (1.4.23)$$

$$f(a+h) \approx f(a) + Df(a)h \quad (1.4.24)$$

Obviamente el vector  $c$  de (1.4.22) no necesariamente es el mismo que el vector  $c$  de (1.4.19).

El lector advertirá que (1.4.22) es la expresión del teorema del valor medio y que a (1.4.24) ya habíamos llegado en (1.2.16) al analizar el concepto de derivada.

**Ejemplo 1.21:** Ya vimos en el ejemplo 1.18 que siendo

$$f(K, L) = 6L^{1/3} K^{2/3},$$

tenemos

$$Df(K, L) = \left( 4 \left( \frac{K}{L} \right)^{1/3}, 2 \left( \frac{K}{L} \right)^{1/3} \right)$$

$$y \quad D^2 f(K, L) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \left( \frac{L}{K^4} \right)^{1/3} & \frac{4}{3} \frac{1}{(L^2 K)^{1/3}} \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(L^2 K)^{1/3}} & -2 \left( \frac{K^2}{L^5} \right)^{1/3} \end{bmatrix} \quad (K > 0, \quad L > 0)$$

Aplicando (1.4.24) podemos obtener un valor aproximado de  $f(65, 26)$ :

$$f(65, 26) = f(64 + 1, 27 - 1) = f(64, 27) + (1, -1).$$

Así  $a = (64, 27)$ ,  $h = (1, -1)$  y entonces

$$\begin{aligned} f(65, 26) &\approx f(64, 27) + Df(64, 27) \cdot (1, -1) \\ &= 216 + \left( 3, \frac{32}{9} \right) \cdot (1, -1) \\ &= 216 - 0.55 \\ &= 215.44 \end{aligned}$$

Aplicando (1.4.24) podemos mejorar la aproximación:

$$\begin{aligned} f(65,26) &\approx f(64,27) + Df(64,27) \cdot (1, -1) + [1 \quad -1] D^2 f(64,27) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= f(64,27) + \left(3, \frac{32}{9}\right) \cdot (1,1) + [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{64} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & -\frac{32}{243} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\approx 214.644 \end{aligned}$$

### Ejercicios 1.22

- La forma cuadrática  $H$  está definida por la matriz  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ , donde  $a$  y  $b$  representan números reales. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:
  - Todos los valores propios de  $M$  son números reales.
  - En ningún caso  $M$  tiene valores propios repetidos.
  - Si  $b = 2$ ,  $\{a \in \mathbb{R} / H \text{ es positivo definida}\} = ]1, +\infty[$
- Dada la función  $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , hallar el vector gradiente y la matriz hessiana de  $f$  en el punto  $(1, 16)$ .
- Dada la función  $f(x, y, z) = e^{2xy} + e^{-xz} - 2x^2 z^2 + xyz$ 
  - Aproximar el valor de  $f(0.1, 1.2, 1.98)$  empleando  $Df(0, 1, 2)$
  - Aproximar el valor de  $f(0.1, 1.2, 1.98)$  empleando  $D^2 f(0, 1, 2)$
  - ¿Es verdad que  $D^2 f(0, 1, 2)$  tiene todos sus valores propios positivos? ¿Es posible responder esto sin obtener los valores propios? ¿Cómo?
- Dada la función  $f(x, y) = 9x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ 
  - Hallar  $D^2 f(27, 64)$
  - Aproximar, usando derivadas  $f(28, 63.8)$ .
- Sea  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2^2$ 
  - Hallar  $D^2 f(-2, -3)$ ,  $D^2 f(3, 1)$  y  $D^2 f(-1, 4)$
  - Determinar en cada caso de (a) si las formas cuadráticas correspondientes son positivo definidas, negativo definidas o indefinidas.
- Si  $f(x, y, z) = \ln(x^2 y + xz)$ , ¿es verdad que  $D^2 f(1, 2, 2)$  es negativo definida?
- Dadas las funciones definidas en  $\mathbb{R}^2$ :
  - $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$
  - $g(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$
  - $h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$

Hallar los correspondientes desarrollos de Taylor, hasta el tercer sumando, alrededor de los puntos  $(0,1)$  para  $f$ ,  $(0,\pi)$  para  $g$ , y  $(2,1)$  para  $h$ . Con el desarrollo hallado para  $h$ , calcular aproximadamente  $h(198,101)$  y verificar —usando calculadora y haciendo reemplazo directo— que la aproximación obtenida es mejor que la que se obtiene empleando sólo la primera derivada.

## 1.5 LA REGLA DE LA CADENA

En teoría económica se encuentran problemas como el siguiente:

### Problema 1.23

Se sabe que un consumidor con una función de utilidad  $u$  “suficientemente buena”, determina de manera única la “canasta”  $x$  de bienes que maximiza tal utilidad, para determinados precios unitarios  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de los bienes y para determinado ingreso<sup>1</sup>. De esta manera puede definirse la llamada *función de utilidad indirecta* ( $v$ ) que a cada vector de precios unitarios y nivel de ingreso hace corresponder el nivel de utilidad  $u(x^*)$  y plantearse *¿cómo se afecta este nivel de utilidad cuando se modifica alguno de los precios unitarios o el nivel de ingreso del consumidor?*

*Solución:*

Evidentemente la respuesta la tendremos al obtener  $Dv(p,I)$ , pues ya sabemos que sus componentes son  $\frac{\partial v}{\partial p_i}$  y  $\frac{\partial v}{\partial I}$ , que evaluadas en el vector  $(p,I)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , correspondiente, nos darán la mejor aproximación cuantitativa de lo requerido.

Veamos entonces más claramente la vinculación entre  $(p,I)$ ,  $u$ ,  $x^*$  y  $v$ :

Conocidos  $p, I$  y  $u$ , queda determinado  $x^*$

$$(p,I) \rightarrow x^*$$

<sup>1</sup> Una función de utilidad que no es “suficientemente buena” pero que es admisible si se trabaja con el concepto más general de *correspondencias* puede tener conjuntos de indiferencia con infinitos puntos de tangencia con el hiperplano de presupuesto. En tal caso, para un vector  $(p,I)$  no habría una única canasta óptima.

Conociendo  $x^*$ , queda determinado el nivel de utilidad correspondiente, que podemos llamarlo  $v$

$$x^* \rightarrow u(x^*) = v.$$

En resumen, tenemos la siguiente cadena

$$(p, I) \rightarrow x^* \rightarrow u(x^*) = v$$

o, explicitando las variables:

$$(p, I) \rightarrow x^*(p, I) \rightarrow u(x^*(p, I)) = v.$$

Con lo cual se ve claro que la función  $v$  de utilidad indirecta depende de las variables  $p_i$  e  $I$ , a través de una composición de funciones:

- La función de demanda marshalliana que llamaremos simplemente  $x$ , obtenida mediante la maximización de la función de utilidad con la correspondiente restricción de presupuesto. Esta función  $x$  tiene  $n+1$  variables y toma valores vectoriales en  $\mathbb{R}^n$ :

$$(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \rightarrow (x_1(p_1, p_2, \dots, p_n, I), \dots, x_n(p_1, p_2, \dots, p_n, I))$$

Cada  $i$ -ésima función componente es la función de demanda del  $i$ -ésimo bien.

- La función  $u$  de utilidad del consumidor. Esta función tiene  $n$  variables y toma valores en  $\mathbb{R}$ :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Así  $v = u \circ x$  ó

$$v(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = u(x_1(p_1, p_2, \dots, p_n, I), \dots, x_n(p_1, p_2, \dots, p_n, I))$$

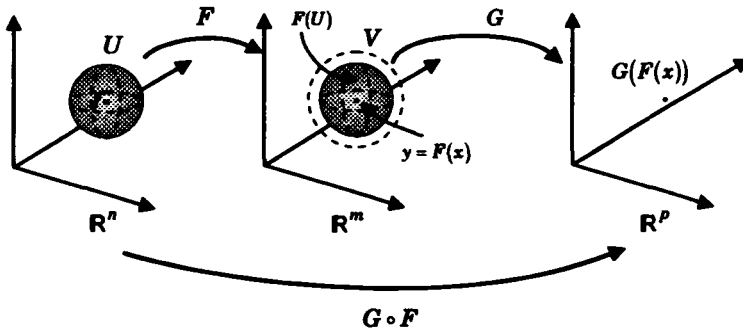
Debemos hallar ahora  $Dv(p, I)$ , y el teorema de la regla de la cadena nos permitirá hacerlo sin explicitar la composición de funciones, sino utilizando las derivadas de las funciones que se componen.

**Teorema 1.24** Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^m$  respectivamente,  $F:U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable en el punto  $x \in U$ , con  $F(U) \subset V$  y  $G:V \rightarrow \mathbb{R}^p$  una función diferenciable en el punto  $y = F(x) \in V$ . Entonces la función compuesta  $G \circ F$  es diferenciable en el punto  $x$  y se cumple

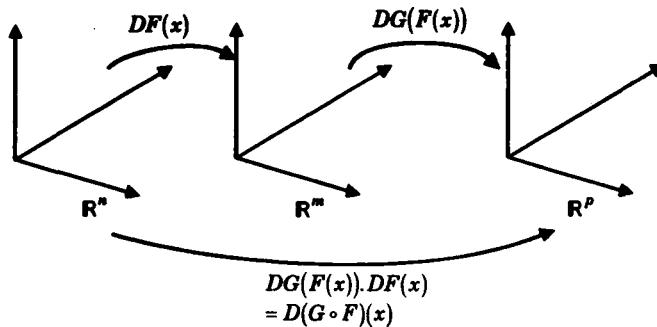
$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x)) \circ DF(x) \tag{1.5.1}$$

### Observaciones 1.25

1. El siguiente esquema nos hace ver más claramente que  $G \circ F$  es una función de  $n$  variables reales que toma valores vectoriales en  $\mathbb{R}^p$ .



En consecuencia,  $D(G \circ F)(x)$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^p$  y la expresión (1.5.1) nos dice que podemos obtenerla como composición de las transformaciones lineales  $DF(x)$  y  $DG(F(x))$



2. También, recordando la identificación de las transformaciones lineales con las matrices referidas a las bases usuales de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^p$ , podemos ver en (1.5.1) que la matriz de orden  $p \times n$  del primer miembro es el producto de las matrices de orden  $p \times m$  y  $m \times n$  del segundo miembro:

$$\underbrace{D(G \circ F)(x)}_{p \times n} = \underbrace{DG(F(x))}_{p \times m} \underbrace{DF(x)}_{m \times n}$$

3. El problema 1.22 con el que iniciamos esta sección y muchos otros de la teoría económica presentan casos de composición de funciones en los que el espacio de llegada final es  $\mathbb{R}$  (o sea  $p = 1$  en el teorema y observaciones anteriores). Para tales casos escribamos la igualdad (1.5.1) haciendo explícitos los elementos de las matrices<sup>1</sup>

$$\left[ \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_n}(x) \right] = \left[ \frac{\partial G}{\partial y_1}(F(x)) \quad \frac{\partial G}{\partial y_2}(F(x)) \quad \dots \quad \frac{\partial G}{\partial y_n}(F(x)) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F^1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F^2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F^2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F^m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Ahora podemos obtener la expresión para cada derivada parcial de la función compuesta igualando cada elemento  $j$  de la matriz  $1 \times n$  del primer miembro con su correspondiente del segundo miembro, resultante de multiplicar la matriz fila  $1 \times m$  por la  $j$ -ésima columna de la matriz  $m \times p$ :

$$\frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_k}(F(x)) \frac{\partial F^k}{\partial x_j}(x) \tag{1.5.2}$$

Otras formas de escribir la misma expresión son:

$$\frac{\partial G(F(x))}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_k}(F(x)) \frac{\partial F^k}{\partial x_j}(x) \tag{1.5.2}'$$

<sup>1</sup> Recordar que  $y = F(x) \in \mathbb{R}^m$ . En consecuencia tiene  $m$  funciones componentes:  $y_j = F^j(x)$  y así

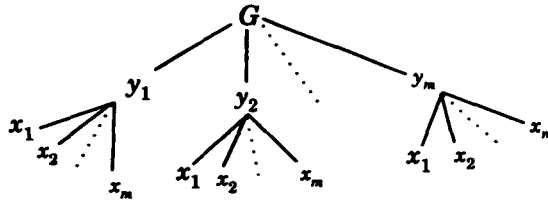
$$\begin{aligned} G(F(x)) &= G(F^1(x), F^2(x), \dots, F^m(x)) \\ &= G(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G(y)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial y_k}(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x) \quad (1.5.2)''$$

Más aún, es usualmente conocida esta expresión en una versión menos precisa:

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (1.5.2)'''$$

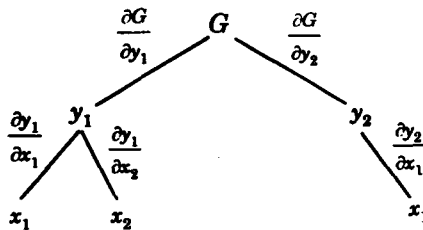
acompañada de un esquema como el siguiente:



Este esquema, construido adecuadamente según las funciones específicas de un caso concreto, ayuda a recordar (1.5.2)''' [o sus análogas, en caso haya más de dos funciones que se componen]. La regla es que:

*la derivada parcial de G respecto a alguna de las variables  $x_j$  (en los extremos del árbol) se obtiene sumando todos los productos de las derivadas parciales de G respecto a las  $y_k$  que conduzcan a una  $x_j$ , con las derivadas parciales de tales  $y_k$  respecto a su variable  $x_j$ .*

Un caso sencillo:  $G = G(y_1, y_2)$ ;  $y_1 = y_1(x_1, x_2)$ ;  $y_2 = y_2(x_1)$



Así 
$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial G}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\partial G}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2}$$

4. Si el espacio de llegada es  $\mathbb{R}^p$ , con  $p > 1$ , podemos obtener, también igualando los correspondientes elementos  $ij$  de cada miembro de (1.5.1), la expresión para la derivada parcial de la  $i$ -ésima función componente de  $G \circ F$  respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial(G^i \circ F)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial G^i}{\partial y_k}(F(x)) \frac{\partial F^k}{\partial x_j}(x) \tag{1.5.3}$$

**Ejercicios 1.26**

1. Concluir la solución del problema 5.1 demostrando que

$$\frac{\partial v}{\partial p_j}(p, I) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(x(p, I)) \frac{\partial x_k}{\partial p_j}(p, I)$$

$$\frac{\partial v}{\partial I}(p, I) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(x(p, I)) \frac{\partial x_k}{\partial I}(p, I)$$

2. Obtener  $\frac{\partial v}{\partial p_j}$  y  $\frac{\partial v}{\partial I}$  considerando la función de utilidad

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

(se demuestra –y se tratará en el Capítulo 3– que las funciones de demanda marshalliana son

$$x_i = \frac{I}{3p_i}, \quad i = 1, 2, 3)$$

3. Dadas las funciones

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2, e^{x_1 x_2}, e^{x_1} - e^{x_2}, \text{sen } x_1 x_2)$$

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, x_1 x_2 x_3 x_4)$$

Hallar, con la regla de la cadena,  $D(g \circ f)(1, 0)$

4. Dadas las funciones

$$f: \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g: \text{Dom } g \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ con } \text{Dom } g \subset \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (t, e^t) \quad (x_1, x_2) \mapsto \left( x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{x_1}{x_2}, \text{sen } x_1 x_2 \right)$$

Hallar  $D(g \circ f)(t)$ , ¿Es cierto que existe  $D(g \circ f)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ?

5. Sea  $f = f(x, y, z)$  una función diferenciable. Si  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , hallar una expresión para  $\frac{df}{dx}$

6. a) Dada la función de producción  $f(x, y) = 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ ; calcular  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=8}$ , en la isocuanta correspondiente al nivel 72.

b) Sea  $g(x, y)$  una función de producción genérica, que suponemos diferenciable, tal que la isocuanta  $g(x, y) = \bar{q}$  define implícitamente una función  $y = y(x)$ .

Demostrar que 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g_{xx} g_y^2 - 2g_{xy} g_x g_y + g_{yy} g_x^2}{g_y^3}$$

(Asumir que  $g_{xy} = g_{yx}$ )

7. Dada  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable  
 $x \mapsto f(x)$

donde  $x_j = x_j(x_1)$ ,  $\forall j = 2, \dots, n$ ; ¿es cierto que  $\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dx_1}$ ?

Hacer la demostración correspondiente al caso  $n = 2$ .

8. a) Dada una función diferenciable  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ , se define

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$$

Hallar expresiones para  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}$ .

b) Si  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3$ , siendo  $x_3 = x_1^3 + x_2$ , hallar  $\tilde{f}(x_1, x_2)$  y sus derivadas parciales y verificar la validez de lo obtenido en (a).

c) Caso general.

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , una función diferenciable, donde

$$x_i = x_i(x_1, \dots, x_m), \forall i = m + 1, \dots, n .$$

Si  $\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_n(x_1, \dots, x_m))$

¿es cierto que  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$  ?

9. Una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es homogénea de grado  $k$  si

$$f(tx) = t^k f(x) \text{ para todo } t > 0. \quad (1)$$

El teorema de Euler para tales funciones establece que

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x)$$

- i) Demostrar el Teorema de Euler derivando ambos miembros de (1) respecto a  $t$  y evaluando tal expresión en  $t = 1$
- ii) Analizar cuales de las siguientes funciones son homogéneas. En aquellas que lo sean, especificar el grado y verificar el Teorema de Euler.

a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy}$

b)  $f(x) = \|x\|, (x \in \mathbb{R}^n)$

c)  $f(x) = \frac{p \cdot x}{\|x\|}, p, x \in \mathbb{R}^n, p$  fijo

d)  $f(x, y) = Ax^\alpha y^\beta; \alpha, \beta > 0.$

10. Asumiendo que  $f(x, y) = 32xy + 2x^2 - 5y^2$  es una función de producción:

- a) ¿Es de rendimientos a escala constantes?
- b) Determinar la tasa de sustitución técnica en el punto (3,4).

11. Si  $x_1 = x_1(p_1, p_2)$  y  $x_2 = x_2(p_1, p_2)$  son funciones de demanda de dos bienes cuyos precios son  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, demostrar que la elasticidad de  $x_1$  respecto a  $p_1$  es

$$E_{p_1}(x_1) = \frac{d(\ln x_1)}{d(\ln p_1)}.$$

12. Si  $u = f(w) + f(v)$   
 $w = x - at$  ;  $v = x + at$

¿es verdad que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ?

13. Si  $f(u, v) = u^3 + 3v^2$  y se sabe que

$$u^2 - v = p ; \quad 5u - 3v = q,$$

a) Hallar  $\frac{\partial u}{\partial p}$  y  $\frac{\partial v}{\partial p}$

b) Demostrar que  $\frac{\partial f}{\partial p}(4, 2) = \frac{204}{19}$ .

14. Sea  $U(x, y, z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ . Demostrar que  $x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = 3U$

a) Empleando la regla de la cadena.

b) Aplicando el teorema de Euler (Problema 9).

15. Sea  $f(i, t) = C_0(1+i)^t$ ,  $i > 0$ ,  $t > 0$ ,  $C_0$  constante.

Hallar  $\frac{di}{dt}$  y  $\frac{d^2 i}{dt^2}$  para  $i, t$  tales que  $f(i, t) = 2C_0$ .

16. a) Dada la función  $f(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$ ;  $0 < \alpha < 1$ , verificar que su matriz hessiana es singular en todo punto de su dominio (determinante cero).
- b) Demostrar, empleando el Teorema de Euler, que toda función real con dominio en  $\mathbb{R}_+^2$ , con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden y homogéneas de grado 1, tienen matriz hessiana singular.

### 1.6 EL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA

Este es un teorema sumamente importante del análisis matemático y de aplicación valiosísima en el análisis económico. Veremos cómo el análisis de estática comparativa –y en él la obtención de multiplicadores– tiene su fundamento en este teorema. El enunciado bastante general que presentamos, da la apariencia de poca o ninguna vinculación con las preocupaciones de los economistas, pero ya mostraremos su gran utilidad en los modelos económicos.

**Teorema 1.27** Sea la función  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(\bar{\alpha}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que  $(\bar{\alpha}, \bar{x}) \in E$  y todas las primeras derivadas parciales de las  $m$  funciones componentes de  $F$  son continuas en  $E$ .

Si  $F(\bar{\alpha}, \bar{x}) = 0$  y  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) \neq 0$ <sup>1</sup> entonces:

- existe un conjunto abierto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , con  $\bar{\alpha} \in A$
- existe un conjunto abierto  $B \subset \mathbb{R}^m$ , con  $\bar{x} \in B$

de modo que para todo  $\alpha \in A$  es posible encontrar un único vector  $x(\alpha) \in B$  que cumple:

- i)  $F(\alpha, x(\alpha)) = 0$
- ii) la función  $x: A \rightarrow B$  definida por  $x = x(\alpha)$  es diferenciable.
- iii)  $D_\alpha x(\alpha) = -[D_x F(\alpha, x(\alpha))]^{-1} D_\alpha F(\alpha, x(\alpha))$

#### Ejemplo 1.28

Sea  $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x_1, x_2) = (0.4x_1 + 1000x_2 - \alpha_1 - \alpha_3, 0.2x_1 - 500x_2 - \alpha_2)$$

y  $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (200, 150, 300, 1000, 0.1) \in \mathbb{R}^5$

(identificamos  $\mathbb{R}^5$  con  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ ).

---

<sup>1</sup>  $D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})$  denota la derivada de  $F$  en el punto  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ , pero considerándola sólo como función de  $x$ . Notación similar se adoptará al considerarla sólo como función de  $\alpha$ .

Como  $F(200, 150, 300, 1000, 0.1) = (0, 0)$ , (verificar), este quintuple es el que tomamos como  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$  del teorema, con

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) = (200, 150, 300) \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1000, 0.1) \in \mathbb{R}^2.$$

Siendo lineales las funciones componentes de  $F$ , es claro que como conjunto  $E$  podemos tomar cualquier subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  que contenga  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ . Veamos ahora si se cumple que  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) \neq 0$ :

$$D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_1}(\bar{\alpha}, \bar{x}) & \frac{\partial F^1}{\partial x_2}(\bar{\alpha}, \bar{x}) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x_1}(\bar{\alpha}, \bar{x}) & \frac{\partial F^2}{\partial x_2}(\bar{\alpha}, \bar{x}) \end{bmatrix},$$

y por la definición de la función  $F$ , tenemos

$$F^1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x_1, x_2) = 0.4x_1 + 1000x_2 - \alpha_1 - \alpha_3$$

$$F^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x_1, x_2) = 0.2x_1 - 500x_2 - \alpha_2;$$

en consecuencia

$$D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0.4 & 1000 \\ 0.2 & -500 \end{bmatrix},$$

y 
$$\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) = -200 - 200 = -400 \neq 0.$$

Tenemos entonces que la función  $F$  dada y el punto  $(\bar{\alpha}, \bar{x}) = (200, 150, 300, 1000, 0.1)$  cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita y podemos verificar que se cumplen sus conclusiones:

Si bien es cierto que el teorema, fundamentalmente, afirma la *existencia* de una función con dominio en un conjunto abierto que contiene a  $\bar{\alpha}$  y con valores en un conjunto abierto que contiene a  $\bar{x}$  y que en muchas aplicaciones no es posible –ni necesario– conocer explícitamente tal función (es

<sup>1</sup> Notar que por la sencillez de este primer ejemplo,  $F^1$  y  $F^2$  son lineales y sus derivadas parciales son constantes; por ello podría pasar desapercibido que, en general, primero se obtiene  $D_x F(\alpha, x)$  y luego se reemplazan los valores correspondientes a  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{x}$  para tener la matriz numérica  $D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})$ .

implícita), también es cierto que en este ejemplo es fácilmente obtenible la función  $x = x(\alpha)$  (que llevará vectores  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^3$  a vectores  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ ):

De

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 1000x_2 &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0.2x_1 - 500x_2 &= \alpha_2, \end{aligned}$$

resolviendo simultáneamente, obtenemos

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{0.8} \qquad x_2 = \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{2000}$$

y así

$$x = x(\alpha) = x \left( \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{0.8}, \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{2000} \right)$$

También por la linealidad de las funciones  $F^1$  y  $F^2$  es posible conocer los conjuntos abiertos  $A$  y  $B$  que contienen a  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{x}$ ; así, podemos elegir  $A = \mathbb{R}^3$  y  $B = \mathbb{R}^2$  y vemos inmediatamente que la función  $x: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $x = x(\alpha)$ , es diferenciable, como se establece en (ii) del teorema.

Es claro que (i) se cumple, pues

$$\begin{aligned} F(\alpha, x(\alpha)) &= \left( 0.4 \left( \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{0.8} \right) + 1000 \left( \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{2000} \right) - \alpha_2 - \alpha_3, \right. \\ &\quad \left. 0.2 \left( \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{0.8} \right) - 500 \left( \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{2000} \right) - \alpha_2 \right) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Finalmente, podemos verificar que se cumple (iii) pues conociendo la función  $x = x(\alpha)$  podemos obtener directamente su derivada respecto a  $\alpha$  y constatar que coincide con la matriz obtenida según (iii):

De  $x = x(\alpha)$  tenemos

$$D_\alpha x(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.8} & \frac{1}{0.4} & \frac{1}{0.8} \\ \frac{1}{2000} & -\frac{1}{1000} & \frac{1}{2000} \end{bmatrix}$$

Según (iii):

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha}x(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0.4 & 1000 \\ 0.2 & -500 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{400} \begin{bmatrix} -500 & -1000 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.8} & \frac{1}{0.4} & \frac{1}{0.8} \\ -\frac{1}{2000} & \frac{-1}{2000} & \frac{1}{200} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Es evidente que la fórmula dada en (iii) es realmente útil cuando no se conoce explícitamente la función  $x = x(\alpha)$

### Aplicación 1.29 (Estática comparativa)

Ahora que el Ejemplo 1.28 nos ha ayudado a entender el teorema, apliquémoslo al análisis de estática comparativa en un modelo macroeconómico:

Sean

$$IS = \{(Y, r) / Y = C_0 + C(Y - T_0 - T(Y), r) + I_0 + I(Y, r) + G_0\}$$

$$LM = \{(Y, r) / L_0 + L(Y, r) = M_0\}$$

y los supuestos de comportamiento dados a través de las derivadas parciales de las funciones (asumiremos, además, que estas derivadas parciales son continuas)

$$0 < C_{Y_d} < 1, T_Y > 0, C_r < 0, I_Y > 0,$$

$$I_r < 0, C_{Y_d} + I_Y < 1, L_Y > 0, L_r < 0;$$

siendo

$Y$  : ingreso nacional

$C_0$  : consumo exógeno (conocido)

$C = C(Y_d, r)$  : función consumo

$Y_d = Y - T_0 - T(Y)$  : ingreso disponible

$T_0$  : impuesto exógeno (conocido)

$T = T(Y)$  : función impuesto

$r$  : tasa de interés

$I_0$  : inversión exógena (conocida)

$I = I(Y, r)$  : función inversión

$G_0$  : gasto del gobierno (conocido)

$L_0$  : demanda exógena de dinero (conocido)

$L = L(Y, r)$  : función demanda monetaria

$M_0$  : oferta monetaria (conocida)

Se puede demostrar (¡hacerlo!) que la pendiente de  $IS$  es negativa y la pendiente de  $LM$  es positiva; claro que esto no garantiza que estas curvas se intersequen, pero asumamos que sí se da la intersección no vacía y única en el punto  $(\bar{Y}, \bar{r})$ . Este es el punto de equilibrio del

modelo ya que satisface las ecuaciones de ambas curvas; y así, por satisfacer la ecuación de  $IS$  es un punto de equilibrio del mercado de bienes, y por satisfacer la ecuación de  $LM$  es un punto de equilibrio del mercado de dinero. Es claro que tanto el valor  $\bar{Y}$ , que es el nivel de equilibrio del ingreso, como el valor  $\bar{r}$ , que es el nivel de equilibrio de la tasa de interés, dependen de los valores que se asignaron en el modelo a las variables exógenas  $C_0, T_0, I_0, G_0, L_0$  y  $M_0$ . (Una explicación gráfica de esto, es que la posición de las curvas  $IS$  y  $LM$  en el plano  $Yr$ , depende de los valores que se hayan asignado a las variables exógenas). Entonces una pregunta natural, de interés para hacer política económica, es cómo afectarán a estos niveles de equilibrio las modificaciones que se hagan a los valores asignados a las variables exógenas; por ejemplo,

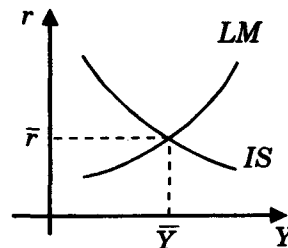


Figura 1.16

*¿cómo afectarán a  $\bar{Y}$  y a  $\bar{r}$  un incremento de los gastos del gobierno, manteniéndose constantes las otras variables exógenas?*

El lector ya habrá advertido que para responder con rigor estas preguntas es natural hacer uso de las derivadas parciales; así, en el caso de la pregunta concreta dada como ejemplo, al hallar  $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$  y  $\frac{\partial r}{\partial G_0}$  en  $(\bar{Y}, \bar{r})$ , con sólo conocer los respectivos signos ya sabremos si el incremento de  $G_0$  hace aumentar o disminuir los valores de equilibrio de  $Y$  y de  $r$ , y conociendo los valores numéricos de tales derivadas parciales tendremos una medida aproximada —válida, en principio, localmente— de cuánto van a aumentar o disminuir  $\bar{Y}$  y  $\bar{r}$  por cada unidad de incremento de  $G_0$  (o de disminución de

$G_0$ ). Obviamente no podemos hablar de derivadas de  $Y$  y de  $r$  respecto a variables como  $G_0$ , y en general respecto a las variables exógenas, si no garantizamos que  $Y$  y  $r$  son funciones de estas variables. Es aquí donde se hace más evidente la aplicación del teorema de la función implícita, que pasamos a detallar:

Tomamos como variables  $\alpha$  a las variables exógenas y como variables  $x$  a las endógenas; así

$$(\alpha, x) = (C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0, Y, r)$$

$$\bar{x} = (\bar{Y}, \bar{r})$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{C}_0, \bar{T}_0, \bar{I}_0, \bar{G}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0)$$

(valores específicos que se asignaron, en el modelo, a las variables exógenas)

y definimos  $F: \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$F(C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0, Y, r) = \\ (Y - C_0 - C(Y - T_0 - T(Y), r) - I_0 - I(Y, r) - G_0, L_0 + L(Y, r) - M_0)$$

Notar que  $F = (F^1, F^2)$ , siendo

$$F^1(C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0, Y, r) = \\ Y - C_0 - C(Y - T_0 - T(Y), r) - I_0 - I(Y, r) - G_0$$

$$F^2(C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0, Y, r) = L_0 + L(Y, r) - M_0$$

Como ya hemos asumido que las primeras derivadas parciales de las funciones consideradas son continuas y que los conjuntos  $IS$  y  $LM$  se intersecan en el punto  $(\bar{Y}, \bar{r})$  (lo cual ahora significa que

$$F(\bar{\alpha}, \bar{x}) = F(\bar{C}_0, \bar{T}_0, \bar{I}_0, \bar{G}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0, \bar{Y}, \bar{r}) = (0, 0),$$

para tener todas las hipótesis del teorema, sólo nos resta verificar que  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) \neq 0$  (Cabe hacer notar que una vez adoptados los supuestos de comportamiento en el modelo, esta condición puede o no cumplirse, pues depende de los signos de las derivadas parciales de las funciones).

Según la notación adoptada,  $D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})$  significa la derivada de  $F$ , considerada como función únicamente de  $Y$  y de  $r$  y evaluada en el punto  $(\bar{C}_0, \bar{T}_0, \bar{I}_0, \bar{G}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0, \bar{Y}, \bar{r})$ . Tal derivada es una matriz de orden  $2 \times 2$ :

$$D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 - C_{Y_d}(\bar{Y} - \bar{T}_0 - T(\bar{Y}), r)(1 - T_Y(\bar{Y})) - I_Y(\bar{Y}, \bar{r}) & -C_r(\bar{Y} - \bar{T}_0 - T(\bar{Y}), \bar{r}) - I_r(\bar{Y}, \bar{r}) \\ L_Y(\bar{Y}, \bar{r}) & L_r(\bar{Y}, \bar{r}) \end{bmatrix}$$

Para evitar el recargo de símbolos, omitiremos explicitar el punto en el cual se están evaluando las funciones  $C_{Y_d}$ ,  $T_Y$ ,  $I_Y$ ,  $C_r$ ,  $I_r$ ,  $L_Y$  y  $L_r$ . (Cuando en situaciones concretas ya se conocen las funciones del modelo y el punto de equilibrio,  $D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})$  es una matriz de números reales). Veamos, pues, si el determinante de esta matriz es diferente de cero:

$$\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) = (1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y)L_r + (C_r + I_r)L_Y$$

y según los supuestos de comportamiento, ésta es una suma de números negativos, ya que

$$1 - C_{Y_d} - I_Y > 0, \quad C_{Y_d} T_Y > 0 \quad \text{y} \quad L_r < 0$$

implican la negatividad del primer sumando, y

$$C_r < 0, \quad I_r < 0 \quad \text{y} \quad L_Y > 0$$

implican la negatividad del segundo sumando. Así  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) < 0$  y podemos asegurar ahora que existen abiertos  $A$  y  $B$ , en  $\mathbb{R}^6$  y  $\mathbb{R}^2$  respectivamente, con

$$(\bar{C}_0, \bar{T}_0, \bar{I}_0, \bar{G}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0) \in A, \quad \text{y} \quad (\bar{Y}, \bar{r}) \in B,$$

y una función  $x: A \rightarrow B$  que cumple (i), (ii) y (iii) del teorema. En este caso

$$x = (Y, r)$$

y tenemos

$$Y = Y(C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0)$$

$$r = r(C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0)$$

es decir, estamos garantizando que los valores de equilibrio de las variables endógenas del modelo dependen funcionalmente de los valores que se asignen a las variables exógenas del modelo, en los correspondientes conjuntos abiertos  $A$  y  $B$ . Según (i), al elegir, por ejemplo  $(\bar{C}_0, \bar{T}_0, \bar{I}_0, \bar{G}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0) \in A$ , podremos encontrar un único  $(\bar{Y}, \bar{r}) \in B$  que también sea punto de equilibrio en el modelo. La conclusión (ii) del teorema nos garantiza la diferenciabilidad de esta función, y (iii) nos da la fórmula para hallar los llamados *multiplicadores* del modelo; es decir, las derivadas parciales de las variables endógenas respecto de las exógenas, como veremos a continuación:

Siendo  $x = (Y, r)$  una función definida en  $A$ , con 6 variables y 2 componentes, su derivada es una matriz de orden  $2 \times 6$ , cuyos elementos son precisamente los *multiplicadores*:

$$Dx(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial C_0} & \frac{\partial Y}{\partial T_0} & \frac{\partial Y}{\partial I_0} & \frac{\partial Y}{\partial G_0} & \frac{\partial Y}{\partial L_0} & \frac{\partial Y}{\partial M_0} \\ \frac{\partial r}{\partial C_0} & \frac{\partial r}{\partial T_0} & \frac{\partial r}{\partial I_0} & \frac{\partial r}{\partial G_0} & \frac{\partial r}{\partial L_0} & \frac{\partial r}{\partial M_0} \end{bmatrix} \quad (1.6.1)$$

Para aplicar la fórmula dada en (iii) del teorema, ya conocemos  $D_x F(\alpha, x(\alpha))$ , de modo que sólo nos falta invertirla —lo cual es posible, pues hemos demostrado que  $\det(D_x F(\alpha, x(\alpha))) \neq 0$ — y hallar  $D_\alpha F(\alpha, x(\alpha))$ , para obtener por multiplicación de estas matrices y luego por igualación con los correspondientes elementos de  $Dx(\alpha)$ , las expresiones de cada uno de los *multiplicadores*:

$$\left[ D_x F(\alpha, x(\alpha)) \right]^{-1} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_r & C_r + I_r \\ -L_Y & 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y \end{bmatrix}$$

siendo

$$\Delta = (1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y)L_r + (C_r + I_r)L_Y = \det(D_x F(\alpha, x(\alpha)))$$

$D_\alpha F(\alpha, x(\alpha))$  es la derivada de  $F$ , considerada como función únicamente de las variables exógenas  $C_0, T_0, I_0, G_0, L_0, M_0$ ; o sea, una matriz de orden  $2 \times 6$ :

$$D_\alpha F(\alpha, x(\alpha)) = \begin{bmatrix} -1 & C_{Y_d} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, según (iii)

$$D_{\alpha}x(\alpha) = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_r & C_r + I_r \\ -L_Y & 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & C_{Y_d} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -L_r & L_r C_{Y_d} & -L_r & -L_r & C_r + I_r & -(C_r + I_r) \\ L_Y & L_Y C_{Y_d} & L_Y & L_Y & 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y & -(1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y) \end{bmatrix}$$

y por igualación de los correspondientes elementos dados en esta matriz y en (1.6.1), tenemos, por ejemplo:

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{L_r}{[1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]L_r + (C_r + I_r)L_Y}$$

(elementos de la primera fila y la cuarta columna de las matrices)

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{C_r + L_r}{[1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]L_Y + (C_r + I_r)L_Y}$$

(elementos de la primera fila y la sexta columna de las matrices)

que son los multiplicadores que nos permiten tener una idea de los efectos, en el nivel de equilibrio del ingreso, de la aplicación de una política fiscal – en este caso variación del gasto de gobierno– o de una política monetaria (variación de la oferta monetaria). Siendo el denominador,  $\Delta$ , negativo, según los supuestos de comportamiento tenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial M_0} > 0$$

lo cual nos dice que –con las restricciones dadas por los abiertos  $A$  y  $B$ – si se aumenta el gasto de gobierno, aumentará también el nivel de equilibrio del ingreso (o si se disminuye  $G_0$ , disminuirá también el nivel de equilibrio de  $Y$ ) y análogamente para variaciones de  $M$ ; es decir, ahora no sólo sabemos que localmente  $Y$  es función de las variables exógenas, sino que al considerar únicamente la variación de  $G_0$  (*ceteris paribus*), la relación funcional es creciente y que también lo es al considerar únicamente la variación de  $M_0$

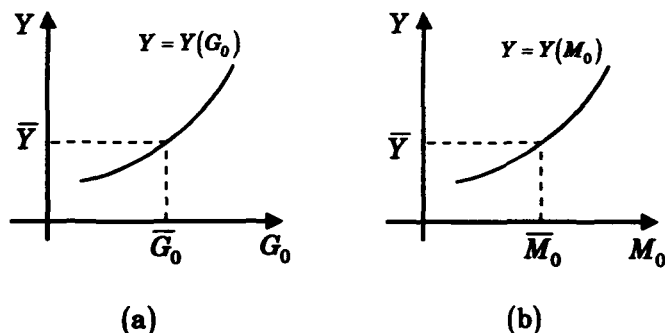


Figura 1.17

El lector queda invitado a obtener  $\frac{\partial r}{\partial G_0}$  y  $\frac{\partial r}{\partial M_0}$  y a verificar que  $\frac{\partial r}{\partial G_0} > 0$  y  $\frac{\partial r}{\partial M_0} < 0$ . Por razonamiento análogo al que acabamos de hacer, podemos representar ahora la relación funcional local de  $r$  con  $G_0$  y de  $r$  con  $M_0$

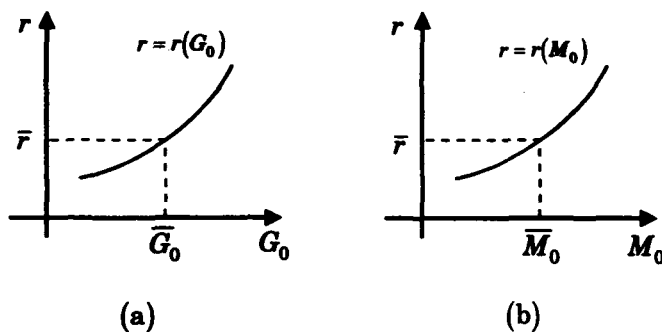


Figura 1.18

### ¿Cómo se refleja este análisis graficando *IS* y *LM*?

Como en el modelo sólo tenemos dos variables endógenas, podemos visualizar los resultados obtenidos en un gráfico en el plano  $Yr$ , en el que consideremos las curvas *IS* y *LM*.

#### a) ¿Cómo afecta a *IS* una modificación de $G_0$ ?

Ya dijimos que la posición de *IS* en el plano  $Yr$  está determinada por los valores específicos de las variables exógenas; siendo  $G_0$  una de éstas, al modificarse afectará la posición de *IS*. También aplicando el teorema de

la función implícita<sup>1</sup> podemos obtener la pendiente de  $IS$  (dada por  $\frac{dr}{dY}$ , al considerar  $Y$  en el eje horizontal y  $r$  en el vertical)

$$\frac{dr}{dY} = \frac{1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y}{C_r + I_r} < 0$$

y vemos claramente que la adopción de otro valor para  $G_0$  no afecta la pendiente de  $IS$ , por lo cual deducimos que valores diferentes de  $G_0$  nos darán diversas posiciones *paralelas* de  $IS$ ; dicho más específicamente, la pendiente de  $IS$  para cada valor fijo de  $Y$  será la misma para  $G_0 = \bar{G}_0$  y para  $G_0 = \bar{\bar{G}}_0 \neq \bar{G}_0$  y así la  $IS$  con  $\bar{\bar{G}}_0$  se puede obtener mediante un desplazamiento vertical de la  $IS$  con  $\bar{G}_0$ .

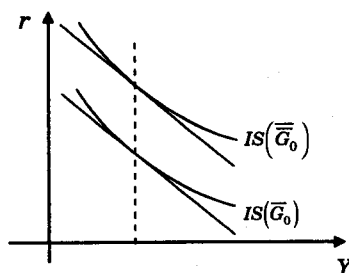


Figura 1.19

*¿El desplazamiento es hacia arriba o hacia abajo?*

Es claro que —estando  $Y$  fijo— el desplazamiento hacia arriba o hacia abajo depende de cómo afecta a  $r$  una variación de  $G_0$ ; en consecuencia basta hallar  $\frac{dr}{dG_0}$ , considerando  $Y$  constante.

De 
$$Y = C_0 + C(Y - T_0 - T(Y), r) + I_0 + I(Y, r) + G_0$$

obtenemos 
$$\frac{dr}{dG_0} = -\frac{1}{C_r + I_r} > 0$$
<sup>2</sup>

con lo cual ya sabemos que si  $G_0$  aumenta, también aumentará el valor que le corresponda a  $r$ , en una curva  $IS$ , con el valor fijo de  $Y$ . En consecuencia, si aumenta  $G_0$  el desplazamiento de  $IS$  será hacia arriba, y si disminuye  $G_0$  el desplazamiento de  $IS$  será hacia abajo<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Considerar  $H(Y, r) = Y - C_0 - C(Y - T_0 - T(Y), r) - L_0 - I(Y, r) - G_0$ .

Así se tendrá  $\frac{dr}{dY} = -\frac{\partial H}{\partial Y} / \frac{\partial H}{\partial r}$ .

<sup>2</sup> No confundir esta derivada en la curva  $IS$ , con  $\frac{\partial r}{\partial G_0} = -\frac{L_y}{\Delta}$ , considerando las *dos* curvas

<sup>3</sup> del modelo. Como ejercicio, se pide justificar que también puede hablarse de desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda.

b) ¿Cómo afecta a  $LM$  una modificación de  $G_0$ ?

Es obvio que no estando presente esta variable exógena en la ecuación que caracteriza a  $LM$ , sus modificaciones no la afectarán y la curva  $LM$  será la misma si en el modelo  $G_0$  toma el valor  $\bar{G}_0$  o si  $G_0$  toma el valor  $\bar{\bar{G}}_0$ , o cualquier otro. (Figura 1.20)

Al resumir gráficamente (a) y (b), obtenemos información gráfica de los efectos en los valores de equilibrio del ingreso y de la tasa de interés, al modificarse el gasto de gobierno; información gráfica que es coherente con el análisis hecho mediante derivación parcial.

Vemos que al incrementarse el gasto de gobierno (de  $\bar{G}_0$  a  $\bar{\bar{G}}_0$ ), el nuevo punto de equilibrio tiene niveles mayores, tanto en el ingreso como en la tasa de interés ( $\bar{Y} > \bar{Y}$  y  $\bar{r} > \bar{r}$ ). (Figura 1.21)

El lector queda invitado a hacer el análisis correspondiente a  $IS$  y  $LM$  al aplicarse una política monetaria; es decir, al modificar la variable exógena  $M_0$ . El resumen gráfico de razonamientos análogos a los hechos en (a) y (b) se presenta en la Figura 1.22 y se ve, coherentemente con  $\frac{\partial Y}{\partial M_0} > 0$  y  $\frac{\partial r}{\partial M_0} < 0$ , que al incrementarse la oferta monetaria (de  $\bar{M}_0$  a  $\bar{\bar{M}}_0$ ) el nuevo punto de equilibrio tiene un nivel mayor de ingreso ( $\tilde{Y} > \bar{Y}$ ) pero un nivel menor de la tasa de interés ( $\tilde{r} < \bar{r}$ ).

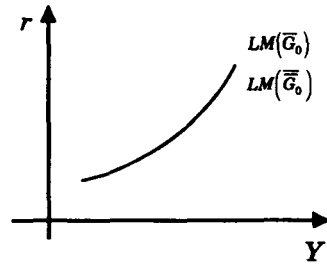


Figura 1.20

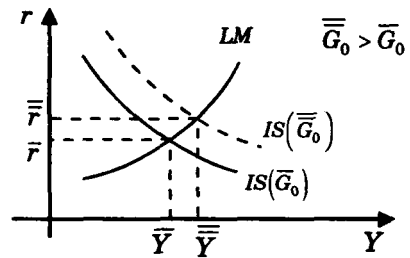


Figura 1.21

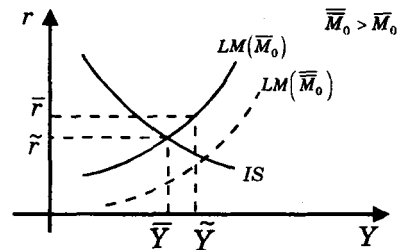


Figura 1.22

Hasta ahora hemos hecho el análisis *cualitativo* del efecto en los valores de equilibrio de las modificaciones de las variables exógenas, pues conociendo el signo de la derivada parcial correspondiente, podemos predecir si un incremento de la variable exógena hará aumentar o disminuir los valores de equilibrio de las variables endógenas. Ciertamente esto es lo fundamental, pero también se puede tener una idea de *cuánto* es que se modifican los valores de equilibrio de las variables endógenas, si se conoce cuánto se modifica determinada variable exógena y, por supuesto, los valores de las derivadas de las funciones del modelo, calculadas en el punto de equilibrio; así, por ejemplo, siendo

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{L_r}{[1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]L_r + (C_r + I_r)L_Y} > 0 ,$$

una aproximación al incremento en  $\bar{Y}$  como consecuencia de un incremento  $\Delta G_0$  del valor inicial  $\bar{G}_0$  del gasto de gobierno, estará dado por<sup>1</sup>

$$\Delta Y \approx \frac{L_r}{[1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]L_r + (C_r + I_r)L_Y} \Delta G_0$$

### Observación 1.30

## FORMAS PRACTICAS DE APLICACION DEL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA EN LA ESTATICA COMPARATIVA.

En la Aplicación 1.29 acabamos de ver con bastante amplitud el uso del teorema de la función implícita en la estática comparativa; sin embargo no es ésta la forma como —habitualmente— se aplica este teorema. Retomemos el ejemplo para ilustrar formas prácticas:

Sea el modelo:

$$Y = C_0 + C(Y - T_0 - T(Y), r) + I_0 + I(Y, r) + G_0$$

$$L_0 + L(Y, r) = M_0$$

Variables endógenas:  $Y$  y  $r$ .

Supuestos de comportamiento:

$$0 < C_{Y_d} < 1, T_Y > 0, C_r < 0, I_Y > 0, I_r < 0 ,$$

$$C_{Y_d} + I_Y < 1, L_Y > 0, L_r < 0 \quad (Y_d = Y - T_0 - T(Y)) .$$

<sup>1</sup> Tener en cuenta (1.2.2) a (1.2.5).

Determinemos cómo afectan a los valores de equilibrio, modificaciones ceteris paribus de las variables exógenas; esto es, hallemos, por ejemplo  $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial G_0}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial M_0}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial M_0}$ .

1. Diferenciamos totalmente ambas ecuaciones, sin distinguir variables endógenas de exógenas:

$$\begin{aligned} dY &= dC_0 + C_{Y_d}(dY - dT_0 - T_Y dY) + C_r dr + dI_0 + I_Y dY + I_r dr + dG_0 \\ dL_0 + L_Y dY + L_r dr &= dM_0. \end{aligned}$$

2. Tratamos las ecuaciones obtenidas como un sistema lineal en las variables  $dY$  y  $dr$ :

$$\begin{aligned} (1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y)dY - (C_r + I_r)dr &= dC_0 - C_{Y_d}dT_0 + dI_0 + dG_0 \\ L_Y dY + L_r dr &= dM_0 - dL_0 \end{aligned}$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y & -(C_r + I_r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dC_0 - C_{Y_d}dT_0 + dI_0 + dG_0 \\ dM_0 - dL_0 \end{bmatrix}$$

3. Verificamos que este sistema lineal puede resolverse. Esto significa que la matriz de coeficientes debe tener determinante no nulo, ya que obviamente no es un sistema homogéneo, pues eso significaría que ninguna variable exógena se está modificando. (Notemos que según la notación adoptada en la Aplicación 1.29-, la matriz de coeficientes es  $D_x F(\alpha, x)$  y el teorema de la función implícita exige que su determinante en el punto de equilibrio sea diferente de cero).

Según los supuestos de comportamiento, el determinante de la matriz de coeficientes es negativo; esto es

$$\Delta = (1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y)L_r + (C_r + I_r)L_Y < 0$$

4. En virtud del paso anterior, resolvemos el sistema. (Resulta natural aplicar la regla de Cramer).

$$dY = \frac{1}{\Delta} [(dM_0 - dL_0)(C_r + I_r) + (dC_0 - C_{Y_d}dT_0 + dI_0 + dG_0)L_r]$$

$$dr = \frac{1}{\Delta} [(dM_0 - dL_0)(1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y) - (dC_0 - C_{Y_d}dT_0 + dI_0 + dG_0)L_Y]$$

5. De estas expresiones para  $dY$  y  $dr$  podemos ahora obtener expresiones para los cocientes

$$\frac{dY}{dG_0}, \frac{dY}{dM_0}, \frac{dr}{dG_0}, \frac{dr}{dM_0}, \text{ etc}$$

con sólo elegir la variable exógena que se va a aumentar o disminuir –y así su diferencial correspondiente es diferente de cero– y considerar entonces nulos los diferenciales de las restantes variables exógenas. Por ejemplo, para hallar  $\frac{dY}{dG_0}$  y  $\frac{dr}{dG_0}$ , tendremos  $dG_0 \neq 0$  y  $dM_0 = dL_0 = dC_0 = dT_0 = dI_0 = 0$ ; entonces

$$dY = \frac{1}{\Delta} dG_0 L_r \quad \text{y} \quad dr = -\frac{1}{\Delta} dG_0 L_Y$$

y así

$$\frac{dY}{dG_0} = \frac{L_r}{\Delta} \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dG_0} = -\frac{L_Y}{\Delta} .$$

Considerando que  $Y$  y  $r$  son funciones (implícitas) de las variables exógenas, estos cocientes podemos interpretarlos como derivadas parciales respecto a  $G_0$  y coinciden con las que se obtienen como lo hicimos en la Aplicación 1.29.

Una ventaja –además de la facilidad– de esta forma de trabajo, es que también se puede “medir” de manera muy sencilla el efecto en los valores de equilibrio de  $Y$  y de  $r$  de la modificación simultánea de más de una variable exógena; así, como ejercicio, podemos analizar lo que ocurriría al aplicar simultáneamente política fiscal y política monetaria, reflejadas en variaciones del gasto de gobierno ( $G_0$ ) y de la oferta monetaria ( $M_0$ ) respectivamente.

Consideramos entonces  $dG_0 \neq 0$ ,  $dM_0 \neq 0$  y  $dL_0 = dC_0 = dT_0 = dI_0 = 0$  y de las expresiones obtenidas en el paso 4, tenemos

$$dY = \frac{1}{\Delta} [(C_r + I_r) dM_0 + L_r dG_0]$$

$$dr = \frac{1}{\Delta} [(1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y) dM_0 - L_Y dG_0]$$

Ahora:

Si  $dM_0 > 0$  y  $dG_0 > 0$  entonces  $dY > 0$ , pero  $dr$  podría ser positivo, negativo o nulo; lo cual significa que se elevaría el nivel de equilibrio del ingreso, pero la tasa de interés podría subir, bajar o permanecer inalterada. Esto es coherente con los gráficos  $IS-LM$ , en el plano  $Yr$ :

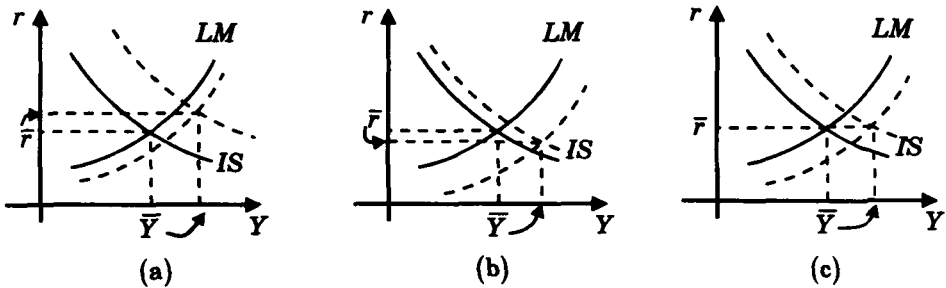


Figura 1.23

La situación se presta a una nueva invitación al lector: hacer análisis similar para los diversos casos con  $dM_0$  y  $dG_0$  y también escogiendo otras combinaciones de variables.

Quando el propósito es analizar exclusivamente los efectos en los valores de equilibrio de modificaciones de una variable exógena específica, se pueden obtener los resultados más directamente, pues en tal caso ya consideramos fijas las otras variables exógenas. Por ejemplo, analicemos lo que ocurriría si sólo modificamos la oferta monetaria; esto es, buscamos

$$\frac{\partial Y}{\partial M_0} \text{ y } \frac{\partial r}{\partial M_0} :$$

1') Derivamos parcialmente ambas ecuaciones del modelo respecto a  $M_0$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial M_0} = C_{Y_d}(1 - T_Y) \frac{\partial Y}{\partial M_0} + C_r \frac{\partial r}{\partial M_0} + I_Y \frac{\partial Y}{\partial M_0} + I_r \frac{\partial r}{\partial M_0}$$

$$L_Y \frac{\partial Y}{\partial M_0} + L_r \frac{\partial r}{\partial M_0} = 1$$

2') Tratamos las ecuaciones obtenidas como un sistema lineal en las variables  $\frac{\partial Y}{\partial M_0}$  y  $\frac{\partial r}{\partial M_0}$ :

$$\left[ 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y \right] \frac{\partial Y}{\partial M_0} - (C_r + I_r) \frac{\partial r}{\partial M_0} = 0$$

$$L_Y \frac{\partial Y}{\partial M_0} + L_r \frac{\partial r}{\partial M_0} = 1$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y & -(C_r + I_r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M_0} \\ \frac{\partial r}{\partial M_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3') Verificamos que este sistema lineal puede resolverse. Ya vimos que el determinante de esta matriz de coeficientes es

$$\Delta = [1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]L_r + (C_r + I_r)L_Y < 0$$

4') Resolvemos el sistema:

$$\frac{\partial Y}{\partial M_0} = \frac{1}{\Delta}(C_r + I_r) ; \quad \frac{\partial r}{\partial M_0} = \frac{1}{\Delta}[1 - C_{Y_d}(1 - T_Y) - I_Y]$$

y ya tenemos las derivadas parciales buscadas y sus expresiones coinciden con las que se obtienen como en la Aplicación 1.29 y con las que se obtienen con los pasos (1) - (5).

**Aplicación 1.31 (Sistemas de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas)**

Posiblemente los sistemas de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas más conocidos son los sistemas *lineales*; sin embargo no siempre vamos a encontrarnos con sistemas que tengan tal característica. Ciertamente los sistemas *no lineales* son menos sencillos de resolver. En todo caso, queremos que quede muy claro para el lector que

*tener  $m = n$  (es decir el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) no es suficiente para afirmar que el sistema tiene solución y menos aún para afirmar que tal solución es única.*

Por ejemplo, los sistemas

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} xy = 1 \\ y - \text{sen } x = 0 \end{cases}$$

son, todos, de dos ecuaciones con dos incógnitas y ninguno tiene solución única, como es fácilmente verificable haciendo una representación gráfica de cada uno:

- en  $S_1$  (sistema lineal), tenemos dos rectas paralelas y en consecuencia su conjunto solución es vacío,
- en  $S_2$  (sistema no lineal), tenemos una circunferencia de radio 2 y una recta que no la interseca; en consecuencia, también su conjunto solución es vacío; y
- en  $S_3$  (sistema no lineal), tenemos una hipérbola equilátera, una de cuyas asíntotas es el eje  $X$ , y el senoide conocido sobre el eje  $X$ ; en consecuencia, hay infinitos puntos de intersección y el conjunto solución de  $S_3$  es infinito.

Evidentemente, pueden darse muchos otros ejemplos de situaciones similares y con más de dos variables. (La ventaja de  $n = 2$  es su fácil ilustración gráfica).

Hecha esta aclaración, que es fundamental, pasamos a plantearnos un problema en cuya solución nos ayudará el teorema de la función implícita:

*dado un sistema (lineal o no lineal) de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ( $n > m$ ) ¿en qué casos se puede garantizar que es posible despejar  $m$  variables en función de las  $n - m$  restantes?*

Veamos: el sistema lo podemos expresar, de manera general, como un conjunto de  $m$  funciones de  $n$  variables

$$\begin{aligned} f^1(z_1, z_2, \dots, z_n) &= 0 \\ f^2(z_1, z_2, \dots, z_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f^m(z_1, z_2, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

o, considerando  $F = (f^1, f^2, \dots, f^m)$ , como la ecuación vectorial

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \tag{1.6.3}$$

cuyo dominio en  $\mathbb{R}^n$  podemos interpretarlo como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ . Así, asumiendo la existencia de un  $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(\bar{z}) = 0$  (es decir la existencia de una solución del sistema (1.6.2)) y todas las hipótesis del teorema de la función implícita, tendremos las condiciones que nos garantizan que  $m$  variables del sistema pueden expresarse, localmente, como funciones de las  $n-m$  restantes. ¿Cuáles serían tales  $m$  variables?. Aquellas que en la notación usada en el teorema de la función implícita corresponden a las variables  $x$ ; y así las  $n-m$  restantes corresponderían a las variables  $\alpha$  (*exógenas*). Evidentemente no necesariamente existe sólo un conjunto de  $m$  variables, pues todo depende del cumplimiento de la condición  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) \neq 0$ , que en este caso conviene más expresarla como

$$\text{rang}(DF(\bar{z})) = m \quad (1.6.4)$$

Notar que  $DF(\bar{z})$  es una matriz de orden  $m \times n$  y entonces, según esta condición, todo conjunto de columnas que permite tener un menor de orden  $m \times m$  que sea no nulo, (o sea todo conjunto de  $m$  columnas linealmente independientes) está determinando  $m$  variables que, localmente, pueden expresarse en función de las  $n-m$  restantes.

Finalmente, siendo condiciones suficientes las que se establecen en el teorema de la función implícita, bien podría ocurrir que éstas no se cumplan y –sin embargo– sea posible hacer el *despeje*.

**Ejemplos:**

1. Sea el sistema no lineal

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2^2 + 5z_1z_2 + 8z_3 = 68 \\ 3z_1z_2 + 2z_1 + z_3^3 = 33 \end{cases}$$

La función  $F = (f^1, f^2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo

$$\begin{aligned} f^1(z_1, z_2, z_3) &= 2z_1 + 3z_2^2 + 5z_1z_2 + 8z_3 - 68 \\ f^2(z_1, z_2, z_3) &= 3z_1z_2 + 2z_1 + z_3^3 - 33, \end{aligned}$$

satisface las hipótesis del teorema de la función implícita y el punto  $(4, 2, 1)$  es tal que  $F(4, 2, 1) = 0$  (resuelve el sistema).

---

<sup>1</sup> Recordar que una matriz de orden  $m \times n$  tiene rango  $p$  si y sólo si  $p$  es el orden del menor *más grande* con determinante no nulo.

La matriz jacobiana de  $F$  en el punto  $(4, 2, 1)$  es

$$DF(4, 2, 1) = \begin{bmatrix} 12 & 32 & 8 \\ 8 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

y observamos que tanto la 1ra. y 2da. columnas como la 1ra. y la 3ra. son linealmente independientes. No así la 2da. y 3ra. O, expresado de otra manera, los menores de orden  $2 \times 2$  no nulos son

$$\begin{vmatrix} 12 & 32 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, las variables  $z_1$  y  $z_2$  pueden tomarse como las *variables*  $x$  del teorema, y la variable  $z_3$  como la *variable*  $\alpha$ , del teorema; o,  $z_1$  y  $z_3$  como las *variables*  $x$  y  $z_2$  como la *variable*  $\alpha$ .

En cualquiera de los casos se cumple  $\det(D_x F(\bar{\alpha}, \bar{x})) \neq 0$  y se puede garantizar entonces:

- que en una vecindad abierta del punto  $z_3 = 1$  (el  $\bar{\alpha}$  del teorema) se pueden encontrar funciones  $z_1 = g^1(z_3)$  y  $z_2 = g^2(z_3)$ ; es decir, que se pueden expresar, localmente,  $z_1$  y  $z_2$  como funciones de  $z_3$ .
- que en una vecindad abierta del punto  $z_2 = 2$  (otra posibilidad del  $\bar{\alpha}$  del teorema) se pueden encontrar funciones  $z_1 = h^1(z_2)$  y  $z_3 = h^2(z_2)$ ; es decir, que se pueden expresar, localmente,  $z_1$  y  $z_3$  como funciones de  $z_2$ .

## 2. Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} 5z_1 - 3z_2 + 4z_3 = 29 \\ 10z_1 - 4z_2 + 8z_3 = 64 \end{cases}$$

Procedemos de manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior, con la ventaja que la linealidad afín de las funciones componentes determina la única matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 10 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

para cualquier punto  $(z_1, z_2, z_3)$ , lo cual puede ahorrarnos el trabajo de buscar un punto específico que resuelva el sistema, una vez garantizada

su existencia (en este caso basta observar que los planos no son paralelos). Sin embargo, puede tomarse, por ejemplo, el punto  $(6,3,2)$  para una aplicación formal del teorema de la función implícita y garantizar:

- que las variables  $z_1$  y  $z_2$  pueden expresarse en función de  $z_3$  (lo cual en este caso es fácil de hacer, por ejemplo aplicando la regla de Cramer)
- que las variables  $z_2$  y  $z_3$  pueden expresarse en función de  $z_1$  (también fácil de hacer).

El lector ya habrá advertido la coherencia de estos resultados con los que se usan en el álgebra lineal, exclusivamente para sistemas lineales. La matriz de coeficientes, coincide con la matriz jacobiana.

3. Las funciones de demanda marshalliana que se usan en la teoría del consumidor, y a las que ya nos hemos referido en el Problema 1.23, tienen garantizada su existencia gracias al teorema de la función implícita al aplicarse en las ecuaciones que resultan de las condiciones necesarias de primer orden en el problema de optimización de la función de utilidad de un consumidor, sujeto a la restricción de presupuesto. Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange considerando  $n$  bienes, se obtienen  $n + 1$  ecuaciones con  $2n + 2$  variables:

- las  $x_i$ , que representan las cantidades de los bienes;
- las  $p_i$  que representan los precios unitarios de los bienes;
- $I$  que representa el ingreso del consumidor; y
- $\lambda$  que es el multiplicador de Lagrange.

Si el jacobiano de ese sistema, en un punto de equilibrio, tiene rango  $n + 1$ , considerando las columnas correspondientes a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $\lambda$ <sup>1</sup>, entonces está garantizada la existencia de las funciones de demanda marshalliana

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y también de la función

$$\lambda = \lambda(p_1, p_2, \dots, p_n, I),$$

---

<sup>1</sup> Esta es una de las condiciones para que la función de utilidad sea "suficientemente buena" como se dijo en el Problema 1.23.

en una vecindad abierta en  $\mathbb{R}^{n+1}$  del vector  $(p, I)$ , correspondiente al punto de equilibrio.

### Observación 1.32

Un teorema muy vinculado con el de la función implícita, es el **teorema de la función inversa** que a continuación enunciamos:

**Teorema :** Sea la función  $F: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^q$  y  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^q$  tal que  $\bar{x} \in E$  y todas las primeras derivadas parciales de las  $q$  funciones componentes de  $F$  son continuas en  $E$ .

Si  $\det(DF(\bar{x})) \neq 0$ , entonces

– existe un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^q$ , con  $\bar{x} \in V$

– existe un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^q$ , con  $F(\bar{x}) \in W$

de modo que la función  $F: V \rightarrow W$  tiene inversa  $F^{-1}: W \rightarrow V$  que cumple

i)  $F^{-1}$  es continua

ii)  $F^{-1}$  es diferenciable

iii)  $\forall y \in W: DF^{-1}(y) = [DF(F^{-1}(y))]^{-1}$ .

Como podemos ver, este teorema nos da condiciones suficientes para garantizar *localmente* (en el abierto  $W$ ) la existencia de la función inversa de  $F$ . Es fácil e ilustrativo verificar que para el caso en que  $F$  sea lineal, la condición de  $\det(DF(\bar{x})) \neq 0$  coincide con la de tener  $F$  una matriz asociada inversible (de determinante no nulo).

Este teorema complementa lo visto en la Aplicación 1.31 para resolver problemas vinculados con la solución de sistemas de ecuaciones, fundamentalmente las no lineales. Además, por (iii), permite calcular la derivada de la función inversa (local) sin que sea necesario conocer explícitamente tal función. (Notar que un caso particular de esta fórmula matricial es la conocida fórmula para funciones reales de variable real, identificando las matrices de orden  $1 \times 1$  con los números reales:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Ejercicios 1.33**

1. Demostrar que las curvas  $IS$  y  $LM$  consideradas en la Aplicación 1.29 tienen pendientes negativa y positiva respectivamente.
2. En el modelo  $IS-LM$  de la Aplicación 1.29 obtener, siguiendo lo indicado en la Observación 1.30:

a)  $\frac{\partial Y}{\partial T_0}$  y  $\frac{\partial r}{\partial T_0}$

- b) Expresiones para  $dY$  y  $dr$  considerando que sólo se hacen cambios en el impuesto exógeno y en la oferta monetaria (simultáneamente). ¿Se pueden determinar sus signos si se conoce que  $dT_0 > 0$  y  $dM_0 > 0$ ? Verificar la coherencia de la respuesta con el análisis gráfico.

3. En un modelo macroeconómico se tiene:

$$Y = C(Y, p, m, \tau) + g \quad (\text{demanda})$$

$$Y = S(p, w) \quad (\text{oferta})$$

Siendo  $0 < C_Y < 1$ ,  $C_p < 0$ ,  $C_m > 0$ ,  $C_\tau < 0$ ,  $S_p > 0$ ,  $S_w < 0$ . Las variables endógenas son  $Y$  (ingreso) y  $p$  (precio).

Analizar empleando las derivadas parciales, la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, en una vecindad de un punto de equilibrio  $(p^*, Y^*)$ :

- a) Si la cantidad inicial de dinero del consumidor ( $m$ ) se incrementa, entonces tanto el ingreso como el precio se incrementan.
- b) Si la tasa de impuesto ( $\tau$ ) disminuye, entonces tanto  $Y$  como  $p$  disminuyen.

4. Sea el modelo económico

$$Y = \sqrt{Y+4} + \sqrt{Y+40} + \frac{8}{r} - 8r + 30 \quad (IS)$$

$$498 = 8Y - 4r + 20 \quad (LM)$$

donde:

$Y$ ,  $r$  son ingreso y tasa de interés respectivamente; 30 y 498 son los valores asignados a las variables exógenas  $G_0$  y  $M_0$  respectivamente.

Sabiendo que  $(\bar{Y}, \bar{r}) = (60, 0.5)$  es solución del modelo, calcular aproximadamente las variaciones de  $\bar{Y}$  y de  $\bar{r}$  si los valores de  $G_0$  y  $M_0$  cambian a 35 y 483 respectivamente, simultáneamente. Usar multiplicadores.

5. Dado el siguiente modelo

$$\begin{aligned} C &= 20 + 0.6Y - 0.4r && \text{(consumo)} \\ I &= 8 + 0.2Y - 0.3r && \text{(inversión)} \\ Y &= C + I && \text{(IS: condic. de equil.)} \end{aligned}$$

- Representar gráficamente las curvas de iso inversión y de iso ahorro.  
(Por definición ahorro =  $S = Y - C$ )
  - ¿Qué valores de  $r$  y de  $Y$  hacen que el ahorro y la inversión tengan, ambos, el nivel 20?
  - ¿Qué valores de  $r$  y de  $Y$  hacen que el ahorro y la inversión tengan, ambos, el nivel 16?
  - Obtener la ecuación de la curva  $IS$ , graficarla en el plano  $Y, r$  y vincularla con las respuestas dadas en (a), (b), y (c).
  - Elegir un punto cualquiera de  $IS$  y determinar las coordenadas correspondientes del punto al que se traslada, manteniendo el valor de  $r$ , cuando en el modelo el consumo exógeno se incrementa un 10%.
6. En un modelo económico las variables endógenas  $x_1, x_2$  están relacionadas con las variables exógenas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_3 \\ f_2(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_4 \end{aligned}$$

- Establecer las condiciones que garanticen obtener los multiplicadores  $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$   $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$ .
- Asumiendo que se cumplen las condiciones que se piden en (a), hallar  $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_4}$  y  $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}$ .

7. Sabiendo que  $F(x, y, u, v) = 0$ ,  $G(x, y, u, v) = 0$ , que  $F$  y  $G$  son diferenciables y que  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables de las variables independientes  $x$ ,  $y$ :

a) Demostrar que 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

b) Encontrar expresiones análogas para  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$

c) Si  $xu^2 + v = y^3$ ,  $2yu - xv^3 = 4x$ , encontrar  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

8. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy^3 - \frac{y^2}{x^2} = a \\ x^5 y^3 - xy = b \end{cases}$$

es claro que  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y}) = (4, 6, 1, 2)$  es solución de él.

a) Demostrar, con el teorema de la función implícita, que si se varían los valores de  $a$  y  $b$  en una bola abierta con centro  $(4, 6)$ , entonces las correspondientes soluciones para  $x$  y para  $y$ , del sistema, están dadas por funciones diferenciables de  $a$  y  $b$ .

b) Calcular los gradientes de esas funciones en  $(4, 6)$

c) Si  $a$  aumenta una pequeña cantidad, llamémosla  $r$ , y  $b$  disminuye  $r$ , ¿aumentan o disminuyen los valores de las soluciones para  $x$  y para  $y$  respecto de 1 y 2?

9. Sean los sistemas

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 = y_1 \\ 3x_1x_2 + 2x_1 - x_3^3 = y_2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = y_1 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 = y_2 \end{cases}$$

a) Analizar en cada uno de ellos si se puede garantizar que algunas variables  $x_i$  pueden expresarse como funciones de las  $y_i$  y de otra variable, en una vecindad del punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (16, 2, 0)$ .

b) Hacer explícitas algunas de las funciones correspondientes al análisis hecho en (a).